

EL APRENDIZAJE SIGNIFICATIVO DE LA DIVISION DE NUMEROS
NATURALES A TRAVES DE CONJUNTOS

MANUEL RICARDO GOMEZ CAICEDO
EDUARD FERNANDO GONZALEZ OBANDO

UNIVERSIDAD DEL CAUCA
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES EXACTAS Y DE LA EDUCACION
DEPARTAMENTO DE EDUCACION Y PEDAGOGIA
LICENCIATURA EN EDUCACION BASICA
POPAYÁN CAUCA
2005

EL APRENDIZAJE SIGNIFICATIVO DE LA DIVISION DE NUMEROS
NATURALES A TRAVES DE CONJUNTOS

MANUEL RICARDO GOMEZ CAICEDO
EDUARD FERNANDO GONZALEZ OBANDO

Informe final de práctica pedagógica investigativa

Directora
DOLORES CRISTINA MONTAÑO ARIAS
Magíster en Educación

Asesor
ORLANDO RODRIGUEZ
Magíster en Educación Matemática

UNIVERSIDAD DEL CAUCA
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES EXACTAS Y DE LA EDUCACION
DEPARTAMENTO DE EDUCACION Y PEDAGOGIA
LICENCIATURA EN EDUCACION BASICA
POPAYÁN CAUCA

2005

NOTA DE ACEPTACION

Directora de trabajo: _____
Mg. Dolores Cristina Montaña Arias

Asesor de área: _____
Mg. Orlando Rodríguez

Coordinador del programa: _____
Mg. Dolores Cristina Montaña Arias

AGRADECIMIENTOS

Especialmente agradecemos a Dios porque a El debemos todo lo que somos y porque es el único que siempre estará con nosotros incondicionalmente en todas nuestras obras.

Al Magister Jairo Narvaez Rector del Colegio Liceo Nacional Alejandro de Humboldt, a la profesora Luz Avilia Directora del grado tercero y especialmente a los estudiantes de este grado por permitirnos realizar este valioso trabajo.

A nuestros padres por su apoyo y porque siempre creyeron en nosotros.

A nuestros compañeros con quienes compartimos grandiosos momentos que nos enriquecieron como personas y profesionales.

A todos nuestros profesores por sus enseñanzas y en especial a la Mg. Dolores Cristina Montaña por su orientación, aportes y paciencia que contribuyeron a que el resultado de este trabajo fuera satisfactorio.

CONTENIDO

	Pág.
INTRODUCCIÓN	11
1. RESUMEN	12
2. PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN	14
2.1 Subpreguntas	14
2.2 Objetivos	14
2.2.1 Objetivo general.	14
2.2.2 Objetivos específicos.	14
3. MARCO CONTEXTUAL	16
3.1 Departamento del Cauca	16
3.2 Municipio de Popayán	17
4. MARCO DE REFERENCIA TEÓRICA	19
4.1 Teorías sobre la construcción del conocimiento	19
4.2 Aprendizaje significativo	20
4.3 Valoración del término conjunto	22
4.3.1 Teoría de conjuntos.	22
4.3.2 El conjunto de los números naturales.	23
4.3.3 Sistemas de numeración	26
4.3.4 Sistema de numeración egipcio.	27
4.3.5 Sistema de numeración griego.	29
4.3.6 Sistema de numeración babilónico.	30
4.4 División de números naturales	31
5. ASPECTOS ANALÍTICOS	36
5.1 Metodología	36
5.1.1 Tipo de investigación.	36
5.1.2 Estrategias para recolección de datos.	36

5.1.3 Población y muestra.	38
5.1.4 Propuesta del plan de acción.	38
5.2 Hallazgos	50
6. CONCLUSIONES	54
RECOMENDACIONES	56
BIBLIOGRAFÍA	57
ANEXOS	59

LISTA DE TABLAS

	Pág.
Tabla 1. Propiedades de las operaciones de números naturales	25
Tabla 2. Proceso metodológico de la investigación	39
Tabla 3. Matriz de resultados en los talleres	40
Tabla 4. Taller 1: Repartos	43
Tabla 5. Taller 2: Repartos exactos	44
Tabla 6. Taller 3 “El mejor Lanzamiento”	45
Tabla 7. Taller 4: “Repartos Inexactos”	47
Tabla 8. Taller 5 “dividiendo entre 2 cifras”	48
Tabla 9. Matriz de análisis de resultados	49
Tabla 10. Análisis de la información	53

LISTA DE FIGURAS

	Pág.
Figura 1. Mapa conceptual del marco contextual.	15
Figura 2. Mapa conceptual de la metodología.	35

LISTA DE ANEXOS

	Pág.
Anexo 1. Mapa del Departamento del Cauca	60
Anexo 2. Mapa Municipio de Popayán	61
Anexo 3. Mapa Comunas del Municipio de Popayán	62
Anexo 4. Comuna número 4	63
Anexo 5. Talleres 2, 3, 4, 5 y 6 estudiante 1	64
Anexo 6. Talleres 2, 3, 4, 5 y 6 estudiante 2	69
Anexo 7. Talleres 2, 3, 4, 5 y 6 estudiante 3	74
Anexo 8. Registros fotográficos	79
Anexo 9. Proceso pedagógico de la investigación.	81

TEMA

El aprendizaje significativo de la división de números naturales a través conjuntos.

INTRODUCCIÓN

El documento contiene los siguientes apartes: Introducción, resumen, el problema de investigación, los objetivos, el marco contextual, el marco teórico, los aspectos analíticos que precisan la metodología, la estrategia de recolección de información, la población y muestra, los hallazgos y/o los resultados del estudio. Finalmente se presentan las conclusiones y recomendaciones, al igual que la bibliografía utilizada.

1. RESUMEN

En este trabajo damos cuenta de los hallazgos encontrados con relación al problema de investigación planteado en el siguiente interrogante: ¿Cómo se logra el aprendizaje de la división de números naturales a través de conjuntos, desde el modelo pedagógico: Aprendizaje significativo con estudiantes de población desplazada del nivel de básica primaria del Liceo Nacional Alejandro de Humboldt?

En las múltiples búsquedas sobre trabajos anteriores al nuestro relacionamos el trabajo realizado por Orlando Mesa Betancourt, profesor de la Universidad de Antioquia año 2001, denominado “Camino a la aritmética (un enfoque constructivista)” en el cual destacamos el interés de considerar en la matemática los procesos antes que los resultados, la comprensión del algoritmo antes que su mecanización y la búsqueda del saber previo como punto de partida en el quehacer pedagógico del maestro guía dando lugar así a la relación sujeto-sujeto, en la que se basa el enfoque histórico-hermenéutico en el cual centramos esta investigación. Además este trabajo aportó a nuestra investigación la implementación del método divisiones sucesivas en la representación concreta de divisiones de números de 3 cifras con divisores de 2 cifras, lo que facilitó el trabajo con material real.

Desde el punto de vista metodológico recurrimos a la etnografía porque nos ofreció tener un contacto directo en el aula de clase, donde interactuaban los estudiantes en la construcción de conocimientos a través de las técnicas de recolección de datos como lo fueron: la observación participante, la revisión bibliográfica, los registros de campo y los registros fotográficos, permitiéndonos realizar una investigación más objetiva de la población escolar, conformada por 19 estudiantes que correspondían al 100%, de los cuales el 57.87% son niños y el 42.10% son niñas, de las cuales tomamos como muestra poblacional 3 niñas de

acuerdo a los siguientes criterios: Ser estudiante del grado tercero, no haber alcanzado los logros en el área de matemáticas y demostrar interés por la propuesta a realizar. Propuesta en la que se logró evidenciar que trabajar el tema de la división a través de conjuntos con material real permitió al niño construir y entender el significado de la división como una operación que significa repartir en partes iguales una cantidad determinada, además relacionó la multiplicación con la división exacta como operaciones inversas, asimismo diferenciar la división exacta (residuo cero) con la división inexacta (residuo diferente de cero) en el momento de hacer los repartos con el material real y vivenciar que en algunas representaciones quedaban elementos sin repartir y en otras no, de igual manera lograron identificar los términos (dividendo, divisor, cociente, residuo) de la división y sus significados. Todo lo anterior arrojó como principal conclusión que los estudiantes conocieran el proceso de la división y comprendieran su algoritmo, pasando así de un plano concreto a un plano abstracto, lo que despertó en ellos una actitud favorable en el aprendizaje de las matemáticas. Finalmente recomendamos la búsqueda de nuevas estrategias para abordar la división de cantidades grandes entre divisores de dos cifras, ya que el trabajo con material real en esta parte se convirtió en una tarea muy dispendiosa que disminuyó el interés de los estudiantes por trabajar.

2. PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

¿Cómo se logra el aprendizaje de la división de números naturales a través de conjuntos, desde el modelo pedagógico, el “aprendizaje significativo” con estudiantes de población desplazada del grado tercero nivel básica del Liceo Alejandro de Humboldt de Popayán?

2.1 Subpreguntas

- ¿Qué conocimientos previos tienen los estudiantes sobre el tema la división de los números naturales?
- ¿Son los conjuntos una estrategia pedagógica que posibilita el aprendizaje significativo de la división de números naturales?

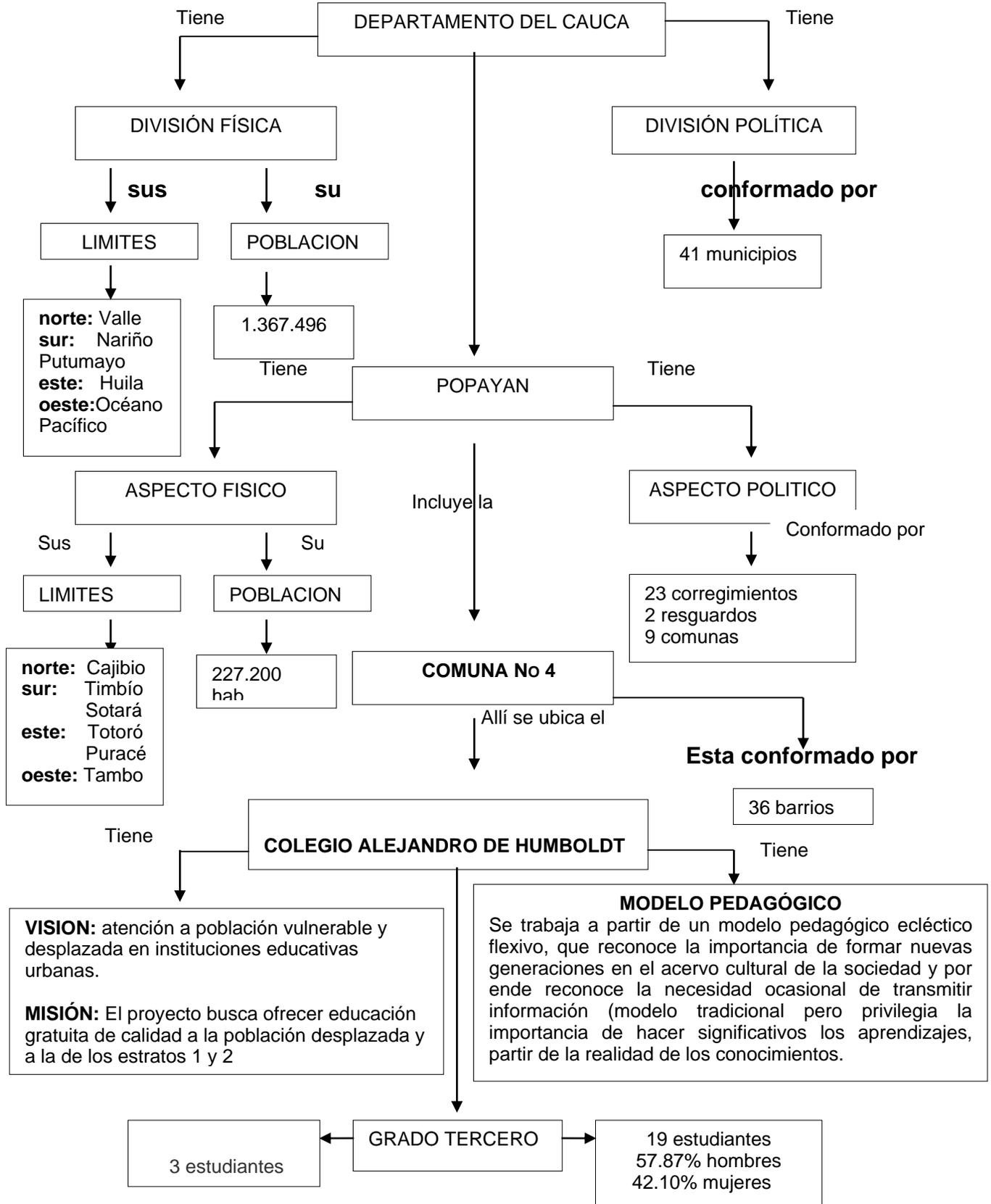
2.2 Objetivos

2.2.1 Objetivo general. Conocer el nivel de logro en el aprendizaje de la división de números naturales, desde el modelo pedagógico de “Aprendizaje Significativo” con estudiantes de población desplazada del grado tercero nivel básico del Liceo Alejandro de Humboldt de Popayán.

2.2.2 Objetivos específicos.

- Trabajar los conjuntos con material real fichas palos, pelotas, ula-ulas, tapas para conocer el nivel del logro que tienen los estudiantes en el proceso lógico-matemático de la división.
- Desarrollar ejercicios pedagógicos sobre la práctica de la división de números naturales.

Figura 1. Mapa conceptual del marco contextual



3. MARCO CONTEXTUAL

3.1 Departamento del Cauca

El Departamento del Cauca está ubicado al suroeste del país, entre las regiones Andina y Pacífica, localizado entre los 00°58' y 03°19'04" de latitud norte y los 75°47'36" y 77°57'05" de latitud oeste. Limita al norte con los departamentos del Valle del Cauca y Tolima, al oriente con los departamentos de Huila y Caquetá, al sur con los departamentos de Putumayo y Nariño, y al occidente con el océano Pacífico. Fue creado por la Constitución de 1886 (Ver anexo 1).

Su extensión es de 29.308 Km². Tiene una geografía quebrada, lo que le permite poseer todas las variantes climáticas, desde las más frías en el nevado del Huila (5.750 m) y los volcanes de Puracé y Sotará, hasta las tierras bajas de la costa. Atravesado por las cordilleras Occidental y Oriental, esta última cordillera nace en este territorio, concretamente en el macizo colombiano, donde también nacen las principales arterias fluviales del país como son los ríos Magdalena, Cauca y Caquetá¹.

Este departamento tiene actualmente 1'367.496 habitantes. Dos de cada tres caucanos viven en el campo dentro de sus actividades económicas sobresalen la agricultura, ganadería, minería, el comercio, la explotación de madera y el turismo. Esta conformado por 41 municipios en el cual se encuentra Popayán que es la capital.

¹ "Popayán" Instituto Geográfico Agustín Codazzi. Diccionario geográfico de Colombia. 1996. Pág. 496, tomo 1.

- Su nombre Popayán tiene varias versiones según cronistas uno de ellos es compuesto de los vocablos quechuas:
Pampa, que significa Valle, sitio Paso; y yan significa Río o sea paso del río.
- Otra versión es que se deriva de algún dialecto autóctono “el Guambia” y se descompone así: Po → dos Pa: Paja y yan caserío o sea dos caseríos de paja.
- Otro es derivado del cacique payán lo llamaban Pop payán Pop origen quiché (dialecto maya) que significa trono del Rey.

La población de Popayán es de 227.200 habitantes, limita al norte con Cajibío, al sur con Timbío y Sotaró, al este con Totoró y Puracé y al oeste con el Tambo.

En el ámbito escolar el número de establecimientos educativos en Popayán de 316 repartidos así 107 Preescolares, 149 de educación Primaria y 64 de educación media y vocacional, el número total de estudiantes matriculados de 48,280 en la zona urbana hay 45.394 estudiantes correspondientes al 94% y en la zona rural 2686 estudiantes que corresponden al 5.56%, en preescolar hay 4304 en Básica primaria 23.275 en educación Básica secundaria 25.910 y en educación superior 16249 estudiantes. Estos datos nos permiten deducir que la mayor concentración se encuentra en la zona urbana.

3.2 Municipio de Popayán

Popayán esta conformada por 23 corregimientos, 2 resguardos y 9 comunas, de las comunas rescatamos la comuna número 4 en el cual se encuentran los principales monumentos arquitectónicos y entidades gubernamentales. Esta comuna esta conformada por 36 barrios de estratos 2, 3, 4 y 5, en esta comuna se encuentra el Barrio Pomona y allí está ubicado el Colegio Nacional Liceo Alejandro de Humboldt. Fundado el 24 de octubre de 1961 por la ley 93. Su misión es ofrecer educación gratuita de calidad a la población desplazada y a la de los estratos 1 y 2, según la ley 387de 1997 desplazado es aquella persona que se ha visto forzada emigrar porque su vida, integridad física o libertad han sido

vulneradas o se encuentran amenazadas debido a existencia de situaciones causadas por el hombre; y su visión es atención a población vulnerable y desplazada en instituciones educativas urbanas.



Se basa en un modelo pedagógico ecléctico flexivo que reconoce la importancia de formar nuevas generaciones en el acervo cultural de la sociedad y por ende reconoce la necesidad ocasional de transmitir información (modelo tradicional pero privilegia la importancia de hacer significativos los aprendizajes, partir de la realidad de los conocimientos, trabajando con una población de 19 estudiantes pertenecientes al grado 3° del nivel básica primaria, el cual el 57.87% son hombres y el 42.10% son mujeres y su muestra poblacional fueron 3 estudiantes niñas².



² Tomado PEI del colegio Liceo Nacional Alejandro de Humboldt.

4. MARCO DE REFERENCIA TEÓRICA

4.1 Teorías sobre la construcción del conocimiento

En los contextos educativos contemporáneos es necesario partir del conocimiento de aportes que repercutan en la práctica educativa, claro esta acudiendo a la historia, y a su vez teniendo en cuenta diferentes concepciones y reflexiones de autores. El conocimiento es dado por el descubrimiento, es ahí donde juega un papel importante el lenguaje, porque la realidad no existe sino es a través de él.

