PRÁCTICA PEDAGÓGICA INVESTIGATIVA: LA ENSEÑANZA DE LOS NÚMEROS ENTEROS EN GRADO SÉPTIMO

MAYER ALINA IPIA CAMAYO

MÓNICA CAICEDO ORTIZ

OSCAR ORLANDO HOYOS GAVIRIA

UNIVERSIDAD DEL CAUCA

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES, EXACTAS Y DE LA EDUCACIÓN

LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

POPAYÁN 2012

PRÁCTICA PEDAGÓGICA INVESTIGATIVA: LA ENSEÑANZA DE LOS NÚMEROS ENTEROS EN GRADO SÉPTIMO

MAYER ALINA IPIA CAMAYO

MÓNICA CAICEDO ORTIZ

OSCAR ORLANDO HOYOS GAVIRIA

Director

Mg. YILTON OVIRNE RIASCOS FORERO

Trabajo presentado como requisito para optar al título de Licenciado en Matemáticas

UNIVERSIDAD DEL CAUCA

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES, EXACTAS Y DE LA EDUCACIÓN

LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

POPAYÁN 2012

Nota de aceptación:

El presente trabajo de
Grado fue aprobado
Por el asesor y
Respectivo evaluador

Vo. Bo. Wilmer Libardo Molina Yépes
Coordinador Licenciatura en Matemáticas

Vo. Bo. Yilton Ovirne Riascos Forero
Asesor

Vo. Bo. Yenny Leonor Rosero
Evaluadora

15 de Marzo de 2012

AGRADECIMIENTOS

En primer lugar a Dios todo poderoso que nos ha conservado con vida, con salud, que nos dio inteligencia, y nos ha guiado y cuidado hasta hoy.

A los estudiantes de grado séptimo de la Institución Educativa Técnico Industrial, quienes brindaron su tiempo y su colaboración para realizar nuestro trabajo en el aula. Al profesor Hermes Muñoz por guiarnos y compartir su experiencia como docente y a los directivos de la Institución por la autorización para llevar a cabo nuestro práctica docente.

Al profesor Yilton Riascos, nuestro director y profesor de la Práctica Pedagógica Investigativa quien nos acompañó en todo este proceso ofreciendo sus amplios conocimientos en Educación Matemática y en otros aspectos. Gracias por su tiempo y dedicación.

Y finalmente a nuestros familiares y amigos, por sus preciados consejos y gratos momentos. Por su generoso apoyo.

TABLA DE CONTENIDO

INTRODUCCIÓN

Este trabajo presenta el proceso realizado durante la Práctica Pedagógica Investigativa (PPI), según los parámetros estipulados en el currículo del programa de Licenciatura en Matemáticas de la Universidad del Cauca, desarrollada durante el período comprendido entre el primer período académico de 2010 y segundo período académico de 2011.

La presentación se realiza en tres capítulos; en el primer capítulo, se presentan las principales referentes teóricos utilizados, entre las que se encuentra la investigación en Didáctica de las Matemáticas y en ella el tipo de investigación de análisis de comportamiento. Además, perspectivas psicológicas y curriculares que permiten entender el desarrollo de la inteligencia en el sujeto.

También, se presenta el objeto matemático a trabajar en el aula de clases; y las distintas investigaciones que evidencian problemas en la enseñanza y aprendizaje de los números enteros, en el nivel de educación básica con niños de edades entre los trece y quince años. Asimismo, se presentan distintas concepciones de sistematización de experiencias y la definición de Sistematización.

En el segundo capítulo se describen tanto el problema en la práctica pedagógica a desarrollar en el aula, como el problema de investigación en

Didáctica de las Matemáticas; el primero se refiere a las dificultades que presentan los estudiantes al operar con números enteros, y el segundo se Refiere a la descripción de las estrategias utilizadas por los estudiantes al resolver una situación en esta temática.
Además se describen los elementos del contexto de la Institución Educativa Técnico Industrial sede principal de Popayán y los cursos de grado 7º (A, B Y C) en los cuales se desarrolló la práctica.

Así mismo, se explica la metodología utilizada para la enseñanza de los temas previstos y las actividades realizadas en el aula. Para finalizar este capítulo, se muestran las distintas fases de la PPI atendiendo adicionalmente a criterios particulares que la enriquecieron.

En el tercer y último capítulo se dan a conocer el análisis de resultados de la práctica pedagógica y de la investigación, las conclusiones y recomendaciones.

CAPÍTULO 1. FUNDAMENTOS TEÓRICOS

1.1. LA INVESTIGACIÓN DE ANÁLISIS DE COMPORTAMIENTO EN DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS

Algunos aspectos teóricos importantes tomados de Gutiérrez (1991), el cual describe ideas metodológicas acerca de la investigación en Didáctica de las Matemáticas, entendiendo la investigación como "*un trabajo apoyado en un marco teórico y dirigido al descubrimiento de algo desconocido y a la mejora de los conocimientos existentes sobre un tema"* (pág. 2)*;* en particular para el caso de la Didáctica de las matemáticas, las características primarias son:

a) El perfeccionamiento de las actuales formas de actuación de los profesores de Matemáticas y la búsqueda de otras nuevas, con el objetivo final de promover una mejor enseñanza de herramientas y conceptos matemáticos a los estudiantes.

b) El logro de una mejor comprensión de los mecanismos mentales ligados a la actividad de aprendizaje de las Matemáticas, para así poder organizar buenos entornos formativos para los estudiantes y poder proporcionarles los medios necesarios para facilitar su aprendizaje.(pág. 2)

Gutiérrez cita a Lesh (1979) quien proporciona su punto de vista al hablar sobre el objetivo de la investigación en Didáctica de las Matemáticas, el cual es desarrollar un cuerpo de conocimientos útiles relacionado con

Temas importantes de la Didáctica de las Matemáticas. No obstante, se aclara el término "desarrollar conocimientos útiles" que para Lesh significa:

a) Identificar problemas importantes para la enseñanza de las Matemáticas.

b) Plantear conjuntos de cuestiones concretas (y resolubles) relacionadas entre sí y que contribuyan a mejorar el conocimiento disponible sobre el problema subyacente.

c) Encontrar respuestas a esas cuestiones que sean útiles en una diversidad de contextos, eliminando la información poco válida o inútil.

d) Comunicar los resultados y conclusiones de forma que sean comprensibles por profesores e investigadores".(pág. 2)

Al planear un proyecto de investigación, existen variedad de posibilidades en cuanto a tipos de investigación, los cuales son de vital importancia conocer para seleccionar el más apropiado. En particular está el tipo de investigación de análisis de comportamiento que interesa en este trabajo, y que Gutiérrez (1991) presenta así:

> *En cualquier caso, una vez que se ha llegado a plantear una cuestión "investigable", el camino natural consiste en determinar las formas disponibles y apropiadas de trabajar. Surgen diversas posibilidades ante el investigador, entre las que podemos destacar (Johnson, 1980ª y 1980b) el análisis de comportamiento.*
>
> *…Durante el proceso de aprendizaje de alguna parte concreta de las Matemáticas por los estudiantes, se van produciendo modificaciones en su comportamiento, es decir en sus conocimientos, destrezas operatorias, etc. Estas modificaciones suelen estar directamente relacionadas con cambios en su forma de entender los conceptos matemáticos involucrados o con el surgimiento de determinadas dificultades específicas.*
>
> *Para mejorar la enseñanza, es necesario averiguar cómo se desarrollan dichos procesos de aprendizaje y descubrir la evolución del pensamiento de los estudiantes, las causas de sus problemas y cómo adquiere las habilidades cognitivas que les permiten superarlos. Se trata de un tipo de investigación a la que él, da el apelativo genérico de "análisis de comportamiento" de los sujetos (bien individualmente, bien como grupos).*

> *El análisis de los procesos y las dificultades en el aprendizaje de conceptos, algoritmos y estrategias de trabajo, que se reflejan en las formas como los estudiantes realizan determinadas tareas o en las respuestas que dan a ciertas preguntas, es una de las investigaciones más frecuentes de este tipo.*
>
> *Está comprobado por infinidad de trabajos que sólo una pequeña parte de los errores que cometen los estudiantes cuando resuelven un determinado tipo de problema o ejercicio son fortuitos (generados, por ejemplo, por falta de atención o por un fallo puntual de la memoria). Por el contrario, la mayoría de los errores se cometen de forma sistemática y aparecen de nuevo cuando se propone a los estudiantes otro problema o ejercicio similar.*
>
> *Esto significa que los estudiantes se equivocan porque aplican alguna idea incorrecta (un concepto mal entendido, una técnica mal aprendida, etc.) o, lo que es más frecuente, porque se basan en alguna idea cuyo campo de validez deja fuera a la situación en la que el estudiante la está aplicando. En el primer caso, el problema generalmente se resuelve haciendo que los estudiantes lleguen a ser conscientes de que sus ideas son erróneas y haciendo que las desechen y las cambien por las correctas.*
>
> *El segundo caso suele ser el más difícil de resolver, pues se trata de "comprensiones parciales", es decir de ideas que los estudiantes han utilizado con éxito hasta un determinado momento, pero que ya no tiene validez universal, al haberse incrementado el dominio de los conceptos en los que éstas se apoyan.*
>
> *La dificultad radica, por una parte, en que los estudiantes no entienden por qué el profesor ya no acepta sus respuestas, y por otra en que no se pueden desechar esas formas de trabajar, pues son ideas correctas, sino que hay que mostrar a los estudiantes cuándo se pueden usar y cuanto no. (págs. 6-7)*

1.2. PERSPECTIVAS CURRICULARES Y PSICOLÓGICAS

Los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas en Colombia (MEN, 2006), mencionan que los docentes deben buscar maneras para que sus estudiantes logren ser *matemáticamente competentes,* lo cual requiere ser diestro, eficaz y eficiente en el desarrollo de cada uno de los procesos generales: formular y resolver problemas; modelar procesos y fenómenos de la realidad; comunicar; razonar, formular, comparar y ejercitar procedimientos y algoritmos en los cuales cada estudiante debe ir alcanzando distintos niveles de competencia.

Adicionalmente es importante para ser matemáticamente competente, desarrollar los pensamientos, lógico y matemático. El segundo, subdividido en los cinco tipos de pensamiento (numérico, espacial, métrico o de medida, aleatorio o probabilístico y variacional) propuestos en los estándares básicos (2006) lo que permite ubicar el trabajo de PPI en el conjunto de necesidades previstas en las directrices nacionales.

En particular, respecto al pensamiento numérico, los estándares (2006) plantean la necesidad de la organización de actividades centradas en la comprensión del uso y de los significados de los números y de la numeración; la comprensión del sentido y significado de las operaciones y de las relaciones entre números y el desarrollo de diferentes técnicas de cálculo y estimación.

Estos planteamientos se enriquecen si, además, se propone trabajar en relación con los demás pensamientos, por ejemplo, cuando se trabaja con las magnitudes, las cantidades y sus medidas, se evidencia el uso de los números y operaciones, es decir, hay un enlace entre el pensamiento numérico y el pensamiento métrico.

Por lo anterior, para que los estudiantes desarrollen su pensamiento numérico, los docentes deben favorecer el incremento de su inteligencia. Para entender cómo se realiza tal favorecimiento, la perspectiva psicológica de Piaget (1962), plantea en términos más generales, el concepto de inteligencia y su problema biológico en un organismo.

Así, entendiendo que el concepto de pensamiento es una forma de inteligencia y, aún más, que es particular para la especie humana, ya que, mientras que otros organismos tienen inteligencia, el ser humano tiene la capacidad de razonar lógicamente, en particular lo que concierne a niños entre 12 y 13 años que comienzan su trabajo académico en la formación del pensamiento numérico.

Piaget (1962) para explicar su teoría, en principio habla sobre el problema biológico de la inteligencia, considerando dos factores hereditarios que condicionan el desarrollo intelectual del sujeto, dichos factores son de orden estructural y de orden funcional. Los primeros permiten diferenciar plantas, animales, personas, etc., y en particular para los seres humanos, están ligados a la constitución del sistema nervioso y de los órganos de los sentidos, no obstante, ellos son limitados, es decir, solamente se pueden distinguir ciertas percepciones de la vida real. Por otro lado los de orden funcional permiten organizar la estructura para responder a las exigencias del medio.

Por lo anterior, la herencia estructural cambia dependiendo del organismo, mientras que la herencia funcional es invariante, estos funcionamientos invariantes están dentro de los límites de las dos funciones biológicas más generales: la adaptación y la organización, la primera existe cuando el organismo se transforma en función del medio, lo cual permite que éste y el organismo generen condiciones favorables para la conservación mutua. Y la segunda, es importante para el organismo porque le permite responder a las exigencias del medio.

Así, define la inteligencia como un caso particular de adaptación biológica, ya que para él, ésta también posee estructura y función. En especial para el hombre lo estructural hace referencia a los esquemas mentales y lo funcional hace referencia a la actividad deductiva y organizadora de la razón, la cual es ilimitada ya que sobrepasa toda intuición, es decir, los seres humanos son capaces de construir conocimiento desligado de los sentidos.

Luego, la relación que une los elementos organizados de la razón a los del medio se llama una relación de asimilación, es decir, que el organismo es capaz de recibir todo aquello que le ofrece el medio en el que vive y la acomodación es el resultado de las presiones ejercidas por el medio. En este sentido, la acomodación es aquello que el organismo recibe del medio y lo organiza. Por lo tanto, la adaptación es un equilibrio entre la asimilación y la acomodación.

De este modo, existen dos clases de inteligencia, práctica o sensomotriz y reflexiva o gnóstica; la primera, permite organizar actos y asimila al esquematismo de estos comportamientos motores las diversas situaciones ofrecidas por el medio, es decir, que cada organismo hace uso de los sentidos para adaptarse al medio; mientras la segunda, construye interiormente las formas para asimilar a ellas el contenido de la experiencia.

Luego por pertenecer a la raza humana, la inteligencia se desarrolla a medida que nos adaptamos al medio, esta se da por elementos estructurales y funcionales. Por lo anterior se puede deducir que todo ser humano puede aprender cualquier conocimiento, en particular el concepto de número entero, operaciones, propiedades, etc.

Según Piaget (1962) las estructuras mentales del niño están ligadas al desarrollo biológico hasta aproximadamente los 12 años de edad, luego estas estructuras desbordan el proceso biológico. En este lapso el niño desarrolla diferentes etapas como son:

- Periodo **sensoriomotor**: que abarca desde el nacimiento hasta los 18 meses, Piaget llama a este proceso una “reacción circular”. En estos primeros meses las reacciones circulares primarias capacitan al bebé para moverse desde el esquema reflejo de succión al esquema sensorio-motor, mas diferenciado, de chupar los dedos o de ver un objeto y tocarlo por separado, así como a tomar el objeto que puede ver.

- Periodo **preoperacional**: llega hasta los 7 años. Está ligado a las percepciones sensoriales (sobre todo auditivas y visuales). No hay una lógica operacional puesto que los niños no tienen la capacidad de conservación de la cantidad, ni de inclusión de clases (no distinguen correctamente las partes del todo). Diferentes percepciones al interaccionar con los objetos, distinción de semejanzas y diferencias, construcción de clases en orden a las semejanzas y establecimiento de relaciones asimétricas entre objetos de la misma clase.
- Periodo de **operaciones concretas**: va de los 7 a 11 años. En esta etapa ya existe una lógica operacional y se desarrolla el concepto de número. Son posibles la inclusión de clases y la conservación del número. Todas las operaciones están ligadas a contextos concretos y no es todavía posible la abstracción.
- Periodo de **operaciones formales**: a partir de los 11 años. Empieza a ser posible la deducción y por tanto la abstracción.

