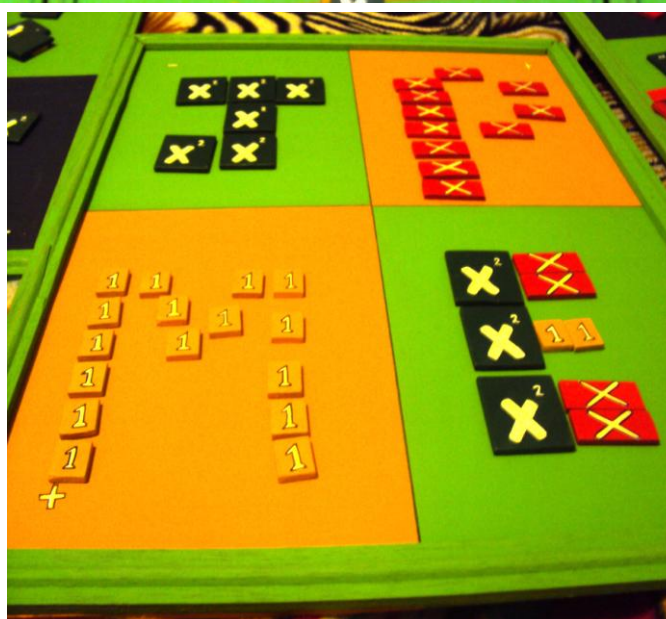


SISTEMATIZACIÓN DE LA
EXPERIENCIA PEDAGÓGICA: EL
DESARROLLO DE LAS
OPERACIONES BÁSICAS DE
POLINOMIOS, CON EL APOYO DE
UNA HERRAMIENTA DIDÁCTICA
DENOMINADA LA CAJA DE
POLINOMIOS.

Sistematización

24/06/2010

JUAN PABLO MELÉNDEZ
ERAZO



SISTEMATIZACIÓN DE LA EXPERIENCIA PEDAGÓGICA: EL DESARROLLO
DE LAS OPERACIONES BÁSICAS DE POLINOMIOS, CON EL APOYO DE UNA
HERRAMIENTA DIDÁCTICA DENOMINADA LA CAJA DE POLINOMIOS.



PRÁCTICANTE:
JUAN PABLO MELÉNDEZ ERAZO

INSTITUCIÓN EDUCATIVA JULUMITO
GRADO OCTAVO

UNIVERSIDAD DEL CAUCA
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES, EXACTAS Y DE LA EDUCACIÓN
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS
POPAYÁN – CAUCA
2010

SISTEMATIZACIÓN DE LA EXPERIENCIA PEDAGÓGICA: EL DESARROLLO
DE LAS OPERACIONES BÁSICAS DE POLINOMIOS, CON EL APOYO DE UNA
HERRAMIENTA DIDÁCTICA DENOMINADA LA CAJA DE POLINOMIOS.



PRÁCTICANTE:
JUAN PABLO MELÉNDEZ ERAZO

DIRECTORA:
MARGARITA GRANADOS RODRÍGUEZ

INSTITUCIÓN EDUCATIVA JULUMITO
GRADO OCTAVO
TEMA A DESARROLLAR: ÁLGEBRA DE POLINOMIOS

UNIVERSIDAD DEL CAUCA
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES, EXACTAS Y DE LA EDUCACIÓN
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS
POPAYÁN – CAUCA
2010

CONTENIDO

	Pág.
INTRODUCCIÓN	
JUSTIFICACIÓN	
1. OBJETIVOS	8
1.1 objetivo general	8
1.2 objetivos específicos	8
2. CONTEXTO DE LA EXPERIENCIA	9
3. REFERENTES TEÓRICOS	11
3.1 TEORÍAS DE LAS SITUACIONES DIDÁCTICAS	11
3.2. CLASES DE SITUACIONES DIDÁCTICAS	11
3.2.1 ENFOQUE TRADICIONAL	12
3.2.2 LA TEORÍA DE SITUACIONES DIDÁCTICAS PLANTEADA POR BROUSSEAU	12
3.3 ESTÁNDARES DE CALIDAD PARA EDUCACIÓN MATEMÁTICA	12
3.3.1 EL PENSAMIENTO ESPACIAL Y LOS SISTEMAS GEOMÉTRICOS	13
3.4 ERRORES EN EL APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS	14
3.4.1 CATEGORIZACIONES Y CLASIFICACIONES.	14
3.5 LOS EJERCICIOS DIDÁCTICOS	16
3.5.1 CLASIFICACIÓN DE LOS EJERCICIOS DIDÁCTICOS	17
3.6 HERRAMIENTA DIDÁCTICA	19
3.7 LA CAJA DE POLINOMIOS	20

3.8 DEFINICIÓN DE POLINOMIO	22
3.9 LA MODELACIÓN	23
3.10 DEFINICIÓN DE SISTEMATIZACIÓN	23
4. METODOLOGÍA DE LA SISTEMATIZACIÓN	24
5. RECUPERACIÓN HISTÓRICA DE LA EXPERIENCIA	25
6. CONOCIMIENTOS PRODUCIDOS	70
6.1 APRENDIZAJES PEDAGÓGICOS	70
6.2 APRENDIZAJES DISCIPLINARIOS	71
6.3 APRENDIZAJES AXIOLÓGICOS	71
7. CONCLUSIONES	72
8. RECOMENDACIONES	74
9 REFERENCIAS	75

INTRODUCCIÓN

En la carrera de Licenciatura en Matemáticas de la Universidad del Cauca, los cursos de Práctica Pedagógica I, II, III y IV son unos de los cursos más importantes en esta formación profesional, ya que en estos, se fundamenta, se construye e implementa (cursos I,II y III) una propuesta didáctica basada en un conjunto de criterios didácticos para el proceso de enseñanza y aprendizaje en los cuales se pone a prueba en una experiencia pedagógica, que se lleva a cabo en la educación básica secundaria y se sistematiza en el curso práctica IV. El siguiente documento presenta la sistematización de la experiencia pedagógica que se desarrolló en la Institución educativa Julumito en grado octavo, donde se implementó la propuesta didáctica, el desarrollo de las operaciones básicas de polinomios, con el apoyo de la caja de polinomios.

Este documento de sistematización presenta en forma ordenada y crítica, la experiencia vivida en la Institución Educativa Julumito con los estudiantes de grado octavo y permite de esta manera, analizar e interpretar, los conocimientos adquiridos sobre la situación didáctica desarrollada.

Para elaborar esta sistematización fue fundamental la recuperación histórica del proceso vivido, el cual se realizó teniendo presente la observación directa y la participación de los estudiantes en las clases, de igual manera siempre se tuvo presente el desarrollo de talleres, trabajos en grupos y ejercicios, los errores correspondientes a al desarrollo de estas actividades fueron evidenciados y ubicados en un categoría adecuada, según el análisis crítico de errores proporcionado por Luis rico y J.Booth.

La sistematización se realizó teniendo como eje, la enseñanza de las operaciones básicas de polinomios con la ayuda de una innovadora herramienta didáctica que se denomina la caja de polinomios.

Ésta herramienta didáctica fue construida por ¹Fernando Soto, Saulo Mosquera y Claudia Gómez, en esta propuesta didáctica se le proporcionó a este material didáctico una forma estructural llamativa para los estudiantes y se espera seguirla mejorando con los aportes de las personas interesadas en la educación matemática.

¹ Estudiantes de la Universidad de Nariño (1998)

JUSTIFICACIÓN

Las situaciones didácticas implementadas en las instituciones educativas de la Ciudad de Popayán, por los estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad del Cauca, son de valiosa importancia, ya que estas son la base de una vida de formación en el ámbito de la enseñanza metamatemática, de ahí que se hace necesario someter a prueba los distintos desarrollos prácticos y teóricos que se estudiaron en el transcurso de la carrera, esto con el fin de fortalecer y afirmar los conceptos pedagógicos obtenidos en cada una de las asignaturas en educación matemática.

Es por esto que este documento recoge la sistematización del trabajo realizado en el curso de práctica pedagógica III, para así validar una propuesta pedagógica basada en la teoría de las situaciones didácticas, además se quiere comunicar los conocimientos obtenidos en esta experiencia educativa con el propósito de contribuir al diseño de nuevas propuestas didácticas para las futuras generaciones de Licenciados en Matemáticas.

1. OBJETIVOS

1.1 OBJETIVO GENERAL

Sistematizar la experiencia pedagógica denominada el desarrollo de las operaciones básicas de polinomios, con el apoyo de la caja de polinomios, que se llevó a cabo con los estudiantes de grado octavo de la institución educativa de Julumito.

1.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Analizar críticamente la experiencia pedagógica, desarrollada en el curso de práctica III y plasmar los resultados obtenidos, con el propósito de validar o transformar, la propuesta didáctica.
- identificar los posibles errores de los estudiantes al desarrollar los ejercicios propuestos en cada una de las sesiones, y determinar su respectiva categorización.
- Comunicar la situación didáctica y los conocimientos producidos en su implementación, con el propósito de contribuir a las nuevas propuestas pedagógicas de los futuros Licenciados en Matemáticas.

2. CONTEXTO DE LA EXPERIENCIA

El curso de práctica pedagógica III de la Universidad del Cauca tiene como objetivo la implementación de una propuesta didáctica que se ha construido rigurosamente en los cursos de práctica pedagógica I y II. *El desarrollo de las operaciones básicas de polinomios*, es una propuesta didáctica que se implementó (práctica III) en grado octavo en la Institución Educativa Julumito, que está ubicada en la comuna 9 de la ciudad de Popayán en el Departamento del Cauca.



La Institución Educativa Julumito está compuesta por cuatro sedes, la sede Principal ofrece la formación básica secundaria en la jornada de la mañana, la sede los Tendidos que brinda la formación desde transición hasta el grado cuarto, la sede las Lajas, donde se da la formación desde transición a quinto al igual que la sede Julumito. La sede donde se desarrolló la propuesta pedagógica es la sede principal, la cual está compuesta por dos sextos de 32 estudiantes cada uno, sólo hay un grado séptimo que cuenta con 32 estudiantes, en el grado octavo hay 40 estudiantes, en el grado noveno hay 28 estudiantes, en grado décimo 11 estudiantes, en grado once 10 estudiantes, para un total de 185 estudiantes. Esta sede cuenta con 11 educadores y ocho aulas.

LA INSTITUCIÓN CUENTA CON UNA SALA DE SISTEMAS



LA SALA DE PROFESORES

LA CANCHA DE MICROFÚTBOL



La jornada educativa es de 7:00 a.m hasta 12:45 p.m, con un descanso de una hora, de 9:00 a 10:00 am.

Los estudiantes de grado octavo con los que se desarrolló la propuesta didáctica en su mayoría eran estudiantes que vivían retirados de la Institución educativa, de condiciones económicas no muy buenas y sus edades oscilaban entre los 12 y 14 años.

La Institución Educativa donde se implementó la propuesta cuenta con gran cantidad de naturaleza lo cual hace el ambiente más agradable.

3. REFERENTES TEÓRICOS

Teniendo en cuenta la importancia de algunos términos desde el punto de vista de la presente sistematización, es razonable definir y precisar cada uno de ellos. Se tendrán en cuenta la definición de; las situaciones didácticas, los estándares de calidad para la educación matemática, los errores en Matemáticas los ejercicios didácticos, herramienta didáctica, la caja de polinomios y las definiciones respecto a los siguientes conceptos; Un modelo educativo, Polinomio y sistematización, la fundamentación teórica, de esta propuesta pedagógica se presentó en el documento de práctica I.

3.1 Teorías de las situaciones didácticas. Como esta propuesta didáctica se basó en la teoría de las situaciones didácticas² es lógico referirse a los planteamientos de uno de los más importantes investigadores en estos temas. El francés Guy Brusseau; entendió la necesidad de utilizar un modelo propio en la actividad matemática, ya que los anteriores modelos no se habían construido para responder a los mismos problemas que se plantea la didáctica Matemática. (Históricamente se corresponde con las primeras formulaciones de la teoría de situaciones didácticas). Brusseau dice: El *“conocimiento Matemático” se identifica con la “situación o juego que modeliza los problemas que sólo dicho conocimiento permite resolver de manera óptima”*. La actividad matemática escolar se modeliza a partir de la noción de “situación fundamental”, que es un conjunto de situaciones específicas de conocimiento que permiten generar un campo de ejercicios que proporcionen una buena representación del conocimiento.

Situación didáctica; Brousseau define una *situación didáctica como un conjunto de relaciones establecidas implícita y/o explícitamente entre un alumno o un grupo de alumnos, un cierto medio (que comprende eventualmente instrumentos u objetos) y un sistema educativo (representado por el profesor) con la finalidad de lograr que estos alumnos se apropien de un saber constituido o en vías de constitución.*

3.2 CLASES DE SITUACIONES DIDÁCTICAS

Al referirse a las Situaciones Didácticas, en principio se deben distinguir dos enfoques: El tradicional y el enfoque planteado por la teoría de Brousseau³. Ambos en relación a la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

² CHAVARRÍA, Jesennia. Cuaderno de investigación y formación en Educación matemática: Teoría de las situaciones didácticas. En: un seminario teórico. Bogotá, 26 de Marzo del 2006. Universidad Nacional, (2006)

³ Brousseau, Guy. Investigaciones en educación matemática pág. 7

3.2.1 ENFOQUE TRADICIONAL

Este hace una relación estudiante-profesor, en la cual, el profesor simplemente provee los contenidos, instruye al estudiante, quien captura dichos conceptos y los reproduce tal cual le han sido administrados.

Dentro de este enfoque no se contextualiza el conocimiento, no se tiene un aprendizaje significativo. Paulo Freire apunta con respecto al enfoque tradicional: “La educación padece de la enfermedad de la narración que convierte a los alumnos en contenedores que deben ser llenados por el profesor, y cuanto mayor sea la docilidad del receptáculo para ser llenado, mejores alumnos serán”.

3.2.2 TEORÍA DE SITUACIONES DIDÁCTICAS PLANTEADA POR BROUSSEAU

En el enfoque planteado⁴ por Brousseau intervienen tres elementos fundamentales: estudiante, profesor y el medio didáctico. En esta terna, el profesor es quien facilita el medio en el cual el estudiante construye su conocimiento. Así, Situación Didáctica se refiere al conjunto de interrelaciones entre tres sujetos: profesor-estudiante-medio didáctico.

La perspectiva de diseñar situaciones que ofrecieran al estudiante la posibilidad de construir el conocimiento dio lugar a la necesidad de otorgar un papel central dentro de la organización de la enseñanza, a la existencia de momentos de aprendizaje, concebidos como momentos en los cuales el alumno se encuentra solo frente a la resolución de un problema, sin que el maestro intervenga en cuestiones relativas al saber en juego.

El reconocimiento de la necesidad de esos momentos de aprendizaje dio lugar a la noción de situación a-didáctica (o fase a-didáctica dentro de una situación didáctica), definida por Brousseau como toda situación que, por una parte no puede ser dominada de manera conveniente sin la puesta en práctica de los conocimientos o del saber que se pretende y que, por la otra, sanciona las decisiones que toma el alumno (buenas o malas) sin intervención del maestro en lo concerniente al saber que se pone en juego.

⁴ La transposición didáctica [on line] [citado en septiembre 2009] disponible en: <http://educacion.idoneos.com/index.php/118272>

3.3 ESTÁNDARES DE CALIDAD PARA EDUCACIÓN

Los estándares⁵ son un marco de referencia para que las instituciones escolares, los municipios, las localidades y regiones puedan definir su propio marco de trabajo curricular; para asegurar que todas las escuelas ofrezcan educación similar y especialmente en procura de la excelencia, permitiendo la igualdad de oportunidades educativas para todos los estudiantes y especificando los requisitos para la promoción a grados y niveles siguientes, son la base para diseñar estrategias y programas de formación y capacitación de docentes, a partir de criterios y expectativas compartidas, es decir los estándares garantizan una educación similar en todas las escuelas, especificando los conocimientos que se deben adquirir según la materia y el grado que se cursa. Con respecto a la asignatura de matemáticas los estándares para la educación matemática plantean lo siguiente:

Matemáticamente competente:

Ser **matemáticamente competente**⁶ se concreta de manera específica en el pensamiento lógico y en el pensamiento matemático, el cual se subdivide en los cinco tipos de pensamiento matemático propuestos en los Lineamientos Curriculares: el numérico, el espacial, el métrico o de medida, el aleatorio o probabilístico y el variacional, En la implementación de la propuesta didáctica se desarrolló una parte del tipo de pensamiento espacial. Definido⁷ este como:

3.3.1 El pensamiento espacial y los sistemas geométricos. El pensamiento espacial, entendido como "... el conjunto de los procesos cognitivos mediante los cuales se construyen y se manipulan las representaciones mentales de los objetos del espacio, las relaciones entre ellos, sus transformaciones, y sus diversas traducciones o representaciones materiales, contempla las actuaciones del sujeto en todas sus dimensiones y relaciones espaciales para interactuar de diversas maneras con los objetos situados en el espacio, desarrollar variadas representaciones y a través de la coordinación entre ellas, hacer acercamientos conceptuales que favorezcan la creación y manipulación de nuevas representaciones mentales.

Según los estándares básicos de competencias en *Matemáticas para el grado 8 – 9, los estudiantes al terminar estos cursos deben tener unos conocimientos*

⁵ Ministerio de Educación Nacional 2003. Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas formato pdf, 93 p.

