TEOREMA FUNDAMENTAL DEL ÁLGEBRA Y ÁLGEBRA LINEAL

HUGO ALEXANDER MANZANO MARTINEZ

Universidad del Cauca

Facultad de Ciencias Naturales, Exáctas y de la Educación

Departamento de Matemáticas

Popayán

Abril, 2009

TEOREMA FUNDAMENTAL DEL ÁLGEBRA Y ÁLGEBRA LINEAL

HUGO ALEXANDER MANZANO MARTINEZ

Trabajo de grado presentado como requisito parcial para optar al título de Licenciado en Matemáticas

JHON JAIRO BRAVO GRIJALBA
Director

Universidad del Cauca
Facultad de Ciencias Naturales, Exáctas y de la Educación
Departamento de Matemáticas
Popayán
Abril, 2009

Nota de Aceptación

____

____

____

Mg. Jhon Jairo Bravo Grijalba
Director

Profesor. Diego Fernando Ruiz
Comite de seguimiento

Profesor. Wilson A. Martínez
Comite de seguimiento

Popayán, 1 de Abril, 2009

A MI MADRE.
MARLENY MARTINEZ.

Agradecimientos

Agradezco inicialmente a Dios por ser mi fortaleza, darme todo lo que tengo y bríndame la sabiduría para aprender de cada tropiezo que en he tenido en la vida.

A mi director de trabajo Mg. Jhon Jairo Bravo Grijalva, por su calidad humana y por su colaboración desmedida durante el desarrollo y la culminación del presente trabajo de grado.

A los integrantes del grupo Álgebra Teoría de Números y Aplicaciones, encabezado por el dr. Carlos A. Trujillo, por otorgarme un espacio para presentar los avances del trabajo y por sus valiosos aportes. Al comité de seguimiento conformado por los profesores Diego Fernando Ruiz y Wilson A. Martínez.

Al Profesor y amigo Mg. Carlos Arturo Rodríguez por su apoyo incondicional y por todas aquellas tardes de tertulia en las cuales arreglando el mundo también le dimos forma a este trabajo.

A mi madre Marleny Martínez Pues gracias a ella todo esto ha podido ser posible, por creer en mi y por estar a mi lado todos los días de mi vida. A mi padre Victor Hugo Manzano pues sus consejos y enseñanzas siempre han estado en mi mente y corazón, a mi hermano Duvan Manzano por su compañia y amistad.

A mi esposa Francy Elena por su amor y por su motivación constante ha ser cada dia mejor.

A mi pequeña hija Luna Isabel Manzano Por ser el motor que mueve mi Vida.

Gracias a todos los familiares y amigos que de una u otra forma me acompañaron en el planeamiento, desarrollo y finalización de esta meta.

HUGO ALEXANDER MANZANO MARTINEZ

Universidad del Cauca
1 de Abril, 2009

Tabla de Contenido

Resumen

Según el Teorema Fundamental del Álgebra (T.F.A), todo polinomio de grado n con coeficientes complejos tiene exactamente n raíces. El estudio del T.F.A. tiene sus inicios en la antigüedad con Al-khowarizmi (800 d.c) y en adelante grandes pensadores como Descartes, Leibniz, Euler y Gauss, entre otros, se dedicaron al desarrollo de su prueba hasta obtener algunas de las que son aceptadas hoy en día. En este trabajo de grado se hace una breve reseña histórica sobre el T.F.A y se presenta, en forma detallada, todos y cada uno de los pasos en que se fundamenta Harm Derksen en su artículo "The Fundamental Theorem of Algebra and Linear Algebra"[1], para demostrar en forma alternativa el T.F.A., usando solamente tópicos del Álgebra Lineal.

Introducción

En el presente trabajo de grado se exhibe, en forma detallada, una demostración alternativa del Teorema Fundamental del Álgebra (T.F.A) expuesta por Harm Derksen en su articulo *The fundamental theorem of algebra and linear algebra* [1].

El trabajo de grado se encuentra dividido en tres capítulos. En el primer capítulo se hace una reseña histórica sobre el T.F.A., en la cual se presenta a Gauss como el primer matemático que logra una prueba rigurosa.

El capítulo dos denominado *Prueba del T.F.A*, contiene inicialmente una serie de resultados básicos que son muy importantes para una mejor comprensión de los lemas y teoremas necesarios para el desarrollo del trabajo. Posteriormente se presenta la demostración de Harm Derksen del T.F.A., expuesta en [1]. Esta prueba se realiza desde la concepción teórica del álgebra lineal, cuyo eje principal es el argumento de que, probar el T.F.A. es equivalente a probar que toda matriz cuadrada con coeficientes complejos tiene un vector propio.

Finalmente, en el capítulo tres se presentan las conclusiones obtenidas en el desarrollo del trabajo de grado.

Capítulo 1

Reseña histórica

El objetivo de este capítulo es hacer un recorrido histórico del T.F.A. y mostrar que el problema de hallar las raíces de una ecuación polinómica despertó el interés de grandes matemáticos tales como Cardano, Leibniz, Euler y Gauss, entre otros.

> *El Álgebra es, en esencia, la doctrina de las operaciones matemáticas analizadas desde el punto de vista abstracto y genérico, independientemente de los números u objetos concretos. A lo largo de la historia de la humanidad esta ciencia ha ido evolucionando, y cada civilización y cada cultura con sus características propias han dejado un legado testimonial escrito del que en la actualidad somos herederos.*
>
> *Ana Cecilia Lorente Morata.*

El Teorema Fundamental del Álgebra dice que todo polinomio, con coeficientes complejos, tiene un raíz compleja, es decir, existe un número complejo donde el polinomio se anula. En la actualidad el T.F.A. puede ser enunciado de la siguiente manera:

> *Cada ecuación polinómica de grado n con coeficientes complejos, tiene n raíces en el campo de los complejos.*

En realidad existen varias formas equivalentes de enunciar el T.F.A., por ejemplo, *cada polinomio real puede ser expresado como el producto de factores lineales reales o cuadráticos reales* ó puede ser visto como la declaración de que *el cuerpo de los números complejos es álgebraícamente cerrado.*

A continuación se realiza un recorrido histórico del T.F.A., en el cual se mencionan los pensadores más destacados de diferentes épocas. Lo anterior para tener una idea de cómo al transcurrir el tiempo, la teoría matemática evoluciona hasta enunciar el T.F.A. y obtener su demostración.