Por lo tanto, Piaget trabaja en el campo del desarrollo biológico e intelectual del ser humano utilizando para ello las diferentes áreas del conocimiento como: biología, psicología, historia, filosofía, matemáticas, etc.

En particular, cuando se trata del desarrollo de conocimiento matemático en el aula, un autor a referenciar, y que complementa las propuestas de Piaget, es Gerard Vergnaud con su Teoría de Los Campos Conceptuales (1990)

En este sentido, la Teoría de los Campos Conceptuales de Vergnaud (1990) considera que el conocimiento está organizado en campos conceptuales cuyo dominio, por parte del sujeto, ocurre a lo largo de un periodo de tiempo, a través de experiencia, madurez y aprendizaje. Entendiendo por campo conceptual un conjunto de problemas y situaciones cuyo tratamiento requiere de conceptos, procedimientos y representaciones de tipos diferentes pero íntimamente relacionados.

Así para Vergnaud (1990), el núcleo del desarrollo cognitivo es la conceptualización, definiendo concepto como una tripleta de conjuntos
C=(S, I, R) donde:
S: conjunto de situaciones que dan sentido al concepto.
I: es un conjunto de invariantes (objetos, propiedades y relaciones) que se utiliza para analizar las situaciones de S.
R: son las representaciones simbólicas.

De este modo, una situación es una tarea que promueve la acción del sujeto por medio de los esquemas evocados, se pueden distinguir dos clases: La primera para la cual el sujeto dispone en su repertorio, en un momento dado de su desarrollo y bajo ciertas circunstancias, de competencias necesarias para el tratamiento relativamente inmediato de la situación. La segunda, para la cual el sujeto no dispone de todas las competencias necesarias lo que le obliga a un tiempo de reflexión y de exploración, de dudas, y le conduce eventualmente al éxito o al fracaso. (Vergnaud, 1990).

Para estas clases de situaciones es importante el concepto de esquema, el cual funciona de distinta manera en ambos casos. Para la primera situación se observa una misma clase de situaciones, conductas muy automatizadas organizadas por un único esquema. Para la segunda situación, se observa la utilización sucesiva de varios esquemas que pueden entrar en competición y que para llegar a la solución buscada deben ser acomodados separados y recombinados, en este proceso los individuos descubren situaciones nuevas.

Entonces, Vergnaud llama esquema a “la organización invariante de la conducta para una clase de situaciones dada” (1990, pág. 2), según él, es en los esquemas que se deben investigar los conocimientos en acto del sujeto, es decir, los elementos cognitivos que hacen que la acción del sujeto sea operatoria.

La relación entre situaciones y esquemas es la fuente primaria de la representación y por lo tanto de la conceptualización. Además, los esquemas contienen invariantes operatorios que, Vergnaud (1990), designa como concepto en acto y teorema en acto.

Por lo anterior, para resolver una situación nueva, el sujeto necesita poder utilizar de manera estratégica los conocimientos de los que dispone y, además, saber apropiarse de otros nuevos para lograr su objetivo.

Las estrategias cognitivas que se utilizan para enfrentar y resolver situaciones, para Inhelder (1978) son todo un sistema y toda secuencia de procedimientos, susceptibles de ser repetidos y transferidos a otras situaciones, que constituyen los medios para alcanzar el fin hacia el que tiende el sujeto. Las nociones de *medios* y *fin* son relativos, ya que un medio puede ocasionalmente convertirse en fin y recíprocamente. El problema central del estudio psicológico de las estrategias consistirá precisamente en determinar sus condiciones de éxito, es decir, en precisar los ajustamientos progresivos de los medios al fin y en analizar su formación.

El análisis de las estrategias cognitivas, se centra en observar y describir los procedimientos cognitivos que se usan de manera intencional para realizar tareas que de ninguna manera podrían reducirse a secuencias automatizadas.

Los trabajos sobre resolución de problemas se consideran bajo dos perspectivas. Una es la de resolución de problemas como una estrategia didáctica para el abordaje de los contenidos y otra es la capacidad de resolución de problemas que permite el desarrollo de ciertas estrategias cognitivas y metacognitivas como logro fundamental de toda la educación básica y media.

La psicología genética, entendida como base empírica de la epistemología genética, parte de un estudio rigurosamente descriptivo del sujeto psicológico al que Inhelder (1978)define como lo que es propio de los sujetos individuales, como por ejemplo la necesidad de una organización general que debe operarse entre el objetivo a alcanzar, o fin, y los medios disponibles. Es decir, el niño quien en su progresivo descubrimiento de medios, lo que hace es resolver problemas que están indisociablemente ligados a contenidos concretos y específicos. Es decir, se habla de un sujeto (individuo) biológicamente constituido, un ser orgánico capaz de auto replicarse estructurado sistémicamente, quien desarrolla procesos de adaptación al medio natural y socio-cultural. Un sujeto que conoce la realidad en la cual está inmerso y que lo rodea a través de un número ilimitado de procedimientos y mecanismos particulares. Estos procedimientos se caracterizan por estar inscritos en el tiempo y en el espacio y manifestarse en conductas empíricas que es posible observar y describir.

A diferencia de este sujeto psicológico, el sujeto epistémico se entiende en Inhelder (1978) como lo que hay de común a las estructuras intelectuales de los sujetos de un mismo nivel de desarrollo, es decir, como aquel cuyas estructuras son comunes en el mismo nivel evolutivo, sea quien sea el sujeto.

1.3. LOS NÚMEROS ENTEROS

En la investigación realizada por Torres(2007)sobre los números enteros, origen e historia; se observa que el hombre desde la era primitiva utilizó recursos para relacionarse con el medio que lo rodea, llevándolo a la noción de cantidad donde aparece el número, como herramienta para contar; de ahí surgieron los números naturales los cuales se pueden sumar y multiplicar pero no todos se pueden restar o dividir, por ello los matemáticos se ven en la necesidad de realizar una extensión al conjunto de los números negativos.

De donde aparece el conjunto de los números enteros, formado por los números naturales y los números negativos o antiguamente conocidos como “números deudos” o “números absurdos”, los cuales datan de una época donde el interés central era la de convivir con los problemas cotidianos de la naturaleza; por ello hasta fines del siglo XVIII los números negativos no eran aceptados universalmente, su uso se remonta al siglo V, en oriente, y llega a occidente en el siglo XV.

Por otra parte los números negativos no eran reconocidos como tales, ya que su origen no era natural, pero muchos matemáticos los estudiaron como:

- Gerolamo Cardano en el siglo XVI, llamaba a los números negativos “falsos”, pero en su Ars Magna (1545) los estudió exhaustivamente.
- Jhon Wallis (1616 - 1703), en su Aritmética Infinitoum (1655), “demuestra” la imposibilidad de su existencia diciendo que “esos entes tendrían que ser a la vez mayores que el infinito y menores que cero”.
- Leonardo Euler es el primero en darles estatuto legal, en su Anteitung Zur Algebra (1770) trata de “demostrar” que $(-1)*(-1)=+1$;

argumentaba que el producto tiene que ser $+1$ ó -1 y que, sabiendo que se cumple $(1)*(-1)=-1$, tendrá que ser: $(-1)*(-1)=+1$

Pero estos números con signo tuvieron que esperar a la revolución matemática que se originó en el primer tercio del siglo XIX, para que los matemáticos los asumieran como números. Despojando al número de su sentido originario como medida de cantidades de magnitud y aceptar como definiciones válidas en matemáticas, tanto aquellas que "dan sentido físico" a los objetos matemáticos (definiciones esencialistas), como las que definen los objetos matemáticos estableciendo sus reglas de manipulación (definiciones funcionales). En este marco teórico Peacock estableció en 1830 que los números con signo eran números positivos los precedidos de un signo "+" y negativos los precedidos de un signo "**-**". A los números naturales precedidos de un signo se les llamó números enteros, **Z**. (Bruno, 2009)

1.3.1. CONSTRUCCIÓN FORMAL DE LOS ENTEROS A PARTIR DE LOS NATURALES

En Muñoz (1983) se encuentra la construcción de un número entero negativo mediante la diferencia de dos números naturales. Por ejemplo $-3=5-8$ de donde puede asociarse el número -3 con el par ordenado $(5,8)$ de números naturales. Sin embargo, debido a que $(4,7)$ y una infinidad más de pares ordenados dan como resultado -3 al restar sus componentes, no puede decirse simplemente que $-3=(5,8)$ Lo que puede hacerse, es incluir todos los pares ordenados de números naturales, que dan como resultado -3 al restar sus componentes dentro de un solo conjunto, o, más exactamente, dentro de una clase de equivalencia. Para ello, aprovechamos el que dos pares ordenados $(a,b)\, y\, (c,d)$ puedan ser asociados al mismo número:

$$a-b=c-d \quad (1)$$

El único problema es que la ecuación (1) no está definida en $\mathbb{N}$ cuando $a<b$.

Pero esto se remedia fácilmente, al notar que $a-b=c-d$ equivale a $a+d=b+c$

Ciertamente $(a+b)\in\mathbb{N}$ para cualesquiera $a,b\in\mathbb{N}$ de tal manera que puede definirse una relación $\sim$ sobre $\mathbb{N}\ X\ \mathbb{N}$ mediante:

$(a,b)\sim(c,d)$ Si y solo si $a+d=b+c$

La relación $\sim$ es una relación de equivalencia que produce en $\mathbb{N}\ X\ \mathbb{N}$ una partición en clases de equivalencia, cada una de las cuales puede ser asociada a un único número entero y viceversa. Por ejemplo:

$$[(4,7)]=[(2,5)]=[(5,8)]=[(1,4)]=-3$$

Si admitimos el cero como número natural, podemos definir:

$$\begin{cases}[(n,0)]=n\\ [(0,n)]=-n\end{cases}$$

Para todo $n\in\mathbb{N}$

Si no se acepta el cero como número natural, y se parte, en cambio del 1, se define entonces:

$$\begin{cases}[(n+1,1)]=n\\ [(1,n+1)]=-n\end{cases}$$

Para todo $n\in\mathbb{N}$

Luego el cero puede definirse como:

$0=[(n,n)]$ Para todo $n\in\mathbb{N}$

El escoger $(n,0)\,y\,(0,n)\,o\,(n+1,1)\,y\,(1,n+1)$ para cuando no se acepta $0\in\mathbb{N}$, para las definiciones anteriores es una decisión completamente arbitraria que toma en cuenta la sencillez de estos pares ordenados. Nótese que de cualquier forma:

$$\begin{cases} [(n+m,m)] = n \\ [(m,n+m)] = -n \end{cases}$$

Para todo $n \in \mathbb{N}$

Se define pues el conjunto de los números enteros como el conjunto de todas las clases de equivalencia producidas por la relación $\sim$ sobre el producto cartesiano $\mathbb{N}\ X\ \mathbb{N}$

$\{[(a,b)]\sim |(a,b) \in \mathbb{N}\ X\ \mathbb{N}\}$

Esto es, $\mathbb{Z}$ es el conjunto cociente:

$\mathbb{Z} = (\mathbb{N}\ X\ \mathbb{N})/\sim$

1.3.2. ESTRUCTURA ALGEBRAICA DE LOS NÚMEROS ENTEROS

En Fraleigh (1987) se demuestra que los números enteros con la adición y la multiplicación forman una estructura algebraica llamada anillo. Por otro lado $(\mathbb{Z}, \leq)$, donde $\leq$ es el orden usual sobre $\mathbb{Z}$, es un conjunto completamente ordenado sin cota superior o inferior.

Como (Z, + *) es un anillo conmutativo con unitario llamado uno (1) y posee elemento neutro y aditivo llamado cero (0), así se van a demostrar algunas propiedades que se pueden interpretar como ley de signos.

Sea R un anillo conmutativo con unitario entonces para cualquier a, b ∈R, tenemos:

1. $0 * a = a * 0 = 0$

Demostración:

Por la ley de cancelación para el grupo aditivo (Z, +) se tiene:

$0 = a * 0$ Así mismo,$0 * a = (0 + 0) * a = 0 * a + 0 * a$ implica que $0 * a = 0$.

2. $a * (-b) = (-a) * b = -(a * b)$

Por definición de inverso aditivo $-(a * b)$ es el elemento que, sumado a $(a * b)$, da 0. Así, para mostrar que $a * (-b) = -(a * b)$ debe mostrarse precisamente que

$a * (-b) + a * b = 0$. Por la ley distributiva izquierda se tiene

$a * (-b) + a * b = a * (-b + b) = a * 0 = 0$ Por **1),** $a * 0 = 0$

3. (-1) $*$ (-1)=+1

Demostración:

-1 es el inverso aditivo del 1, entonces, por definición se verifica

1 + (-1) = 0

Multiplicamos por (-1):

$(-1) * \left(1 + (-1)\right) = (-1) * 0$

Pero 0 por cualquier número es 0

$(-1) * \left(1 + (-1)\right) = 0$

Por ley de distributiva de la multiplicación en la suma

$(-1) + (-1 * -1) = 0$

Sumamos 1 a ambos lados de la ecuación:

$1 + (-1) + (-1 * -1) = 1$

Como $1 + (-1) = 0$ entonces

$0 + (-1 * -1) = 1$

Entonces

$-1 * -1 = 1$

Ahora, todo número real no negativo $-p < 0$ se puede expresar por $-1 * p$

Entonces si multiplicamos dos números con signo negativo se verifica:

$(-p) * (-q) = (-1) * p * (-1) * q$

Por ley de conmutatividad en la multiplicación eso equivale a
$(-p) * (-q) = (-1) * (-1) * p * q$

Pero, entonces $-1 * -1 = 1$

$(-p) * (-q) = 1 * p * q$, pero 1 es el neutro multiplicativo, entonces
$(-p) * (-q) = p * q$

De esta manera se puede observar que no se puede deducir en el aula de clases la ley de los signos para operar con números enteros, ya que se necesitan de conceptos más elaborados, que en el nivel de educación básica no se abordan, por esta razón, en la mayoría de los casos, los profesores dan a conocer la ley de signos y la forma de utilizarla, por lo tanto los estudiantes memorizan estas leyes y las aplican a la resolución de las situaciones.

1.4 LA ENSEÑANZA Y EL APRENDIZAJE DE LOS NÚMEROS ENTEROS

La manera de presentar los números enteros en el aula, en particular los enteros negativos, influye en el conocimiento numérico de los estudiantes, para Bruno (1997), en las matemáticas modernas se introducían utilizando pares ordenados de números naturales, además consideraban la relación de equivalencia.

En la actualidad, se pasa en general, de $\mathbb{Z}^+$ a $\mathbb{Z}$, implicando la creación de entes nuevos por parte de los estudiantes, por ello sugiere que la mejor manera de presentar los números negativos es por adjunción, es decir, a los números positivos que ya se conocen se añaden sus opuestos a través de su correspondiente notación y representación en la recta numérica.

Para ello, Bruno muestra la secuencia seguida en España por los profesores para la enseñanza de los diferentes sistemas numéricos como son:

[

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Z}+ \arrow[r, "1"] \arrow[d, "2"'] & \mathbb{Q}+ \arrow[d, "3"] & \\
\mathbb{Z} \arrow[r, "3"'] & \mathbb{Q} \arrow[r, "4"'] & \mathbb{R}
\end{tikzcd}$$

que se realiza cada extensión numérica. Es decir, primero se realiza la extensión $\mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{Q}^+$, la segunda extensión es $\mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{Z}$ y, más tarde, $\mathbb{Q}^+ \rightarrow \mathbb{Q}$ o bien $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}$. De este modo se produce una discontinuidad en el momento de introducir los números negativos. Pese a que los estudiantes conocen el conjunto $\mathbb{Q}^+$ de los racionales no negativos, la segunda ampliación que se estudia no es $\mathbb{Q}^+ \rightarrow \mathbb{Q}$, sino $\mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{Z}$, lo que obliga a los estudiantes al abandono de sus conocimientos sobre los racionales.