⁶ Estándares básicos de competencias en Matemáticas, Potenciar el pensamiento Matemático: un reto escolar pag.56

⁷ Competencias en Matemáticas | pag.61

importantes, algunos de ellos (con respecto al pensamiento espacial y los sistemas geométricos) son los siguientes;

• **PENSAMIENTO ESPACIAL Y SISTEMAS GEOMÉTRICOS**

- Conjeturo y verifico propiedades de congruencias y semejanzas entre figuras bidimensionales y entre objetos tridimensionales en la solución de problemas.
- Reconozco y contrasto propiedades y relaciones geométricas utilizadas en demostración de teoremas básicos (Pitágoras y Tales).
- Aplico y justifico criterios de congruencias y semejanza entre triángulos en la resolución y formulación de problemas.
- ***Uso representaciones geométricas para resolver y formular ejercicios en matemáticas.***

3.4 LOS ERRORES EN EL APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS

No se puede desconocer que los errores son la manifestación más natural de un proceso tan complicado como es el de enseñanza de las Metamatemáticas, en este proceso interactúan muchas variables: profesor, alumno, currículo, contexto sociocultural, entre otras. Aún no se ha completado un desarrollo teórico que permita clasificar, Interpretar, predecir y superar errores y dificultades en busca de un aprendizaje de calidad.

3.4.1 ⁸CATEGORIZACIONES Y CLASIFICACIONES

La categorización de los errores hace posible centrar la atención hacia los diferentes aspectos a corregir y permite un diagnóstico más fuerte para poder ayudar a los estudiantes en sus dificultades en el aprendizaje de las matemáticas.

Son varios los investigadores que presentan una categorización y clasificación para los errores, en particular la categorización de Luis rico y J Booth es apropiada teniendo en cuenta el enfoque de esta propuesta pedagógica.

A continuación se presenta las categorizaciones y clasificaciones realizadas por dichos autores.

8

http://www.google.com/search?hl=es&q=los+errores+en+el+aprendizaje+de+matem%C3%A1tica+y+su+clasificacion&aq=f&aql=&oq=&gs_rfai=

⁹**Rico (1995)**; Ofrece una taxonomía para clasificar los errores a partir del procesamiento de la información, estableciendo categorías generales para este análisis.

1 Interpretación incorrecta del lenguaje.

Son errores debidos a una traducción incorrecta de hechos matemáticos descritos en un lenguaje simbólico a otro lenguaje simbólico distinto.

2. Errores debido a dificultades para obtener información espacial.

Las diferencias individuales en la capacidad para pensar mediante imágenes espaciales o visuales es una fuente de dificultades en la realización de tareas matemáticas. *Errores provenientes de la producción de representaciones icónicas (imágenes espaciales) inadecuadas de situaciones matemáticas.*

3. Errores debido a un aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos previos.

Incluyen todas las deficiencias de conocimiento sobre contenidos y procedimientos específicos para la realización de una tarea matemática. Errores originados por deficiencias en el manejo de conceptos, contenidos, procedimientos para las tareas matemáticas.

4. Errores debidos a asociaciones incorrectas o a rigidez del pensamiento.

La experiencia sobre problemas similares puede producir una rigidez en el modo habitual de pensamiento y una falta de flexibilidad para codificar y decodificar nueva información. Los estudiantes están abstenidos para el procesamiento de nueva información. En general son causados por la incapacidad del pensamiento para adaptarse a situaciones nuevas.

Interesan cinco subtipos:

- **Errores por perseverancia**; En los que predominan elementos singulares de una tarea o problema.
- **Errores de asociación**; que incluyen razonamientos o asociaciones incorrectas entre elementos singulares.
- **Errores de interferencia**; en los que operaciones o conceptos diferentes interfieren con otros.

⁹ www.soarem.org.ar/Documentos/23%20Engler.pdf

- **Errores de asimilación;** en los que una audición incorrecta produce faltas en la lectura o escritura. Cuando la información es mal procesada debido a fallas de percepción.
- **Errores de transferencia negativa;** a partir de tareas previas.

5. Datos mal utilizados.

Errores que se producen por alguna discrepancia entre los datos y el tratamiento que le da el alumno. Puede ser porque: se añaden datos extraños; se olvida algún dato necesario para la solución; se contesta a algo que no es necesario; se asigna a una parte de la información un significado inconsistente con el enunciado; se utilizan los valores numéricos de una variable para otra distinta; o bien, se hace una lectura incorrecta del enunciado.

6. Inferencias no válidas lógicamente.

Son los errores que tienen que ver con fallas en el razonamiento y no se deben al contenido específico

7. Errores técnicos.

Se incluyen en esta categoría los errores de cálculo, al tomar datos de una tabla, en la manipulación de símbolos algebraicos y otros derivados de la ejecución de algoritmos.

Booth (1984) describe errores comunes cometidos por los alumnos atribuidos a:

1. La naturaleza y el significado de los símbolos y las letras.

Los símbolos son un recurso que permite denotar y manipular abstracciones. El reconocimiento de la naturaleza y el significado de los símbolos para poder comprender cómo operar con ellos y cómo interpretar los resultados les permitirán la transferencia de conocimiento aritmético hasta el álgebra.

2. El objetivo de la actividad y la naturaleza de las respuestas en álgebra.

Muchos estudiantes no se dan cuenta y suponen que en las cuestiones algebraicas se les exige siempre una solución única y numérica.

3. La comprensión de la aritmética por parte de los estudiantes.

Las dificultades que los estudiantes presentan en el álgebra muchas veces no son tanto dificultades en el álgebra como problemas que se quedan sin corregir en la

aritmética. En la mayoría de los errores cometidos en aritmética, los alumnos reflejan dificultades de interiorización del concepto o falta de percepción.

4. El uso inapropiado de “fórmulas” o “reglas de procedimiento”.

Algunos errores se deben a que los alumnos usan inadecuadamente una fórmula o regla conocida que han extraído de un prototipo o libro de texto y que usan tal cual la conocen o la adaptan incorrectamente a una situación nueva. La mayoría de estos errores se originan como falsas generalizaciones sobre operadores o sobre números. Pueden ser mal uso de la propiedad distributiva, o al uso de recíprocos, cancelación, falsas generalizaciones sobre números y el uso de métodos informales por parte de los estudiantes.

3.5 ¹⁰LOS EJERCICIOS DIDÁCTICOS

En el campo de la Pedagogía y en especial en la Didáctica como disciplina pedagógica que investiga y elabora los principios más generales y cuyo objeto de estudio es el proceso de enseñanza y aprendizaje nos encontramos entonces con un primer problema ¿Se pueden considerar los ejercicios como Recursos Didácticos?

En la actualidad se considera como Recurso Didáctico todo medio, ya sea material o conceptual que se utiliza como *apoyo al proceso de enseñanza*, que generalmente es presencial, con la finalidad de facilitar o estimular el aprendizaje, ejemplos de ello, la pizarra, retroproyector, diapositivas, video, u otros y que tiene como característica esencial su incidencia en el proceso de transmisión educativa y que se concibe además con arreglo al aprendizaje, formando parte de la *comunicación* educativa, pudiéndose clasificar como: oral, escrito, audiovisual. Entonces se puede cuestionar, si los ejercicios:

1. ¿Se pueden utilizar para apoyar el proceso de enseñanza aprendizaje?
2. ¿Potencian, facilitan o estimulan el proceso de aprendizaje?
3. ¿Forman parte del proceso de comunicación instructiva-educativa?

¹⁰<http://www.monografias.com/trabajos61/clasificacion-ejercicios-recursos-didacticos/clasificacion-ejercicios-recursos-didacticos2.shtml>

4. ¿Se pueden formular en relación al propio proceso en la asimilación de conocimientos, hábitos o habilidades?

Es evidente que sobre la base de estos preceptos teóricos, *los ejercicios son Recursos Didácticos*.

En el momento de utilizar los ejercicios como Recursos Didácticos se deben considerar las particularidades y motivaciones de los estudiantes para lograr un *desempeño* activo en el proceso de ejecución y estimular su actividad reflexiva. Referente a los ejercicios como **Recursos Didácticos de menos complejidad son de gran ayuda para estimular el trabajo independiente y grupal**. *El docente debe ofrecer indicaciones precisas a los estudiantes que no logran un primer nivel de resolución según los objetivos y proponer ejercicios más sencillos. No menos importante es la formulación de ejercicios, ya que es una tarea que estimula la búsqueda de relaciones y el establecimiento de dependencias que requiere reflexionar sobre las condiciones y exigencias, así como las formas de solucionarlos.* Para lograrlo se debe proceder gradualmente y trabajar con diferentes alternativas de solución.

3.5.1 CLASIFICACIÓN DE LOS EJERCICIOS DIDÁCTICOS

Es muy importante considerar los objetivos y las *funciones* que deben cumplir los ejercicios como Recursos Didácticos.

En las diferentes formas de *organización* docente, se rigen por su sistema de principios y funciones didácticas, precisamente estas últimas garantizan el éxito del proceso docente educativo en virtud a objetivos parciales que cumplen cada una dentro del propio proceso de enseñanza aprendizaje porque, organizan los modos, acciones, modelos o pasos a seguir influyendo de forma positiva y organizada en la actividad práctica del estudiante.

Como se ha señalado cada función tiene un objetivo específico dentro del proceso de enseñanza aprendizaje, permitiendo la organización en la asimilación del material docente.

Las Funciones Didácticas son:

1. Preparación para la nueva *materia* de enseñanza.
2. Orientación hacia el objetivo.
3. Tratamiento de la nueva materia.
4. Consolidación.
5. El control.

1. Ejercicios para la preparación para la nueva materia de enseñanza.

Son todos aquellos ejercicios cuyo objetivo es determinar el *dominio* o no de premisas o condiciones previas para la asimilación de nuevos contenidos.

2. Ejercicios de orientación hacia el objetivo.

La expectativa en este tipo de ejercicio es dirigir *la atención* de los estudiantes hacia el objeto del *conocimiento*, qué van a conocer, cómo lo van a hacer y la importancia del conocimiento de lo nuevo. Es evidente que si este tipo de ejercicio se hace con el mayor rigor, debe despertar *el interés* en el estudiante hacia el objeto de estudio.

3. Ejercicios para el tratamiento de la nueva materia.

Son los ejercicios cuyo objetivo es condicionar el “descubrimiento” por los estudiantes de las características esenciales de los conceptos, juicios y los mecanismos de adquisición de otros nuevos.

4. Ejercicios de consolidación.

El objetivo de este tipo de ejercicio es concretar *el producto* de sus generalizaciones en casos particulares, debiendo para ello reconsiderar las características esenciales asimiladas con anterioridad.

5. Ejercicios de control.

Es todo aquel ejercicio cuyo objetivo es determinar en qué grado ha sido asimilado el objeto del conocimiento.

No existe mejor evidencia, aunque existen otras muchas, para estos tipos de ejercicios como Recursos Didácticos que aquellos que se utilizan en los exámenes, pruebas o test, lo que permiten controlar el logro de los objetivos propuestos.

Como puede apreciarse en cada tipo de ejercicio como Recurso Didáctico de la clasificación propuesta anteriormente, las características esenciales o distintivas

son los objetivos o funciones que cumplen en los diferentes momentos del proceso de enseñanza aprendizaje.

3.6 Herramientas didácticas

Las **herramientas didácticas** son aquellos medios de los que se sirven profesores y alumnos para facilitar el **proceso de aprendizaje**. Su objetivo es facilitar el esfuerzo intelectual necesario para comprender y retener nuevos conocimientos.

Actualmente las aulas disponen de más **medios tecnológicos** y los libros y los profesores presentan los conocimientos de formas mucho más cercanas. El aprendizaje basado únicamente en la memorización de datos ha dejado de ser lo habitual.

3.7 LA CAJA DE POLINOMIOS

¹¹ **¿QUÉ ES?** es una herramienta didáctica que se utiliza en la educación básica, la cual sirve para *ilustrar* el desarrollo de las operaciones básicas de polinomios de grado dos con coeficientes $x^2 + px + q = 0$ enteros.

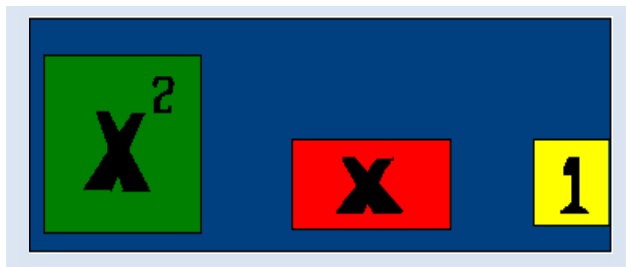
Autores: Esta herramienta didáctica fue construida por Fernando Soto, Saulo Mosquera y Claudia Gómez, ellos se basaron en la idea del matemático Al-Sabit Tabit Ibn Qurra Al-Harrani

Tabit nació en el año 826 en Mesopotamia y murió en el año 901 en Bagdad (ahora Irak), él propuso la idea de *HOMOGENIZACION* al observar que una ecuación de la forma;

¹¹ Matemática: Enseñanza Universitaria Departamento De Matemáticas Universidad del Valle Cali Colombia
pág. 85 revistaerm.univalle.edu.co/VolXIIIN1/mosquera.pdf

No adquiere una representación geométrica adecuada por la imposibilidad de sumar áreas con longitudes y con puntos.

Tabit propone utilizar una unidad de medida u para poder expresar la ecuación anterior como:



$$x^2 + pux + qu^2 = 0$$

Lo cual puede interpretarse geoméricamente como suma de áreas. En este orden de ideas, se construyen los primeros rectángulos básicos, los cuales se encuentran representados en la siguiente figura:

Los mismos se denotan como

$$x^2, \quad x, \quad 1$$

Respectivamente.

Con estos rectángulos básicos es posible representar geoméricamente un polinomio cuadrático con coeficientes enteros.

Es conveniente, para la buena lectura de este documento, recordar los objetivos y los propósitos de la propuesta pedagógica.

OBJETIVOS DE LA PROPUESTA PEDAGÓGICA

● **Objetivo General:**

Resolver operaciones con polinomios de grado mayor o igual que dos con coeficientes racionales y exponentes naturales.

Objetivos específicos:

1. Desarrollar la suma, la resta, multiplicación y división de polinomios de grado dos con coeficientes enteros, con la ayuda de *la caja de polinomios*.

2. Fortalecer el pensamiento numérico de los estudiantes de grado octavo, ilustrando el desarrollo de las operaciones básicas con polinomios de grado dos con coeficientes enteros.

PROPÓSITOS DE ESTA PROPUESTA PEDAGÓGICA;

- Motivar a los estudiantes de la Institución Educativa Julumito con actividades innovadoras basadas en lo lúdico.
- Se quiere Proporcionar el medio didáctico adecuado para que los estudiantes se apropien del desarrollo de las operaciones básicas con polinomios.
- Se espera que cuando los estudiantes hayan desarrollado las operaciones básicas de polinomios cuadráticos y coeficientes enteros con este material didáctico, tengan unas buenas bases para desarrollar el álgebra de polinomios.

Construcción de este material didáctico: En esta propuesta pedagógica se le ha proporcionado una forma estructural interesante, este ha sido un proceso que ha venido surgiendo de menos a más.



3.8 Polinomio

En matemáticas, se denomina *polinomio* a la suma de varios monomios (llamados términos del polinomio). Es una expresión algebraica constituida por un número finito de variables y constantes.

La expresión general de los polinomios que sólo tienen una variable:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

¹²Definición algebraica

Para a_0, \dots, a_n constantes en \mathbb{R} o \mathbb{C} , en cuyo caso los coeficientes del polinomio serán números con a_n distinto de cero, para $n > 0$, con n perteneciente al conjunto de los números Naturales, entonces un **polinomio**, **P**, de **grado** n en la variable x es un objeto de la forma

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x^1 + a_0 x^0.$$

El polinomio se puede escribir más concisamente usando sumatorias como

$$P(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i.$$

Las constantes a_0, \dots, a_n se llaman los **coeficientes** del polinomio. A a_0 se le llama el **coeficiente constante** (o término independiente) y a a_n , el **coeficiente principal**. Cuando el coeficiente principal es 1, al polinomio se le llama **mónico** o **normado**. Siendo x un símbolo llamado indeterminada o incógnita.

3.9 UN MODELO EDUCATIVO

Un modelo ¹³ puede entenderse como un sistema figurativo mental, gráfico o tridimensional que **reproduce o representa la realidad en forma esquemática para hacerla más comprensible**. Es una construcción o artefacto material o mental, un sistema –a veces se dice también “una estructura”– que puede usarse como referencia para lo que se trata de comprender; **una imagen analógica que permite volver cercana y concreta una idea o un concepto para su apropiación y manejo**. Un modelo se produce para poder operar transformaciones o procedimientos experimentales sobre un conjunto de situaciones o un cierto número de objetos reales o imaginados, sin necesidad de manipularlos o dañarlos, para apoyar la formulación de conjeturas o

¹² Polinomio- Wikipedia

¹³ Competencias en Matemáticas Pág. 50

razonamientos y dar pistas para avanzar hacia las demostraciones. En ese sentido, todo modelo es una representación.

4.0 ¹⁴SISTEMATIZACIÓN

Sistematizar es un proceso teórico que a partir del ordenamiento, de una reflexión crítica, de un análisis y una interpretación, pretende construir un conocimiento para así validar una experiencia, en este caso una propuesta didáctica.

4. METODOLOGÍA DE LA SISTEMATIZACIÓN

El presente documento de sistematización de la experiencia educativa “El desarrollo de las operaciones básicas de polinomios con el apoyo de la caja de polinomios”, que se llevó a cabo en la Institución Educativa Julumito. Tuvo el siguiente procedimiento;

Se estudió de diferentes textos el concepto de sistematización, la definición de sistematizar es un término que inquieta a muchos educadores y promotores (personas que organizan actividades) y existe una gran variedad de ellas escritas por distintos autores, en particular la ¹⁵definición de Oscar es apropiada para el desarrollo de este documento de sistematización.

