ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS VÍA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

OMAR ANDRÉS LATORRE SOLES

JOSÉ ANDRÉS SÁNCHEZ CARRASQUILLA

UNIVERSIDAD DEL CAUCA

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES, EXACTAS Y DE LA EDUCACIÓN

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

POPAYÁN

2009

ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS VÍA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

OMAR ANDRÉS LATORRE SOLES

JOSÉ ANDRÉS SÁNCHEZ CARRASQUILLA

Seminario de grado presentado como requisito parcial para obtener el titulo de Licenciado en Educación con Especialidad en Matemáticas

Director:

DR. CARLOS ALBERTO TRUJILLO SOLARTE

UNIVERSIDAD DEL CAUCA

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES, EXACTAS Y DE LA EDUCACIÓN

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

POPAYÁN

2009

CONTENIDOS

INTRODUCCIÓN

"La palabra problema proviene del griego "lanzar adelante". Un problema es un obstáculo arrojado ante la inteligencia para ser superado, una dificultad que exige ser resuelta, una cuestión que reclama ser aclarada. Todos vivimos resolviendo problemas: desde el más básico de asegurar la cotidiana subsistencia, común a todos los seres vivos, hasta los más complejos desafíos planteados por la ciencia y la tecnología. La importancia de la actividad de resolución de problemas es evidente; en definitiva, todo el progreso científico y tecnológico, el bienestar y hasta la supervivencia de la especie humana dependen de esta habilidad. No es de extrañar por lo tanto que la misma se haya convertido en un nuevo objeto de estudio, atrayendo por igual la atención de psicólogos, ingenieros, matemáticos, especialistas en inteligencia artificial y científicos de todas las disciplinas" [1]

Tener un problema significa "buscar conscientemente con alguna acción apropiada, una meta claramente concebida pero no inmediata de alcanzar" (Pólya 1962, citado en Santos 1997, p.29).

Creemos que la resolución de problemas se debe pensar como un recurso a través del cual se generan los contenidos de enseñanza y debe considerarse como parte integral del aprendizaje de las matemáticas y no como parte aislada de los programas de enseñanza. La matemática, además de estimular el razonamiento, debe ayudar a resolver las necesidades de la vida de un individuo como ciudadano preocupado y reflexivo para actuar en su medio. Es decir, el aprendizaje matemático a través de la resolución de problemas debe permitir al estudiante actuar en una variedad de situaciones de la vida diaria. Esto significa que las situaciones pedagógicas que se le presenten a los estudiantes deben exceder a aquellas exclusivamente diseñadas para el salón de

---

[1] **José Heber Nieto Said**. *Resolución de problemas matemáticos*. Talleres de Formación Matemática, Maracaibo, 26 al 31 de julio de 2004 p1

clase, así para que el estudiante aprenda en una actividad de resolución de problemas, dicha actividad debe permitirle utilizar conocimientos anteriores o aprender un nuevo concepto matemático, al hacer esto, el estudiante debe contextualizar la situación y discutir ideas para encontrar la solución a la problemática planteada y no quedar desarmado frente a ella. De esta forma resolver un problema permite no solo la adquisición o desarrollo de habilidades matemáticas, sino también, el uso de estrategias para utilizarlas en diversas situaciones.

Este documento ha surgido al hacer una reflexión de la enseñanza de la matemática y de los nuevos retos frente a la formación matemática de los estudiantes y el papel crucial que desempeña el maestro en esta situación educativa ya que puede ser una herramienta que brinde a al maestro la información necesaria para que se enriquezca conceptualmente y pueda encontrar un apoyo metodológico que le permita ver la matemática desde un punto de vista menos aislado de las situaciones de la vida real, y para que el docente pueda orientar sus clases haciendo uso de distintas estrategias encaminadas a la adquisición de conocimientos matemáticos a través de la resolución de problemas, de tal forma que el estudiante vea la importancia de resolver problemas no solo en el ámbito de la matemática sino en su vida cotidiana.

Es importante resaltar que la información suministrada trata los aspectos teóricos más importantes sobre la resolución de problemas, presenta ejemplos ilustrativos que servirán como guía para el uso de algunas estrategias en resolución de problemas. Es responsabilidad de los docentes adecuar, contextualizar y diseñar problemas en las diferentes temáticas.

1 JUSTIFICACIÓN

"En términos muy generales, la matemática es el estudio de los números y el espacio. Más precisamente, es la búsqueda de patrones y relaciones. Esta búsqueda se lleva a cabo mediante conocimientos y destrezas que es necesario adquirir, puesto que llevan al desarrollo de conceptos y generalizaciones utilizadas en la resolución de problemas de diversa índole.

Es importante reconocer que los estudiantes aprenden matemáticas interactuando con el entorno físico y social, lo cual lleva a la abstracción de las ideas matemáticas. Puesto que los estudiantes también aprenden investigando, se les debe dar oportunidades para descubrir y crear patrones, así como para explicar, describir y representar las relaciones presentes en esos patrones." [2]

Para la enseñanza de las matemáticas es muy importante que los docentes tengan la oportunidad de aplicar y experimentar nuevas metodologías que ayuden a desarrollar en el estudiante el pensamiento matemático y además el gusto del quehacer en la materia, es decir, que el estudiante pueda aplicar todos sus conocimientos y experiencias del mundo matemático en la solución de situaciones problema que se presenten en su vida cotidiana y de reflexionar a partir de sus propios errores en lugar de limitarse a reproducir contenidos pre elaborados. La habilidad de resolver problemas depende de cómo se enfrentan a un conjunto de datos y de la capacidad de analizar y comprender esa información para seleccionar las estrategias pertinentes para su resolución y la posterior comunicación de los resultados.

Según los propósitos generales del currículo de matemáticas establecidos por el Ministerio de Educación [7], los planes de estudios en cualquier institución deben cumplir en particular con lo siguiente:

---

[2] http://www. mineducacion.gov.co. Estándares Curriculares Para Matemáticas: Ministerio de Educación Nacional. Pág. 13

- Desarrollar en los estudiantes la habilidad para reconocer la presencia de las matemáticas en diversas situaciones de la vida real.
- Estimular en los estudiantes el uso creativo de las matemáticas para expresar nuevas ideas y descubrimientos, así como para reconocer los elementos matemáticos presentes en otras actividades creativas.

Además en la organización de los estándares en matemáticas, el planteamiento y resolución de problemas se considera como un aspecto importante que debe estar presente en la educación matemática.

Consideramos importante que el docente tenga las herramientas tanto conceptuales como físicas para el desarrollo de un cursillo en matemáticas orientado a la resolución de problemas y que con esto se generen formas de ver la matemática, aplicarla y orientarla según los nuevos requerimientos de nuestro sistema educativo donde las competencias ("saber hacer") hacen parte fundamental de la formación de los estudiantes. También es necesario que aprendan a desarrollar procesos ordenados, que sistematicen sus procedimientos de resolución, las dificultades que encuentran, que rescaten principios generales sobre los procesos de aprendizaje, los errores más comunes, etcétera, y que formulen conclusiones que den cuenta de ellos. Esperamos, que este documento tenga un impacto desde el punto de vista metodológico, que permita valorar la resolución de problemas como un eje transversal del currículum de matemáticas en la educación básica.

2 OBJETIVOS.

2.1 OBJETIVO GENERAL

Estudiar algunas de las teorías y metodologías usadas por George Polya y Alan Schoenfeld para la resolución de problemas, y la enseñanza de la matemáticas vía resolución de problemas.

2.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

Recopilar fundamentos teóricos propuestos por George Polya y Alan Schoenfeld, que permita conocer las técnicas, estrategias y heurísticas para la solución de problemas.

Mostrar ejemplos que ilustren las metodologías usadas por George Polya y Alan Schoenfeld y las diferentes heurísticas desarrolladas por estos autores.

Elaborar un cursillo sobre resolución de problemas para ser implementado en la red de educación virtual del proyecto **REDUMAC**

3 EL CONCEPTO DE PROBLEMA.

Muchas son las definiciones o concepciones que se dan de problema dentro del marco de las matemáticas como en otros campos del conocimiento. Observemos algunas:
Para Polya en su libro Mathematical Discovery, tener un problema significa "*buscar conscientemente con alguna acción apropiada, una meta claramente concebida pero no inmediata de alcanzar*" (Polya 1962, citado en Santos 1994, p.30).

Autores como Schoenfeld exponen que tener un problema implica una tarea que es difícil para el individuo que la está intentando resolver y esta dificultad debe ser una prueba más intelectual que computacional[3]. (Schoenfeld, 1985, p.74)

Se considera problema a "toda situación en la que hay un planteamiento inicial y una exigencia que obliga a transformarla". Se añade como condición que "la vía de solución tiene que ser desconocida y que la persona quiere realmente realizar la transformación". (Citado en Estrategias de resolución de problemas en la escuela[4])[10]

En estos ejemplos se notan claramente dos aspectos importantes: una tarea o un planteamiento inicial y una acción o transformación de esa tarea o planteamiento; aunque más allá de esos dos

---

[3] En este caso se habla de tarea matemática en la cual existen dificultades para encontrar la solución ya que no existe en el momento un camino o esquema para encontrar dicha solución. Así también hace una diferencia entre ejercicio y problema, refiriéndose al ejercicio como una tarea meramente computacional, es decir, algorítmica.

[4] **Rizo Cabrera Celia, Campistrous Pérez Luis. Relime Vol. 2, Núm.3, noviembre, 1999 pp.31-45**

planteamientos evidentes hay unos requerimientos implícitos y son: desconocer el camino, los recursos necesarios para solucionar el problema, además querer realizar esa transformación, es decir, el querer resolver dicho problema. Entonces podemos ver que para que exista un problema se deben presentar las siguientes situaciones:

- La existencia de al menos una persona para la cual haya una tarea o una situación que represente un problema.
- El camino para resolver tal situación no existe o las técnicas generalmente usadas no funcionan.
- Un interés de transformar o un deseo de realizar la transformación del problema, es decir, que exista una motivación para querer resolver el problema y no abandonarlo a medida que se agotan los caminos para encontrar la solución.

Dado lo anterior podemos hacer algunas diferencias entre ejercicio y problema, ya que muchas veces en la actividad matemática, los ejercicios escolares presentados a los estudiantes en los diferentes libros de texto no cumplen con las características antes mencionadas, puesto que generalmente para tales "problemas" existe un camino para su solución y este se encuentra inmerso generalmente en la temática planteada por el docente de antemano, convirtiéndose en una aplicación de un contenido establecido durante las clases orientadas por él, pero creemos que esto no nos debe desmotivar a una enseñanza de la matemática vía resolución de problemas, sino por el contrario debe ser una tarea del docente encontrar la manera de que tales ejercicios se puedan presentar en una verdadera forma de problema donde el estudiante esté en una situación en la cual no encuentre un camino ya establecido o por lo menos no lo vea explícitamente en el momento y esté obligado a explorar de diversas maneras, a sacar sus propias conclusiones y sobre todo se vea motivado a querer dar una solución satisfactoria a tal situación problemática.

Aunque se ve una meta clara en lo anteriormente expuesto hay muchos factores que influyen en la consecución de ese objetivo, pues, está explicita la situación de los conocimientos previos del estudiante y las habilidades en el área, refiriéndonos a que lo que puede llegar a ser un ejercicio para uno, para otro si puede estar en la categoría de problema y como sea su actitud frente la tarea planteada, es decir, que si ve el problema como tal, también tenga la necesidad de resolverlo y esté dispuesto a hacerlo.

En el libro **La solución de problemas** [8] pág. 205-209 se exponen algunas sugerencias de cómo reducir la probabilidad para que los problemas planteados por el profesor no sean solo ejercicios para los alumnos, las cuales nos parecen importantes tener en cuenta para el objeto de nuestra discusión.

ALGUNOS CRITERIOS QUE PERMITEN CONVERTIR LAS TAREAS ESCOLARES EN PROBLEMAS EN VEZ DE EN SIMPLES EJERCICIOS

En el planteamiento del problema

1. Plantear tareas abiertas, que admitan varias vías posibles de solución e incluso varias soluciones posibles, evitando las tareas cerradas.
2. Modificar el formato o definición de los problemas, evitando que el alumno identifique una forma de presentación con un tipo de problema.
3. Diversificar los contextos en que se plantea la aplicación de una misma estrategia, haciendo que el alumno trabaje los mismos tipos de problemas en distintos momentos del currículo y ante contenidos conceptuales diferentes.
4. Plantear las tareas no sólo con un formato académico sino también en escenarios cotidianos y significativos para el alumno, procurando que el alumno establezca conexiones entre ambos tipos de situaciones.
5. Adecuar la definición del problema, las preguntas y la información proporcionada a los objetivos de la tarea, utilizando, en distintos momentos, formatos más o menos abiertos, en función de esos mismos objetivos.
6. Utilizar los problemas con fines diversos durante el desarrollo o secuencia didáctica de un tema, evitando que las tareas prácticas aparezcan como ilustración, demostración o ejemplificación de unos contenidos previamente presentados al alumno.

Durante la solución del problema

7. Habituar al alumno a adoptar sus propias decisiones sobre el proceso de solución, así como a reflexionar sobre ese proceso, concediéndole una autonomía creciente en ese proceso de toma de decisiones.

8. Fomentar la cooperación entre los alumnos en la realización de las tareas, pero también incentivar la discusión y los puntos de vista diversos, que obliguen a explorar el espacio del problema para confrontar las soluciones o vías de solución alternativas.
9. Proporcionar a los alumnos la información que precisen durante el proceso de solución, realizando una labor de apoyo, dirigida más a hacer preguntas o fomentar en los alumnos el hábito de preguntarse que a dar respuesta a las preguntas de los alumnos.

En la evaluación del Problema

10. Evaluar más los procesos de solución seguidos por el alumno que la corrección final de la respuesta obtenida. O sea, evaluar más que corregir.
11. Valorar especialmente el grado en que ese proceso de solución implica una planificación previa, una reflexión durante la realización de la tarea y una autoevaluación por parte del alumno del proceso seguido.
12. Valorar la reflexión y profundidad de las soluciones alcanzadas por los alumnos y no la rapidez con la que son obtenidas.

4 EL MÉTODO DE POLYA

George Polya en sus estudios, estuvo interesado en el proceso del descubrimiento, o cómo es que se derivan los resultados matemáticos. Advirtió que para entender una teoría, se debe conocer cómo fue descubierta. Por ello, su enseñanza enfatizaba en el proceso de descubrimiento aún más que simplemente desarrollar ejercicios apropiados.

Pólya identifica cuatro etapas fundamentales en las cuales los métodos heurísticos juegan un papel muy importante; de manera general y simple estas etapas son las siguientes:

Comprender el problema: En esta fase se plantean preguntas las cuales nos llevan a identificar las incógnitas, los datos y las condiciones del problema. Algunas de esas preguntas pueden ser:

¿Entiendes todo el enunciado del problema?
¿Puedes replantear el problema en tus propias palabras?
¿Cuál es la incógnita?
¿Cuales son los datos?
¿Cuál es la condición?
¿Es la condición suficiente para determinar la incógnita?
¿Es suficiente?
¿Redundante?
¿Contradictoria?

Concebir un plan: Una vez determinadas las condiciones del problema, la relación entre los datos y las incógnitas, el siguiente paso será examinar los conocimientos previos, relacionar el problema con problemas conocidos y similares o problemas auxiliares que te ayuden a resolverlo y así establecer un plan de solución. En esta fase se pueden plantear las siguientes preguntas:

¿Se ha encontrado con un problema semejante?

¿Ha visto el mismo problema planteado de manera ligeramente diferente?

¿Conoce un problema relacionado con este?

¿Conoce algún teorema que le pueda ser útil?

¿Puede enunciar el problema de otra forma?

Evaluar su plan

¿Está convencido de su plan?

¿Utiliza todos los datos, utiliza todas las condiciones?

¿Puedes decir por qué haces cada cosa?

¿El problema tiene diversas partes? ¿Cuáles?

¿Qué relación hay entre los datos?

¿Cuáles datos vas a utilizar primero?

Ejecución del plan: Llevar acabo el plan escogido comprobando cada uno de los pasos hasta solucionar el problema completamente, de ser posible, o hasta donde este permita desarrollarlo, luego considerar un nuevo plan. En esta fase se pueden plantear las siguientes preguntas:

¿Puede Ud. ver claramente que el paso es correcto?

¿Puede Ud. demostrarlo?

Examinar la solución obtenida: **Una** vez obtenida la solución del problema, realiza una revisión de cada uno de los pasos, para verificar que sean correctos, ya que puede haber errores si el razonamiento es demasiado largo y enredado, luego ver si se puede resolver de forma diferente y también si se puede generalizar la solución. En esta fase se pueden plantear las siguientes preguntas:

¿Es tu solución correcta?

¿Puede Ud. Verificar el resultado?

¿Puede Ud. Verificar el razonamiento?

¿Puede obtener el resultado en forma diferente?

¿Identificas una solución más sencilla?

¿Puede verlo de golpe?

¿Puede Ud. Emplear el resultado o el método en algún otro problema?

¿Puede ver cómo extender tu solución a un caso general?

¿Se le han ocurrido otros problemas mientras resolvía éste?

Veamos algunos ejemplos y el uso de la metodología de Pólya

Problema 1:

Algunos números enteros positivos tienen una propiedad muy especial: se pueden escribir como la diferencia de dos cuadrados perfectos ¿Cuáles son esos números?

Comprender el problema:

Después de leer el problema, podemos mirar lo siguiente.

El número 5 tiene propiedad especial; puede escribirse como la diferencia de dos cuadrados: $5 = 3^2 – 2^2$. Encuentra otros números que cumplan con esta característica y mira si ellos tienen un patrón de formación o pertenecen a algún conjunto numérico que puedas caracterizar.

El problema nos pregunta por un grupo de números que tiene como característica común: ser iguales a la diferencia de dos cuadrados perfectos.

Crear un plan:

Encontremos los cuadrados de los números más pequeños y hagamos las posibles diferencias entre ellos, estos resultados los colocamos un una tabla para tratar de observar u patrón de comportamiento.

Poner en práctica un plan:

Construyamos la tabla de los primeros números que se escriben como diferencia de dos cuadrados.

	0	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144	169
0	0	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144	169
1			3	8	15	24	35	48	63	80	99	120	143	168
4				5	12	21	32	45	60	77	96	117	140	165
9					7	16	27	40	55	72	91	112	135	160
16						9	20	33	48	65	84	105	142	153
25							11	24	39	56	75	96	119	144
36								13	24	45	64	85	108	133
49									15	32	51	72	95	120
64										17	36	57	80	105
81											19	40	63	88
100												21	44	69
121													23	48
144														25

Considerando la anterior tabla notamos la presencia en ella, de los primeros impares en la diagonal principal, por ejemplo, y los primeros múltiplos de cuatro en la diagonal que está encima de la principal, por ejemplo. Se observa también que no se presenta otro tipo de números diferente a los mencionados (¿Cuáles son estos?).

Luego podemos conjeturar que los números que se pueden expresar como la diferencia de dos cuadrados perfectos son de la forma 2n+1 y 4n.

Visión retrospectiva:

Analizando el caso particular dado en el planteamiento del problema, notamos que este se cumple pues el número cinco es impar, así mismo observamos el procedimiento para otros números como el 16, y establecemos que este número es igual a la diferencia del cuadrado de 5 o el de 3.

Luego de hacer este análisis, surge la necesidad de demostrar que estos números si se pueden escribir como diferencia de dos cuadrados. También aparece un interrogante muy importante que apunta en la siguiente dirección: dado un número y verificando que este pertenece a los dos tipos expuestos en la solución, ¿Cuáles son los dos cuadrados que permiten obtenerlo como diferencia de ellos?

Para responder a la pregunta anterior puede usted también considerar la elaboración de tablas.

Por ejemplo:

$3 = 2^2 - 1^2$ $\qquad$ $4 = 2^2 - 0^2$

$5 = 3^2 - 2^2$ $\qquad$ $8 = 3^2 - 1^2$

$7 = 4^2 – 3^2$ $12 = 4^2 – 2^2$

$9 = 5^2 – 4^2$ $16 = =5^2 – 3^2$

¿Identifica algún patrón?

Demostremos que un número impar se puede escribir como diferencia de dos cuadrados.

Un número impar es de la forma C = 2n + 1, además los impares se obtiene al restar dos cuadrados de números consecutivos, sean ellos x, y, x – 1, Luego:

$2n + 1 = x^2 - x^2 + 2x – 1$

$(2n+2) / 2 = X$

$X = n + 1$

$C = 2n + 1 = (n + 1)^2 – n^2$

Luego existen dos enteros x = n + 1 y x – 1 = n que al ser elevados al cuadrado y sus resultados restarse, arrojan como diferencia C = 2n + 1.

Demostremos que un múltiplo de cuatro se puede escribir como diferencia de dos cuadrados.

Si C es un múltiplo de 4 es de la forma C = 4n, además los múltiplos de 4 se obtienen al restar dos cuadrados de números de la forma x y x – 2, así:

$4n = x^2 –x^2 +4x – 4$

$4n = 4x – 4$

$X = n + 1$

$4n = (n + 1)^2 – (n - 1)^2$

Luego existen dos enteros x = n + 1, y x – 2 = n – 1 que al elevarlos al cuadrado y sus resultados restarse, arrojan como diferencia un múltiplo de C = 4n.

Falta demostrar que estos números son los únicos representables como diferencia de dos cuadrados.

¿Por qué los pares que no son múltiplos de 4 no se pueden representar como diferencia de dos cuadrados?

Problema 2:
Un granjero amarra un chivo en la esquina exterior de un establo de 10m de largo por 20m de ancho. La cuerda con que lo ata es de 25 metros. El chivo puede pastar en cualquier lugar fuera del establo hasta donde la cuerda alcance. ¿Cuál es la medida del área donde el chivo puede pastar?

Comprender el problema:

En esta etapa es necesario revisar cuales son los datos que proporciona el problema. Preguntas como: ¿Qué datos tengo?, ¿Cuál es la incógnita? o si los datos suministrados son suficientes.

Así para nuestro problema tenemos:

¿Qué datos tengo?

El establo forma un rectángulo de 10mx20m, es decir, un área de 200 m^2, también la longitud de la cuerda atada a un extremo del establo nos dice que el chivo puede describir una circunferencia de radio 25m.

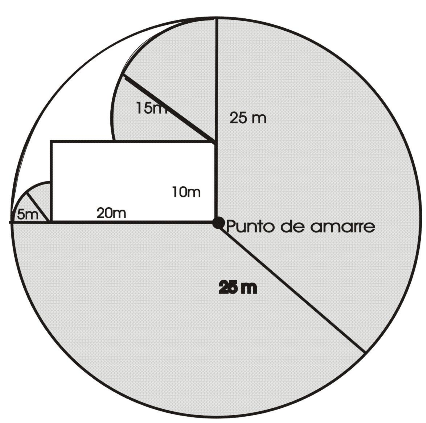
¿Cuál es la incógnita?

Es necesario encontrar el área de pastoreo y tener en cuenta el establo donde está atado el chivo.

Para encontrar la solución si es suficiente con estos datos.

Crear un plan:

Para la mayoría de problemas geométricos será necesario realizar un esquema o gráfico que me proporcione un mejor entendimiento del problema y pueda obtener una solución adecuada a las condiciones del problema.



¿Conoce algún teorema o regla que podría ayudar a solucionarlo?

Según el diagrama anterior podríamos resolver el problema si conocemos: las áreas del círculo, del cuadrado o también la de un sector circular.

Dado lo anterior una solución podría ser encontrada realizando lo siguiente

Encontrar el área de los ¾ de circunferencia de radio 25m.

Encontrar el área de los ¼ de circunferencia de radio 5m y 15m

Sumar las tres áreas encontradas

Ejecución del plan

Sea A_p: el área total de pastoreo.

$$A_p = \frac{3\pi(25m)^2}{4} + \frac{\pi(15m)^2}{4}\frac{\pi(5m)^2}{4} = \frac{625\pi m^2 + 225\pi m^2 + 25\pi m^2}{4}$$

$$A_p = \frac{2125}{4}\pi m^2 = 531.25\pi m^2 = 1668.9711\mathrm{m}^2$$

El área de pastoreo del chivo será de 1688.97 m^2.

Visión retrospectiva:

En este caso se debe hacer una reflexión si esta solución es la correcta, si no hay "huecos" en el razonamiento o en la teoría conocida, además, es una buena oportunidad para comparar los cálculos realizados en tu respuesta. Así por ejemplo: la respuesta obtenida no podría ser mayor que el área total de la circunferencia de radio 25m ni mayor a 1763,49 m^2.

Otro punto importante es revisar si existe otro camino para obtener la respuesta y si al hacerlo llego al mismo resultado.

Finalmente es importante responder la siguiente pregunta: *¿cómo extender tu solución a un caso general?*

Para este caso particular que pasa si cambiamos la forma del establo por un círculo u otra figura geométrica. ¿La solución se obtendría de la misma forma?

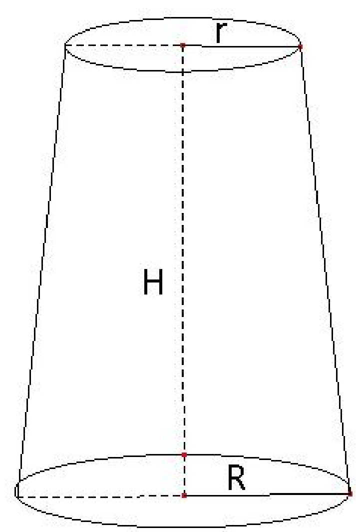
5 ALGUNAS HEURISTICAS DE POLYA.

5.1 USANDO ANALOGÍAS.

Consiste en encontrar un problema análogo más sencillo, el cual nos ayuda con la solución de nuestro problema inicial, dándonos ideas de cómo solucionarlo, ya sea utilizando el método o el resultado o los dos al mismo tiempo; aunque en muchos casos la solución de este problema análogo no la podremos utilizar inmediatamente esto nos lleva a transforma la solución y modificarla, para así buscar la posible solución a nuestro problema original.

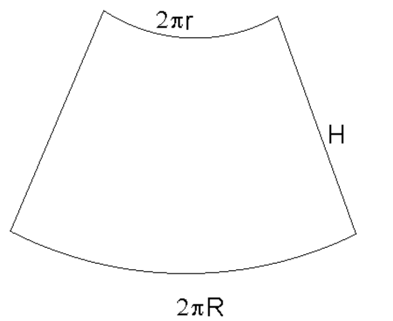
Ejemplo

Calcular el área lateral del tronco de cono que aparece en la figura



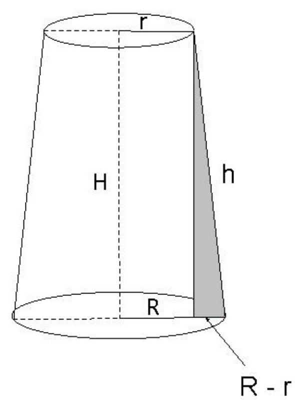
Solución.

El área lateral corresponde al siguiente desarrollo,



Se parece a un trapecio, el área del trapecio es:

$$A = \frac{(base\ menor\ + base\ mayor)altura}{2}$$



H = lado generatriz del tronco del cono;

$$h = \sqrt[2]{H^2 + (R-r)^2}$$

Luego;

$$A = \frac{2\pi R + 2\pi r}{2}\sqrt[2]{H^2 + (R-r)^2}$$

$$A = \pi(R+r)\sqrt[2]{H^2 + (R-r)^2}$$

5.2 USANDO DEFINICIONES

Esta metodología consiste en utilizar las definiciones de términos técnicos y llevar su significado a términos más conocidos y mas sencillos de entender, en otras palabras eliminamos dicho termino técnico, pero introducimos en su lugar nuevos elementos y nuevas relaciones que nos llevan a entender mejor el problema, obteniendo así un nuevo enunciado del problema.

Ejemplo.

Hallar todos los números abundantes, deficientes y perfectos desde el 1 hasta el 100. Construir una tabla para chequear su comportamiento.

a. *¿Qué patrones observa usted?*
b. *¿Cuántos números menores que 100 son perfectos?*
c. *¿Hay más números abundantes o deficientes?*
d. *¿Algún número cuadrado es perfecto?*
e. *¿Cuáles son números pares y cuáles impares?*

Utilizamos las siguientes definiciones:

Números Deficientes: Un número natural es deficiente si es mayor que la suma de todos sus divisores positivos (excluyendo él mismo). Por ejemplo el 9 es número deficiente porque la suma de sus divisores excluyendo el 9 es: 1 + 3 = 4 que es menor que 9.

Números Abundantes: Un número natural es abundante si es menor que la suma de todos sus divisores positivos (excluyendo él mismo). Por ejemplo el 12 es un número abundante, porque la suma de sus divisores excluyendo el 12 es: 1 + 2 + 3 + 4 + 6 = 16 que es mayor que 12.