Por ello para Bruno la extensión más propicia es aquella que avance hacia los reales sin retrocesos como por ejemplo:

$\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}^+ \longrightarrow \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R}$

$\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Q}^+ \longrightarrow \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R}$

$\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Q}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ (Bruno, 2007)

Por otro lado, en la enseñanza de los números enteros se debe tener en cuenta las tres dimensiones del conocimiento numérico que abarca diversos aspectos relativos a los números, Bruno (1997) distingue tres dimensiones de éste:

- ✓ La dimensión abstracta: conocimientos referidos a los sistemas numéricos como estructuras matemáticas, a las formas de escritura de los números y a reglas operatorias.
- ✓ La dimensión de recta: representación de los números sobre una recta, basada en la identificación de los números reales con los puntos de la recta y con vectores en la misma.
- ✓ La dimensión contextual: situaciones concretas en las que se usan los números, aplicaciones o problemas.

El conocimiento numérico no se limita al conocimiento de las tres dimensiones, sino también abarca las transferencias entre ellas.

Además, las investigaciones sobre la enseñanza de los números enteros, evidencian los problemas que tienen los estudiantes en el aprendizaje de este conocimiento, en particular las operaciones con los números negativos, principalmente la resta, así se cita a Montoya M.(2006) qquien en su reporte de investigación menciona algunos estudios que referencian este hecho como:

- ✓ "Küchemann (1980,1981) propone a los estudiantes de 14 años un cuestionario sobre suma, resta y multiplicación de número enteros. Los mayores porcentajes de éxito se obtienen en las sumas, seguidas por las multiplicaciones, mientras que con las restas resultan ser las operaciones peor resueltas."

- ✓ "Bell (1982) en entrevistas realizadas a estudiantes de 15 años, comprueba que así como el 80% suman correctamente dos números enteros, solamente el 40% es capaz de restar sin errores".

- ✓ “Murray (1985) examina también a estudiantes de secundaria que han recibido enseñanza sobre los números enteros y obtiene que los mayores porcentaje de éxito se dan en el producto de dos números enteros (alrededor del 75% de aciertos), mientras que las restas de enteros tiene porcentaje de éxito que varían entre el 46% (8 – 3) y el 69% (3 – 8).”(Montoya, 2006)

Por otro lado, para Montoya los números enteros en particular los números negativos fueron negados por cerca de 1000 años por los matemáticos, aceptados después de interminables conflictos en el interior de la comunidad matemática, ya que se los utilizaban como herramientas pero no le daban el carácter formal que necesitaban en la matemática, fue un conflicto que duró mucho tiempo, entonces ella concluye que los estudiantes de 13 a 14 años de edad iniciándose en la formalidad también experimentan dificultades para entender dichos números.

También Robinet (1986) y Fischbein (1994) han puesto de manifiesto esta situación en sus investigaciones didácticas. Concretamente, los estudiantes manifiestan, entre otros aspectos, poca claridad en las relaciones de los diferentes sistemas numéricos (naturales, enteros, racionales, irracionales, reales), en las distintas formas de escribir un racional (1/2 = 0.5), en la escritura decimal de los reales, en la identificación de los reales con la recta o en la densidad de los racionales en los reales. (Bruno, 2007).

1.5. LA SISTEMATIZACIÓN

En la práctica, surgió como requerimiento acudir al concepto de Sistematización de Experiencias, el cual según Carvajal Burbano(1999) en la década de los 90 y hasta ahora ha adquirido gran importancia y significado en contexto de la Educación Popular; allí se muestran algunas definiciones acerca de dicho concepto con el fin de ampliar la visión de lo que es sistematizar una experiencia.

La sistematización tiene como principal campo de acción la educación en grupos populares y por ende la construcción de conocimientos a partir de experiencias realizadas por trabajadores sociales en diferentes procesos como desarrollo comunitario, intervención con familias, grupos, etc.

La Tabla N° 1 presenta algunos planteamientos acerca de Sistematización a partir de diferentes autores:

Tabla N°1: planteamientos acerca de Sistematización de algunos autores.

AUTOR	CONCEPTO DE SISTEMATIZACION
María Mercedes Barnechea; Estela Gonzales; María de la Luz Morgan	Proceso permanente y acumulativo de producción de conocimientos a partir de las experiencias de intervención en una realidad social
Arrizadlo Carvajal Burbano	Es un proceso teórico y metodológico, que a partir del ordenamiento, reflexión crítica, evaluación, análisis e interpretación de la experiencia pretende conceptualizar, construir conocimiento, y a través de su comunicación orientar otras experiencias para mejorar las prácticas sociales.
CEPECS	La sistematización no es cualquier actividad de registro de información, ni se hace de cualquier manera. Ella exige permanentes reflexiones y referencias teóricas y metodológicas, lo cual significa también que no es un simple proceso técnico.
Oscar Jara	La sistematización es una mirada crítica sobre nuestras experiencias y procesos, recogiendo constantes. En este sentido significa un ordenamiento e interpretación de nuestras experiencias vistas en conjunto, y del papel o función de cada actividad particular dentro de este conjunto

Para cualquier campo social, la sistematización es de gran importancia, según Carvajal (1999) Existen varias razones que argumentan lo anterior, entre ellas.

- Sistematizamos para reflexionar y por lo tanto mejorar nuestra propia práctica
- Es necesario comunicar el proyecto de la sistematización a la comunidad, puesto que permite a otros profesionales que trabajen en campos educativos y sociales enfrentando problemas similares puedan aprender de nuestra experiencia, dándoles la posibilidad de no repetir los errores que hayamos cometido.
- Obliga a reflexionar constantemente sobre el trabajo, a repensar permanentemente en el sentido que tiene el quehacer, ayuda a reconocer sus avances y límites, es decir, especificando lo más precisamente posible lo que se quiere conocer sobre la experiencia.
- Las posibilidades de aporte a la producción de conocimiento científico.

A partir de las definiciones anteriores sobre la sistematización de experiencias, se logra observar que el trabajo de sistematización allí descrito, implica considerar la construcción de conocimientos desde una perspectiva de interacción social, que va en contra de la propuesta de esta práctica pedagógica investigativa, ya que en este trabajo no existe una comunidad interesada en resolver un problema, ni se cuenta con un equipo de expertos en sistematización de experiencias, razón por la cual se decide trabajar solo con la concepción de sistematización que hace referencia a la organización secuencial de ciertas etapas para desarrollar un trabajo de aula, dichas etapas son:

- **PREPARACION:** hace referencia a todo aquello que se tiene en cuenta antes de hacer la intervención en el aula, por ejemplo: la determinación de necesidades teóricas (sobre investigación, conocimiento de un sujeto, enseñanza y aprendizaje en la escuela, etc.), escogencia del tema a investigar, planteamiento de la pregunta de investigación, antecedentes del tema, la escogencia del lugar en donde se iba a desarrollar la intervención, el contexto institucional, el proyecto de intervención.

- **IMPLEMENTACIÓN:** trata sobre la ejecución del proyecto de intervención en el lugar ya determinado. En esta parte es en donde se confronta lo planeado anteriormente con la realidad realmente existente en el aula de clases y en donde generalmente se hacen algunos cambios o ajustes a aquello que se quería hacer en el aula de clases.
- **EVALUACIÓN:** Pretende valorar lo que ha pasado, especialmente en lo que se refiere a los objetivos y a su logro, a la concordancia entre el proyecto, la práctica y la realidad, a los límites y a los alcances, a los aciertos y errores, a los facilitadores en la intervención y a los obstaculizadores.
- **SÍNTESIS:** Hace referencia a la presentación de lo más relevante de la práctica. Es en donde finalmente se encuentra respuesta a la pregunta central.

CAPÍTULO 2. EL PROBLEMA EN LA PPI

2.1. DESCRIPCIÓN DE LA INSTITUCIÓN

La Institución Educativa Técnico Industrial (sede principal), donde se implementó la práctica pedagógica investigativa; inició su funcionamiento en el transcurso de 1959 con la colaboración de la Ministra de Educación de la época, doña Josefina Valencia de Ubach y los doctores Víctor Mosquera Chaux, Álvaro Simmonds y Antonio Lemus Guzmán quienes, en ese entonces, desempeñaban los cargos de gobernador, secretario de educación y rector de la Universidad del Cauca respectivamente.

Actualmente está ubicado en el barrio Pomona al norte de la ciudad de Popayán, en él se imparten, además de Educación Básica y Media, modalidades de formación técnica, algunas como: mecánica industrial, mecánica automotriz, electricidad, metalistería, dibujo, sistemas, ebanistería y desarrollo de software.

Esta institución es de carácter oficial y mixto, comprometida de manera permanente con el desarrollo social, mediante la educación crítica, reflexiva, responsable y creativa, dirigida a estudiantes de todos los estratos y niveles de educación, y cuyos objetivos cada día son, según(IETI, 2009):

- Seguir mejorando en las pruebas de estado.
- Aumentar el rendimiento académico y mejorar la convivencia.

- Incrementar los convenios interinstitucionales.

En cuanto a los profesores de la institución, se caracterizan por su alto nivel de compromiso con su comunidad educativa. Se involucran en proyectos escolares; se comprometen con las propuestas, generan gran diversidad de iniciativas; y realizan importantes tareas de contención, integración y atención a la diversidad (IETI, 2009).

2.2. DESCRIPCIÓN DE LOS CURSOS DONDE SE REALIZÓ LA PPI.

Se trabajó con tres cursos del grado séptimo, A, B y C en el año lectivo 2011. Los estudiantes se encuentran en edades entre 12-13 años y están en estratos socioeconómicos 1 y 2.

Tabla N°2. Distribución de los estudiantes de grado séptimo de la IETI, repitentes y no repitentes, por género.

GRADO	Niños	Niñas	Repitentes		Total
			Niños	Niñas	
SEPTIMO A	27	10	2	1	**40**
SEPTIMO B	29	10	2	1	**42**
SEPTIMO C	29	5	4	2	**40**
Total	**85**	**25**	**9**	**4**	**122**

Como se puede observar en la Tabla N°2, los cursos están conformados en su mayoría por niños, algunas de las razones que argumentan esto es porque a partir del año 1997**,** la IETI pasó a ser una institución de carácter mixto. Además, por creencias de tipo cultural, la mayoría de modalidades de formación técnica están ofrecidas a la clase masculina.

2.3. DISEÑO DE LA PPI

Teniendo en cuenta las etapas de la sistematización, **la preparación** se llevó a cabo en los dos periodos iniciales de la PPI, en el primero, se estudiaron sustentos teóricos descritos en el primer capítulo, antecedentes de investigaciones sobre la enseñanza y aprendizaje de los números enteros. Además, se estimó lo que se va a hacer en cada fase, teniendo una idea general acerca de lo que se pretende hacer en el trabajo.

En el segundo, Se planteó un objetivo con respecto a la práctica pedagógica; que consistió en lograr que los estudiantes operen con números enteros, este objetivo será medido mediante las notas obtenidas por los estudiantes en las diferentes situaciones planteadas y se planteó un problema de investigación en Educación Matemática, el cual se constituyó a través de una pregunta: ¿Cuáles son las estrategias que utilizan los estudiantes de grado séptimo al sumar o restar números enteros, después de la metodología enseñada para resolver este tipo de situaciones?

Después de hacer estos planteamientos, se revisaron diferentes textos guías de matemáticas de grado séptimo, en donde se encuentra el tema de los números enteros, entre ellos:

1. Matemática Moderna estructurada 2. Darío Wills y Hugo Guarín. Editorial Norma. 1987.
2. Matemática Moderna. Samuel Londoño L. Editorial Voluntad. 1994.
3. Soluciones Matemáticas 7. Clara Esther Melo Rodríguez. Editorial Escuelas del Futuro. Bogotá 2007.
4. Elementos de Matemáticas. Julio A. Uribe Calad y José Israel Berrío. Molina. Bedout Editores. Cuarta edición. 1989 Medellín, Colombia

Esto se hizo con el fin de identificar las diversas metodologías de enseñanza de los números enteros y sus operaciones básicas, propuestas en los textos, así se encontraron metodologías distintas, por ejemplo:

- En el primer libro, se introducen los números enteros a partir del tema de las relaciones y funciones, en donde se hace un comentario acerca de la necesidad de ampliar el conjunto de los números naturales; para ello, al conjunto unitario del vacío se le asigna el número cero y a partir de la definición de una relación, la cual es reflexiva, simétrica y transitiva se construyen los números enteros, seguido de sus propiedades.
- En el segundo libro, se explica que los enteros son los números opuestos o simétricos a los números naturales y las operaciones se hacen en la recta numérica.
- El tercero, fue útil en la práctica para la formulación de ejercicios sobre los distintos temas, ya que es muy elaborado en cuanto a las pruebas, las cuales están diseñadas para la práctica de los estudiantes en la solución de diversidad de problemas.

  El libro está estructurado en periodos y estos a su vez en lecciones, están acompañados de una prueba en donde los estudiantes deben resolver una serie de ejercicios relacionados con dichos temas.

  Para la práctica Pedagógica, se usó el primer periodo del libro, correspondiente al pensamiento numérico y conformado por cuatro lecciones, de las cuales solo se usaron algunos temas, por ejemplo:

Tabla N°3. Temas del libro usados en la PPI.

Lección	Pensamientos numérico	Paginas
1	Posiciones relativas Números Enteros Números Enteros en la recta numérica Valor absoluto	8-9 10-11 12-13 14-15
2	Relación de orden entre números enteros Adición de números enteros Propiedades de la adición de números enteros Sustracción de números enteros	16-17 18-19 20-21 22-23
3	Multiplicación de números enteros Propiedades de la multiplicación de números enteros	30-31 32-33
4	División de números enteros	34-35

Luego de hacer un análisis del libro, se puede observar que la metodología de enseñanza de los números enteros se hace a partir de la posición relativa (izquierda-derecha, arriba-abajo, atrás-adelante, antes-después y sobre-abajo), la cual se contextualiza a partir de la vida real en distintos escenarios como las posiciones de autos en una carrera automovilística, posición en pisos de edificios, etc.

Lo anterior con el fin de mostrar que todas las cantidades que denotan posiciones relativas pueden representarse mediante números enteros; seguidamente, dichos números se caracterización cómo un conjunto numérico, formado por los números enteros positivos, los números enteros negativos y el cero.

Posteriormente, esas cantidades representadas por números enteros en distintas situaciones de la vida cotidiana se trasladan a la recta numérica. Luego, se introduce el concepto de valor absoluto de un número entero y la relación de orden entre éstos. Lo anterior con el fin de definir la adición de dos o más números, asimismo, se precisa la sustracción, mediante la propiedad del inverso aditivo.

Finalmente, la multiplicación y la división, se trata mediante casos, dependiendo del signo del número; y reglas que permiten operarlos signos y luego los números. Las operaciones de Adición y la Multiplicación vienen acompañadas con sus respectivas propiedades.

- El cuarto libro se compone de 0 a 15 unidades, de las cuales se utilizaron para el proyecto las unidades 1 y 2; correspondiente a la primera parte sobre sistemas numéricos (el conjunto de números Enteros).