Además se determinó el eje de la sistematización, el cual estableció como el desarrollo de las operaciones básicas de polinomios con el apoyo de la caja de polinomios.

Por otra parte se realizó la reconstrucción crítica de la experiencia pedagógica. Los registros de las sesiones de clase, la observación directa de los estudiantes en las clases, los apuntes tomados, los trabajos evaluados en cada sesión, fueron muy importantes para la reconstrucción, organización y el análisis crítico de la presente sistematización.

Aquí se retomaron los registros y se observó la cantidad de actividades (manuales, participativas, grupales y evaluaciones) desarrolladas por los estudiantes de grado octavo, esto con el fin de valorar el impacto de eficiencia de la propuesta didáctica implementada en la Institución.

Finalmente se hizo un análisis crítico de los errores cometidos por los estudiantes y su reacción frente a la situación didáctica planteada y se obtuvieron así

¹⁴ JARA, Oscar. Para sistematizar experiencias: una propuesta teórica y práctica. Pág.22

¹⁵ Definición de sistematización- referentes teóricos Pág. 22

conclusiones y experiencias para mejorar la propia práctica y no repetir procesos inadecuados que conlleven a continuos fracasos.

Con los, resultados de este proceso se escribió y organizó el presente documento de sistematización, cuyo propósito es el de darlo a conocer a personas que se interesen en trabajos en educación como lo es el plasmado en este documento.

5. RECUPERACIÓN HISTÓRICA DE LA EXPERIENCIA Y ANÁLISIS CRÍTICO DE ERRORES.

Esta es una de las partes más importantes del presente documento de sistematización, ya que se evaluará el impacto de eficiencia de la propuesta didáctica, *El desarrollo de las operaciones básicas con polinomios*, implementada en la Institución Educativa Julumito.

Para el desarrollo de este aspecto se retomaron los ejercicios, tareas y evaluaciones realizados por los estudiantes de grado octavo, además se analizaron los errores, más habituales, tomando como referencia la categorización establecida en los referentes teóricos

La propuesta didáctica (el desarrollo de las operaciones básicas de polinomios) que se fundamenta en el manejo de la caja de polinomios, se describe y analiza a continuación por temas, cada tema consta de mínimo una sesión, las sesiones realizadas en la Institución Educativa fueron nueve, cada sesión se realizó los sábados de 8am a 12pm. La propuesta comenzó el día 13 de septiembre del año 2008 y finalizó el día 11 de noviembre del mismo año.

Antes de utilizar la caja de polinomios, se consideró necesario que los estudiantes desarrollaron unas actividades primarias o básicas, las actividades fueron las siguientes;

- **Actividad de conocimientos previos (diagnostico y refuerzo)**
- **Actividad de introducción**
- **Construcción del material didáctico (tema 1)**

ACTIVIDAD DE CONOCIMIENTOS PREVIOS

Esta actividad de diagnóstico que se realizó en la Institución Educativa de Julumito, se efectuó con el propósito de considerar los conocimientos obtenidos hasta el momento por los estudiantes de octavo y analizar las falencias de los estudiantes para de esta manera determinar, si tenían los conocimientos básicos para el desarrollo de la propuesta en cuestión. Para cumplir con este objetivo se llevó un taller denominado *taller de conocimientos previos*, que contenía ejercicios acerca de las operaciones entre números reales, la representación de puntos en el plano cartesiano y potencias de números naturales, se hizo entrega de este taller quince días antes de empezar con el desarrollo de la propuesta didáctica.

$$2) \left(17 - \frac{15}{9} + 250 + \frac{25}{9} - \frac{90}{9} - \frac{1000}{4} \right)$$

A continuación se muestra el cuestionario correspondiente a la actividad mencionada.

5.1 ACTIVIDAD DE DIAGNÓSTICO

Objetivo: analizar algunos conocimientos específicos de los estudiantes de grado octavo.

• OPERACIONES ENTRE NÚMEROS REALES

Realice las siguientes operaciones:

a. 1) $\left(-4 + 5 - 87 + 6 - 9 - \frac{13}{8} + \frac{80}{2} - 160 + \frac{480}{4} \right)$,

c) $4^2 =$ _____

b. Realice las siguientes operaciones:

Base _____ exponente _____

- -5×3
- $-59 \times (-3)$
- $15 \div (-3)$
- $(-(-8 \times 2) + (8 \times (-2)))$
- $15 \left(\frac{2}{15} \right) - 8 - 2 \frac{4}{2} \left(\frac{48}{4} \div \frac{25}{5} \right)$

c. Escriba el resultado, la base y el exponente de las siguientes potencias.

a) Por ejemplo ;

$$2^3 = 8$$

Base 2, exponente 3

b) $6^4 =$ _____

Base _____ exponente _____

d. Ubicar en el plano los siguientes puntos y decir en qué cuadrante se encuentran.

(1, 1), (2, 3), (2, -3), (-2, -3), (0, 5), (5, 0), (1, 4), (-4, 0), (-3, -5).

En esta parte se presentan los errores cometidos por los estudiantes de grado octavo en la solución del taller de conocimientos previos y la aclaración realizada en los ejercicios que los estudiantes tuvieron dificultades.

5.1.1. ANÁLISIS DE ERRORES DEL TALLER DE CONOCIMIENTOS PREVIOS

A continuación se muestran algunas evidencias de los errores de los procedimientos llevados a cabo por estudiantes del grado octavo de la Institución Educativa de Julumito en la resolución del taller de conocimientos previos, de las cuales se realizará un análisis crítico de errores de acuerdo con las categorías establecidas en los referentes teóricos.

¿Cuales fueron los errores detectados?

Para el análisis de los errores, que se manifestaron en el taller de conocimientos previos, de los estudiantes de grado octavo, se tomó como base los errores tipificados por los autores Booth (1984) y Luis Rico (1995).

d) $12^2 =$ _____

Base _____ exponente _____

Operación con números reales

a) $(-4+5-87+6-9) - \frac{13}{8} + \frac{80}{2} - \frac{160+460}{4}$

$1+93-9+\frac{67}{16}+\frac{30}{4}$

$= 1+84+\frac{387}{64}$

$= 85+\frac{387}{64}$

$\neq \frac{85+387}{64} = \frac{471}{64}$

Algunos estudiantes de grado octavo no manejan la resta de números enteros cuando el mayor de los números tiene signo negativo, además multiplican los denominadores y suman los numeradores, no hacen un proceso correcto el cual es :

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd},$$

b) $\frac{17 \times 9 - 15}{9} + \frac{250 \times 9 + 25}{9} + \frac{90 \times 9 - 1000 \times 9}{36}$

$\frac{153 - 15}{9} + \frac{2250 + 25}{9} + \frac{369 - 9000}{36}$

$\frac{138}{9} + \frac{2275}{9} + \frac{8640}{36}$

$\frac{2413}{9} + \frac{8640}{36} = \frac{2413 \times 36 + 8640 \times 9}{9 \times 36}$

$= \frac{86868 + 77760}{324}$

El estudiante usa apropiadamente la regla para sumar fraccionarios, pero cambia de signo sin ninguna justificación

Estos errores se ubican en la siguiente categoría

1. Errores debido a un aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos previos.

Ya que son errores originados por deficiencias en el manejo de conceptos, contenidos y procedimientos para las tareas matemáticas.

b. En el desarrollo de este punto se notó que la mayoría de los estudiantes aplicaban la regla de los signos correctamente.

tres operaciones:

$$-5 \times 3 = -15$$

$$-59 \times (-3) = 177$$

$$15 \div (-3) = -5$$

$$(-(-8 \times 2) + (8 \times (-2))) = -0 \quad 0-32$$

$$15 \left(\frac{2}{15}\right) - 8 - 2 \frac{4}{2} \left(\frac{48}{4} \div \frac{25}{5}\right) = ?$$

Un estudiante multiplicó correctamente los factores, pero no estaba seguro del signo que le correspondía a cada uno, e infirió de acuerdo a esto dos respuestas, el estudiante falla al no asignarle al resultado el único valor válido que hay.

Este error se ubica en la siguiente categoría:

Inferencias no válidas lógicamente.

Ya que el razonamiento del estudiante falla al no dar la única respuesta válida que hay en este procedimiento.

C) los estudiantes no tuvieron problema en el desarrollo de este punto.

a) Por ejemplo ;

$$2^3 = 8$$

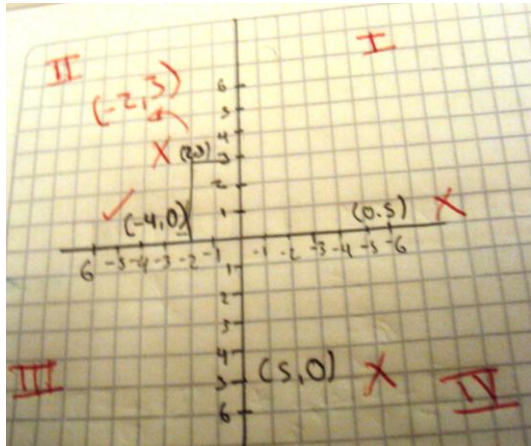
Base 2, exponente 3

b) $4^2 = 16$
Base 4 exponente 2

c) $6^4 = 1296$
Base 6 exponente 4

d) $12^2 = 144$
Base 12 exponente 2

d. Los estudiantes en el desarrollo de este punto evidenciaron que sabían cuales eran los respectivos cuadrantes del plano cartesiano, pero también se observó que no podían ubicar los puntos en el plano correctamente.



La mayoría de los estudiantes no relacionaban la abscisa y la ordenada con la primera y segunda coordenada

Este error, se ubica en la siguiente categoría:

Datos mal utilizados.

Estos errores se producen por mal uso de los datos y el mal tratamiento que le da el alumno. En este caso no se asigna los valores numéricos a la coordenada correcta, se hace una lectura incorrecta del enunciado.

Las falencias más comunes encontradas en el desarrollo de los ejercicios del taller de conocimientos previos, fueron en la suma de números enteros negativos, en la adición y la sustracción de fraccionarios y la ubicación de puntos en el plano. Las falencias examinadas, fueron corregidas con la acción de recordarles y aclararles los aspectos que eran ambiguos para ellos en ese momento.

- a. **la suma de dos números enteros**, para explicarles esto, se hicieron varios ejemplos, uno de ellos fue el siguiente: Un estudiante debe \$5.000 paga \$2.000, ¿cuanto dinero queda debiendo?, los estudiante sin dudar respondían que \$3.000, lo que simbólicamente se representó así;

$$\begin{array}{ccccccc}
 -5.000 & + & 2.000 & = & -3000 \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 \text{Debe} & & \text{Paga} & & \text{Debe}
 \end{array}$$

- b. **suma de fracciones**, para explicarles este procedimiento sólo se realizó la acción de recordarles la regla y resolver unos ejemplos.



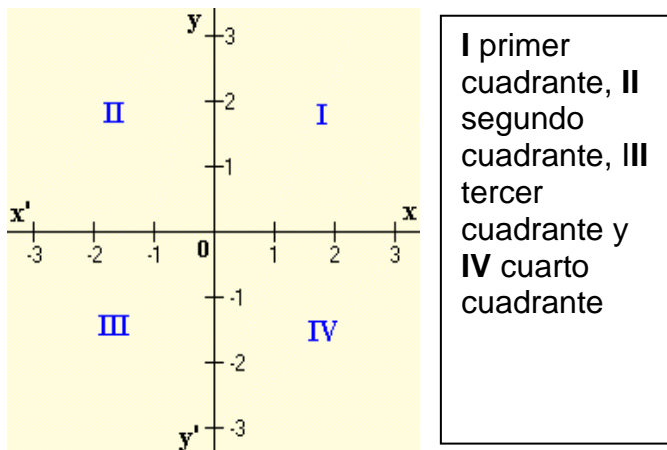
La suma de fracciones se desarrolla por la siguiente regla.

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}, \quad b \neq 0, \quad d \neq 0.$$

En el ejercicio **d** se hizo una breve introducción sobre el plano cartesiano y se dieron algunos ejemplos.

d. PLANO CARTESIANO¹⁶

Un sistema de ejes coordenados se forma cuando dos líneas rectas se intersecan. Si las rectas son perpendiculares entre sí, se tiene un sistema de ejes coordenados rectangulares o, denominado también, sistema de coordenadas cartesianas en honor a su creador, el matemático y filósofo francés René Descartes (1596-1650).



EJEMPLOS;

Ubicar en un plano cartesiano los siguientes puntos:

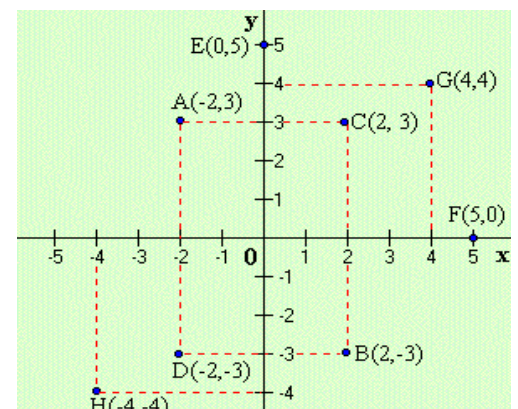
(-2, 3), (2, -3), (2, 3), (-2, -3), (0, 5), (5, 0), (4, 4), (-4, -4)

Solución:

Para facilitar su referencia, nombramos los puntos:

¹⁶ Plano cartesiano -Wikipedia

Universidad del Cuca – FACNED- 2010 sistematización de la desarrollo de las operaciones básicas con polinomios.



A (-2, 3), B (2, -3), C (2, 3), D (-2, -3),

E (0, 5), F (5, 0),

G (4, 4), H (-4, -4).

ACTIVIDAD DE INTRODUCCIÓN

Objetivo: Utilizar la representación gráfica de rectángulos.

En esta actividad se quiere que los estudiantes representen **la operación producto y sus propiedades con respecto a la suma, en forma gráfica para hacerla más comprensible**, con el propósito de usarse como referencia, para lo que se va enseñar más adelante (el producto de polinomios utilizando la caja de polinomios).

Ejemplos;

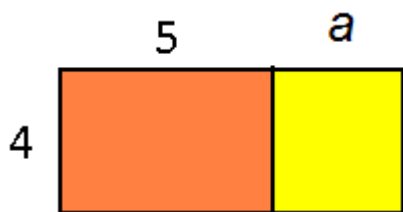
- 4×5 podemos representarlo como el área del rectángulo de dimensiones 4 y 5.



- $4 \times b$ podemos representarlo como el área del rectángulo de dimensiones 4 y b



- Se realizan las aclaraciones en el caso en que el valor de b sea igual o menor que cuatro
- Observar que $4 \times (5 + a)$ se puede representar gráficamente como.



Ejercicios¹⁷. Representar gráficamente

1. $4 \times (5 + b)$
2. $a \times (c + d)$
3. $(x + 3) \times (y + 5)$
4. $(3 + a) \times (4 + x)$
5. $(x + y) \times (a + b)$

Finalizada esta sesión se puede concluir que el desarrollo de este trabajo permitió fortalecer los conocimientos previos, lo que permitió avanzar a un nivel de competencia más complejo, como el desarrollo de las operaciones básicas de polinomios. Esto era lo que se buscaba para poder implementar adecuadamente la propuesta didáctica.

Tema 1: REPRESENTACIÓN DE POLINOMIOS.

- Objetivo: Representar polinomios de grado dos con coeficientes enteros con la caja de polinomios.
- **Actividad 1. Construcción del material didáctico**

Materiales:

1. Cartón paja
2. Vinilos
3. Pinceles
4. Regla y lápiz.

¹⁷ Ejercicios de preparación para la nueva materia de enseñanza.(referentes teóricos pagina 16)

Estos materiales fueron solicitados a los estudiantes de grado octavo quince días antes de empezar con el desarrollo de la primera sesión.

Modelo a seguir una plancha de 35cm de ancho por 40cm de largo en ella debe estar dibujado un plano cartesiano cuyos cuadrantes 1 y 3 se diferenciarán por el color de los cuadrantes 2 y 4. fig1.

Además hay unas fichas que permiten representar simbólicamente a x^2 , x y la constante 1 fig.2, estas fichas se construyeron en madera (balso) se hicieron 100 de x^2 , 100 de x y 150 de 1, las fichas fueron elaboradas antes de comenzar con el desarrollo de la propuesta didáctica, con el fin de ganar un poco de tiempo.