Números Perfectos: Un número natural es perfecto si es igual a la suma de todos sus divisores positivos (excluyendo él mismo). Por ejemplo el 6 es un número perfecto, porque la suma de sus divisores excluyendo el 6 es: 1 + 2 + 3 = 6 que es igual a 6.

6	28	**Perfectos**

12	18	20	24	30	36	40	42	48	54	56	**Abundantes**
60	64	66	70	72	80	84	88	90	96	100	

2	3	4	5	7	8	9	10	11	13	14	15	16	17	19	
21	22	23	25	26	27	29	31	32	33	34	35	37	38	39	
41	43	44	45	46	47	49	50	51	52	53	55	57	58	59	**Deficientes**
61	62	63	65	67	68	69	71	73	74	75	76	77	78	79	
81	82	83	85	86	87	89	91	92	93	94	95	97	98	99	

Dadas las tablas anteriores podemos hacer las siguientes observaciones

a. * Todos los números primos son deficientes.
   * Los cuadrados de los números primos son deficientes.
   * Los cubos de los números primos son deficientes.
   * Todos los múltiplos de 12 son abundantes.
   * Todos los múltiplos de 18 son abundantes.
   * Todos los múltiplos de 20 son abundantes.
   * Todos los múltiplos de 30 son abundantes.

b. Hay dos números menores que 100 que son perfectos los cuales son el 6 y el 28.

c. Hay más números deficientes que abundantes.

d. Ningún número cuadrado es perfecto.

e. Todos los números abundantes son pares.
   Todos los números impares son deficientes.

5.3 DESCOMPONER Y RECOMPONER EL PROBLEMA

Consideremos el problema como un todo, esta forma de ver el problema no nos permite darle solución, entonces, vamos encontrando un detalle que nos parezca interesante, y luego otro y otro, y así descomponemos el todo en sus pequeñas partes las cuales nos llevan a ver el problema de manera más o menos diferente, lo mas importante es comprender el problema como un todo ; comprendiéndolo de esta manera veremos que puntos particulares pueden ser los más esenciales, para así examinarlos uno a uno, luego veremos cuales merecen un examen más a fondo, de esta forma iremos dando solución a nuestro problema. Una forma de realizar este proceso es considerar una de las siguientes condiciones:

Conservar la incógnita y cambiar los otros elementos (los datos y la condición).

Conservar los datos y cambiar los otros elementos (la incógnita y la condición).

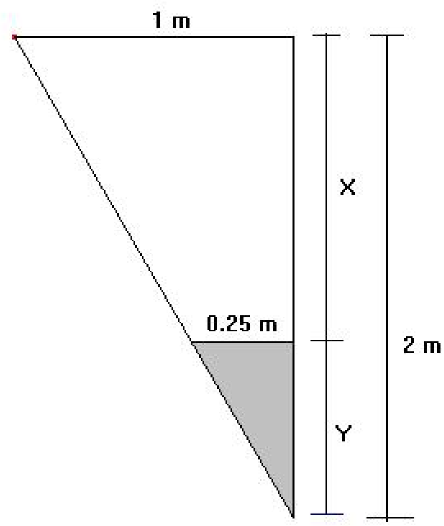
Cambiar a la vez la incógnita y los datos.

Ejemplo.

En un recipiente de forma cónica de 1 metro de radio y 2 metros de altura se vierte agua a una velocidad constante como se ilustra en la figura. En el instante en que el radio de la superficie del agua es 0,25 metros, ¿dicha superficie a qué distancia se encuentra de la superficie del cono?

Solución.

Para solucionar este problema lo llevamos a un problema más sencillo, el cual es resolver por semejanzas estos dos triángulos:



Primero hallamos el valor de Y y luego el de X;

$$\frac{Y}{2\ m} = \frac{0.25\ m}{1\ m}$$

$$Y = \frac{2\ m\ x\ 0.25\ m}{1\ m}$$

$$Y = \frac{0.5\ m^2}{1\ m}$$

$$Y = 0.5\ m$$

De ahí, tenemos que

$$X\ = 2\ \mathrm{m} - \mathrm{Y}$$

$$X\ = 2\ \mathrm{m} - 0.5\ \mathrm{m}$$

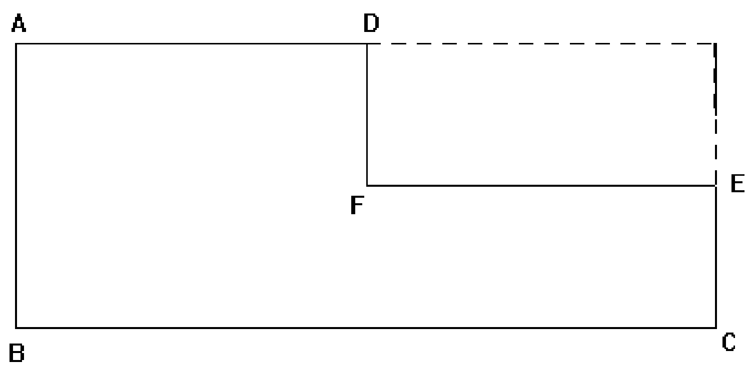
$$X = 1.5\ m$$

5.4 ELEMENTOS AUXILIARES

Consiste en introducir elementos que nos ayuden con la solución del problema por ejemplo en problemas de geometría podríamos utilizar líneas auxiliares para la solución, en un problema algebraico introduciríamos una incógnita auxiliar, o un teorema auxiliar, cuya demostración nos ayude en la solución de nuestro problema.

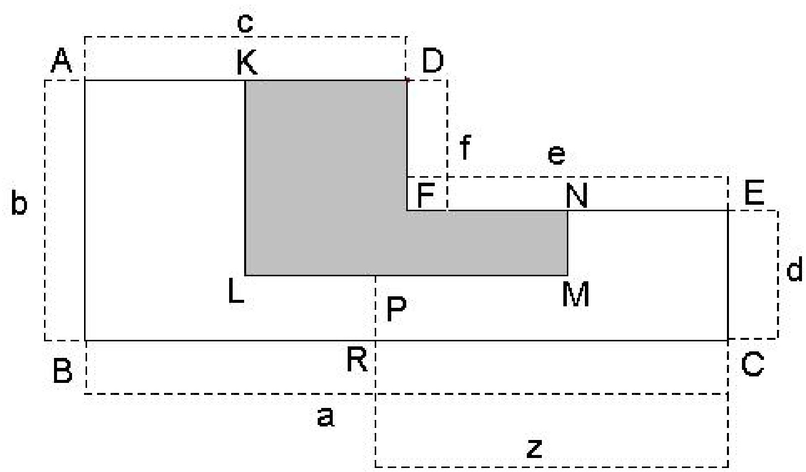
Ejemplo.

Existe un problema ya conocido: dividir una escuadra (o sea, un rectángulo del que se ha separado la cuarta parte) en cuatro partes iguales. Pruebe a dividir esta misma figura en tres partes, de manera que las tres sean iguales. ¿Es posible resolver este problema?



Solución.

El interés principal de este problema consiste en que para su resolución no pueden tomarse magnitudes a, b, c, d, e, cualesquiera, sino que deberán tener valores perfectamente determinados. En efecto, queremos que la escuadra sombreada sea igual a cada una de las que no lo están.



El lado LM es sin duda menor que BC; por lo tanto, deberá ser igual a AB. Por otra parte, LM debe ser igual a RC, o sea, LM = RC = b. Consiguientemente BR = a – z Pero, BR debe ser igual a KL y CE, por lo tanto, BR = KL = CE, o sea, a - b = d y KL = d De esto deducimos que a, b y d no pueden elegirse arbitrariamente. El lado d tiene que ser igual a la diferencia entre a y b. Pero esto es insuficiente. Veremos que todos los lados han de ser partes determinadas del lado a. Evidentemente, tenemos que PR + KL = AB o PR + (a - b) = b, es decir, PR = 2b - a. Comparando los lados correspondientes de las escuadras, la sombreada y la no sombreada de la derecha, obtendremos: PR = MN, es decir, PR = d/2 de donde d/2 = 2b - a. Si comparamos esta última igualdad con la a - b = d, veremos que b = 3/5 a y d = 2/5 a. Confrontando la figura sombreada y la de la izquierda de las no sombreadas vemos también que AK = MN, o sea, AK = PR = d/2 = 1/5 a. En esta forma nos convencemos que KD = PR = 1/5 a; por consiguiente, AD = 2/5 a. y a – AD = FE, es decir que FE = 3/5 a. Luego tenemos que AB – EC = DF de ahí DF = 1/5 a, en conclusión

- b = 3/5 a
- c = 2/5 a
- d = 2/5 a
- e = 3/5 a
- f = 1/5 a

5.5 EXAMEN DE DIMENSIONES

Es un método muy conocido para verificar formulas geométricas o físicas, el cual consiste en la verificación de las dimensiones. Por medio de esta metodología se puede verificar el resultado a medida que se va desarrollando, a la mitad de la solución y al final de la solución.

Ejemplo.

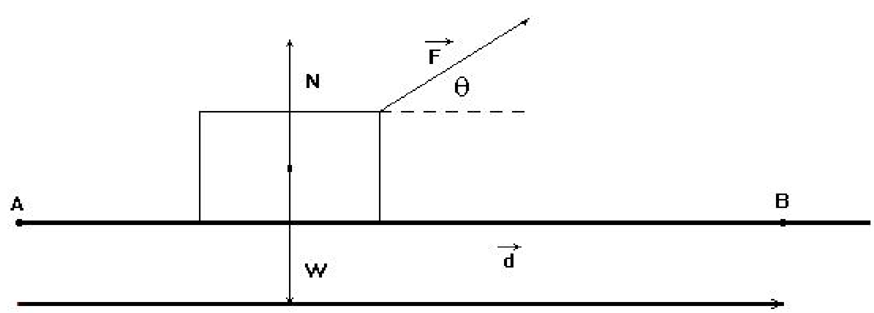
Que dimensiones tiene el Trabajo Físico?

Solución.

Supongamos una fuerza cualquiera ***F*** que actúa sobre un cuerpo que se desplaza en línea recta desde una posición A hasta B. Definimos el trabajo W efectuado por la fuerza F entra
A y B mediante la expresión:

$$W_{A-B} = Fd\cos\theta$$

Donde F es el valor de la fuerza, d el valor del desplazamiento entre los puntos A y B y θ el ángulo constante entre la dirección de la fuerza y la dirección del desplazamiento; en la figura se muestra gráficamente el significado de los términos. Dos de estas cantidades son valores de vectores y la otra es un número. Por lo tanto W es un escalar.



Las dimensiones físicas del trabajo son:

$$W = Fd\cos\theta$$

$$W = MLT^{-2}L$$

$$W = ML^{2}T^{-2}$$

$$[M]\ masa; [\ L\ ]\ longitud; [T]\ tiempo.$$

5.6 EXAMINE SU HIPÓTESIS

Muchas de las hipótesis que se plantean para solucionar un problema son correctas, pero puede ser un error tomarla por cierta simplemente por ser una hipótesis que se la ha ocurrido, lo mejor seria poner a prueba esa hipótesis y demostrarla o refutarla, para así darle solución al problema o conducirnos a otras hipótesis que nos lleven a dicha solución.

5.7 FIGURAS.

Consiste en realizar un dibujo o un gráfico que nos permita entender más el problema y nos ayude en el plan a desarrollar para la solución, esta heurística es muy útil para solucionar problemas geométricos, de construcciones geométricas, de física y en los cuales un gráfico nos ayude a ver y entender mejor el problema.

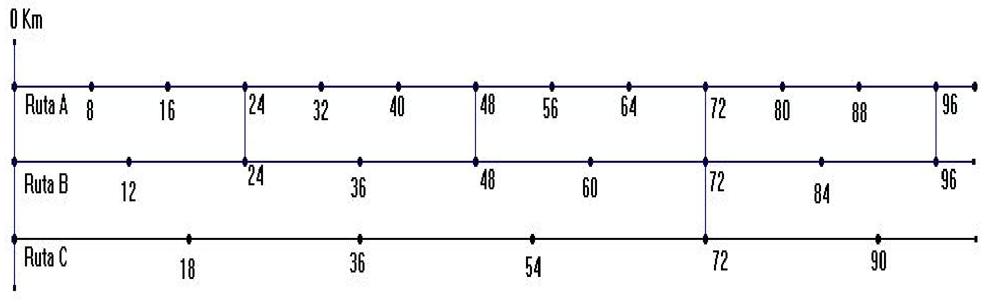
Ejemplo.

Por una vía circulan varias rutas de colectivos cuya terminal esta en el kilómetro cero, la línea A tiene paradas cada 8 Km, la línea B tiene paradas cada 12 Km.

a) *¿Cada cuántos Kilómetros coinciden las paradas?*
b) *Si la línea C tiene paradas cada 18 Km ¿cada cuántos Kilómetros coinciden las tres paradas?*

Solución.

Realizamos un grafico para analizar mejor el problema.



a) De acuerdo a la grafica realizada las rutas A y B coinciden cada 24 Km.
b) Las tres rutas coinciden cada 72 Km.

Realizando de forma analítica este mismo problema nos llevaría a utilizar el mínimo común múltiplo (m.c.m.) entre 8 y 12 para la parte a y el m.c.m. entre 8, 12 y 18 para la parte b.
Así:

a)

8	12	2	
4	6	2	
2	3	2	$2^3\ x\ 3 = 24$
1	3	3	
	1		

b)

8	12	18	2	
4	6	9	2	
2	3	9	2	$2^3\ x\ 3^2 = 72$
1	3	9	3	
	1	3	3	
		1		

5.8 GENERALIZACIÓN

Consiste en pasar de lo particular a lo general, algunas veces es más fácil resolver un problema más general que uno particular. En otras palabras se busca un problema que sea más extenso y contenga nuestro problema original y el cual sea más fácil de solucionar.

Un ejemplo de esta heurística es la inducción matemática.

5.9 INDUCCIÓN E INDUCCIÓN MATEMÁTICA

Es un modo de demostración que parte de ejemplos particulares para demostrar leyes generales, mediante razonamientos lógicos se parte de unos ejemplos particulares y se combinan para llegar a la demostración o descubrimiento de una ley general. El principio de inducción matemática se trabaja en la siguiente forma:

Una proposición p(n) es verdadera para todos los valores de la variable n si se cumplen las siguientes condiciones:

Paso 1.- La proposición p(n) es verdadera para n = 1, o bien, p(1) es verdadera.

Paso 2.- Hipótesis de Inducción. Se supone que p(k) es verdadera , donde k es un numero natural cualquiera.

Paso 3.- Tesis de Inducción. Se demuestra que p(k + 1) es verdadera, o bien, p(k) verdadera implica que p(k + 1) verdadera.

La Inducción Matemática consiste en los tres pasos anteriores.

Si se necesita demostrar la validez de una proposición p(n) para todos los valores naturales n, entonces es suficiente que se cumplan: Paso 1, Paso 2 y Paso 3

Ejemplo.

Demuestre que la suma de los n primeros números naturales puede hallarse usando la formula

$$\frac{n(n+1)}{2}$$

Solución.

Verifiquemos que esto se cumple para los primeros números naturales

Para n=1.

$$\frac{1(1+1)}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

Para n=2, 1 + 2 = 3

$$\frac{2(2+1)}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

Para n=3, 1 + 2 + 3 = 6

$$\frac{3(3+1)}{2} = \frac{12}{2} = 6$$

Supongamos que la formula se cumple para n = k, es decir que es verdadera para algún k

$$\sum_{n=1}^{k} n = \frac{k(k+1)}{2}$$

Demostremos que se cumple para n = k+1, es decir:

$$\sum_{n=1}^{k+1} n = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

Por la hipótesis

$$\sum_{n=1}^{k} n = \frac{k(k+1)}{2}$$

se cumple para n= k, así que si sumamos el siguiente numero k+1 obtenemos

$$\left(\sum_{n=1}^{k} n\right) + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + k + 1 = \frac{k(k+1) + 2(k+1)}{2}$$

Luego factorizando

$$\frac{(k+2)(k+1)}{2} = \sum_{n=1}^{k+1} n$$

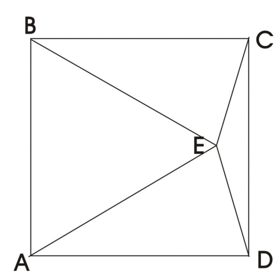
Luego queda demostrado que la suma de los n primeros números cumple la formula dada.

5.10. NOTACIÓN

Es importante tener una notación clara y que sea que bien escogida de acuerdo a las condiciones del problema, para hacerlo más fácil y más entendible. Una buena escogencia de la notación nos lleva a entender mejor el problema y a contextualizarlo, para así lograr una solución.

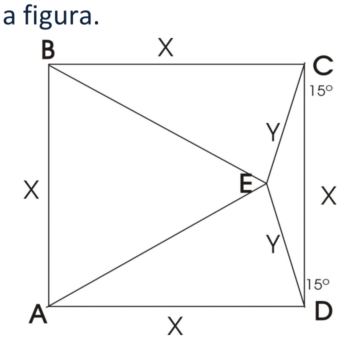
Ejemplo

En la figura, ABCD es un cuadrado con ángulos ECD y EDC de medidas 15° muestre que el triangulo AEB es equilátero



Solución

Nombremos algunas partes de la figura.



En ella observamos lo siguiente:

1) $\overline{AB} \equiv \overline{BC} \equiv \overline{AD} \equiv \overline{CD} = X$

2) $\measuredangle ECD \equiv \measuredangle EDC = 15^{\circ}$ y por tanto el triangulo Δ DEC es isósceles

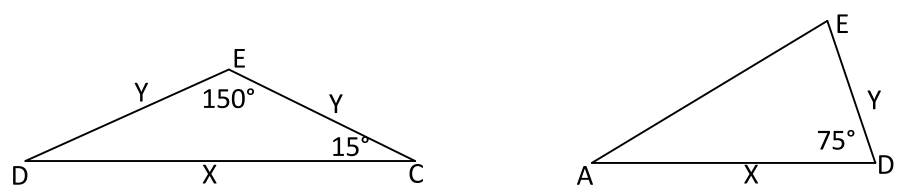
Se debe demostrar que $\overline{AB} \equiv \overline{AE} \equiv \overline{BE} = X$

Dada la condición 2 podemos señalar que $\overline{EC} \equiv \overline{ED} = Y$ además $\measuredangle ECB \equiv \measuredangle EDA = 75°$

por el criterio ALA (ángulo – lado – ángulo) $\Delta AED \equiv \Delta ECB°$, así $\overline{\boldsymbol{BE}} \equiv \overline{\boldsymbol{AE}}$.

Falta probar que $\overline{\boldsymbol{BE}} = \boldsymbol{X}$ o $\overline{\boldsymbol{AE}} = \boldsymbol{X}$

Observemos los triángulos ΔAED Y ΔDEC



Del triangulo Δ*DEC*

$$\frac{Y}{Sen\,15°} = \frac{X}{Sen\,150°}$$

$$Y = \frac{XSen\,15°}{Sen\,150°}$$

$$Y = \frac{X(\sqrt{6} - \sqrt{2})/4}{\mathbf{1}/2} = \frac{2X(\sqrt{6} - \sqrt{2})}{4}$$

Del triangulo Δ*ADE*

$$(AE)^2 = Y^2 + X^2 - 2XYCos75°$$

$$(AE)^2 = \left(\frac{2X(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{4}\right)^2 + X^2 - 2X\left(\frac{2X(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{4}\right)\left(\frac{(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{4}\right)$$

$$= \left(\frac{2X(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{4}\right)^2 + X^2 - (2X)^2\frac{(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2}{4^2}$$

$$= \frac{(2X)^2(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2}{4^2} + X^2 - (2X)^2\frac{(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2}{4^2}$$

$$(AE)^2 = X^2$$

$$\text{De donde} \quad (AE) = X$$

Y como $\overline{BE} \equiv \overline{AE}$ = X = $\overline{AB}$ podemos afirmar que *el triángulo ΔAEB es equilátero*.

5.11. PARTICULARIZACIÓN

Consiste en particularizar el problema, es decir, pasar de lo general a lo particular lo cual será útil para la solución del problema.

Ejemplo

Encontrar una fórmula particular para:

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{35} + \cdots \frac{1}{4n^2-1} =$$

Solución.

Conviene usar algunos casos particulares para tratar de generalizar, Observemos

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{15} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$$

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{15}+\frac{1}{35}=\frac{3}{7}$$

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{15}+\frac{1}{35}+\frac{1}{63}=\frac{4}{9}$$

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{15}+\frac{1}{35}+\frac{1}{63}+\frac{1}{99}=\frac{5}{11}$$

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{15}+\frac{1}{35}+\frac{1}{63}+\frac{1}{99}+\frac{1}{143}=\frac{6}{13}$$

Siguiendo la secuencia dada en los casos particulares deducimos que la forma general para la serie será:

$$\frac{n}{2n+1}$$

La demostración de esta formula la dejamos al lector (sugerimos usar inducción matemática).

5.12. PLANTEO DE LA ECUACIÓN

Consiste en emplear símbolos matemáticos para expresar las condiciones del problema, esto tiene estrecha relación con la notación antes vista. Es llevar de lenguaje común a lenguaje matemático en este método es importante la buena traducción, es decir, el buen planteo del problema, ya que un buen planteo de nuestra ecuación nos llevara a la mejor concepción del problema y así poder solucionarlo.

Ejemplo

José trabaja en una librería después de sus horas de clase, su salario es de $6.000 por hora, si trabaja 15 horas. Si trabaja más de 15 horas se le paga su salario mínimo más la mitad por cada hora extra. ¿Cuántas horas debe trabajar si quiere ganar $135.000 durante una semana?

Solución.

Expresemos algebraicamente la información usando como variables:

x: Número de horas en horario normal.

y: Número de horas en horario extra.

Debemos encontrar x e y de tal forma que la cantidad de horas normales más las extras sume $135000:

$6.000X + 9.000y = 135\ 000$ como José trabaja 15 horas en horario normal en la semana.

$$6.000*15 + 9.000\,y = 135\ 000$$

$$9.000y = 135\ 000 - 90.000$$

$$y = \frac{45.000}{9.000}$$

$$y=5$$

Luego José deberá trabajar 5 horas extras en la semana para ganar $135.000.

5.13. PROBLEMA AUXILIAR

En esta heurística se busca un problema para solucionarlo no simplemente por solucionar sino por que nos lleve o ayude a solucionar nuestro problema inicial que es lo que realmente nos interesa, la escogencia de este problema auxiliar es importante ya que la solución de este nos debe permitir llegar a la solución del original o por lo menos nos resulte algo de provecho para dicha solución, esta metodología puede tener una desventaja, la cual es que nos demoremos más en hallar la solución del problema original tratando de solucionar el problema auxiliar y en ocasiones ésta solución no puede ayudarnos en nada a nuestro problema original.

Ejemplo

Aumentando la base de un triángulo en 6 m y la altura en 4 m el área aumenta en $120m^2$*, en cambio aumentando la base en 2 m y la altura en 9 m el área aumenta en* $160m^2$*. Calcular la base y la altura del triángulo.*

Solución.

Debemos revisar lo que pasa antes de la primera y segunda variación de las medidas de los lados del triangulo. Sabemos que:

$$A = \frac{b \cdot a}{2} \quad (1)$$

1ra variación:

$$A + 120 = \frac{(b+6) \cdot (a+4)}{2} \quad (2)$$

2da variación:

$$A + 160 = \frac{(b+2) \cdot (a+9)}{2} \quad (3)$$

Si sustituimos la ecuación (1) en las otras dos ecuaciones y multiplicando por 2 obtenemos:

$$ba + 240 = \ (ba + 4b + 6a + 24)$$

$$ba + 320 = \ (ba + 2a + 9b + 18)$$

De donde,

$$216 = \ 4b + 6a$$

$$302 = \ 2a + 9b$$

Ahora el problema geométrico planteado se convirtió un sistema de ecuaciones lineales de 2X2 (Problema Auxiliar) el que podemos resolverlo usando cualquier método algebraico el cual las soluciones son: b=30 y a=16.

Luego la base del triangulo original es 30m y la altura es 16m.

5.14. PROBLEMAS POR RESOLVER, PROBLEMAS POR DEMOSTRAR

En esta heurística tenemos que considerar dos casos el primero es un problema por resolver, que consiste en averiguar una incógnita; pueden ser teóricos o prácticos, abstractos o concretos; son problemas serios o simples acertijos. Sus principales elementos son: la incógnita, los datos y la condición.

Ejemplo

“Inscribir un cuadrado en un triángulo dado, tal que dos vértices del cuadrado deben hallarse sobre la base del triángulo y los otros dos vértices del cuadrado sobre cada uno de los otros dos lados del triángulo respectivamente". (Pólya, *[1]*)

Solución

Se deja al lector

El propósito de un "problema por demostrar"**,** también es llamado teorema, consiste en mostrar de modo concluyente la exactitud o falsedad de una afirmación claramente enunciada. Sus elementos principales son la hipótesis y la conclusión del teorema que hay que demostrar o refutar.

Ejemplo.

"Dos ángulos están situados en dos planos diferentes, pero cada uno de los lados de uno es paralelo al lado correspondiente del otro, y en la misma dirección. Demostrar que los dos ángulos son iguales" (Pólya *[1]*).

Generalmente los "problemas por resolver" tienen mayor importancia en las Matemáticas Elementales; los "problemas por demostrar" son más importantes en las Superiores.

5.15 PROBLEMAS PRÁCTICOS

Son los problemas en las cuales simplemente hay que resolver una ecuación que ya se nos da planteada, de tal forma que sólo hay que emplear un método para resolver ecuaciones.

Ejemplo.

El sistema de ecuaciones

$$\begin{array}{rrr} 2.3x + & 1.5y = & 3.8 \\ 4.3x & 2.8y = & 7.1 \end{array}$$

Tiene como solución *(x , y)= (1, 1)*. Considere el sistema que se obtiene con una pequeña modificación de los coeficientes:

$$\begin{array}{rrr} 2.3x + & 1.5y = & 3.8 \\ 4.29x & 2.8y = & 7.1 \end{array}$$

¿Como influyen en el valor de la solución la modificación de los coeficientes? ([3] pág. 138)

Solución.

Resolviendo el sistema usando el método de determinantes obtenemos

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2.3 & 1.5 \\ 4.29 & 2.8 \end{vmatrix} = 2.3 \cdot 2.8 - 4.29 \cdot 1.5 = 0.005$$

$$\Delta x = \begin{vmatrix} 3.8 & 1.5 \\ 7.1 & 2.8 \end{vmatrix} = 3.8 \cdot 2.8 - 7.1 \cdot 1.5 = -0.01$$

$$\Delta y = \begin{vmatrix} 2.3 & 3.8 \\ 4.29 & 7.1 \end{vmatrix} = 2.3 \cdot 7.1 - 4.29 \cdot 3.8 = 0.028$$

$$\frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{0.01}{0.005} = -2 \qquad \frac{\Delta \mathrm{y}}{\Delta} = \frac{0.028}{0.005} = 5.6$$

Podemos observar que aunque la modificación a los coeficientes es pequeña hay un cambio significativo en la solución debido a que los determinantes son valores entre –1 y 1 y dichas cantidades son sensibles a los cambios en sus cifras decimales, en particular porque la solución se expresa como una razón entre determinantes.

5.16 REDUCCIÓN AL ABSURDO Y DEMOSTRACIÓN INDIRECTA

La reducción al absurdo consiste en demostrar la falsedad de una afirmación deduciendo una cosa contraria a la inicialmente planteada y la demostración indirecta consiste en demostrar la verdad de una afirmación demostrando la falsedad de la afirmación contraria. Seguimos el siguiente modelo:

- Se asume la hipótesis P como verdadera,
- Se desea mostrar la Tesis Q.

Se supone por hipótesis P es verdadera y que ~Q es verdadera, entonces $P \wedge \sim Q$ es verdadera. Usando la Axiomas, definiciones y teoremas se obtienen las siguientes deducciones:

$P \wedge \sim Q$ es verdadera.

$\Rightarrow I_1$ es verdadero.

$\Rightarrow I_2$ es verdadero…

$\ldots \Rightarrow I_n$ es verdadero

$\Rightarrow R_0$ es falsa (Absurdo)

Notando que ~Q me lleva a un absurdo, implica que si ~Q es falsa entonces Q es verdadera

Ejemplo

Sean P_1 y P_2 dos números primos consecutivos. Demuestre que si $P_1 + P_2 = 2Q$ entonces Q es un número compuesto.

Solución (por contradicción o reducción al absurdo)

Supongamos que P_1 y P_2 son primos consecutivos y Q no es un número compuesto, por hipótesis podemos decir que Q se puede expresar como $(P_1 + P_2)/2$, lo que implica que se encuentra entre P_1 y P_2, lo cual contradice que P_1 y P_2 son primos consecutivos.