En la unidad 1 se pretende hacer una “introducción al número entero”, en primer lugar se realiza una actividad previa sin ninguna definición matemática. En seguida hay una primera actividad la cual busca dar cuenta de la importancia de introducir unos números diferentes a los números naturales, fraccionarios positivos y a los decimales positivos (vistos previamente), puesto que estos nuevos números el hombre los necesito a través de la historia. Se plantean situaciones sobre resta de números cuando el minuendo es menor que el sustraendo y situaciones que implican “deber”.

En seguida ya hay una caracterización de los números enteros en positivos, negativos y la introducción del cero. Se hace mucho énfasis en la posición de los signos para identificar si es positivo o negativos, por ejemplo: +1, +2, etc. para positivos y -4, -87, etc. para negativos. Luego ya hay una “definición” sobre numero entero

En la representación gráfica de los números enteros ya se habla de un segmento unidad para graduar la recta numérica, se ubican los positivos y los negativos como orientación derecha e izquierda del cero respectivamente. Además, el valor absoluto de un número entero se mira como una “transformación” de negativos a positivos.

En la unidad 2 la suma de enteros se estudia por casos:

- Los dos números son positivos

- Un número es positivo y el otro negativo
- Los dos números son enteros positivos
- Suma de varios números enteros

Finalmente, una de las características más importantes es que en cada una de las actividades en las cuales hay que operar con suma, se tienen en cuanta la posición de los signos, bien sea para el numero y para la operación.

Finalmente, se contactó al rector del Centro Educativo Instituto Técnico Industrial. Tras una reunión con él, los coordinadores y los profesores del área de matemáticas, se llegó a un acuerdo con el cual se daban plenas garantías para desarrollar la PPI.

En la **implementación** se plantearon por parte de los practicantes, las situaciones a trabajar en el aula con respecto a la enseñanza de los números enteros en el grado séptimo de la IETI, con la colaboración del profesor Hermes Muñoz quien era el docente de estos cursos y quien colaboró brindando consejos prácticos para tener un mejor manejo del orden y la disciplina.

El tiempo empleado para realizar la planeación de las primeras sesiones fue de una semana por ello el profesor ya había orientado el concepto de número entero y la ubicación de los enteros en la recta.

Por lo anterior, los temas a enseñar por parte nuestra fueron:

- Valor absoluto
- Inverso aditivo de un número entero
- Operaciones con los números enteros (Adición, sustracción, multiplicación y división)
- Propiedades (adición y multiplicación)

- Supresión de signos de agrupación.

Para el diseño de las clases se utilizaron los libros, Soluciones Matemáticas 7 y Elementos de Matemáticas, mencionados anteriormente; además de utilizar documentos encontrados en la web, buscando que el diseño fuera lo más claro y sencillo posible, teniendo en cuenta experiencias de los profesores.

Así, en cuanto a la metodología de enseñanza a cargo de los practicantes, cada sesión estuvo conformada por una parte expositiva, que iniciaba haciendo un resumen de la clase anterior. Enseguida, se enseñaba nuevos conceptos con sus respectivos ejemplos, los cuales tenían un objetivo de aprendizaje; continuando con una aplicación de dichos conceptos por medio de actividades de retroalimentación, que permitía evaluar al estudiante ya fuera mediante un taller individual o un taller grupal. De esta manera, la metodología era la que usualmente utilizaba el profesor encargado de los cursos en donde realizamos el trabajo.

Con la metodología propuesta en este trabajo, se pretendió que los estudiantes utilizaran estrategias exitosas para resolver problemas de suma y resta de números enteros.

En los anexos se presentan el diseño de las clases realizadas por los practicantes para trabajar en el aula; además de las diferentes situaciones que se utilizaron para dar respuesta a los objetivos propuestos en la etapa de preparación.

La etapa de la **evaluación** consistió sobre la reconstrucción de la experiencia realizando una descripción ordenada de lo sucedido en la práctica pedagógica investigativa, que conlleva al análisis e interpretación de lo sucedido, descomponiéndola en los diferentes elementos que la constituyen, identificando las relaciones que existieron entre ellos, comprendiendo los factores que los explican y las consecuencias de lo sucedido.

Finalmente se realizó la etapa de la **síntesis** que consistió en la construcción de la respuesta a la pregunta de investigación. Todo esto será consignado en este documento para su posterior divulgación a la comunidad académica.

Dentro de este proceso y como una forma de aproximación a la investigación educativa, se diseñó y desarrolló un problema de investigación, considerando los intereses particulares que como licenciados se puede tener respecto del avance en el conocimiento de los estudiantes en el aula de clases.

A continuación se describe el diseño de este ejercicio de investigación.

Inicialmente se propone, dentro del examen final, una situación con el cual se pretende evaluar las diferentes estrategias elaboradas por los estudiantes al intentar resolver la situación.

El texto que se propuso fue el siguiente: "resolver la siguiente situación": $(-359) - (-221) + (-578) - (11) + (426)$

Esta situación involucra las operaciones de suma y resta con números enteros incluyendo la ley de signos de los números.

La metodología que se propuso a los estudiantes para resolver este tipo de situaciones, se describe a continuación:

- Primero, se debe realizar la supresión de paréntesis, utilizando la ley los signos de los números.
- Segundo, se deben identificar y separar los números enteros negativos de los positivos y operar los números dos a dos según la operación indicada por los signos.

- Tercero, sumar los números enteros positivos y los números enteros negativos.
- Cuarto, realizar la resta entre los resultados obtenidos en el tercer paso.

Se esperaba que los estudiantes utilizaran esta forma de resolver este tipo de situaciones, puesto que la mayoría de los estudiantes estaban asistiendo al curso por primera vez y se suponía que era la forma que sabían para resolverla.

Considerando todas las distintas soluciones presentadas por los niños se intenta identificar las estrategias que tales soluciones contienen, para dar respuesta a la pregunta de investigación: "¿Cuáles son las estrategias que utilizan los estudiantes de grado séptimo al sumar o restar números enteros después de la metodología enseñada para resolver este tipo de situaciones?".

CAPÍTULO 3. RESULTADOS DE LA PPI

3.1. INTRODUCCIÓN

De acuerdo a los estándares básicos (2006) el trabajo está enmarcado en el desarrollo del pensamiento numérico ya que se pretende enseñar a los estudiantes el tema de los números enteros que incluye las operaciones básicas, las propiedades, el orden en números enteros y su representación en la recta numérica.

Para la enseñanza de los temas previstos en el aula, se tuvo en cuenta la consideración de Bruno (2007), quien asegura que la extensión más propicia para la enseñanza de los conjuntos numéricos, es aquella que avance hacia los reales sin retrocesos, como por ejemplo:

$$\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}^{+} \longrightarrow \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R}$$

Igualmente, se tuvo en cuenta las tres dimensiones del conocimiento numérico, que abarca diversos aspectos relativos a los números (Bruno, 1997). Además de las transferencias entre dichas dimensiones.

Con el desarrollo de este pensamiento, se busca que el estudiante incremente su inteligencia teniendo en cuenta la perspectiva psicológica de Piaget (1962), el cual afirma que todos los organismos, en particular los seres humanos poseen inteligencia, pero que su desarrollo depende, hasta cierto tiempo, del desarrollo biológico, en este sentido, se trabaja con estudiantes, con edades comprendidas entre 12 y 13 años, que se ubican, según esta teoría, en la etapa de operaciones formales.

3.2. RESULTADOS DEL TRABAJO EN EL AULA

La interacción con un conjunto de40 a 43 estudiantes es una experiencia nueva para cada uno de los integrantes del grupo de trabajo, ya que aunque se tiene un buen conocimiento del tema a enseñar, no se cuenta con gran experiencia en el manejo de la disciplina y el orden en el aula de clases.

Cada clase constaba de dos sesiones y cada sesión de 50 minutos, en consecuencia se distribuía el tiempo de la siguiente manera: se llamaba a lista de asistencia, un resumen de la clase anterior, se enseñaban los conceptos con sus respectivos ejemplos, una actividad de retroalimentación y una evaluación ya fuera mediante taller o examen, pero inicialmente no se contaba con los quehaceres impuestos por la institución, se tenía en cuenta el estudiante epistémico, mas no el estudiante psicológico y todo esto ayudó a que en ocasiones no se siguiera estrictamente lo estipulado por el grupo de trabajo.

Por ejemplo, algunos de estos factores que influyeron en la no enseñanza de los temas previstos, fueron:

- La mala administración del tiempo, en las primeras sesiones de clases.
- El vocabulario utilizado en la enseñanza, que llevó a dificultades de comprensión para algunos de los estudiantes.
- La disciplina alterada en algunas ocasiones.
- Actividades extracurriculares que dificultaban la continuidad de la enseñanza, al igual que las visitas de la secretaria de educación a la

institución o las celebraciones de fechas especiales en el colegio, conllevando un desarrollo anormal de la clase.

- Las nivelaciones en algunas áreas de cursos anteriores por parte del estudiantado, que conlleva a la falta a clase de matemáticas por los estudiantes afectados.

Todo esto ayudó a que se hicieran cambios en la preparación de las clases para la enseñanza de los temas. Así, se identificaron los estudiantes aventajados, los que iban más rezagados y se les plantearon situaciones de acuerdo a su nivel, conllevando a un mejor manejo de la disciplina ya que se mantenía a todos los chicos ocupados trabajando individual o en grupo, cuando la clase era magistral, se procuraba que los estudiantes participaran desarrollando ejercicios los cuales les daban puntos adicionales para motivarlos, además de tratar de que estas clases no se extendieran por más de 20 minutos y sobretodo de usar un lenguaje sencillo, de lo contrario los estudiantes se cansaban y comenzaba la indisciplina en el aula.

En cuanto a la enseñanza de la suma con números enteros utilizando situaciones en donde se requería la representación en la recta real, fue muy bien aceptado por los estudiantes, algunos lo hacían mediante flechas, otros con saltos y en general operaban bien haciendo uso de este gráfico, pero cuando no utilizaban la gráfica, sino con la ley de signos, entonces presentaban más dificultades, particularmente cuando sumaban números con distintos signos.

En la resta de números enteros se trató de variar dando una definición que involucraba el inverso aditivo, pero los resultados no fueron satisfactorios, ya que los estudiantes se confundieron y no operaban bien, de esta manera se cambió la metodología para la enseñanza de esta operación. Al igual que el cambio en cuanto a la enseñanza de la multiplicación, ya que se pretendía comenzar con juegos que llevaran a que el estudiante construyera el método pero por falta de tiempo y por un tema que no se había contemplado enseñar, polinomios aritméticos para la implementación de reglas de supresión de signos de agrupación, entonces se tuvo que presentar la ley de signos para la multiplicación.

Finalmente, para la evaluación de los estudiantes durante el trabajo hecho en el aula, se recogieron tres notas: taller individual, que corresponde al trabajo hecho por el estudiante en exámenes o talleres individuales; taller grupal, donde se proponía a los estudiantes, que se reunieran en grupos de dos o tres personas después de la exposición de los conceptos por parte del profesor; y la evaluación final, que trataría de recoger los conceptos que habían adquirido los estudiantes al final.

De este modo, en las siguientes tabla se resume la información de los resultados del trabajo en el aula de los estudiantes de grado séptimo de la IETI, clasificado por género y los que aprueban y reprueban el tema desarrollado en la práctica.

Aunque el porcentaje de niñas es muy inferior al de niños en todos los cursos, se observa un desempeño en matemáticas diferente entre ellos, el gráfico 1 muestra la distribución según el género, observado en el grupo.

Esta diferencia trae algunos inconvenientes como por ejemplo, las niñas son un poco tímidas en el aula de clases y no expresan sus inquietudes ante todos los estudiantes, además no les gusta salir al tablero a realizar algún tipo de actividad.

Tabla N°4: Número de estudiantes, promedios de notas por actividad y porcentajes de los estudiantes de grado séptimo.

Estudiantes	Taller grupal	Taller individual	Examen final	Nota final	Total	Porcentajes
7ª	4,1	3,7	3,3	3,7	40,0	100,0%
Aprueban	4,2	3,8	3,4	3,8	35,0	87,5%
Niña	4,1	3,6	3,3	3,7	8,0	20,0%
Niño	4,3	3,8	3,4	3,8	27,0	67,5%
Reprueban	3,2	3,1	2,3	2,9	5,0	12,5%
Niña	3,0	3,3	2,4	2,9	2,0	5,0%
Niño	3,3	3,0	2,3	2,9	3,0	7,5%
7B	4,0	3,4	3,1	3,5	42,0	100,0%
Aprueban	4,1	3,6	3,2	3,7	35,0	83,3%
Niña	3,6	4,1	3,3	3,7	7,0	16,7%
Niño	4,2	3,5	3,2	3,7	28,0	66,7%
Reprueban	3,5	2,2	2,3	2,6	7,0	16,7%
Niña	3,5	2,3	2,2	2,6	4,0	9,5%
Niño	3,5	2,2	2,4	2,7	3,0	7,1%
7C	3,8	3,0	3,0	3,3	40,0	100,0%
Aprueban	4,0	3,3	3,4	3,5	26,0	65,0%
Niña	3,8	3,2	3,3	3,4	4,0	10,0%
Niño	4,1	3,3	3,4	3,6	22,0	55,0%
Reprueban	3,4	2,5	2,3	2,7	14,0	35,0%
Niña	3,6	2,8	2,3	2,9	3,0	7,5%
Niño	3,3	2,4	2,3	2,7	11,0	27,5%
Total	4,0	3,4	3,1	3,5	122,0	100,0%
Aprueban	4,1	3,6	3,3	3,7	96,0	78,7%
Niña	3,8	3,7	3,3	3,6	19,0	15,6%
Niño	4,2	3,6	3,3	3,7	77,0	63,1%
Reprueban	3,4	2,5	2,3	2,7	26,0	21,3%
Niña	3,4	2,7	2,3	2,8	9,0	7,4%
Niño	3,3	2,4	2,3	2,7	17,0	13,9%

Como se puede observar en la Tabla N^{o}.4, aprobaron el tema 96 estudiantes, de ellos 19 son niñas y 77 son niños con promedios entre 3.4 y 3.5 respectivamente observándose una variación mínima entre ellas. 26 estudiantes que reprobaron, de ellos 9 eran niñas y 17 fueron niños.

Por otra parte, se presta atención en las notas de taller individual y taller grupal. Las primeras evidencian bajo rendimiento en los estudiantes ya que sus notas son en la mayoría por debajo de 3, sin embargo, en las segundas se observa un buen rendimiento en los estudiantes. Por ejemplo, en todos los grados ningún estudiante reprueba en taller grupal, con notas entre 3.0 y 5.0; en cambio en taller individual, las notas oscilan entre 2.0 y 4.0.

3.3. RESULTADOS DE LA INVESTIGACIÓN

Desde la perspectiva psicológica de Vergnaud (1990) interesa saber cuáles son los esquemas que poseen los estudiantes y para aproximarnos a ellos, se planteó un estudio partiendo de un diagnóstico en la primera clase; los resultados obtenidos muestran que la mayoría de estudiantes presentan un buen conocimiento de los números naturales, sus operaciones, además manejaban el concepto de número y el orden en los números enteros.

Por otro lado, para dar respuesta a la pregunta de investigación se utilizó como instrumento una situación, la cual fue presentada a los estudiantes a través de una prueba escrita, esto porque los esquemas mentales que los estudiantes tienen no se pueden observar, de esta forma se propone una situación para promover la acción en el estudiante al tratar de resolverla y de esta forma poder observar en los resultados de los estudiantes, las estrategias utilizadas para resolver la situación. Participó el grado séptimo de la IETI, conformado por 3 cursos y un total de 122 estudiantes.