Fig 1

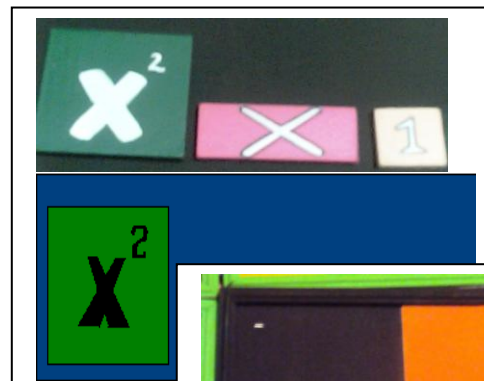
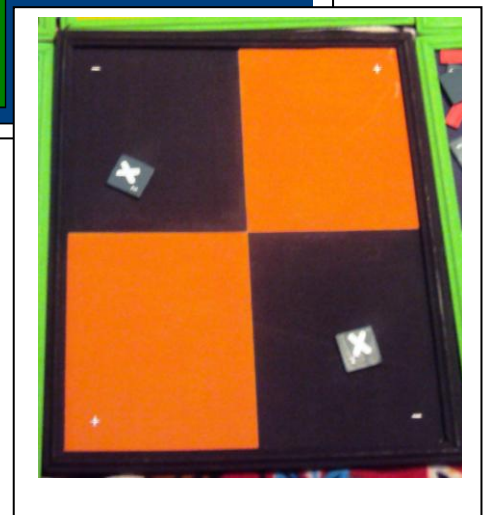


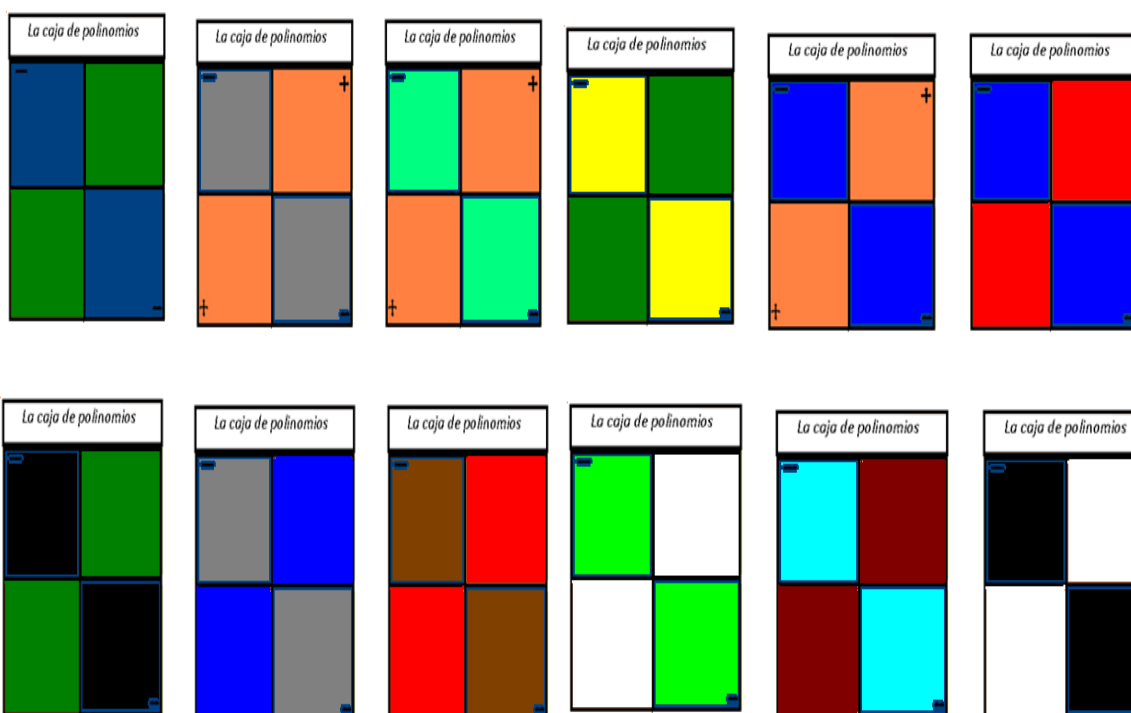
Fig 2

- Cuadrantes 1 y 3 (positivos)
- Cuadrantes 2 y 4 (negativos)





La mayoría de los estudiantes habían llevado los materiales pedidos, la construcción del material didáctico fue el *primer aspecto de calificación numérica*. En total se construyeron 12 cajas de polinomios.

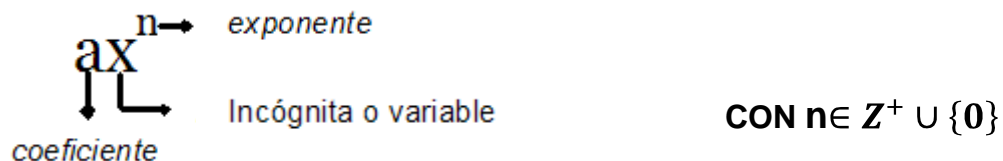




Ahora bien, mientras los estudiantes desarrollaban esta actividad, se explicó que se iban a desarrollar las operaciones básicas de la aritmética con polinomios cuadráticos de coeficientes enteros con este material didáctico, y con esto se esperaba que tuvieran buenas bases para desarrollar el álgebra de polinomios con coeficientes reales y exponentes enteros.

Actividad 2: En esta actividad se explicó como determinar el grado de un polinomio, las clases de polinomios según el número de términos que tengan y las partes que componen a un monomio.

Partes de un monomio

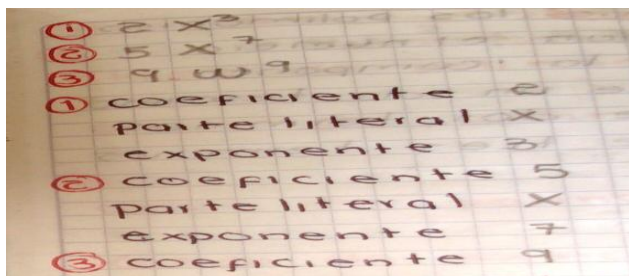


Luego se explicó, con ejemplos, como determinar el grado y la clase de un polinomio, según el número de términos que lo componen, seguidamente, se les planteó una actividad para reforzar lo aprendido (*Ejercicios de consolidación*).

Actividad.

1. *Escriba las partes que componen a los siguientes monomios.*

1. $2x^3$
2. $5x^7$
3. $9w^9$

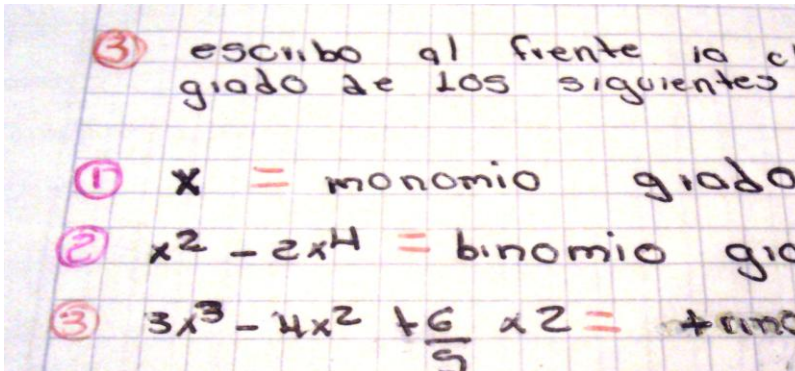


4. y^m

2. Escriba al frente la clase y el grado de los siguientes polinomios.

- x
- $(x^2 - 2x^4)$
- $(3x^3 - 4x^2 + \frac{6}{5}x^2)$
- $(424x^5 + 5x^3 + 4x^9 + 2)$




La mayoría de los estudiantes sólo tuvieron problema en determinar el grado y el coeficiente del monomio x , algunas estudiantes afirmaron que este monomio no tenía grado ó que el grado de éste era cero.



Según **el análisis de errores** este error puede situarse en dos categorías de asimilación y de asociación, ya que incluye asociaciones incorrectas entre elementos singulares y además la falta de atención produjo una falta en la lectura y escritura.

Actividad 3: Representación de un polinomio cuadrático, con *coeficientes enteros utilizando el material didáctico.*

Nota: se explicará brevemente al lector el procedimiento para operar con la caja de polinomios, con el propósito de que examine los errores cometidos por los estudiantes de grado octavo y la categoría donde se ubican.

Para esta actividad se repartió a cada estudiante 7 fichas de , 7 fichas de  y 10 fichas de  (se repartía de más fichas cuando no asistían algunos estudiantes) el procedimiento para poder representar polinomios de grado dos con coeficientes enteros con este material didáctico fue el siguiente; los monomios

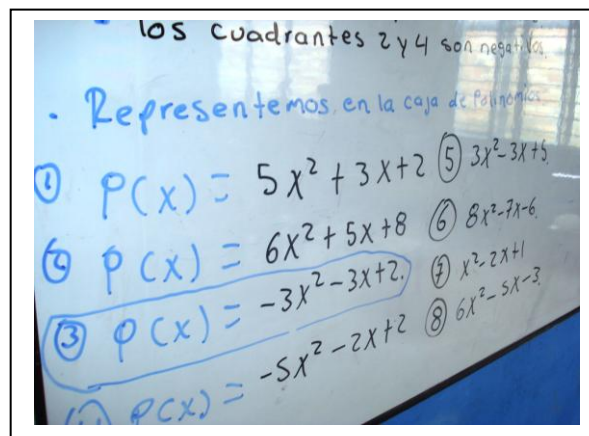
con coeficientes negativos se ubican en los cuadrantes segundo o tercero que son cuadrantes negativos y los monomios con coeficientes positivos van en los cuadrantes 1 o 3, algunos de los ejemplos que desarrollaron fueron.

Ejemplos:

1. $2x^2 + 3x + 4$
2. $-3x^2 - x - 3 + x + 1$

1) $2x^2 + 3x + 4$.Figura (a)

El procedimiento es el siguiente: se ubican las fichas en los cuadrantes positivos cuadrantes 1 o 3, no importa si se ubican en un solo cuadrante o en ambos.



2). $-3x^2 - x - 3 + x + 1$. Figura (b), de igual manera se ubican las fichas en los cuadrantes negativos (2 o 4) y positivos (1 o 3).

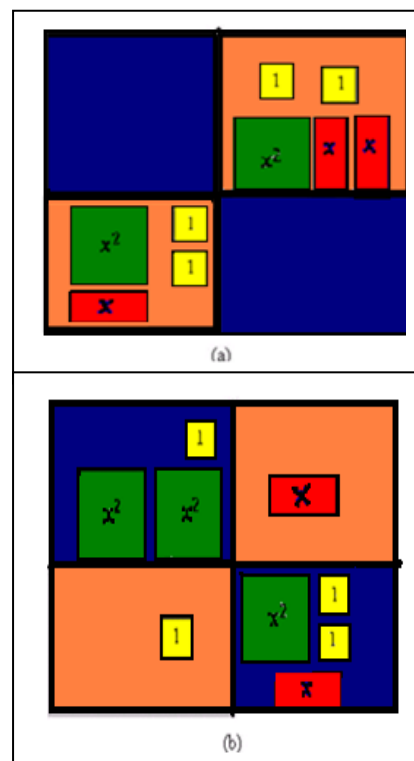
Esta es la forma de representar un polinomio cuadrático con este material didáctico.

Luego se propusieron los siguientes ejercicios.

Ejercicios de consolidación¹⁸; Represente los siguientes polinomios:

1. $6x^2 + 3x - 5$
2. $-4x^2 + 5x - 7$

En principio, sólo se pensaba desarrollar estos dos ejercicios, pero en realidad se desarrollaron 8 ejercicios, ya que algunos estudiantes terminaban muy pronto y otros tenían algunas dificultades, como por ejemplo, algunos estudiantes ubicaban las fichas en los cuadrantes positivos, sin tener en cuenta que el signo de los monomios era negativo.



¹⁸ Clasificación de los ejercicios didácticos



Además unos estudiantes representaron bien el primer polinomio, pero representaron el siguiente sin retirar las fichas que representaban al anterior polinomio.

Teniendo en cuenta el análisis crítico de errores de acuerdo con las categorías establecidas en los referentes teóricos estas falencias se ubican en las siguientes categorías.

No colocar las fichas en el cuadrante adecuado es un error que se ubica en estas categorías:

1. Errores debido a dificultades para obtener información espacial.

Son Errores provenientes de la producción de representaciones icónicas (imágenes espaciales) inadecuadas de situaciones matemáticas.

2. Datos mal utilizados.

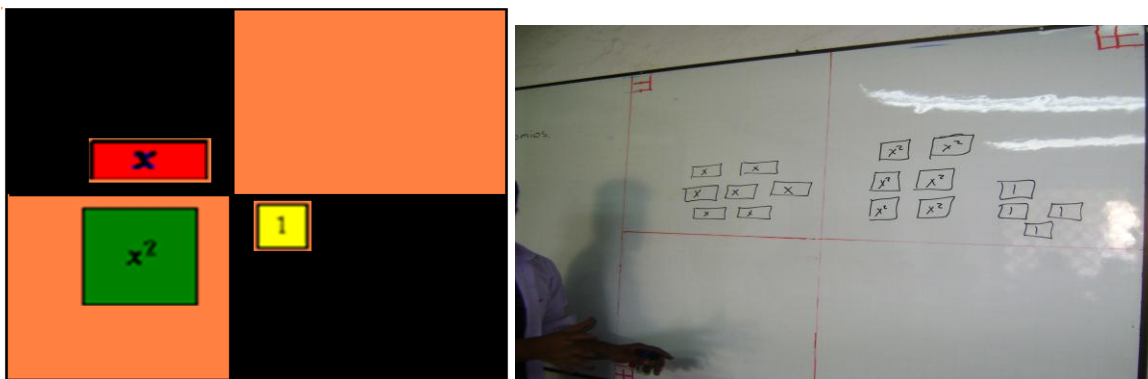
Errores que se producen por alguna discrepancia entre los datos y el tratamiento que le da el estudiante. Puede ser porque: se hace una lectura incorrecta del enunciado.

No retirar las fichas con las cuales se representa un polinomio, para representar el siguiente polinomio es un error que se sitúa en la siguiente categoría:

Errores de asimilación; Cuando la información es mal procesada debido a fallas de percepción.

Representación de polinomios.

Luego se les dio la representación en la caja de polinomios y se pidió que escribieran su representación algebraica.

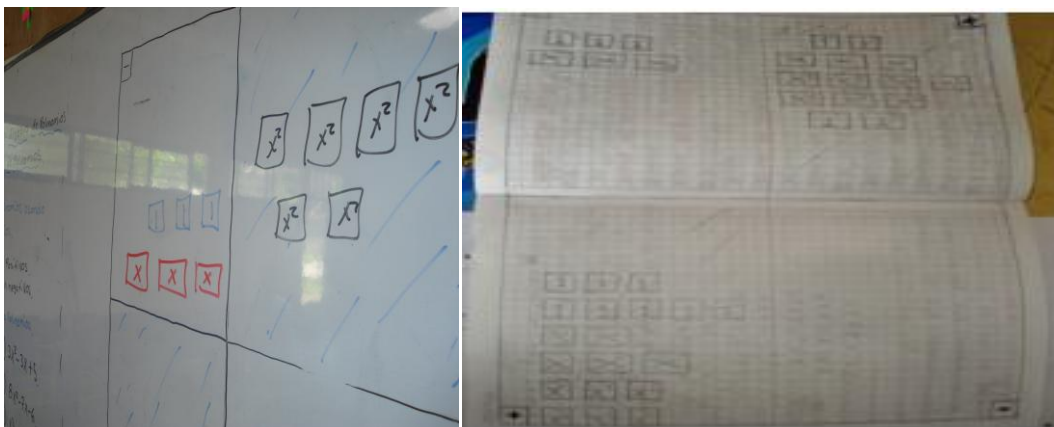


Aunque los estudiantes no tuvieron problema con esta actividad se les dijo que debían tenerla muy presente porque iba a hacer fundamental en el desarrollo de las posteriores actividades.

Tema 2. Suma y resta de polinomios de grado dos con coeficientes enteros.

Objetivo: Sumar y Restar polinomios utilizando la caja de polinomios.

Suma de polinomios: Para alcanzar este objetivo se desarrollaron unos ejemplos en el tablero y algunos estudiantes que no tenían la caja de polinomios (no asistieron a la sesión anterior) la dibujaron en su cuaderno.



Adición: para calcular $p(x) + q(x)$ se realizará el siguiente procedimiento, se utilizan los cuadrantes segundo y tercero para representar sobre ellos el **polinomio** $p(x)$, mientras que el **polinomio** $q(x)$ se escribe en los cuadrantes primero y cuarto, a continuación se *retiran las fichas que algebraicamente sumen cero*.

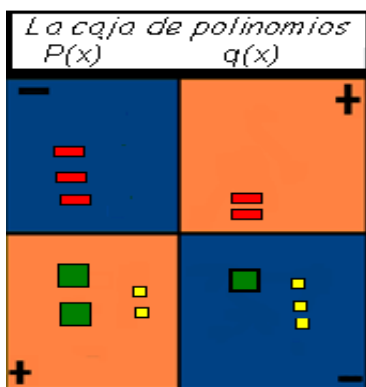
El análisis de errores de este procedimiento se presentará junto con el análisis de errores del procedimiento de sustracción.

Los ejemplos fueron los siguientes.

Sumar

1. $P(x) = 2x^2 - 3x + 2$ con $q(x) = -x^2 + 2x - 3$
2. $P(x) = -3x^2 + 4x - 2$ con $q(x) = 3x^2 + 4x + 2$.
3. $P(x) = 5x^2 + 3x + 1$ con $q(x) = -5x^2 - 2x$.

A continuación se muestra la suma de los polinomios $p(x)$ y $q(x)$ del ejemplo número 1,



Lo que es equivalente a:



Y que simbólicamente es representado por $x^2 - x - 1$

Este ejemplo al igual que los otros dos, también se resolvió algebraicamente, relacionándolos, con el proceso que se llevó a cabo en la caja de polinomios, se mostró que se cancelan las fichas de igual color de igual forma y de igual exponente que tengan signo distintos (que estén ubicadas en cuadrantes distintos) y se deja el signo según sea el cuadrante donde queden las fichas.

Para verificar que los estudiantes habían entendido lo anteriormente mencionado se les propuso algunos ejercicios. Es importante mencionar que los estudiantes debían desarrollar los ejercicios con la caja de polinomios, en el cuaderno o en el tablero, (como lo hicieron muchos) y luego debían desarrollarlos algebraicamente, ya que no se busca de ninguna manera que los estudiantes sólo trabajen con la caja de polinomios, por el contrario se quiere que poco a poco dependan menos de ella.



Sumar los siguientes polinomios;

1. $P(x) = -4x^2 + 2x + 3$ con $q(x) = 5x^2 - 3x - 5$.
2. $P(x) = 5x^2 - 3x + 1$ con $q(x) = -5x^2 - 2x$
3. $P(x) = 2x^2 + 3x - 3$ con $q(x) = 4x^2 - 4 + 3$



Resultado del ejercicio número 1. $(x^2 - x - 2)$. La alumna resuelve primero el ejercicio en la caja de polinomios, y luego lo desarrolla algebraicamente en el tablero.