La palabra aprendizaje viene del latín aprehensión que significa aprender (apropiarse de algo útil) en este caso no debemos creer que existe una metodología que nos diga como aprendemos sino en saber cual teoría nos ofrece mejores resultados para reflexionar sobre el aprendizaje de acuerdo con lo que queremos trascender en el estudiante.

SERNA Juanita, en el libro “psicología evolutiva”³ un punto de vista cognoscitivo dice que “el aprendizaje es un factor que influye de modo importante en los seres vivos la cual permite al hombre adaptarse a las modificaciones del ambiente, adquisición de nuevas formas de comportamiento que se entrelazan y combinan con comportamientos innatos”.

Estimamos y somos conscientes de que los estudiantes que vamos a formar provienen de diferentes contextos, los cuales juegan un papel importante en su ritmo de aprendizaje, por esta razón el maestro debe partir del conocimiento de la realidad del estudiante para realizar su practica pedagógica.

³ AUSBEL P. David. Aprendizaje significativo 2 ed. Editorial Trillas. 1986. México. Pág. 46 – 52.

Si entendemos que la capacidad del estudiante para aprender es inmensa entonces debemos ayudar a complementar o estructurar en su mente los conocimientos previos y los adquiridos y así reflexionar si hay relación con el conocimiento que ha experimentado, ya que es un ser único y por lo tanto es él quien debe ser protagonista de su propio descubrimiento por medio de su experiencia.

4.2 Aprendizaje significativo

David Ausubel plantea “que la rapidez y la meticulosidad con que una persona aprende depende de dos cosas, la relación existente entre el material nuevo y la naturaleza de la relación que se establece entre la información nueva y la antigua”⁴.

Ausubel sostiene que el aprendizaje y la memorización puede mejorar si se crean y utilizan marcos de referencia muy organizados los cuales permiten un almacenamiento lógico de la información, es decir la existencia de una estructura pertinente en el sistema de pensamiento que mejora el aprendizaje y proporciona a la nueva información un significado potencialmente mayor.

Consideramos que una persona aprende más efectivamente si tiene en su mente la capacidad de recordar lo que se le pregunta y relacionarlo y organizarlo para luego estructurarlo y cuando ya se tiene la idea, dar una respuesta más concretamente, es ahí donde relaciona lo que sabe con lo que se le pregunta, creando un puente entre los conocimientos previos y los adquiridos.

Apoyándonos en lo anterior podemos decir que el aprendizaje mejora siempre y cuando exista un lenguaje claro ya que no hay saber que no sea experiencias y

⁴ Ibid., p. 47

por lo tanto que no parta de representaciones, ayudando al estudiante a crear su propio mapa cognitivo que le permita organizar mejor sus ideas.

Es necesario resaltar que para el área de matemática, este modelo de aprendizaje manifiesta una forma más activa de lograr conocimientos, aprendidos con sentido y con base en la pericia del estudiante. Esto significa que con anterioridad el docente debe descubrir lo que el estudiante sabe ó conoce del tema, de esta manera se establecerá ,si los conocimientos previos y los adquiridos le permitirán armar nuevos conocimientos y completar sus estructuras cognitivas.

Por esta razón este modelo de aprendizaje busca que el estudiante aprenda de su propia experiencia, el cual le permita ser más crítico, y analítico en el momento de pensar ante la situación que se le presente.

Es necesario aclarar que el docente de matemática no solamente es guía sino un facilitador para que el estudiante tenga una mayor motivación y construya su propio aprendizaje de acuerdo a sus experiencias y las de otros, como una herramienta fundamental tratando de romper con lo tradicional, la memorización y la repetición ya que estas solo son para el momento. De esta manera el estudiante no se convertirá en una enciclopedia almacenando todo sino lo que verdaderamente le despierte curiosidad por descubrir y que más que partir de lo que conoce ya que así recordara con facilidad y podrá responder de acuerdo a sus representaciones formadas en su mente.

Por lo tanto el aprendizaje de las matemáticas al igual que el de otras áreas debe ser una construcción conjunta donde el estudiante sea pieza fundamental, generando inquietudes, fortaleciendo sus habilidades y desarrollando le espíritu crítico por medio de la construcción de preguntas que lo rodean para así crear propuestas que le permitan apropiarse de las matemáticas como parte de su cultura y de su vida cotidiana.

4.3 Valoración del término conjunto

4.3.1 Teoría de conjuntos. La teoría de conjuntos se asocia con los desarrollos modernos de la matemática, ya que la idea de conjunto no tiene nada de nuevo. Desde la antigüedad, los matemáticos han considerado conjuntos de diferentes clases: esta teoría como disciplina matemática tuvo su origen en la segunda mitad del siglo XIX, con el trabajo del matemático Alemán Georg Cantor que dice “Conjunto es toda colección de objetos definidos o separados que pueden ser concebidos por la inteligencia en la cual se puede decidir si un objeto dado pertenece a una colección”, es decir que el término conjunto se utiliza para hacer referencia a una colección de objetos bien determinados y distinguibles, objetos de la intuición o del intelecto concebidos como un todo. Pero no considerado como una definición, sino como una descripción de significado del término. Ejemplo, una bolsa de canicas, las sillas de un curso, las botellas de una caja son ejemplos de conjuntos, ya que un conjunto está formado por ELEMENTOS, un elemento de un conjunto es una canica, una silla, una botella, etc⁵.

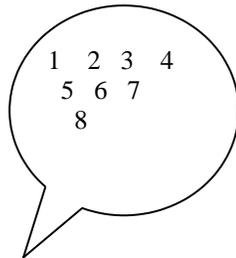
El concepto fundamental de la teoría de conjuntos es el de PERTENENCIA. Y se considera como de un concepto primitivo; lo cual significa que no admite definición por ejemplo las frases “ $X \in A$ ”, y “X es un elemento de A” y “X esta en A”, se escriben así $X \in A$ el símbolo \in es una letra griega \in (épsilon) y se usa para denotar pertenencia, y para tener claridad en el lenguaje, los conjuntos se indican con letra mayúscula y los elementos con letras minúsculas, así: $A \in X$ $a \in A$ y se pueden representar por diagramas cerrados entre llaves y separados por comas (,) se nombran por extensión y comprensión. Ejemplo.

⁵ BOYER, Carl. Historia de las matemáticas. Los orígenes primitivos. Capítulo I. Pág. 19-23.

$Z = \{\text{lunes, martes, miércoles, jueves...etc.}\}$ ó $N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$V = \{X: X \text{ es un mes del año}\}$

C.



$2 \in C$ pertenece

$9 \notin C$ no pertenece. Con esto estamos diciendo que ese número 9 no hace parte del conjunto C.

4.3.2 El conjunto de los números naturales. La matemática originalmente apareció como parte de la vida diaria, como el resultado de un pensamiento de distintas civilizaciones centrados en el concepto de número, magnitud y forma, sin embargo los números no han significado lo mismo para las diferentes épocas. Por ejemplo para los babilonios y egipcios del mundo antiguo, los números solo cobraban sentido en la solución de problemas concretos provenientes de lo empírico. Es en Grecia donde los números empiezan a pensarse con sentido autónomo y a tener una significancia en si mismo. Los números alcanzan su máximo esplendor en la escuela pitagórica porque vieron en ellos la materia prima de las cosas ya que estos no solo eran parte constitutiva de las cosas sino su fundamento agregando que los números son la representación de las cosas. El concepto de número no era ajeno a los hombres primitivos contaban hasta dos (distinción dual) designaban número singular y plural por ejemplo: un lobo y una manada, un árbol y un bosque, una oveja y un rebaño la diferencia entre un pececillo y una ballena relaciones, contrastes y semejanzas con magnitud número y forma experiencias desordenadas pero con algo cierto y en común la unidad, luego se fueron utilizando los dedos de las manos expresando colecciones de 2,3,4,5 hasta 10, después los dedos de los pies para representar colecciones hasta 20 elementos y cuando ya se pasaba a resultados difuncionales para este sistema utilizaron montones de piedra con grupos de 3 porque se habían familiarizado con objetos observados de sus manos y pies. Más latente se vio este hecho cuando se encontró en la antigua Checoslovaquia un hueso de un lobo

cachorro con 55 incisiones distribuidas en grupos de 25 y 30 y cada serie de 5 hace 30.000 años por lo cual no es una coincidencia que contaran de 5 en 5 agrupando elementos⁶.

A pesar de todas estas percepciones de representar objetos por signos, cantidades agrupamientos, formas, alcanzaron mayores resultados cuando apareció el lenguaje, se tardó mucho tiempo en sustituir objetos por palabras de un lenguaje para que el ser humano fuera, capaz de razonar y diferenciar el significado de número cardinal y ordinal, cardinal porque es la cantidad de elementos de un conjunto y ordinal es porque se pueden ordenar.

Así que los números naturales nacieron de la necesidad de contar los elementos de un conjunto, Los números naturales son infinitos y se designa con la letra N⁷.

$$N = \{ 0,1,2,3,4,5.....11,12,13... \}$$

En este orden se llaman “Serie natural de los números” el cero a veces se excluye del conjunto de los números naturales, además de cardinales son ordinales ya que sirven para los elementos de un conjunto.

Los números naturales son los primeros que surgen en las distintas civilizaciones, ya que las tareas de contar y de ordenar son las más elementales.

⁶ Ibid., p. 21.

⁷ Ibid., p. 22

Tabla 1. Propiedades de las operaciones de números naturales⁸.

OPERACIONES PROPIEDADES	SUMA	RESTA	DIVISIÓN	MULTIPLICACIÓN
CLAUSURATIVA	Si a, b y c son números naturales entonces $a + b = c$	Si a, b y c son números naturales entonces $a - b = c$	No se cumple	Si a, b y c son números naturales entonces $a \times b = c$
CONMUTATIVA	Si a y b son números naturales entonces $a + b = b + a$	No se cumple	No se cumple	Si a y b son números naturales entonces $a \times b = b \times a$
MODULATIVA	Si a es un número natural y lo sumamos con cero entonces $a + 0 = 0 + a = a$	Si a es un número natural y lo restamos con cero entonces $a - 0 = a$	No se cumple	Si a es un número natural y lo multiplicamos con cero entonces $a \times 0 = 0$
ASOCIATIVA	Si a, b, c son números naturales entonces $(a + b) + c = a + (b + c) = a + b + c$	No se cumple	No se cumple	Si a, b, c son números naturales entonces $(a \times b) \times c = a \times (b \times c) = abc$
DISTRIBUTIVA	Si a, b, c son números naturales entonces $a + (b + c) = (a + b) + (a + c)$	No se cumple	No se cumple	Si a, b, c son números naturales entonces $a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$

⁸ CENTENO. R. Hollman. CENTENO R. Gustavo. Matemática Constructiva 8°. Editorial Libros y Libres. S.A. pág. 78.

4.3.3 Sistemas de numeración. Cuando los hombres empezaron a contar usaron los dedos, guijarros, marcas en bastones, nudos en una cuerda y algunas otras formas para ir pasando de un número al siguiente. A medida que la cantidad crece se hace necesario un sistema de representación más práctico.

En diferentes partes del mundo y en distintas épocas se llegó a la misma solución, cuando se alcanza un determinado número se hace una marca distinta que los representa a todos ellos. Este número es la base. Se sigue añadiendo unidades hasta que se vuelve a alcanzar por segunda vez el número anterior y se añade otra marca de la segunda clase . Cuando se alcanza un número determinado (que puede ser diferente del anterior constituyendo la base auxiliar) de estas unidades de segundo orden, las decenas en caso de base 10, se añade una de tercer orden y así sucesivamente⁹.

La base que más se ha utilizado a lo largo de la Historia es 10 según todas las apariencias por ser ese el número de dedos con los que contamos. Hay alguna excepción notable como son las numeración babilónica que usaba 10 y 60 como bases y la numeración maya que usaba 20 y 5 aunque con alguna irregularidad.

Desde hace 5000 años la gran mayoría de las civilizaciones han contado en unidades, decenas, centenas, millares etc. es decir de la misma forma que seguimos haciéndolo hoy. Sin embargo la forma de escribir los números ha sido muy diversa y muchos pueblos han visto impedido su avance científico por no disponer de un sistema eficaz que permitiese el cálculo.

Casi todos los sistemas utilizados representan con exactitud los números enteros, aunque en algunos pueden confundirse unos números con otros, pero muchos de ellos no son capaces de representar grandes cantidades, y otros requieren tal cantidad de símbolos que los hace poco prácticos.

⁹ BOYER, Op. cit., p. 24.

Pero sobre todo no permiten en general efectuar operaciones tan sencillas como la multiplicación, requiriendo procedimientos muy complicados que sólo estaban al alcance de unos pocos iniciados. De hecho cuando se empezó a utilizar en Europa el sistema de numeración actual, los abaquistas, los profesionales del cálculo se opusieron con las más peregrinas razones, entre ellas la de que siendo el cálculo algo complicado en sí mismo, tendría que ser un método diabólico aquel que permitiese efectuar las operaciones de forma tan sencilla.

El sistema actual fue inventado por los indios y transmitido a Europa por los árabes;. Del origen indio del sistema hay pruebas documentales más que suficientes, entre ellas la opinión de Leonardo de Pisa (Fibonacci) que fue uno de los introductores del nuevo sistema en la Europa de 1200. El gran mérito fue la introducción del concepto y símbolo del cero, lo que permite un sistema en el que sólo diez símbolos puedan representar cualquier número por grande que sea y simplificar la forma de efectuar las operaciones¹⁰.

4.3.4 Sistema de numeración egipcio. El Antiguo Egipto es la mayor civilización tecnológica de la antigüedad, el triunfo de la eficiencia y la inteligencia. Se pasa del neolítico a la historia en 2.500 años de acelerados avances técnicos. Los conocimientos científicos de los egipcios, su medicina, sus construcciones, su refinamiento siguen sorprendiendo y atrayendo.

Aquí nos vamos a ocupar de sus matemáticas. Tenían unos conocimientos matemáticos considerablemente avanzados. Sin llegar a la madurez que más adelante tendrían los griegos, los egipcios supieron solucionar los problemas que se les planteaban: tras la inundación anual del Nilo, las lindes desaparecían y tenían que volverlas a marcar, las construcciones (pirámides, templos,...), el comercio, los repartos,... Sus cálculos no eran abstractos, buscaban lo más práctico aunque no tuvieran la resolución y la reflexión teórica que después

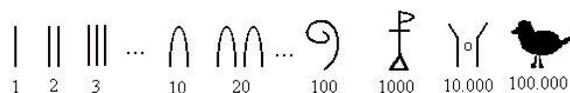
¹⁰ Ibid., p. 25.

alcanzarían los griegos. Al contrario que a los matemáticos griegos, no les preocupó la resolución teórica ni la reflexión sobre problemas matemáticos (numéricos, aritméticos o geométricos), sino su inmediata aplicación práctica. Pero, sin embargo, fueron precursores. Los más importantes matemáticos griegos viajaron por Egipto y Babilonia aprendiendo de estos pueblos.

Conocieron los números naturales y los racionales positivos de numerador 1, su aproximación al valor de $\pi=3'16$ fue la más acertada en la antigüedad. Resolvían ecuaciones de segundo grado y raíces cuadradas para aplicarlas a los problemas de áreas.

Aunque la suma funcionaba bien, el sistema de numeración egipcio presentaba algunas dificultades aritméticas entre las que destaca la práctica imposibilidad de organizarlos para multiplicar. Sin embargo consiguieron que la aritmética fuera su fuerte; la multiplicación y las fracciones no tenían secretos para ellos. La multiplicación se realizaba a partir de duplicaciones y sumas, y en la división utilizaban la multiplicación a la inversa¹¹.

El sistema de numeración egipcio, era un sistema decimal (de base 10) por yuxtaposición, así sus números se escribían de la siguiente manera:



Los egipcios utilizaron las fracciones cuyo numerador es 1 y cuyo denominador es 2, 3, 4... y las fracciones 2/3 y 3/4 y con ellas conseguían hacer cálculos fraccionarios de todo tipo. Su notación era la siguiente:

$$\overline{\text{—}} = \frac{1}{2}, \quad \text{○} = \frac{1}{3}, \quad \text{○} = \frac{1}{4}, \quad \text{○} = \frac{1}{6}, \quad \text{⊕} = \frac{2}{3}$$

¹¹ Ibid., p. 26

Gracias a algunos de los papiros encontrados, entre ellos el de Rhind y el de Moscú, se conoce bastante respecto a las matemáticas de los egipcios. En ellos, se conservan resoluciones de problemas, con su planteamiento, operaciones y hallazgo de solución.

El principal texto matemático egipcio que se conoce, el Papiro de Rhind, fue escrito por un escriba (el único personaje que realizaba cálculos en Egipto, al que se le exigía el manejo de la multiplicación) bajo el reinado del Rey Hicso Ekenenre Apopi, hacia el 1600 a. C.

4.3.5 Sistema de numeración griego. El primer sistema de numeración griego se desarrolló hacia el 600 a.C. Era un sistema de base decimal que usaba los símbolos de la figura siguiente para representar esas cantidades. Se utilizaban tantas de ellas como fuera necesario según el principio de las numeraciones aditivas¹².

	∏	Δ	∏Δ	H	∏H	X	∏X	M
1	5	10	50	100	500	1000	5000	10000
$ \begin{array}{cccccccc} XXX & \text{∏} & HH & \Delta\Delta\Delta & \text{∏} & \text{ } & & & \\ 3000 & + & 500 & +200 & + & 30 & + & 5+2 & = & 3737 \end{array} $								

Para representar la unidad y los números hasta el 4 se usaban trazos verticales. Para el 5, 10 y 100 las letras correspondientes a la inicial de la palabra cinco (pente), diez (deka) y mil (khiloi). Por este motivo se llama a este sistema acrofónico.