Con las distintas respuestas dadas por ellos, se organizó la información necesaria, de forma que permitiera generar una discusión y por ende un análisis descriptivo sobre estrategias similares que utilizaban para resolver dicha situación.

A continuación se presenta dicha descripción y la manera de desarrollarla por parte de los practicantes.

ENUNCIADO:

Desarrolla la siguiente situación. Haga operaciones en la hoja de borrador y escriba al frente de cada uno la respuesta.

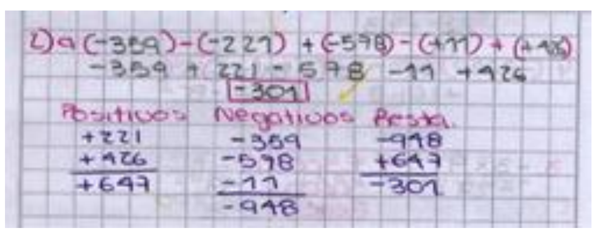
a) $(-359) - (-221) + (-578) - (11) + (426)$

Metodología enseñada en clase para la resolución de la situación:

- Etapa 1: Utilizar ley de signos para eliminar paréntesis
- Etapa 2: clasificar los números en enteros positivos y enteros negativos
- Etapa 3: operar, en columnas separadas los enteros positivos y los enteros negativos
- Etapa 4: se utiliza la operación resta entre los resultados anteriores

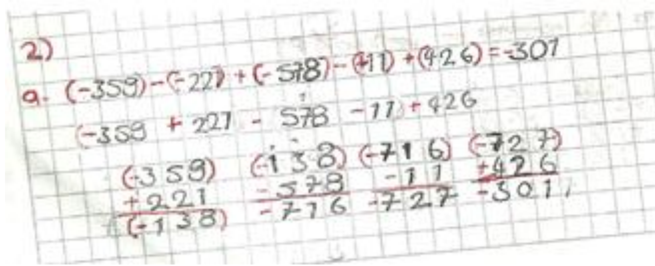
A. Estrategias que tienen correspondencia con la metodología indicada

Muestran la resolución del ejercicio utilizando la metodología enseñada en clase. Ej.



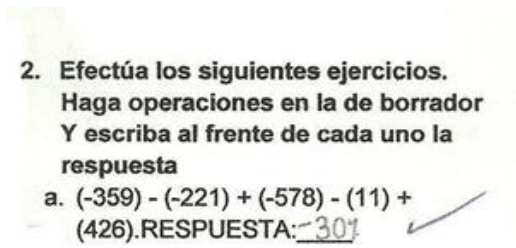
B. Estrategia exitosa que no utiliza la metodología indicada

Utiliza una estrategia no vista en clase. Consiste en utilizar la etapa 1 para recuperar el signo del número o eliminar paréntesis, luego la operación se realiza de izquierda a derecha, asociando los dos primeros términos y el resultado lo opera con el siguiente número a la derecha. Ej.



C. Estrategia exitosa desconocida

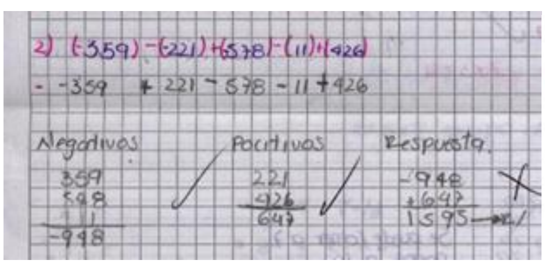
Escriben el resultado sin justificación. Ej.

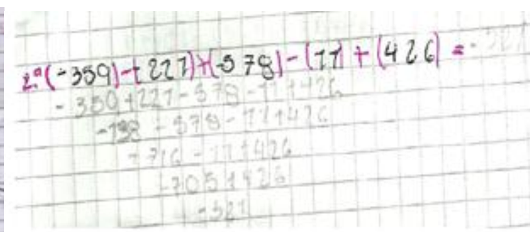


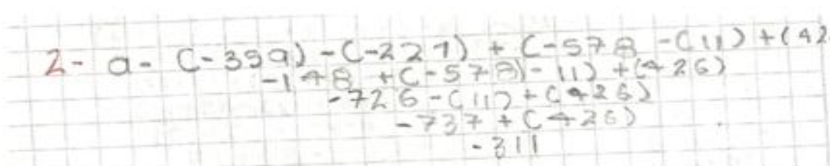
2. Efectúa los siguientes ejercicios. Haga operaciones en la de borrador Y escriba al frente de cada uno la respuesta
   a. (-359) - (-221) + (-578) - (11) + (426).RESPUESTA:-301

D. Estrategias exitosas con errores de procedimiento.

Coinciden con la metodología enseñada en clase pero fallan en alguna etapa. Ej.

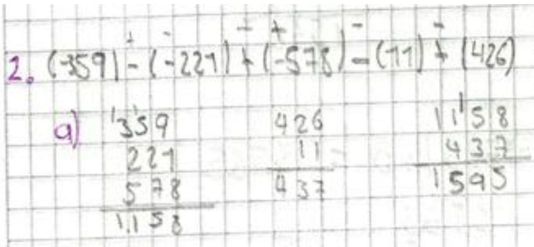
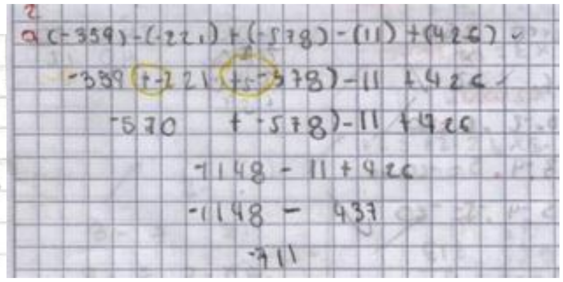




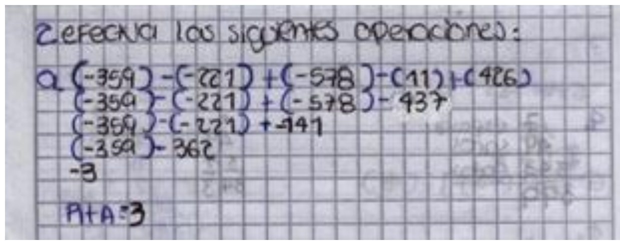


E. Estrategias no exitosas conocidas

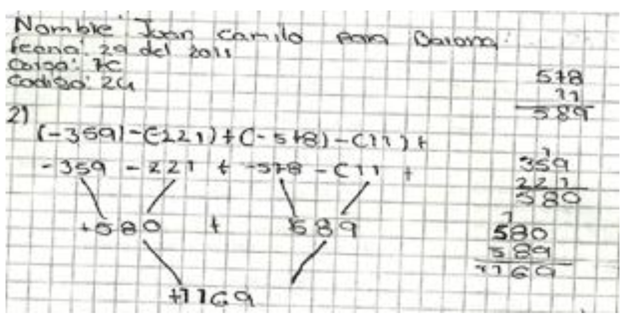
E.1. No realiza la etapa1, opera con los signos de los números para realizar la etapa 3 y finalmente realiza la etapa 4. Ej.

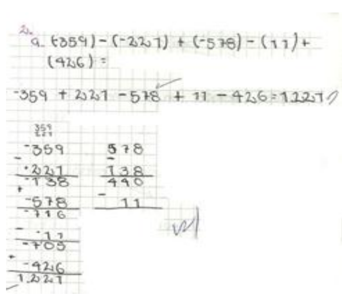
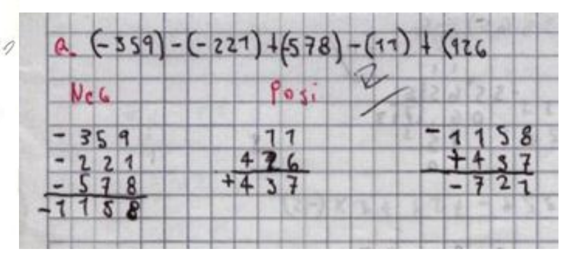
E.2. Cuando falta el signo del número se los agrupa y se opera con el signo de la operación que los separa. Ej.

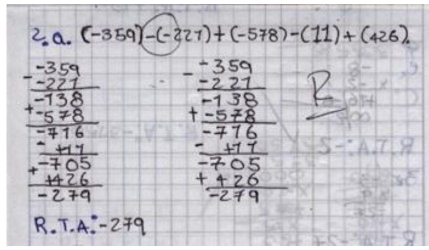


E.3 No realiza la etapa 1, identifica los números dentro de los paréntesis como positivos. Ej.



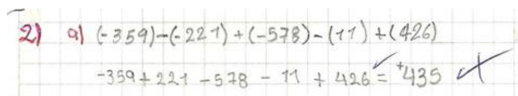
E.4 Hace todas las operaciones en columna, para operar, se utilizan el signo del número o el signo de la operación. Ej.

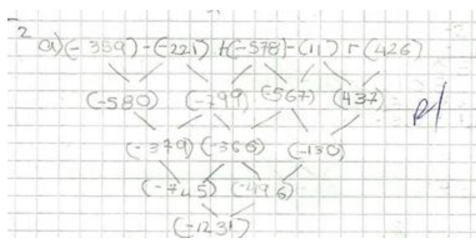


F. Estrategias no exitosas desconocidas

F.1 Dan una respuesta sin justificación.



F.2 Utilizan un algoritmo no visto en clase, agrupando términos. Ej.



NRP: No realiza el proceso, es decir, no presenta ninguna solución de la situación propuesta.

De este modo, en las siguientes tablas se resume la información de los resultados de investigación de los estudiantes de grado séptimo de la IETI, clasificado por géneros, grados y los que reprueban y aprueban el tema desarrollado en la práctica.

Tabla N° 6: Distribución de estudiantes según estrategias, género y curso.

Estrategia y Género	7ª			7B			7C			Total general
	Aprueban	Reprueban	Total	Aprueban	Reprueban	Total	Aprueban	Reprueban	Total	
A.										
Niña	3		3		1	1				4
Niño	8		8	4		4	3	1	4	16
B.										
Niña				1		1				1
Niño					1	1	1		1	2
C.										
Niña	1		1				1	1	2	3
Niño	1		1	2		2	4		4	7
D.										
Niña	3	1	4	4		4	2	1	3	11
Niño	6		6	10	1	11	7	3	10	27
E.1										
Niña	1		1	1	1	2				3
Niño	2		2	3	1	4	1	1	2	8
E.2										
Niña				1		1				1
Niño	1		1	1		1				2
E.3										
Niño							2		2	2
E.4										
Niña					1	1				1
Niño	6		6	4		4	1		1	11
F.1										
Niño				2		2	2	3	5	7
F.2										
Niña					1	1				1
Niño				1		1				1
NRP										
Niña		1	1				1	1	2	3
Niño	3	3	6	1		1	1	3	4	11
Total general	**35**	**5**	**40**	**35**	**7**	**42**	**26**	**14**	**40**	**122**

Como se puede observar en la Tabla N°6, las estrategias mas utilizada son **A** y la **D.** correspondientes, a las estrategias exitosas que coinciden con la metodologia enseñada y las estrategias exitosas con errores de porcedimiento, respectivamente. En las primeras, hay un total de 20 (16.4%) estudiantes, 4 niñas con promedio de nota de 3,6 y 16 niños, con promedio de nota de 4,0. En las segundas, los estudiantes coinciden con la metodologia enseñada en clase pero fallan en alguna etapa, en total son 38 (31,1%) estudiantes, 27 niños y 11 niñas, sus promedios de notas son 3,6 para las niñas y 3,4 para los niños.

Las estrategias menos utilizadas son: **B,** con un total de 3 estudiantes, 1 niña y 2 niños con promedios de notas de 3,8 para las niñas y niños;**E.2,** con un total de 3 estudiantes, 2 niños y 1 niña y promedios de notas de 3,0 para la niña y 3,4 para los niños; **F.2,** con un total de 2 niños, 1 niño y 1 niña y promedios de notas de 2,9 para la niña y 3,5 para el niño.

El numero de estudiantes que utiliza las estrategia **NRP** es 14 (11,5%), de los cuales hay 11 niños y 3 niñas con promedios de notas de 3,1 para ambos. Además, 8 estudiantes utilizan esta estrategia, siendo la mayoria de los que fracasan.Por otro lado, de los estudiantes que ganan, la mayoria utilizan la estrategia **D.**

En el curso 7A la estrategia mas utilizada es la **A,** con un total de 11 estudiantes,en comparacion con 7B y 7C, con un total de 5 y 4 estudiantes respectivamente, de los cuales 2 estudiantes pierden, uno para cada uno de estos grados.

3.4. ANÁLISIS DE RESULTADOS

3.4.1. ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS OBTENIDOS EN EL AULA DE CLASES

Es de gran importancia tener en cuenta que generalmente el conocimiento es evaluado en las Instituciones Educativas, éste se puede medir a través de las notas obtenidas por los estudiantes en la materia, de esta manera en este trabajo se dan a conocer las notas de los estudiantes, obtenidas durante el tiempo que se utilizó para la enseñanza de los números enteros y sus operaciones.

Los diversos factores que influyen en el rendimiento académico de los estudiantes, son difíciles de identificar, pues dichos factores o variables conforman muchas veces una tupida maraña, una red tan fuertemente entretejida, que resulta ardua la tarea de acotarlas o delimitarlas para atribuir efectos claramente discernibles a cada uno de ellos (Álvaro Page y otros, 1990, p. 29).

Sin embargo, con las notas obtenidas en la tabla 4, se puede tener información sobre algunas variables que influyen en las notas que presentan los estudiantes.

- Variables académicas
- Variables metodológicas
- Variables sobre el desempeño del profesor.

En el primer caso, se puede observar que los estudiantes presentan bajo rendimiento en las evaluaciones individuales, en general los promedios del taller grupal que es de 3.8 frente al taller individual que es de 3.6, no varían mucho en los talleres, ya sean grupal o individual, mientras que con el examen individual, ésta aumenta, con un promedio de 3.1 de esta forma, en los talleres grupales tienen un mejor rendimiento, logrando plantear varias hipótesis, entre ellas:

- Los estudiantes mejoran su desempeño cuando no se sienten evaluados
- Los estudiantes presentan dificultades al resolver evaluaciones de temas acumulativos, mientras que con talleres hechos de forma parcial, los resuelven muy bien.
- El estudiante se siente más cómodo, porque puede comunicar sus dudas tanto al profesor como a sus compañeros, además de consultar sus apuntes y el tema a desarrollar que se ha trabajado recientemente, mientras que en la evaluación final el estudiante no puede compartir sus dudas con sus compañeros, ni con el profesor, ni tampoco puede refrescar su memoria con los apuntes, ya que ésta es una evaluación más rigurosa y acumulativa.

De los 26 estudiantes que fracasaron, se puede observar que ganan los talleres grupales, pero con notas entre 3 y 3.4, a diferencia de los estudiantes que no fracasaron, los cuales tienen notas más altas, y en el taller individual estos estudiantes vuelven a fracasar, de esta manera se puede decir que las notas del examen final son independientes del desempeño grupal o individual.

El total de estudiantes que se tuvo en cuenta para este análisis fue de122, de ellos 94 son niños y 28 niñas, aquí podemos ver que la mayoría de los estudiantes del Institución Educativa Técnico Industrial son niños, este se puede atribuir a que, además de sus orígenes, los cursos ofrecidos en el aspecto técnico, algunos como: mecánica industrial, mecánica automotriz, electricidad, metalistería y ebanistería se cree culturalmente que deben ser ofrecidos solo para hombres.