- **Sustracción:** para calcular la diferencia $p(x) - q(x)$ se *hace de manera* análoga a la adición, lo único diferente en este caso es que, las fichas correspondientes al sustraendo, en este caso el polinomio $q(x)$, que se ubicaban en los cuadrantes primero y cuarto, se trasladan a los cuadrantes segundo y tercero respectivamente, es decir; cambian de signo todos los monomios que representan al polinomio $q(x)$. Luego, como en la suma, se retiran las parejas de fichas que sumen ceros.

Para alcanzar este objetivo se desarrollaron unos ejemplos

Restar: $p(x) - q(x)$ si

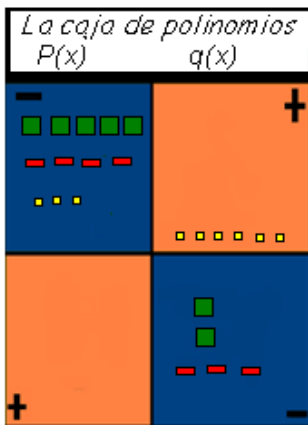
$$1. P(x) = -5x^2 - 4x - 3 \quad y \quad q(x) = -2x^2 - 3x + 6.$$

$$2. P(x) = 6x^2 + 2x - 1 \quad y \quad q(x) = -2x + 1$$

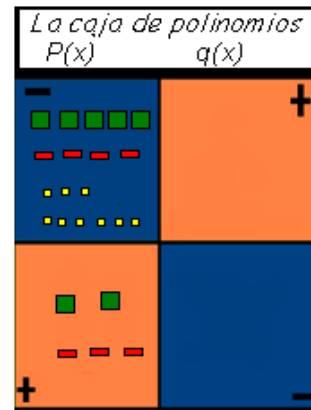
$$3. P(x) = 2x^2 - 3 \quad y \quad q(x) = 4x^2 - 4x$$

El ejemplo número uno se desarrolló de la siguiente manera:

Primero se dibujó una caja de polinomios en el tablero y se representaron los polinomios $p(x)$ y $q(x)$, como se realizó en la suma. En las siguientes figuras se observa de manera más clara.



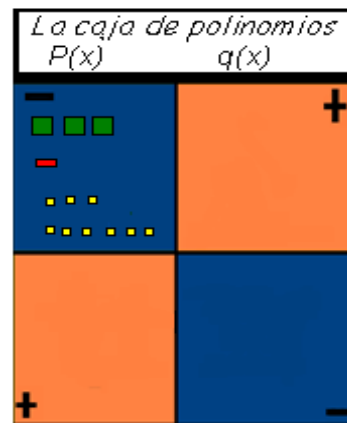
Luego las fichas correspondientes al sustraendo $q(x)$ que se ubicaban en los cuadrantes primero y cuarto, como se puede ver en la figura anterior, se trasladan a los cuadrantes segundo y tercero respectivamente, es decir se les cambia el signo, la representación queda así:



Luego, se procede a retirar las fichas que algebraicamente sumen cero como se hizo en la suma, el resultado está al frente.

Algebraicamente es representado como:

$$-3x^2 - x - 9$$



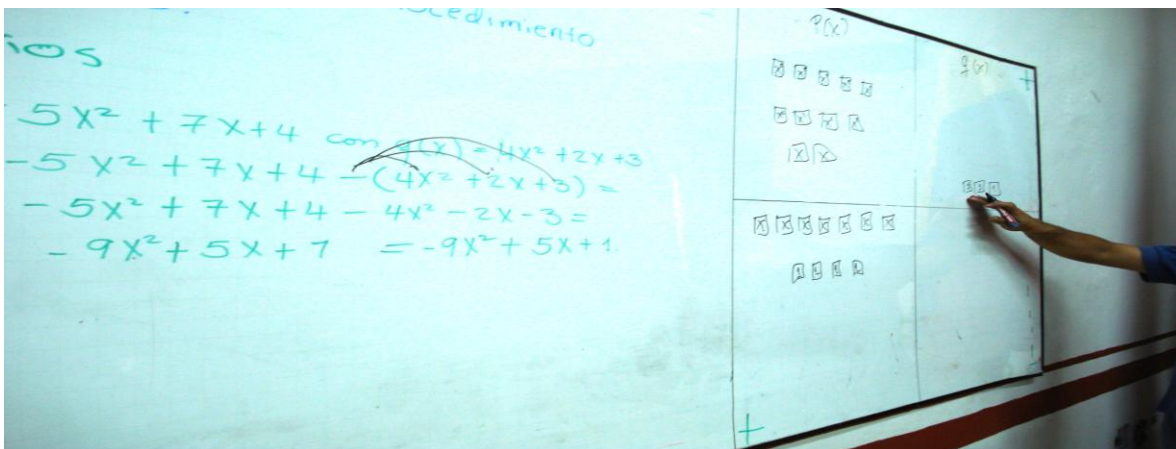
Los ejercicios de control¹⁹, propuestos fueron los siguientes:

Actividad. Restar los siguientes polinomios $p(x) - q(x)$ si:

- $P(x) = -x^2 + x - 2.$ $q(x) = 3x^2 + 4x + 2.$
- $P(x) = 5x^2 - 3x + 1.$ $q(x) = -5x^2 - 2x.$
- $P(x) = -x^2 - 2x - 3.$ $q(x) = -2x^2 - x + 2.$
- $P(x) = 4x^2 + 5x - 1.$ $q(x) = -5x^2 - 2x + 5.$

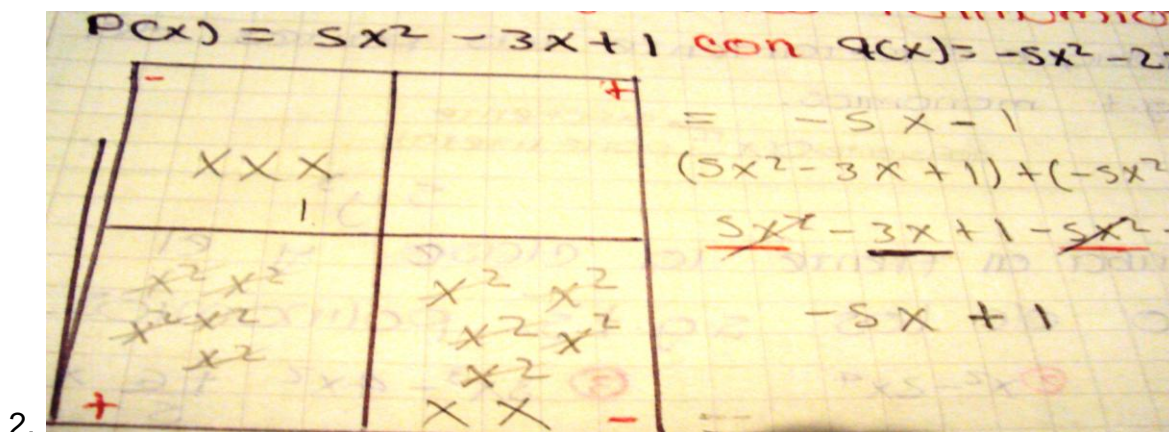
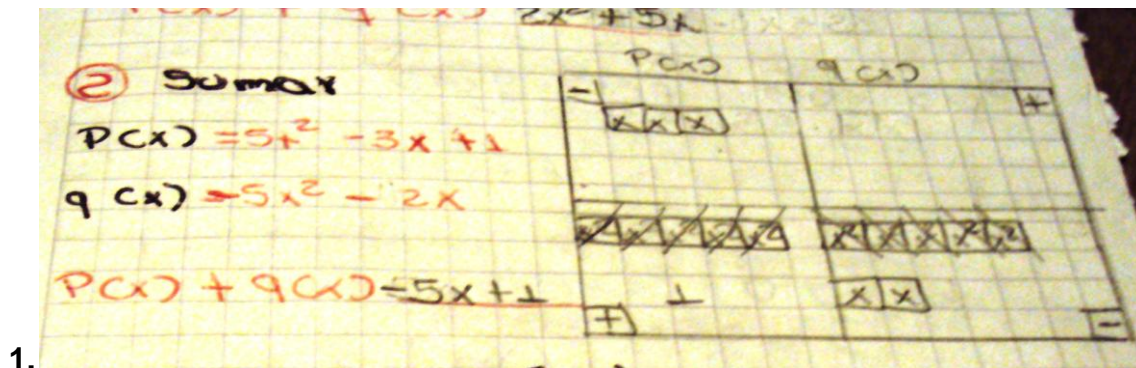
¹⁹ Referentes teóricos clasificación de los ejercicios didácticos.

Los estudiantes debían desarrollar los ejercicios con la caja de polinomios, en el cuaderno o en el tablero, (como lo hicieron muchos) y luego debían desarrollarlos algebraicamente.



Se presenta a continuación algunos de los ejercicios resueltos por los estudiantes de grado octavo.

Ejercicio número 2, actividad. Suma de polinomios.



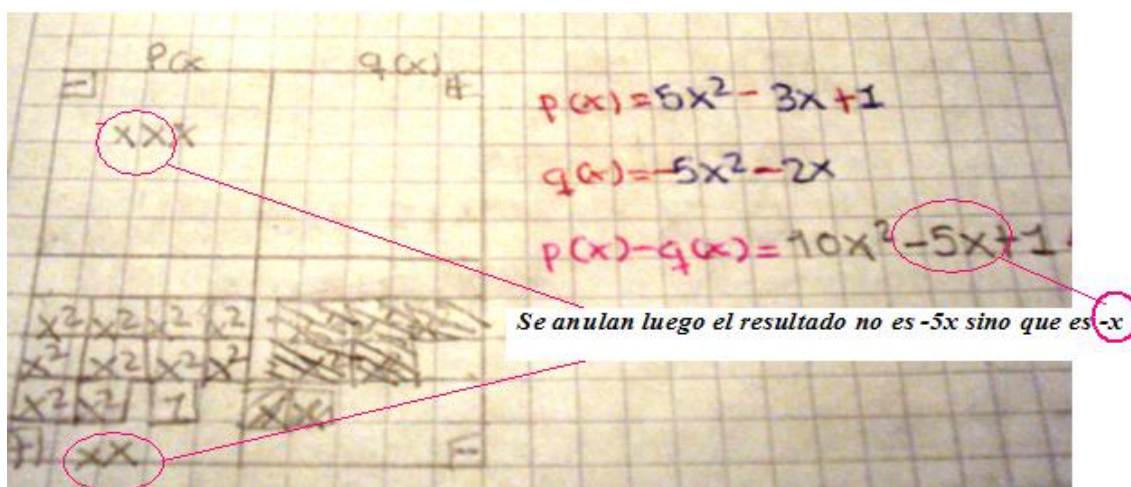
En la evidencia número uno, se observa el correcto procedimiento que el estudiante le proporciona al ejercicio, en la segunda evidencia el estudiante no representa bien el polinomio $P(X)$ ya que ubica la ficha de 1 en un cuadrante negativo, realiza el procedimiento de cancelación adecuadamente, y aunque realiza bien el procedimiento algebraico no corrige el error cometido en la caja de polinomios. Este error se ubica en la siguiente categoría;

Datos mal utilizados.

Ya que el estudiante se olvida de un dato necesario para la solución del ejercicio.

Los errores en el desarrollo de estos ejercicios, fueron pocos, y también se ubican en la categoría mencionada anteriormente.

Actividad; Resta de polinomios.



En este ejercicio los polinomios $p(x)$ y $q(x)$ son los mismos que se propusieron en la actividad de suma, se quería que los estudiantes observaran la diferencia entre estos procesos. En la evidencia se muestra que el estudiante representa bien los polinomios, traslada las fichas que representan al polinomio $q(x)$ donde corresponde, pero no cancela las fichas que suman ceros, en este caso las dos x que están en el cuadrante número dos (cuadrante negativo) con las dos x que se encuentran en el cuadrante número tres (cuadrante positivo).

Este error se ubica en las siguientes categorías.

1. Errores debido a dificultades para obtener información espacial.

Ya que la capacidad del estudiante para pensar mediante imágenes espaciales o visuales fueron fuente de dificultades en la realización del ejercicio.

2. Errores de asimilación.

Ya que la información fue mal procesada debido a fallas de percepción.

1. Errores debido a un aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos previos.

Ya que el error se originó por deficiencias en el manejo de conceptos y, procedimientos previos.

Los ejercicios de suma y resta de polinomios de grado dos con coeficientes enteros, desarrollados por los estudiantes con la caja de polinomios tuvieron su respectivo desarrollo algebraico en el tablero, algo inusual fue la participación de los estudiantes que tenía un bajo nivel de disciplina, lo que pareció interesante para los demás compañeros de clase.



Lo que se ve en las fotos es lo siguiente; se propuso al finalizar la sesión un ejercicio que no se había trabajado con ellos, hasta el momento, este ejercicio era para que lo pensarán en casa, el ejercicio fue le siguiente;

Sumar y restar.

$p(x) + q(x)$ y $p(x) - q(x)$ si:

$$p(x) = -33x^{12} - 5x^2 - 21x^7 + 15x - 8. \quad q(x) = 33x^{12} + 30x^7 - 15x$$

Aunque todavía no se desarrolla suma y resta de polinomios con coeficientes racionales, se empieza a trabajar estos algoritmos con polinomios de coeficientes enteros más grandes y de exponentes enteros positivos, esto se hizo para que el

estudiante haga una relación aunque imaginaria del posible desarrollo que se haría utilizando la caja de polinomios.

Tema 3. Suma y Resta de polinomios de grado mayor o igual que dos con coeficientes enteros.

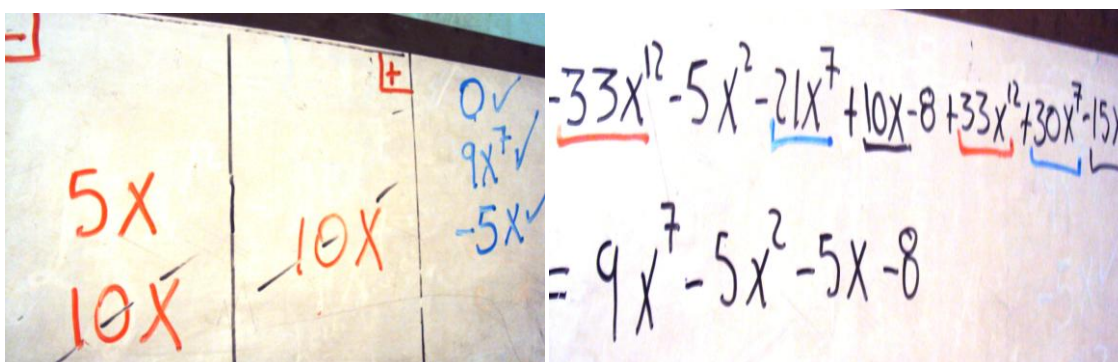
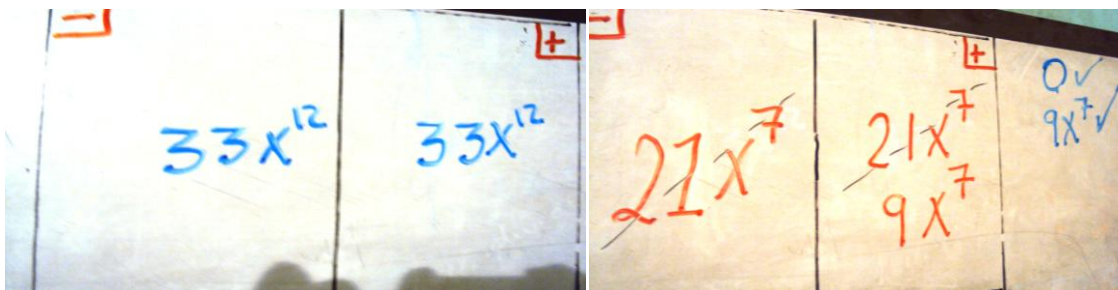
Objetivo; Realizar las operaciones de suma y resta de polinomios de coeficientes enteros y de exponentes naturales.

Se inicio la sesión desarrollando el ejercicio propuesto en la clase anterior.

Ejercicio. Sumar y Restar

$$P(x) = -33x^{12} - 5x^2 - 21x^7 + 15x - 8 \quad \text{con} \quad q(x) = 33x^{12} + 30x^7 - 15x$$

La caja de polinomios fue un buen referente para explicación de este ejercicio, ya que los estudiantes entendían que era como tener 33 fichas de x^{12} en un cuadrante negativo y 33 fichas de x^{12} en un cuadrante positivo, llegando a la conclusión de que estas fichas sumaban ceros, es decir se tomó cada monomio y se realizó la siguiente tabla:



Para la resta de los polinomios $p(x)$ y $q(x)$ se realizó la siguiente aclaración, los monomios que representan al sustraendo en este caso el polinomio $q(x)$ se

ubican en el otro cuadrante, es decir, si están el cuadrante positivo pasan al negativo y viceversa, luego se realiza la suma y se toma el signo del cuadrante donde estén ubicadas.

Esta explicación se hizo en el desarrollo del primer ejemplo, después sólo se nombraba la cancelación de los monomios correspondientes, se requería de la explicación cuando el estudiante no tenía claro el procedimiento.

A continuación se presentan ejercicios cuyo objetivo es condicionar el “descubrimiento” de los estudiantes, es decir; los estudiantes ya tienen las características esenciales de los conceptos y los procedimientos para la solución de los ejercicios²⁰, falta ver cual es el procedimiento que adquieren ellos para la solucionarlos.