Los símbolos de 50, 500 y 5000 se obtienen añadiendo el signo de 10, 100 y 1000 al de 5, usando un principio multiplicativo. Progresivamente este sistema ático fue reemplazado por el jónico, que empleaba las 24 letras del alfabeto griego junto con algunos otros símbolos según la tabla siguiente:

¹² Ibid., p. 27

1	α	10	ι	100	ρ
2	β	20	κ	200	σ
3	γ	30	λ	300	τ
4	δ	40	μ	400	υ
5	ε	50	ν	500	φ
6	ζ	60	ξ	600	χ
7	η	70	ο	700	ψ
8	θ	80	π	800	ω
9	θ	90	λ	900	ω

De esta forma los números parecen palabras, ya que están compuestos por letras, y a su vez las palabras tienen un valor numérico, basta sumar las cifras que corresponden a las letras que las componen. Esta circunstancia hizo aparecer una nueva suerte de disciplina mágica que estudiaba la relación entre los números y las palabras. En algunas sociedades como la judía y la árabe, que utilizaban un sistema similar, el estudio de esta relación ha tenido una gran importancia y ha constituido una disciplina aparte: la kábala, que persigue fines místicos y adivinatorios.

4.3.6 Sistema de numeración babilónico. Entre la muchas civilizaciones que florecieron en la antigua Mesopotamia se desarrollaron distintos sistemas de numeración. En el s. 1555 a.C. se inventó un sistema de base 10, aditivo hasta el 60 y posicional para números superiores¹³.

Para la unidad se usaba la marca vertical que se hacía con el punzón en forma de cuña. Se ponían tantos como fuera preciso hasta llegar a 10, que tenía su propio signo.

De este se usaban los que fuera necesario completando con las unidades hasta llegar a 60.



¹³ Ibid., p. 28

A partir de ahí se usaba un sistema posicional en el que los grupos de signos iban representando sucesivamente el número de unidades, 60, 60x60, 60x60x60 y así sucesivamente como en los ejemplos que se acompañan.

$$1 \times 60 + 2 \times 10 + 3 = 83$$

$$12 \times 60 + 3 \times 10 + 5 = 755$$

4.4 División de números naturales

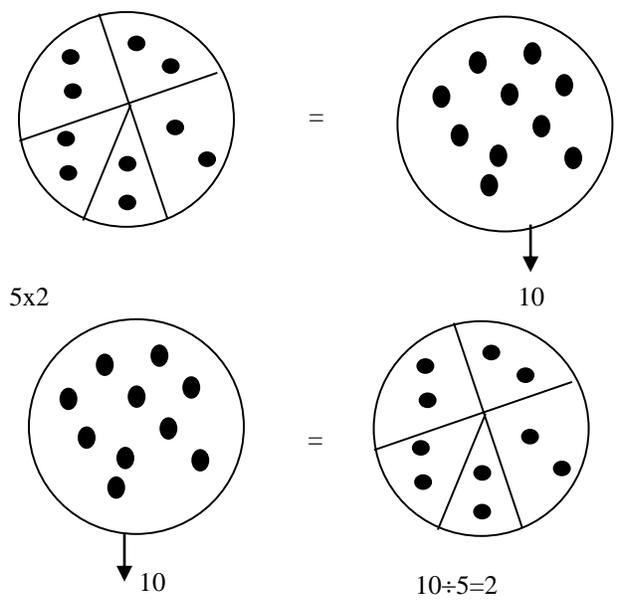
Ante todos estos ajustes que ha tenido la matemática debido a las necesidades y exigencias de la raza humana la división debe provenir de las palabras como magnitud número y forma como indicios para obtener más exactitud palabras que tienen importancia para tomarlas como punto de partida para el origen de este tema.

De acuerdo a las investigaciones realizadas por las diferentes culturas se tiene que los primeros pueblos en conocer la división fueron los Babilonios e Hindúes estos últimos fueron quienes desarrollaron los métodos actuales disponiendo de una mesa de arena en la cual colocaban los elementos de la operación, y en Europa fue gracias a los Árabes empleando la raya horizontal el cual indicaba repartir¹⁴.

Por lo tanto la división se verá como la repartición o partición de un conjunto con sus elementos.

Ejemplo: si reunimos 5 conjuntos con 2 elementos cada uno así:

¹⁴ Matemática Mega. Terranova. Editores Copyright. 1999. Tomo I. Pág. 3 - 53



Inversamente el conjunto con 10 elementos lo partimos en 5 subconjuntos de igual cantidad entonces cada subconjunto tiene 2 elementos así:

De esta manera la división la veremos cuando se ha partido un conjunto en partes de igual número de elementos, entonces el cociente de la división será el número de partes en que se partió el conjunto a la cantidad de elementos en cada parte.

La proposición 12 dividido por 4 es igual a 3

$$12 \div 4 = 3 \quad \text{ó} \quad = 12/4 = 3 \quad \text{ó} \quad \frac{12}{4} = 3 \text{ son verdaderos}$$

En estas divisiones $12 \div 4 = 3$ el 12 es el dividendo el 4 divisor y el 3 cociente y residuo o de lo contrario es inexacta cuando sobra (residuo).

Así:

$$17 \div 3 = 5 \text{ porque } 5 \times 3 = 15 \text{ y sobran } 2$$

Los siguientes son signos que son utilizados en la división la barra horizontal, su origen árabe usada por Fibonacci no solo indicaba la operación sino el orden (-) la barra oblicua / variación de la anterior usada para escribir De Morgan , el Suizo Johann Heinrich invento el signo y los dos puntos se le deben a Leibniz y el Gnomon o ángulo utilizado para separar dividendo divisor y cociente en esta

división no es preciso decir a quien se le debe, pero Carl Boyen en su historia de la matemática asegura que fueron los árabes, luego Europeos por medio de los Hindúes por lo tanto puede haber venido de la India conocido como el “método de la escalera” por su semejanza a la de un barco con velas desplegadas. De esta manera la matemática ha tenido un proceso muy largo en la historia de la humanidad por medio de sus descubrimientos que hoy nos llevan a ofrecer mejores resultados siempre y cuando pensemos en las personas¹⁵.

El proceso de dividir se presenta cuando se requiere repartir un cierto número de unidades en grupos de una determinada cantidad. Por ejemplo, si hay 16 objetos de 7, es fácil determinar que se pueden formar dos grupos y sobran 2 objetos. Con esto, se ha dividido 16 entre 7 para obtener como cociente 2 y residuo 2, lo que se expresa así:

La multiplicación y la división son operaciones inversas.

Con la división podemos hallar el valor de un factor desconocido en una multiplicación. Entre los términos de la división se da la siguiente relación: divisor por cociente más residuo es igual a dividendo.

$$16 = 7 \times 2 + 2$$

Este principio aritmético, con frecuencia utilizado, ilustra el llamado **algoritmo de la división** que se encuentra a continuación:

Si a y b son números naturales con $b \neq 0$, existen c y r números naturales tales que:

$$a = bc + r, \text{ con } 0 \leq r < b$$

¹⁵ Ibid., p. 3

El par c y r es único.

Los números que intervienen en el enunciado anterior se denominan: a el **dividendo**, b el **divisor**, c el **cociente** y r el **residuo**; y se dice que “al dividir a entre b se obtiene como cociente c y como residuo r ”. Se escribe:

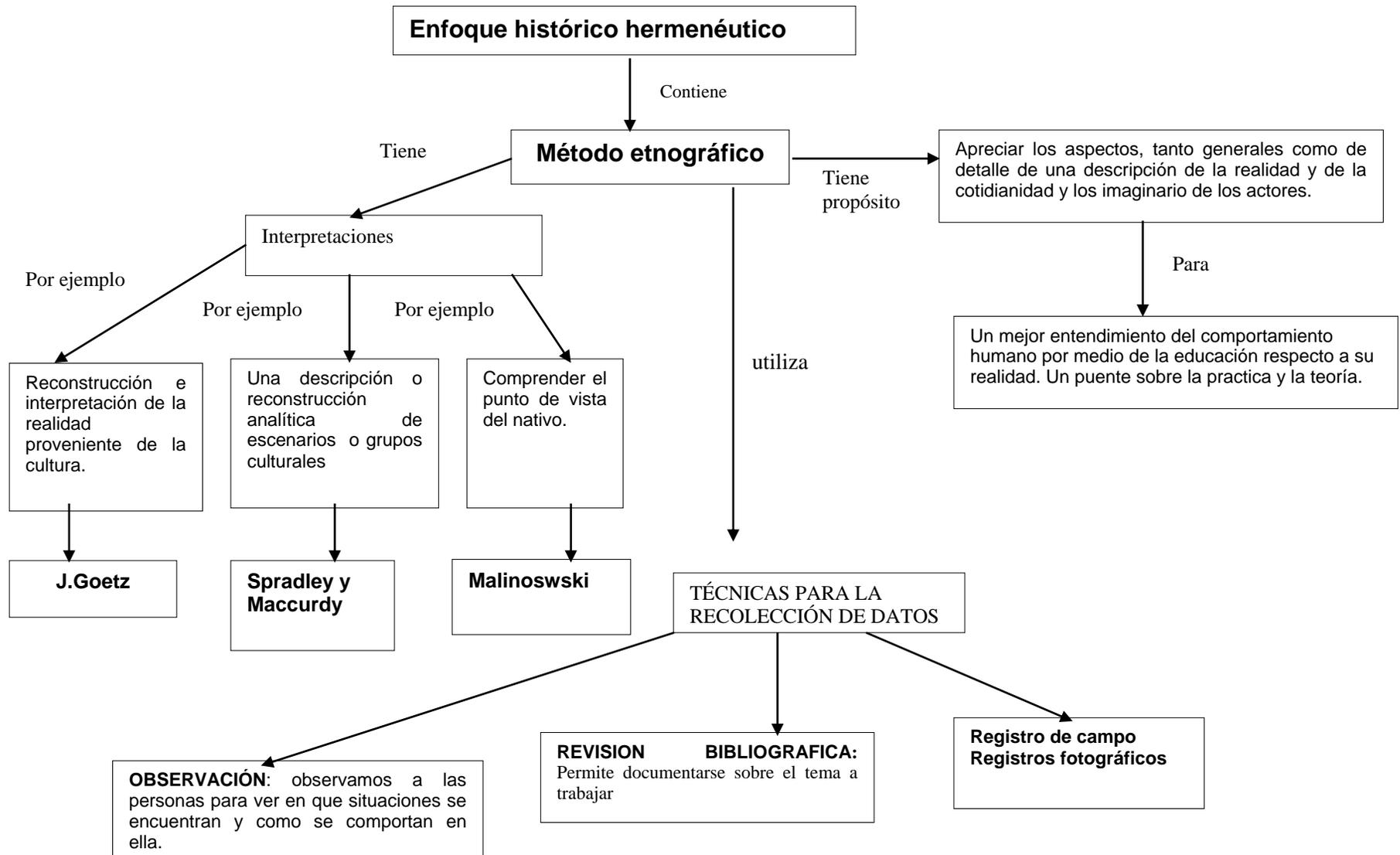
$$a \div b = c \text{ y sobra } r$$

Es importante recalcar que el residuo es menor que el divisor, pudiendo ser 0.

El proceso de dividir consiste en encontrar el mayor múltiplo del divisor que sea menor o igual que el dividendo. Si por ejemplo, se tiene 27 como dividendo y 4 como divisor, entonces: los múltiplos de 4 son: 4, 8, 12, 16, 24... el mayor múltiplo de 4 menor que 27 es: 24. la diferencia es: $27 - 24 = 3 < 4$ ¹⁶.

¹⁶ Ibid., p. 5

Figura 2. Mapa conceptual de la metodología



5. ASPECTOS ANALÍTICOS

5.1 Metodología

5.1.1 Tipo de investigación. Nuestra investigación estuvo encaminada a conocer cómo aprenden el tema de la división los estudiantes del grado tercero del Colegio Liceo Alejandro de Humboldt. Teniendo en cuenta esa experiencia se planearon y diseñaron actividades que optimizaron la aprehensión de conocimientos matemáticos. Esto permitió obtener resultados a corto plazo, por lo que la investigación manejó un enfoque cualitativo. Cabe anotar que en el transcurso de la investigación logramos conocer la relación sujeto - sujeto de la que habla el enfoque histórico hermenéutico.

Spradley y McCurdy dicen que la etnografía “es una descripción o reconstrucción analítica de escenarios y grupos culturales intactos.”¹⁷

Nuestro trabajo fue una investigación detallada en el que damos cuenta de ¿cómo se logró el aprendizaje de la división de números naturales a través de conjuntos, desde el modelo pedagógico el aprendizaje significativo con estudiantes de población desplazada del grado tercero del nivel básica primaria del Liceo Nacional Alejandro de Humboldt?.

5.1.2 Estrategias para recolección de datos. En el aula de clase logramos establecer un contacto directo, participando de la vida cotidiana del estudiante, realizando una observación minuciosa del escenario a través de las técnicas de recolección de datos del método etnográfico que utilizamos en esta investigación como: la observación participante, las entrevistas estructuradas, los registros de

¹⁷ Goetz J:P & Lecompte M:D, 1988 (1984) Etnografía y diseño cualitativo en investigación educativa Pág. 28. Ediciones Morata, España.

campo, registro fotográficos, las cuales permitieron asegurar un estrecho ajuste entre los datos y lo que el grupo realmente decía y hacía, escuchándolos hablar, observando los trabajos que produjeron y que luego fueron analizados. Permittiéndonos focalizar el problema planteado en nuestra investigación.

Nuestro estudio fue de carácter etnográfico, porque las estrategias utilizadas como la observación, entrevista nos permitieron conocer y describir la realidad en la que interactuaban los estudiantes del grado tercero del Colegio Liceo Nacional Alejandro de Humboldt en el ámbito académico, además este método nos ofreció formas para describir, interpretar y explicar nuestro problema de investigación, apreciando aspectos generales y detallados del grupo.

El interés inmediato de esta investigación etnográfica fue obtener una visión realista y fiel del grupo estudiado que nos permitió captar las características del problema según nuestro interés y registrar datos que dieron a conocer las vivencias, aptitudes e imaginarios de los niños.

Para llevar a cabo esta propuesta pedagógica se solicitó un permiso, colaboración e información de los directivos del Colegio Liceo Alejandro de Humboldt. El obtener el ingreso al aula de clase permitió diseñar y ejecutar un plan de trabajo fundamentado en la investigación cualitativa, basado en la formación de competencias en los estudiantes. El Ministerio de Educación - ICFES define la competencia como: “El saber hacer en un contexto, es decir, el conjunto de acciones que un estudiante realiza en un contexto particular y que cumple con las exigencias específicas de un niño”¹⁸

¹⁸ MEN — ICFES. Propuesta general para el nuevo examen de estado. Cambios para el siglo xx, Bogota, 1999.

5.1.3 Población y muestra. Los criterios de selección para la elección de la muestra de estudio, son:

- Ser estudiante del grado tercero
- No haber alcanzado los logros en el área de matemáticas.
- Demostrar interés para participar voluntariamente en la propuesta a realizar.

5.1.4 Propuesta del plan de acción. De los 19 estudiantes pertenecientes al grado tercero se seleccionaron tres niñas, que cumplían los criterios de inclusión, sin embargo los talleres lo realizaron todos los estudiantes del grupo pero las observaciones y entrevistas se centraron en los seleccionados. El proceso investigativo que seguimos lo ejecutamos en seis momentos¹⁹:

¹⁹ Fuente registro de información.

Tabla 2. Proceso metodológico de la investigación²⁰.

MOMENTOS	ACTIVIDADES	OBJETIVOS	METAS
INGRESO A LA INSTITUCION	<ul style="list-style-type: none"> ❖ Solicitud del consentimiento para hacer la investigación a los directivos del colegio. 	<ul style="list-style-type: none"> ❖ Obtener el ingreso a la Institución. 	<ul style="list-style-type: none"> ❖ Obtener la autorización.
RECOLECCION DE DATOS	<ul style="list-style-type: none"> ❖ Observación en el aula de clase. ❖ Entrevista a los profesores, estudiantes. ❖ Consulta bibliográfica. 	<ul style="list-style-type: none"> ❖ Conocer cómo se orienta el área de matemáticas. ❖ Buscar teorías que se relacionen con el área de matemáticas. 	<ul style="list-style-type: none"> ❖ Identificar como se orienta el área de matemáticas en el aula. ❖ Conseguir información relacionada con el área de matemáticas.
DESARROLLO DEL PLAN DE ACCION	<ul style="list-style-type: none"> ❖ creación de talleres referentes al aprendizaje de la división mediante conjuntos. ❖ 	<ul style="list-style-type: none"> ❖ Socializar el proceso de enseñanza aprendizaje de la división de números naturales. ❖ Entrevista a los docentes, estudiantes. ❖ Consulta bibliográfica. 	<ul style="list-style-type: none"> ❖ Crear talleres dinámicos y practicas conjuntamente alumnos y maestros relacionados con su vida diaria. ❖ Valorar el proceso de desarrollo de los talleres realizados
ANALISIS DE LA INFORMACION	<ul style="list-style-type: none"> ❖ Categorización de la información. ❖ Interpretación de la información. 	<ul style="list-style-type: none"> ❖ Clasificar la información para posteriormente ser analizada. ❖ Interpretar los datos de información recogidos. 	<ul style="list-style-type: none"> ❖ Verificar información requerida para corroborar con la teoría. ❖ Analizamos la información recogida.
SISTEMATIZACION	<ul style="list-style-type: none"> ❖ Construcción del informe final. 	<ul style="list-style-type: none"> ❖ Construir un informe final de la investigación. 	<ul style="list-style-type: none"> ❖ Lograr unificar la realidad con la teoría y lo investigado.
SOCIALIZACION DEL TRABAJO	<ul style="list-style-type: none"> ❖ Sustentación publica del proyecto de investigación. 	<ul style="list-style-type: none"> ❖ Dar a conocer el informe final. ❖ Presentar el proyecto de investigación como propuesta pedagogía para los docentes. 	<ul style="list-style-type: none"> ❖ dar a conocer el informe final.