Por tanto Q debe ser un número compuesto.

6 EL TRABAJO DE SCHOENFELD

Alan Schoenfeld en sus trabajos hace un acercamiento a los trabajos de Polya en el sentido de que no solo se debe conocer o discutir las estrategias generales o las heurísticas para solución de problemas, sino, también se deben conocer las subestrategias que ellas generan, además el conocer solo las estrategias no garantizan la solución del problema, ya que algunas veces los estudiantes no saben cómo o cuándo usarlas.

Sugiere que para entender como los estudiantes intentan resolver problemas y en consecuencia proponer actividades que ayuden, es necesario proponer problemas en diferentes contextos y considerar dimensiones o categorías en la instrucción matemática que influyen en el proceso de resolver problemas.

Schoenfeld reconoce cuatro dimensiones que influyen en el proceso de resolver problemas:

- Dominio del conocimiento o recursos
- Estrategias cognitivas: Métodos heurísticos
- Estrategias Metacognitivas
- Sistemas de creencias

6.1 DOMINIO DEL CONOCIMIENTO O RECURSOS

Los recursos representan un inventario de lo que una persona sabe y de la forma como adquiere ese conocimiento. En términos generales el uso de recursos se enmarca en entender el comportamiento individual del sujeto frente a una situación problema, el reconocer cuales son las herramientas que tiene a su disposición, ¿qué información es relevante para resolver tal situación?, ¿cómo puede ser usada la información?, ¿cómo accede a esta información?, ¿qué experiencia anterior posee con situaciones parecidas a la planteada?

Schoenfeld en la discusión de estudios previos sobre resolución de problemas identifica algunas características sobre las respuestas o acciones que los individuos muestran en sus procesos de solución de situaciones problemas, él señala que en el proceso de interactuar con dichas situaciones, generalmente los individuos clasifican sus experiencias, las relacionan con categorías anteriores o determinan si estas nuevas experiencias se relaciona con alguna otra categoría ya definida.

Los aspectos relevantes asociados con el dominio del conocimiento incluyen: El conocimiento intuitivo o informal sobre el dominio del problema, los hechos o definiciones, los procedimientos rutinarios, el conocimiento acerca del discurso del dominio, errores consistentes o recursos débiles.

6.1.1 El Conocimiento Intuitivo e Informal Sobre El Dominio Del Problema.

Las matemáticas se caracterizan e identifican como un conjunto de conocimientos que poseen un lenguaje codificado, su propia simbología y una serie de significados donde descansa su base teórica, definiciones, axiomas y postulados los cuales el estudiante debe aprender, además se encuentra con una manipulación y articulación de objetos matemáticos que hacen parte de su quehacer.

En el proceso de aprendizaje el estudiante le da su interpretación de estos objetos al mundo real y es así como estas interpretaciones, que no siempre pueden ser correctas, influyen a la hora de resolver problemas, pues, arrastran con esas concepciones o limitaciones conceptuales al enfrentarse a la tarea o situación problema.

6.1.2 Los Hechos o Definiciones

El inventario de recursos no solo se basa en los conocimientos y definiciones básicas o hechos en el que descansa el gran entretejido matemático, sino también, en como el estudiante recuerda dicho conocimiento y tiene acceso a él para resolver un problema.

El desconocer algunos hechos por parte del estudiante puede llegar a entorpecer la solución, pues en ocasiones este conocimiento ayudaría a encontrar un camino más sencillo para resolver un problema o el tener un hecho no probado o que no pueda ser probado podría hacer que el estudiante recurra a él sin observar que tal hecho no se cumple para todos los casos, es decir, parte de información falsa y en consecuencia podría llegar a resultados no correctos.

6.1.3 Procedimientos Rutinarios

Involucran técnicas en las cuales existen un conjunto de pasos que ayudan a resolver un problema pero en el cual generalmente no intervienen decisiones estratégicas.

Así, Schoenfeld ubica estos tipos de procedimientos a un nivel táctico, separándolos de habilidades a nivel estratégico en las cuales el proceso de monitoreo toma un papel importante, pues, incluye tomar decisiones acerca del plan y la ejecución de éste en la solución del problema.

En los procesos rutinarios el proceso de control o monitoreo generalmente se vuelve importante cuando hay un error en la implementación de estos procedimientos. Por ejemplo, en el siguiente problema:

> *Dos postes de teléfono de 10m y 25m de altura respectivamente se colocan a una distancia de 40m uno del otro. Los postes deben ser sujetados a un punto de apoyo situado entre ambos ¿Dónde debe situarse el punto de apoyo para que la suma de las longitudes del cable de cada poste al punto de apoyo sea mínima?*

Al hacer un reconocimiento de él, pensaríamos como estrategia el hallar el mínimo de la distancia usando técnicas del calculo, sólo cuando se llega a la solución de la ecuación $f'(x)=0$, nos damos cuenta que el proceso de hallar tal solución es muy complejo y lo mejor estratégicamente sería tomar otro camino.

6.1.4 Conocimiento Del Dominio Del Discurso

Refiriéndose al uso del lenguaje y la concepción que se tenga acerca de un objeto matemático, así como la percepción de las reglas para resolver un problema influyen en la solución del mismo. Por ejemplo la solución dada para un problema sobre rectas tangentes estará influida por el concepto que el estudiante tenga sobre derivada o la función lineal.

6.1.5 Errores Consistentes o Recursos Débiles.

Se refiere a los errores comunes presentados por los estudiantes en los procesos básicos o de regla sencillas en general. Es común pensar que los errores comunes cometidos por los estudiantes son el resultado de mal aprendizaje y que está ubicado bajo la premisa de que "es el estudiante quien aprende efectivamente lo que el profesor le presenta o enseñe".
Un gran número de errores en procedimientos simples puede ser el resultado de un aprendizaje erróneo. Esto está relacionado con la forma en que el estudiante accede a la información y, también se refiere a la forma en que él la tiene estructurada; es decir, ante una situación alguien puede pensar una cadena de conceptos alrededor de ésta, aunque no necesariamente estén bien ligados.

Por ejemplo, el alumno tiende a extrapolar propiedades tal como la linealidad; dado que: $\frac{a+b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$, $(ab)^n = a^n b^n$, entonces ¿porque $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$?.

Algo muy importante para revisar es que muchas veces el profesor plantea un problema y dice que es muy fácil, lo dice porque tiene años de manejar el tema y pierde la perspectiva de la dificultad que, tal vez, incluso para él, tuvo en alguna ocasión anterior. Se deber tener claro que lo que para unos es fácil, no necesariamente lo es para todos.

6.2 ESTRATEGIAS COGNITIVAS: MÉTODOS HEURÍSTICOS

Schoenfeld escribe acerca de las estrategias heurísticas "son aproximaciones prosperas para la resolución de un problema, sugerencias generales que ayudan al individuo a comprender un problema o progresar en su solución" [2] (pág. 23). Se habla de las heurísticas en general como aquellas estrategias que pueden ayudar a la resolución de un problema.

En el trabajo de Schoenfeld se observa la reflexión hecha a las heurísticas propuestas por Polya, en el sentido de que en el aprendizaje de la resolución de problemas, para el estudiante no debe ser suficiente conocer dichas estrategias heurísticas, sino también, es importante que participe en diferentes experiencias donde el pueda conocer el cómo y el cuándo utilizarlas, pues en caso contrario, las reglas heurísticas se convierten en destrezas procesales, casi algorítmicas, adjudicando una regla heurística especifica a una situación especifica.

Como resultado de este análisis, la principal implicación práctica para la enseñanza de las matemáticas fue diseñar actividades de aprendizaje que permitieran:

- Identificar el uso de una estrategia en particular y seleccionar la versión que se ajuste al problema.
- Discutir la estrategia con suficiente detalle de manera descriptiva, generando o utilizando problemas relacionados más simples.
- Dar a los estudiantes un grado apropiado de entrenamiento para el uso de las estrategias [3] pág. 39.

Schoenfeld elaboró también una lista de las *estrategias* más utilizadas en la solución de problemas:

1. Análisis del Problema.

a. Dibuje un diagrama siempre que sea posible o elabore un bosquejo de los datos dados en el problema.

b. Examine casos especiales.
   - Seleccione algunos valores especiales para ejemplificar o entender el problema e irse familiarizando con él.
   - Examine casos límite (es decir, el mejor de los casos, el peor de los casos) para explorar el rango de posibilidades.
   - Si hay un parámetro entero, dele sucesivamente los valores 1*,* 2*,…, m* y vea si surge algún patrón inductivo.

c. Trate de simplificar el problema.

- Explotando la existencia de simetría.
- Usando argumentos del tipo: “sin pérdida de generalidad".

2. Exploración.

a. Considere problemas esencialmente equivalentes.

- Reemplazando condiciones por otras equivalentes.
- Recombinando los elementos del problema de maneras diferentes.
- Introduciendo elementos auxiliares.
- Reformulando el problema:
  - Mediante un cambio de representación o notación.
  - Mediante argumentos por negación o contraposición.
  - Asumiendo que tenemos una solución y determinando sus propiedades.

b. Considere un problema ligeramente modificado.

- Elija submetas (tratando de satisfacer parcialmente las condiciones).
- Quite o dele libertad a una condición y luego trate de reimponerla.
- Descomponga el dominio del problema y trabaje caso por caso.

c. Considere problemas sustancialmente modificados

- Construya un problema parecido con menos variables.
- Deje todas las variables fijas excepto una, para determinar su impacto.
- Trate de aprovechar cualquier problema relacionado que tenga forma, datos o conclusiones similares.

3. Verificación de la solución.

a. ¿Pasa su solución estas pruebas específicas?

- ¿Usa todos los datos pertinentes?
- ¿Está de acuerdo con estimaciones o predicciones razonables?

- ¿Soporta pruebas de simetría, análisis dimensional y escala?

b. ¿Pasa estas pruebas generales?
   - ¿Puede ser obtenida de manera diferente?
   - ¿Puede ser resumida por casos especiales?
   - ¿Puede ser reducida a resultados conocidos?
   - ¿Puede utilizarse para generar algún resultado conocido?

6.3 ESTRATEGIAS METACOGNITIVAS

En el curso de una actividad intelectual, como por ejemplo, la resolución de problemas, en algún momento se hace un análisis de la marcha del proceso. Monitorear y controlar el progreso de estas actividades intelectuales son desde el punto de vista de la psicología cognitiva, los componentes de la metacognición. Los aspectos metacognitivos se relacionan, en suma, con la manera en que se seleccionan y despliegan los recursos matemáticos y las heurísticas de que se dispone.

Resolver un problema va mas allá del uso de una colección de técnica o habilidades, en la resolución de problemas el proceso de control, evaluación y toma de decisiones son los aspectos más importantes de las estrategias metacognitivas
Schoenfeld identifica tres categorías donde se presenta la metacognición (Santos 1997)

a. El conocimiento acerca de nuestro propio proceso, la descripción de nuestro propio proceso de pensar.
b. El control y autorregulación. Que tan bien es capaz uno de seguir lo que se hace cuando se resuelve algún problema y que tan bien se ajusta uno al proceso (ejecución de acciones) tomando en cuenta las observaciones que se hagan durante la evolución de éste.
c. Creencias e intuiciones. Las ideas acerca de las matemáticas que se muestran en el trabajo matemático y como se relacionan o se identifican éstas con alguna tendencia en la resolución de problemas.

El proceso de control toma importancia en el resolver problemas, pues determina el uso que el individuo le da a la información, incluyendo decisiones importantes acerca del plan, la selección de metas o submetas, revisión de soluciones y la evolución, también la conveniencia de abandonar planes o proceso que no muestren avances satisfactorios en la resolución del problema.
Las fases que involucran el control incluyen:

- **Entendimiento del problema.** Aplicada antes de comenzar el proceso de resolución del problema. En esto Pólya hace, también, una y otra vez, la observación que si alguien no entiende un problema, no lo va a resolver, y si lo hace, es por casualidad.
- **Diseño de la Solución.** Considerar varias formas de solucionar un problema, seleccionar algún método o heurística teniendo en cuenta su utilidad al caso propuesto.
- **Ejecución o implantación**. Monitorear el proceso, tomar decisiones cuando el camino elegido no presenta resultados y escogencia de otro camino a explorar.
- **Verificación de la solución.** Evaluación de la respuesta obtenida y del proceso para llegar a dicha respuesta.

Schoenfeld propone algunas actividades que, según él, pueden desarrollar las habilidades de las personas para el control:

- Tomar videos durante las actividades de resolución de problemas. El video luego se pasa a los estudiantes para que vean qué es lo que han hecho, porque, en general, resuelven un problema y, al final, se les olvida qué fue lo que hicieron.
- Algo que Pólya mencionaba, también: el docente debe tomar las equivocaciones como modelo; es decir, poner un problema en la pizarra, tratar de resolverlo (aún cuando sepa la solución), escoger una estrategia que sabe que no va a llevar a un término y ver en qué momento se decide que esa no lleva a ninguna parte y se opta por otra. El profesor resuelve problemas como modelo, y, posteriormente, debe discutir las soluciones con todo el grupo para que cada uno aporte ideas.
- Es muy importante cerciorarse si los estudiantes entienden el vocabulario utilizado en la redacción de un ejercicio o de un problema; se debe hacer preguntas orientadoras y evaluar métodos sugeridos por los mismos estudiantes.

- También propone que se resuelvan problemas en pequeños grupos, en un ambiente de trabajo colaborativo; esto para potenciar el desarrollo de habilidades relacionadas con alguna materia, y, así, que cada uno pueda aprender sobre la forma en que los demás controlan su trabajo.

6.4 SISTEMA DE CREENCIAS

Se refiere a aquellas creencias y opiniones relacionadas con la resolución de problemas y que pueden afectarla favorable o desfavorablemente.

Las creencias de un estudiante, entendidas como su visión acerca de la matemática, aparecen manifestando sus motivaciones, sus experiencias, sus conocimientos y sus necesidades como estudiante, e influyen sustantivamente sobre sus prácticas. Dos aspectos están más estrechamente relacionados con las creencias: a las experiencias previas, y los conocimientos matemáticos (Recursos), en los que las creencias están fuertemente involucradas.

Sin embargo, la motivación y las necesidades de un estudiante no siempre están conectadas con sus creencias.

Algunas creencias comunes, sobre todo entre estudiantes de enseñanza media, son las siguientes: “todo problema se resuelve mediante alguna formula", “lo importante es el resultado y no el procedimiento", “la respuesta del libro no puede estar equivocada". Este tipo de creencias son un obstáculo para el desempeño de cualquier persona en la resolución de problemas.

Schoenfeld (1992) documenta algunas creencias que los estudiantes muestran de las matemáticas [3] pág. 43:

a. Si se pide un punto de vista acerca de un problema o cuestión matemática, es suficiente dar tu opinión al respecto. Es decir, las pruebas formales o justificaciones matemáticas no son necesarias al menos que explícitamente se requieran.
b. Todos los problemas matemáticos pueden ser resueltos en diez minutos o menos, si uno entiende el contenido. Es decir, el estudiante abandona el problema sino lo resuelve antes de ese periodo de tiempo.

c. Solo los genios son capaces de descubrir, crear y entender las matemáticas. Es decir los estudiantes toman a las matemáticas pasivamente y memorizan relaciones sin esperanza de entenderlas.
d. Las matemáticas formales y las demostraciones no tienen nada que ver con el desarrollo o el descubrimiento de las ideas matemáticas. Como consecuencia los resultados de las matemáticas formales se les pide a los estudiantes trabajar en problemas de construcción o de descubrimiento.

Schoenfeld indica que entre los objetivos principales del aprendizaje en matemáticas se encuentra el eliminar las creencias inapropiadas que tenga el estudiante acerca de las matemáticas y de la resolución de problemas, además que los alumnos desarrollen ideas y procesos mas sólidos del oficio matemático.

Las creencias del profesor

Señala Schoenfeld que usualmente en los profesores (principalmente los más nuevos), las creencias están condicionadas por la forma en que a ellos mismos les enseñaron Matemática en el colegio o en la universidad.

Las creencias sociales

Existen grandes diferencias culturales en cuanto a las creencias que tienen los padres, maestros y jóvenes acerca de la naturaleza del aprendizaje de la Matemática.

Estas creencias se agrupan en tres categorías:

- Lo que es posible, es decir: lo que los niños pueden aprender de Matemática en las diferentes edades.
- Lo que es deseable, es decir: lo que los niños deben aprender, pues una cosa es lo que pueden y otra la que deben aprender.
- Y la otra es preguntarse cuál es el mejor método para enseñar Matemática.

Estas tres clases ya son determinadas: la sociedad decide qué es posible, qué es lo que quiere que se aprenda, y cómo se debe enseñar. Esto es lo que va a suceder en el ámbito general a nivel de programas, textos, lineamientos, metodologías, etc.

7 PROBLEMAS VARIOS.

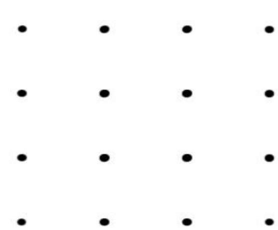
Planteamos algunos problemas comunes y no tan comunes, para que el lector coloque en práctica las heurísticas antes mostradas. Es importante que al realizar este trabajo se tenga en cuenta el modelo planteado por Polya donde se apliquen los cuatro pasos: comprensión del problema, elaboración del plan, ejecución del plan y verificación de la solución.

7.1 PROBLEMA DE TEOFRASTO

Teofrasto fue a ver a Aristóteles, para hablar sobre la clasificación de las plantas. Llevaba a su perro, un mastín, atado con una cuerda de longitud L. Cuando llegó, ató la cuerda con un nudo corredizo, alrededor de una columna de radio R. El perro, al que no le gustaba estar atado, tensionó la cuerda, y la cuerda se rompió. Hallar a que distancia del perro estaba el nudo corredizo cuando se rompió la cuerda.

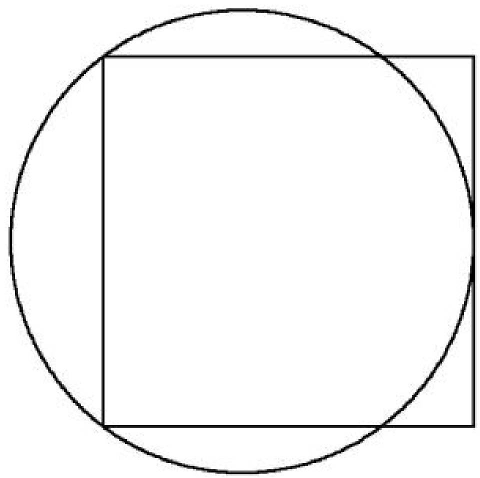
7.2 CUADRADOS EN UNA TRAMA

En la trama de cuatro por cuatro puntos indicada junto a estas líneas, ¿cuántos cuadrados distintos se pueden dibujar de forma que sus vértices ocupan puntos de la trama?. Interpretamos que dos cuadrados son distintos cuando cambia alguno de los vértices en los que se apoya, es decir, que pueden ser cuadrados de la misma forma, pero en posiciones diferentes. Indica cuantos tamaños de cuadrado diferentes aparecen.



7.3 CÍRCULO Y CUADRADO

En la figura contigua, en la que un círculo está situado sobre un cuadrado de forma que pasa por dos vértices contiguos y el centro del lado opuesto, el lado del cuadrado mide 16 unidades. ¿Cuánto mide el radio del círculo?

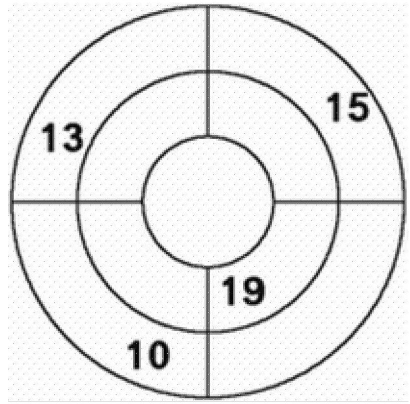


7.4 NÚMERO DIVISIBLE A TROZOS

Encuentra un número de seis cifras, formado usando una única vez cada una de las cifras 1, 2, 3, 4, 5 y 6, de forma que sus dos primeras cifras forman un número divisible por dos, sus tres primeras cifras forman un número divisible por tres, sus cuatro primeras cifras forman un número divisible por cuatro, sus cinco primeras cifras forman un número divisible por cinco, y todo él es un número divisible por seis.

7.5 UNA DIANA

En la diana que hay dibujada junto a estas líneas hay sectores marcados con las puntuaciones 13, 15, 19 y 10. ¿Dónde tienes que dar el menor número de tiros para sumar 100?



Explica cómo lo haces para obtener el resultado.

7.6 AUMENTANDO LAS RAÍCES

Si tenemos una ecuación de segundo grado de la forma $x^2 + ax + b = 0$ con dos soluciones, y queremos construir otra ecuación de la forma $x^2 + cx + d = 0$, de forma que cada una de sus soluciones valga una unidad más ¿Podríamos calcular c y d a partir de a y b? ¿Cómo sería la fórmula que los relaciona?

Plantea un ejemplo y razona la fórmula.

7.7 POTENCIA DE 3

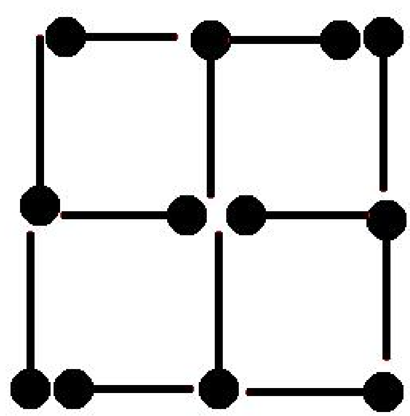
Este problema es mucho más sencillo que el anterior de bachillerato. Por lo menos, trata de números y operaciones que te son familiares. Es posible que veas los problemas para tus compañeros de la ESO y pienses que son muy fáciles. ¿Serías tú capaz de calcular la última cifra de los números 3^{2008} y 37^{2008}?.Lo que te pedimos es similar, aunque no lo parezca. Responde sólo a una pregunta: ¿es divisible el número 3^{2008}-1 entre 8?. Por supuesto, queremos que nos expliques y justifiques convincentemente tu razonamiento. Tanto para calcular las últimas cifras como para la pregunta (más complicada) acerca de divisibilidad.

7.8 FACTURA INCOMPLETA

Tengo una factura que me indica que hace mes y medio se compró para mi empresa ocho impresoras, un grapadora, tres cartuchos de tinta y tres saca ganchos, y se nos cobró un total de 350.000 pesos. Hace sólo un mes, tenemos otra factura del mismo proveedor, por valor de 250.000 pesos, por comprar cinco impresoras, dos grapadoras, dos cartuchos y un saca ganchos. La semana pasada, me llegó una tercera factura de tres impresoras, tres grapadoras, un cartucho y dos saca ganchos. Total, 220.000 pesos. Hemos perdido la lista de precios de la empresa, pero el precio de las grapadoras se puede calcular. ¿Podrías calcular cuánto cuesta realmente cada grapadora, suponiendo que no ha habido ninguna subida de precios?. Y, más difícil todavía, si has calculado el coste de cada grapadora, ¿puedes indicar, sabiendo que nada de lo que nos han traído es gratis, el precio mínimo y máximo que podrían tener los impresoras?.

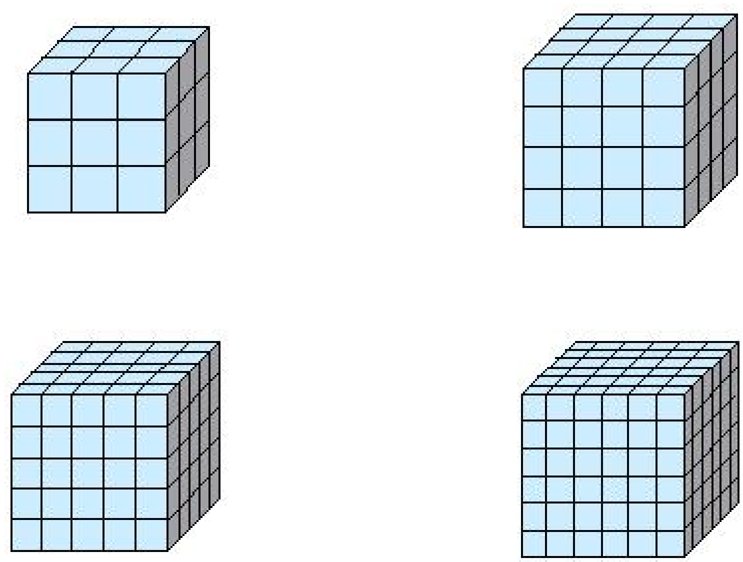
7.9 CONTANDO CUADRADOS

Pepe Cuadrado le gusta hacer figuras con cerillas. En esta figura (un cuadrado grande con dos cerillas en cada lado, junto con una cruz de cuatro cerillas que lo divide en cuatro cuadrados más pequeños), Pepe cuenta cinco cuadrados, pero sabe que moviendo sólo dos cerillas puede obtener otra figura donde cuente siete cuadrados. ¿Puedes ayudarle?



7.10 CUBOS

Cuatro cubos de madera de dimensiones 3x3x3, 4x4x4, 5x5x5 y 6x6x6 fueron pintados de verde y cortados en cubos de 1x1x1, como se muestra a continuación:



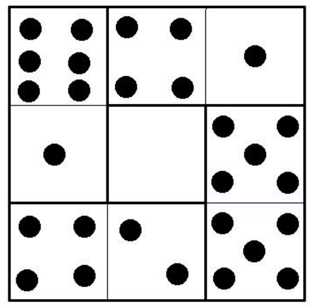
¿Cuántos cubos de 1x1x1 tienen dos caras pintadas si se tiene un cubo cuyas dimensiones son nxnxn?

7.11 TRES BUSES

Desde una terminal de buses sale un bus a Popayán cada 65 minutos, a Cali cada 78 minutos y a Bogotá cada 52 minutos, si en este momento salen simultáneamente buses para las tres ciudades, ¿en cuanto tiempo más dicha situación volverá a repetirse?.

7.12 LOS SIETE CUADRADOS

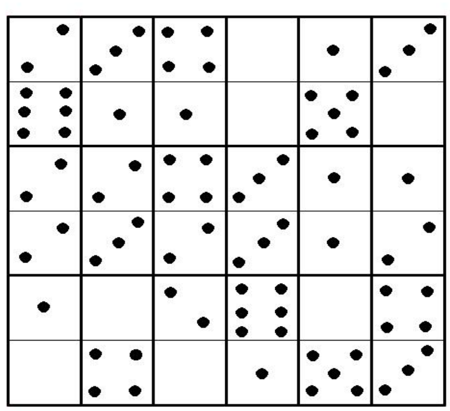
Cuatro fichas de dominó, elegidas convenientemente, pueden colocarse formando un cuadrado con idéntico número de tantos en cada lado. En la figura pueden ustedes ver un modelo donde la suma de los tantos de cada lado del cuadrado equivale siempre a 11.



¿Podrían ustedes formar con todas las fichas del dominó siete cuadrados de este tipo? No es necesario que la suma de tantos de cada lado de todos los cuadrados sea la misma. Lo que se exige es que los cuatro lados de cada cuadrado tengan idéntico número de tantos.

7.13 LOS CUADRADOS MÁGICOS DEL DOMINÓ

La figura muestra un cuadrado formado por 18 fichas de dominó, y que ofrece el interés de que la suma de los tantos de cualquiera de sus filas - longitudinales, transversales y diagonales es en todos los casos igual a 13. Desde la antigüedad, estos cuadrados se llaman *mágicos*.



Trate de construir algunos cuadrados mágicos compuestos de 18 fichas, pero en los que la suma de tantos sea otra diferente. Trece es la suma menor en las filas de un cuadrado mágico formado de 18 fichas. La suma mayor es 23.

7.14 ¿CUÁNTOS AÑOS TIENE?

A un aficionado a los rompecabezas le preguntaron cuántos años tenía. La contestación fue compleja: Toma tres veces los años que tendré dentro de tres años, réstales tres veces los años que tenía hace tres años y resultará exactamente los años que tengo ahora. ¿Cuántos años tiene?

7.15 ¿CUÁNTOS AÑOS TIENE ROBERTO?

Vamos a calcularlo. Hace 18 años, recuerdo que Roberto era exactamente tres veces más viejo que su hijo. -Espere; precisamente ahora, según mis noticias, es dos veces más viejo que su hijo. -Y por ello no es difícil establecer cuántos años tienen Roberto y su hijo. ¿Cuántos?.