1.1. Civilizaciones Antiguas

Del antiguo Egipto entre los años 1800 y 2000 a.c, disponemos de información que nos permite vislumbrar los inicios del álgebra.

En un papiro comprado en 1858 por el anticuario Escocés Henry Rhind en una ciudad comercial del Nilo, se encuentra lo que se podria llamar las primeras ecuaciones lineales. Ecuaciones de la forma $x+ax=0$ ó también $x+ax+bx=c$, donde a, b y c son números conocidos y x es un número desconocido (o incógnita) al que se le llamó *aha* o *monton*.

La solución que daban los antiguos Egipcios en el papiro de Rhind es por inspección, pues le asignaban un valor a la incógnita, muchas veces incorrecto, pero que les permitía hallar el valor real.

En Mesopotamia, la tierra de los dos ríos, el álgebra alcanzó un nivel considerablemente mas alto que el Egipcio, puesto que solucionaron no sólo ecuaciones lineales sino cuadráticas y algunos ejemplos de cúbicas.

Se puede decir que los babilonios disponían de una fórmula para encontrar raíces positivas de ecuaciones cuadráticas. Ellos no consideraban la raíces negativas de una ecuación de segundo grado debido a que no manipulaban los números negativos. No obstante, la actividad intelectual de Egipto y Mesopotamia decayó a inicios de la era Cristiana, a la par que nuevas civilizaciones empezaron a surgir alrededor del mar mediterráneo. Entre éstas la cultura griega que se destacó por su gran aporte a las ciencias, fue así como intelectuales de la talla de Tales de Mileto, Pitágoras, Platón y Euclides hicieron su contribución al enriquecimiento matemático. Sin embargo, es en el periodo denominado "edad de plata de la Matemática", o "edad Alejandrina tardía", donde se encuentra el mas importante de los algebristas griegos, Diofanto de Alejandría.

Diofanto, llamado por algunos el padre del álgebra, presenta en su libro *Aritmética* una serie de problemas sobre aplicaciones algebraicas. Es importante anotar que para Diofanto, no era de interés buscar todas las posibles soluciones de una ecuación, por ejemplo, él sólo admitía soluciones racionales. Mas aún, si una ecuación cuadrática tenía dos raíces positivas, escogía la mayor.

Después de Diofanto la cultura hindú presentó algunos avances en cuanto a la solución de ecuaciones de segundo grado, pues ellos admitían dos raíces e incluían las negativas y las irracionales.

De esta forma termina la época comprendida por las civilizaciones antiguas, pero es claro que a través de las culturas el interés de los matemáticos por hallar todas las posibles soluciones de una ecuación va dando origen al T.F.A.

1.2. Cultura Árabe y Europa Medieval

Los árabes se integran al mundo matemático con el astrónomo y matemático Mohamed ibn Musa al-Khowarizmi, quien al igual que Diofanto también es llamado el padre del Álgebra por ser propiamente quien le da el nombre, cuyo significado es restauración y simplificación.

Aunque al-khowarizmi y otros matemáticos árabes como Abul Kamil resolvieron algunas ecuaciones cuadráticas y algunos ejemplos de cúbicas, en ocasiones ayudados de la geometría, la dificultad radicó en que ellos sólo se interesaban por buscar raíces reales positivas y por lo tanto el T.F.A. aún carecía de sentido.

Con la caída del imperio Romano empieza una nueva época en Europa denominada "edad media"que finalizaría al principio del siglo XIV. Aquí se retoma el estudio de la Matemática creando centros de aprendizaje y realizando la traducción de los *Elementos* de Euclides y *Álgebra* de al-khowarizmi.

En este periodo de tiempo se destacan algunos matemáticos y entre ellos el más importante, Leonardo de Piza (1170-1250) mas conocido como Fibonacci. Fibonacci resuelve ecuaciones de segundo grado y algunas ecuaciones cúbicas, con la firme convicción de que éstas últimas no pueden ser resueltas algebraicamente. Su aporte mas significativo es que los números irracionales presentados por Euclides en los *Elementos* no eran todos los existentes, pues Leonardo de Piza probó, que las raíces de la ecuación $x^3 + 2x^2 + 10x = 20$, no podían encontrarse por medio de la regla y el compás. Esta es el primer indicio de que el sistema numérico debería tener mas de lo que hasta ese momento se conocía.

1.3. El Renacimiento

En los siglos XV y XVI se presenta una revitalización de la cultura y el estudio en Europa occidental. El estudio del álgebra y las matemáticas avanza pero es hasta la aparición del *Ars Magna* de Cardano en 1545, donde se presentan desarrollos trascendentes en el álgebra.

Cardano fue el primero en darse cuenta que se podía trabajar con números más generales que los números reales. Su descubrimiento lo realiza al estudiar la ecuación cúbica $x^3 = 15x + 4$, y observar que su respuesta implicaba la raíz cuadrada de -121.

En el año de 1545 con la aparición de *Ars magna* de Jerónimo Cardano, no sólo se publica la solución de la ecuación cúbica, sino también de la cuártica. Una divulgación tan importante como esta marca la historia de las matemáticas, tanto que este año se toma como el inicio del álgebra moderna. Es importante aclarar que Cardano admite que él no fue quien descubrió la solución de la cúbica ni de la cuártica, él nombra a Niccolo Tartaglia y a Scipione del Ferro como los personajes que descubrieron la solución de la ecuación cúbica y a Ludovico ferrari el de la cuártica.

En *Ars magna* aparece el genial descubrimiento de que un polinomio es divisible por factores de la forma $x - a$, donde a es una raíz del polinomio, aunque no se presenta una demostración de tan importante resultado. Otra consecuencia que se deriva de *Ars magna* es la consideración de la existencia de un nuevo tipo número, la aceptación de los números irracionales y de los números negativos.

Durante el siglo XVI el álgebra también avanza en el sentido de mejorar su simbolismo, pues se introducen los signos $+, -, \times, =$, además de diferenciar entre constantes e incógnitas.

Al finalizar el renacimiento y recopilar lo realizado por los matemáticos de este periodo, se puede notar que a medida que pasa el tiempo la idea del T.F.A. se va haciendo más notoria.

1.4. Formulación del T.F.A

Este último tramo del recorrido por la historia del Teorema Fundamental del Álgebra, lo iniciamos con Franciscus Vieta (1540-1603) quien brinda los fundamentos del álgebra moderna y afirma que todo polinomio de grado n, admite n soluciones. Pero Vieta no fue el único, pues el matemático Flamenco Albert Girard en 1629, publica su libro *Invention nouvelle*, donde realiza la misma afirmación. Sin embargo, ninguno de los dos pensaba en los números complejos como posible solución.