²⁰ Fuente registro de investigación.

Tabla 3. Matriz de resultados en los talleres²¹. Estudiante 1.

PERFIL DEL ESTUDIANTE	TALLER #1 “REPARTOS”	TALLER # 2 REPARTOS EXACTOS”	TALLER # 3 “EL MEJOR LANZAMIENTO”	TALLER # 4 “REPARTOS EXACTOS”	TALLER # 5 “DIVIDIENDO” ENTRE 2 CIFRAS	CONCLUSIONES
E1 es una niña muy inteligente, extrovertida. Posee gran potencial de conocimientos y buenas aptitudes para trabajar aunque en ocasiones las desaprovecha porque su disponibilidad para trabajar depende de su estado de animo. Esto incide en su rendimiento académico.	Con el desarrollo de este taller logró: <ul style="list-style-type: none"> ◆ Mantener su motivación por trabajar. ◆ Identificó los repartos como la representación de conjuntos. ◆ Relacionó la actividad “repartos” con la división. ◆ Interesarse por poner en práctica los conocimientos previos. ◆ Reconoció la importancia del trabajo en equipo. 	En este taller la estudiante evidenció: <ul style="list-style-type: none"> ◆ La formación de conjuntos y subconjuntos. ◆ Conceptualizó la división exacta. ◆ Reconoció la importancia de manejar las tablas de multiplicar para dividir. 	Con esta actividad la estudiante: <ul style="list-style-type: none"> ◆ Comprobó divisiones haciendo uso de la multiplicación. ◆ Demostró agilidad para realizar cálculos mentales. ◆ Practicó la representación y algorítmica de la división. ◆ Se interesó por participar continuamente en las actividades propuestas. 	Mediante este taller la estudiante: <ul style="list-style-type: none"> ◆ Identificó cuando una división es exacta o inexacta; dió sentido al residuo según la situación que resuelve. ◆ Justificó sus respuestas haciendo uso de la multiplicación. ◆ Reconoció en la practica los términos de la división. 	Con este taller la estudiante: <ul style="list-style-type: none"> ◆ Empleó el algoritmo de la división en la solución de problemas cotidianos. ◆ Practicó la división de dos cifras con la representación de material real. ◆ Tuvo dificultad para comprender el algoritmo de la división de dos cifras en el divisor pero que finalmente superó con el apoyo de material real. 	Con estos talleres pedagógicos se logro reconocer la importancia que tienen los aportes de los demás para reforzar su propio conocimiento. La estudiante reconoció la división como repartos y la asimilo mediante la representación de conjuntos.

²¹ Fuente registro de investigación

Estudiante 2²².

PERFIL DEL ESTUDIANTE	TALLER #1 "REPARTOS"	TALLER # 2 REPARTOS EXACTOS"	TALLER # 3 "EL MEJOR LANZAMIENTO"	TALLER # 4 "REPARTOS EXACTOS"	TALLER # 5 "DIVIDIENDO" EN TRE 2 CIFRAS	CONCLUSIONES
Es una niña muy noble, cariñosa, tiene buenas relaciones sociales con el grupo. Demostró interés por trabajar en la propuesta pedagógica con entusiasmo. Su selección obedeció a sus falencias para dividir.	La estudiante en este taller logró: ♦ Practicó el uso de las tablas de multiplicar para realizar los repartos. ♦ Fortaleció la concepción de conjuntos y subconjuntos mediante la representación con material real.	En este taller la estudiante: ♦ Reconoció que realizar repartos iguales significa dividir. ♦ Identificó la multiplicación y la división como operaciones inversas. ♦ Reconoció la importancia de manejar las tablas de multiplicar para dividir. Identificó los subconjuntos como los divisores.	Con el desarrollo de este taller: ♦ Practicó la representación práctica y algorítmica de la división. ♦ Fortaleció la relación entre la división y la multiplicación. ♦ Realizó agrupaciones que le permiten encontrar el cociente de una división.	Mediante este taller la estudiante: ♦ Identificó cuando una división es exacta o inexacta; dió sentido al residuo según la situación que resuelve. ♦ Estableció la diferencia entre división exacta e inexacta. ♦ Reconoció en la práctica los términos de la división.	Con este taller la estudiante: ♦ Comprendió el algoritmo de la división por dos cifras en el divisor. ♦ Aplicó el concepto de división en la búsqueda de solución a situaciones problema. ♦ Dió significado a la división en diferentes contextos. ♦ Comprobó divisiones haciendo uso de la multiplicación.	Mediante estos talleres la estudiante fortalecía sus conceptos con respecto a la división debido a la utilización de material real, permitiéndoles manipular objetos y contrastando con su experiencia. Con estos talleres sobre la división trabajados con conjuntos nos dimos cuenta que el niño (a) ya tiene conceptos previos, y además fortalecen su estado de ánimo y motivación por ser trabajados a manera de juego.

²² Fuente registro de investigación.

Estudiante 3²³.

PERFIL DEL ESTUDIANTE	TALLER #1 "REPARTOS"	TALLER # 2 REPARTOS EXACTOS"	TALLER # 3 "EL MEJOR LANZAMIENTO"	TALLER # 4 "REPARTOS EXACTOS"	TALLER # 5 "DIVIDIENDO" ENTRE 2 CIFRAS	CONCLUSIONES
Es una niña bastante sociable, colaboradora e interesada por el trabajo el cual realizó con interés y dedicación. Se destaca en ella la preocupación por superar las falencias que limitan la comprensión de conocimientos creando en ella un sentido de perfeccionismo. Fue seleccionada porque presento dificultad para dividir.	A través de este taller se pudo evidenciar que la estudiante: ♦ Practicó Repartos con igual numero de elementos de un conjunto. ♦ Conceptualizó la división: "Ah profe repartir es lo mismo que dividir". ♦ Demostró agilidad para el calculo de operaciones mentales.	En este taller la estudiante demostró: ♦ La identificación y diferencia de un conjunto y de un subconjunto. ♦ Un conocimiento y manejo de las tablas de multiplicar y la importancia de estas para hacer repartos iguales. ♦ La Identificación de la división exacta al formar grupos y notar que no le sobraban elementos Presentó un poco de dificultad para reconocer los términos de la división.	Con esta actividad la estudiante: ♦ Reafirmó la importancia y la relación de la multiplicación y la división. ♦ Demostró destreza en el manejo de las tablas de multiplicar.	La estudiante evidenció: ♦ La construcción del concepto de división inexacta el cual dedujo por identificación real del residuo al formar conjuntos y observar que le sobraban elementos. ♦ Asimismo superó notablemente las falencias en la identificación de los términos de la división tanto prácticamente como algorítmicamente	Con este taller la estudiante: ♦ Demostró agilidad en la ejecución de ejercicios prácticos con el material real. ♦ Identifico los subconjuntos como divisores de dos cifras. ♦ Presentó dificultades en el momento de representar l algorítmicamente e el proceso de la división entre dos cifras que poco a poco fue superando apoyado en el material real.	La estudiante evidenció la relación entre repartir y dividir los términos de la división mediante los conjuntos y subconjuntos. Tuvo dificultad al trabajar con divisiones hasta 2 cifras pero gracias a los conjuntos logro fortalecer esa duda siendo el protagonista de su saber.

²³ Fuente registro de información.

Tabla 4. Taller 1: Realizado junio 15-2004²⁴.

	METODOLOGIA	LOGROS	CONCLUSIONES	RECURSOS
<p>1. OBJETIVOS</p> <p>Practicar la repartición de conjuntos como vía para llegar a la conceptualización de la división.</p>	<p>a. Fase de ambientación</p> <p>El orientador explica la dinámica "el capitán" la cual se realiza a campo abierto(cancha) e donde los estudiantes dramatizan el viaje en un barco que se hunde, el capitán dice "capitán capitancito", los tripulantes responden que "ordena jefecito" el capitán ordena "formar grupos de 5" y los tripulantes acatan la orden, y así sucesivamente. La finalidad de este juego fue centrar y relacionar la atención de los estudiantes para la siguiente actividad.</p> <p>b. Presentación de la actividad.</p> <p>Se pide a los estudiantes que formen 3 grupos para iniciar el trabajo con el material real ula-ula y ficha). E4"toca de 6 porque seis por tres es dieciocho".</p> <p>c. Desarrollo de la actividad.</p> <p>Una vez formados los grupos se explico la dinámica de la actividad "Repartos". En frente de cada equipo había una cantidad de fichas, el orientador mencionaba un número y un integrante de cada equipo corría y tomaba. El número de fichas, luego el orientador pedía que formaran grupos iguales; ejemplo: traer 10 elementos y armar 2 grupos, E3 G1"cada grupo es de 5 elementos. Así sucesivamente. Luego los estudiantes trabajaron en el aula de clase representando la actividad desarrollada en la cancha, planteando y resolviendo los ejercicios desde lo concreto a lo abstracto.</p>	<p>a. Los estudiantes experimentaron con material real(ula-ula y fichas) para la formación de conjuntos.</p> <p>b. Los estudiantes se interesaron por poner en practica sus saberes previos y los socializaron con sus compañeros.</p> <p>c. Los estudiantes realizaron la repartición de conjuntos para encontrar el significado de la división.</p>	<ul style="list-style-type: none"> • La dinámica planteada al inicio de la actividad fue un factor importante para mantener la motivación de los estudiantes por participar en el desarrollo de la misma. • Los estudiantes tuvieron la oportunidad de poner en práctica sus conocimientos previos. • Los estudiantes reconocieron la importancia del trabajo en equipo. 	<p>Se utilizaron fichas Ula-ulas marcador hojas de block.</p>

²⁴ Fuente registro de investigación.

Tabla 5. Taller 2: Realizado 16 de junio de 2004²⁵

OBJETIVOS	METODOLOGIA	LOGROS	CONCLUSIONES	RECURSOS
<p>1. OBJETIVOS Realizar, repartos exactos mediante competencias de construcción de subconjuntos de un conjunto.</p> <p>OBJETIVOS Realizar, repartos exactos mediante competencias de construcción de subconjuntos de un conjunto.</p>	<p>a. FASE DE AMBIENTACION El orientador explica la dinámica llamada "Para Pi-Para Pa" realizada en la cancha de fútbol la cual consiste en estar concentrados con las manos y las piernas dando un aplauso y palmadas en las piernas así para Pi chocan manos y para Pa palmadas en las piernas luego se intercalaba para centrar la atención y concentración de los estudiantes.</p> <p>b. PRESENTACIÓN DE LA ACTIVIDAD Se les dijo a los estudiantes que se organizaran en 3 grupos para comenzar, el trabajo con el material real(palillos) "E3 profe toca de 5 en cada grupo porque somos 15 "E2" yo quiero hacerme en el primer grupo".</p> <p>c. DESARROLLO DE LA ACTIVIDAD cuando los grupos estaban formando se explico la actividad "repartos exactos" preguntándoles cuantos estudiantes sobraron? E5 G2 ninguno cada equipo tenia en frente una bolsa con palillos, el orientador decía esa cantidad de palillos y formaba conjuntos ejemplo coger 24 palillos y formar grupos de 3 E1 G3 son 8 conjuntos de 3 profe porque $8 \times 3 = 24$ no sobra.</p> <p>Traer 30 palillos y armar 5 grupos E2G1 profe toca de 6 porque $6 \times 5 = 30$ además yo traje 6 porque ya había 24. Así se siguió con mas ejemplos luego se fue al aula de clase para representar y argumentar la actividad desarrollada en la cancha de fútbol resolviendo ejercicios desde lo concreto a lo abstracto.</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Los estudiantes formaron subconjuntos con igual número de elementos de un conjunto sin que sobren elementos para identificar la división exacta. • Los estudiantes desarrollaron sus competencias argumentativas, propositiva e interpretativa para elaborar el concepto de la división exacta 	<ul style="list-style-type: none"> • La dinámica planteada al inicio contribuyo a la motivación de los estudiantes en fijar su atención y concentración por participar en la actividad. • Los estudiantes identificaron que la división es exacta cuando no sobraba elementos en los subconjuntos que se formaban. • Los estudiantes tuvieron la oportunidad de argumentar y proponer ejemplos que lo llevaron a comprender mejor el concepto de la división exacta. 	<p>Se utilizaron palillos, marcador, cauchos.</p>

²⁵ Fuente registro de investigación

**Tabla 6. Taller 3 Realizado junio 18 de 2004
“El mejor Lanzamiento”²⁶**

OBJETIVOS	METODOLOGIA	LOGROS	CONCLUSIONES	RECURSOS
<p>Relacionar las operaciones de multiplicación y división mediante el concurso “El mejor lanzamiento”.</p>	<p>a. FASE DE AMBIENTACION</p> <p>El orientador presenta el material (dados, caja, pelotas y ula-ulas) y menciona que se va a realizar un concurso E8 “uy profe que chévere” E12 “profesor para que son los dados” El orientador dice “por favor hagamos un circulito y explicamos la dinámica del concurso”.</p> <p>b. PRESENTACIÓN DE LA ACTIVIDAD</p> <p>El concurso se llama “El mejor lanzamiento” forman 4 equipos, un integrante de cada equipo lanzará los 3 dados los cuales en sus 6 caras el signo de la división(/) el dado amarillo tiene sus 6 caras numeradas de 7 en 7 hasta el 35 el cual indica el número de elementos que se reparten, E8 dice “es el dividendo profe”. El dado zapote esta numerado del 2 al siete el que indica el número de ula-ulas que deben tomar y en los que deben repartir los elementos que indica el dado amarillo, los ula-ulas deben tener igual numero de elementos. El equipo que utilice menos tiempo en cada ejercicio tendrá un punto, finalmente gana el equipo que primero haga 10 puntos.</p> <p>Luego continuamos, con otro juego el cual</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Los estudiantes utilizaron material real(dados, pelotas, ula-ulas) para representar ejercicios de división y multiplicación, • Los estudiantes construyeron y manipularon significativamente las operaciones a partir de los ejemplos con dados. 	<ul style="list-style-type: none"> • La dinámica planteada sirvió para poner en practica lo aprendido teniendo en cuenta las operaciones básicas y su relación entre si. • Los estudiantes aprendieron a realizar cálculos mentales y argumentar que la división y multiplicación son operaciones contrarias(inversas) 	<p>Se utilizaron (dados, caja, pelotas y ula-ulas)</p>

²⁶ Fuente registro de investigación

<p>1. OBJETIVOS Relacionar las operaciones de multiplicación y división mediante el concurso". El mejor lanzamiento".</p>	<p>tenía la misma dinámica, tres dados el rojo con el signo X, el dado amarillo numerado del 1 al 6 el cual indica el número de elementos que deben colocar en los ula ula, el dado zapote esta numerado el 1 al 6 el cual indica el numero de ulas que deben tomar y en los que deberán colocar el número de pelotas que tomen</p> <p>c. DESARROLLO DE LA ACTIVIDAD</p> <p>Una vez formado las 4 grupos se explico la actividad "El mejor lanzamiento" cada grupo tenia un participante por turno E2 G1 profe toca hacer restas y multiplicación si".</p> <p>El orientador tira los dados caen así amarillo Numero 24 y el dado zapote numero 4 indica ula ulas entonces 4 ula ula y meto 24 24 fichas toca de 6 fichas en cada ula ula.</p> <p>E1 G3 si cae el dado zapote 5 y el amarillo 25 hago la división y media 5 porque $5 \times 5 = 25$ si o no</p>			
---	--	--	--	--

Tabla 7. Taller 4: Realizado Junio 22 - 2004
“ Repartos Inexactos”²⁷

OBJETIVOS	METODOLOGIA	LOGROS	CONCLUSIONES	RECURSOS
<p>1. OBJETIVOS: Realizar repartos inexactos mediante competencias de construcción de subconjuntos de un conjunto</p>	<p>a. FASE DE AMBIENTACIÓN: El taller se inicio con pequeños ejercicios, el cual consistía en que el orientador lanzaría uno y/o dos dados, dependiendo del número que indicara el y/o, los dados los estudiantes rápidamente formarían grupos con la cantidad que señalara el dado, los estudiantes que se queden sin grupo van saliendo del juego, E5 dice “uy profe hay que estar pilas”. El juego tenia como finalidad practicar el concepto de la división e introducirlos a la división inexacta. b. PRESENTACIÓN DE LA ACTIVIDAD Los estudiantes 3 equipos para desarrollar el concurso “Repartos inexactos” c. DESARROLLO DE LA ACTIVIDAD El orientador ubica los ula-ulas separados de las fichas al frente de los equipos. E3 “ profesor vamos a jugar como la otra vez de las competencias” el orientador dice “si, pero esta vez deben concentrarse más; vamos a ver quienes son los más pilosos”. En este juego deben interpretar muy bien la orden que yo les de para que puedan representar los ejercicios con los ula-ulas y las fichas, comenzamos: con 20 fichas formar 3 conjuntos. E1”toca de 6 porque 6x3 es 18” E5 “No se puede faltan más aros”. Ahora con 15 fichas forman grupos de 4 elementos cada uno. Así sucesivamente al final se le pedía a cada equipo que estuviera y resolviera 5 ejercicios en una hoja</p>	<p>a. Los estudiantes realizaron repartos inexactos de un conjunto para identificar la división inexacta. b. Los estudiantes construyeron el concepto de división inexacta por identificación real del residuo al formar conjuntos y observar que le sobran elementos.</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Los estudiantes evidenciaron que la división es inexacta cuando sobran elementos en los subconjuntos que formaban. • Establecieron la diferencia entre la división exacta e inexacta cuando el residuo es cero y diferente de cero. 	<p>Se utilizaron dados, fichas y ula-ulas.</p>

²⁷ Fuente registro de investigación

Tabla 8. Taller 5 realizado junio 24 2004
“dividiendo entre 2 cifras”²⁸

OBJETIVOS	METODOLOGIA	LOGROS	CONCLUSIONES	RECURSOS
<p>PRACTICA 1</p> <p>Divisiones entre 2 cifras mediante la representación de conjuntos</p>	<p>a. PRESENTACIÓN DE LA ACTIVIDAD</p> <p>El orientador inicio el taller presentación una bolsa con dulces, con los cuales plantea diversas situaciones para repartir los dulces ej: muchachos voy a repartirles 28 dulces a todo el grupo ¿de cuantos dulces le toca a cada uno?</p> <p>E15 dice “Espere profe yo los cuento haber cuantos han venido hoy” E4 alcanza de 2 profe porque son artas bananas” E15 “hemos 17 profesor” “E3 profe présteme las fichas” E5 “Toca darle a 11 de a 2 y a los otros de a uno” el orientador les recuerda que en la división se debe repartir por igual. E16 “yo le dije que así no era”.</p> <p>Luego el orientador les pide que plantean situaciones en las que tengan que repartir entre número de 2 cifras. E5 dice “No profe eso es muy trabajosa” E3 “ni tanto porque ahí hay fichas y tapas para hacer los problemas”.</p> <p>Al finalizar el orientador les pide plasmar algunas situaciones en una hoja utilizando el algoritmo de la división. E17 “No profe no entiendo” E8 “yo solo se me hasta la tabla del 7” E3”pero profe necesitamos otra vez las fichas” el orientador facilita el material y los estudiantes trabajan en clase y entregan la producción al orientador.</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Los estudiantes resolvieron situaciones problema de división con divisores de 2 cifras utilizando material real (fichas tapas) • Comprendieron que el proceso de la división no es un proceso mecánico sino practico y vivencial. 	<ul style="list-style-type: none"> • Los estudiantes presentaron dificultad para aplicar el algoritmo de la división entre 2 cifras pero que finalmente apoyo del material real. • Los estudiantes plantearon y solucionaron situaciones sobre divisiones empleando conjuntos. 	<p>Se utilizaron fichas, tapas hojas de block.</p>

²⁸ Fuente registro de investigación

Tabla 9. Matriz de análisis de resultados²⁹.