7.16 EL NIVEL DE LA BURBUJA

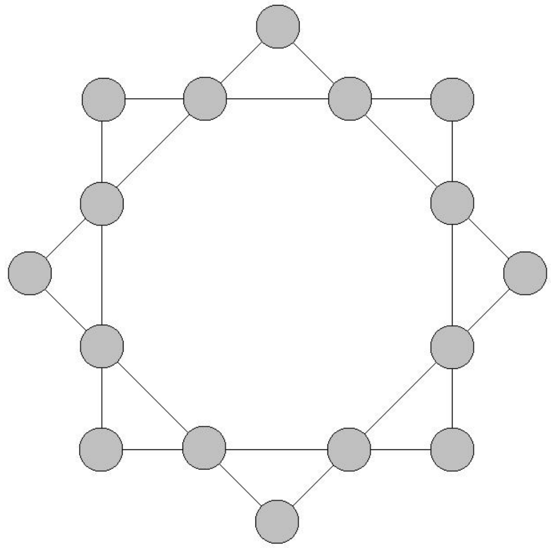
Conocen ustedes, naturalmente, este tipo de nivel, con su burbuja de aire indicadora que se desplaza a la izquierda o a la derecha de la marca índice cuando se inclina la base del nivel respecto del horizonte. Cuanto mayor sea la inclinación, tanto más se alejará la burbuja de la marca central. La burbuja se mueve porque es más ligera que el líquido que la contiene, y por ello asciende, tratando de ocupar el punto más elevado. Pero si el tubo fuera recto, la burbuja, al sufrir él nivel la menor inclinación, se desplazaría a la parte extrema del tubo, o sea, a la parte más alta. Es fácil comprender que un nivel de este tipo seria incomodísimo para trabajar. -Por tanto, el tubo del nivel se hace en forma curva. Cuando la base del nivel está horizontal, la burbuja, al ocupar el punto más alto del tubo, se encuentra en su parte central. Si el nivel está inclinado, el punto más elevado no coincidirá con la parte central del tubo, sino que se hallará en otro punto próximo a la marca, y la burbuja se desplazará respecto de la marca índice, situándose en otro lugar del tubo, que entonces será el más alto. Se trata de determinar cuántos milímetros se separa la burbuja de la marca si el nivel tiene una inclinación de medio grado y el radio de curvatura del tubo es de 1 m.

7.17 LOS HUEVOS DE GALLINA Y DE PATO

Las cestas que se ven en la figura contienen huevos; en unas cestas hay huevos de gallina, en las otras de pato. Su número está indicado en cada cesta. «Si vendo esta cesta -meditaba el vendedor, me quedarán el doble de huevos de gallina que de pato.» ¿A qué cesta se refiere el vendedor?

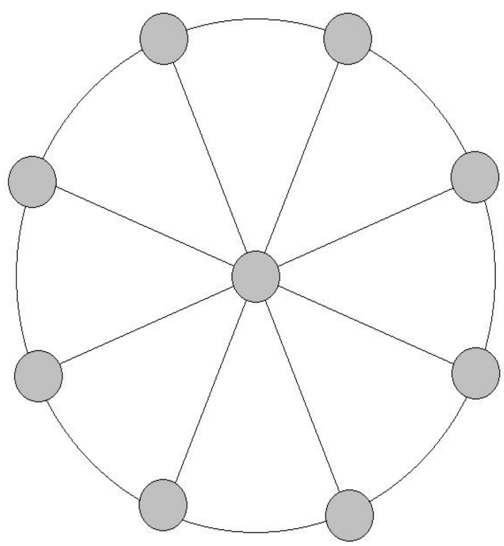
7.18 LA ESTRELLA DE OCHO PUNTAS

Hay que distribuir los números del 1 al 16 en los puntos de intersección de las líneas de la figura de modo que la suma de los cuatro números que se hallan en cada lado de los dos cuadrados sea 34 y que la suma de los cuatro números que se encuentran en los vértices de cada cuadrado sea también 34.



7.19 LA RUEDA CON NÚMEROS

Las cifras del 1 al 9 hay que distribuirlas en la rueda de la figura: una cifra debe ocupar el centro del círculo y las demás, los extremos de cada diámetro de manera que las tres cifras de cada fila sumen siempre 15.



7.20 EN SEIS FILAS

Seguramente conoce usted la historia cómica sobre cómo nueve caballos fueron distribuidos en diez establos y en cada establo resultó haber un caballo. El problema que voy a proponerle se parece mucho a esta broma célebre, pero no tiene solución imaginaria, sino completamente real. Consiste en lo siguiente: Distribuir 24 personas en 6 filas de modo que en cada fila haya 5 personas.

7.21 UN PROBLEMA CON CERILLAS

El jugador de turno vació sobre la mesa su caja de cerillas, distribuyéndolas en tres montones. ¿Se dispone usted a hacer hogueras? - bromearon los presentes. El rompecabezas será a base de cerillas - explicó -. Tenemos tres montoncitos diferentes. En ellos hay en total 48 cerillas. No le digo cuántas hay en cada uno, pero observen lo siguiente: si de primer montón paso al segundo tantas cerillas como hay en éste luego del segundo paso al tercero tantas cerillas como hay en es tercero, y, por último, del tercero paso al primero tantas cerillas como existen ahora en ese primero, resulta que habrá el mismo número de cerillas en cada montón. ¿Cuántas cerillas había en cada montón al principio?.

7.22 LA CIFRA TACHADA

Una persona piensa un número de varias cifras, por ejemplo el 847. Propóngale que halle la suma de los valores absolutos de las cifras de, este número (8 + 4 + 7 = 19) y que la reste del número pensado. Le resultará: 847 - 19 = 828. Que tache una cifra cualquiera del resultado obtenido, la que desee, y que le comunique a usted las restantes. Le dirá usted inmediatamente la cifra tachada, aunque no sepa el número pensado y no haya visto lo que ha hecho con él. ¿Cómo es posible?

7.23 ADIVINAR UN NÚMERO SIN PREGUNTAR NADA

Propone usted a alguien que piense un número cualquiera de tres cifras que no termine en cero, y le ruega que ponga las cifras en orden contrario. Hecho esto, debe restar del número mayor el menor y la diferencia obtenida sumarla con ella misma, pero con las cifras escritas en orden contrario. Sin preguntar nada, adivina usted el número resultante. ¿Como puede ser posible?

7.24 ¿QUIÉN HA COGIDO CADA OBJETO?

Para presentar este ingenioso truco, hay que preparar tres cosas u objetos pequeños que quepan fácilmente en el bolsillo, por ejemplo, un lápiz, una llave y un sacapuntas. Además, se coloca en la mesa un plato con 24 fichas;. A tres de los presentes les propone que mientras esté usted fuera de la habitación, escondan en sus bolsillos, a su elección, uno cualquiera de los tres objetos: el lápiz, la llave o el sacapuntas, y se compromete usted a adivinar el objeto que ha escondido cada uno. El procedimiento para adivinarlo consiste en lo siguiente: Al regresar a la habitación una vez que las tres personas hayan escondido los objetos en los bolsillos, les entrega usted unas fichas para que las guarden. Al primero le da una ficha, dos al segundo y tres al tercero. Las restantes las deja en el plato. Luego sale usted otra vez dejándoles las siguientes instrucciones: cada uno debe coger del plato más fichas; el que tenga el lápiz tomará tantas como le fueron entregadas; el que tenga la llave, el doble de las que recibió; el del sacapuntas, cuatro veces más que las que usted le haya dado. Las demás fichas quedan en el plato. Una vez hecho todo esto y dada la señal de que puede regresar, al entrar en el cuarto echa usted una mirada al plato, e inmediatamente anuncia cuál es el objeto que cada uno guarda en el bolsillo. ¿Como puede saberlo?.

7.25 CARRERA DE ESQUÍS

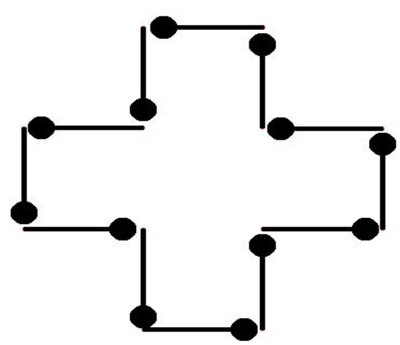
Un esquiador calculó que si hacía 10 km por hora, llegaría al sitio designado una hora después del mediodía; si la velocidad era de 15 km por hora, llegaría una hora antes del mediodía. ¿A qué velocidad debe correr para llegar al sitio exactamente al mediodía?

7.26 DE COMPRAS

Al salir de compras de una tienda de París, llevaba en el portamonedas unos 15 francos en piezas de un franco y piezas de 20 céntimos. Al regresar, traía tantos francos como monedas de 20 céntimos tenía al comienzo, y tantas monedas de 20, céntimos como piezas de franco tenía antes. En el portamonedas me quedaba un tercio del dinero que llevaba al salir de compras. ¿Cuánto costaron las compras?.

7.27 CON 12 CERILLAS

Con doce cerillas puede construirse la figura de una cruz (véase la figura), cuya área equivalga a la suma de las superficies de cinco cuadrados hechos también de cerillas. Cambie usted la disposición de las cerillas de tal modo que el contorno de la figura obtenida abarque sólo una superficie equivalente a cuatro de esos cuadrados. Para resolver este problema no deben utilizarse instrumentos de medición de ninguna clase.



7.28 LA UNIDAD

¿Cómo expresar la unidad, empleando al mismo tiempo las diez primeras cifras?

7.29 CON DOS CIFRAS

¿Cuál es el menor número entero positivo que puede usted escribir con dos cifras?.

7.30 CON CUATRO UNIDADES

¿Cuál es el número mayor que puede usted escribir con cuatro unos?

7.31 SUMAR QUINCE

Nueve fichas numeradas del 1 al 9, se ponen sobre la mesa. Juegan dos jugadores. Cada uno coge una ficha por turno. Gana el primero que sume 15. Intenta elaborar dos estrategias que puedan conducir a la victoria: una para usarla si eres tú el primero encomenzar y otra si te toca en segundo lugar.
Nota.- Analogía: cuadrado mágico 3x3

7.32 MUCHOS CEROS

¿En cuántos ceros termina el número100! =100x99x98x....x4x3x2x1?
Nota: como el resultado de 100! es un numero muy grande, intenta primero resolver el problema análogo para 10!= 10x9x8x7x6x5x4x3x2x1

7.33 CUADRADOS

Alguien dijo una vez que el tablero de ajedrez contiene 204 cuadrados ¿Estará en lo cierto?

7.34 CAPICÚAS

A los números como 12321, que se leen lo mismo de derecha a izquierda que de izquierda a derecha, se les llama capicúas. Tengo un amigo que asegura que todos los números capicúas de 4 cifras son divisibles por 11 ¿Es cierto?

7.35 CASTILLO DE CARTAS

Este es un castillo de cartas de tres pisos. Se necesitan 15 cartas. -¿Cuántas cartas se necesitarán para un castillo similar de 10 pisos de altura? - El record mundial está en 61 pisos. ¿Cuántas cartas necesitarías para batir ese record y hacer un castillo de 62 pisos de altura?

7.36 MONEDAS

En tu bolsillo tienes 5 monedas: 1 Euro, 2 Euros, 5 Euros, 10 Euros y 20 Euros. ¿Cuántas cantidades distintas puedes formar?

7.37 CUADRILLA DE SEGADORES

Una cuadrilla de segadores debía segar dos prados, uno de doble superficie que el otro. Durante medio día trabajó todo el personal en el prado grande; después de la comida, la mitad de la gente quedó en el prado grande y la otra mitad trabajó en el pequeño. Durante esa tarde se terminaron los dos campos, a excepción de un reducido sector del prado pequeño, cuya siega ocupó el día siguiente completo a un solo segador. ¿Cuántos segadores componían la cuadrilla?

7.38 EL MONJE EN LA MONTAÑA

Un monje decide subir desde su ermita a la montaña para pasar allí la noche orando. Sale de su ermita a las 9 de la mañana y después de caminar todo el día llega a la cumbre. Allí pasa la noche y a la mañana siguiente, a las 9 de la mañana, emprende el camino a su ermita por el mismo sendero. Al ir bajando se pregunta: ¿habrá algún punto del camino en el que hoy esté a la misma hora que estuve ayer?

7.39 NÚMEROS

Obtener todos los números del 1 al 10, utilizando solamente 4 cuatros y los signos de las operaciones.

7.40 JUEGA CON TU CALCULADORA

1. 357.627 es el producto de tres números impares consecutivos. Hállalos;
2. 15.252 es el producto de dos números consecutivos. ¿Cuáles son?
3. 206.725 es la suma de dos cuadrados perfectos consecutivos. ¿Cuáles son?

7.41 DOS NÚMEROS

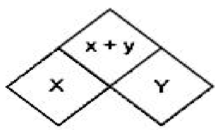
El resultado de dividir dos números de dos cifras en una calculadora ha sido 0,9310344 ¿Cuáles eran esos números?

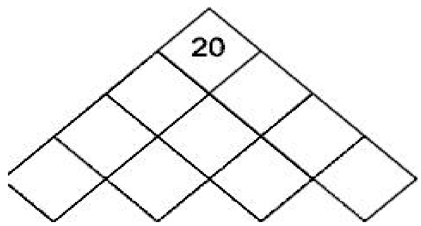
7.42 UN POCO DE ALGEBRA

Si a y b representan números enteros, explique por qué la expresión $4a^2 - 12ab + 9b$ siempre da como resultado un número mayor o igual que cero.

7.43 LA PIRÁMIDE

La pirámide se ha construido según la regla:





Si todos los números son diferentes, reconstruya la pirámide.

7.44 CUADRADOS

El cuadrado de un número natural impar es impar.

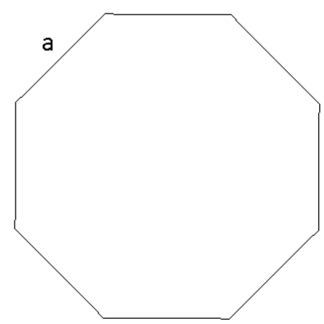
7.45 TRANSPORTE AÉREO

En el aeropuerto de Barcelona despega un avión cada 26 minutos, en el aeropuerto de Valencia, uno cada 24 minutos y en el aeropuerto de Alicante, uno cada 18 minutos. El 29 de abril, a las 2 a.m. coincidieron las partidas de los tres aeropuertos. Se sabe que los tres aeropuertos fueron cerrados por razones de seguridad aproximadamente una hora después de la siguiente coincidencia de partidas.

1. ¿Aproximadamente, a qué hora se cerraron los aeropuertos?
2. ¿Cuántos vuelos habían despegado del aeropuerto de Barcelona desde las 2 a.m. hasta la hora del cierre?

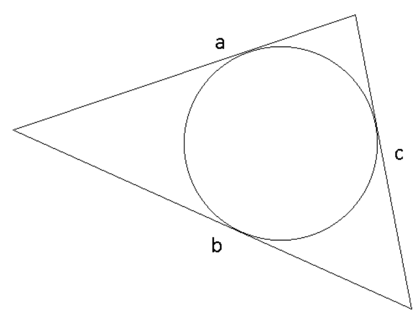
7.46 OCTÁGONO

Expresar, en función de su lado, el área del octágono regular.



7.47 TRIÁNGULO

Expresar el área de un triángulo, en función del radio del círculo inscrito.



8 ANEXOS

Cursillo: "Enseñanza De Las Matemáticas Vía Resolución De Problemas"

PRESENTACION

El presente cursillo se desarrolló bajo la modalidad virtual en la plataforma del Proyecto REDUMAC. El cursillo trata algunos de los aspectos teóricos más importantes sobre la resolución de problemas y está **dirigido a docentes, estudiantes y personas interesadas en conocer sobre el tema.** El objetivo de éste es lograr generar nuevas formas de ver la matemática, aplicarla y orientarla según los nuevos requerimientos de nuestro sistema educativo. En este cursillo se desarrollaron cinco actividades las cuales están apoyadas con un material de aprendizaje y se realizó entre el 27 de octubre y el 21 de noviembre de 2008.

El cursillo propuesto se encuentra en el sitio http://redumac.unicauca.edu.co

.

ESTRUCTURA DEL CURSILLO

Se establecieron las preguntas mas frecuentes acerca de cómo se iba a estructurar el cursillo y la información general sobre él, esto se publicó dos semanas antes de comenzar formalmente con el cursillo.

PREGUNTAS FRECUENTES (FAQ)

1. **P:** *¿Cuándo empieza y termina formalmente el cursillo?*

   A: El cursillo **Enseñanza de las Matemáticas Vía Resolución de Problemas,** comienza formalmente el día 27 de Octubre de 2008. El cursillo termina formalmente el día 21 de Noviembre de 2008.

2. **P:** *¿Hasta cuándo estarán disponibles los contenidos del Cursillo?*

   A: Los contenidos del cursillo, siempre estarán disponibles para todas las personas registradas en la plataforma REDUMAC y que constituyen la Comunidad REDUMAC.

3. **P:** *¿Qué debo hacer para tener acceso a los contenidos y actividades del Cursillo?*

   A: Muy simple. Estar registrado en REDUMAC o Registrarse siguiendo el enlace "Inscripciones". Se aceptarán como solicitudes de participación en el curso, las realizadas hasta las 6:00 p.m. del lunes 27 de octubre de 2008.

4. **P:** *¿Cuál es la Dinámica y Metodología del Cursillo?*

   A: Se requiere que el participante conozca las condiciones básicas relacionadas con el manejo de herramientas informáticas y de comunicación: correo electrónico, chats, procesadores de texto, Internet, navegadores y otros sistemas y herramientas tecnológicas necesarias para la formación virtual.

   El Cursillo se desarrollará en forma virtual de la siguiente manera:

   Se publicaran las actividades a realizar en las diferentes semanas programadas las cuales estarán acompañadas de un material de lectura para realizar los ensayos o problemas planteados durante el cursillo. El cronograma será así:

Primera Semana

Actividad 1: 27 al 29 de octubre:

Con esta actividad buscaremos determinar la concepción actual de los participantes sobre el significado de problema y ejercicio.

Actividad 2: 29 de octubre al 2 de noviembre

Se publicaran documentos para la lectura de los participantes.

Con esta actividad se busca determinar si hay cambios en la concepción de problema y ejercicio, luego llegar a un acuerdo acerca de la concepción de problema, reflexionaremos sobre los conceptos tratados en estas actividades ubicando nuestros aportes en los respectivos foros.

Segunda Semana

Actividad 3: 3 al 9 de Noviembre.

Examinaremos las diferentes estrategias o métodos usados por los participantes para resolver problemas. Se publicara un documento como soporte para la realización de la actividad y la participación en el foro

Tercera Semana

Actividad 4: del 10 al 16 de Noviembre

Conoceremos el trabajo realizado por Schoenfeld en la resolución de problemas. Y Recopilaremos las creencias más comunes que se presentan en el aula de clase las cuales influyen en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas

Cuarta Semana

Actividad 5: 17 al 21 de Noviembre.

Aplicaremos diferentes heurísticas proporcionadas por Polya para la resolución de problemas.

Mientras seguimos aportando nuestras reflexiones en los foros,

5. **P:** ¿*Cómo se evaluará el curso*?

   A: Las actividades corresponderán al 60%, cada actividad se compone de problemas por resolver y ensayos a partir de las lecturas propuestas durante el cursillo.

   La participación en los foros equivale al 40% de la valoración final.

6. **P:** *¿Quién tiene derecho a recibir la certificación de participación en el Curso?*

   A: Existen algunas condiciones para poder acceder al certificado de participación:

   1.- Haber participado en al menos el 80% de las actividades que involucran la participación en los foros. En estas se incluye el material de lectura y las tareas enviadas por ustedes los participantes.

   2.- Haber desarrollado las actividades propuestas dentro del cursillo.

7. **P:** *¿Si he cumplido con los requisitos establecidos, cómo puedo acceder al Certificado?*

   A: Habrán dos maneras de acceder al certificado: 1.- Puede ser enviado a tu correo en formato jpg para imprimir. Esta versión digital incluirá las firmas escaneadas de los responsables del curso, grupos y proyectos que avalan el curso.2.- Debes confirmar a los responsables del curso José Andrés Sánchez C. joansanchezc@hotmail.com o Andrés Latorre andreslat_1@hotmail.com y manifestar que deseas tu certificado físico. Una vez el certificado este listo te será informada la hora y fecha en la que puedes pasar por tu certificado en la oficina 207 del Edificio Antiguo de la Facultad de Educación. Universidad del Cauca. Popayán.

8. **P:** *¿Cuáles son los temas del curso?*

   A: A continuación se presentan de manera general los temas que se abordarán en el curso:

   Capitulo 1. El concepto de Problema.
   Capitulo 2. El Método de Polya.
   Capitulo 3. El Trabajo De Schoenfeld.
   Capitulo 4. Las Heurísticas De Polya.

9. **P:** *¿Qué pasará con el Curso después del 21 de Noviembre?*

   A: Si bien es cierto que los contenidos estarán disponibles siempre, el proyecto REDUMAC no adquieren formalmente el compromiso de brindar asesoría y seguimiento posterior a actividades relacionadas con el curso. Solo el responsable del curso, a titulo personal, queda a disposición para recibir y publicar las experiencias que los participantes deseen enviar.

10. **P:** *Costos*

 A: Ninguno

11. **P:** *¿Con quién puedo obtener más información?*

 A: andreslat_1@hotmail.com – – Andrés Latorre S. joansanchezc@hotmail.com – – José Andrés Sánchez C.

DESARROLLO DEL CURSILLO

Presentamos como se desarrolló y planificó cada una de las actividades y algunas respuestas enviadas por los participantes, las cuales se recogieron del sitio web.

Capitulo 1. La concepción de Problema

Diseño Actividad 1

Objetivos de la Actividad 1

General:

- Determinar la concepción actual de los docentes sobre el significado de problema y ejercicio.

Específicos:

- Establecer que diferencias hacen los docentes entre un problema y un ejercicio.
- Determinar los procedimientos y metodologías usados por los docentes en la solución de problemas.

1. Enviar la primera actividad a los estudiantes
2. Solicitar que nos envíen la solución de los problemas (tiempo para recibirlos 2 días)

Noticias

Cordial saludo para todos los participantes,

En las siguientes páginas aparecen algunos enunciados, con los cuales haremos lo siguiente:

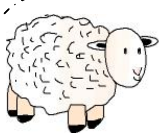
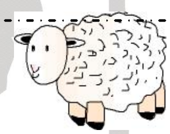
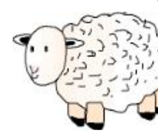
- Determinaremos una solución para cada uno, y la enviaremos en un documento de texto (la solución debe estar acompañada del procedimiento para obtenerla) .
- Además en el mismo documento deben contestar ampliamente las siguientes preguntas:
    - ¿Cuales considera que son problemas para usted? ¿Porque?
    - ¿Cuáles son las características que cumple un ejercicio para que usted lo considere problema?

Se recibirán los documentos a más tardar el 29 de octubre de 2008. A través de la pestaña de tareas y asignaciones. O la pueden enviar a la siguiente dirección de correo electrónico respro_redumac@hotmail.com

Esperamos que sea un buen inicio de nuestro curso.

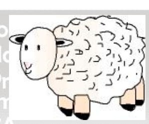
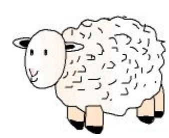
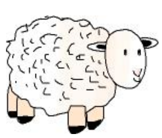
Actividad 1

Consideremos los siguientes enunciados:

En algún lugar del sur vive un pastor, que cuida de su rebaño de ovejas con singular dedicación. Cierto día, acertó a pasar por este lugar un funcionario municipal, quien tenía por misión averiguar la cantidad exacta de ovejas de este pastor. Este es (resumidamente) el dialogo que tuvo lugar:

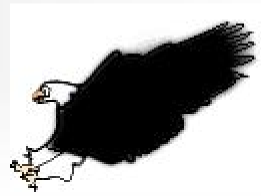
—Y, ¿Cuántas ovejas tiene Ud.?

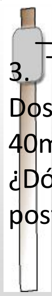




—Bueno, mire, en realidad no sé. Fíjese que yo aprendí a contar hasta cinco no más. Lo que sí le puedo decir es que si cuento las ovejas de tres en tres, me sobran dos; si las cuento de cuatro en cuatro, me sobra una, y si las cuento de cinco en cinco, me sobran tres.

El funcionario miró someramente el rebaño de ovejas y decidió que en ningún caso este tenía más de cien ovejas. Hecho esto, se dio por satisfecho. ¿Cómo pudo el funcionario averiguar cuántas ovejas formaban el rebaño?

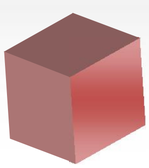
2.
Se encuentra una bandada de palomas y un gavilán, el gavilán pregunta donde van treinta y tres palomas, - las palomas responden- no somos treinta y tres, pero nosotras más nosotras, más la mitad de nosotras y más un cuarto de nosotras, más una, sumamos cien. – Ya sabes cuantas somos.-

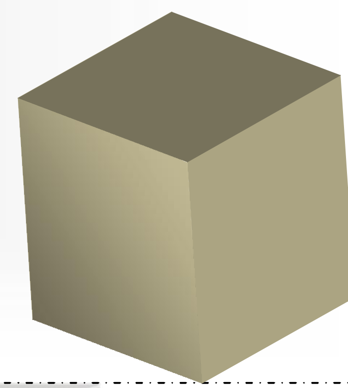




3.
Dos postes de teléfono de 10m y 25m de altura respectivamente se colocan a una distancia de 40m uno del otro. Los postes deben ser sujetados a un punto de apoyo situado entre ambos ¿Dónde debe situarse el punto de apoyo para que la suma de las longitudes del cable de cada poste al punto de apoyo sea mínima?

4.
Un cubo de madera que mide 10cm por lado se pinta de rojo. El cubo pintado se corta en cubos perfectos de 2 cm por lado. ¿Cuántos cubos de 2cm por lado no tienen pintada ninguna cara?





5.
La suma de las edades de Juan y Pedro es sesenta años. Si Pedro tiene seis años menos que Juan. ¿Cuáles son sus edades?

6.
Hallar una fórmula para $1+4+9+16+\ldots+n^2$

Soluciones De Los Participantes

YAMID ALEJANDRO MOSQUERA SOTOMAYOR (Estudiante de ingeniería de Sistemas UNICAUCA)

1. En algún lugar del sur vive un pastor, que cuida de su rebaño de ovejas con singular dedicación. Cierto día, acertó a pasar por este lugar un funcionario municipal, quien tenía por misión averiguar la cantidad exacta de ovejas de este pastor. Este es (resumidamente) el dialogo que tuvo lugar:

—Y, ¿Cuántas ovejas tiene Ud.?

—Bueno, mire, en realidad no sé. Fíjese que yo aprendí a contar hasta cinco no más. Lo que sí le puedo decir es que si cuento las ovejas de tres en tres, me sobran dos; si las cuento de cuatro en cuatro, me sobra una, y si las cuento de cinco en cinco, me sobran tres. El funcionario miró someramente el rebaño de ovejas y decidió que en ningún caso este tenía más de cien ovejas. Hecho esto, se dio por satisfecho. ¿Cómo pudo el funcionario averiguar cuántas ovejas formaban el rebaño?

El número de ovejas es 53

Ya que

53 – 2 = 51 y 51 es múltiplo de 3

53 – 3 = 50 y 50 es múltiplo de 5

53 – 1 = 52 y 52 es múltiplo de 4

2. Se encuentra una bandada de palomas y un gavilán, el gavilán pregunta donde van treinta y Tres palomas, - las palomas responden- no somos treinta y tres, pero nosotras más nosotras, Más la mitad de nosotras y más un cuarto de nosotras, más una, sumamos cien. – Ya sabes Cuantas somos.

Solución

Con el enunciado del problema tengo la siguiente ecuación:

2x + (1/2)x + (1/4)x + 1 = 100

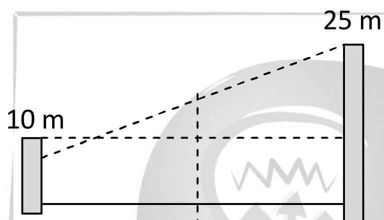
De la cual organizando un poco, al lado izquierdo los valores con la incógnita y al lado derecho constantes, tenemos que:

(11/4)x = 99

x = 36

Hay 36 palomas.

3. Dos postes de teléfono de 10m y 25m de altura respectivamente se colocan a una distancia de 40m uno del otro. Los postes deben ser sujetados a un punto de apoyo situado entre ambos ¿Dónde debe situarse el punto de apoyo para que la suma de las longitudes del cable de cada poste al punto de apoyo sea mínima?



Debido a que la distancia entre dos puntos más corta, siempre es la línea recta que pasa por ellos, y en nuestro caso tenemos que esta es exactamente la hipotenusa del triangulo cuya base es 40 m y altura 15 m, entonces:

H*H=1600 m*m + 225 m*m

H=42.72

Ahora H/2= 21.36

sin(ángulo) = 15 / 42.72

ángulo = 20.55° = 0.351

base = 21.36 cos(0.351) ~~ 21.3696 mts

4.