Para contrarrestar el problema de las raíces cuadradas de los números negativos aparece Descartes (1596–1650) quien introduce a la teoría matemática el concepto de número imaginario, y en su tercer libro *la géométrie* plantea que una ecuación polinómica tiene tantas raíces como lo indique el grado de la incógnita. Este resultado lo presenta después de incluir como solución de una ecuación las raíces negativas y las complejas.

Se puede decir que de esta manera aparece el enunciado del T.F.A., sin embargo, no se presenta ninguna demostración de el, pues dicho resultado se acepta como inmediato.

Una importante anécdota es el hecho de que en 1702, Leibniz encuentra un contraejemplo con el que prueba la falsedad del T.F.A. Leibniz plantea que x^4+1 no se puede expresar como el producto de dos factores cuadráticos complejos [12], contraejemplo que seria desvirtuado por Euler 40 años mas tarde. Esta situación anecdótica muestra que hasta los más grandes de la historia han cometido errores y que todo matemático siempre está intentando mejorar los resultados propuestos por sus colegas.

La historia sigue su curso y en 1746 D´Alembert (1717–1783) realiza el primer intento serio para demostrar el T.F.A. El problema se presenta cuando en su prueba utiliza un lema sin demostración, demostración que aparece en 1851 y la cual se obtiene mediante el uso del T.F.A. Sin embargo, las ideas propuestas por D´Alembert son muy importantes y servirán de base para futuras pruebas.

Poco tiempo después Euler prueba exitosamente que todo polinomio de grado $n < 7$, tiene exactamente n raíces complejas [12] e intenta realizar una demostración para el caso general en polinomios reales, demostración que fue infructuosa por el método que escogió, tanto asi que en 1772 Lagrange planteó una serie de objeciones a su demostración, argumentando que las funciones racionales eventualmente podrían llevar a la contradicción 0/0 [12].

Laplace también intentó hallar una demostración para el T.F.A. empleando el discriminante de un polinomio. Su prueba resultó muy elegante, pero de nuevo suponía la existencia de las raíces.

El siglo XIX merece ser llamado la edad de oro de la matemática, pues los progresos de este periodo en el ámbito matemático superan tanto en cantidad como en calidad la producción reunida de todas las épocas anteriores. El matemático más importante de este siglo y para muchos de toda la historia fue el Alemán, Carl Friedrich Gauss (1777–1855) [13].

En 1799, Gauss publica su tesis en la Universidad de Helmstädt que lleva el título de *Nueva Demostración del Teorema*. Ahí se prueba que toda función algebraica racional y entera, de una variable, puede resolverse en factores reales de primero o de segundo grado. Teorema al que mas tarde se referiría como el **Teorema Fundamental del Álgebra**, hasta ese momento conocido como el teorema de D´Alembert. La tesis también presenta las objeciones a las pruebas anteriores incluyendo las de Euler y Lagrange. Gauss es el primero en darse cuenta que el principal error de las anteriores demostraciones es suponer la existencia de las raíces y deducir propiedades de ellas [13], [12].

Es así como a Gauss se le concede el crédito por la primera demostración del T.F.A., pues en 1849, 50 años después de su primer intento, produce la prueba en el caso general, es decir, prueba que *una ecuación de grado n, con coeficientes complejos, tiene n raíces complejas* [12], [13].

De esta manera podríamos decir que el teorema fundamental del álgebra fue enunciado y demostrado. En años posteriores se sigue trabajando e investigando sobre el T.F.A., pero utilizando las definiciones de grupo y campo introducidas por Hamilton y Galois.

Mas tarde en 1949, el matemático Alemán Hellmuth Kneser(1898–1973), presentó una demostración constructiva del T.F.A., mejorando la propuesta por Argand, demostración que sería simplificada por su hijo Martin Kneser, en su publicación *Ergaeanzung zu einer Arbeit von Hellmuth Kneser Äuber den Fundamentalsatz der Algebra* [12].

Es así como finaliza el recorrido por la historia del teorema fundamental del álgebra y se dispone el inicio del siguiente capítulo de este trabajo, en el cual se presenta una nueva prueba de tan importante resultado.

Capítulo 2

Prueba del T.F.A.

2.1. Preliminares

El objetivo de esta sección es hacer una presentación de las definiciones, resultados básicos y lemas auxiliares, los cuales son pre–requisitos para el desarrollo de la siguiente sección. Algunos de estos resultados se presentan sin demostración, pues su prueba es la que normalmente se realiza en los cursos habituales de Álgebra Lineal.

Es importante aclarar que los espacios vectoriales con los que se trabajara son de dimensión finita.

Definición 2.1 *Sean V y W dos espacios vectoriales sobre un campo $\mathbb{K}$. Una transformación A de V en W se dice que es lineal si, para cualesquiera $u, w \in V$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ se verifica:*

(a) $A(u + w) = A(u) + A(w)$

(b) $A(\alpha u) = \alpha A(u)$,

o de manera equivalente

$$A(\alpha u + \beta w) = \alpha A(u) + \beta A(w)$$

Ahora bien, una transformación lineal que va de un espacio vectorial en el mismo se denomina endomorfismo.

La matriz de un endomorfismo definido sobre un espacio vectorial V de dimensión finita es cuadrada de orden n, donde n es la dimensión de V.

Una propiedad importante es que un endomorfismo definido sobre un espacio vectorial de dimensión finita es inyectivo y sobreyectivo a la vez, o ninguna de las dos cosas.

Como en un endomorfismo el espacio inicial y el final son el mismo, se puede comparar un vector v con su imagen $A(v)$ y mirar como se relacionan.

Definición 2.2 *Si un vector $v \neq 0$ cumple que su imagen es múltiplo suyo, es decir, si*

$$A(v) = \lambda v,$$

para algún λ escalar, entonces se dice que v es un vector propio (o autovector) de A y que λ es su valor propio asociado.

Definición 2.3 *Sea V un espacio vectorial y W un subconjunto no vacío de V. Se dice que W es un subespacio vectorial de V si W dotado de las mismas operaciones definidas en V es, a su vez, un espacio vectorial. Por tanto, para que W sea espacio vectorial debe verificarse:*

(*i*) *La suma de elementos de W es un elemento de W.*

(*ii*) *El producto de un escalar cualquiera por un elemento de W pertenece a W*

En una transformación lineal A de V en W existen dos subespacios muy conocidos, el núcleo y la imagen, los cuales se definen a continuación.