Con respecto a las notas de los estudiantes de los tres cursos, se puede describir que los estudiantes de séptimo A, tienen mejor promedio de notas tanto en el taller individual, grupal y evaluación final, esto porque en la Institución se separaban los estudiantes de buen rendimiento académico de los de bajo rendimiento.

EN CUANTO A LA ESTRATEGIA METODOLÓGICA

Como se explicó anteriormente, la metodología consistió en que el docente organizaba los contenidos de aprendizaje, los cuales se orientaron por medio de exposiciones, tratando de utilizar estrategias más atractivas para el estudiante; seleccionando los contenidos, con el apoyo de medios bibliográficos (libros de matemáticas) y electrónicos (material de internet), que trataran de ser accesibles para los estudiantes en pro de lograr que ellos comprendieran los conceptos de mejor manera.

Con los datos del porcentaje obtenido en la Tabla No. 4 se puede observar que la propuesta metodológica tuvo algunos aciertos ya que el 78% de los estudiantes aprueban.

En cuanto a aciertos, cada vez que se hacía una evaluación o taller se detectaron los errores a corregir antes de seguir en el proceso de enseñanza, para que al final de cada parte en que fue dividido el aprendizaje, cuestionar y controlar los datos numéricos obtenidos en los exámenes que valoran el progreso de los estudiantes. Por ejemplo, cuando se enseñó la sustracción de números enteros se trató de cambiar la metodología de enseñanza ya que se utilizó la propiedad de inverso aditivo, pero fue poco aceptado por los estudiantes y se llegó al acuerdo de continuar con la metodología que utilizaba el docente encargado de los cursos. Como también se trató de variar la técnica común que existía para enseñar la multiplicación de números enteros, es decir, la memorización de la ley de signos cambiando el desarrollo de la comprensión del concepto. Sin embargo, por experiencia del profesor Hermes muñoz, director de los grados 7 del IETI, en cuanto a este tema, no se aceptó esta posibilidad por falta de tiempo.

A pesar de ello, se presentaron algunas imprecisiones en el diseño de actividades, ya que algunas veces el lenguaje no era tan claro para los estudiantes, motivo que llevaba al practicante a re-direccionar la actividad, dando nuevas indicaciones. Por ejemplo, cabe mencionar la necesidad de dedicar más atención al eje de supresión de paréntesis, pues aquí fue donde presentaron muchas dificultades, como por ejemplo, no aplicaban bien la regla de los signos, no tenían en cuenta las propiedades de las operaciones, etc.

Otra característica, en cuanto a la metodología, fue que inicialmente en la planeación de las clases se tuviera en cuenta un modelo de "estudiante ideal", esto se debió a la falta de experiencia en la enseñanza a un grupo numeroso de estudiantes, ya que después del primer día de enseñanza en el aula, bajo las circunstancias presentadas en cuanto al tiempo, orden y disciplina en el aula, es que se puede notar que se deben hacer cambios en la metodología de enseñanza de los temas, así, se decide tener en cuenta, al niño psicológico, es decir al sujeto que piensa, siente, que tiene características y habilidades diferentes de los demás.

EN CUANTO AL DESEMPEÑO DEL PRACTICANTE

Se observa a nivel general, que los estudiantes tienen mejores notas en los talleres grupales e individuales mientras que en la evaluación final las notas son menos favorables. Desde la perspectiva del practicante, se puede deducir que se fue menos riguroso cuando se evaluaron los talleres que cuando evaluaron los exámenes.

Sobre el manejo del tiempo, el orden y la disciplina en el aula, al principio se necesitó de la ayuda del docente a cargo de los cursos de séptimo del IETI, para controlar la disciplina en el aula y en si el orden, pero al pasar el tiempo, estos aspectos se mejoraron con los consejos del director de la práctica y del coordinador de los cursos, además de la experiencia adquirida cada día en el aula de clase. El manejo del tiempo fue trabajado con un esquema ya dado a conocer anteriormente en la metodología de clase el cual dio muy buenos resultados.

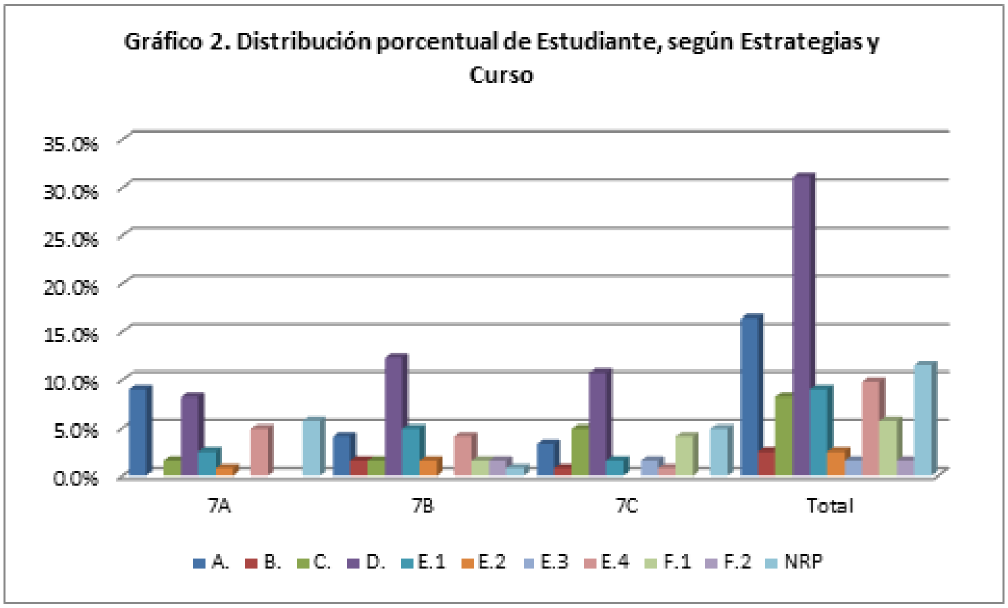
La no claridad en el lenguaje fue uno de los errores cometidos, ya que se utilizaron términos poco conocidos por los estudiantes, por ello se revisaban las clases para subsanar estos errores, utilizando un lenguaje claro y preciso para que los estudiantes entendieran y no fueran a cometer errores por la no comprensión del lenguaje.

Además se observa que en séptimo C, 11 niños presentan notas bajas, a diferencia de los cursos séptimo A y B, en donde solo reprueban 3 niños, esto puede ser porque el practicante era más estricto con los niños que con las niñas.

Se puede notar que el desempeño de los practicantes fue aceptable, ya que de acuerdo con la Tabla No. 4, se puede ver que el promedio total en notas de los estudiantes que se obtuvo fue de 3.5 lo que quiere decir que la mayoría de estudiantes aprobaron el tema y fueron pocos los que no tuvieron éxito.

3.4.2. ANÁLISIS DE RESULTADOS EN LA INVESTIGACIÓN

Al revisar los datos en las tablas 5, 6 y 7, y como puede verse en el Gráfico 2, las estrategias más utilizadas son la **A** y la **D,** lo cual sugiere que la metodología de enseñanza propuesta en este trabajo cumplió las expectativas propuestas por los estudiantes de licenciatura para su PPI, la cual era que los estudiantes lograran operar con números enteros, es decir que utilizaran estrategias exitosas para resolver problemas de suma y resta de números enteros.



Con respecto a la estrategia **D,** la cual fue la más utilizada, se presta atención en el hecho de que los errores que cometen los estudiantes cuando resuelven un determinado tipo de situaciones son accidentales (generados, por ejemplo, por falta de atención o por un fallo puntual de la memoria).

Las estrategias menos utilizadas son **B, E.2** y **F.2.** algunas hipótesis que se pueden plantear son: Los estudiantes utilizan otras estrategias no vistas en clase porque el profesor, en cursos anteriores, se las ha enseñado, en particular a los repitentes; además, algunos le piden explicación a algún amigo que esté en cursos superiores o a un familiar, y ellos les explican estas estrategias.

Se podría pensar que las estrategias menos elaboradas llevan a promedios regulares, mientras que las estrategias más elaboradas llevan a que los estudiantes tengan mejores promedios. Sin embargo, observando los resultados, los estudiantes que utilizan estrategias exitosas no necesariamente aprueban el tema visto en clase.

Respecto a los estudiantes que utilizaron la estrategia **F.2,** la menos elaborada, se puede decir que ellos se equivocaron porque aplicaron el concepto mal entendido, no aprendieron la técnica de resolución de este tipo de problemas y porque se basan en alguna idea cuyo campo de validez deja fuera a la situación en la que el estudiante la está aplicando.

Hay una cantidad bastante relevante de estudiantes que utilizaron la estrategia **NRP,** es decir, no realizaron ningún procedimiento para desarrollar la situación, esto porque, el estudiante no aprendió la estrategia para desarrollar la situación, o comienza por las situaciones que sabe desarrollar y no le alcanza el tiempo, o se le olvidan conceptos y procedimientos para la resolución.

En 7A la estrategia más utilizada por los estudiantes que ganan es la **A,** en comparación con los demás grados**.** Esta diferencia entre los tres cursos podría darse porque los estudiantes están organizados de acuerdo a las edades y al rendimiento académico, estando en el curso 7 A los niños más pequeños y de mejor rendimiento académico. Por lo tanto, en los demás cursos, quedan la mayoría de los estudiantes de mayor edad y repitentes.

La secuencia de estrategias identificadas y ordenadas en forma descendente en su complejidad, permite observar que la construcción del conocimiento es progresiva y pasa por diferentes etapas antes de alcanzar su nivel de consolidación.

3.5. CONCLUSIONES

- Por los resultados obtenidos en los diferentes talleres y exámenes realizados por los estudiantes de manera individual y grupal, se observó que para algunos estudiantes su rendimiento es mejor al trabajar en forma grupal que en forma individual.
- Hay que trabajar más en las operaciones de resta y polinomios aritméticos, en el conjunto de los números enteros, ya que en estos temas es donde se encuentra una mayor dificultad, particularmente en la utilización de la ley de los signos.
- La propuesta metodológica de enseñanza fue satisfactoria, ya que la mayoría de los estudiantes aprobó el tema desarrollado en la PPI. No obstante, en la investigación se encontraron estrategias de los estudiantes, muy poco elaborados, que sugieren atención por parte del docente.
- Es importante que la institución promueva actividades que permitan la integración de las niñas con los niños.
- Es importante la observación y atención en el aula por parte del docente para tratar de dar respuesta a los diferentes interrogantes que se con tienen respecto al rendimiento académico de sus estudiantes.
- Si se consigue que el practicante entienda la importancia de comprender y analizar su práctica en el aula de clases, de organizar y hacer comunicables los aprendizajes logrados en ella, se estará avanzando a que las formas de intervenir en la realidad cada día puedan ser mejores.
- La PPI realizada por los estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas, aporta a la Institución en la cual se desarrolla, una opinión de que la Universidad del Cauca está formando profesionales interesados en las problemáticas que se viven en el quehacer del

docente y con voluntad por integrar la Universidad con las Instituciones Educativas.

Finalmente, se puede decir que el docente realiza una gran labor que debe ser valorada por toda la sociedad ya que la enseñanza no es una tarea fácil pues requiere de dedicación y esfuerzo en pro de que los estudiantes aprendan con gusto los conocimientos impartidos, en particular las matemáticas.

3.6. RECOMENDACIONES

- Antes de la implementación de la PPI, es necesario haber trabajado con un grupo numeroso de estudiantes, mediante alguna actividad, que podría haberse diseñado en cursos anteriores. Esto, con el fin de tener una mayor experiencia en cuanto al manejo del orden y la disciplina en el aula.
- Se recomienda que la Universidad del Cauca junto con el Departamento de Matemáticas, se den a la tarea de hacer convenios con las instituciones educativas del sector de Popayán, con el fin de que los practicantes logren desarrollar su práctica, de una mejor manera y sin contratiempos de tipo institucional.
- El docente debe preparar tanto talleres acumulativos como talleres de temas parciales.
- Respecto al manejo del orden y la disciplina en el aula de clases, se puede decir que el docente es el encargado de escoger actividades apropiadas que propicien la motivación en los estudiantes y de esta manera ellos se sientan a gusto con el aprendizaje de ciertos temas, además es importante que el docente tenga claridad en el lenguaje a utilizar en la enseñanza de los temas.

- Sería interesante que otro grupo continuara con esta investigación en otra institución, con el objetivo de ampliar el espectro de resultados aquí obtenidos.

3.7. BIBLIOGRAFIA

Bruno, A. (Marzo de 1997). La enseñanza de los numeros negativos: aportaciones de una investigacion. *Revista de Didactica de las Matematicas*(29), 5-18.

Bruno, A. (2007). La enseñanza de los números negativos:formalismo y significado. *La gaseta de la real sociedad matemática española*, 415-427.

Bruno, A. (2009). *pna.es\numeros2*. Recuperado el 30 de 08 de 2010, de www.pna.es\numeros2\pdf\Bruno2009metodologiapdf

Carvajal Burbano, A. (1999). *Apuntes para la Sistematizacion de experiencias.* Santiago de Cali: Unidad de artes graficas de la Universidad del Valle.

Fraleigh, J. B. (1987). *Algebra abstracta primer curso.* Buenos Aires: Addison-Wesley Iberoamericana.

Gutierréz, Á. (1991). La investigación en didáctica de las matemáticas. En Á. Gutierréz, *Área del conocimiento didáctico de la matemática.* Madrid.

IETI, D. d. (2009). Nuestra Historia. *Revista Institucional I. E. T. I. 50 años*, págs. 1- 8.

Inhelder, & Barbel. (1978). Las estrategias cognitivas: aproximacion al estudio de los procediemientos de resolucion de problemas. Ginegra, Italia.

MEN, M. d. (2000). *Lineamientos curriculares en Matemáticas.*

MEN, M. d. (2006). *Estándares Básicos de Competencias En Matemáticas.*

Montoya, M. (2006). *sochiem.cl*. Recuperado el 28 de 08 de 2010, de www.sochiem.cl\jornadas2006\ponencia\26pdf

Muñoz Quevedo, J. M. (1983). *Introducción a la teoría de conjuntos.* Bogotá: Universidad Nacional de Colombia.

Piaget, J. (1962). *El nacimiento de la inteligencia en el niño.* Barcelona: Aguilar.

Torres, C. (2007). *edumate.wordpress.com*. Recuperado el 28 de 08 de 2010, de www.edumate.wordpress.com\numeros-enteros-origen-e-historia\2007

Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuales. *Recherches en Didáctique des Mathématiques, 10*(2, 3), 133-170.

ANEXOS

ANEXO 1.

ACTIVIDAD 1:

Objetivo: identificar cuáles son los conocimientos previos acerca de los números naturales, sus operaciones y el orden en números enteros.

Tipo: evaluación inicial

Bloque temático: números naturales

Tiempo estimado a emplear: 20 a 30 minutos

Conocimientos matemáticos que exige: concepto de número natural y entero, operaciones básicas y propiedades con números naturales, orden en números enteros.

EVALUACIÓN DE DIAGNÓSTICO NÚMEROS NATURALES Y NUMEROS ENTEROS

A. **DESCRIBE LOS NÚMEROS NATURALES**

B. **RESUELVE LAS SIGUIENTES OPERACIONES**

$(8-1)-(6-9)+4-1+(9-6)$

$915+316-518-654+673$

$(60*2)\div(10*2)$

SECUENCIAS DE ENTEROS

Que números hacen falta para que haya orden.