- **Actividad:** organice de mayor a menor exponente los polinomios y realice las siguientes operaciones:

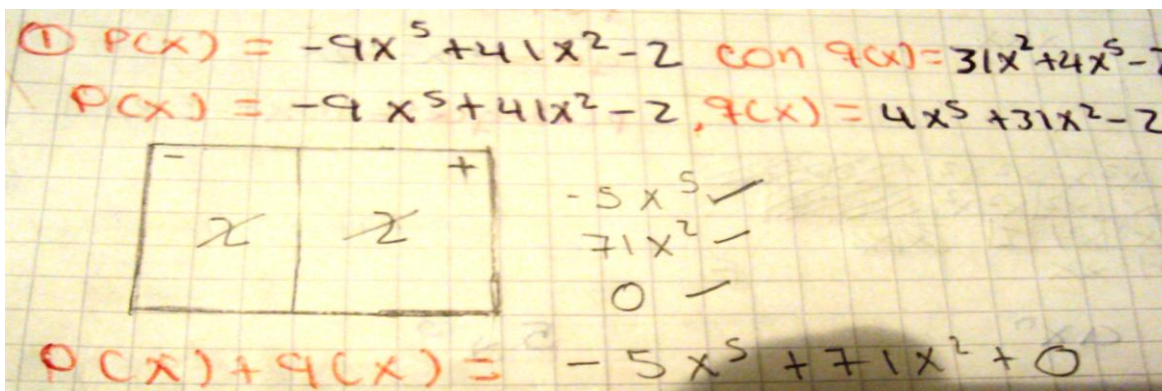
Sumar

1. $P(x) = -9x^5 + 41x^2 - 2$ con $q(x) = 31x^2 + 4x^5 - 2$.
2. $P(x) = 52x^7 - 3x + 10$ con $q(x) = -15x^7 - 12x$.

Restar

1. $P(x) = 12x^2 + 3x - 3$ con $q(x) = -14x^2 - 4x + 3$
2. $P(x) = -3x^{12} - 5x^3 - 2$ con $q(x) = -x^{12} - 2x^3 - 1$.

Evidencias



²⁰ Ejercicios para el tratamiento de la nueva materia - Referentes teóricos. Pág. 17

$$\begin{aligned}
 p(x) &= 12x^2 + 3x - 3 & q(x) &= -14x^2 - 4x + 3 \\
 p(x) - q(x) &= 12x^2 + 3x - 3 - (-14x^2 - 4x + 3) \\
 &= 12x^2 + 3x - 3 + 14x^2 + 4x - 3 \\
 &= 16x^2 + 7x + 6
 \end{aligned}$$

Suma.

En la evidencia número uno se observa que el estudiante resuelve el ejercicio usando una tabla para realizar las operaciones de los monomios correspondientes a los polinomios $p(x)$ y $q(x)$, se espera que el estudiante después de la solución de unos cuantos ejercicios realice la operación sin utilizar esta tabla.

Resta.

En la segunda evidencia, el estudiante no utiliza la tabla y aunque la mayoría de los procedimientos están bien hechos comete un error al restar dos números enteros negativos.

Este error se ubica en la siguiente categoría

La comprensión de la aritmética por parte de los estudiantes.

Las dificultades que los estudiantes presentan en el álgebra muchas veces son problemas que se quedan sin corregir en la aritmética. En la mayoría de los errores cometidos en aritmética, los alumnos reflejan dificultades de interiorización del concepto o falta de percepción.

Después de resolver unos ejemplos de suma y resta de polinomios con números fraccionarios se propusieron los siguientes ejercicios:

Sumar: $p(x) + q(x)$ si:

$$1. P(x) = \frac{4}{2}x^5 + \frac{14}{2}x^2 - 1. \quad q(x) = \frac{1}{2}x^5 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{5}{2}$$

$$2. P(x) = 5x^7 - \frac{4}{3}x^4 + 10. \quad q(x) = -15x^7 - \frac{5}{3}x^4$$

Restar: $p(x) - q(x)$ si:

$$3. P(x) = 12x^9 - 2x - 3. \quad q(x) = \frac{-25}{3}x^9 - 3x$$

$$4. P(x) = 2x^2 + x^6 - 1. \quad q(x) = 5x^{12} - \frac{4}{3}x^6 + 5$$

En el desarrollo de estos ejercicios, se notó un buen desempeño por parte de los estudiantes, no obstante algunos estudiantes no recordaban la manera de trabajar suma y resta de números fraccionarios, por lo que nuevamente se hizo un breve repaso (se había hecho en la actividad del taller de conocimientos previos) de esta manera se dio por terminada esta sesión.

Los errores cometidos por los estudiantes en el desarrollo de los ejercicios propuestos anteriormente, se ubican en la siguiente categoría:

La comprensión de la aritmética por parte de los estudiantes.

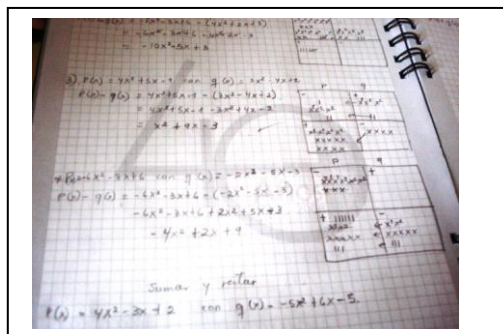
Las dificultades que los estudiantes presentan en el álgebra muchas veces son problemas que se quedan sin corregir en la aritmética.

A continuación hay una tabla que muestra las calificaciones obtenidas por los estudiantes en el desarrollo de suma y resta de polinomios, la tabla de calificaciones es la siguiente:

NOMBRE	SUMA DE POLINOMIOS	RESTA DE POLINOMIOS
Licet K. Guzmán	+ + +	+ +
Dayani F. Guasca	+ + +	+ + +
Anny L. Rivera	+ +	+ +
Jessica A. Silva	+ +	+
Johana . Silva	+ +	+ +
Briyi Tatiana Ortiz	+ + +	+ +
Karen T. Alvear	+ + +	+ +
Miriam L. Escobar	+ +	+
Liseth T. Valdes	⊕ +	+ +
Karolina Velasco R.	+ + + +	+ + +
Edith Marisol CH.	+ + + + +	+ ⊕ +
Lesly D. Bolaños	+ + ⊕ + +	+ + + ⊕
Edgar E. Gonzales	+ +	+ + +
Héctor Jesús Guasca	⊕ ⊕ +	+ ⊕ + +
Maicol S. Herrera	⊕ + +	+ + +
Estiven A. Medina	+ +	+
Sandali Chantre M.	⊕ + + +	+ + + +
Danier Yesid Reyes	+ + + +	+ + +
Johnny Smith Herrera	+ + +	⊕ + + +
Didier Rubén Obando	+ ⊕ +	+ + +

Cuando no aparece el signo + no es porque el estudiante o la pareja de estudiantes, no haya resuelto el ejercicio, sino porque no lo hicieron a tiempo y no se tenía la certeza de si en realidad lo habían resuelto solos, o porque no pudieron resolverlo adecuadamente. También hay un símbolo ⊕ que significa que el estudiante entendió y resolvió de manera rápida y eficiente el ejercicio.

Finalizada esta explicación de suma y resta de polinomios, se observa que los estudiantes fortalecieron el ²¹**Uso de representaciones geométricas para resolver ejercicios en matemáticas y la importancia de trabajar con Recursos Didácticos**, en este caso una herramienta didáctica (la caja de polinomios) y ²² ejercicios de tipo I, II, III y IV.



En el desarrollo de estos temas se propusieron ejercicios de menor a mayor complejidad, para de esta manera estimular el trabajo individual y grupal, se formularon indicaciones precisas a los estudiantes que no logran un primer nivel de resolución según los objetivos propuestos en cada una de las sesiones y se propusieron ejercicios más sencillos para que el estudiante gradualmente llegue a la solucionar los ejercicios más complejos.

Con la ayuda de estos Recursos Didácticos también se había estructurado la explicación sobre el proceso algorítmico para el desarrollo de multiplicación y división de polinomios, a continuación se muestra que, para la explicación sobre la multiplicación de polinomios fue un poco más complicado en comparación a los procesos de suma y resta de polinomios, pero se llevó a cabo satisfactoriamente, con respecto a la división no se pudo llevar a cabo esta estructura de explicación.

Tema 3; MULTIPLICACIÓN DE POLINOMIOS CON LA CAJA DE POLINOMIOS

Objetivo; Multiplicar polinomios de grado dos con coeficientes enteros usando la caja de polinomios.

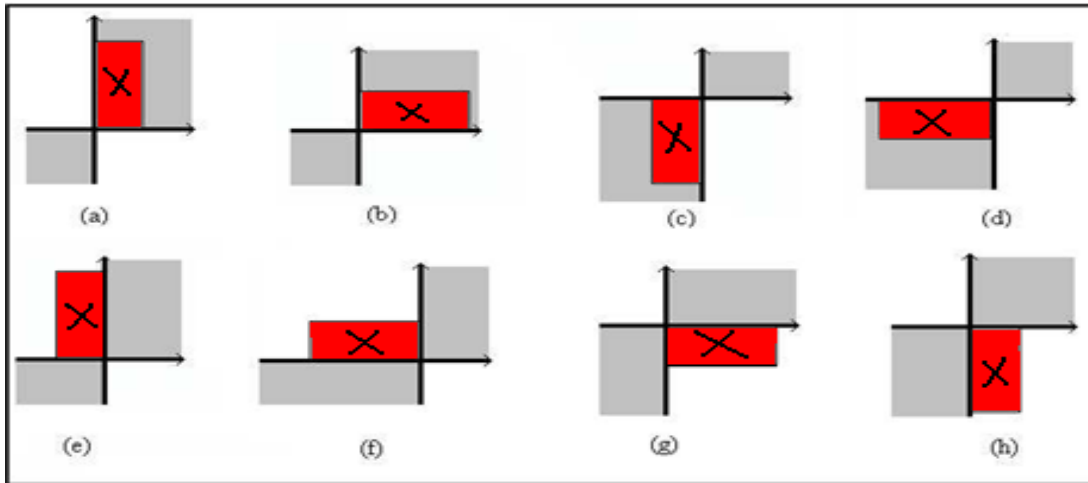
Para el desarrollo de este tema fue necesario desarrollar la siguiente actividad

- **Lectura de gráficos:** Se debe tomar la dimensión de la base en el eje x y luego la dimensión de la altura en el eje y.

²¹ pensamiento espacial y sistemas geométricos

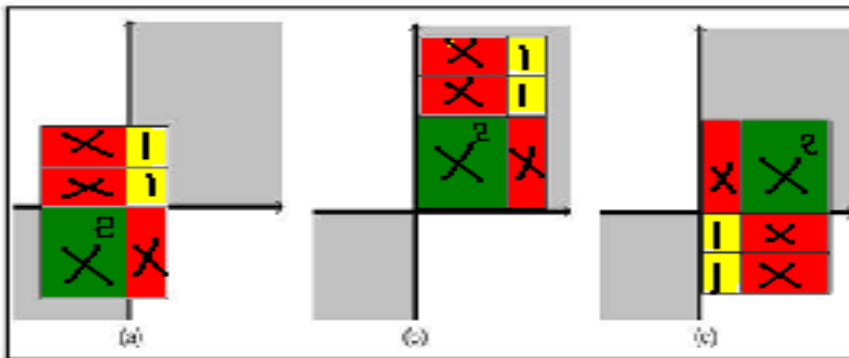
²² Referentes teóricos.

Ejemplos y ejercicios

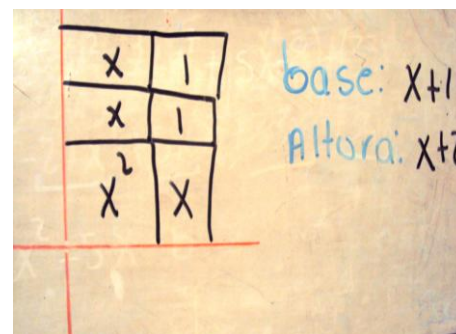


La figura a representa la ficha de dimensiones 1 y x la figura d por ejemplo representa la figura de dimensiones $-x$ y -1 , la lectura de los otros gráficos (b, c, e, f, g, h) se propusieron como ejercicios.

Se avanzo un poco aumentando el nivel de complejidad, realizando la siguiente actividad.



Por ejemplo la figura a representa el rectángulo de base $(-x + 1)$ y altura $(-x + 2)$, las figuras b y c, se dibujaron en el tablero y se preguntó por la base y la altura de cada una de las figuras, la mayoría de los estudiantes participaron diciendo correctamente cual era la base y la altura de la figura b y c.



Multiplicación: Con los rectángulos básicos sólo es factible obtener productos de dos factores lineales $p(x) = ax + b$ y $q(x) = cx + d$. cada producto se obtiene construyendo un rectángulo cuya base es uno de los factores lineales y la altura el otro, seleccionando fichas que encajen perfectamente como ocurre en todo rompecabezas. Para completar el rectángulo, es necesario añadir tantas fichas como se requiera.

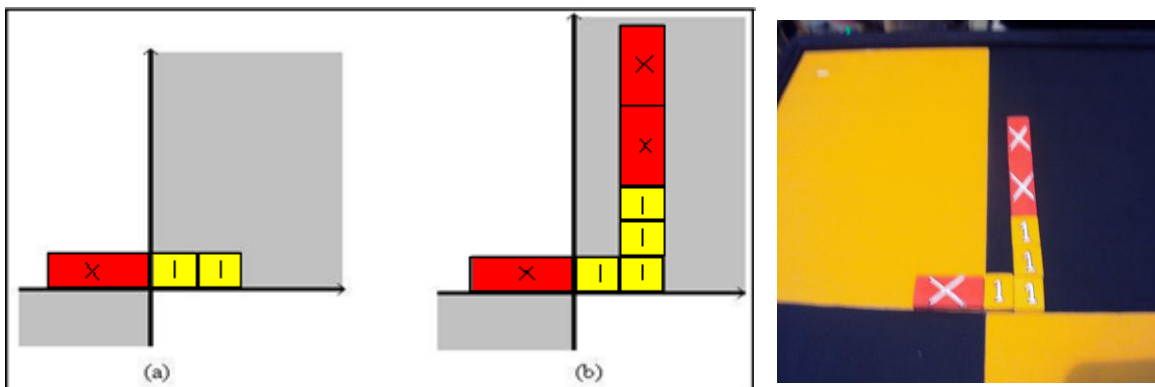
Para poder desarrollar algunos ejemplos con este método es fundamental el manejo de la siguiente regla:

● **Regla importante:** Si la base del rectángulo es el factor $(ax + b)$ con $a > 0$ su ubicación se realiza en la parte positiva del eje x , es decir en el primero o cuarto cuadrante en dependencia de la altura del rectángulo $(cx + b)$. Así mismo se ubica en la parte negativa del eje x cuando $a < 0$, es decir en el segundo o tercer cuadrante; de manera análoga se posiciona el valor b .

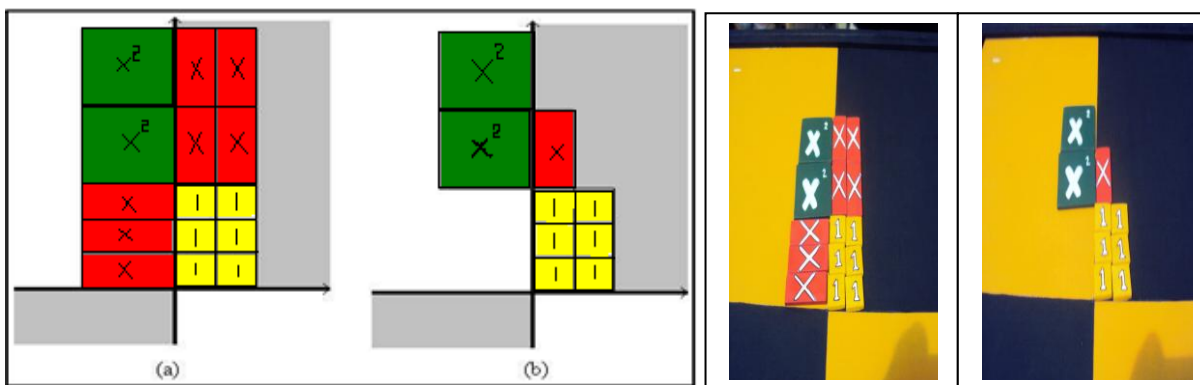
Teniendo en cuenta lo anteriormente mencionado es posible realizar la multiplicación de polinomios lineales con este material didáctico.

Uno de los ejemplos explicados a los estudiantes fue el siguiente:

Multiplicar. $(-x + 2) \times (2x + 3)$



En la figura **a** se ha ubicado el primer factor $-x + 2$, en la figura de la derecha (**b**) se muestra el factor $2x + 3$ que representa la altura del rectángulo a formar.