Definición 2.4 *Dada una transformación lineal A de V en W se define:*

(*i*) *Núcleo de la transformación A al subespacio vectorial de V*

$$A^{-1}(\{0_W\}) = \{u \in V : A(u) = 0_W\},$$

que habitualmente se denota por $\ker(A)$.

(*ii*) *Imagen de la transformación A al subespacio vectorial de W*

$$A(V) = \{w \in W : A(u) = w \quad \textit{para algún} \quad u \in V\},$$

que se denota por $Im(A)$.

Definición 2.5 *Sea A un endomorfismo definido sobre el espacio vectorial V. Un subespacio W de V se dice que es invariante bajo A si $A(W) \subseteq W$.*

Teorema 2.1 (Teorema de la dimensión) *Sea A una transformación lineal entre los espacios vectoriales V y W de dimensión finita, sobre $\mathbb{K}$, siendo* $\dim(V) = n$*. Entonces,*

$$\dim(V) = \dim \ker(A) + \dim Im(A)$$

Definición 2.6 *Si $A = a_{ij} \in \mathbb{C}$, $i, j = 1, \ldots, n$, se dice que A es hermitica o hermitiana si la matriz conjugada de A que se denota por $\overline{A}$ coicide con A^t, esto es*

$$\overline{a}_{ij} = a_{ji}, \;\; i, j = 1, \ldots, n$$

Este tipo de matriz es, en cierto sentido, la generalización del concepto de matriz simetrica.

Un ejemplo de matriz hermitiana esta dado por

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1+i & i \\ 1-i & 1 & 3-2i \\ -i & 3+2i & 2 \end{pmatrix}$$

Propiedades

Sean $A, B \in M_{n\times n}$ matrices hermiticas y $\alpha \in \mathbb{R}$. Entonces se tiene que:

(i) $A + B$ y αA son hermiticas .

(ii) Si $AB = BA$ la matriz AB es hermitica. Sin embargo si A Y B no son conmutativos en el producto, en general AB no es hermitica.

(iii) A^t es hermitica.

(vi) La matriz conjugada de A es hermitica, esto es $\overline{A}$ es hermitica.

(v) Si A es invertible, su matriz inversa A^{-1} es hermitica.

(vi) El determinante de A es un número real.

Afirmación. El espacio vectorial de todas las matrices hermiticas es de dimensión n^2

Demostración. Sea A una matriz hermitiana. (Recordemos que una matriz $A = (aij)$ es hermitiana si se cumple que $a_{ij} = \overline{a_{ji}}$)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} + b_{12}i & \cdots & a_{1n} + b_{1n}i \\ a_{12} - b_{12}i & a_{22} & \cdots & a_{2n} + b_{2n}i \\ a_{13} - b_{13}i & \cdots & \cdots & a_{3n} + b_{3n}i \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{1n} - b_{1n}i & a_{2n} - b_{2n}i & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Ahora la matriz A se puede escribir de la siguiente manera:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b_{12}i & \cdots & b_{1n}i \\ -b_{12}i & 0 & \cdots & b_{2n}i \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -b_{1n}i & -b_{2n}i & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Donde la primera matriz es simetrica con entradas reales generada por $n(n+1)/2$ elememtos y la segunda matriz es antisimétrica con entradas complejas generada por $n(n-1)/2$ matrices.

Luego cualquier matriz A es generada por $n(n+1)/2+n(n-1)/2$ matrices linealmente independientes es decir una base para el espacio V tiene $n(n+1)/2+n(n-1)/2 = n^2$ elementos, por lo tanto la dimensión del espacio V es n^2 ∎

Definición 2.7 *Dada la matriz* $A = a_{ij} \in \mathbb{C}$, $i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, n$. *Se dice que* A *es antisimétrica si* $a_{ij} = -a_{ji} \quad i, j = 1, \dots, n$

La matriz C es un ejemplo de matriz antisimétrica.

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Propiedades Si A y B son matrices antisimétricas se verifica:

(i) $A+B$ y αA son antisimétricas.

(ii) A es antisimetrica si y solo si $A = -A^t$

(iii) Cuando $AB = BA$ entonces AB es antisimetrica.sin embargo, esto no es cierto Si A Y B no conmutan en el producto .

(iv) Si A es invertible entonces su inversa A_{-1} es antisimetrica.

(v) $|A| = (-1)^n|A|$ y en particular para n impar $|A| = 0$

Afirmación. El espacio vectorial de todas las matrices antisimétricas con entradas complejas sobre $\mathbb{C}$ es de dimensión $n(n-1)/2$

La demostración se realiza de forma similar a la anterior.

Definición 2.8 *Dado un polinomio mónico $P(x) = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_n$, su matriz compañera es la matriz cuadrada definida por*

$$A_{[p]} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_{n-1} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_{n-2} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_1 \end{pmatrix}$$

Una propiedad importante de la matriz compañera $A_{[p]}$ de un polinomio $P(x)$ es que $\det(xI - A_{[p]}) = P(x)$.

Se concluye esta sección presentando dos lemas auxiliares que serán de gran utilidad para el resto del trabajo.

Lema 2.1 *Todo polinomio de grado impar con coeficientes reales tiene un cero.*

Demostración. Sin pérdida de generalidad se puede suponer que el polinomio es mónico, pues en caso contrario se factoriza su coeficiente principal. De esta forma se prueba que

$$p(x) = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-2}x^2 + a_{n-1}x + a_n,$$

con $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ y n impar tiene un cero.

En efecto, sea $a =\mid a_1 \mid + \mid a_2 \mid + \cdots + \mid a_n \mid +1$.

(*a*) Se prueba que $p(a) > 0$.

Como $a - 1 =\mid a_1 \mid + \mid a_2 \mid + \cdots + \mid a_n \mid$, entonces

$$a - 1 \geq \mid a_i \mid \quad \text{para todo} \quad 1 \leq i \leq n.$$

Por propiedades de valor absoluto se tiene que

$$-(a-1) \leq a_i \leq a - 1, \quad 1 \leq i \leq n. \tag{2.1}$$

En particular

$$1 - a \leq a_i \quad \text{para todo} \quad 1 \leq i \leq n.$$

Luego

$$\begin{aligned} p(a) &= a^n + a_1a^{n-1} + a_2a^{n-2} + \cdots + a_{n-1}a + a_n \\ &\geq a^n + (1-a)a^{n-1} + (1-a)a^{n-2} + \cdots + (1-a)a + (1-a) \\ &\geq a^n + a^{n-1} - a^n + a^{n-2} - a^{n-1} + \cdots + a - a^2 + 1 - a \\ &= 1. \end{aligned}$$

Esto es, $p(a) \geq 1$, de donde $p(a) > 0$.