$-6, \_\_\_, -4, -3, \_\_\_\_, \_\_\_, 0, \_\_\_\_ 2, \_\_\_, \_\_\_, 5, \_\_\_$

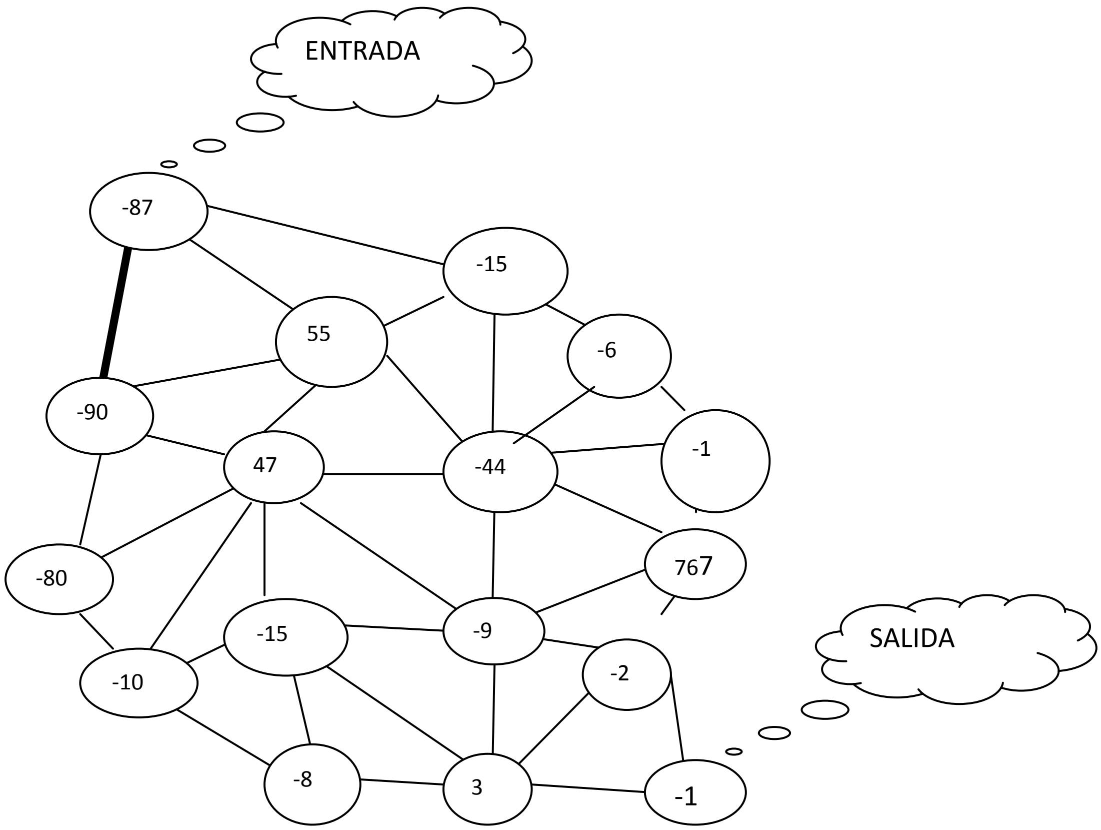
Complete los números pares para que haya orden

$-10, \_\_\_, -6, \_\_\_, -2, 0, \_\_\_, 4, 6, \_\_\_, \_\_\_$

C. EL LABERINTO DE LOS NUMEROS ENTEROS NEGATIVOS

- Para realizar la actividad ten en cuenta que “Al comparar dos números enteros se debe tener cuidado que cuando los dos son negativos; el mayor es el que está más cerca de cero, en la recta numérica”.

- Para salir del laberinto de números enteros, se debe avanzar sobre los lados de la figura **pasando siempre por un número mayor**. Indica la ruta que se debe seguir.



Coloca en orden los Números Enteros de la ruta del laberinto

ANEXO 2:

ACTIVIDAD 2

Objetivo: examinar si los estudiantes comprenden el concepto de valor absoluto de un número entero.

Tipo: taller grupal, situación para la aplicación de conceptos.

Bloque temático: Valor absoluto de un número entero

Conocimientos matemáticos que exige: concepto de número entero, posición y distancia respecto a un punto de referencia en la recta numérica, notación del valor absoluto.

En una prueba de carrera de autos un piloto se descuida y avanza 5 metros hacia delante de la meta (posición 0) quedando en la posición +5, para corregir retrocede 10 m quedando en la posición -5. Realiza una gráfica de la situación.

a) ¿Se encuentra el auto en la meta?
b) ¿Cuál es la posición final del auto?
c) ¿Cuál es la distancia que recorrió el auto cuando avanzó 5 metros?
d) ¿Cuál es la distancia que recorrió el auto durante todo el trayecto?
e) ¿la posición final coincide con la distancia total recorrida por el auto?
f) Si el auto se encuentra en la meta ¿Cuál es la distancia recorrida si retrocede a la 6 y 15 ?

Situación presentada en clases

1. Si el auto del ejemplo anterior se encuentra en la meta ¿Cuál es la distancia recorrida si avanza a la posición +6 y +15? ¿Cuál es el valor absoluto de +6 y +15? ¿Cuál es la distancia recorrida si el auto retrocede a las posiciones -13 y -8? ¿Cuál es el valor absoluto de -13 y -8?
2. ¿El valor absoluto siempre es positivo?

Situación para resolver en la casa

1. **ENCONTRAR EL VALOR ABSOLUTO DE LOS SIGUIENTES NÚMEROS**

a) $+37$
b) -90
c) -61

2. **COMPLETA**

a) $|15| =$

b) $|\ \ | = 34$

c) $|\ \ | = -1$

Definición utilizada por los practicantes:

EL VALOR ABSOLUTO: Distancia que separa un número entero del punto cero (0), en la recta numérica. El valor absoluto lo representamos como "$|\ \ |$" por ejemplo:

$|-15|$ **Y se lee. VALOR ABSOLUTO DE** -15

$|-10|$ **Y se lee. VALOR ABSOLUTO DE** 10

$|0| = 0$ **El valor absoluto de cero es cero.**

ACTIVIDAD 3:

Objetivos: lograr que los estudiantes hagan uso de los métodos enseñados en clases para sumar números enteros.

Tipo: Taller individual.

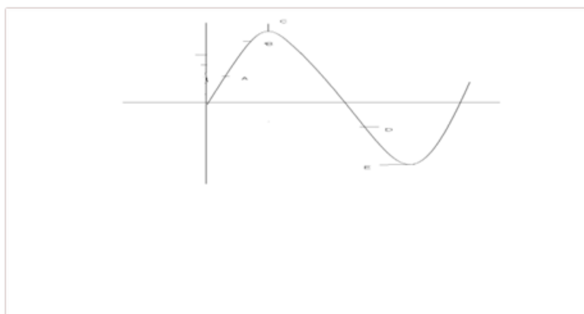
Bloque temático: suma de números enteros positivos, suma de números enteros negativos y suma de números enteros de diferente signo.

Tiempo estimado a emplear: 50 minutos.

Conocimientos matemáticos que exige: concepto de número entero, valor absoluto de un número entero, posición y distancia respecto a un punto de referencia en la recta numérica, utilización de signos de agrupación para reconocer el signo del número y el signo de la operación, interpretación de situaciones problemas.

Centro Educativo I.E.T.I
Nombre:
Curso:
TALLER INDIVIDUAL

1. Complete cada enunciado según la información del dibujo.



   a) A esta a ___ metros del nivel del mar
   b) C esta a ___ metros del nivel del mar
   c) D esta a ___ metros del nivel del mar
2. Escribir en la recta numérica los números enteros desde -12 hasta 11
3. Escribir el número que representa cada letra en la recta numérica.

4. Encontrar la suma de los siguientes números enteros
   a) (-36)+(-12) b) 48 +(-50) c) 47 +(-90) d) (-57)+ 35

5. En una ciudad se registraron los siguientes cambios de temperatura: sube 8ºC, baja 10ºC, sube 6ºC. baja 15ºC, baja 6ºC. sube 4ºC, baja 9ºC, sube 11ºC, baja 17ºC, después de todos estos cambios ¿Cuál es la temperatura final, si inicialmente la temperatura era de 20ºC?
6. Responda las siguientes preguntas
    a) ¿La suma de números enteros negativos, es siempre otro número entero negativo? de ejemplos.
    b) ¿La suma de un entero negativo con un entero positivo entero positivo siempre da un número entero negativo? De ejemplos.
    c) ¿La resta de números enteros es siempre otro número entero?
    d) ¿El valor absoluto de un número entero negativo es otro número entero negativo? De ejemplos.
7. Un caracol quiere subir una pared de 8 metros de altura, durante el día sube 3 metros, pero durante la noche se duerme y resbala 2 metros ¿Cuántos días gasta para llegar a la parte superior de la pared?

Las definiciones utilizadas por los practicantes y los ejemplos y ejercicios propuestos en clases:

ADICION DE NUMEROS ENTEROS

Al sumar números enteros se consideran cuatro casos:

CASO 1: LOS NUMEROS ENTEROS SON POSITIVOS

En el concurso del salto de la rana, la rana René se ubicó en un punto de referencia y efectuó 5 saltos hacia la derecha y luego decidió dar otros dos saltos hacia la derecha. Ten en cuenta que en cada salto recorre la misma distancia.

- Realiza un gráfico donde se puedan visualizar los desplazamientos de la rana René.
- ¿Cuántos saltos realizó en total?

- Representa las siguientes sumas de números enteros en un gráfico y halla el resultado

    i. (12)+(55)

ii. (10) + (6)
iii. (51) + (3)

Para sumar dos números enteros positivos, se avanza a la derecha, en la recta entera, a partir del primer número dado se le anexan tantas unidades como indica el segundo número. Recuerda la suma con los números naturales luego la suma de dos números enteros positivos da como resultado otro número entero positivo.

CASO 2: LOS NUMEROS ENTEROS SON NEGATIVOS

A partir del ejemplo anterior, la Rana da 6 saltos a la izquierda y 4 saltos a la izquierda.

- Realiza un gráfico que represente los desplazamientos de la rana.
- ¿En qué posición queda la rana?
- Piensa en $(-6)+(-4)=-10$ y observa si corresponde a la posición de la rana.
- Representa las siguientes sumas de números enteros en un gráfico y halla el resultado

i. $(-12)+(-5)$
ii. $(-5)+(-2)$

Para sumar dos números enteros negativos se suman como en los números naturales pero al resultado se le antepone en signo negativo. La suma de dos números enteros negativos siempre da como resultado otro número entero negativo.

CASO 3: LOS NÚMEROS ENTEROS TIENEN DIFERENTE SIGNO, EL MAYOR ES POSITIVO

A partir del ejemplo anterior, la Rana da 6 saltos a la derecha y 4 saltos a la izquierda.

- Realiza un gráfico que represente los desplazamientos de la rana.
- ¿En qué posición queda la rana?
- Piensa en $(-6)+(-4)=-10$ y observa si corresponde a la posición de la rana.

Para sumar dos números enteros con diferente signo, siendo el mayor positivo se restan como en los números naturales pero el resultado es un número entero positivo.

CASO 4: LOS NÚMEROS ENTEROS TIENEN DIFERENTE SIGNO, EL MAYOR ES NEGATIVO.

A partir del ejemplo anterior, la Rana da 6 saltos a la izquierda y 4 saltos a la derecha.

- Realiza un gráfico que represente los desplazamientos de la rana.
- ¿En qué posición queda la rana?
- Piensa en $(-6)+(4)=-2$ y observa si corresponde a la posición de la rana.
- Representa las siguientes sumas de números enteros en un gráfico y halla el resultado

  i. $(-12)+(5)$

  ii. $(-5)+(2)$

Para sumar números enteros con distinto signo, donde el mayor tiene signo negativo, se restan los números y se pone el signo del número mayor.

Ejercicio en clase

1. Un estudiante de séptimo grado del ITI registró en una recta, 5 retrocesos y 4 avances de un objeto, encontrando su posición final así $(-5)+(4)=(-1)$ responde las siguientes preguntas:

   - ¿Qué opina de lo realizado por su compañero? Justifique la respuesta.
   - Utilice la representación en la recta como lo hizo el estudiante del ejemplo anterior para graficar los siguientes casos; regístralos numéricamente con su resultado:

   i. $(+3)+(-7)$

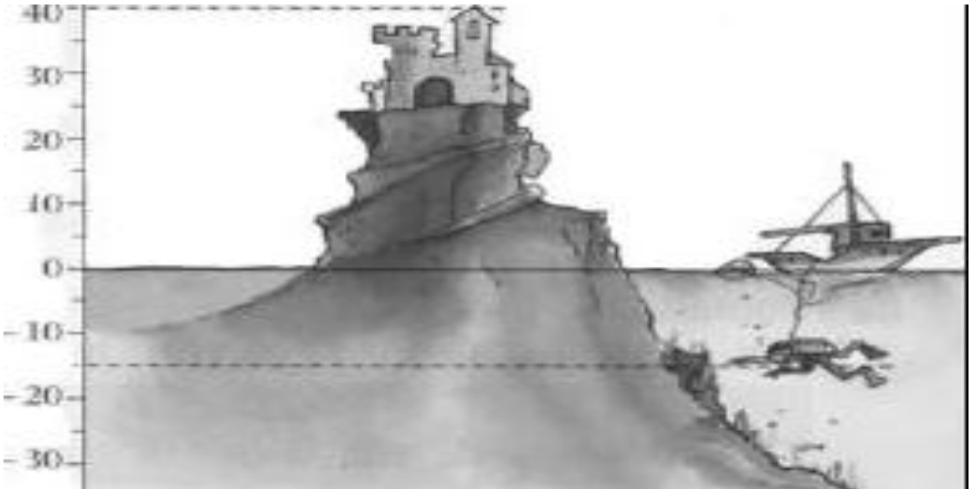
   ii. $(-10)+(-5)$

   iii. $(+9)+(-12)$

   iv. $(-7)+(+1)$

   - Escriba la dificultad que ha tenido para realizar el ejercicio anterior.

2. El castillo de San Felipe en Cartagena esta junto al mar, Fernando fue a bucear cerca y descendió primero 5 metros debajo del nivel del mar, observa el dibujo y contesta:



- ¿Cuál es la posición final descendió Fernando?
- ¿Qué operación podrías aplicar para hallar la solución?
- Si Fernando descendió 30 metros y luego descendió otros 20 metros. ¿Cuál es su posición final?

ANEXO 4

ACTIVIDAD 4:

Objetivo: observar en las situaciones planteadas la apropiación de los conceptos y métodos para sumar, restar y resolver polinomios aritméticos en números enteros, por parte de los estudiantes.

Tipo: Taller individual

Bloque temático: suma, resta y polinomios aritméticos en números enteros.

Tiempo estimado a emplear: 60 minutos.

Conocimientos matemáticos que exige: inverso aditivo de un número entero, reglas para sumar y restar números enteros, regla para suprimir signos de agrupación, propiedades de la suma y resta de números enteros.

Centro Educativo I.E.T.I
Nombre:
Curso:
TALLER INDIVIDUAL

1. Completar la siguiente tabla.

+	-5	9	-25
-13		-4	
23			
45			
-19			
-65			

2. A partir de la tabla que muestra las diferentes temperaturas en una semana, averiguar:

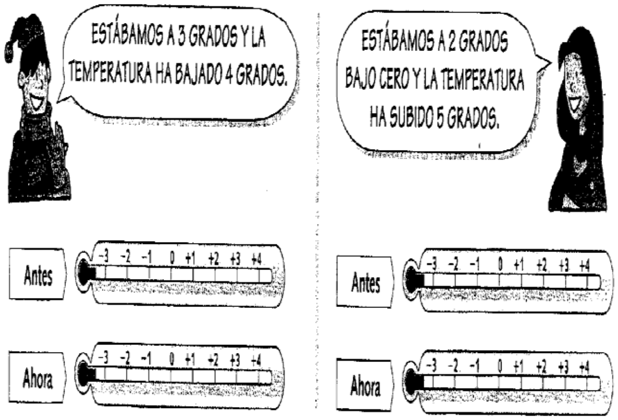
    a. ¿Cuál es la diferencia de la temperatura entre las 5am y las 12m cada día?
    b. ¿A qué horas y qué día se alcanzó la mayor temperatura?
    c. ¿A qué horas y qué día se alcanzó la menor temperatura?
    d. ¿Qué día se alcanzó la mayor diferencia de temperatura?