Un cubo de madera que mide 10cm por lado se pinta de rojo. El cubo pintado se corta en cubos perfectos de 2 cm por lado. ¿Cuántos cubos de 2cm por lado no tienen pintada
ninguna cara?

27 cubos

5. La suma de las edades de Juan y Pedro es sesenta años. Si Pedro tiene seis años menos que Juan. ¿Cuáles son sus edades?

$x + y = 60$

$x - y = 6$

[1 1 | 60]

[1 -1 | 6]

[1 1 | 60]

[0 2 | 66]

$2y=66$

$Y= 33$ Juan

$X + 33 = 66$

$X= 27$ Pedro

6.

Hallar una fórmula para $1+4+9+16+\ldots+n*n$

$F(x)=x*x$

¿Cuales considera que son problemas para usted como maestro? ¿Porque?

Un problema es algo donde no se aplica un algoritmo o algo mecánico para llegar a la solución de algo aunque no lo deja a un lado el problema requiere mucha coherencia y uso de las herramientas matemáticas.

¿Cuáles son las características que cumple un ejercicio para que usted lo considere problema?

Debe estar compuesto por muchos detalles, los datos resultantes deben ser precisos, y no tan fácil de resolver.

Lic. AURA SANDOVAL TORRES (Barranquilla, Colombia)

Determine una solución para cada uno de los enunciados siguientes:

1. En algún lugar del sur vive un pastor, que cuida de su rebaño de ovejas con singular dedicación. Cierto día, acertó a pasar por este lugar un funcionario municipal, quien tenía por misión averiguar la cantidad exacta de ovejas de este pastor. Este es (resumidamente) el dialogo que tuvo lugar
   —Y, ¿Cuántas ovejas tiene Ud.?

   —Bueno, mire, en realidad no sé. Fíjese que yo aprendí a contar hasta cinco no más. Lo que sí le puedo decir es que si cuento las ovejas de tres en tres, me sobran dos; si las cuento de cuatro en cuatro, me sobra una, y si las cuento de cinco en cinco, me sobran tres.

   El funcionario miró someramente el rebaño de ovejas y decidió que en ningún caso este tenía más de cien ovejas. Hecho esto, se dio por satisfecho. ¿Cómo pudo el funcionario averiguar cuántas ovejas formaban el rebaño?

   Respuesta: **El rebaño está formado por 53 ovejas, se buscaron los múltiplos de 5, de 3 y de 4 que cumplan con esta condición.**
2. Se encuentra una bandada de palomas y un gavilán, el gavilán pregunta donde van treinta y tres palomas, - las palomas responden- no somos treinta y tres, pero nosotras más nosotras, más la mitad de nosotras y más un cuarto de nosotras, más una, sumamos cien. – Ya sabes cuantas somos.
   Respuesta: **36 palomas**.

3. Dos postes de teléfono de 10m y 25m de altura respectivamente se colocan a una distancia de 40m uno del otro. Los postes deben ser sujetados a un punto de apoyo situado entre ambos ¿Dónde debe situarse el punto de apoyo para que la suma de las longitudes del cable de cada poste al punto de apoyo sea mínima?
   Respuesta:

4. Un cubo de madera que mide 10cm por lado se pinta de rojo. El cubo pintado se corta en cubos perfectos de 2 cm por lado. ¿Cuántos cubos de 2cm por lado no tienen pintada ninguna cara?
   Respuesta: **100 cubos**

5. La suma de las edades de Juan y Pedro es sesenta años. Si Pedro tiene seis años menos que Juan. ¿Cuáles son sus edades?
   Respuesta: **La edad de Pedro es 33 años y la edad de Juan es 27.**

6. Hallar una fórmula para $1+4+9+16+\ldots+n^2$

   Respuesta: $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

· ¿Cuales considera que son problemas para usted como maestro? ¿Porque?

Considero que los problemas son los puntos 3, 4 y 6, porque han demandado mucho más esfuerzo en el desarrollo de ellos.

Si los aplicamos a los estudiantes, dependiendo del grado en que se desarrolle se podría considerar a todos los ejercicios como problemas.

· ¿Cuáles son las características que cumple un ejercicio para que usted lo considere problema?

Me parece importante señalar alguna distinción entre **ejercicio** y **problema**.

Para resolver un ejercicio, uno aplica un procedimiento rutinario que lo lleva a la respuesta. Para resolver un problema, uno hace una pausa, reflexiona y hasta puede ser que ejecute pasos originales que no había ensayado antes para dar la respuesta.

Esta característica de dar una especie de paso creativo en la solución, no importa que tan pequeño sea, es lo que distingue un problema de un ejercicio.

Sin embargo, es prudente aclarar que esta distinción no es absoluta; depende en gran medida del estadio mental de la persona que se enfrenta a ofrecer una solución: Para un niño pequeño puede ser un problema encontrar cuánto es 3 + 2. O bien, para niños de los primeros grados de primaria responder a la pregunta ¿Cómo repartes 96 lápices entre 16 niños de modo que a cada uno le toque la misma cantidad? le plantea un problema, mientras que a uno de nosotros esta pregunta sólo sugiere un ejercicio rutinario: dividir.

Diseño Actividad 2

Objetivos de la Actividad 2

General:

- Concertar el concepto de problema entre los participantes.
- Determinar si hay cambios en la concepción de los docentes sobre el significado de problema y ejercicio.

1. Enviar documentos sobre la concepción de problema desde la perspectiva de diferentes autores.

2. Abrir un espacio de discusión a través de un foro

Objetivo:

- Discutir las opiniones de los participantes sobre la concepción de problema y determinar si hay cambios en la dicha concepción.
- Generar espacios de discusión con los participantes

Preguntas

Según lo expuesto en los documentos y tu ensayo:

¿Cómo ha cambiado tu concepción de problema?

¿Cuál crees que son las características que debe tener un buen Problema de clase?

Noticias

Cordial saludo,
Es un gusto para nosotros la participación de usted en nuestro cursillo.

Vamos a realizar la Segunda actividad del curso, debemos entregarla a más tardar el 3 Noviembre de 2006,

El objetivo de esta actividad es: Concertar el concepto de problema entre los participantes.

Para ello deben leer el material que se encuentra en la pestaña de **Docs: Mats via Resolucion de Problemas.** Los documentos los puedes descargar a tu computador para la revisión de estos en casa, una vez leídos, elabora y presenta un Ensayo en un documento de texto (puede ser Word o cualquier otro) donde expreses tu posición de lo que significa problema y cual es la diferencia con un ejercicio, además cuales son las características que debe tener un "buen" problema, todo esto apoyado en las lecturas y lo expuesto por ti en la actividad 1.

El ensayo no debe ser menor a tres páginas ni mayor de cinco, con interlineado de 1.5.

Tu ensayo lo puedes enviar a través de la plataforma en la siguiente forma:

ingresan a la pestaña "Tareas y Activs" y envían su documento- solución mediante el link "enviar respuesta". También puede enviar su documento-solución a través del correo: respro_redumac@hotmail.com

No olviden participar en los Foros. Queremos conocer tus opiniones además es una buena oportunidad para hacer contacto con los otros participantes.

Soluciones de los participantes

YAMID ALEJANDRO MOSQUERA SOTOMAYOR (Estudiante de ingeniería de Sistemas UNICAUCA)

El Problema

Cuando hablamos de problema, lo más usual es imaginarnos una situación especial que requiere de toda nuestra atención, esta situación suele ser perturbadora para nuestro entorno, **la filosofía** define problema como una situación que incomoda a quien la tiene y que desesperadamente quisiera salir de ella. Considero que el simple hecho de definir esta palabra "problema" en matemáticas es un verdadero problema valga la redundancia, muchos autores han dado sus diferentes puntos de vista, y con esto volvemos a la situación inicial filosófica de que no hay verdad absoluta, no podemos afirmar la respuesta a la pregunta "¿qué es el problema?", en este breve ensayo especularé sobre una definición que repito no es verdad absoluta.

Se considera problema a "toda situación en la que hay un planteamiento inicial y una exigencia que obliga a transformarla". Se añade como condición que "la vía de solución tiene que ser desconocida y que la persona quiere realmente realizar la transformación". (Citado en Estrategias de resolución de problemas en la escuela).

Para que podamos hablar de problema lógicamente debemos partir de algo, si bien el enunciado de lo que se desea resolver, o la situación que se requiera representar para hallar una solución, toda situación debe tener un punto de inicio, donde se debe especificar claramente que es lo que se busca, no podemos iniciar la búsqueda de una solución sin saber qué es lo que se desea hallar, posterior a esto debemos tener en claro que debemos transformar ciertos datos para poder encontrar la solución, y para poder utilizar nuestras herramientas que si bien no conocemos tratar de descubrirlas para su posterior utilización, con esto quiero tocar un punto importante y es que existen dos tipos de problema: 1. Problema con solución. 2. Problema sin solución.

Pueden existir problemas que aunque nosotros no podamos resolverlos tienen una solución, una solución que puede salir de nuestra realidad, y que nuestras herramientas no funcionarían para su hallazgo, conjeturo que una de estas por ejemplo, es el "teorema de Goldbach", aunque esto depende de cómo veamos esta situación, alguien podría decir que eso no tiene demostración y probarlo por uno de los dos teoremas de la incompletitud de Kurt Gôdel, pero aun así habría carencia de respuestas, respuestas apetecidas por muchos matemáticos que estoy seguro relacionarían esta situación con la palabra que tratamos en este ensayo.

Algunas de las diferencias que considero son mas importantes entre problema y ejercicio es que el ejercicio generalmente consiste en PRACTICAR una técnica o herramienta matemática, y en el problema no existe un camino definido para encontrar la solución, los ejercicios son útiles puesto que es como la práctica que tiene un atleta para poder correr y saltar después, debe perfeccionar estas técnicas para su utilización, igual en las matemáticas debemos considerar ejercicios con los que podamos interactuar con la herramienta y perfeccionar la técnica para saber los casos donde podemos usarla.

Las definiciones de problema difieren mucho en las personas con diferentes edades, los niños suelen decir lo que escuchan de sus mayores, o situaciones que parecen graciosas para ellos, cuando se avanza, la definición cambia un poco, y pensamos en un número con logaritmos, ecuaciones de grado superior, desigualdades, y todo lo que tenga una o más incógnitas, podría decirse que se acerca más a la definición que se ha hablado en este texto, aun en la universidad podemos confundir el problema con el ejercicio, y hablar de estos dos como si fueran uno mismo.

Hay algunas definiciones que me parece interesante anotar:

1. Por problema los matemáticos entienden las cuestiones que dejan en blanco una parte de la proposición (Leibnitz).
2. Problema es una proposición práctica demostrativa por la cual se afirma que algo puede o debe ser hecho (Wolff).
3. Problema es una oportunidad vestida con ropa de trabajo (Henry J. Kaiser)

Esta última me parece que describe gran parte de lo que hemos dicho, refiriendo a trabajo como todo lo que debemos hacer para poder encontrar la meta o la salida a esta situación matemática que a muchos nos emociona y que a otros puede parece aburridor, el problema ha sido lo que en mi opinión ha llevado a que las matemáticas no sean un ciencia estática quiero decir con esto, que la matemática evoluciona, en el proceso de resolver problemas se han podido encontrar soluciones a otros ya planteados y con estos descubrimientos intentar una vez mas lo que se creía indemostrable.

Como parte del problema no debemos ignorar un aspecto fundamental y es la solución, hablo para el primer tipo de problema, la solución es la meta del problema, muchos caminos dependiendo del problema llevan a esta, es la parte final de nuestra perturbación como se diría en la definición filosófica, es la satisfacción del apasionado por el problema matemático, el descanso de aquel que le aburre, he identificado cinco características que creo son importantes para un problema.

Características de un buen problema

1. Debe conducir a respuestas significativas.
2. Evitar que se formen otros problemas que puedan conducir a un sinfín de preguntas.
3. Debe ser claro en lo que se pide.
4. Tener solución.
5. Proporcionar datos importantes.

1. Debe conducir a respuestas significativas: Considero que para que el problema sea de buena estimación, los resultados que arroje no deben ser insignificantes, al menos para la persona que se ha adueñado del problema, estos datos deberán ser de mucha importancia ya que su empeño y tiempo así lo ameritan.
2. Evitar que se formen otros problemas que puedan conducir a un sinfín de preguntas: El problema no debe conducir a muchos otros problemas que puede involucrar que se pierda el objetivo, no digo que no debe suceder esto porque seguramente para ello se debe requerir que se analicen problemas pequeños que hacen parte de la solución del todo, pero el problema no debe llevar a preguntas donde se envuelva en un círculo vicioso, entendiendo esto como un problema si meta.
3. Debe ser claro en lo que se pide: No se puede empezar la búsqueda de una solución sino se tienen claros los objetivos, y para que esto se tenga claro, el problema debe ser especifico en lo que busca, ya que si no lo es, podríamos empezar algo, y después de un proceso muy adelantado descubrir que en realidad no se ha pedido nada.
4. Tener solución: Todo buen problema debe poseer una solución tentativa, o al menos poder conjeturar de que tiene una solución o hipótesis. La pasión y esfuerzo dedicada a el merece una respuesta.
5. Proporcionar datos importantes: El problema no debe contener cosas que puedan ayudar a perder el propósito o confundir lo que se pide, los datos que se proporcionan deben ser de vital importancia para el problema, en una forma de composición fuerte, sin datos buenos no hay problema bueno.

Lic. AURA SANDOVAL TORRES (Barranquilla, Colombia)

ENSEÑANZA DE LAS MATEMATICAS VIA SOLUCION DE PROBLEMAS

Pongo de manifiesto como al concepto de Problema le hemos encontrado muchos sentidos, incluso los niños lo observan cada uno de forma diferente, una prueba de ello es el comentario hecho por unos estudiantes a su maestra de preescolar en "INTRODUCCIÓN A LA DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS. ACTIVIDAD MATEMÁTICA Y RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS" de Vicenç Font Departamento de Didáctica de las CCEE y de la matemática de la Universidad de Barcelona. Donde el autor de dicho artículo comenta: "1) Los alumnos, en las primeras edades necesitan una contextualización real y creíble, para poder dar una respuesta. Las actividades de resolución de problemas en las primeras edades han de comenzar dentro de un "escenario" real y, si es posible, que esté pasando en este momento. 2) En el ciclo inicial de primaria muchos alumnos dan respuestas que sirven de guía para los problemas que se han de plantear en clase. 3) Lo que para algunos es un problema, para otros es simplemente un ejercicio. De aquí la importancia de ofrecer a cada uno de los alumnos problemas adecuados a sus necesidades. 4) Hay que procurar ofrecer una gran variedad de problemas".

Normalmente en nuestro quehacer cotidiano, enfrentamos a los estudiantes a muchos ejercicios; que no pasan de ser "ejercicios numéricos", pues lo que hacen los educandos es repetir el esquema que el docente le plantea dentro de la clase magistral. Ellos se ven abocados a seguir una guía pues no hacen el esfuerzo por ver como "problema" determinadas situaciones que dado el caso lo podrían ser. De alguna manera imitan nuestra conducta y si el educador no hace un real esfuerzo por "problematizar" algunas situaciones, obviamente los estudiantes tampoco tendrán la oportunidad de enfrentar en su vida escolar una verdadera situación "problema".

Apuntando a lo anterior hacemos referencia al texto escrito por Juan Ignacio Pozo Editorial Santillana Madrid, 1994, en el cual nos brinda unos pasos para convertir los ejercicios rutinarios en verdaderas situaciones "problema"; "ALGUNOS CRITERIOS QUE PERMITEN CONVERTIR LAS TAREAS ESCOLARES EN PROBLEMAS EN VEZ DE EN SIMPLES EJERCICIOS En el planteamiento del problema

1. Plantear tareas abiertas, que admitan varias vías posibles de solución e incluso varias soluciones posibles, evitando las tareas cerradas.

2. Modificar el formato o definición de los problemas, evitando que el alumno identifique una forma de presentación con un tipo de problema.

3. Diversificar los contextos en que se plantea la aplicación de una misma estrategia, haciendo que el alumno trabaje los mismos tipos de problemas en distintos momentos del currículo y ante contenidos conceptuales diferentes.
4. Plantear las tareas no sólo con un formato académico sino también en escenarios cotidianos y significativos para el alumno, procurando que el alumno establezca conexiones entre ambos tipos de situaciones.
5. Adecuar la definición del problema, las preguntas y la información proporcionada a los objetivos de la tarea, utilizando, en distintos momentos, formatos más o menos abiertos, en función de esos mismos objetivos.
6. Utilizar los problemas con fines diversos durante el desarrollo o secuencia didáctica de un tema, evitando que las tareas prácticas aparezcan como ilustración, demostración o ejemplificación de unos contenidos previamente presentados al alumno".

La otra cara de la moneda radica en lo que para algún estudiante puede representar un problema, pueda que para otro no lo sea; ya sea porque no lo ve como tal o porque la solución a dicho problema está a la alcance de su mano. Con esto nos acercamos un poco al concepto de "problema" que se plantea en el texto creado para el curso "enseñanza de las matemáticas vía solución de problemas": Para Polya en su libro Mathematical Discovery. Tener un problema significa "buscar conscientemente con alguna acción apropiada, una meta claramente concebida pero no inmediata de alcanzar" (Polya 1962, citado en Santos 1994, p.30). Más sin embargo ALAN SCHOENFELD nos plantea en el mismo texto que tener un problema implica una tarea que es difícil para el individuo que la está intentando resolver y esta dificultad debe ser una prueba más intelectual que computacional 1. (Schoenfeld, 1985, p.74). En este mismo texto nos ubican en las condiciones necesarias para que exista un "problema":

La existencia de al menos una persona para la cual haya una tarea o una situación que represente un problema.

- El camino para resolver tal situación no existe o las técnicas generalmente usadas no funcionan.
- interés de transformar o un deseo de realizar la transformación del problema, es decir, que exista una motivación para querer resolver el problema y no abandonarlo a medida que se agotan los caminos para encontrar la solución.

Todo esto nos lleva a considerar que, por lo regular los “problemas” que traen los libros de textos que se utilizan en el aula con los educandos traen sólo ejercicios numéricos que no tienen la connotación ni la complejidad que implica un verdadero problema (según los Polya y Schoenfeld), esto nos obliga a revisar de manera más detallada el sentido del texto guía en clase y de la real implicación de la tarea para llevar a casa. Es posible que sólo estemos ofreciendo a nuestros estudiantes una serie de ejemplos y ejercicios mecánicos en los cuales ellos solo pongan a funcionar la repetición de una fórmula o de una estructura para solucionarlo, y no los estemos llevando al extremo de una situación (ya sea de la vida cotidiana o imaginaria) en la cual pongan a prueba no sólo el tema valorado sino también busquen caminos nunca antes recorridos para hallar una solución a lo que se está enfrentando.

Me parece importante señalar nuevamente la real distinción entre ejercicio y problema.

Para resolver un ejercicio, uno aplica un procedimiento rutinario que lo lleva a la respuesta. Para resolver un problema, uno hace una pausa, reflexiona y hasta puede ser que ejecute pasos originales que no había ensayado antes para dar la respuesta.

Esta característica de dar una especie de paso creativo en la solución, no importa que tan pequeño sea, es lo que distingue un problema de un ejercicio.

Sin embargo, es prudente aclarar que esta distinción no es absoluta; depende en gran medida del estadio mental de la persona que se enfrenta a ofrecer una solución: Para un niño pequeño puede ser un problema encontrar cuánto es 3 + 2. O bien, para niños de los primeros grados de primaria responder a la pregunta ¿Cómo repartes 96 lápices entre 16 niños de modo que a cada uno le toque la misma cantidad? le plantea un problema, mientras que a uno de nosotros esta pregunta sólo sugiere un ejercicio rutinario: dividir.

SANDY SÁNCHEZ DOMÍNGUEZ

Departamento de Matemática. Universidad de Oriente. Cuba

Resolución de Problemas Tarea 2

Según exponen los profesores cubanos L. Campistrous y C. Rizo en su libro “Aprende a resolver problemas matemáticos”, la capacidad de resolución de problemas se ha convertido en el centro de la enseñanza de la Matemática en la época actual, por lo que es necesario contar con una concepción de su enseñanza que ponga en primer lugar la capacidad de resolución de problemas y el desarrollo del pensamiento lógico. En opinión de estos autores, a partir de estas ideas centrales es que debe ser determinado el contenido de la enseñanza.

Para las ciencias Matemáticas un problema es una pregunta sobre objetos y estructuras que requieren una definición y demostración. En otras palabras un problema matemático consiste en la búsqueda de cierta entidad matemática que permite satisfacer las condiciones del problema. Los problemas matemáticos pueden ser geométricos, de cálculo y no algebraicos.

Para resolver problemas no existen fórmulas mágicas; no hay un conjunto de procedimientos o métodos que aplicándolos lleven necesariamente a la resolución del problema (aún en el caso de que tenga solución). Pero de ahí no hay que sacar en consecuencia una apreciación ampliamente difundida en la sociedad: la única manera de resolver un problema sea por "ideas luminosas", que se tienen o no se tienen.

Es evidente que hay personas que tienen más capacidad para resolver problemas que otras de su misma edad y formación parecida. Que suelen ser las que aplican (generalmente de una manera inconsciente) toda una serie de métodos y mecanismos que suelen resultar especialmente indicados para abordar los problemas. Son los, procesos que se llaman "heurísticos": operaciones mentales que se manifiestan típicamente útiles para resolver problemas. El conocimiento y la práctica de los mismos es justamente el objeto de la resolución de problemas, y hace que sea una facultad entrenable, un apartado en el que se puede mejorar con la práctica. Pero para ello hay que conocer los procesos y aplicarlos de una forma planificada, con método.

En cambio un ejercicio es una exigencia que propicia la realización de acciones, solución de situaciones, deducción de relaciones, cálculo, etcétera. De cada acción debe precisarse el objetivo que nos mueve a transformar la premisa para obtener la tesis; el contenido que comprenden los tipos de acciones (identificar, comparar, clasificar, fundamentar etcétera), el objeto de las acciones (conceptos, proposiciones, procedimientos algorítmicos), la correspondencia entre situaciones extramatemáticas y matemáticas, los procedimientos heurísticos y los medios heurísticos auxiliares.

Se supone muchas veces que un ejercicio puede ser convertido en un problema proponiéndolo dentro de un contexto verbal, esto es, convirtiéndolo en un ‘enunciado verbal’. Su propósito principal es velocidad y precisión, no creatividad, ni intuición ni integración. Ellos son útiles como experiencias para adquirir destrezas en el lenguaje matemático, pero el agregarle el lenguaje no matemático no les cambia su naturaleza básica (p.65)

Para nuestro caso en la tarea 1, los problemas como el de la edad, el de las palomas y el de los cubos eran tan solo ejercicios que siguiendo unas pocas reglas se pudo resolver, en cambio el problema de las ovejas, en el cual el estudiante debe razonar en cuanto a la combinación de enteros que cumplan una relación, o el ejercicio de lo postes el estudiante debe detenerse y pensar en la mejor variante de solución.

En ocasiones resulta conveniente para obtener habilidades en la resolución de problemas la siguiente estrategia

- Comenzar resolviendo un problema semejante más fácil.
- Hacer experimentos, observar, busca pautas, regularidades. Hacer conjeturas. Tratar de demostrarlas.
- Dibujar una figura, un esquema, un diagrama. En general es siempre útil una representación geométrica del asunto a tratar.
- Escoger un lenguaje adecuado, una notación apropiada.
- Inducción.
- Supongamos que no es así.
- Supongamos el problema resuelto.
- Si tenemos una receta y estamos seguros de que se ajusta al problema, aplicarla.

Desde el punto de vista pedagógico, podemos afirmar que un problema matemático puede ser o no un buen problema matemático condicionado a los objetivos que se quieran evaluar, de la situación histórica – concreta que enmarque el contexto del problema, de la cultura matemática del que lo va a resolver.

Un "problema" sería una cuestión a la que no es posible contestar por aplicación directa de ningún resultado conocido con anterioridad, sino que para resolverla es preciso poner en juego conocimientos diversos, matemáticos o no, y buscar relaciones nuevas entre ellos. Pero además tiene que ser una cuestión que nos interese, que nos provoque las ganas de resolverla, una tarea a la que estemos dispuestos a dedicarle tiempo y esfuerzos. Como consecuencia de todo ello, una vez resuelta nos proporciona una sensación considerable de placer. E incluso, sin haber acabado el proceso, sin haber logrado la solución, también en el proceso de búsqueda, en los avances que vamos realizando, encontraremos una componente placentera.

Para desarrollar habilidades en la resolución de problemas es importante el trabajo personal, de la práctica adquirida resolviendo problemas y de la reflexión sobre esa práctica. No es posible convertirse en un solucionista experto mediante la mera lectura pasiva de un libro, mucho menos si de matemática se trata, se dice que la matemática se estudia con el lápiz, del mismo modo que no es posible convertirse en un buen nadador o pianista simplemente leyendo. Sin embargo el conocimiento de las técnicas apropiadas y de los errores tópicos que es preciso evitar puede ser tan útil para el que resuelve problemas como lo es para el nadador o el pianista.

A modo de conclusión creo que como bien se refleja en este pequeño trabajo la resolución de problemas es fruto del esfuerzo personal de cada estudiante en aras de adquirir las habilidades que le conllevan a la solución de nuevos retos.

ALEXANDER GORINA SÁNCHEZ

Departamento de matemática. Universidad de Oriente. Cuba

ALGUNAS ARISTAS DEL PROBLEMA MATEMÁTICO

Introducción

La gran tarea de la Matemática en este siglo XXI es seguir contribuyendo de múltiples formas al progreso de la cultura humana y una de las formas de llevar a cabo esta contribución es conservando y transmitiendo el legado matemático acumulado durante muchos siglos de conocimiento. Sin embargo, transmitir de la mejor manera esa riqueza cultural es un trabajo extraordinariamente complejo, que requiere de un esfuerzo sistemático por parte de la comunidad matemática.

La enseñanza de esta ciencia afecta a millones de jóvenes y adolescentes. Este carácter eminentemente social y cultural, junto a la complejidad y dificultades detectadas en el aprendizaje de la misma, han contribuido a despertar la preocupación por el estudio de los procesos de comunicación, transmisión y comprensión de la Matemática y a interesar al respecto, a una amplia comunidad científica, que viene investigando desde hace mucho tiempo en este campo.

En esta dirección, no han sido pocos los investigadores que se han dedicado a escudriñar las formas misteriosas en que la mente humana actúa en el acto creativo de la resolución de problemas matemáticos. Un ejemplo de ello son los estudios de G. Polya, continuadores de las ideas de Descartes, Leibniz, Euler, Poincaré, Hadamard, y que han dado lugar a muchas investigaciones posteriores.

En correspondencia con lo anterior, resulta pertinente que todos aquellos profesores o maestros que tengan la gran responsabilidad de formar la cultura matemática en las nuevas generaciones, tengan pleno dominio de las siguientes interrogantes: ¿Qué es un problema matemático? ¿Cuál es su diferencia con un ejercicio? ¿Cuáles son las características que debe tener un "buen problema matemático"? La respuestas a estas interrogantes, sin pretender ser exhaustivos, constituyen el objetivo del presente trabajo.

¿Qué es un problema matemático?

Para empezar a dilucidar lo que es un problema comenzaremos con la etimología de dicha palabra. Este vocablo viene del griego $\pi\rho o\beta\alpha\lambda\lambda\varepsilon\iota\upsilon$ (problema) que quiere decir "proyección, algo lanzado hacia delante".

En la actualidad se ha sistematizado el término problema desde diferentes perspectivas, por lo que resulta necesario discernir cuales son aquellos aspectos principales que lo configuran y por lo tanto no se pueden obviar.

Se empezará el análisis considerando que "un problema es un obstáculo arrojado ante la inteligencia para ser superado, una dificultad que exige ser resuelta, una cuestión que reclama ser aclarada". (negrillas añadidas) (Nieto, 1993, p. 105). Todos vivimos resolviendo problemas: desde el más básico de asegurar la cotidiana subsistencia, común a todos los seres vivos, hasta los más complejos desafíos planteados por la ciencia y la tecnología. La importancia de la actividad de resolución de problemas es evidente; en definitiva, todo el progreso científico y tecnológico, el bienestar y hasta la supervivencia de la especie humana dependen de esta habilidad.

Para (Rohn, 1984, p. 33) "Un sistema de proposiciones y preguntas puede, para un grupo de alumnos en un determinado momento, ser un problema, más tarde puede que ya no sea un problema." Esta situación puede entenderse como "la relatividad de cierto problemas matemático", pues una vez resuelto el mismo por el grupo de alumnos deja ya de serlo para dicho grupo (en principio), pero no así para un grupo diferente, incluso dentro de un grupo puede serlo para algunos individuos y para otros no, depende de la vivencia histórico-concreta de cada individuo. Desde la perspectiva anterior, los ejercicios correspondientes a la actividad 1, en mi caso particular no constituían problemas matemáticos, pues o bien eran muy fáciles o bien ya los había realizado anteriormente, lo que no niega que sea similar para otro sujeto.