(b) Se prueba que $p(-a) < 0$.

De (2.1) se tiene que

$$1 - a \leq a_i \leq a - 1, \quad \text{para todo} \quad 1 \leq i \leq n.$$

De donde

$$-a_i \leq a - 1 \quad \text{y} \quad a_i \leq a - 1, \quad \text{para todo} \quad 1 \leq i \leq n.$$

Evaluando el polinomio $p(x)$ en $-a$ y teniendo en cuenta que n es impar se obtiene

$$\begin{aligned} p(-a) &= (-a)^n + a_1(-a)^{n-1} + a_2(-a)^{n-2} + \cdots + a_{n-1}(-a) + a_n \\ &= -a^n + a_1a^{n-1} + (-a_2)a^{n-2} + \cdots + (-a_{n-1})a + a_n \\ &\leq -a^n + (a-1)a^{n-1} + (a-1)a^{n-2} + \cdots + (a-1)a + (a-1) \\ &\leq -a^n + a^n - a^{n-1} + a^{n-1} - a^{n-2} + \cdots + a^2 - a + a - 1 \\ &= -1. \end{aligned}$$

De ahí que $p(-a) < 0$.

Ahora bien, dado que $p(a) < 0$ y $p(-a) > 0$, del Teorema de Bolzano existe $\lambda \in [-a, a]$ tal que $p(\lambda) = 0$, como se quería probar.

■

Lema 2.2 *Todo número complejo tiene una raíz cuadrada.*

Demostración. Sea $\alpha + \beta i \in \mathbb{C}$, con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Si $r = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ y $\beta \geq 0$, entonces

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{\frac{r+\alpha}{2}} + \sqrt{\frac{r-\alpha}{2}}\, i\right)^2 = &\left(\sqrt{\frac{r+\alpha}{2}}\right)^2 + 2\sqrt{\frac{r+\alpha}{2}}\sqrt{\frac{r-\alpha}{2}}\, i + \left(\sqrt{\frac{r-\alpha}{2}}\, i\right)^2 \\ =&\frac{r+\alpha}{2} + \sqrt{r^2-\alpha^2}\, i - \frac{r-\alpha}{2} \\ =&\frac{r+\alpha}{2} + \sqrt{r^2-\alpha^2}\, i - \frac{r-\alpha}{2} \\ =&\alpha + \sqrt{\alpha^2+\beta^2-\alpha^2}\, i \\ =&\alpha + \sqrt{\beta^2}\, i \\ =&\alpha + \beta\, i\end{aligned}$$

Es decir, $\sqrt{\frac{r+\alpha}{2}} + \sqrt{\frac{r-\alpha}{2}}\, i$ es una raíz cuadrada de $\alpha + \beta\, i$. Con un cálculo similar se muestra que $\sqrt{\frac{r+\alpha}{2}} - \sqrt{\frac{r-\alpha}{2}}\, i$ es una raíz cuadrada de $\alpha + \beta\, i$ para el caso $\beta < 0$.

■

2.2. La prueba de Harm Derksen

En esta sección se presenta en forma detallada la demostración del T.F.A propuesta por Harm Derksen en [1]. En esta prueba Derksen sólo usa conceptos del álgebra lineal, en realidad prueba que toda matriz cuadrada con coeficientes complejos tiene un vector propio, lo que implica el T.F.A.

Antes de enunciar los lemas auxiliares usados por Derksen en su prueba se presenta la siguiente notación: para un campo $\mathbb{K}$ se nota por $\mathcal{P}(\mathbb{K}, d, r)$ la siguiente proposición:

> $\mathcal{P}(\mathbb{K}, d, r)$: *Si $A_1, A_2, \ldots, A_r$ son endomorfismos conmutativos* [1] *de un espacio vectorial V sobre $\mathbb{K}$ de dimensión n tal que d no divide a n, entonces $A_1, A_2, ..., A_r$ tienen un vector propio en común.*

Lema 2.3 *Si $\mathcal{P}(\mathbb{K}, d, 1)$ se verifica, entonces $\mathcal{P}(\mathbb{K}, d, r)$ se verifica para todo $r \geq 1$.*

Demostración. Se prueba que $\mathcal{P}(\mathbb{K}, d, r)$ se verifica para todo $r \geq 1$ usando inducción sobre r. El caso $r = 1$ es válido por hipótesis del lema.

Se asume que $\mathcal{P}(\mathbb{K}, d, r-1)$ se cumple y se supone que $A_1, A_2, \ldots, A_r$ son endomorfismos de un espacio vectorial V sobre $\mathbb{K}$ de dimensión n tal que d no divide a n $(*)$.

Por inducción sobre n se prueba que $A_1, A_2, \ldots, A_r$ tienen un vector propio en común.

[1] *La conmutatividad es respecto a la composición*

(a) Si $n = 1$, entonces una base para V esta formada por un sólo vector no nulo, sea v. Como $A_i v \in V$ para $1 \leq i \leq r$ y $\{v\}$ es una base para V, existe $\alpha_i \in K$ tal que $A_i v = \alpha_i v$. Es decir, v es un vector propio común de $A_1, A_2, \ldots, A_r$.

(b) Se supone ahora que para un espacio vectorial V sobre $\mathbb{K}$ de dimensión menor que n, los endomorfismos $A_1, A_2, \ldots, A_r$ tienen un vector propio en común $(**)$.

(c) Se prueba que para un espacio vectorial V de dimensión n sobre un campo $\mathbb{K}$, los endomorfismos $A_1, A_2, \ldots, A_r$ tienen un vector propio en común.

Como $\mathcal{P}(\mathbb{K}, d, 1)$ se cumple, entonces el endomorfismo A_r tiene un vector propio y por lo tanto un valor propio $\lambda \in \mathbb{K}$ asociado a el. Se considera la transformación lineal $A_r - \lambda I$ de V en V, donde I es la transformación lineal idéntica. Esto es, $(A_r - \lambda I)v = A_r(v) - \lambda v$. Sean W y Z el núcleo e imagen de dicha trasformación.