Día	Tº 5am	Tº 12m
Lunes	-3º C	12º C
Martes	2º C	16º C
Miércoles	-4º C	15º C
Jueves	0º C	20º C
Viernes	9º C	13º C
Sábado	-12º C	25º C
Domingo	-9º C	23º C

3. Realizar las siguientes operaciones, utilizando las propiedades de la suma, **recuerda que primero se realizan las operaciones indicadas en los paréntesis, luego en los corchetes y por último en las llaves.**

    a. $\left\{-23+\left[-6-\left(-12+5-2\right)+25\right]-2\right\}$
    b. $-5+\left\{-15+\left[6-19\right]-33\right\}$

4. Colorea, cada caso en los termómetros para que marquen la temperatura indicada.



5. Resuelve el siguiente problema:

La empresa de viajes Avianca vende tiquetes de avión para vuelos nacionales e internacionales. Averigua con base en la tabla los valores en millones de pesos:

a. Las ganancias del año
b. Las pérdidas del año
c. ¿Cuánto ganó o cuánto perdió la empresa en el año?

Mes	Valor	Mes	Valor	Mes	Valor
Ene.	8200	Mayo	-8900	Sept.	-2000
Feb.	-5400	Jun.	10400	Oct.	3000
Mar.	7500	Jul.	11200	Nov.	-12000
Abril	-1000	Agos.	-1000	Dic.	15000

6. Cómo resolverías los siguientes casos:

a. ¿Qué número debe restarse a -10 para que el resultado sea 8?
b. ¿Cuál es el número, que al restarle -8 su diferencia es 6?

7. Completa la tabla

×	**-3**	**4**	**-7**	**9**
-5			35	
-1				-9
2				

A continuación se presentan las propiedades de la suma, la forma de restar números enteros, situaciones presentadas en el aula de clases a los estudiantes:

PROPIEDADES DE LA SUMA PARA NUMEROS ENTEROS

PROPIEDAD	DEFINICIÓN	EJEMPLO
CLAUSURATIVA	La suma de números enteros de cómo resultado otro número entero	$5+6=11$
CONMUTATIVA	El orden de los sumandos no altera el resultado	$(-5)+7=2$
ASOCIATIVA	La suma de tres o más números enteros se puede asociar	$[3+5]+(-2)=3+[5+(-2)]$ $8+(-2)=3+3$ $6=6$
MODULATIVA	Todo número sumado con el cero da como resultado el mismo número.	$(-65)+0=-65$ $0+18=18$

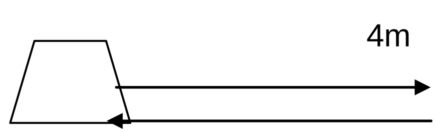
Ejercicio en Clase

Identificar las propiedades utilizadas en las siguientes sumas

$$(-4)+5=5+(-4)=1$$
$$10+0=10$$
$$(-6)+(-7)=-13$$

INVERSO ADITIVO

Una hormiga parte de su hormiguero en busca de comida y camina 4m hacia la derecha, gira y regresa por el mismo camino, ¿Cuál fue su desplazamiento?



¿Si se desplaza 3m a la izquierda, 2m a la derecha?

El inverso aditivo de un número entero, es el mismo número pero con el signo contrario ejm

El inverso aditivo de 3 es -3, el de -7 es 7.

- ✓ **Para todo numero entero "a", existe un numero entero "-a" llamado inverso aditivo de "a"**
- ✓ **La suma de un numero entero y su inverso aditivo es el numero entero cero, es decir**

$$\boldsymbol{a} + (-\boldsymbol{a}) = (-\boldsymbol{a}) + \boldsymbol{a} = 0$$

RESTA DE NÚMEROS ENTEROS

Para conocer la utilidad entre el periodo 2009-2010 de los almacenes de cadena éxito en la ciudad de Popayán, el contador revisa la siguiente información:

Utilidad 2009: 20.000.000

Utilidad 2010: 15.000.000

¿Cuál fue la utilidad que tuvo el almacén en este período?

¿Esta aumento o disminuyo?

Para restas números enteros utilizamos el inverso aditivo o sea que a – b= a + (-b)

En la resta, se cambia a suma y se escribe el inverso aditivo del número que se está restando, entonces se siguen las reglas de la suma.

Logro: reforzar operaciones de suma y resta de números enteros

Tema: Polinomios Aritméticos y Regla para destruir signos de agrupación.

POLINOMIOS ARITMÉTICOS: operaciones de suma y resta de números enteros entre signos de agrupación como son { }, [ ], ( ), ejemplo: $-4+\left[3+\left(7+9\right)-5\right]$

Regla para destruir signos de agrupación

+ Con + = +

+ Con - = -

- con + = -

- con - = +

Ejercicio en clase

$$\left\{-15+36-48+\left[37-88-\left(4+5\right)-36\right]+44\right\}$$
$$-3+\left(14-26\right)-33$$
$$-4+\left\{7-\left[-10-45\right]+10\right\}$$

ACTIVIDAD 5:

Tipo: situaciones presentadas en clases a los estudiantes.

Objetivos: observar en las situaciones planteadas cómo los estudiantes aplican la ley de signos para la multiplicación.

Bloque temático: multiplicación de números enteros.

Conocimientos matemáticos que exige: multiplicación en números naturales, ley de signos para la multiplicación en enteros**.**

A continuación se presentan las diferentes situaciones presentadas a los estudiantes de grado séptimo de la IETI, como también la forma como se presentó la ley de signos para la multiplicación por parte de los practicantes:

MULTIPLICACIÓN DE NÚMEROS ENTEROS

Ley de Signos

$$-*-=+$$

$$+*+=+$$

$+ * - = -$

$- * + = -$

Al multiplicar números enteros consideramos 3 casos.

CASO 1: MULTIPLICACIÓN DE NÚMEROS ENTEROS POSITIVOS

Por ley de signos sabemos que + * += +, entonces (15)*(3)= 45

SITUACIÓN 1.
Manolo ahorra cada día $100. ¿Cuánto ahorra a lo largo de 7 días?
Cada día ahorra $100 → (100)
A lo largo de 7 días (+7) → (100) x (7) = (700)
Ahorra 100 x 7 = 700 pesos. → (700)

La multiplicación de números enteros positivos se realiza de la misma forma que en los números naturales. Siempre la multiplicación de enteros positivos es otro entero positivo.

CASO 2: MULTIPLICACIÓN DE NÚMEROS ENTEROS NEGATIVOS

Por la ley de signos sabemos que **-** * **-** = +, entonces (-15)*(-3) = -45

SITUACIÓN 2
Manuel se gasta $1.500 pesos cada domingo en la entrada de fútbol. Deja de ir 4 domingos. ¿Cuánto ahorra en total?
Gasta $1.500 cada domingo → (-1.500)
Deja de ir 4 domingos (-4) → (-1.500) x (-4) = (6.000)
Ahorra 1.500 x 4 = 6.000 → (6.000).
El producto de dos enteros negativos es otro entero positivo.

La multiplicación de números enteros negativos se realiza de la misma forma que en los números naturales, el resultado de esta operación siempre será un número entero positivo.

CASO 3: MULTIPLICACIÓN DE NÚMEROS ENTEROS POSITIVOS Y NEGATIVOS

Por ley de signos sabemos qué $+ * - = -$ **y** $- * + = -$, entonces (-15)*(3)= -45 o (15)*(-3)= -45

SITUACIÓN 3

María José gasta en bocadillos $250 cada día. ¿Cuánto gasta en 5 días?
Cada día gasta $250 → (-250)
A lo largo de 5 días (+5) → (-250) x (+5) = (-1.250)
Gasta $250 x 5 = $1.250 → (-1.250)
El producto de dos enteros de diferente signo es un entero negativo.

La multiplicación de números enteros positivos y negativos se realiza como en los números naturales pero se les antepone el signo negativo, siempre el resultado de esta multiplicación será negativa.

La multiplicación de enteros es una operación en la que a cada pareja de números se le asigna un resultado llamado producto. si la multiplicación se lleva a cabo entre enteros de igual signo el resultado es positivo, si los signos son diferentes, el resultado es negativo
Encontrar el producto de:
(-36)×6
23 × 3
(-12) × (-9)
698 ×36

ACTIVIDAD 6:

Tipo: situaciones para la aplicación de conceptos.

Objetivos: examinar cómo los estudiantes resuelven las situaciones plateadas haciendo uso de las propiedades de la multiplicación.

Bloque temático: propiedades de la multiplicación con números enteros.

Conocimientos matemáticos que exige: propiedades de la multiplicación con números naturales y con números enteros, multiplicación con números enteros.

2 Identifica la propiedad de la multiplicación que se aplica en cada caso.

a) $(-65) \times 1 = -65$

b) $3 \times (10 + 7) = (3 \times 10) + (3 \times 7)$

c) $9 \times (-4) = (-4) \times 9$

d) $(6 \times 5) \times 4 = 6 \times (5 \times 4)$

e) $(-2) \times 16 = -32 \in \mathbb{Z}$

3 Expresa en forma generalizada las propiedades de la multiplicación.
Utiliza las letras *a*, *b* y *c* para representar números enteros.

a) Propiedad clausurativa

$\times \quad \in \mathbb{Z}$

b) Propiedad conmutativa

$\times \quad = \quad \times$

c) Propiedad modulativa

$\times \quad =$

d) Propiedad asociativa

$(\quad \times \quad) \times \quad = \quad \times (\quad \times \quad)$

e) Propiedad distributiva

$\times (\quad + \quad) = \quad \times \quad + \quad \times$

Total puntos: /10

Profundiza

4 Calcula mentalmente cada operación.
Aplica la propiedad distributiva.

a) $3 \times (10 + 4) =$

b) $5 \times (10 + 8) =$

c) $(-2) \times (10 + 6) =$

d) $4 \times (20 - 3) =$

e) $(-6) \times (100 - 2) =$

5 Halla el resultado de cada operación.

a) $3 \times 8 + 3 \times 2 =$

b) $5 \times 4 + 5 \times 6 =$

c) $(-3) \times 7 + (-3) \times 3 =$

d) $5 \times 12 + 5 \times 8 =$

e) $(-4) \times 15 + (-4) \times 5 =$

6 Resuelve.

a) En un colegio se ha organizado una caminata, a la que asistirán 50 estudiantes de primaria y 50 de secundaria. Los de primaria deben cancelar \$ 8 000, y los de secundaria, \$ 10 000.

- ¿Qué operaciones hay que realizar para determinar la cantidad de dinero que se invierte en la caminata?
- ¿Qué propiedad de la multiplicación se puede aplicar para simplificar el cálculo?

b) Felipe compra 100 colombinas y luego cuatro más. Si cada una le cuesta \$ 250:

- ¿Cuál es la operación que debe realizar para determinar el costo de todas las colombinas?
- ¿Qué propiedad de la multiplicación debe aplicar para realizar el cálculo de una manera más rápida?

A continuación se presenta la forma como se enseñaron las propiedades de la multiplicación de números enteros:

PROPIEDADES DE LA MULTIPLICACIÓN DE NÚMEROS ENTEROS

PROPIEDAD	DEFINICIÓN	EJEMPLO
CLAUSURATIVA	La multiplicación de números enteros da cómo resultado otro número entero	(-5)* 7 = -35
CONMUTATIVA	El orden de los factores no altera el resultado	(-5) * 7 = -35 7 * (-5) = -35
ASOCIATIVA	La multiplicación de tres o más números enteros se puede asociar	[3 * 5] *(-2) = 3 * [5 * (-2)] 15 * (-2) = 3 * (-10) -30 = -30
MODULATIVA	Todo número multiplicado con el uno da como resultado el mismo número.	(-65) * 1 = -65 1* 18 = 18

ACTIVIDAD 7:

Tipo: situaciones para la aplicación de conceptos.

Objetivos: examinar cómo los estudiantes aplican la ley de signos para dividir números enteros.

Bloque temático: división con números enteros.

Conocimientos matemáticos que exige: división con números naturales, ley de signos para dividir números enteros.

ACTIVIDAD 8:

Tipo: evaluación individual final

Objetivos: examinar los conocimientos que tienen los estudiantes respecto a operar con números enteros y su aplicación a situaciones.

Bloque temático: suma, resta, multiplicación, división y polinomios aritméticos en números enteros.

Conocimientos matemáticos que exige: ley de signos para multiplicar y dividir números enteros, ley para suprimir signos de agrupación, interpretación de situaciones problemas, recta real.

CENTRO EDUCATIVO I.T.I
EVALUACION INDIVIDUAL

NOMBRE:________________________________

GRADO:_______________________

FECHA:______________CURSO_____No__

1. **Escriba F o V según corresponda:**

   a. La suma de un entero positivo y un entero negativo es siempre positiva. (F)
   b. La suma de dos enteros negativos es negativa. (V)
   c. El producto de dos enteros negativos es negativo. (F)
   d. EL cociente de un entero positivo con un entero negativo es negativo. (V)
   e. La división entre números enteros no siempre tiene como resultado un numero entero (V)

2. **Efectúa los siguientes ejercicios. Haga operaciones en la de borrador Y escriba al frente de cada uno la respuesta**
   a. (-359) - (-221) + (-578) -.(11) + (426).RESPUESTA: -301
   b. (-9) X (-7) X 5 X (-10) RESPUESTA-3150
   c. (-359 -721+1) X (-2) RESPUESTA: 2158
   d. (-3565) [illegible]5 RESPUESTA:-713
   e. [illegible]8X [illegible]2 [illegible] [illegible]8 RESPUESTA:___

   f.-17+{-25+24-[13-(34-17+12)-15]+17} RESPUESTA:____

3. El inverso aditivo de -3 X 9 es:
   a. 12
   b. 6
   c. 27
   d. -27
   e. -12

4. En un conjunto de apartamentos hay 5 edificios de 5 pisos cada uno, cada piso tiene 5 apartamentos, cada apartamento tiene 5 alcobas.
¿Cuántos apartamentos hay en el conjunto? RESPUES TA: 125.
¿Cuántas alcobas hay en el conjunto? RESPUESTA: 625
¿Cuántos pisos hay en el conjunto? RESPUESTA: 25

5-Pedro está a dieta y puede consumir sólo 400 calorías en cada comida. Ordeno un perro caliente y papas a la francesa. Si las salchichas y el pan contienen un total de 260 calorías y cada papa a la francesa contiene 20 calorías. ¿Cuántas papas a la francesa puede comer? RESPUESTA: 7

6 El producto de dos enteros consecutivos es -60. Estos son:
   a. 5, 2 y 6.
   b. -3 ,-4 y 5
   c. -3, -4 y -5
   d. 3, 4 y 5

7 Entre 4 gallinas ponen 8 docenas de huevos ¿cuántos huevos pone cada gallina?
RESPUESTA: 24

8 Si al triple de 74 le resto la mitad de 234 ¿Qué resultado dará?
RESPUESTA: 205.