Resulta interesante recurrir a la conclusión del investigador Walter O. Beyer K.[5], el cual al hacer una breve excursión a través del pensamiento de diversos autores acerca de lo que ellos conciben por problema, permite vislumbrar una definición del término o por lo menos una aproximación a ésta:

"…se notan diversos elementos comunes que hacen la esencia de lo que es un problema. Obstáculo, dificultad, reto; razonamiento, pensamiento reflexivo; desconocimiento de la solución por parte del alumno y el que ésta no dependa de disponer de un algoritmo que las genere inmediatamente, son algunos de los elementos que caracterizan un problema."

[5] ALGUNAS PRECISIONES ACERCA DE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS Y DE SU IMPLEMENTACIÓN EN EL AULA. http://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=847230

Para concluir el acercamiento a la definición de problema, a continuación se brinda la definición de la investigadora Isabel Alonso Berenguer, cuando en su tesis doctoral define un problema matemático como: una situación matemática que contempla tres elementos: objetos, características de esos objetos y relaciones entre ellos; agrupados en dos componentes: condiciones y exigencias relativas a esos elementos; y que motiva en el resolutor la necesidad de dar respuesta a las exigencias o interrogantes, para lo cual deberá operar con las condiciones, en el marco de su base de conocimientos y experiencias. Esta definición es la que en el presente trabajo se asume como problema matemático, pero es pertinente hacer algunos comentarios con relación a las premisas para el establecimiento de esta definición, se tiene que:

- Para que una situación matemática represente un problema para un individuo, ésta debe contener una dificultad intelectual y no sólo operacional o algorítmica. Además debe suceder que la persona de manera consciente reconozca la presencia de la dificultad y la situación pase a ser objeto de interés para la misma, o sea, que exista una disposición para resolverla.
- La base de conocimientos requerida puede estar compuesta por conocimientos y experiencias que se han adquirido y acumulado previamente o puede ser ampliada al abordar el problema, mediante consulta de textos o de personas capacitadas.
- En todo problema aparece al menos un objeto, que puede ser matemático como un triángulo, un número, una ecuación, etc., o puede ser real, como un camino que enlace dos puntos, un río, un poste, etc. También pueden aparecer objetos de ambos tipos, de todas formas los objetos reales en el proceso de resolución del problema deben representarse matemáticamente para poder aplicar los métodos de esta ciencia.

- Junto a los objetos, en cada problema suele aparecer una serie de características de los mismos, algunas de carácter cuantitativo como longitudes, volúmenes, número de vértices, aristas, etc. y otras cualitativas como el tipo de triángulo (equilátero, isósceles, escaleno o rectángulo), el tipo de camino (recto, curvo, poligonal), etc. También pueden aparecer relaciones entre los objetos, tales como relaciones de distancia, tangencia, semejanza, equivalencia, congruencia, etc.
- Las condiciones del problema son conformadas por algunos objetos, características de estos y relaciones entre los mismos, que son dadas en la formulación del problema. La exigencia o

interrogante a la cual hay que dar respuesta también se expresa en términos de objetos, características o relaciones.

- Si la dificultad que presenta la situación matemática es sólo algorítmica, es decir, si el conocimiento previo incluye un programa bien preciso para su solución, no lo consideramos problema, sino ejercicio.

Con relación a este último comentario a continuación se darán más elementos.

¿Cuáles es la diferencia de problema y ejercicio?

Primeramente debe enfatizarse en el hecho de que persiste la confusión en muchos autores de textos, entre problema y ejercicio. Se trata aquí no de un mero problema semántico sino de discriminar los roles que cada uno de ellos juegan en la enseñanza-aprendizaje de la matemática.

Según Dwyer y Elligett, (1970), señalan:

> Es, en consecuencia, importante examinar la diferencia entre un ejercicio y un problema, desde el punto de vista del niño. Un ejercicio matemático tiene las mismas características que un ejercicio físico. Él es el uso repetido de destrezas -calistenia- tal que ellas [las destrezas] se desarrollen, sean retenidas, y sean puestas a tono. Un cantante practica la escala musical para tener precisión en el tono; un atleta trota para mantenerse en forma; un alumno hace ejercicios matemáticos para mantener e incrementar sus habilidades. Un ejercicio es un conjunto aislado de conductas las cuales no están relacionadas con nada más allá de él mismo (p. 64).

Acotan estos mismos autores (Op. Cit., p. 65) que:

> Se supone muchas veces que un ejercicio puede ser convertido en un problema proponiéndolo dentro de un contexto verbal, esto es, convirtiéndolo en un 'enunciado verbal'. [...] Su propósito principal [el de los ejercicios] es velocidad y precisión, no creatividad, ni intuición ni integración. Ellos son útiles como experiencias para adquirir destrezas en el lenguaje matemático, pero el agregarle el lenguaje no matemático no les cambia su naturaleza básica (p.65)

Hay una diferencia básica entre el concepto "problema" y "ejercicio". No es lo mismo hacer un ejercicio que resolver un problema. Una cosa es aplicar un algoritmo de forma más o menos mecánica, evitando las dificultades que introduce la aplicación de reglas cada vez más complejas, y otra, resolver un problema, dar una explicación coherente a un conjunto de datos relacionados dentro del contexto. La respuesta suele ser única, pero la estrategia resolutoria está determinada por factores madurativos o de otro tipo. La estrategia de resolución de problemas es mucho más rica que la aplicación mecánica de un algoritmo, pues implica crear un contexto donde los datos guarden una cierta coherencia. Desde este análisis se han de establecer jerarquías: ver qué datos son prioritarios, rechazar los elementos distorsionadores, escoger las operaciones que los relacionan, estimar el rango de la respuesta, etc.

Un ejercicio es una exigencia que propicia la realización de acciones, solución de situaciones, deducción de relaciones, cálculo, etcétera. De cada acción debe precisarse el objetivo que nos mueve a transformar la premisa para obtener la tesis; el contenido que comprenden los tipos de acciones (identificar, comparar, clasificar, fundamentar etcétera), el objeto de las acciones (conceptos, proposiciones, procedimientos algorítmicos), la correspondencia entre situaciones extramatemáticas y matemáticas, los procedimientos heurísticos y los medios heurísticos auxiliares.

La exposición sucesiva de los estudiantes a ejercicios repetitivos, en realidad fomenta el aprendizaje memorístico de algoritmos y procedimientos rutinarios sin una plena comprensión de los principios implicados. En el enfoque tradicional los posibles resultados (muchas veces previsibles o conocidos) y los datos iniciales guían con frecuencia el proceso de resolución, más que la situación inicial de partida que se plantea en el enunciado.

Una vez analizadas las dos primeras interrogantes, restaría abordar la siguiente:

¿Cuáles son las características que debe tener un “buen problema matemático”?

Se comenzará insistiendo que en primer lugar un “buen problema matemático” tiene que cumplir las exigencias analizadas anteriormente con relación a la definición de problema matemático y en especial con la definición que se asume en el presente trabajo.

Además, desde el punto de vista pedagógico, podemos afirmar que un problema matemático puede ser o no un buen problema matemático condicionado a los objetivos que se quieran evaluar, de la situación histórica – concreta que enmarque el contexto del problema, de la cultura matemática del resolutor, etc.

Por ejemplo, los tres problemas célebres de la antigüedad: la cuadratura del círculo, la trisección del ángulo y la duplicación del cubo (Ver González, 1995). Dichos problemas fueron tratados por varias generaciones de matemáticos, hasta que al fin fueron resueltos; paradójicamente, la solución es que ellos son insolubles bajo las condiciones que establecieron los griegos (sólo era permitido emplear regla y compás). Aquí se puede apreciar el carácter histórico – concreto del problema matemático y por tanto relativo, Este mismo problema en la actualidad puede catalogarse un buen problema matemático para un resolutor mientras que para otro no.

Además, cabría señalar el Teorema de los Cuatro Colores (resuelto en 1976, por Appel y Haken) y el Último Teorema de Fermat (resuelto en 1993-94, por Wiles). Todo parece indicar que se puede afirmar que estamos en presencia de un buen problema matemático, si el problema además de cumplir las cualidades de la propia definición, está en correspondencia con la cultura matemática del resolutor en una situación histórica – concreta.

Puede señalarse que existen buenos problemas matemáticos incluso para la humanidad, pues en este caso se reta la cultura matemática alcanzada por la humanidad para resolver dichos problemas, aunque con el desarrollo continuo de en la teoría matemática dichos problemas podrían ser resueltos posteriormente.

Lo cierto es que todos estos problemas (ya resueltos) y muchos otros (no resueltos aún), como la conjetura de Goldbach, la conjetura de Poincaré o el problema de la infinitud de los números primos gemelos, han atraído y atraen la atención de los matemáticos, siendo una de las fuerzas motrices más importantes para el desarrollo de la disciplina. Con base en esto, el famoso matemático Paul Halmos escribió en 1980 un célebre artículo intitulado "The Heart of Mathematics" (El Corazón de la Matemática) en el cual resalta, precisamente, el papel de los problemas en el desarrollo de la matemática. Éstos son su corazón. Pero, dejemos que sea el mismo Halmos quien nos lo diga:

La matemática seguramente no existiría sin estos ingredientes; ellos son todos esenciales. Es, sin embargo, un punto de vista tentador que ninguno de ellos es el corazón de la disciplina, que la razón principal de existir del matemático es resolver problemas, y que, por lo tanto, de lo que realmente consiste la matemática es de problemas y soluciones. (p. 519).

A modo de conclusión, se han respondido las tres interrogantes planteadas al iniciar el presente trabajo, pero cabe señalar que de ninguna manera se ha pretendido agotar el dominio de las posibles respuestas y es evidente que pueden y deben ser sometida a profundas reflexiones y debates en aras de adecuarse cada vez más a las exigencias formativas de los tiempos actuales.

Bibliografía

Alonso, I. (2001). *La resolución de problemas matemáticos*. Una alternativa didáctica centrada en la representación. Tesis Ph. D. Universidad de Oriente. Cuba.

Alvarez, C. (1995). Fundamentos teóricos de la dirección del proceso docente educativo en la Educación Superior Cubana. Ministerio de Educación Superior. Cuba.

Beber, W. O. (¿?). *Algunas Precisiones acerca de la Resolución de Problemas y de su Implementación en el Aula.* Disponible el 2 de noviembre de 2008 en http://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=847230

Dwyer, R. y Elligett, J. (1970). *Teaching children through natural mathematics*. New York: Parker Publishing Co.

González, F. (1995). *El corazón de la Matemática*. Maracay: Copiher.

Halmos, P. (1980). *The heart of mathematics*. The American Mathematical Monthly, 87(7), pp. 519-524.

Nieto, J. (1993). *Problemas y soluciones*. Divulgaciones Matemáticas.

Rohn, K. (1984). *Consideraciones acerca de la "enseñanza problémica" en la enseñanza de la matemática* (I). Boletín de la Sociedad Cubana de Matemática, 2.

Foro

Objetivo:

- Discutir las opiniones de los participantes sobre la concepción de problema y determinar si hay cambios en la dicha concepción.
- Generar espacios de discusión con los participantes

La Concepción de Problema

Posted by Andrés Latorre on 11/02/08 10:22 PM

Un Afectuoso saludo a todos los participantes,

El objetivo de este foro es discutir sobre la concepción de problema que tiene cada participante y determinar si hubo cambios en dicha concepción a partir de los documentos propuestos en la actividad 2 y lo investigado por ustedes.

Según lo expuesto en los documentos y tú ensayo:

¿Cómo ha cambiado tu concepción de problema?

¿Cuál crees que son las características que debe tener un buen Problema de clase?

2: Re: Res: La Concepción de Problema (response to 1)

Posted by Sandy Sánchez Dominguez on 11/03/08 03:35 PM

Saludos a todos.

¿Cómo ha cambiado tu concepción de problema?

La concepción de problema que yo tenía inicialmente ha cambiado, ahora he tenido la posibilidad de profundizar con relación a dicha concepción, me basaba en lo fundamental en mis experiencias personales como docente, ahora he profundizado a través del análisis de ciertos materiales teóricos. Ahora mi representación de problema ha cambiado y estoy seguro que seguirá cambiando en la medida que siga enriqueciendo mi cultura en dicho tema.

¿Cuál crees que son las características que debe tener un buen Problema de clase?

Estamos en presencia de un buen problema matemático, si en primer lugar el problema cumple con la definición de problema, si además está en correspondencia con la cultura matemática de los estudiantes. Podemos afirmar que un problema matemático puede ser o no un buen problema matemático condicionado a los objetivos que se quieran evaluar, de la situación concreta que enmarque el contexto del problema, etc.

Atte. Sandy Sánchez Domínguez

3: Re: Res: La Concepción de Problema (response to 1)

Posted by Alexander Gorina Sánchez on 11/03/08 03:56 PM

Saludos a todos

¿Cómo ha cambiado tu concepción de problema?

La concepción de problema que yo tenía inicialmente ha cambiado con relación a algunos aspectos, ya que no me había detenido a analizar las especificidades que distinguen un problema. Tenía una concepción de problema pero muy precaria y sustentada en mi experiencia empírica y no en el análisis de materiales teóricos. Además, pude evaluar diversas definiciones de problemas y sistematizar aquellos elementos indispensables que conforman un problema. Ahora tengo una concepción de problema más vigorizada (es decir mi representación de problema ha cambiado) pero además encontré una definición operativa que me parece pertinente.

¿Cuál crees que son las características que debe tener un buen Problema de clase?

Todo parece indicar que se puede afirmar que estamos en presencia de un buen problema matemático, si el problema además de cumplir las cualidades de la propia definición de problema, está en correspondencia con la cultura matemática del resolutor en una situación histórica – concreta. Desde el punto de vista pedagógico, podemos afirmar que un problema matemático puede ser o no un buen problema matemático condicionado a los objetivos que se quieran evaluar, de la situación histórica – concreta que enmarque el contexto del problema, de la cultura matemática del resolutor, etc.

Atte. Alexander Gorina Sánchez

4: La Concepción de Problema (response to 1)

Posted by SISSILE QUINTANA CURREA on 11/05/08 08:40 PM

Hola queridos compañeros y tutores.

¿Cómo ha cambiado tu concepción de problema?

Después de analizar la parte teórica relacionada con la unidad 2 puede observar que la concepción de problema que yo tenía si ha cambiado, porque el hecho de profundizar con dicho concepto me permite discernir a que se llama problema en la educación, me permite hacer comparaciones con mi experiencia como docente dentro del aula, y analizar que cosas caracterizan esta herramienta de aprendizaje y el tener diferentes puntos de vista teóricos me permite cuestionarme acerca de la utilidad que esto puede brindarle a un alumno, además nos permite acercar de una manera didáctica a los estudiantes con relación al contexto que viven.

¿Cuál crees que son las características que debe tener un buen Problema de clase?

Pues un buen problema matemático debe tener ciertas características esenciales según el tema que se busque evaluar, fortalecer o explicar.

Se debe adecuar al contexto en el cual los alumnos estén inmersos, debe tener una definición adecuada para ser problema, ser manejado en un contexto y lenguaje matemático, presentar una serie de variables que cuestionen a los muchachos, tener un Algoritmo claro que pueda ser aplicado para dar una respuesta lógica a la o las variables presentadas.

Atte: Sissile Quintana Currea

5: Re: Res: La Concepción de Problema dos (response to 1)

Posted by Alexander Gorina Sánchez on 11/05/08 10:47 PM

Saludos a todos...

El cursillo me está gustando mucho... !!!, las actividades 1 y 2 me han hecho reflexionar mucho y enriquecer mi cultura con relación a las diferentes aristas de los problemas (de cualquier naturaleza) , y en especial de los problemas matemáticos, considero que la diferencia principal entre dichos problemas está dada por los objetos que se empleen para solucionarlos.

Los problemas de la actividad 3 son extraordinarios, mi colega y mi amigo Sandy comparte también este criterio, hemos dedicado bastante tiempo para analizarlos, resolverlos y tratar de brindar soluciones bien argumentadas.

Me gustaría saber si hay alguna forma de ver las respuestas a las tareas de los demás colegas del cursillo, aunque sea una vez terminado el mismo, pues de esta forma también se aprende. También quisiera saber si una vez enviadas las tareas se puede saber cuales fueron los errores, y de ser así, si se pueden mejorar las respuestas para optar por una mejor nota. Creo que ya he preguntado bastante..., ja ja ja

Atte. Alexander Gorina Sánchez

6: Re: Res: Re: Res: La Concepción de Problema dos (response to 5)

Posted by Andrés Latorre on 11/06/08 07:56 PM

Cordial saludo,

Nos alegra mucho que hayan disfrutado de las actividades propuestas, y si haremos caso de tu propuesta sobre ver algunas de las soluciones enviadas por los participantes, ya que esto nos permitirá observar como son los diferentes caminos tomados para resolver problemas, además, el reafirmar que un problema no tiene una única solución o un único camino para encontrar la respuesta.

Esperamos que sigan participando en los foros y den sus opiniones sobre como orientar mejor nuestras clases usando la metodología en resolución de problemas.

7: Re: Res: La Concepción de Problema (response to 1)

Posted by Juan Pablo Mejia Medina on 11/11/08 12:17 PM

La concepción de problema puede verse de dos maneras distintas, una como una aplicación en contexto que involucre tanto la cultura y el entorno de los estudiantes que van a trabajar en ello como una diversificación de diferentes temas. Que los estudiantes observen cómo esos conocimientos pueden ser útiles en algunos momentos de su vida diaria. O también podríamos enmarcar un problema como no solamente una aplicación de conocimientos si no también como una toma de decisiones que puede ser implementada mediante grafos que pueden determinar que solución es la más apropiada, por ejemplo en desplazarme a mi lugar de trabajo por diferentes caminos que demanden el menor tiempo, o por ejemplo encontrar soluciones iterativamente en un polinomio con aproximación numérica.

8: Re: Res: La Concepción de Problema (response to 1)

Posted by Juan Pablo Mejia Medina on 11/11/08 12:20 PM

Para aplicar estas ideas en clases podemos utilizar algunos problemas sencillos para los estudiantes de 4 y 5 grado que le son de agrado a ellos como son los problemas de razonamiento lógico (logical reasoning problems) que en la experiencia en colegio bilingüe los estudiantes de estos grados les gusta. Podría ser un inicio para desarrollar para grados superiores razonamientos que demanden mayor complejidad y procesos de pensamiento.

Diseño Actividad 3

Objetivo

Examinar las diferentes estrategias o métodos usados por los docentes para resolver problemas.

Enviar 2 problemas sin solucionar y solicitar que se nos envíe su solución

1. Enviar un Documento con los aspectos teóricos más importantes de la metodología de Polya, el cual contenga como ejemplos los problemas dados anteriormente y su respectiva solución aplicando la teoría anteriormente descrita.

Documentos: Método Polya teoría

Solución actv 3 método Polya

Noticias

Cordial saludo para todos los participantes,
El objetivo de esta actividad es: Examinar las diferentes estrategias o métodos usados por los participantes para resolver problemas.

En las siguientes páginas aparecen algunos enunciados, con los cuales haremos lo siguiente:
Determinaremos una solución para cada uno, y la enviaremos en un documento de texto (la solución debe estar acompañada del procedimiento para obtenerla).

Les presentamos dos nuevos problemas, esperemos que se diviertan y nos envíen sus soluciones.

Problema 1:

Algunos números enteros positivos tienen una propiedad muy especial: se pueden escribir como la diferencia de dos cuadrados perfectos ¿Cuáles son esos números?

Problema 2. Un granjero amarra un Chivo en la esquina exterior de un establo de 10m por 20m. La cuerda con que lo ata es de 25 metros. El chivo puede pastar en cualquier lugar fuera del establo hasta donde la cuerda alcance. ¿Cuál es la medida del área donde el chivo puede pastar?

Soluciones de los participantes

YAMID ALEJANDRO MOSQUERA SOTOMAYOR (Estudiante de ingeniería de Sistemas UNICAUCA)

Problema 1: Algunos números enteros positivos tienen una propiedad muy especial: se pueden escribir como la diferencia de dos cuadrados perfectos ¿Cuáles son esos números?

Procedimiento:

1. ¿Qué es un cuadrado perfecto? Un cuadrado perfecto es aquel número cuya raíz pertenece a los números enteros.

2. Una lista de estos números es:

1 = 1*1

4 = 2*2

9 = 3*3

16 = 4*4

25 = 5*5

36 = 6*6

49 = 7*7

....

3. Haciendo la diferencia del término (i+1) – (i) obtengo:

4 – 1 = 3

9 – 4 = 5

16 – 9 = 7

25 – 16 = 9

36 – 25 = 11

49 – 36 = 13

64 – 49 = 15

81 – 64 = 17

Respuesta1: Números impares >= 1.

Respuesta2: En general para todo cuadrado perfecto si La resta es (i+n) – (i), siendo (i + n) la posición en un vector ordenado con estos números como componentes y n un número entero, la diferencia entre los números resultantes siempre es 2n, ejemplo:

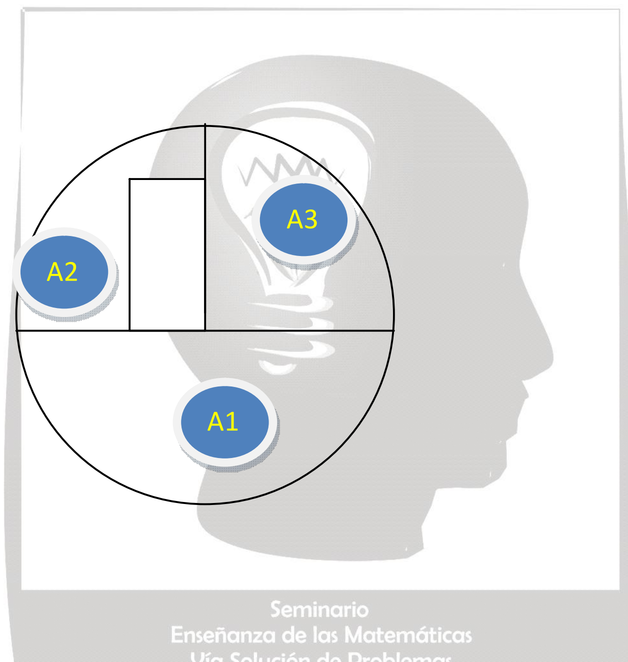
Números impares (n=1)

Posición (1+1) – 1 = 4 - 1 = 3

Posición (2+1) – 2 = 9 - 4 = 5

Diferencia = 2

Problema 2. Un granjero amarra un Chivo en la esquina exterior de un establo de 10m por 20m. La cuerda con que lo ata es de 25 metros. El chivo puede pastar en cualquier lugar fuera del establo hasta donde la cuerda alcance. ¿Cuál es la medida del área donde el chivo puede pastar?



Si el establo no estuviera, y la cuerda sujeta a ese punto, tendríamos que el radio de la circunferencia es de 25 m, y con ello el área en la que se podría mover el animal seria de:

A = ∏R*R = ∏625 = 1963 m*m

½ del área total es= 981.5 m*m

¼ del área total es= 490.75 m*m

½ + ¼ del Área es: 1472.25m*m

Ahora hallaremos 2 pequeñas áreas que hacen falta

25 – 10 = 15 m => son el radio de otro de los círculos

$A2 = \prod 225 = 706.84$ m*m

¼ de A2 = 176.71m*m

25 – 20 = 5 m => son el radio de el ultimo circulo

$A3 = \prod 25 = 78.53$ m*m

¼ de A3 = 19.63m*m

Total = 1472.5 + 176.71 + 19.63 = 1688.84 m*m

Lic. AURA SANDOVAL TORRES (Barranquilla, Colombia)

El área total que recorre el chivo es la suma de las tres cuartas partes de la circunferencia de 25 metros de radio más la cuarta parte de la circunferencia de 15 metros más la cuarta parte de la circunferencia de 5 metros de radio:

- Tres cuartas partes de la circunferencia de radio 25 metros.

$$\frac{3}{4}\left(\pi r^2\right) = \frac{3}{4}\left[3{,}14 \times (25)^2\right] = 1471{,}875$$

(+) Más

- La cuarta parte de la circunferencia de 15 metros de radio.

$$\frac{1}{4}\left[3{,}14 \times (15)^2\right] = 176{,}625$$

(+) Más

- La cuarta parte de la circunferencia de radio 5 metros.

$$\frac{1}{4}\left[3{,}14 \times (5)^2\right] = 19{,}625$$

TOTAL 1668,125 METROS

SESSILE QUINTANA

Problema 1:

Algunos números enteros positivos tienen una propiedad muy especial: se pueden escribir como la diferencia de dos cuadrados perfectos ¿Cuáles son esos números?

RTA: SON LOS NUMEROS A LOS CUALES SE LES PUEDE HALLAR LA $\sqrt{\ }$ EXACTA:

EJEMPLO: 4, 9, 16, 25, 36……

Problema 2. Un granjero amarra un Chivo en la esquina exterior de un establo de 10m por 20m. La cuerda con que lo ata es de 25 metros. El chivo puede pastar en cualquier lugar fuera del establo hasta donde la cuerda alcance. ¿Cuál es la medida del área donde el chivo puede pastar?

- Al analizar el problema podemos observar que el chivo puede pastar alrededor del establo lo cual le permite hacer una circunferencia alrededor de este.

- Entonces para resolver el problema tuve en cuenta el radio de la circunferencia y aplique la siguiente ecuación.

$A = \pi\, r^2$

$A = \pi\, (25m)^2$

AREA DE CIRCUNFERENCIA – AREA DEL RECTANGULO

Ac – Ar = AREA PARA PASTAR

$\pi\ (r^2) - B \times A$

$\pi\, (25m)^2 - 10 \times 20\ m = 1963{,}5\ m^2 - 200\ M^2$ 0 AREA PARA PASTAR

$1763{,}5\ m^2$ = AREA PARA PASTAR.

ALEXANDER GORINA SÁNCHEZ

Departamento de Matemática. Universidad de Oriente. Cuba

Solución de la Tarea 3

Problema 1: Algunos números enteros positivos tienen una propiedad muy especial: se pueden escribir como la diferencia de dos cuadrados perfectos ¿Cuáles son esos números?

Solución Problema 1

Comprensión del problema.

En esta etapa se analiza cuál es la incógnita (el conjunto de números buscado), los datos (los enteros positivos que cumplen la relación), la condición y su suficiencia (analizar si con sólo plantear la relación es posible encontrar los números buscados). Además, hay que saber cuando un número es cuadrado perfecto.

Representación y ejecución del plan.

Realmente se hacen representaciones internas y externas, que van cambiando en la medida que se logra llegar a niveles cada vez más esenciales. Una representación externa de la situación se muestra a continuación.

1=12 -02

2 no es posible su representación

3=22 -12

4=22 -02

5=32 -22

6 no es posible su representación

7=42 -32

8=32 -12

9=52 -42

10 no es posible su representación

11=62 -52

12=42 -22

13=72 -62

14 no es posible su representación

15=42 -12=82 -72

Intuitivamente a partir de la representación anterior todo parece indicar que los números que no cumplen la condición son de la forma (2 + 4k), k ∈{0,1,2,...}.

Si tenemos en cuenta que $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$podemos entonces hacer una segunda representación:

1= (1+0)(1-0)=1x1

2 no es posible su representación

3= (2+1)(2-1)=3x1

4= (2+0)(2-0)=2x2

5= (3+2)(3-2)=5x1

6 no es posible su representación

7= (4+3)(4-3)=7x1

8= (3+1)(3-1)=4x2

9= (5+4)(5-4)=9x1

10 no es posible su representación

11= (6+5)(6-5)=11x1

12= (4+2)(4-2)=6x2

13= (7+6)(7-6)=13x1

14 no es posible su representación

15= (4+1)(4-1)=5x3=(8+7)(8-7)=15x1

Intuitivamente, de la representación anterior todo parece indicar que los números que cumplen la condición se pueden expresar como el producto de dos números: (par x par) o (impar x impar), es posible que los números de la forma (2 + 4k), k ∈{0,1,...} no tengan esta representación.

Del análisis anterior deben demostrarse las hipótesis subyacentes, por lo tanto realizaremos su estudio detalladamente.

Demostración: en lo adelante p ∈ {0,1,2,...} .

Caso 1.a)

Sea p un número par, demostraremos que p no se puede representar de la forma p=(a+b)(a-b) bajo las condiciones

1) a par y b impar

2) a impar y b par

• Supongamos que se cumple 1), luego:

(a+b) y (a-b) son ambos impares, lo que implica que (a+b)(a-b) es impar y por lo tanto llegamos a una contradicción, luego p no se puede representar de la forma:

p=(a+b)(a-b) si se cumple la condición 1)

• Para el caso 2) la demostración es análoga.