Afirmación. W y Z son subespacios invariantes bajo $A_1, A_2, \ldots, A_{r-1}$. En efecto, se demuestra que $W = \{u \in V : A_r(u) = \lambda u\}$ es invariante bajo los endomorfismos $A_1, A_2, \ldots, A_{r-1}$, es decir, se prueba que: $A_i(W) \subseteq W$, $1 \leq i \leq r-1$. Sea $y \in A_i(W)$, entonces, existe $u \in W$ tal que $A_i(u) = y$. Al aplicar A_r a y se obtiene:

$$\begin{aligned} A_r(y) =& A_r(A_i(u)) \\ =& A_i(A_r(u)) \\ =& A_i(\lambda u) \qquad\qquad u \in W \\ =& \lambda A_i(u) \\ =& \lambda y \end{aligned}$$

Se ha probado que $A_r(y) = \lambda y$, lo que implica que $y \in W$. Análogamente se puede probar que Z es invariante bajo $A_1, A_2, \ldots, A_{r-1}$.

Para terminar la prueba se distinguen dos posibilidades:

(i) Se supone que $W \neq V$. Por el teorema de la dimensión

$$\dim W + \dim Z = \dim V.$$

Como d no divide a $\dim V$, entonces, d no divide a $\dim W$ ó d no divide a $\dim Z$. Mas aún, $\dim W < n$ y $\dim Z < n$. Por $(**)$, para un espacio vectorial de dimensión menor que n, los endomorfismos $A_1, A_2, \ldots, A_r$ tienen un vector propio en común, como se quería probar.

(*ii*) Se supone que $W = V$. Como $\mathcal{P}(\mathbb{K}, d, r-1)$ se cumple $(*)$, entonces los endomorfismos $A_1, A_2, \ldots, A_{r-1}$ tienen un vector propio en común, sea $v \in V = W$. Además, $A_r(v) = \lambda v$, puesto que W es el núcleo de $A_r - \lambda I$. Esto es, $v \in V$ es un vector propio común de $A_1, A_2, \ldots, A_r$.

■

Lema 2.4 $\mathcal{P}(\mathbb{R}, 2, r)$ *se verifica para todo* r*, es decir, si* $A_1, A_2, \ldots, A_r$ *son endomorfismos de un espacio vectorial real de dimensión impar, entonces ellos tiene un vector propio en común.*

Demostración. De acuerdo al Lema 2.3 es suficiente probar que $\mathcal{P}(\mathbb{R}, 2, 1)$ se cumple. Es decir, mostrar que un endomorfismo dado definido sobre un espacio vectorial real tiene un vector propio.

En efecto, si A es un endomorfismo definido sobre un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ de dimensión impar, entonces $p(x) = \det(xI - A)$ es un polinomio con coeficientes reales de grado impar. Por el Lema 2.1, existe $\lambda \in \mathbb{R}$, tal que $p(\lambda) = \det(\lambda I - A) = 0$. Esto es, λ es un valor propio de A y en consecuencia existe $v \in V$, vector propio de A, asociado a λ. ■

Lema 2.5 $\mathcal{P}(\mathbb{C}, 2, 1)$ *se cumple, es decir, todo endomorfismo de un espacio vectorial sobre* $\mathbb{C}$ *de dimensión impar tiene un vector propio.*

Demostración.

Se supone que $A : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$ es una transformación lineal sobre $\mathbb{C}$ de dimensión impar. Sea $V = Herm_n$ el espacio de matrices hermitianas[2] $n \times n$, y se define los endomorfismos conmutativos L_1, L_2 de V de la siguiente manera:

$$L_1(B) = \frac{AB + B\overline{A}^t}{2} \qquad \text{y} \qquad L_2(B) = \frac{AB - B\overline{A}^t}{2i}.$$

Aqui $\overline{A}^t$ denota la traspuesta de la conjugada compleja de la matriz A.

Se verifica que $L_1(B)$ y $L_2(B)$ son endomorfismos.

[2]Se dice que una matriz A es *hermitiana* si su conjugada coincide con su traspuesta, esto es, si $\overline{A} = A^t$

(a) Se demuestra que que $L_1(B+C) = L_1(B) + L_1(C)$, para $B, C \in V$.

$$\begin{aligned}
L_1(B+C) =& \frac{A(B+C) + (B+C)\overline{A}^t}{2} \\
=& \frac{AB + AC + B\overline{A}^t + C\overline{A}^t}{2} \\
=& \frac{AB + B\overline{A}^t + AC + C\overline{A}^t}{2} \\
=& \frac{AB + B\overline{A}^t}{2} + \frac{AC + C\overline{A}^t}{2} \\
=& L_1(B) + L_1(C)
\end{aligned}$$

(b) Se prueba ahora que $L_1(\alpha B) = \alpha L_1(B)$, para $\alpha \in \mathbb{C}$ y $B \in V$.

$$\begin{aligned}
L_1(\alpha B) =& \frac{A(\alpha B) + (\alpha B)\overline{A}^t}{2} \\
=& \frac{\alpha AB + \alpha B\overline{A}^t}{2} \\
=& \alpha \left(\frac{AB + B\overline{A}^t}{2} \right) \\
=& \alpha L_1(B)
\end{aligned}$$

Por (a) y por (b) se puede concluir que $L_1(B)$ es un endomorfismo. De manera análoga se prueba que $L_2(B)$ es un endomorfismo.

Se demuestra ahora que L_1 y L_2 son conmutativos:

$$\begin{aligned}
(L_1L_2)(B) =& L_1(L_2(B)) \\
=& \frac{AL_2(B) + L_2(B)\overline{A}^t}{2} \\
=& \frac{A(\frac{AB - B\overline{A}^t}{2i}) + (\frac{AB - B\overline{A}^t}{2i})\overline{A}^t}{2} \\
=& \frac{A^2B - AB\overline{A}^t + AB\overline{A}^t - B(\overline{A}^t)^2}{4i} \\
=& \frac{A^2B - B(\overline{A}^t)^2}{4i}
\end{aligned}$$

De otra lado,

$$\begin{aligned}(L_2L_1)(B) =&L_2(L_1(B))\\ =&\frac{AL_1(B)-L_1(B)\overline{A}^t}{2i}\\ =&\frac{A(\frac{AB+B\overline{A}^t}{2})-(\frac{AB+B\overline{A}^t}{2})\overline{A}^t}{2i}\\ =&\frac{A^2B+AB\overline{A}^t-AB\overline{A}^t-B(\overline{A}^t)^2}{4i}\\ =&\frac{A^2B-B(\overline{A}^t)^2}{4i}\end{aligned}$$

En consecuencia, $L_1(B)$ y $L_2(B)$ son dos endomorfismos conmutativos.