CATEGORÍA DE ANÁLISIS	PERSPECTIVA TEÓRICA	RESULTADOS	LOGROS
CONJUNTO	Según George Cantor en matemática Mega Terranova. Editores Copyright 1999. Tomo I. Pág. 3-7. Se entiende por Conjunto : Toda colección de objetos definidos o separados que pueden ser concebidos por la inteligencia en el cual se puede decidir si un objeto dado pertenece a una colección. (Ver registro fotográfico anexo 8)	VER ANEXO 5 E1 (Taller 2) VER ANEXO 6 E2(Taller 2) VER ANEXO 7 E3 (Taller 2)	<ul style="list-style-type: none"> • Utilizaron la agrupación y reagrupación de elementos para formar conjuntos y reafirmar su concepto. • Emplearon material real (datos, palos), para formar conjuntos lo cual facilito la comprensión de la temática.
NÚMEROS NATURALES	Los números naturales son los primeros que surgen en las distintas civilizaciones y nacieron de la necesidad de contar eso. Son infinitos y se designan con la letra N. Según Carl Boyer. Matemática Mega Terranova. Editores Copyright 1999. Tomo I. Pág. 49-53.	VER ANEXO 5 E1 (Taller 3) VER ANEXO 6 E2 (Taller 3) VER ANEXO 7 E3 (Taller 3)	<ul style="list-style-type: none"> • Reconocieron que los números naturales son aquellos que van desde uno hasta infinito. • Realizaron por medio de conjuntos divisiones empleando los números naturales.
LA DIVISIÓN	Según Carl Boyer en la historia de la matemática, los orígenes primitivos 1964. Capítulo I. Pág. 19-23 la División se presenta cuando se quiere repetir un cierto numero de unidades en grupos. (Ver anexo 8)	VER ANEXO 5 E1 (Taller 4 TALLER 3) VER ANEXO 6 E2 (Taller 4) VER ANEXO 7 E3 (Taller 4)	<ul style="list-style-type: none"> • Construyeron el concepto de la división a través de la repartición de elementos y reconocieron sus términos. • Practicaron el proceso de la división con material didáctico. • Realizaron divisiones exactas e inexactas.
APRENDIZAJE SIGNIFICATIVO	Según David Ausubel en el libro Aprendizaje Significativo. Psicología evolutiva, un punto de vista Cognoscitivo. 2ed. Trillas. 1986. México. Pág. 46-52. el aprendizaje significativo es aquel que el estudiante emplea para crear marcos referencia muy organizado lo cual le permite un almacenamiento lógico de la información.	VER ANEXO 5 E1 (Taller 5-6) VER ANEXO 6 E2(Taller 5-6) VER ANEXO 7 E3 (Taller 5-6)	<ul style="list-style-type: none"> • Manipularon material para realizar divisiones lo cual les permitió posteriormente representarla algoritma. • Comprendieron que el proceso de la división no es un proceso mecánico sino práctico y vivencial.

²⁹ Fuente registro de investigación

5.2 Hallazgos

En el proceso desarrollado para dar respuesta al interrogante ¿cómo se logra el aprendizaje de la división de números naturales a través de conjuntos, desde el modelo pedagógico el aprendizaje significativo con estudiantes de población desplazada del grado tercero del nivel de básica de Liceo Nacional Alejandro de Humboldt de Popayán? Partimos de los preconceptos existentes de los estudiantes acerca del tema de la división de números naturales, aporte logrado gracias a la observación participante, técnica de recolección de datos propia del método etnográfico, método que acogimos en este trabajo. Igualmente se logró apreciar que la población escolar poseía problemas de adaptación social debido a la problemática del desplazamiento, situación que no incidió en el aprendizaje de la división de números naturales; pero que por otra parte potencializó la riqueza de conocimientos, por la diversidad cultural del grupo.

Inicialmente se evidenció resistencia de los estudiantes por la clase de matemáticas que en su momento correspondía al tema de la división de números naturales, tema que el 40% de los estudiantes no entendían y que lo manifestaban textualmente así: E11 *"no entiendo profesora"*, E5 *"Esto está muy difícil"*. Esta situación repetitiva facilitó focalizar la muestra poblacional, la cual se delimitó a 3 estudiantes de sexo femenino, quienes además presentaron dificultad en los procesos lógico–matemáticos de la división; aunque la propuesta pedagógica se trabajó con todo el grupo solo se tuvieron en cuenta para la construcción de este trabajo los aportes de la muestra poblacional.

La ejecución del plan de acción, constituía de 5 talleres desarrollados en el siguiente orden: "Repartos", "Repartos exactos", "El mejor lanzamiento", "Repartos inexactos" y "Dividiendo entre dos cifras" Talleres que se trabajaron con la formación de conjuntos con material real (pelotas, fichas, bloques mágicos, tapas, palillos, dados y ula – ulas) de una manera muy lúdica y concreta que en su mayoría se desarrolló fuera del aula de clase, estrategia metodológica que

despertó el interés y la motivación de los estudiantes por participar activamente en cada uno de ellos, puesto que decían: E2 *“Uy que chévere esas fichas, profe vamos a trabajar con ellas”* E3, E11 *“Profesor présteme unitas para trabajar con ellas”*. Siendo ellos los protagonistas en el proceso de construcción de conocimientos.

En el taller denominado “Repartos” los estudiantes tuvieron la oportunidad de palpar el material real (ula – ulas y fichas) y formar conjuntos con igual número de elementos de un número mayor inicialmente dado. Ejemplo: con 20 fichas formar 5 conjuntos con igual número de fichas cada uno. Aquí los estudiantes fortalecieron la agilidad para hacer cálculos mentales al hacer uso de la multiplicación para realizar la actividad. Ejemplo E3 *“ Ah profepués de a 4 no ve que 5 por 4 es 20.”*. así se estableció la relación de la multiplicación con la división como operaciones inversas. Con la división, podemos hallar el valor de un factor desconocido en una multiplicación. Entre los términos de la división se dio la siguiente relación: divisor por cociente más residuo es igual a dividendo. Además la socialización de este taller posibilitó conocer los preconceptos de los estudiantes sobre la división, así: ¿Qué estamos haciendo? E1 *“Profe, estamos formando grupos iguales”* E8 *“Estamos repartiendo grupitos”* Orientador ¿Con que operación podemos relacionar la actividad? E3 *“con la multiplicación, porque utilizamos las tablas”* E5 *“ Dividir como nos enseñó la profesora”*, Orientador *“Que es dividir”* E7 *“Repartir algo”* E3 *“Repartir grupos”* E12 *“Es compartir algo”* E2 *“Es repartir en grupos iguales”* Lo anterior llevó a los estudiantes a comprender y a construir el concepto de la división. “División es repartir un cierto número de unidades en grupos de una determinada cantidad”. Piaget, en términos de Ausubel, “el niño debe tener experiencias concretas para determinar luego el significado de los conceptos o para realizar o establecer abstracciones primarias”. (Ver anexo 8).

Dándole continuidad a la propuesta con el taller “Repartos Exactos” los estudiantes construyeron conjuntos iguales, con material real (palillos) de un número mayor, teniendo en cuenta que no sobrarian elementos. Fue así como los

estudiantes vivenciaron que no quedaban palillos sueltos en los ejercicios planteados, lo que les facilitó apreciar que la división es exacta cuando no sobra es decir el residuo es cero. El siguiente es uno de los testimonios de los estudiantes: Traer 30 palillos y armar 5 grupos: *E2 “Profe toca de 6 porque $6 \times 5 = 30$ ”*. (Ver anexo 8).

En el taller “el mejor lanzamiento” los estudiantes lograron identificar los términos de la división (dividendo, divisor, cociente y residuo) en un plano concreto puesto que evidenciaron en los ejercicios prácticos un conjunto inicial (dividendo) el cual se repartía en subconjuntos (divisor) con igual número de elementos (cociente) sin que quedaran elementos por repartir (residuo).

E2. “Los ula-ulas son el divisor”, “las fichas el cociente”, “el número que nos dio el 24 es el dividendo porque es el más grande”.

Dándose así el algoritmo de la división.

Si a y b son números naturales con $b \neq 0$, existen c y r números naturales tales que:

$$a = bc + r, \text{ con } 0 \leq r < b$$

Tabla 10. Análisis de la información³⁰.

CATEGORÍAS	LOGROS
CONJUNTOS (C)	<p>CE1: Reconoce la agrupación y reagrupación de elementos en la construcción de conjuntos.</p> <p>CE2: Maneja con facilidad el material real (tapas, bloques, dados, aros, pelotas etc.) en la formación de conjuntos.</p> <p>CE3: identifica conjuntos de números con propiedades comunes tales como múltiplos, divisores y distintos usos de la multiplicación.</p> <p>CE4: participa de las actividades propuestas con conjuntos y los relaciona con la división.</p>
NÚMEROS NATURALES (N,N)	<p>NE1: Practica el uso de las tablas de multiplicar con números naturales para realizar repartos.</p> <p>NE2: reconoce la importancia del trabajo en equipo con números naturales.</p> <p>NE3: Demuestra agilidad para el calculo de operaciones con números naturales.</p> <p>NE4: Realiza por medio de conjuntos divisores empleando los números naturales.</p>
LA DIVISIÓN (D)	<p>DE1: El estudiante construye el concepto de la división.</p> <p>DE2: Clasifica la división a través de la repartición de elementos en exacta e inexacta.</p> <p>DE3: Describe paso a paso el proceso de la división identificando los términos.</p> <p>DE4: Práctica el proceso de la división con material didáctico.</p>
APRENDIZAJE SIGNIFICATIVO (A,S)	<p>ASE1: El estudiante se interesa activamente en los trabajos y los relaciono con otras áreas.</p> <p>ASE2: El estudiante explica y comparte sus ideas y las asocia con los demás estudiantes.</p> <p>ASE3: El estudiante aprende de su propia experiencia por medio de la manipulación de objetos.</p> <p>ASE4: El estudiante propone nuevas ideas ara trabajar.</p> <p>Comprende que el proceso de la división no es un proceso mecánico sino práctico vivencial.</p>

³⁰ Fuente registro de investigación.

6. CONCLUSIONES

- El aprendizaje significativo de la división de números naturales se logró a través del trabajo de conjuntos con material real, porque los estudiantes tuvieron la oportunidad de vivenciar en un plano concreto el significado y el proceso logicomatemático de la división. Piaget, en términos de Ausubel, “el niño debe tener experiencias concretas para determinar luego el significado de los conceptos o para realizar o establecer abstracciones primarias”.
- La manipulación del material real (pelotas, palillos, tapas, ula-ula, fichas) para la formación de conjuntos permitió a los estudiantes asociar los conocimientos existentes con el material, por ejemplo: con 20 fichas formar 5 conjuntos con igual número de elementos cada uno: ¿con qué podemos relacionar la actividad?, E3 “con la multiplicación, porque utilizamos las tablas” ¿Qué es dividir? E7 “repartir algo”, E3 “repartir grupos”, E12 “es compartir algo, E2 “es repartir en grupos iguales”. Lo que se constituyó en una experiencia significativa (relación entre la información nueva y la antigua), creando situaciones que estimularon la construcción del concepto de división. El proceso de dividir se presenta cuando se quiere repartir un cierto número de unidades en grupos de una determinada cantidad
- Los estudiantes encontraron en la metodología centrada en el modelo pedagógico aprendizaje significativo una manera más participativa e interesante de aprender la división de números naturales a través de conjuntos, porque tuvieron la oportunidad de compartir sus conocimientos previos, además de trabajar con material real (palos, pelotas, fichas, tapas, ula-ula), siendo ellos los protagonistas en el proceso de construcción de conocimientos.

- La experiencia de trabajar los conjuntos con material real, permitió que los estudiantes establecieran la diferencia entre la división exacta y la división inexacta, porque al momento de hacer los repartos evidenciaron que en algunos ejercicios quedaban elementos sin repartir y en otro no, así: traer 30 palillos y armar 5 grupos: *E2 “Profe toda de 6 porque $6 \times 5 = 30$ ”*. Con 20 fichas formar 3 conjuntos. *E1 “toca de 6 porque $6 \times 3 = 18$ y sobran dos que quedan sin repartir”*. Situaciones que facilitaron la construcción de cada concepto (División exacta: en esta división el residuo es cero; División inexacta: es aquella donde el divisor es diferente de cero).

RECOMENDACIONES

El trabajo de divisiones con dos cifras en el divisor sólo se maneja utilizando cantidades pequeñas puesto que al manejar cantidades grandes se convertía en una tarea muy dispendiosa que disminuía el interés del estudiante por trabajar, razón por la cual el proceso lógico matemático de la división entre dos cifras en el plano abstracto presentó dificultad en su aprendizaje. Por lo anterior se recomienda la búsqueda de otra estrategia para abordar la división entre dos cifras.

Es pertinente que el docente sea creativo y recursivo en la elaboración del material real necesario para inducir, motivar y potencializar pedagógicamente y didácticamente un aprendizaje significativo. Teniendo en cuenta el contexto en el cual se encuentre inmersa la población escolar, puesto que la interacción del niño con el medio le permite desarrollar una actitud favorable en su proceso de aprendizaje de la matemática, tomada como algo difícil y tedioso.

El presente trabajo queda abierto como precedente para posteriores investigaciones que pretendan buscar nuevas alternativas de mejoramiento en el proceso lógico-matemático de la división y de otras operaciones matemáticas básicas.

BIBLIOGRAFÍA

- AUSBEL P. David. Aprendizaje significativo. Psicología educativa, un punto de vista cognoscitivo. 2 ed. Editorial Trillas. 1986. México. Pág. 46 – 52.
- CASTILLO, RODRIGUEZ, Reinaldo. En la presentación de colección “Docente del siglo XXI. Como desarrollar una práctica docente competitiva. McGraw-Hill. Interamericana, S.A. Bogotá. 2001.
- FLOREZ, Ochoa Rafael. “Investigación educativa y pedagogía”. Editorial McGraw-Hill. Bogotá D.C. Colombia 2001. Capítulo 6. Pág. 69 – 71.
- FLOREZ, OCHOA, Rafael. “Currículo y pedagogía”. En la introducción de POSNER, George. Análisis del currículo. McGraw-Hill. Interamericana S.A. Bogotá. 2001.
- GOETZ. J. P. Lecompte M.D. etnografía y diseño cualitativo en investigación educativa. 1988 (1984) Ediciones Morata, España. Pág 28.
- GOETZ J:P & Lecompte M:D, 1988 (1984) Etnografía y diseño cualitativo en investigación educativa Pág. 28. Ediciones Morata, España.
- Instituto Geográfico Agustín Codazzi. Diccionario Geográfico de Colombia. 1986. Tomo I. Pág. 496.
- MEN — ICFES. Propuesta general para el nuevo examen de estado. Cambios para el siglo xx, Bogota,1999.
- MONTAÑO A. Dolores Cristina. Proyecto de investigación de educación (Perspectiva cualitativa). Capítulo 5. Interpretación y teorización. 2004. Pág. 83 – 102.
- MORSG. Janice. “Emerger de los datos”. Los procesos cognitivos del análisis en la investigación cualitativa. Capítulo 3.