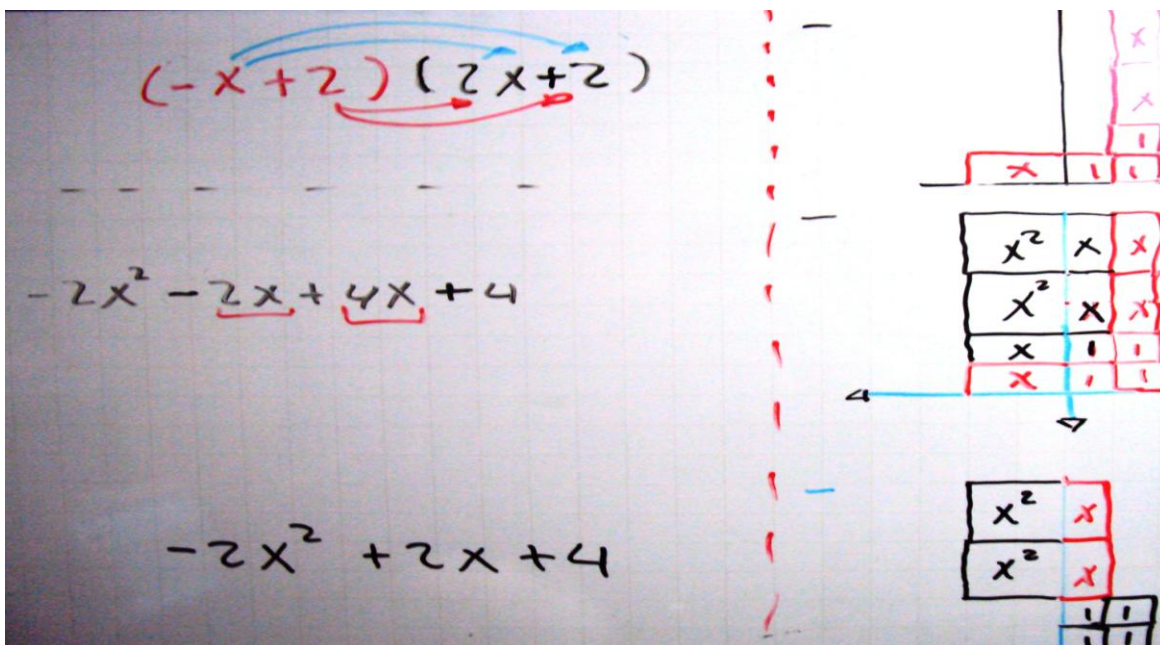


La Figura (a) indica cómo se completó el rectángulo y la figura (b) muestra el producto $2x^2 + x + 6$, una vez retiradas las fichas que algebraicamente sumaban cero.

Otro ejemplo fue;

Multiplicar. $(-x + 2) \times (2x + 3)$

Desarrollo algebraico de dos polinomios lineales



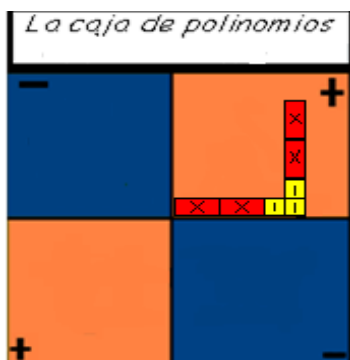
Para alcanzar el objetivo propuesto en esta sesión, se propusieron tres ejercicios.

EJERCICIOS:

1. $(2x + 2) \times (2x - 2)$
2. $(3x - 1) \times (-2x + 2)$
3. $(-2x - 1) \times (-3x - 3)$

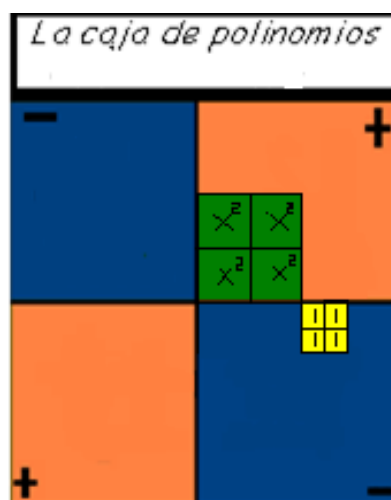
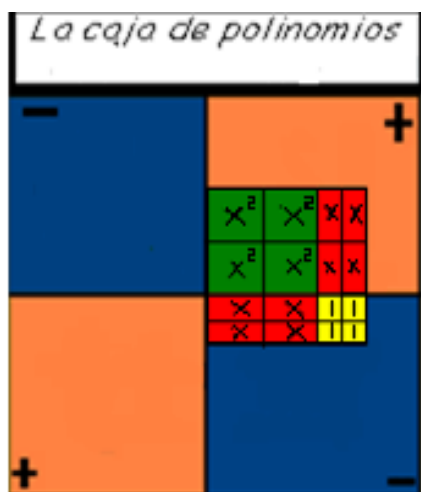
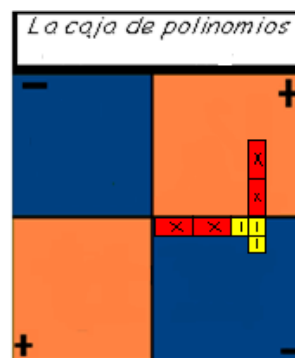
Sólo tres estudiantes lograron desarrollarlos correctamente. Las dificultades de la mayoría de estudiantes, eran por ejemplo, en el ejercicio número 1.

Los estudiantes lo representan así:



Sin tener en cuenta que las fichas que representan el segundo término del factor, $q(x) = (2x - 2)$ es negativo, luego no se pueden colocar por encima del eje x , así que se ilustró nuevamente como quedaba el ejercicio.

Explicando que la altura $2x - 2$ al llevar el término negativo (-2) las fichas debían ir por de bajo del eje x , esta parte era la que más se les complicaba a los estudiantes, puesto que la siguiente parte, la de completar el rectángulo con las fichas adecuadas y retirar las que algebraicamente sumen cero, no les resultaba complicado.



No colocar las fichas en dependencia de la altura, como lo indica la regla, es un error que se ubica en las siguientes categorías:

El uso inapropiado de “fórmulas” o “reglas de procedimiento”.

Debido a que los estudiantes usan inadecuadamente una regla, no se apropiaron de ella.

Errores debido a un aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos previos.

La actividad de lectura de gráficos es una actividad fundamental para el desarrollo de productos de polinomios con la caja de polinomios, ya que esta directamente relacionada con el procedimiento, los estudiantes al desarrollar el ejercicio mostraron deficiencias en el manejo de este concepto.

Debido a los errores cometidos por los estudiantes en este procedimiento, se realizó nuevamente la explicación de la actividad de lectura de gráficos y se dedicó un tiempo a la relectura de la **regla importante**.

Con el desarrollo de estas actividades los estudiantes pudieron realizar los ejercicios propuestos adecuadamente.

Según lo planteado anteriormente, se puede decir que aunque los errores son la manifestación más natural de un proceso tan complicado como es el de enseñanza de las Metamatemáticas, estos errores en este caso se hubiesen podido evitar enfatizando, en las actividades de lectura de gráficos y realizando una buena lectura de la regla importante, esto se tendrá cuenta para una próxima implementación ya que lo que se quiere es mejorar la propuesta pedagógica para que los estudiantes tengan un aprendizaje de calidad.

Tema 4. MULTIPLICACIÓN DE POLINOMIOS

Objetivo; Realizar la multiplicación con coeficientes racionales y exponentes naturales de polinomios.

Se empezó por el desarrollo de los siguientes ejemplos;

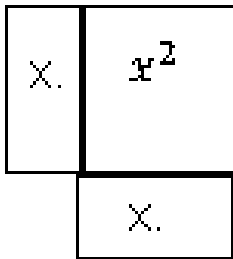
Multiplicar: $p(x) \times q(x)$ si :

1. $P(x) = -3x^7 - 5x - 2$. Y $q(x) = -x^2$
2. $P(x) = 12x^4 + 3x^2$. Y $q(x) = -14x^2 - 4$

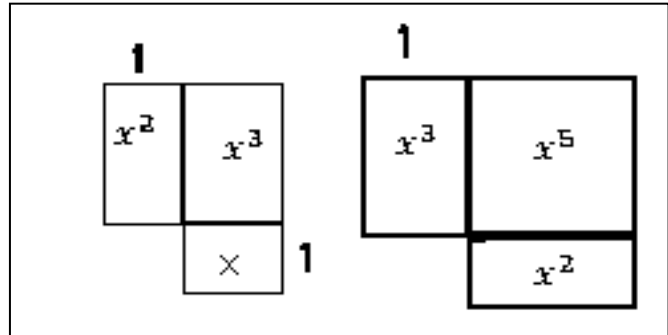
La caja de polinomios además que sirvió para mostrar el desarrollo algebraico de dos polinomios lineales, también se utilizó para explicar la fórmula (*), la cual es fundamental para realizar el producto de polinomios de coeficientes enteros y exponentes naturales:

* formula : $x^{m+n} = x^m \cdot x^n$

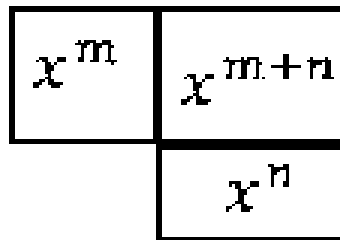
Por ejemplo se sabe que



Y se explicó que



En forma general se tiene



Ejemplo número dos:

$$\begin{aligned}
 P(x) \times q(x) &= (12x^4 + 3x^2) \times (14x^2 - 4) = 168x^6 - 48x^4 + 42x^4 - 12x^2 \\
 &= 168x^6 - 6x^4 - 12x^2
 \end{aligned}$$

Para alcanzar el objetivo propuesto en esta sesión, se propusieron las siguientes actividades:

Actividad 1. Resuelva los siguientes productos entre los polinomios

$p(x) \times q(x)$ si:

$$1. p(x) = -2x^8 + x^5 - 1, \quad q(x) = -5x^8 + x^2.$$

$$2. p(x) = x^7 + 24x^4, \quad q(x) = 2x^3 - 1.$$

$$3. p(x) = -x^3 + 2x^2, \quad q(x) = -x^5 + 6x.$$

Actividad 2. Resuelva los siguientes productos entre los polinomios

$p(x) \times q(x)$ si:

$$1. p(x) = \frac{4}{2}x^3 + \frac{10}{2}x^4, \quad q(x) = \frac{15}{3}x^3 - \frac{1}{3}$$

$$2. p(x) = -\frac{1}{2}x^3 + \frac{5}{3}x^2, \quad q(x) = -\frac{7}{3}x^5 + \frac{8}{5}x$$

En la solución de estos ejercicios los estudiantes mostraron un correcto desempeño, lo cual indica que el proceso práctico desarrollado fue positivo.

Las calificaciones son un buen referente de este hecho, para este trabajo sólo dos estudiantes tuvieron un bajo desempeño en la solución de los ejercicios propuestos.

NOMBRE	EJERCICIOS DE MULTIPLICACIÓN
Jesús A. Gonzales	+ ⊕ ⊕
Dayani F. Guasca	⊕ + ⊕
Licet K. Gusman	+ + ⊕
Jessica A. Silva	+ + +
Briyi Tatiana Ortiz	+ + +
Miriam L. Escobar	⊕ ⊕ +
Liseth T. Valdes	+ + +
Diana F. Lasso	+
Leidy X. LLanten	+ + +
Edith Marisol CH.	+ + +
Lesly D. Bolaños	⊕ ⊕ +
Edgar E. Gonzales	+
Hector J. Guasca	⊕ ⊕ ⊕
Rulver Casamachin	⊕ + ⊕
Estiven A. Medina	+ ⊕ ⊕
Karen T. Alvear	⊕ ⊕ ⊕
Daniela C. Córdoba	+++

Así se dio por terminado el desarrollo del producto de polinomios de exponente natural y con coeficientes racionales, fue más complicado de lo que se esperaba pero finalmente, los estudiantes lograron realizar esta actividad.

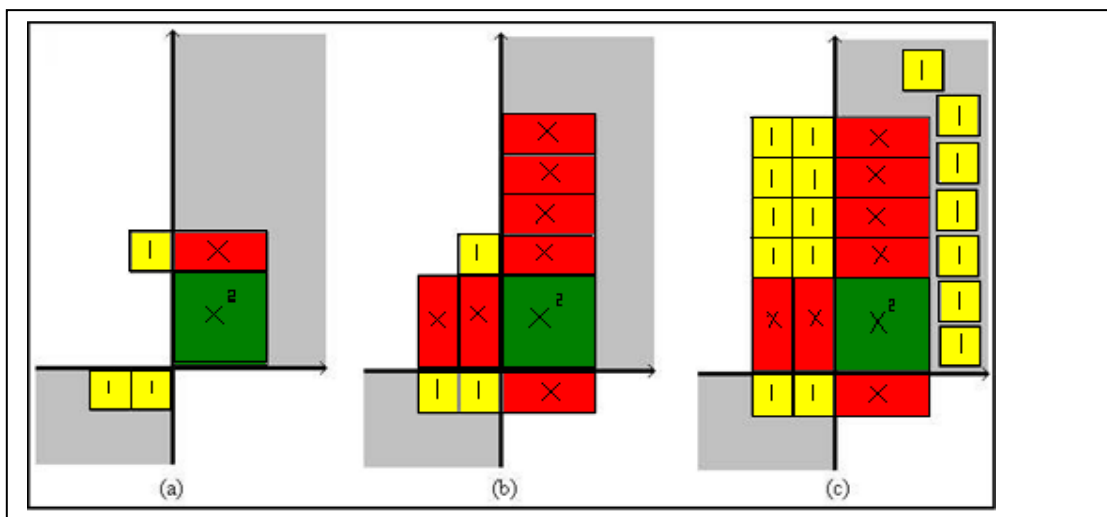
Tema 5; ***DIVISIÓN DE POLINOMIOS CON LA CAJA DE POLINOMIOS***

Objetivo; Dividir polinomios de grado dos con coeficientes enteros usando la caja de polinomios.

División: Dividir un polinomio cuadrático $ax^2 + bx + c$ entre un binomio $Dx + e$, análogamente que en la multiplicación, consiste en armar con el dividendo, a manera de rompecabezas, un rectángulo cuya base es el divisor $dx+e$. Para formar el rectángulo, en ocasiones, es necesario, Añadir pares de *fichas equivalentes algebraicamente a cero*, el cociente es la altura de dicho rectángulo y el residuo es la cantidad de fichas de valor 1 que no hace parte del mismo.

A continuación se presenta un ejemplo para la división de un polinomio cuadrático, el cual se explicó a los estudiantes, desarrollándolo de tal forma que se evidenciara los posibles errores que se pudieran cometer.

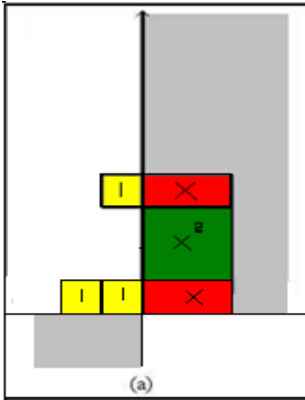
²³Ejemplo para la división de un polinomio.



La figura 19 presenta, por etapas, la división de $x^2 + x + 1$ por $x - 2$.

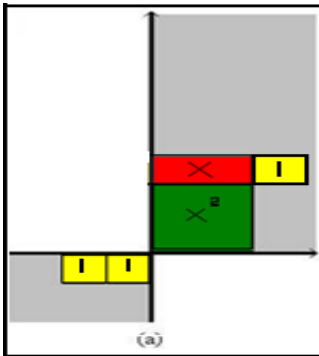
La figura 19(a) muestra el dividendo $x^2 + x + 1$ dispuesto en una franja de longitud igual al divisor $x - 2$, el coeficiente de x y el número -2 están en los cuadrantes correspondientes.

²³ Revista enseñanza de las matemáticas

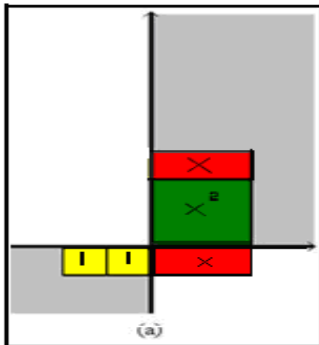


Ya que no pueden ir así por que el dividendo si estaría en una franja de longitud igual al divisor. Pero el dividendo seria $x^2 + 2x - 3$

A hora ¿por que no es posible colocar el 1 al otro lado de *ficha x*?

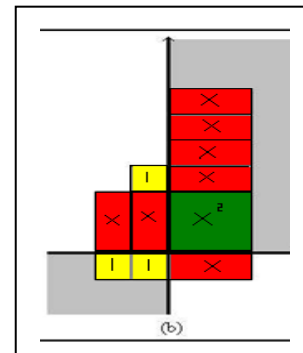


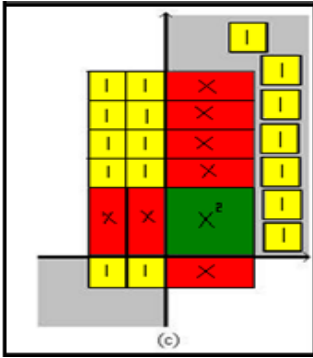
Porque el divisor tendría una longitud de $x + 1 - 2$, lo que es igual a $x - 1$, luego el dividendo $x^2 + x + 1$ no estaría dispuesto en una franja de longitud igual al divisor $x - 2$.



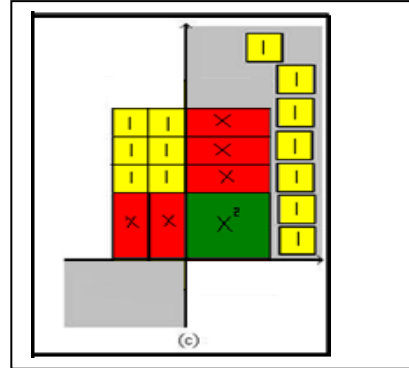
La ficha x no se coloca, porque algebraicamente sumaria cero con la ficha x de arriba, es decir, no se hace por conveniencia.

La parte (b) del gráfico presenta el proceso inicial de completar el rectángulo con parejas de ceros; dicha figura indica que el rectángulo completo se obtendrá añadiendo siete fichas 1 en el segundo cuadrante (-), las cuales se deben compensar en el primer o tercer cuadrante (+) como se observa en la figura (c). De ello se deduce que el cociente es $x + 3$ ya que la altura del rectángulo es $x + 4 - 1$





Y Retirando las fichas que algebraicamente sumen cero, *sin arruinar el rectángulo*, obtenemos



EL residuo es 7 (las fichas de 1).