También se puede notar que $dim_{\mathbb{R}}V = n^2$ es impar. Como $\mathcal{P}(\mathbb{R}, 2, 2)$ se verifica por el Lema 2.4, entonces L_1 y L_2 tienen un vector propio común, sea P, en consecuencia $L_1(P) = \lambda P$ y $L_2(P) = \mu P$ para algunos $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Sumando termino a termino $L_1(P)$ con $iL_2(P)$ se tiene que

$$(L_1 + iL_2)(P) = AP = (\lambda + \mu i)P,$$

luego, cualquier vector columna distinto de cero de P es un vector propio para la matriz A ■

Lema 2.6 $\mathcal{P}(\mathbb{C}, 2^k, r)$ *se verifica para todo* k *y* r.

Demostración. La prueba de este lema se realiza por inducción sobre k. El caso $k = 1$ se obtiene de los Lemas 2.5 y 2.3. Asumamos que $\mathcal{P}(\mathbb{C}, 2^l, r)$ se cumple para $l < k$ y demostremos $\mathcal{P}(\mathbb{C}, 2^k, r)$. De acuerdo con el Lema 2.3 es suficiente con probar $\mathcal{P}(\mathbb{C}, 2^k, 1)$.

Se supone que $A : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$ es una transformación lineal y n es divisible por 2^{k-1} pero no por 2^k. Sea V=$Skew_n(\mathbb{C})$ el espacio de matrices $n \times n$ $Skew$ simétricas con entradas complejas [3]. Definamos dos endomorfismos conmutativos L_1 y L_2 de V por:

$$L_1(B) = AB - BA^t \quad \text{y} \quad L_2(B) = ABA^t, \quad \text{para todo } B \in V.$$

Veamos que L_1, L_2 son endomorfismos.

[3] El conjunto de las matrices $Skew$ simétricas con entradas complejas es igual al conjunto de las matrices antisimétricas, cuya dimensión es $n(n-1)/2$.

(a) Se demuestra que $L_1(B+C) = L_1(B) + L_1(C)$, para $B, C \in V$.

$$\begin{aligned} L_1(B+C) =& A(B+C) - (B+C)A^t \\ =& AB + AC - BA^t - CA^t \\ =& AB - BA^t + AC - CA^t \\ =& L_1(B) + L_1(C) \end{aligned}$$

(b) Se prueba ahora que $L_1(\alpha B) = \alpha L_1(B)$, para $\alpha \in \mathbb{C}$ y $B \in V$.

$$\begin{aligned} L_1(\alpha B) =& A(\alpha B) - (\alpha B)A^t \\ =& \alpha AB - \alpha BA^t \\ =& \alpha(AB - BA^t) \\ =& \alpha L_1(B) \end{aligned}$$

Por (a) y (b) se puede decir que L_1 es un endomorfismo. De forma similar se realiza la prueba para L_2.

Se prueba ahora que son conmutativos, para esto se debe verificar que

$$(L_1L_2)(B) = (L_2L_1)(B)$$

En efecto,

$$\begin{aligned} (L_1L_2)(B) =& L_1(L_2(B)) \\ =& AL_2(B) - L_2(B)A^t \\ =& A(ABA^t) - (ABA^t)A^t \\ =& A^2BA^t - AB(A^t)^2 \end{aligned}$$

Además,

$$\begin{aligned} (L_2L_1)(B) =& L_2(L_1(B)) \\ =& A(L_1(B))A^t \\ =& A(AB - BA^t)A^t \\ =& A^2BA^t - AB(A^t)^2 \end{aligned}$$

Por lo anterior se puede concluir que L_1 y L_2 son endomorfismos conmutativos sobre el espacio V.

Afirmación. 2^{k-1} no divide a $\dim V = n(n-1)/2$.

En efecto, si 2^{k-1} divide a $n(n-1)/2$, entonces $n(n-1)/2 = 2^{k-1} \cdot t$ para algún entero t, luego $n(n-1) = 2^k \cdot t$, esto es, 2^k divide a $n(n-1)$. Como 2^k y $n-1$ son primos relativos, se deduce que 2^k divide a n, lo cual es una contradicción con la hipótesis. En consecuencia 2^{k-1} no divide a $n(n-1)/2$.

Ahora bien, como $\mathcal{P}(\mathbb{C}, 2^{k-l}, 2)$ se verifica, entonces L_1 y L_2 tienen un vector propio en común, sea P, por lo tanto, $L_1(P) = \lambda P$ y $L_2(P) = \mu P$ para algunos $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$.

Se desea probar $\mathcal{P}(\mathbb{C}, 2^k, 1)$, o lo que es lo mismo que la transformación lineal $A : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$ tiene un vector propio.

Se tiene que:

$$\begin{aligned} \mu P =& APA^t = A(AP - L_1(P)) \\ =& A(AP - \lambda P) \\ =& A^2P - \lambda AP. \end{aligned}$$

Esto es,

$$A^2P - \lambda AP - \mu P = 0,$$

de donde

$$(A^2 - \lambda A - \mu I)P = 0.$$

Si $v \neq 0$ un vector columna de P, entonces,

$$(A^2 - \lambda A - \mu I)v = 0.$$

Por el Lema 2.2 existe $\delta \in \mathbb{C}$ tal que $\delta^2 = \lambda^2 + 4\mu$. Ahora se puede escribir la expresión $(A^2 - \lambda A - \mu I)v = 0$ como $(A - \alpha I)(A - \beta I)v = 0$, donde $\alpha = (\lambda + \delta)/2$ y $\beta = (\lambda - \delta)/2$. Si $w = (A - \beta I)v$, entonces, $(A - \alpha I)w = 0$. Se analizan los casos $w = 0$ y $w \neq 0$.

1. Si $w = 0$, entonces $(A - \beta I)v = 0$, luego v es un vector propio de A con valor propio β.

2. Si $w \neq 0$, entonces, $(A - \alpha I)w = 0$ implica que w es un vector propio de A con valor propio asociado α.

Con esto se ha demostrado $\mathcal{P}(\mathbb{C}, 2^k, 1)$, y por el Lema 2.3, $\mathcal{P}(\mathbb{C}, 2^k, r)$ se verifica para todo r. ■

Teorema 2.2 *Si $A_1, A_2, \ldots, Ar$ son endomorfismos conmutativos de un espacio vectorial V sobre $\mathbb{C}$ de dimensión finita distinta de cero, entonces ellos tienen un vector propio común.*

Demostración. Si n es la dimensión de V, entonces existe un entero positivo k tal que 2^k no divide a n, luego $\mathcal{P}(\mathbb{C}, 2^k, r)$ se verifica por el Lema 2.6. En consecuencia los endomorfismos $A_1, A_2, \ldots, Ar$ tienen un vector propio en común. ■

Corolario 2.1 (Teorema fundamental del álgebra) *Si $P(x)$ es un polinomio no constante con coeficientes complejos, entonces existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $P(\lambda) = 0$.*

Demostración. Es suficiente realizar la prueba para los polinomios mónicos. Se supone que $P(x) = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_n$, con $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$. Se debe probar que existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $P(\lambda) = 0$.