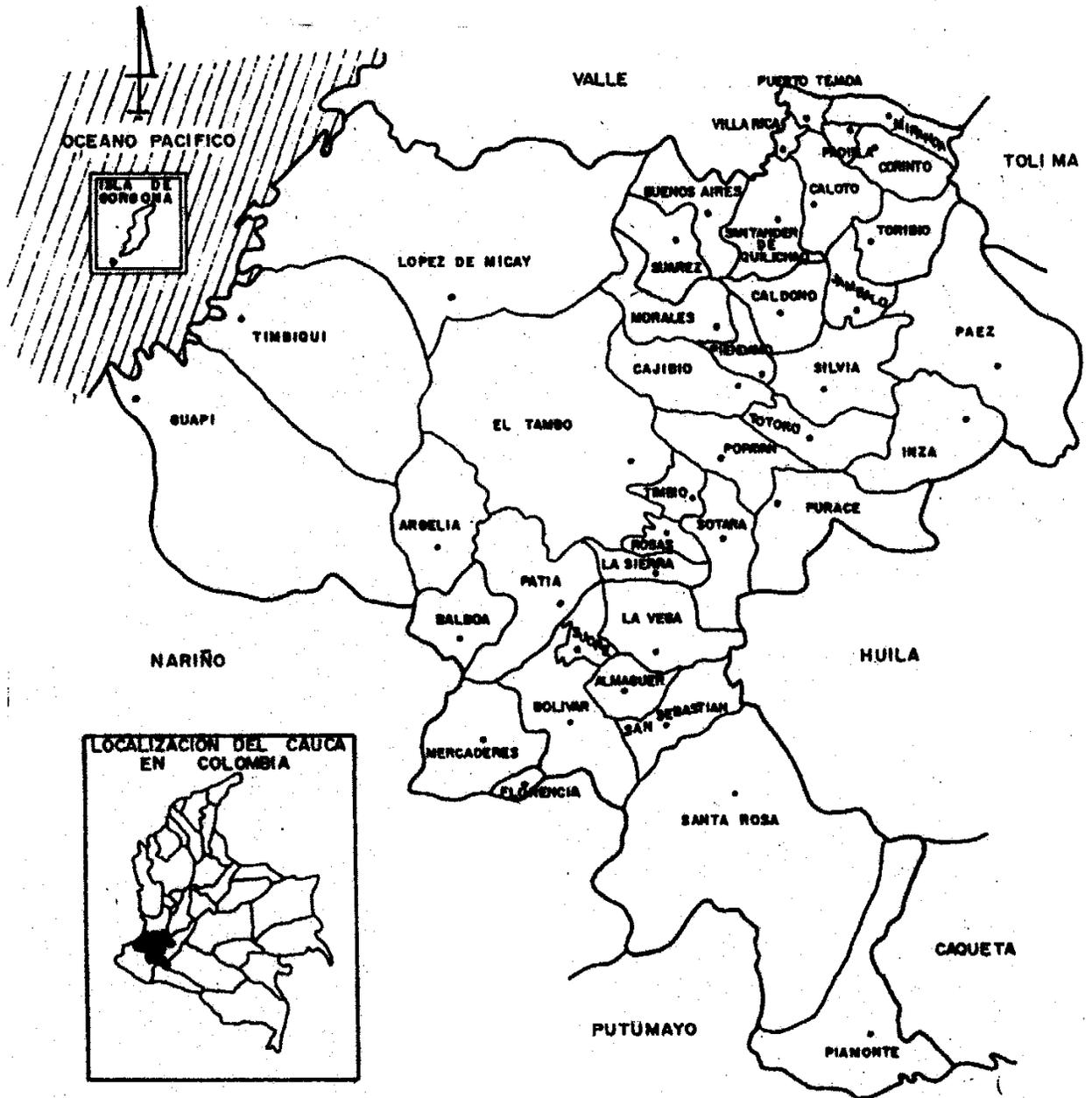
- Planeación municipal 2001.
- “Popayán” Instituto Geográfico Agustín Codazzi. Diccionario geográfico de Colombia. Tomo I. 1996. Pág. 496.
- Registro de Observación, Marzo 12 de 2004. Colegio Alejandro de Humboldt.
- VEJARANO, Jaime. Relatoria de Colombia. Popayán 1984. Feriva Ltda. Pág. 1748 – 1750.
- ZAMBRANO, L. Armando. Coloquio Internacional Didáctico de las disciplinas y aprendizajes, Universidad Santiago de Cali. Mayo 10 de 2003.

REFERENCIA TEÓRICA EN EL CAMPO MATEMÁTICO

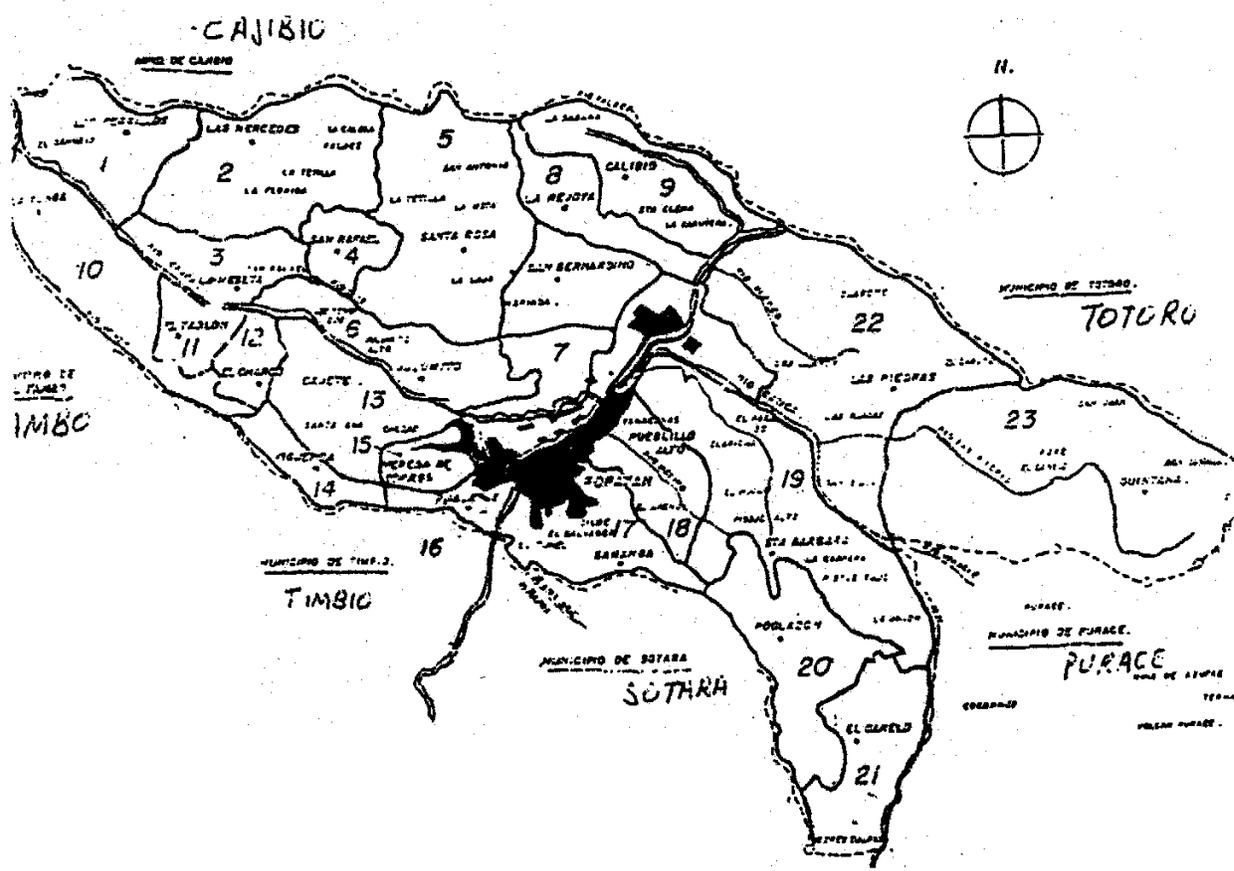
- BOYER Carl. Historia de las matemáticas. Los orígenes primitivos. 1964 Cap. 1. Pág. 19-23.
- ESCOBAR, Francisco. Matemáticas articulada 3 – 4 – 5 Universidad del Cauca. Diciembre 2004 y 2002. Noviembre 2000. Feriva S.A. Cali Valle.
- Matemática Mega. Terranova. Editores Copyright 1999. Tomo I. Pág. 3-53
- MESA BETANCUR, Orlando. Camino a la aritmética (enfoque constructivista). Departamento de Matemáticas. Universidad de Antioquía. Septiembre 2003.
- RECALDE, L. Cornelio. Lecturas sobre la historia de las Matemáticas. Capítulo I. Universidad del Valle. Santiago de Cali 2004. Pág. 1 – 35.

ANEXOS

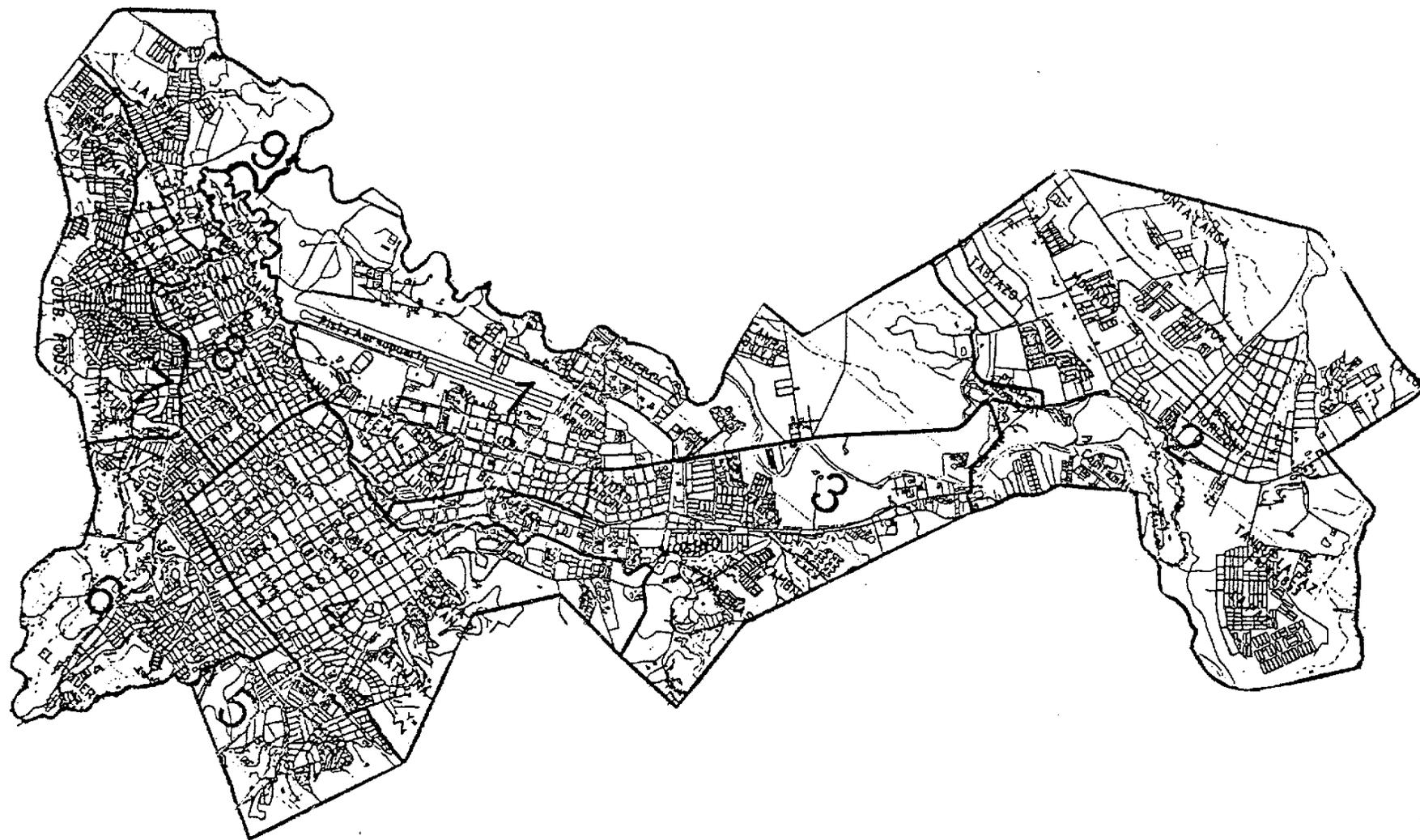
ANEXO 1
MAPA DEL DEPARTAMENTO DEL CAUCA



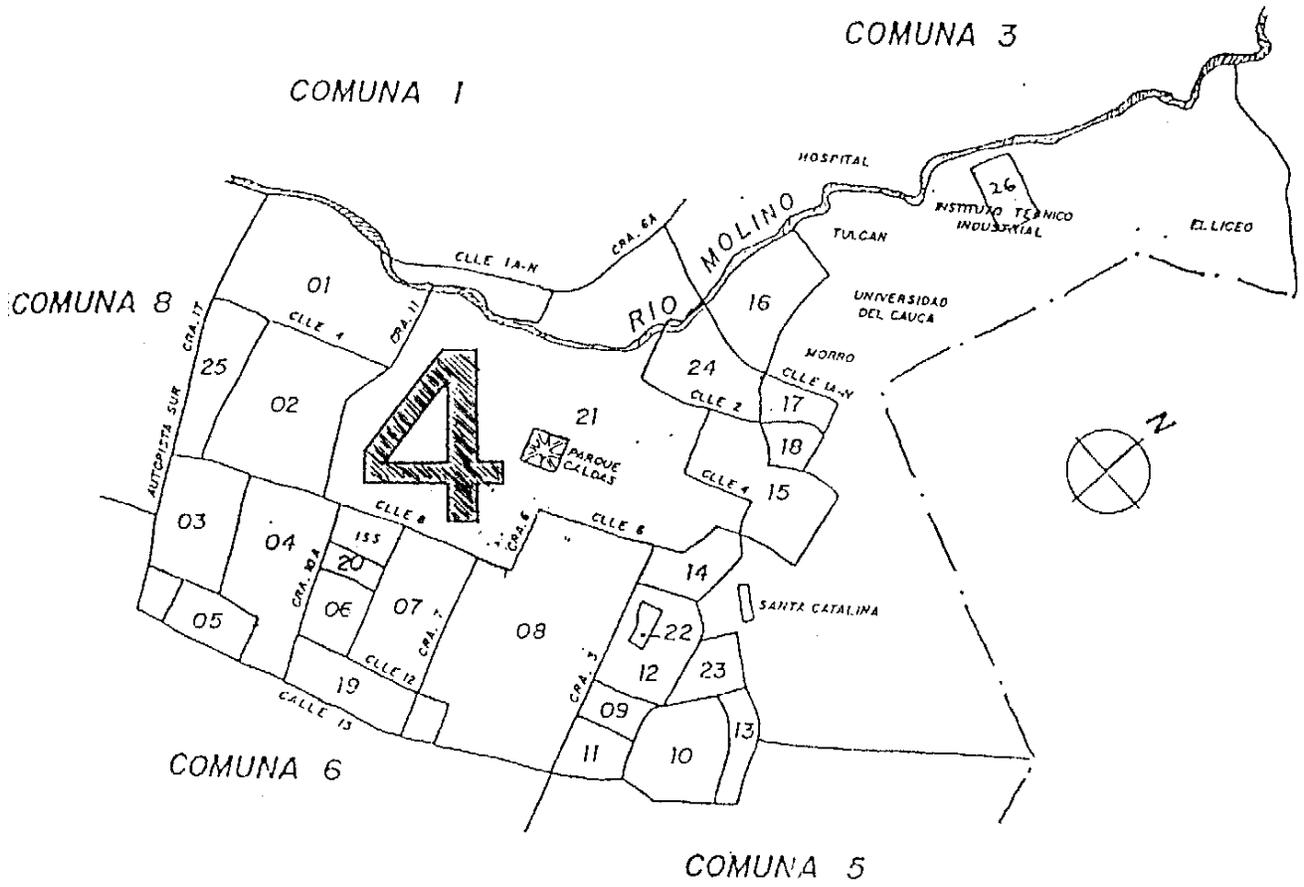
ANEXO 2
 MAPA MUNICIPIO DE POPAYÁN



ANEXO 3
MAPA COMUNAS DEL MUNICIPIO DE POPAYÁN



ANEXO 4.
COMUNA NÚMERO 4

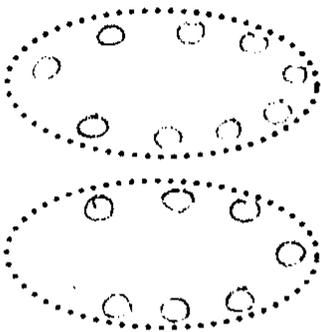


ESTUDIANTE 1 (E1)
UNIVERSIDAD DEL CAUCA
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y EXACTAS DE LA EDUCACIÓN
TALLER # 2

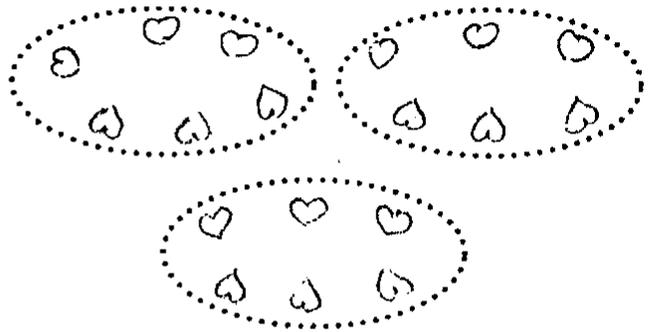
NOMBRE: _____ FECHA: _____

Dibuja la forma como pueden organizarse, en conjuntos iguales, 18 objetos.
 Trabaja primero con frijoles, botones o fichas pequeñas. Después, completa la tabla.