Para el **caso 1.a** se concluye que si p es par no se puede representar de la forma p=(a+b)(a-b) bajo las condiciones 1) y 2).

Caso 1.b)

Sea p par, demostremos que no se puede representar de la forma p=(a+b)(a-b), siendo p= 2+4k y bajo las condiciones

3) a par y b par

4) a impar y b impar

• Supongamos que se cumple 3), luego:

2+4k=(a+b)(a-b) Si a es par y b es par entonces a+b es par y se expresa como: (a+b)=2m, donde m∈{0,1,2,...} , de igual forma (a-b)=2n, donde n ∈{0,1,2,...} Por tanto

(2+4k)=2(1-2k)=2m2n o bien (1+2k)=2mn, 1+2k es impar y 2mn es par, por lo tanto se encuentra una contradicción.

• Para el caso 4) la demostración es análoga.

De este modo los números de la forma 2+4k no se pueden expresar como

(a+b)(a-b) bajo las condiciones 3) y 4).

Caso 1.c)

Sea p par, demostremos que los números de la forma p=4k, k=0,1,2,… se pueden expresar de la forma p=4k=(a+b)(a-b) bajo las condiciones 3) y 4).

Sea 4k=(a+b)(a-b), basta tomar a+b=2k y a-b=2 para asegurar la existencia (note que en el **Caso 1.b** se demostró que a+b y a-b son ambos pares).

Caso 2

Sea ahora p impar, luego p se expresa de la forma a+b, basta tomar a+b=p y a-b=1, luego a=(p+1)/2, p+1 es par, pues por hipótesis p es impar, por lo que a ∈{0,1,2,...} , por tanto b=a-1 b ∈{0,1,2,...} lo que demuestra que si p es impar se puede representar como p=(a+b)(a-b) (Note que si p es impar y tiene divisores posee más de una representación, decidimos demostrar la existencia para p impar cualquiera, sea primo o no). Finalmente podemos concluir que los números enteros positivos que se pueden escribir como la diferencia de dos cuadrados perfectos son:

$\{x \in N : x \neq (2 + 4k), k = 0,1,2,...\}$ o bien $\{(x = 2k + 1)$ *o* $(x = 4k), k = 0,1,2,...\}$

Problema 2. Un granjero amarra un Chivo en la esquina exterior de un establo de 10m por 20m. La cuerda con que lo ata es de 25 metros. El chivo puede pastar en cualquier lugar fuera del establo hasta donde la cuerda alcance.

¿Cuál es la medida del área donde el chivo puede pastar?

$$
f(A)=\begin{cases}
\dfrac{3\pi R^2}{4}, & \text{si } R\leq a\\[2mm]
\dfrac{3\pi R^2}{4}+\dfrac{\pi(R-a)^2}{4}, & \text{si } a<R\leq b\\[2mm]
\dfrac{3\pi R^2}{4}+\dfrac{(R-b)^2\pi}{4}+\dfrac{(R-a)^2\pi}{4}, & \text{si } b<R\leq a+b\\[2mm]
\dfrac{3\pi R^2}{4}+\displaystyle\int_{Px}^{R}\left(\sqrt{(R-a)^2-x^2}+a\right)dx+\int_{0}^{Px}\sqrt{(R-b)^2-(x-b)^2}\,dx-ab, & \text{si } R>a+b
\end{cases}
$$

En la figura anterior representamos el cuarto caso.

Para el caso de $a=10m$, $b=20m$ y $R=25m$ estamos en presencia del tercer caso y por lo tanto:

Foro

Objetivo:

- Discutir las opiniones de los participantes sobre como ellos resuelven problemas y como ayuda la metodología de Polya en el proceso de resolución de problemas.
- Generar espacios de discusión con los participantes

1: El Método de Polya

Enviado por Andrés Latorre on 06/11/08 21:14

En ocasiones cuando tratamos de resolver un problema matemático, lo hacemos a ojos cerrados y nos olvidamos de detalles importantes como: entenderlo y revisar exactamente que es lo que nos pide el problema resolver, en otros casos cuando estamos resolviéndolo para nuestros estudiantes, no les enseñamos como hacerlo sino que respondemos a un ejercicio para nosotros, enseñándoles el algoritmo para encontrar la solución y quitándoles la responsabilidad de pensar en un posible camino de solución.

Comencemos nuestra discusión con la siguiente pregunta:

¿Qué aspectos tienen en común la metodología de Polya y la usada por ti, en tus Clases o cuando te enfrentas a un problema, ya sea en el ámbito matemático u otro campo?

Esperamos que ustedes también hagan sus propias preguntas y todos participemos en la discusión.

Andrés Latorre - Andrés Sánchez.

2: Re: Res: El Método de Polya (response to 1)

Enviado por Yamid Alejandro Mosquera Sotomayor on 09/11/08 10:44

Básicamente lo que hace Polya desde mi perspectiva es aplicar una metodología importante en mi carrera (Ing. sistemas) para la solución de un problema, y es DIVIDE Y VENCERÁS, se sigue un Algoritmo, entendiendo que no es el único camino para llegar a una solución, se busca que se el algoritmo sea óptimo, y no tan complejo.

3: Re: Res: El Método de Polya (response to 1)

Enviado por Aura Sandoval Torres on 09/11/08 11:20

Hola, reciban todos un caluroso saludos desde Barranquilla.

Con respecto al Método de Polya puedo anotar que como estructura para organizar la información (dada en una situación "problema"), para organizar las ideas que se nos ocurren con miras a dar solución a dicha situación y con el fin de convertir esas ideas en operaciones para finalmente obtener una respuesta situándonos en una retroalimentación necesaria; este método se convierte en una excelente herramienta para mostrar a los estudiantes la forma más sencilla de llegar a la solución de problemas.

En una ocasión me tomé el trabajo de explicarlo a estudiantes de quinto grado de la educación básica primaria y luego de mucho trabajo para que los estudiantes lo asumieran como algo propio, ellos mismos determinaron que este método también les ayudaba a resolver los problemas en otras áreas e incluso para las situaciones problemas que se presentaron en cuanto a la convivencia entre ellos. Fué una experiencia enriquecedora pues los chicos me enseñaron mucho después de empezar a trabajar con "Polya".

Actualmente laboro en una institución que atiende una población con características de excepcionalidad (hacia arriba) por ello los agrupamos por talentos de acuerdo a sus potencialidades; en mi trabajo con el grupo de matemáticas manejamos este modelo de Polya, debido a una necesidad de algunos miembros del equipo que realmente no sabían como enfocar los problemas a los que se enfrentaban, es esta una experiencia enriquecedora tanto para ellos como para mi.

Por ello me siento tan agradecida con ustedes de que hayan tomado este tema para desarrollarlo en un curso.

Cordial saludo.

Aura Sandoval Torres

4: El Método de Polya (response to 3)

Enviado por José Andrés Sánchez Carrasquilla on 10/11/08 16:53

Hola Aura ¡¡

Gracias por tu aporte y esperamos que pronto nos envíes las respuestas a nuestras actividades, no importa que estén por fuera de la fecha limite lo importante es el gran aporte que harías a nuestro curso.

5: El Método de Polya (response to 1)

Enviado por Sandy Sánchez Domínguez on 10/11/08 17:32
Alexander Gorina Sánchez, Sandy Sánchez Domínguez
Departamento de Matemática. Universidad de Oriente. Cuba
Actividad 3 (Cont.)

En nuestro criterio, resolver un problema matemático no es sencillamente encontrar una respuesta a la exigencia del mismo, como plantean algunos autores, pues en muchos casos, podríamos buscar dicha respuesta en un libro o tomarla de lo hecho por otra persona. La resolución de un problema consiste en el establecimiento de una sucesión de pasos elementales, cada uno de los cuales genera un conocimiento nuevo, que se obtiene como inferencia lógica a partir de la base de conocimientos, de las condiciones del problema o consecuencias derivadas de éstas en pasos anteriores. La conjunción de estos pasos fundamenta la exigencia del problema.

Ahora bien, la eficiencia en la resolución de problemas aumenta en la medida en que se amplía la experiencia del resolutor en esta actividad, esto se produce porque va asimilando nuevas técnicas de resolución y porque mejora su capacidad para detectar en los problemas que enfrenta, rasgos comunes a problemas ya resueltos. Son muy variados los aspectos que pueden inducir a encontrar semejanzas entre los problemas, desde aquellos relacionados con el contexto teórico, pasando por los relacionados con el carácter de la exigencia, hasta los que se basan en el método de solución. Estos aspectos sugieren distintas formas de clasificar los problemas. Así en una primera clasificación podemos hablar de problemas geométricos, problemas de Álgebra, problemas de Trigonometría, etc. Pero también podríamos hablar de problemas de búsqueda de una incógnita, de problemas de construcción o transformación y de problemas de demostración. Por el método de solución podemos considerar problemas que se resuelven por inducción matemática, por el criterio de Dirichlet, por argumentos de paridad, argumentos de continuidad, etc.

En general, la clasificación de un problema según cualesquiera de los aspectos en que ésta se fundamenten, puede ayudar a mejorar la representación que del mismo se tenga, pero es claro que entre más cercano esté el criterio de clasificación al método de solución, más valiosa será la misma a la hora de encontrar la vía de solución.

Desde la antigüedad ha habido interés por profundizar en el proceso de resolución de problemas, por conocer los elementos que lo integran, averiguar la causa de que algunas personas resuelvan problemas con éxito mientras otras nunca aprenden a hacerlo y por encontrar formas para ayudar a resolver problemas. En este sentido se destaca la obra desplegada en la primera mitad de este siglo por el eminente matemático y educador de origen húngaro George Polya, quien documenta su propia experiencia como matemático y educador.

El proceso de resolución de un problema matemático es entendido como toda la actividad desarrollada por la persona que lo aborda, para resolverlo. A pesar de que este proceso se da en la práctica de manera continua, para el mejor estudio del mismo, los especialistas e investigadores del tema, condicionalmente, lo han separado en etapas. Por ejemplo Polya delimitó cuatro etapas: comprensión del problema, búsqueda de la vía de solución, ejecución de la vía y análisis de la solución encontrada.

A su vez Polya presentó una lista de preguntas asociadas con cada una de sus etapas, que contemplan ideas acerca del uso de diversos métodos heurísticos. Por ejemplo, el pensar en un problema más simple, buscar algún patrón, usar diagramas o gráficos, usar tablas, etc. Esto con el propósito de incentivar la discusión de las estrategias y métodos usados para resolver los problemas.

En este sentido, A. Schoenfeld (1987), ha criticado las estrategias de Polya por considerarlas muy generales y por tanto de poca ayuda para los resolutores novatos. Este autor ha trabajado en la creación de subestrategias generadas a partir de las estrategias de Polya de manera que resulten más fáciles de manejar por los estudiantes. Su trabajo en esta dirección es amplio e importante y está recogido en libros y artículos de obligatoria consulta para el trabajo en el tema.

En nuestra opinión, debe reconocerse la importancia que desde el punto de vista orientador representa contar con una estrategia general de resolución como la planteada por G. Polya, quien no se limitó a exponerla sino que la argumentó y la ejemplificó ampliamente y coincidimos con A. Schoenfeld en la necesidad de profundizar en la misma para hacerla más asequible al trabajo de los estudiantes.

7: Re: Res: El Método de Polya (response to 1)

Enviado por Alexander Gorina Sánchez on 10/11/08 21:40

Escrito por Alexander Gorina Sánchez y Sandy Sánchez Domínguez.

La primera etapa es obviamente insoslayable: es imposible resolver un problema del cual no se comprende el enunciado. Sin embargo en nuestra práctica como docentes hemos visto a muchos estudiantes lanzarse a efectuar operaciones y aplicar formulas sin reflexionar siquiera un instante sobre lo que se les pide. Si el problema se plantea en un examen y luego, comentando los resultados, el profesor dice el estudiante que ha realizado cálculos irrelevantes para la solución del problema, algunos le responderán: ¿o sea, que no nos va a dar ningún punto por haber realizado tales cálculos? Este tipo de respuesta revela una incomprensión absoluta de lo que es un problema y plantea una situación muy difícil al profesor, quien tendrá que luchar contra vicios de pensamiento arraigados (creencias), adquiridos tal vez a lo largo de muchos años.

8: Re: Res: El Método de Polya (response to 1)

Enviado por Alexander Gorina Sánchez on 10/11/08 22:50

La metodología de Polya tiene muchos aspectos comunes con otras metodologías desde la perspectiva que ella está estructurada de forma general en grandes etapas que "barren”, hasta cierto punto, el espectro de resolución de problemas. El resto de las metodologías muy conocidas, por lo general lo que hacen es profundizar un poco más en cada una de las diferentes etapas y lo hacen acertadamente, tal es el caso de Allan Schoenfeld, quien redimensionó eficientemente las cuatro etapas ya mencionadas. Debe señalarse además que los resultados aportados por Polya han servido como un antecedente de gran valor para las posteriores aportaciones, además todavía hay varios investigadores que profundizan cada vez más en dicha temática, porque a decir verdad en la misma todavía no se ha dicho la última palabra, pues la investigación trasdisciplinar tiene muchos frutos que aportar, en especial la psicología cognitiva. (escrito por Alexander Gorina Sánchez y Sandy Sánchez Domínguez)

9: Re: Res: El Método de Polya (response to 1)

Enviado por Alexander Gorina Sánchez on 10/11/08 22:54

Comprender el problema: En esta fase se plantean preguntas las cuales nos llevan a identificar las incógnitas, los datos y las condiciones del problema. Algunas de esas preguntas pueden ser:

La primera etapa es obviamente insoslayable: es imposible resolver un problema del cual no se comprende el enunciado. Sin embargo en nuestra práctica como docentes hemos visto a muchos estudiantes lanzarse a efectuar operaciones y aplicar formulas sin reflexionar siquiera un instante sobre lo que se les pide. Si el problema se plantea en un examen y luego, comentando los resultados, el profesor dice el estudiante que ha realizado cálculos irrelevantes para la solución del problema, algunos le responderán: ¿o sea, que no nos va a dar ningún punto por haber realizado tales cálculos? Este tipo de respuesta revela una incomprensión absoluta de lo que es un problema y plantea una situación muy difícil al profesor, quien tendrá que luchar contra vicios de pensamiento arraigados (creencias), adquiridos tal vez a lo largo de muchos años.

Esta es una de las etapas que más dificultades presentan los estudiantes, lo cual no es exclusivo de mis clases, pues se reporta por varios investigadores: el propio Polya, otros destacados didactas de la Matemática como el Dr. L. M. Santos Trigo del Centro de Investigaciones Avanzadas de México, en el marco de su tesis doctoral, y el Dr. A. Schoenfeld, profesor e investigador de la Universidad de Berkeley en Estados Unidos.

En esta etapa merece especial atención las aportaciones de la Dra. Isabel Alonso Berenguer, de la Universidad de Oriente, Cuba, cuando en su tesis doctoral defiende la concepción de una modelación didáctica de la formación de representaciones de los problemas matemáticos, caracterizada por: la fundamentación y estructuración operacional del representar como habilidad, una clasificación de las representaciones, a partir del mundo representante y, la determinación de configuraciones, eslabones, funciones y regularidades desde el análisis de la representación como una dimensión dinamizadora del proceso de resolución, lo cual se tomó como la base teórica y metodológica para el establecimiento de una estrategia didáctica que contribuya a paliar las insuficiencias que presentan los estudiantes en la comprensión y solución de los problemas matemáticos.

Concebir un plan: Una ves determinadas las condiciones del problema, la relación entre los datos y las incógnitas, el siguiente paso será examinar los conocimientos previos, relacionar el problema con problemas conocidos y similares o problemas auxiliares que te ayuden a resolverlo y así establecer un plan de solución.

La segunda etapa es la más sutil y delicada, ya que no solamente esta relacionada con los conocimientos y la esfera de lo racional, sino también con la imaginación y la creatividad. Observemos que las preguntas que Polya asocia a esta etapa están dirigidas a llevar el problema hacia un terreno conocido. Con todo lo útiles que estas indicaciones son, sobre todo para el tipo de problemas que suele presentarse en los cursos ordinarios, dejan planteada una interrogante: ¿qué hacer cuando no es posible relacionar el problema con algo conocido? En este caso no hay recetas infalibles, hay que trabajar duro y confiar en nuestra propia creatividad e inspiración.

En este sentido, una de las reflexiones más profundas que se han hecho sobre la creatividad en matemática es la realizada a principios de siglo pasado por Henri Poincaré, uno de los más grandes matemáticos de su tiempo. En una conferencia pronunciada ante la Sociedad Psicológica de Paris [Poincaré, H. Ciencia y Método, Espasa-Calpe Argentina, Buenos Aires, 1946.] hizo interesantísimas revelaciones sobre sus propias experiencias como creador:

"¿Qué es, de hecho, la creación matemática? No consiste en hacer combinaciones nuevas con entes matemáticos ya conocidos. Cualquiera podría hacerlo, pero las combinaciones que se podrían hacer así serían un número limitado y en su mayoría totalmente desprovistas de interés. Crear consiste precisamente no en construir las combinaciones inútiles, sino en construir las que son útiles y que están en ínfima minoría. Crear es discernir, es escoger. . . "

"A menudo, cuando se trabaja en un problema difícil, no se consigue nada la primera vez que se comienza la tarea. Luego se toma un descanso más o menos largo y uno se sienta de nuevo ante la mesa. Durante la primera media hora se continúa sin encontrar nada. Después, de repente, la idea decisiva se presenta ante la mente. . . "

"Hay que hacer otra observación a propósito de las condiciones de este trabajo inconsciente. Se trata de que tal trabajo no es posible, y en todo caso no es fecundo, si no está por una parte precedido y por otra seguido de un período de trabajo consciente. Estas inspiraciones súbitas no se presentan . . . más que tras algunos días de esfuerzos voluntarios, aparentemente estériles, en los que uno ha creído no hacer nada interesante, y piensa haber tomado un camino falso totalmente. Estos esfuerzos no fueron, por tanto, tan estériles como se pensaba. Pusieron en movimiento la máquina inconsciente y sin ellos esta no habría funcionado ni hubiera producido nada. . . "

Cuando un problema se resiste a nuestros mejores esfuerzos, nos queda todavía la posibilidad de dejarlo durante un tiempo, descansar, dar un paseo, y volver a el más tarde. Sin embargo, solamente aquellos problemas que nos han apasionado, manteniéndonos en una considerable tensión mental, son los que vuelven más tarde, transformados, a la mente consciente. La inspiración o iluminación súbita, que los antiguos consideraban un don divino, hay que merecerla.

Mientras que James Adams, profesor de diseño en la Universidad de Stanford, centra su enfoque de la creatividad en la superación de los bloqueos mentales, barreras que nos impiden percibir un problema en la forma correcta y encontrarle solución. En [Adams, J. L. Conceptual Blockbusting, Stanford, 1979. Versión en castellano: Guía y juegos para superar bloqueos mentales, Gedisa, Barcelona, 1986.] analiza diferentes tipos de bloqueos y propone ejercicios para identificarlos y superarlos. Su clasificación es la siguiente:

- Bloqueos perceptivos: estereotipos, dificultad para aislar el problema, delimitar demasiado el espacio de soluciones, imposibilidad de ver el problema desde varios puntos de vista, saturación, no poder utilizar toda la información sensorial.
- Bloqueos emocionales: miedo a cometer errores, a arriesgar, a fracasar; deseo de seguridad y orden; preferir juzgar ideas a concebirlas; inhabilidad para relajarse; falta de estímulo; entusiasmo excesivo; falta de control imaginativo.
- Bloqueos culturales: tabúes; el peso de la tradición; roles predeterminados asignados a la mujer y al hombre.
- Bloqueos ambientales: distracciones; falta de apoyo para llevar adelante una idea; falta de cooperación entre colegas.

- Bloqueos intelectuales: inhabilidad para seleccionar un lenguaje apropiado para el problema (verbal, matemático, visual); uso inadecuado de las estrategias; falta de información o información incorrecta.
- Bloqueos expresivos: técnicas inadecuadas para registrar y expresar ideas (a los demás y a uno mismo)

Ejecución del plan: Llevar acabo el plan escogido comprobando cada uno de los pasos hasta solucionar el problema completamente, de ser posible, o hasta donde este permita desarrollarlo, luego considerar un nuevo plan.

La tercera etapa es de carácter más técnico. Si el plan esta bien concebido, su realización es factible y poseemos los conocimientos y el entrenamiento necesarios, debería ser posible llevarlo a cabo sin contratiempos. Sin embargo por lo general en esta etapa se encontraran dificultades que nos obligaran a regresar a la etapa anterior para realizar ajustes al plan o incluso para modificarlo por completo. Este proceso puede repetirse varias veces. Algunos estudiantes a pesar de poder buscar hasta más de una vía para resolver el problema, por falta de conocimiento y entrenamiento matemático, no logran determinar la solución.

Examinar la solución obtenida: Una vez obtenida la solución del problema, realiza una revisión de cada uno de los pasos, para verificar que sean correctos, ya que puede haber errores si el razonamiento es demasiado largo y enredado, luego ver si se puede resolver de forma diferente y también si se puede generalizar la solución.

La cuarta etapa es muchas veces omitida, incluso por resolutores expertos. Polya insiste mucho en su importancia, no solamente porque comprobar los pasos realizados y verificar su corrección nos puede ahorrar muchas sorpresas desagradables, sino porque la visión retrospectiva nos puede conducir a nuevos resultados que generalicen, amplíen o fortalezcan el que acabamos de hallar. En el caso del primer problema de la tercera actividad, nos dimos a la tarea de hacer sus respectivas generalizaciones, pues nos parecía factible e interesante a partir de la solución inicial obtenida. Muchos estudiantes fracasan a la hora de enfrentarse a los problemas, ya sean de índole matemática o no, por no examinar la solución obtenida, en ocasiones cometen errores en los cálculos, y lo que es peor aún, cometen sesgos en sus razonamientos.

Diseño Actividad 4

Objetivo

- Conocer el trabajo realizado por Schoenfeld en la resolución de problemas.
- Recopilar las creencias más comunes que se presentan en el aula de clase las cuales influyen en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas

1. Enviar un documento acerca del trabajo realizado por Schoenfeld, para lectura de los participantes

Noticias

Cordial saludo a todos los participantes,

Realiza la actividad 4, planteada para la semana:

Ayúdate con el documento referenciado en pestaña de tareas y actividades también puedes hacer uso de la investigación para profundizar en las actividades propuestas, el nombre del documento de referencia es: El trabajo de Schoenfeld.pdf

Elabora y presenta un ensayo donde recoja algunas de las creencias que son comunes entre estudiantes, acerca del aprendizaje de las matemáticas y como afectan las creencias de los docentes en la enseñanza de las matemáticas.

El ensayo no debe ser menor a tres páginas ni mayor de cinco, con interlineado de 1.5.

Soluciones de los participantes

SISSILE QUINTANA CURREA (Bogotá)

ENSAYO DE LA LECTURA "EL TRABAJO DE SCHOENFELD".

Durante la lectura del trabajo de Schoenfeld me cuestione mucho acerca de la forma como enseñamos Matemáticas a los estudiantes, por que estos le tienen tanto terror a esta asignatura en el colegio y llego a la conclusión que nosotros como docentes debemos venderlos a ellos esa pasión por aprender algoritmos matemáticos, resolver problemas, desarrollar un pensamiento lógico matemático etc. Que los lleve a conocer la magia que tiene desarrollar estos tipos de conceptos y les permita comprender la importancia de los mismos en su entorno.

De igual manera una reflexión acerca de cómo los alumnos resuelven los problemas propuestos por el docente, libros de texto o simplemente los que se les presentan en su diario vivir. Por ejemplo cuando van a la tienda a comparar algún artículo y deben realizar la cuenta para pagar. Entonces descubrimos que en ocasiones los estudiantes no saben cómo resolverlos por que nunca lo han aprendido o por que lo aprendieron pero ese aprendizaje no fue significativo y lo olvidaron. Es en ese momento donde nos encontramos con las creencias típicas en los alumnos que en ocasiones dificultan el aprendizaje en el tema de solución de problemas. En mi caso y durante mi experiencia como docente de primaria se observa mucho las siguientes dificultades:

- Que los alumnos al leer un problema no comprendan su enunciado la cual no les permite realizarlo correctamente, entonces es importante que nosotros como docentes entrenemos a los alumno para que al realizar la lectura de un enunciado lo puedan comprender, puedan saber que les esta pidiendo el problema que deben hacer. (Análisis del problema), es obvio que aprender a leer no solo le corresponde al área de lenguaje como todos pensamos, es trabajo de todas las áreas y en la nuestra ellos deben aprender el lenguaje propio de la asignatura. como decía la lectura enseñar al alumno que información dada en el problema es relevante y necesaria para la resolución del mismo.
- Otro caso muy común es que el alumno no sepa que tipo de algoritmo debe aplicar para resolver el problema dado, entonces es necesario ver o analizar el conocimiento previo

que posee el estudiante que fallas presenta que no le permite aplicarlo a este proceso y corregirlas para que ellos clarifiquen este conocimiento.

- De igual manera el hecho de que el estudiante no tenga un procedimiento adecuado para resolver un problema dificulta que el en su cerebro tenga un orden lógico para realizar actividades, entonces se hace necesario plantear una serie de pasos los cuales ellos deben tener en cuenta siempre que resuelvan un problema como por ejemplo:

- Analizar el problema.
- Verificar el algoritmo que se debe aplicar para resolver el problema.
- Realizar la operación correcta que nos permita despejar la variable o la pregunta planteado para el problema.
- Dar una respuesta lógica a la pregunta que se plantea el problema.
- El docente deberá revisar que los alumnos cumplan con los pasos en todos los problemas que ellos realicen para que ellos adquieran la agilidad que requiere cada problema y les sea muy fácil solucionarnos a medida que los vayan mecanizando. En la lectura encontrábamos Análisis, exploración y verificación de la solución.

- Que los estudiantes entiendan un mismo problema de diferentes formas según la comprensión individual de cada uno. Entonces es bueno socializar la realización de algunos compañeros de clase para que cada uno observa las formas de solucionar el mismo problema y entre todos se verifica la o las mas acertadas en la realización del trabajo y de igual manera cada uno corrija las falencias presentadas.
- Memorizar los procedimientos a seguir en la solución de un problema y si se cambia algo en este problema o en el planteamiento del mismo ellos se pierden. Por que memorizan para el momento. Entonces es necesario que las clases sean mas atrayentes para ellos y que los estudiantes comprendan para que les sirve ese conocimiento que se les esta impartiendo, como lo van a aplicar a su entorno y a su vida diaria.

Bueno nos damos cuenta de algunas de las dificultades que presentan los alumnos para solucionar un problema pero es necesario también tener en cuenta la forma como los docentes enseñamos ese proceso a los niños, se necesita mucha imaginación, utilizar diferentes materiales para hacer que los estudiantes vean el conocimiento mas concreto, y como decía Schoenfeld el objetivo principal en el aprendizaje de las matemáticas es eliminar las creencias inapropiadas que tenga el estudiante. Por esta razón es muy importante que los docentes tengamos una mente abierta acerca de cómo va evolucionando el aprendizaje, que conozcamos y creemos nuevas estrategias de aprendizaje y no solo nos quedemos con lo que aprendimos en el colegio o en la universidad. Por que como nos hemos dado cuenta la pedagogía ahora tiene otro tinte, es más amplia y se puede aplicar a cualquier ámbito. No verlo solo como el impartir conocimientos sin darnos cuenta que esto de enseñar es un proceso muy divertido y que tanto los docentes como los estudiantes pueden aprender jugando. Me complace mucho haber estado en este grupo de trabajo y ver el interés que muestran mis compañeros de curso por aprender y capacitarnos para transformar la forma de dictar una clase, por que cada uno con su toque particular puede hacer de la educación un ambiente muy agradable para aplicar estrategias que les permitan a los niños ver otras formas de asimilar los conceptos de cada área en especifico.

Por medio de este trabajo quiero compartirles un poco la forma de enseñar en la institución donde yo laboro done aplicamos el marco de la enseñanza para la comprensión (EPC). Es un marco el cual nos permite crear estrategias por medio de proyectos:

- Que despiertan el interés de los estudiantes
- Que propician un ambiente de aprendizaje donde los estudiantes combinan teoría y practica la cual va a ser aplicada en su cotidianidad y esto hace el aprendizaje más significativo.
- Permite un trabajo más personalizado y con mayor interdisciplinaridad porque todos participan en el proyecto desde cada área según el grado en el cual trabajen los docentes.