Sea A la matriz compañera del polinomio $P(x)$, es decir

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_{n-1} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_{n-2} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_1 \end{pmatrix}$$

Por propiedad de la matriz compañera se tiene que $P(x) = \det(xI - A)$, y por el Teorema 2.2, A tiene un vector propio y por lo tanto un valor propio $\lambda \in \mathbb{C}$, lo que implica que $P(\lambda) = 0$. ■

Capítulo 3

Conclusiones

En este capítulo se presentan algunos resultados que son consecuencias del desarrollo de este trabajo de grado denominado "Teorema Fundamental del Álgebra y Álgebra Lineal".

1. El desarrollo del T.F.A. se llevó a cabo en varias épocas a través de la historia. Inicia mediante el deseo de algunos egipcios por resolver pequeñas ecuaciones lineales, con lo cual se despierta el interés de los mas grandes pensadores matemáticos al tratar de formular el caso general, es decir, hallar las posibles soluciones de una ecuación de cualquier grado

   Los primeros en presentar el T.F.A. de una forma similar tal como lo conocemos hoy fueron: Franciscus Vieta y Albert Girard. Quien realizó el primer intento de prueba fue el matematico D´Alembert, prueba que no fue aceptada por usar un lema sin demostración.

   El proceso de formulación y demostración del teorema fundamental del álgebra también colaboro en el desarrollo de otros aspectos de la teoría como por ejemplo, la construcción de los símbolos tales como $(\times, +, -, ...)$ además de la aparición de los números complejos presentados por Descartes ante la necesidad de hallar raíces de números negativos en la solución de ecuaciones de todo tipo.

   Finalmente, es el matemático alemán Carl Friedrich Gauss quien le otorga el nombre con el que se conoce hoy en día y diez años después de su primer intento (en 1849) logra realizar la primera demostración rigurosa y reconocida del enunciado "*una ecuación de grado n, con coeficientes complejos, tiene n raíces complejas*"

2. El desarrollo y prueba del teorema fundamental del álgebra presenta algunas implicaciones que se muestran a continuación:

(*i*) Los únicos polinomios irreducibles en $\mathbb{C}[x]$ son los de grado 1.

(*ii*) Todo polinomio de grado $n \geq 1$ en $\mathbb{C}[x]$ tiene exactamente n ceros complejos, por lo que $\mathbb{C}$ es un conjunto de números que proporciona solución a cualquier ecuación algebraica, dicho de otra forma, el T.F.A. puede ser visto como la declaración de que el conjunto de los números complejos ($\mathbb{C}$) es algebraicamente cerrado.

(*iii*) El T.F.A. garantiza la existencia de n ceros complejos para un polinomio de grado n, pero no proporciona un método para calcularlos.

(*iv*) Al garantizar la existencia de las raíces de un polinomio, surgió el problema de buscar métodos que permitieran encontrarlas, este trabajo lo asumió el matemático Frances E. Galois con quien terminaría el álgebra (tal como era conocida hasta entonces), para dar inicio al álgebra moderna (identificada mediante la teoría de grupos, anillos, cuerpos y espacios vectoriales).

3. Es importante destacar la utilidad del álgebra y sus diferentes formas de aplicabilidad, una muestra clara de ello es la forma como Harm Derksen utiliza la teoría para construir espacios vectoriales adecuados que le permitieron probar que toda matriz cuadrada tiene un vector propio, resultado equivalente a el teorema fundamental del álgebra.

4. La demostración de Derksen en su artículo *The fundamental theorem of algebra and linear algebra* es una prueba innovadora y por tanto interesante, lo que permitió un constante interés durante todo el desarrollo de este trabajo, pues siempre es importante encontrar una nueva forma de mirar lo ya conocido, buscando siempre emplear los conceptos más elementales y ratificar que en el estudio de la matemática no siempre está dicha la última palabra.

Bibliografía

[1] H. Derksen, *The fundamental theorem of algebra and linear algebra* http://www.math.lsa.umich.edu/ hderksen

[2] B. H. Arnold, *A topological proof of the fundamental theorem of algebra*, Amer. Math. Monthly 56 (1949),465-466.

[3] J. L. Brenner and R.C. Lyndon, *Proof of the fundamental theorem of algebra*, Amer. Math. Montly 88 (1981), no4,253-256.

[4] B. Fine and G. Rosenberger, *The fundamental theorem of algebra*, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, New York, 1997.

[5] L. Horowitz, *A proof of the fundamental theorem of algebra by means of Galois theory and 2-Sylow groups*, Nieuw Arch. Wisk. (3)14 (1966), 95-96.

[6] H.-D. Ebbinghaus, H. Hermes, F. Hirzebruch, M. Koecher, K. Mainzer, A. Prestel, R. Remmert, Zahlen, Edited by K. Lamotke, Grundwissen Mathematik 1, Springer Verlag, Berlin 1983, Chapter 4.

[7] C. Gilain, *Sur l´histoire du théorème fundamental de l´algèbre: théorie des équations et calcul integral*, Arch. Hist. Exact Sci. 42 (1991), no. 2, 91-136.

[8] H.-J. Kowalsky, *Zum fundamentalsatz der Algebra, Abh. Braunschweig*, Wiss. Ges. 35 (1983), 111-120.

[9] S. Stein, *The fundamental theorem of algebra*, Amer. Math. Monthly 61 (1954), 109.

[10] F. Terkelsen, *the fundamental theorem of algebra*, Amer. Math. Monthly 83 (1976), no. 8, 647.

[11] H. Zassenhaus, *On the fundamental theorem of algebra*, Amer. Math. Monthly 74 (1967), 485-497.

[12] http:// www.ugr.es/ FTA. htm, historia del teorema fundamental de álgebra.

[13] A.C. Lorente Morante *Historia del álgebra y sus textos*