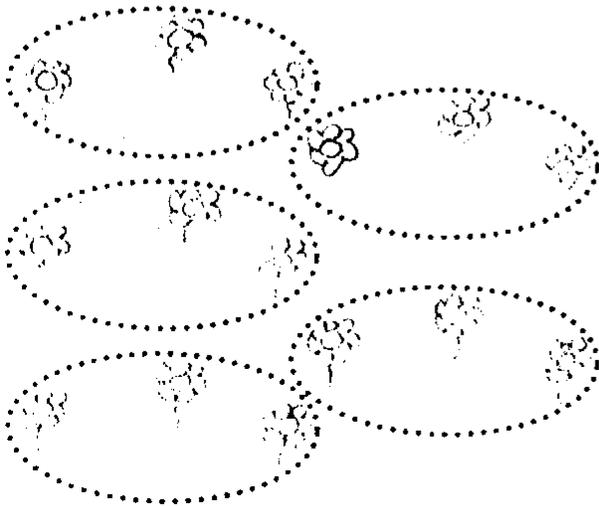
1. 2 conjuntos iguales



2. 3 conjuntos iguales



3. 5 conjuntos iguales



Número de conjuntos	Número de objetos en cada conjunto	Elementos que sobran
2	9	0
3	6	0
5	3	3

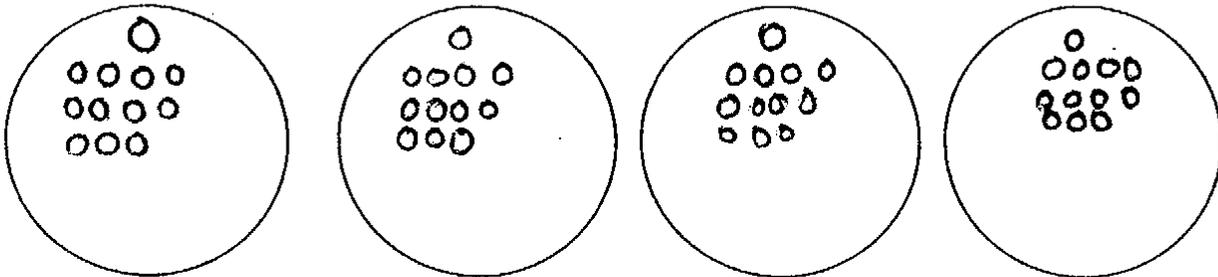
UNIVERSIDAD DEL CAUCA
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y EXACTAS DE LA EDUCACIÓN
TALLER # 3

NOMBRE: _____ FECHA: _____

Resuelve los siguientes ejercicios practicando la división

1. Reparte 50 granos de arroz de tal forma que en cada círculo halla la misma cantidad. ¿Cuántos granos de arroz quedaron en cada círculo? ¿Te sobraron?

me sobraron 2



2. Toma 30 palillos y repártelos en 5 paquetes, ahora dibuja y responde:

¿Cuántos palillos quedaron en cada paquete? ¿Te sobraron palillos?

en cada paquete quedaron 6



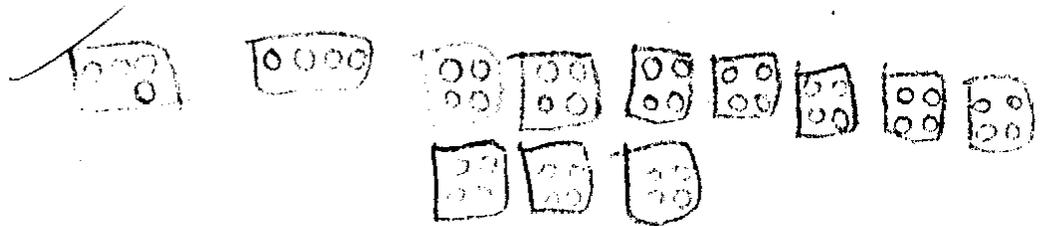
UNIVERSIDAD DEL CAUCA
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y EXACTAS DE LA EDUCACIÓN
TALLER # 4

NOMBRE: _____ **FECHA:** _____

Con lo que haz aprendido ayuda a resolver la siguiente situación

1. Jacinto tiene 54 tomates si los empaca en 12 cajas ¿Cuántos tomates empaco Jacinto en cada caja?

$$\begin{array}{r} 54 / 12 \\ 04 \quad 4 \end{array}$$



sobran 6

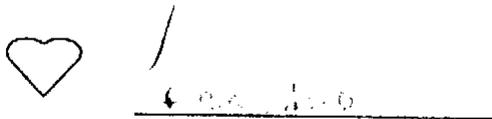
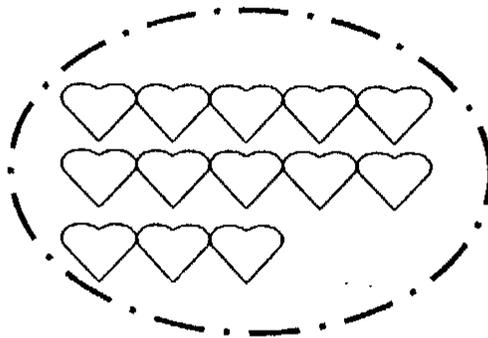
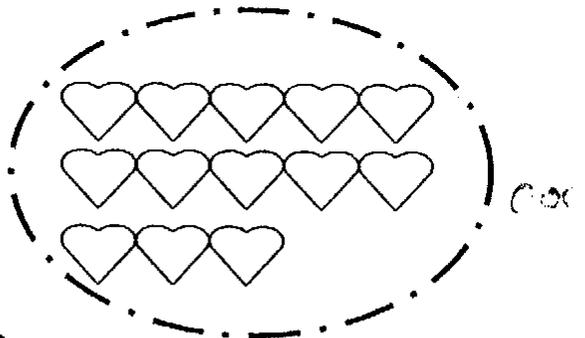
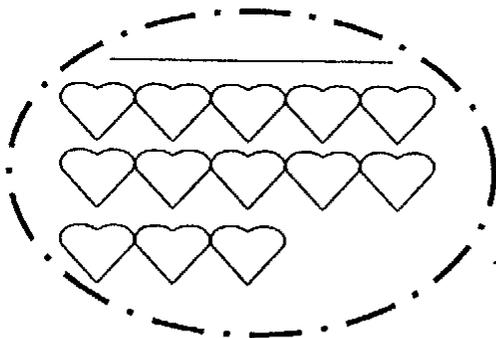
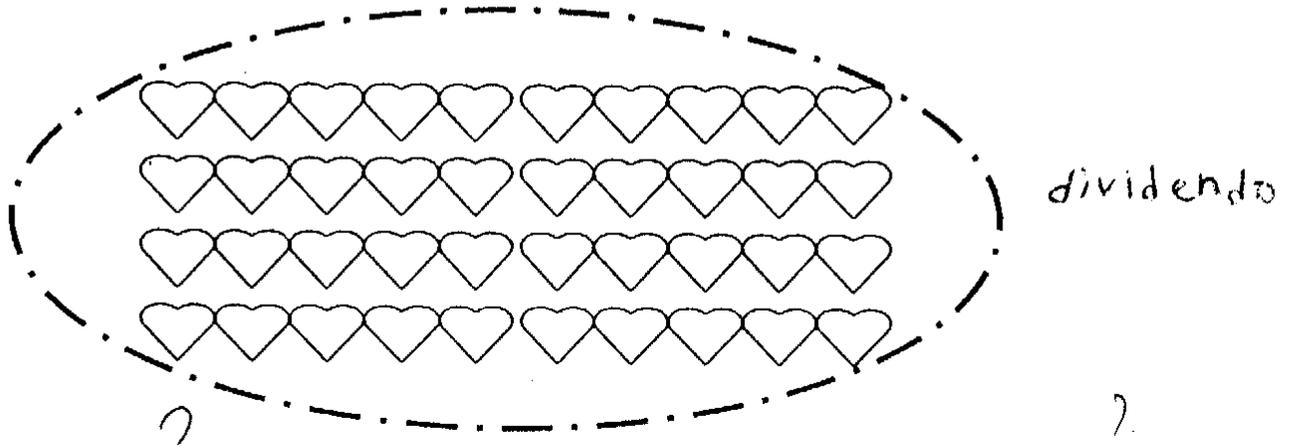
2. La gallina de Tomas coloca 25 huevos al mes, si los quiere repartir en canastas con igual número de huevos ¿Cuántas canastas necesitará Tomas?
 ¿Cuántos huevos metió en cada canasta?



UNIVERSIDAD DEL CAUCA
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y EXACTAS DE LA EDUCACIÓN
TALLER # 5

NOMBRE: _____ **FECHA:** _____

Observa la siguiente grafica y escribe los términos de la división según corresponda en el espacio correcto



40	13	
01	3	✓

representa numéricamente lo anterior en el recuadro

UNIVERSIDAD DEL CAUCA
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y EXACTAS DE LA EDUCACIÓN
TALLER # 6

NOMBRE: _____ FECHA: _____

Resuelve cada división y realiza un grafico para cada una de ellas

$$\begin{array}{r|l} 49 & 7 \\ \hline 0 & 7 \end{array}$$



$$\begin{array}{r|l} 24 & 11 \\ \hline 00 & 2 \end{array}$$

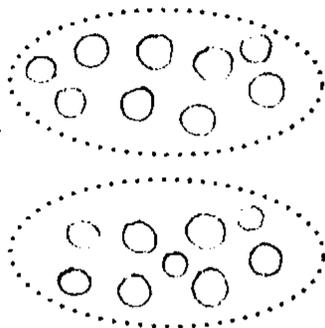
$$\begin{array}{r|l} 38 & 13 \\ \hline 12 & 2 \end{array}$$

ESTUDIANTE 2 (E2)
UNIVERSIDAD DEL CAÚCA
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y EXACTAS DE LA EDUCACIÓN
TALLER # 2

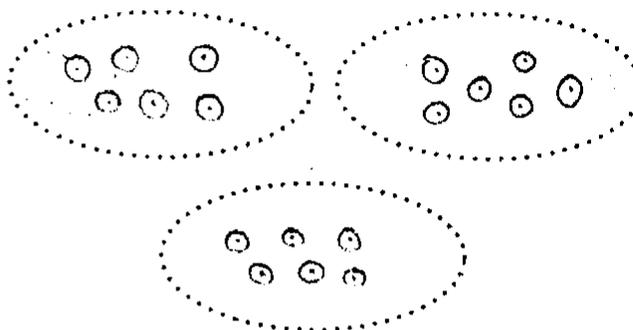
NOMBRE: _____ FECHA: _____

Dibuja la forma como pueden organizarse, en conjuntos iguales, 18 objetos.
 Trabaja primero con frijoles, botones o fichas pequeñas. Después, completa la tabla.

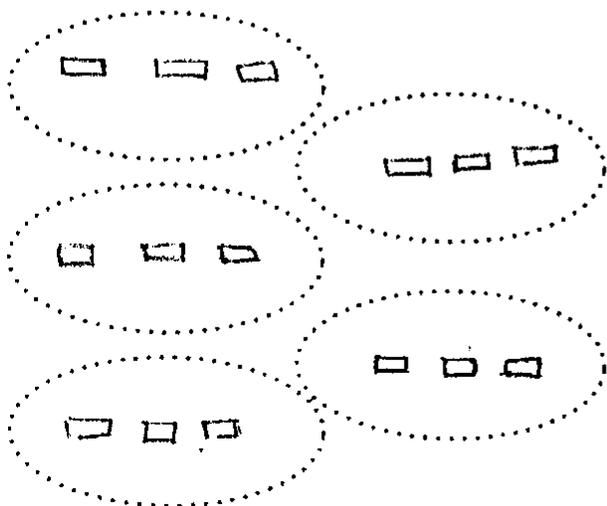
1) 2 conjuntos iguales



2) 3 conjuntos iguales



3) 5 conjuntos iguales



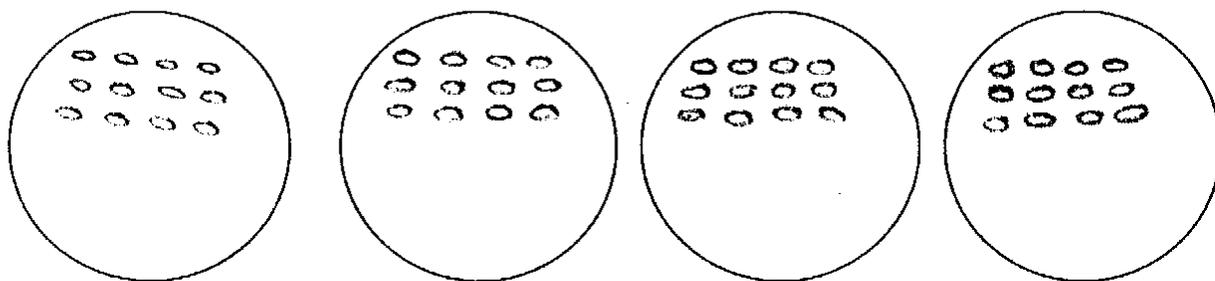
Número de conjuntos	Número de objetos en cada conjunto	Elementos que sobran
2	9	0
3	6	0
5	4	3

UNIVERSIDAD DEL CAUCA
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y EXACTAS DE LA EDUCACIÓN
TALLER # 3

NOMBRE: _____ FECHA: _____

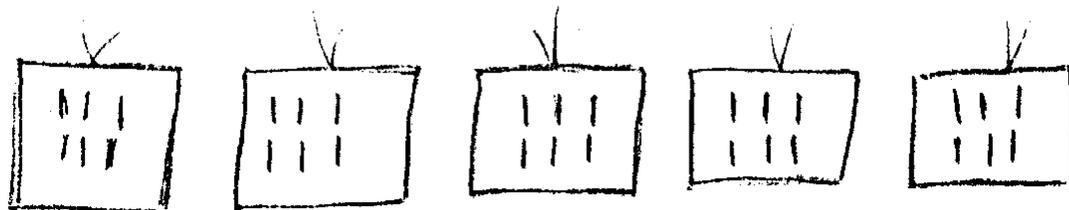
Resuelve los siguientes ejercicios practicando la división

1. Reparte 50 granos de arroz de tal forma que en cada círculo halla la misma cantidad. ¿Cuántos granos de arroz quedaron en cada círculo? ¿Te sobraron?



y sobran 2

2. Toma 30 palillos y repártelos en 5 paquetes, ahora dibuja y responde: ¿Cuántos palillos quedaron en cada paquete? ¿Te sobraron palillos?

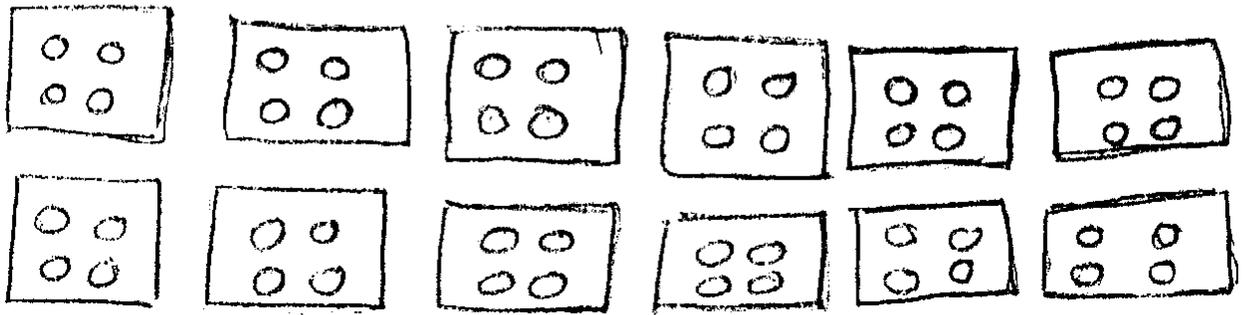


UNIVERSIDAD DEL CAUCA
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y EXACTAS DE LA EDUCACIÓN
TALLER # 4

NOMBRE: _____ **FECHA:** _____

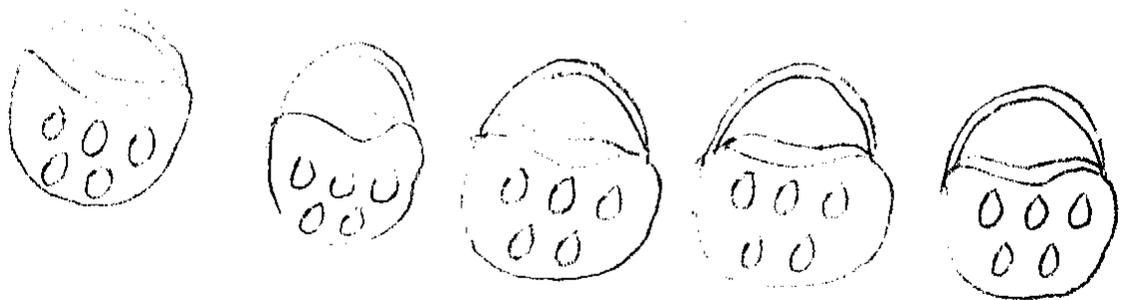
Con lo que haz aprendido ayuda a resolver la siguiente situación

1. Jacinto tiene 54 tomates si los empaca en 12 cajas ¿Cuántos tomates empaco Jacinto en cada caja?



= sobran 6

2. La gallina de Tomas coloca 25 huevos al mes, si los quiere repartir en canastas con igual número de huevos ¿Cuántas canastas necesitará Tomas? ¿Cuántos huevos metió en cada canasta?