Durante cada periodo se trabaja una planeación con características muy especiales donde se manejan puntos de entrada los cuales desarrollan comprensión en los estudiantes, los cuales son los siguientes:

- Hilos conductores: Son preguntas que motivan y orientan la investigación según el área y el a tema a trabajar cada periodo y durante el año.
- Tópico Generativo: Debe ser algo importante, motivante, asequible, rico en conexiones, llamativo para los estudiantes, con temas cautivantes, que atrapen el interés de los muchachos.
- Metas de Comprensión: Son los conceptos que se quieren que los estudiantes desarrollen durante el periodo o la unidad.

- Desempeños de Comprensión: Describir lo que los estudiantes hicieron o van a hacer para demostrar y desarrollar comprensión de los temas trabajados para esto utilizamos los siguientes puntos.

- Desempeño de Exploración: Es la estrategia que se aplica para que los estudiantes indaguen sobre el tema en particular.
- Desempeño de Investigación: Es la estrategia donde los estudiantes obtiene la información del tema en específico. (por libros de texto, Internet, explicación del profesor) etc.
- Proyecto Final de Síntesis: Es la estrategia donde los estudiantes demuestran la comprensión adquirida por medio de un proyecto que se socializa con sus demás compañeros de diferentes cursos, con otros docentes y directivos.

SANDY SÁNCHEZ DOMÍNGUEZ

Departamento de Matemática. Universidad de Oriente. Cuba.

Ensayo:

ALAN SCHOENFELD, SU SISTEMA DE CREENCIAS

Departamento de Matemática. Universidad de Oriente. Cuba Elabora y presenta un ensayo donde recoja algunas de las creencias que son comunes entre estudiantes, acerca del aprendizaje de las matemáticas y como afectan las creencias de los docentes en la enseñanza de las matemáticas. Alan Schoenfeld y su sistema de creencias Schoenfeld (1985, 1987) ha trabajado en la creación de subestrategias generadas a partir de las estrategias de Polya, que resulten más fáciles de manejar por los estudiantes. Su trabajo en esta dirección es amplio e importante y está recogido en libros y artículos de obligatoria consulta para el trabajo en el tema. Realizó experiencias con estudiantes y profesores en las que les proponía resolver ciertos problemas. Al final de todos estos experimentos, Schoenfeld llegó a la conclusión de que cuando se tiene o se quiere trabajar con resolución de problemas como una estrategia didáctica hay que tener en cuenta situaciones más allá de las puras heurísticas.

Los estudiantes, para resolver problemas matemáticos tienen que discutir sus ideas, negociar, especular sobre los posibles ejemplos y contraejemplos que ayuden a confirmar o desaprobar sus ideas. En la medida en que los estudiantes van resolviendo problemas van ganando confianza en el uso de las matemáticas, van desarrollando una mente inquisitiva y perseverante, van aumentando su capacidad de comunicarse matemáticamente y su capacidad para utilizar procesos de pensamiento de más alto nivel. Las creencias pueden considerarse la zona de transición entre aspectos cognitivos y afectivos. Modelan las formas en las que un individuo conceptualiza y actúa en relación a la ciencia. Desde hace años las investigaciones desde las Ciencias de la Educación destacan la importancia de los elementos afectivos en el aprendizaje y la vinculación entre la actitud de los alumnos frente a una asignatura y el éxito o fracaso que logran en el aprendizaje de la misma. Las creencias condicionan muchos aspectos relacionados con el aprendizaje de la Matemática. Por ejemplo, determinan en el estudiante cuándo considera que debe Enfocarse en conocimientos formales y cuándo no. También determina la forma en que tratan de aprender Matemática, memorizando o no. Es decir: los estudiantes pueden creer que la matemática es solamente una serie de reglas que simplemente van a memorizar. O pueden creer que la matemática es elaboración de conceptos, establecimiento de relaciones, patrones; en este caso, entonces, probablemente van a tratar de comprenderla pues creen que tal comprensión les va a ser útil. En el caso particular de mis estudiantes algunas de las creencias más comunes son referentes a que si las cosas están demostradas y sus resultados son conocidos, entonces no es tarea de ellos revisar su demostración e intentar demostrarlo de forma independiente. Esta creencia limita el aprendizaje, pues, puede ser un ejercicio interesante realizar una demostración. En particular considero que revisar la idea de la demostración desarrolla en el estudiante habilidades para la resolución de los ejercicios y habilidades para resolver demostraciones de situaciones parecidas. Otra de las creencias más importantes de los estudiantes es que las matemáticas aprendidas en la escuela tienen poco o nada que ver con el mundo real. Esta es otra de las más importantes, en el espectro de un profesional en matemáticas, es una de las tareas más importantes el proceso de la modelación matemática de fenómenos de la vida real, ya sea con herramientas de las ecuaciones diferenciales, de álgebra básica, del análisis matemático o de cualquier otra disciplina como la optimización. No debe olvidarse nunca que la matemática se desarrolló en el ejercicio de la resolución de problemas de la mecánica y en general de la vida cotidiana. Otra de las creencias que se ve mucho es pensar que existe una única manera correcta para resolver cualquier problema, usualmente es la regla que el profesor dio en la clase. Es una creencia que no conlleva a resultados satisfactorios, pues el estudiante debe de ser capaz de realizar sus propias demostraciones y resolver de forma independiente los ejercicios a los que se enfrenta, ya sea ejercicios de la vida real, de una tarea orientada por el profesor o cualquier tarea de índole investigativa, como por ejemplo en un proceso productivo.

Existen grandes diferencias culturales en cuanto a las creencias que tienen los padres, maestros y jóvenes acerca de la naturaleza del aprendizaje de la Matemática, por lo general los mayores atemorizan a los más jóvenes con creencias sobre la complejidad de la Matemática, sugiriéndoles a estos en muchos casos no tener que enfrentarse a ejercicios de esta categoría. En muchas ocasiones nuestros estudiantes se limitan a crear sus propias formas de resolver los ejercicios y en muchos casos no desarrollan habilidades propias de un estudiante del mismo nivel de enseñanza.

Al preguntarse cuál es el mejor método para enseñar Matemática. Los estudiantes y padres se trazan un patrón ideal de enseñanza. Creo que esto influye en la calidad del proceso enseñanza aprendizaje, pues los docentes deben preocuparse por demostrar a los estudiantes que existen muchas maneras de resolver un mismo problema y de esta forma lograr desarrollar habilidades en los estudiantes que lo ayuden a explorar cual es una mejor vía de resolución de un ejercicio de la clase o de la vida real.

La metodología de Alan Schoenfeld y su sistema de creencias constituyen una gran aportación para el proceso de resolución de problemas, considero además que para seguir profundizando en la resolución de problemas su obra debe ser debidamente consultada y estudiada detalladamente.

Diseño Actividad 5

Objetivo

- Aplicar diferentes heurísticas proporcionadas por Polya para la resolución de problemas.

Enviar un documento acerca de algunas heurísticas trabajadas por Polya, para lectura de los participantes.

Resolver los siguientes Problemas usando las Heurísticas relacionadas en el documento, Teniendo en cuenta:

1. Elaborarlas según los cuatro pasos establecidos por Polya.
2. Explicar la razón por la cual se escogió la heurística
3. Qué variaciones se podrían dar al problema.

Noticias

Un cordial saludo para todos los participantes.
Esta es la ultima actividad del cursillo.
Ayúdate con el documento referenciado a continuación: ***Algunas Heurísticas De Polya,*** el cual se encuentra en la pestaña de Doc: Mats vía resolución de problemas, también puedes hacer uso de la investigación para profundizar en las actividades propuestas. Sugerimos leer muy bien los temas respectivos y las lecturas recomendadas, en las cuales encontrará las explicaciones y ejemplos necesarios para facilitarle la realización de la tarea solicitada. Estas pueden realizarse en casa, a través de un procesador de texto como Microsoft Word.

Resolver los Problemas usando las Heurísticas relacionadas en el documento, Teniendo en cuenta:

1. Elaborarlas según los cuatro pasos establecidos por Polya.
2. Explicar la razón por la cual se escogió la heurística
3. Qué variaciones se podrían dar al problema.

Recordamos a los participantes que son importantes las participaciones en los foros y lo significativo de sus aportes tanto para nosotros como para sus compañeros.

De antemano agradecemos la participación en este proyecto y en el mejoramiento de la educación matemática.

El PROBLEMA DE TEOFRASTO

Teofrasto fue a ver a Aristóteles, para hablar sobre la clasificación de las plantas. Llevaba a su perro, un mastín, atado con una cuerda de longitud L. Cuando llegó, ató la cuerda con un nudo corredizo, alrededor de una columna de radio R. El perro, al que no le gustaba estar atado, tensionó la cuerda, y la cuerda se rompió. Hallar a que distancia del perro estaba el nudo corredizo cuando se rompió la cuerda

¿CUÁNTOS AÑOS TIENE ROBERTO?

Vamos a calcularlo. Hace 18 años, recuerdo que Roberto era exactamente tres veces más viejo que su hijo. -Espere; precisamente ahora, según mis noticias, es dos veces más viejo que su hijo. -Y por ello no es difícil establecer cuántos años tienen Roberto y su hijo. ¿Cuántos?.

UN PROBLEMA CON CERILLAS

El jugador de turno vació sobre la mesa su caja de cerillas, distribuyéndolas en tres montones. ¿Se dispone usted a hacer hogueras? - bromearon los presentes. El rompecabezas será a base de cerillas - explicó -. Tenemos tres montoncitos diferentes. En ellos hay en total 48 cerillas. No le digo cuántas hay en cada uno, pero observen lo siguiente: si de primer montón paso al segundo tantas cerillas como hay en éste luego del segundo paso al tercero tantas cerillas como hay en es tercero, y, por último, del tercero paso al primero tantas cerillas como existen ahora en ese primero, resulta que habrá el mismo número de cerillas en cada montón. ¿Cuántas cerillas había en cada montón al principio?.

Soluciones de los participantes

AURA SANDOVAL TORRES.

PROBLEMA 2

Vamos a calcularlo. Hace 18 años, recuerdo que Roberto era exactamente tres veces más viejo que su hijo. -Espere; precisamente ahora, según mis noticias, es dos veces más viejo que su hijo. -Y por ello no es difícil establecer cuántos años tienen Roberto y su hijo. ¿Cuántos?.

1. **Comprender el problema:**
    - ¿Qué datos tengo?

Hace 18 años Roberto tenia exactamente tres veces la edad de su hijo, hoy Roberto tiene dos veces la edad de su hijo.

- ¿Cuál es la incógnita?

Debo establecer la edad de Roberto de su hijo.

2. **Crear un plan:**

Teniendo en cuenta las heurísticas de Polya, se traduce del lenguaje común a lenguaje matemático teniendo el cuidado de hacer una buena traducción, a partir de esto se desarrolla la ecuación algebraicamente.

3. **Poner en practica el plan:**

Expresemos algebraicamente la información usando como variables:

X: La edad de Roberto.

Y: La edad de su hijo.

Debemos encontrar el valor de X e Y de tal forma que cumplan con las condiciones mencionadas en los datos del problema.

- Hace 18 años:

$$X = 3Y - 18 \text{ (EC. 1)}$$

- Hoy:

$$X = 2Y \quad \text{(EC. 2)}$$

Reemplazo La ecuación 2 en la ecuación 1.

$$2Y = 3Y - 18$$
$$3Y - 2Y = 18$$
$$Y = 18 \rightarrow X = 36$$

Por lo cual la edad de Roberto actualmente es de 36 años y de su hijo es de 18 años.

4. Visión retrospectiva:

Revisar si la respuesta está acorde con la pregunta inicial, me preguntan por la edad de Roberto y de su hijo, la edad de ellos hace 18 años respectivamente era de 18 y 0 quiere decir que hace 18 años Roberto tenia 18 y su hijo apenas nacía.

YAMID ALEJANDRO MOSQUERA SOTOMAYOR (Estudiante de ingeniería de Sistemas UNICAUCA)

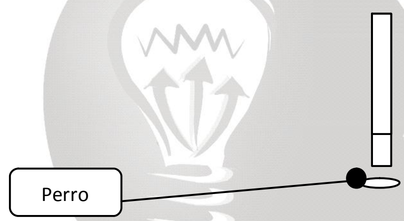
El PROBLEMA DE TEOFRASTO

Teofrasto fue a ver a Aristóteles, para hablar sobre la clasificación de las plantas. Llevaba a su perro, un mastín, atado con una cuerda de longitud L. Cuando llegó, ató la cuerda con un nudo corredizo, alrededor de una columna de radio R. El perro, al que no le gustaba estar atado, tensionó la cuerda, y la cuerda se rompió. Hallar a qué distancia del perro estaba el nudo corredizo cuando se rompió la cuerda

Comprender el problema:

Mastín= Perro grande

1. **Comprender el problema:**



2. **Plan**: Con algunas herramientas de la física mecánica y conceptos como la fuerza podemos intentar resolver este problema
3. **Ejecutando Plan**:

Cuando la cuerda esta tensa y en equilibrio, si no hay rozamientos ni en el nudo ni en la columna, tensión en todos los puntos de la cuerda es la misma. Entonces en el nudo están actuando tres fuerzas de la misma intensidad, cada una en la dirección de un cabo de cuerda. La única forma de que se equilibren es que formen ángulos de 120 grados entre sí. Recordando que la tangente es perpendicular al radio se obtiene que la distancia del nudo al centro de la columna es r/sen 60º, y por tanto la distancia del nudo a la columna es d = r*(2/RaizCruadrada(3) - 1).

4. Pues la verdad no sé cómo demostrar eso.

La heurística utilizada pues es por facilidad. La mecánica nos ayuda a resolver problemas reales como estos.

¿CUÁNTOS AÑOS TIENE ROBERTO?

Vamos a calcularlo. Hace 18 años, recuerdo que Roberto era exactamente tres veces más viejo que su hijo. Espere; precisamente ahora, según mis noticias, es dos veces más viejo que su hijo. Y por ello no es difícil establecer cuántos años tienen Roberto y su hijo. ¿Cuántos?

1. **Comprender el problema**: Se necesita conocer la edad de las 2 personas indicadas, con los datos establecidos.
2. **Plan**: Tratar de establecer ecuaciones de donde pueda despejar la edad del niño para así obtener la edad de Roberto.
3. **Ejecutado plan:**

Hace 18 años

Hijo = x

Roberto = 3x

Después de 18 años (hoy)

Hijo = x + 18

Roberto = 3x + 18

Resulta que:

3x + 18 = 2(x+18)

X = 18

Reemplazando

Hijo tiene 36 años

Roberto 72

4. **Examinando respuesta:**

72 – 18 = 54, este número es 3 veces 18

36, el doble de este número es 72, la edad actual del padre

Heurística: las ecuaciones en este tipo de problemas me parece q son esenciales, es como un juego de buscar una llave perdida para abrir un baúl.

ALEXANDER GORINA SÁNCHEZ

Departamento de Matemática. Universidad de Oriente. Cuba.

1. El PROBLEMA DE TEOFRASTO

Teofrasto fue a ver a Aristóteles, para hablar sobre la clasificación de las plantas. Llevaba a su perro, un mastín, atado con una cuerda de longitud L. Cuando llegó, ató la cuerda con un nudo corredizo, alrededor de una columna de radio R. El perro, al que no le gustaba estar atado, tensionó la cuerda, y la cuerda se rompió. Hallar a que distancia del perro estaba el nudo corredizo cuando se rompió la cuerda

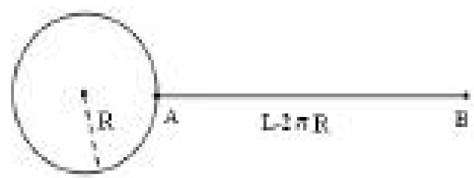
Solución del problema 1

Se decidió utilizar el heurístico de FIGURAS, pues el mismo consiste en realizar un dibujo o un gráfico que nos permita entender más el problema y nos ayude en el plan a desarrollar para la solución, esta heurística es muy útil para solucionar problemas geométricos, de construcciones geométricas en los cuales un gráfico nos ayude a ver y entender mejor el problema.

Comprender el problema, concebir un plan, ejecución de un plan y examinar la solución

Lo primero que hacemos es una representación interna del problema y luego exteriorizamos dicha representación teniendo en cuenta los aspectos más generales:

Posteriormente, hacemos una representación en la cual prevalece la abstracción sobre los objetos matemáticos conocidos y sus respectivas relaciones en correspondencia con la experiencia del resolutor. Deben conocerse cuales son los datos (longitud de la cuerda: L, el radio de la columna se supone un cilindro regular de base circular y radio R), las incógnitas (en este caso distancia mínima del perro a la columna), ciertas definiciones o fórmulas de cálculo (expresión para determinar la longitud de una circunferencia). En este caso el plan es muy evidente y consiste restarle a la longitud de la cuerda L la longitud de la circunferencia que forma la cuerda alrededor de la columna de radio R, pues se supone que el nudo corredizo se desplaza hasta el punto A, en fin que lo que nos interesa calcular la longitud del segmento AB, por tanto podemos asegurar que el nudo corredizo estaba a una distancia $\overline{AB} = L-2\pi R$ del perro en el momento de romperse la cuerda, en este caso se examina nuevamente el razonamiento que nos condujo a la solución y como se trabaja sólo con parámetros no hay que rectificar los cálculos numéricos. La segunda figura que se empleó para el análisis se muestra a continuación.



Observación: Los otros heurísticos prácticamente no se han empleado en el presente problema, se utiliza en menor medida el heurístico definición (por ejemplo la de cilindro regular de base circular, circunferencia, longitud de una circunferencia)

2. ¿CUÁNTOS AÑOS TIENE ROBERTO?

Vamos a calcularlo. Hace 18 años, recuerdo que Roberto era exactamente tres veces más viejo que su hijo. Espere; precisamente ahora, según mis noticias, es dos veces más viejo que su hijo. Y por ello no es difícil establecer cuántos años tienen Roberto y su hijo. ¿Cuántos?

Solución del problema 2

En este problema utilizamos esencialmente el heurístico **Planteo de la ecuación**, pues se emplean símbolos matemáticos para expresar las condiciones del problema. Llevamos el lenguaje común a lenguaje matemático, sin descuidar la buena traducción o el buen planteo del problema.

Comprender el problema, concebir un plan, ejecución de un plan y examinar la solución

Comenzamos a representarnos el problema interior y exteriormente para su adecuada comprensión, para lo cual concebimos el siguiente plan: definición de las variables, planteamiento del sistema de ecuaciones, resolución del sistema y verificación de la solución.

Ejecución del plan

Definición de las variables:
X: edad de Roberto en la actualidad
Y: edad del hijo de Roberto en la actualidad

Planteamiento del sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases}(X-18)=3(Y-18)\\ X=2Y\end{cases}$$

Resolución del sistema:
Una vez planteado el sistema de ecuaciones en términos matemáticos este se ha convertido en un **problema práctico**, por lo tanto se impone obtener la solución del sistema:
Sustituyendo la segunda ecuación en la primera obtenemos:

$2Y-18=3(Y-18)$ donde obtenemos Y=36 y X=72

Verificación de la solución:

72-18=3(36-18)
54=54
Por otro lado se verifica que
72=2*36
72=72

Por lo tanto la solución del problema es que la edad de Roberto en la actualidad es de 72 años mientras que la del hijo es de 36 años.

3. UN PROBLEMA CON CERILLAS

El jugador de turno vació sobre la mesa su caja de cerillas, distribuyéndolas en tres montones. ¿Se dispone usted a hacer hogueras? Bromearon los presentes. El rompecabezas será a base de cerillas explicó. Tenemos tres montoncitos diferentes. En ellos hay en total 48 cerillas. No le digo cuántas hay en cada uno, pero observen lo siguiente: si del primer montón paso al segundo tantas cerillas como hay en éste, luego del segundo paso al tercero tantas cerillas como hay en el tercero, y, por último, del tercero paso al primero tantas cerillas como existen ahora en ese primero, resulta que habrá el mismo número de cerillas en cada montón. ¿Cuántas cerillas había en cada montón al principio?

Solución del problema 3

En este problema al igual que en el problema anterior utilizamos esencialmente el heurístico **Planteo de la ecuación**, pues se emplean símbolos matemáticos para expresar las condiciones del problema. Llevamos el lenguaje común a lenguaje matemático, sin descuidar la buena traducción o el buen planteo del problema.

Comprender el problema, concebir un plan, ejecución de un plan y examinar la solución

Comenzamos a representarnos el problema interior y exteriormente para su adecuada comprensión, lo leemos varias veces para hacer una interpretación correcta, en este proceso de lectura nos damos cuenta de cierta ambigüedad en el enunciado,"*si del primer montón paso al segundo tantas cerillas como hay en éste*...", éste no se sabe a quién se refiere: una primera interpretación podría ser que del primer montón se pasa al segundo montón la misma cantidad que hay en el segundo montón, mientras que la segunda interpretación sería que del primer montón se pasan todas las cerillas al segundo montón.

Para el caso de la primera interpretación concebimos el siguiente plan: definición de las variables, planteamiento del sistema de ecuaciones, resolución del sistema y verificación de la solución.

Ejecución del plan

Definición de las variables:
X: Número de cerillas en el primer montón
Y: Número de cerillas en el segundo montón
Z: Número de cerillas en el tercer montón

Planteamiento del sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} X+Y+Z=48 \\ Y+Y-Z=Y \\ X-Y+X=X \\ Z-X+Z=Z \end{cases} \qquad (1)$$

Resolución del sistema:
Una vez planteado el sistema de ecuaciones en términos matemáticos este se ha convertido en un problema práctico, por lo tanto se impone obtener la solución del sistema, para lo cual reescribimos (1)

$$\begin{cases} X+Y+Z=48 \\ Y=Z \\ X=Y \\ Z=X \end{cases} \qquad (2)$$

Al resolver (2) obtenemos:

3X=48 por tanto X=Y=Z=16

Verificación de la solución:

$$\begin{cases} 16+16+16=48 \\ Z=X=Y=16 \end{cases}$$

Por lo tanto, la solución del problema de acuerdo a la primera interpretación es que en cada montón hay 16 cerillas.

Ahora analizaremos la segunda interpretación del problema, para la cual la misma definición de variables se va a emplear, el plan que se concibe es análogo al hecho para la primera variante.

Planteamiento del sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} X+Y+Z=48 \\ X-X+X=X \\ Z+Z-X=Z \\ Y+X-Z=Y \end{cases} \qquad (1")$$

O bien

$$\begin{cases} X+Y+Z=48 \\ Z=X \end{cases} \qquad (2")$$

Resolución del sistema:
Una vez planteado el sistema de ecuaciones en términos matemáticos este se ha convertido en un **problema práctico**, por lo tanto se impone obtener la solución del sistema (2"), el cual es compatible indeterminado.

Al resolver (2") obtenemos la solución:

X=K, Z=K, Y=48-2K, K=1… 23

Verificación de la solución:
Los casos extremos resultan interesantes en esta ocasión:
K=1 ⇒ X=1, Z=1, Y=46
K=23 ⇒ X=23, Z=23, Y=2, donde X+Y+Z=48 en ambos casos.

Por lo tanto, podemos concluir que la solución del problema de acuerdo a la segunda interpretación es:

X=K, Z=K, Y=48-2K, K=1… 23

Observación: Resulta interesante el hecho de que la solución para la primera interpretación está contenida en la solución de la segunda interpretación, es decir:

K=16 ⇒ X=16, Z=16, Y=16

CONCLUSIONES SOBRE EL CURSILLO

El cursillo "Enseñanza De La Matemáticas Vía Resolución De Problemas"nos ha permitido recoger algunas experiencias las cuales nos agradara compartir con el lector de este documento, también realizamos algunas recomendaciones o sugerencias acerca del cursillo y de las actividades realizadas en él.

Aunque la convocatoria para el curso se hizo con algunas semanas de anticipación y fue numerosa la gente inscrita o que envió su solicitud para participar en el cursillo, sólo participaron constantemente cinco personas, observamos que el modelo de educación virtual demanda mucho tiempo, lo cual influye en la entrega de las tareas y obviamente de la participación activa en el curso.

Se debe ser muy explicito en la publicación de las noticias para las actividades, es decir, explicar muy detalladamente lo que se pretende de la actividad y como realizarla evitando omitir detalles por obvios que sean, para así obtener la información que se necesita.

La actividad de administración del curso debe ser constante, ya que es necesario revisar frecuentemente el envío de las soluciones y la participación en los foros puesto que son los que dan dinamismo al curso y los que permiten la comunicación con los participantes.

Es importante que los estudiantes conozcan sus notas durante cada actividad, pues, son una forma de motivarlos a seguir participando en las actividades posteriores.

Se debe dar tiempo límite para la entrega de las actividades, pero se debe dejar la opción de entregar tarde, ya que como manifestamos antes el tiempo de los participantes es limitado.

Acerca de las Actividades

Importante que las actividades entregadas por los participantes sean entregadas en formato de algún procesador de texto (Word u otro) ya que como se noto anteriormente no fue posible copiar algunas en buena calidad, para efectos del presente informe.

En la actividad 1 se debe hacer énfasis en el envío de las soluciones con sus respectivos procedimientos y sobretodo en la discusión de las preguntas.

En la actividad 4 es necesario ser más especifico en el objetivo de la actividad el cual es conocer las experiencias de los maestros acerca de las creencias de los estudiantes acerca dela resolución de problemas y como ellos han tratado de solucionar los inconvenientes que generan este tipos de creencias negativas.

Es necesario en la actividad 4 la realización de un foro, puesto que es importante compartir las experiencias de los participantes y como se enfrentan a las creencias de los estudiantes en la resolución de problemas.

En general consideramos una buena experiencia el presente cursillo, además nos parece conveniente la realización de un curso presencial para maestros en el cual se retome el tema de resolución de problemas matemáticos y en cual haya un compromiso formal para fortalecer la enseñanza – aprendizaje de las matemáticas.

El Proyecto **REDUMAC** (Red de Aprendizaje en Educación Matemática del Cauca) de la Universidad del Cauca

Certifican que:

Alexander Gorina Sánchez

Documento de identidad 79012822300

Participó y aprobó en calidad de estudiante, en la modalidad virtual, el curso

ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS VÍA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Desarrollado entre el 27 de Octubre y el 23 de Noviembre de 2008, con una dedicación de 48 horas

Firmado en Popayán - Colombia en Noviembre de 2008

Omar Andrés Latorre S. Responsable del curso	Phd. Carlos Alberto Trujillo Director de proyecto REDUMAC	José Andrés Sánchez C Responsable del curso

9 BIBLIOGRAFÍA

[1] PÓLYA, George. *Cómo Plantear y Resolver Problemas.* Editorial Trillas 1965 (Reimp. 2001) 215p. Traducción*: How to Solve it.*

[2] SCHOENFELD, Alan H. Mathematical Problem Solving. Academic Press, Inc. 1985. 409p.

[3] SANTOS TRIGO, Luz Manuel. Principios Y Metodología de la Resolución de Problemas en el Aprendizaje de las Matemáticas, Didácticas Lecturas. 2 ed. Grupo editorial Iberoamericano 1997. 161p

[4] GODINO, Juan D. BATANERO, Carmen. FONT Vincenç. *Didáctica de la Matemática Para Maestros - Manual para el estudiante*. Universidad de Granada. Ed. Octubre 2004. . [Documento en Internet]. Acceso en http://www.ugr.es/local/jgodino/edumat-maestros/ [consulta Febrero de 2008]

[5]GODINO, Juan D. CID, Eva. BATANERO, Carmen*. Matemática Para Maestros - Manual para el estudiante.* Universidad de Granada. Ed. Octubre 2004. [Sitio en Internet]. http://www.ugr.es/local/jgodino/edumat-maestros/

[6] NIETO SAID, José Heber. *Resolución de problemas matemáticos*. Talleres de Formación Matemática, Maracaibo, 26 al 31 de julio de 2004 p1. [Documento en Internet]. Acceso en http://ommcolima.ucol.mx/guias/TallerdeResolucionproblemas.pdf

[7] Estándares Curriculares Para Matemáticas: Ministerio de Educación Nacional. 30p [artículo de internet] http://www. mineducacion.gov.co. [consulta noviembre de 2007]

[8] POZO, Juan Ignacio. PEREZ, María. DOMINGUEZ, Jesús. GOMEZ, Miguel. POSTIGO Yolanda. La solución de problemas. Editorial Santillana Madrid, 1994. . [Documento en Internet]. Acceso en http://www.bioingenieria.edu.ar/grupos/puertociencia/documentos/fisicaem/Pozo-Postigo_Unidad_1.PDF

[9] Problemas Matemáticos. [Sitio en Internet]. Disponible en http://problemate.blogspot.com . [Acceso Agosto de 2008]

[10] Rizo Cabrera Celia, Campistrous Pérez Luis. Estrategias de resolución de problemas en la escuela. Relime Vol. 2, Núm.3, noviembre, 1999 pp.31-45. [Documento en Internet] Acceso en http://redalyc.uaemex.mx/redalyc/pdf/335/33520304.pdf