Esté proceso se les explicó a los estudiantes para poder resolver esta división, las reacciones no fueron muy buenas debido a la cantidad de reglas que se debían tener en cuenta para desarrollarlo.

Lo que llevo realizar una reflexión, la idea es que el estudiante pueda entender los conceptos sobre los cuales un procedimiento o algoritmo se apoya, seguir la lógica que lo sustenta y saber cuándo pueda aplicarlo de manera íntegra y eficaz.

Es por eso, que se decidió realizar el ejercicio de la división del polinomio $x^2 + x + 1$ entre $x - 2$. En la ²⁴forma tradicional y hacer una comparación, con el ejercicio desarrollado con la caja de polinomios.

$$x^2 + x + 1 \div x - 2$$

$x^2 + x + 1$	$x - 2$	
$-x^2 + 2x$	$x + 3$	COCIENTE
$0 \quad 3x + 1$		
$\quad -3x + 6$		
$0 \quad +7$		RESIDUO

²⁴ La forma tradicional es la manera más común de presentar una clase y ésta es la siguiente; la Presentación del tema, ejemplos, ejercicios, revisión de las actividades propuestas y aclaración de dudas.

Realizando la comparación entre estos dos procedimientos, los estudiantes conscientemente observaron que era mejor el algoritmo tradicional, pues este requería de menos pasos para llegar al mismo resultado, de ahí que se decidió trabajar la clase en forma tradicional.

Finalizando esta sesión se puede concluir que no fue un fracaso la división de polinomios con la herramienta didáctica, porque aunque no se pudo desarrollar esta actividad, se pudo comparar la actividad con otro algoritmo que al parecer de los estudiantes les pareció más agradable y más fácil de trabajar, es decir, se le dio más importancia, a la forma tradicional de desarrollar la división de polinomios.

Es por eso que el docente no debe practicar y mecanizar un sólo algoritmo para cada una de las operaciones aritméticas en este caso la división de polinomios, por eso es conveniente ensayar otros algoritmos y compararlos con el que se practica en clase y apreciar sus ventajas y desventajas.

Al finalizar esta sesión también finalizó también el trabajo desarrollado con la caja de polinomios.

Para determinar en qué grado había sido asimilado el conocimiento impartido.

Se propuso un examen (Ejercicios de tipo V) que permitió saber los logros adquiridos por los estudiantes en cada una de las sesiones propuestas.

Polinomios

Institución Educativa Julumito grado
octavo

Juan Pablo Meléndez Erazo

1. Sumar

a. $(2x^2 + x + 2) + (3x^2 + 2)$

b. $(\frac{2}{3}x^3 + 2x^4 + 1) + (\frac{4}{5}x^3 + \frac{2}{3}x^4)$.

2. Restar

a. $(x^2 + x) - (x^2 - 2x)$

b. $(\frac{4}{3}x^7 + \frac{1}{2}x^5) - (\frac{2}{5}x^7 + \frac{2}{3}x^5)$.

3. Multiplicar

a. $(x^5 + x^{10}) \times (x^8 - x^2)$

b. $(\frac{3}{2}x^2 + \frac{2}{5}x^9) \times (4x^3 + \frac{5}{2}x^2)$

4. Dividir

$$\begin{array}{l} x^2 + 6x - 7x + 2 - 1 \div x + 3 \\ x^9 + 3x^4 - x^2 \div x^2 + 1 \end{array}$$

5. Teoría;

a) **Nombre y ubique correctamente** las partes del siguiente monomio.

$$ax^n$$

b) Escriba al frente la clase y el grado de los siguientes polinomios.

- y
- $(y^2 + 2y^4)$
- $(3y^3 + 4y^2 + \frac{6}{5}y^2)$
- $(4y^4 + 5y + 4y^9 + 2)$

Calificaciones grado octavo:

A la construcción de la caja de polinomios se le asignó un valor de 1 - 3 decimas para la nota final.

De 4.5 a 5 tres decimas.

De 4 a 4.5 dos decimas.

De 3 a 4.0 una decima.

La nota final se cálculo tomando el promedio de las ultimas tres notas, que muestran a continuación en la tabla de calificaciones, más las decimas adicionales por la construcción del material didáctico, el cero significa que el estudiante no presentó la actividad pedida.

NOMBRE	LA CAJA DE POLINOMIOS	EJERCICIOS EN CLASE	EXAMEN	ASISTENCIA	Nota Final
Licet K. Gusman	0	4.0	3	4.0	3.7
Dayani F. Guasca	0	4.0	4.7	3	3.9
Anny L. Rivera	5.0	4.0	0	4.0	3.0
Jessica A. Silva	4.5	4.0	3.7	5.0	4.5
Johana . Silva	0	4.0	2.7	3.0	3.2
Briyi Tatiana Ortiz	0	4.5	0	3.5	2.7
Karen T. Alvear	0	4.5	0	2.0	2.2
Miriam L. Escobar	0	4.5	0	3.0	2.5
Liseth T. Valdes	5.0	4.0	2.8	5.0	4.2
Daniela C. Córdoba	0	0	0	2.0	0.6
Diana F. Lasso	0	4.0	3.4	3.5	3.6
Leidy X. LLanten	0	3.5	2.3	3.5	3.1
Karolina Velasco R.	5.0	3.5	3.5	4.5	4.2
Edith Marisol CH.	4.5	4.0	4.5	4.5	4.6
Lesly D. Bolaños	4.5	5.0	4.9	4.5	5
Edgar E. Gonzales	-	4.0	4.4	4.0	4,1
Hector J. Guasca	4.0	5.0	4.6	4.5	4.9
Maicol S. Herrera	0	4.0	5.0	3.5	4.1
Jesús A. Gonzales	0	4.0	3.5	3.0	3.5
Danier Y. Navia	5.0	4.5	4.9	4.0	5
Rulver Casamachin	0	4.5	4.3	4.0	4.3
Jhony S. Herrera	0	3.5	3.5	3.0	3.1
Marlen D. Hoyos	3.5	2.0	4.0	3.0	3.2
Estiven A. Medina	0	3.0	1.3	4.0	2.8
Eduar A. Serna	0	3.5	4.7	4.0	4.1

Algunos comentarios finales, sobre la metodología desarrollada, por parte de los estudiantes fueron lo siguientes;

2. ¿Que les pareció la metodología utilizada?

3. A mi personalmente me pareció muy chevere porque el profesor fue una persona muy explicativa en su forma de dictar la clase, también fue una persona muy clara y coherente.

4. C sinceramente me gusto mucho las clases, y aprendí con el profesor.

¿Que les pareció la metodología utilizada?

Rta: Pss me gusto la metodología porque nunca la avia conocido y es muy chebre compartirla.

la Metodología es super bacana
con los aprendisajes de Juan Pablo
es una diversión completa y super
seguir trabajando con el, y con
su metodología.

activamente

...utilizada?
Nos pareció chebre porq' gracias a ti y
a los demás profesores de la universidad
aprendimos otros metodos para realizarlo
mas rapidamente y breve

¿Que les parecio la metodologia utilizada?
me parecio muy chebre porque nunca
la habia utilizado y ademas es una
manera muy facil de aprender.

LA METODOLOGIA ME PARECIO MUY BUENA
POR QUE APRENDIMOS A DESARROLLAR POR
MEDIO JUEGOS OPERACIONES QUE NOS
AYUDARON A APRENDER MAS SOBRE
MATEMATICA Y TAMBIEN A APRENDER
UNA NUEVA FORMA DE REALIZARLAS

6. CONOCIMIENTOS PRODUCIDOS

En el desarrollo de esta *situación didáctica*²⁵ se realizaron actividades como talleres, exámenes, juegos y se resolvieron ejercicios²⁶ de los tipos mencionados en los referentes teóricos, en el tablero y cuaderno, uno de logros más interesantes de estas actividades desarrolladas con este medio didáctico (la caja de polinomios) fue la rápida interacción que se alcanzó con los estudiantes. La interacción fortaleció las relaciones del profesor con los estudiantes y ayudó en el proceso de enseñanza y aprendizaje, ya que permitió determinar rápidamente cuales son los posibles ajustes que se pueden realizar para mejorar la propuesta didáctica, además gracias a la interacción alcanzada se concluye que debe haber intercambios con los estudiantes sobre los conocimientos que se quieren impartir, que los estudiante deben ser los actores principales de la clase y que se debe estar dispuesto a escuchar los aportes que los estudiantes sugieran, para mejorar la propuesta, aunque estos cambien un poco los patrones de enseñanza ya establecidos.

Aparte de la interacción también se adquirieron algunos aprendizajes muy importantes los cuales se describen en los siguientes ejes:

6.1 APRENDIZAJES PEDAGÓGICOS

Haber construido el proyecto de sistematización es el principal aprendizaje de los estudiantes del curso de práctica IV, ya que es el reflejo de los conocimientos adquiridos en los cursos en educación matemática que ofrece la Universidad del Cauca, este aprendizaje se adquirió gracias al asesoramiento continuo por parte de la directora Margarita Granados y además a las adecuadas recomendaciones de los compañeros de curso.

En el desarrollo de la propuesta pedagógica, se adquirieron los siguientes aprendizajes:

1. Se pudo aprender sobre relaciones sociales, se entendió los cambios de actitudes de los estudiantes, es decir, lo sensibles o emotivos que pueden ser.
2. Comprender que todo no va salir como se ha diseñado y que hay que ser rápidos y eficaces para poder solucionar las dificultades encontradas.

²⁵ Referentes teóricos (clases de situaciones didácticas)

²⁶ Referentes teóricos (categorías de ejercicios)

3. se pudo observar que, será conveniente hacerle unos ajustes a la propuesta pedagógica implementada en la institución Educativa Julumito, en la parte donde se realiza la división de polinomios utilizando la caja de polinomios.

4. Los estudiantes de grado octavo por medio de la experiencia fortalecieron sus capacidades, interpretativas y participativas.

6.2 APRENDIZAJES DISCIPLINARIOS

Debido a la actividad de conocimientos previos los estudiantes afirmaron sus conceptos respecto al desarrollo de suma, resta, multiplicación y división de números reales.

Queda claro que los estudiantes se motivan trabajando con herramientas didácticas y en particular, la caja de polinomios es un medio didáctico adecuado para que los estudiantes se interesen y además se apropien de un conocimiento ya constituido, como lo es el desarrollo de las operaciones básicas de polinomios

Al finalizar la implementación de la propuesta didáctica, los estudiantes podían realizar operaciones de suma, resta multiplicación, división y factorización de polinomios con coeficientes reales y exponentes enteros.

6.3 APRENDIZAJES AXIOLÓGICOS

Los estudiantes afianzaron valores como el respeto a los demás compañeros, la cooperación, el intercambio de conocimientos, escuchar al otro, el trabajo en grupo y la participación en clase.

7. CONCLUSIONES

Del análisis de los resultados obtenidos en la implementación de la propuesta didáctica “el desarrollo de las operaciones básicas de polinomios con el uso de la caja de polinomios” son estas las conclusiones extraídas:

Sobre el estudiante: El estudiante mostró interés por participar en las clases, no fue un simple receptor de conocimientos sino que reflexionaba críticamente sobre lo que se le estaba enseñando, lo que le ayudó a apropiarse del conocimiento y así poderlo socializar con sus compañeros y el profesor, es decir, los estudiantes fueron los protagonistas principales de las clases.

Basándose en el trabajo realizado por los estudiantes en este proceso, se puede concluir que, la asimilación de conceptos, definiciones, ejercicios, sobre el álgebra de polinomios fue significativa.

Los estudiantes al observar que la matemática se puede trabajar desde una forma lúdica dejaron la pereza a un lado y manifestaron un visible ánimo.

Sobre el practicante: La experiencia pedagógica fue muy estimulante ya que se pusieron en práctica los conocimientos conseguidos en los cursos de pedagógica de la Universidad del Cauca y se adquirieron otros que sólo se obtienen al realizar la experiencia pedagógica, como por ejemplo:

Con el propósito de mejorar la práctica pedagógica se estuvo dispuesto a aceptar las críticas, que los estudiantes proporcionaban, aunque estas cambien un poco los patrones de enseñanza ya establecidos, también fue fundamental darle más importancia a la propuesta didáctica que a los límites de tiempos establecidos en ella, para el desarrollo de cada uno de los temas, es decir, no se saturó a los estudiantes de conocimientos en una sola clase sólo para cumplir con los objetivos de tiempo ya prediseñados en la propuesta.

Sobre la caja de polinomios: Fue importante el uso de esta herramienta didáctica por que facilitó las relaciones entre el practicante y los estudiantes en el ámbito educativo, porque al trabajar de manera lúdica ganaron un poco de confianza en el tema estudiado y con el tutor, se logró que los estudiantes desarrollaran de manera fácil y eficiente la adición y la diferencia de polinomios de grado dos con coeficientes enteros, con respecto a la multiplicación no fue fácil pero finalmente lograron entender la manera de desarrollar el producto de algunos polinomios y aunque fue insuficiente el desarrollo de la división con este material didáctico, permitió realizar una comparación con el algoritmo tradicional y así los

estudiantes mostraron interés al hora de trabajar con este método. Se pude decir que fue relevante utilizar la caja de polinomios ya que las buenas bases que adquirieron los estudiantes en los temas de suma, resta y multiplicación al manipular esta herramienta didáctica, fueron fundamentales en el desarrollo de las operaciones básicas de polinomios de grado mayor o igual que dos con coeficientes reales y exponentes naturales.

No se desarrolló la factorización de polinomios con este material didáctico, debido a la relativamente complicada definición que utiliza (**encuadre minimal**)²⁷ para su desarrollo y además por la poca relación que tiene éste proceso con el algoritmo tradicional, ya que el objetivo es que a los estudiantes se les ilustre las operaciones de polinomios y las entiendan bien, para luego pasar a un nivel de competencias más alto.

²⁷Matemática: Enseñanza Universitaria Departamento De Matemáticas Universidad del Valle Cali Colombia pág. 85 revistaerm.univalle.edu.co/VolXIIIN1/mosquera.pdf pág. 85

8. RECOMENDACIONES

Al concluir este trabajo pedagógico y con el interés de aportar a las posteriores Prácticas Pedagógicas de la Universidad del Cauca se hacen las siguientes recomendaciones:

Que los estudiantes del Colegio donde se esté implementando la propuesta didáctica, participen en el proceso de diseño de ejercicios y la evaluación curricular, de igual manera, que el practicante esté dispuesto a analizar las sugerencias o modificaciones que los estudiantes puedan realizarle a la propuesta didáctica. Todo esto sólo con el propósito de mejorar la propuesta pedagógica. Cualquier evaluación de forma cuantitativa sólo debe ser una guía para saber cómo está la relación entre enseñanza y aprendizaje.

Lo importante para la sistematización de la experiencia, es contar con registros de todo eso que haya sido elaborado lo más cerca posible del momento en que ocurrió cada hecho. Este es un requisito fundamental. Como por ejemplo:

- Los cuadernos de apuntes personales, diarios de campo documentos que contienen propuestas, borradores de trabajo, diseño de actividades. informes, actas de reuniones, memorias de seminarios o talleres.
- Grabaciones, fotografías, filmaciones en video, gráficos, mapas, etc.

9. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

A continuación se ofrecen a los lectores y lectoras unas referencias bibliográficas que pueden resultar de utilidad para seguir ampliando sus conocimientos en el campo de la enseñanza de las matemáticas.

- AMAYA DE OCHOA, Graciela. Reflexiones sobre pedagogía, Red académica. Universidad Pedagógica Nacional, Santafé de Bogotá 2001. 10
- BRUNO, D'Amore. JUAN DÍAZ, Godino. FANDIÑO PINILLA Martha I. Competencias y matemática. Bogotá: Cooperativa Editorial Magisterio, (2008), 103p.
- CHAVARRÍA, Jesennia. Cuaderno de investigación y formación en Educación matemática: Teoría de las situaciones didácticas. En: un seminario teórico. Bogotá, 26 de Marzo del 2006. Universidad Nacional, (2006), Internet:
- Discusión sobre la noción de problema y ejercicio. Disponible en internet en: <http://inst-mat.utralca.cl/~cdelpino/tesis1/capitulos/10-manual-s1.pdf>
- Innovando, Equipo de innovaciones educativas-DINESS-MED. Para sistematizar experiencias. Internet: <http://destp.minedu.gob.pe/Secundaria/nwdes/pdfs/revistaie20.pdf>
- JARA HOLLIDAY, Oscar..Para sistematizar experiencias: una propuesta teórica y práctica. San José: Centro de estudios y publicaciones, ALFORJA, (1998), 243p.
- Ministerio de Educación Nacional. Matemáticas. Lineamientos curriculares. Bogotá: MEN, (1998)
- http://www.google.com/search?hl=es&q=los+errores+en+el+aprendizaje+de+matem%C3%A1tica+y+su+clasificacion&aq=f&aql=&aq=&aq=&gs_rfai=
- RICO, Luis. Citado por RICO, Luis. Errores y dificultades en el aprendizaje
- Paginasweb.univalle.edu.co/~revistaerm/pdf.php?ano=2005&num=1&idi
- *Matemática: Enseñanza Universitaria Departamento De Matemáticas Universidad del Valle Cali Colombia* pág. 85 revistaerm.univalle.edu.co/VolXIIIN1/mosquera.pdf
- Juan Pablo Meléndez. E. Documento Práctica II, Licenciatura en Matemáticas, Universidad del Cauca, Popayán, 2008.
- M.E.N. Matemáticas. Marco general. Propuesta de programa curricular. Noveno grado. Bogotá, 1989