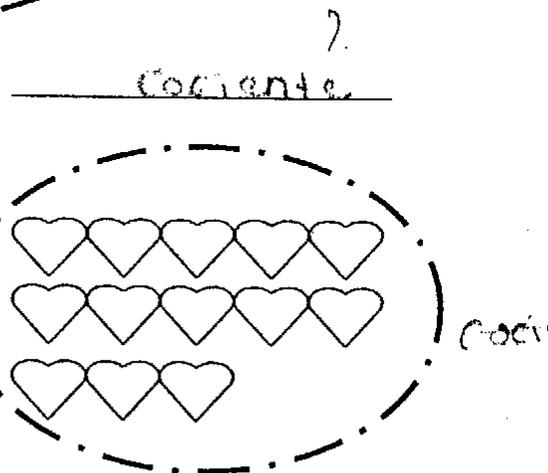
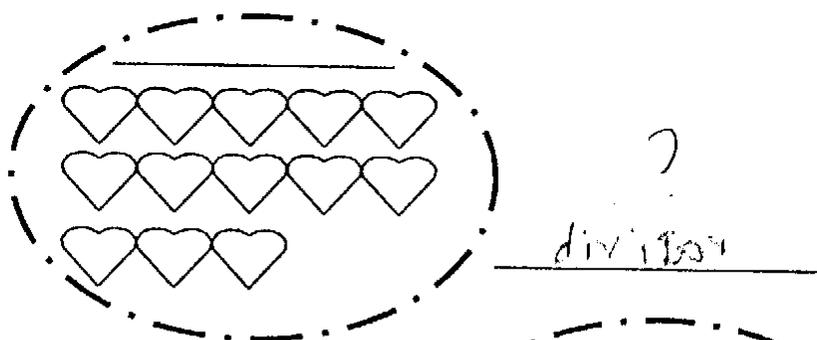
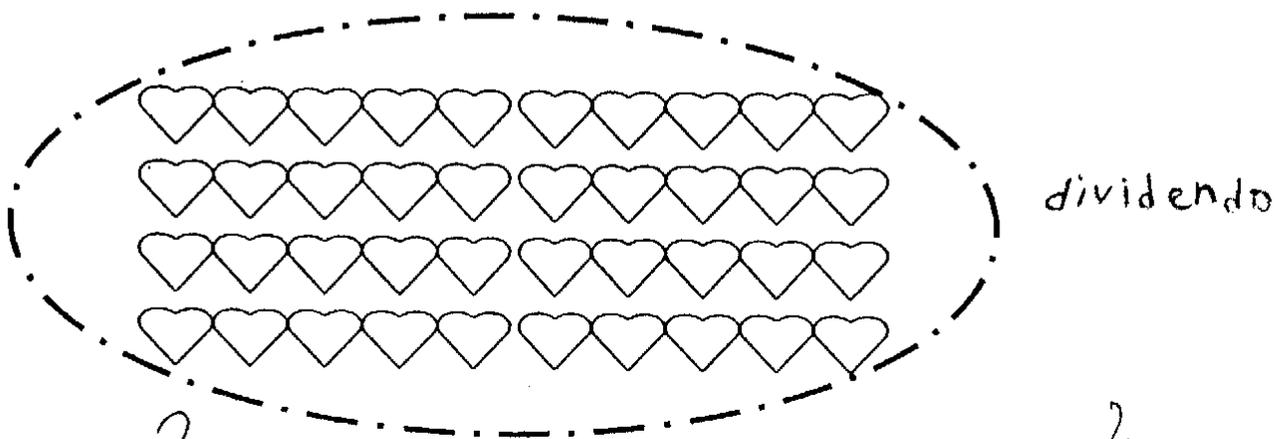
Nesesita 5 canastas

metió 5 huevos en cada canasta

UNIVERSIDAD DEL CAUCA
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y EXACTAS DE LA EDUCACIÓN
TALLER # 5

NOMBRE: _____ **FECHA:** _____

Observa la siguiente grafica y escribe los términos de la división según corresponda en el espacio correcto





 /

$ \begin{array}{r} 40 \overline{) 13} \\ 01 \quad 3 \checkmark \end{array} $

representa numéricamente lo anterior en el recuadro

UNIVERSIDAD DEL CAUCA
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y EXACTAS DE LA EDUCACIÓN
TALLER # 6

NOMBRE: _____ FECHA: _____

Resuelve cada división y realiza un grafico para cada una de ellas

$$\begin{array}{r|l} 49 & 7 \\ \hline 0 & 7 \end{array} \quad \checkmark$$

$$\begin{array}{r|l} 24 & 11 \\ \hline 2 & 2 \end{array} \quad \checkmark$$

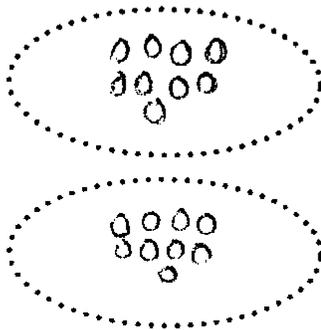
$$\begin{array}{r|l} 38 & 13 \\ \hline 12 & 2 \end{array} \quad \checkmark$$

ESTUDIANTE 3 (E3)
UNIVERSIDAD DEL CAUCA
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y EXACTAS DE LA EDUCACIÓN
TALLER # 2

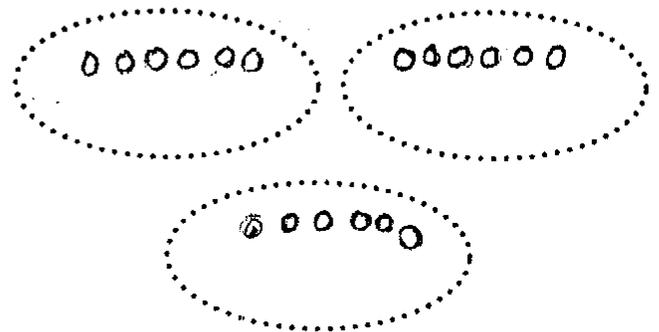
NOMBRE: _____ FECHA: _____

Dibuja la forma como pueden organizarse, en conjuntos iguales, 18 objetos.
 Trabaja primero con frijoles, botones o fichas pequeñas. Después, completa la
 tabla.

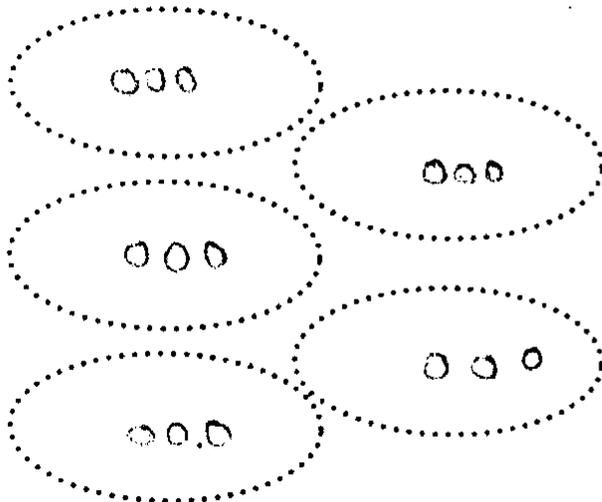
1. 2 conjuntos iguales



2. 3 conjuntos iguales



3. 5 conjuntos iguales



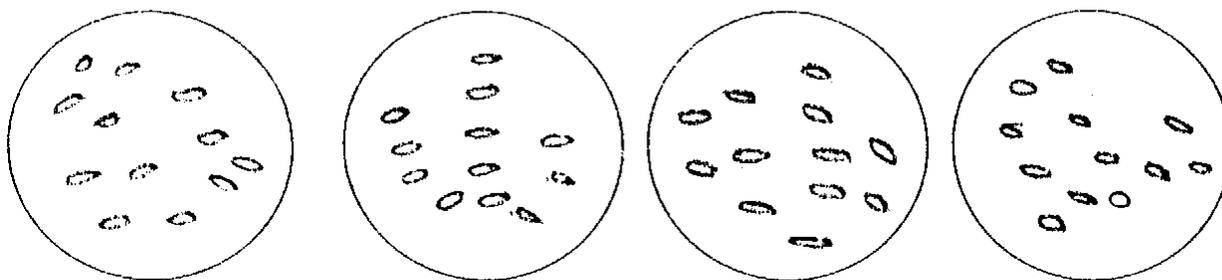
Número de conjuntos	Número de objetos en cada conjunto	Elementos que sobran
2	9	0
3	6	0
5	3	3

UNIVERSIDAD DEL CAUCA
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y EXACTAS DE LA EDUCACIÓN
TALLER # 3

NOMBRE: _____ FECHA: _____

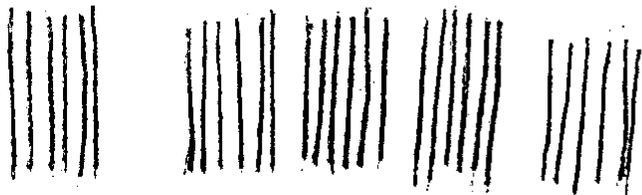
Resuelve los siguientes ejercicios practicando la división

1. Reparte 50 granos de arroz de tal forma que en cada círculo halla la misma cantidad. ¿Cuántos granos de arroz quedaron en cada círculo? ¿Te sobraron?



en cada círculo toco de 12 granos y sobraron 2 granos

2. Toma 30 palillos y repártelos en 5 paquetes, ahora dibuja y responde: ¿Cuántos palillos quedaron en cada paquete? ¿Te sobraron palillos?



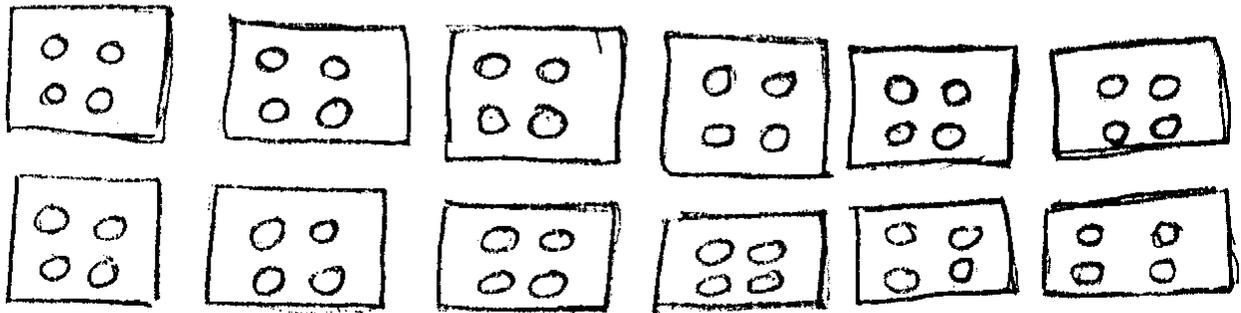
me quedaro 6 palillo en cada paquete
y no sobro nada

UNIVERSIDAD DEL CAUCA
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y EXACTAS DE LA EDUCACIÓN
TALLER # 4

NOMBRE: _____ FECHA: _____

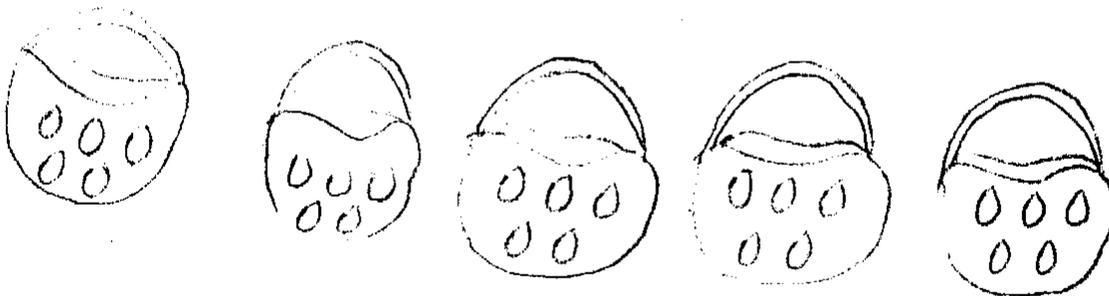
Con lo que haz aprendido ayuda a resolver la siguiente situación

1. Jacinto tiene 54 tomates si los empaca en 12 cajas ¿Cuántos tomates empaco Jacinto en cada caja?



y sobran 6

2. La gallina de Tomas coloca 25 huevos al mes, si los quiere repartir en canastas con igual número de huevos ¿Cuántas canastas necesitará Tomas? ¿Cuántos huevos metió en cada canasta?



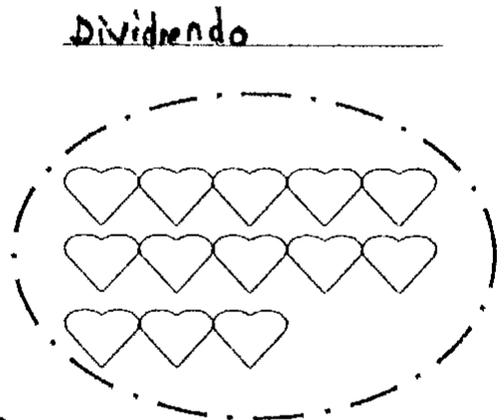
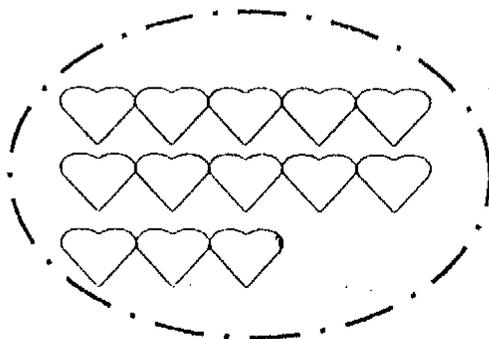
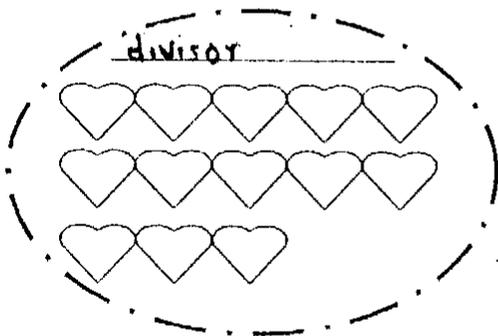
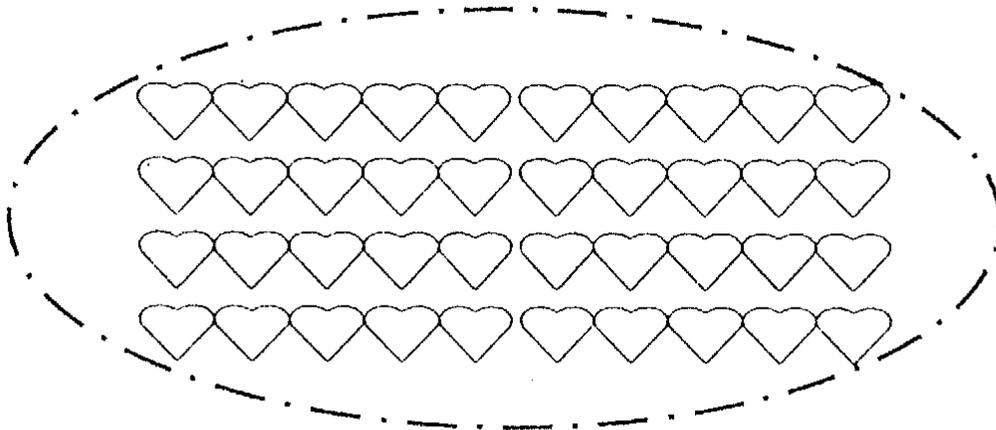
necesita 5 canastas

metio 5 huevos en cada canasta

UNIVERSIDAD DEL CAUCA
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y EXACTAS DE LA EDUCACIÓN
TALLER # 5

NOMBRE: _____ FECHA: _____

Observa la siguiente grafica y escribe los términos de la división según corresponda en el espacio correcto



Residuo

$40 \overline{) 3}$

representa numéricamente lo anterior en el recuadro

UNIVERSIDAD DEL CAUCA
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y EXACTAS DE LA EDUCACIÓN
TALLER # 6

NOMBRE: _____ **FECHA:** _____

Resuelve cada división y realiza un grafico para cada una de ellas

$$\begin{array}{r|l} 49 & 7 \\ \hline 0 & 7 \end{array} \quad \checkmark$$

$$\begin{array}{r|l} 24 & 11 \\ \hline 2 & 2 \end{array} \quad \checkmark$$

$$\begin{array}{r|l} 38 & 13 \\ \hline 12 & 2 \end{array} \quad \checkmark$$

ANEXO 8
REGISTRO FOTOGRÁFICO



División entre dos cifras



Repartos inexactos



Repartos exactos

SOCIALIZACIÓN DE LOS TRABAJOS



Trabajos con conjuntos



Divisiones (representación de conjuntos con fichas)

Anexo 9. Proceso pedagógico de la investigación

TALLERES	OBJETIVOS	METODOLOGÍA	MATERIALES	METAS
"Repartos"	<ul style="list-style-type: none"> Practicar la repartición de conjuntos como vía para llegar a la conceptualización de la división 	<p>Inicio: Dinámica "El Capitán"</p> <ul style="list-style-type: none"> Socialización de vivencias Representación de vivencias a través del material real Ejercicios libres con el material real. 	Fichas y ula-ulas	<ul style="list-style-type: none"> Practicará la repartición de conjuntos como vía para llegar a la conceptualización de la división
Repartos Exactos	<ul style="list-style-type: none"> Realizar repartos exactos mediante competencias de construcción de subconjuntos de un conjunto. 	<p>Inicio competencias de carreras con el fin de repartir cantidades en grupos exactos y reconocer el resultado de estos en forma simbólica.</p> <ul style="list-style-type: none"> Ejercicios de calculo mental con situaciones cotidianas. 	Palillos, cauchos y marcador	<ul style="list-style-type: none"> Realizará repartos exactos mediante competencias de construcción de subconjuntos de un conjunto.
"El mejor lanzamiento"	<ul style="list-style-type: none"> Relacionar las operaciones de multiplicación y división mediante el concurso "El mejor Lanzamiento" 	<p>Inicio concurso por equipos "El mejor lanzamiento"</p> <ul style="list-style-type: none"> Socialización de la actividad Representación gráfica y simbólica. Planteamientos de ejercicios. 	Dados, pelotas, cajas y ula-ulas	<ul style="list-style-type: none"> Relacionará las operaciones de multiplicación y división mediante el concurso "El mejor Lanzamiento"
Repartos Inexactos	<ul style="list-style-type: none"> Realizar repartos inexactos mediante competencias de carreras en la construcción de conjuntos 	<p>Inicio competencias de carreras con el fin de construir grupos inexactos y reconocer el resultado de estos en forma simbólica</p> <ul style="list-style-type: none"> Construcción de conceptos mediante la socialización de la actividad Planteamiento de ejercicios en forma libre. 	Dados, fichas y ula-ulas	<ul style="list-style-type: none"> Realizará repartos inexactos mediante competencias de carreras en la construcción de conjuntos
Dividiendo entre 2 cifras	<ul style="list-style-type: none"> Practicar divisiones entre 2 cifras mediante la representación de conjuntos 	<p>Inicio planteamientos de problemas de la vida cotidiana y resolverlos utilizando material real</p> <ul style="list-style-type: none"> Practicas de ejercicios de aplicación apoyados con material real Representación simbólica 	Fichas, tapas y hojas de block.	<ul style="list-style-type: none"> Practicará divisiones entre 2 cifras mediante la representación de conjuntos