# PRÁCTICA PEDAGÓGICA INVESTIGATIVA: LA ENSEÑANZA DE LA LEY DE SENOS Y LA LEY DE COSENOS EN GRADO 10°

**ERIC FERNANDO BRAVO MONTENEGRO**

**UNIVERSIDAD DEL CAUCA**
**FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES, EXACTAS Y DE LA EDUCACIÓN**
**DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS**
**POPAYÁN**
**2012**

# PRÁCTICA PEDAGÓGICA INVESTIGATIVA: LA ENSEÑANZA DE LA LEY DE SENOS Y LA LEY DE COSENOS EN GRADO 10º

**ERIC FERNANDO BRAVO MONTENEGRO**

**Trabajo de introducción a la investigación**

**Asesor:**
**Dr. Yilton Ovirne Riascos Forero**

**UNIVERSIDAD DEL CAUCA**
**FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES, EXACTAS Y DE LA EDUCACIÓN**
**DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS**
**POPAYÁN**
**2012**

**Nota de aceptación:**

**El presente trabajo de**
**Grado fue aprobado**
**Por el asesor y**
**Respectivo evaluador**

______________________________
**Vo. Bo. Wilmer Libardo Molina Yépes**
**Coordinador Licenciatura en Matemáticas**

______________________________
**Vo. Bo. Yilton Ovirne Riascos Forero**
**Asesor**

______________________________
**Vo. Bo. Eruin Alonso Sánchez Ordóñez**
**Evaluador**

**23 de Febrero de 2012**

## AGRADECIMIENTOS

Este documento es resultado de un trabajo que fue posible gracias a la voluntad decidida de muchas personas que compartieron sus ideas para la elaboración y consecución del mismo. A todos ellos, un agradecimiento especial porque con sus aportes hicieron posible que culmine satisfactoriamente mi formación como Licenciado en Matemáticas con ésta Práctica Pedagógica Investigativa.

A la Universidad del Cauca y en particular al Departamento de Matemáticas que junto con sus docentes orientaron, acompañaron y apoyaron mi formación como Licenciado, un merecido reconocimiento porque su trabajo ha sido definitivo para la consecución de la meta de ser un excelente profesional.

A mi familia y en especial a ti Abuela que con tus consejos y esfuerzos constantes lograste formarme como persona.

**CONTENIDO**

# 1. INTRODUCCIÓN

La Práctica Pedagógica Investigativa (PPI) es un espacio curricular que tiene por objetivo proveer al estudiante del programa de Licenciatura en Matemáticas condiciones para la formación en competencias profesionales como docente en Matemáticas, desde una perspectiva crítica, reflexiva y propositiva en instituciones de educación formal o no formal.

A través del desarrollo de un proyecto pedagógico de intervención en el aula, en Matemáticas, la PPI busca facilitar la cualificación profesional del estudiante como educador mediante una experiencia directa, continua y progresiva del ejercicio docente[1].

En este documento se encontrará la descripción del proyecto pedagógico de intervención realizado en la Institución Educativa Técnico Industrial (IETI) de Popayán, sede principal, alrededor del tema: Ley de senos y Ley de cosenos. Asimismo, se presentan los resultados de una investigación realizada en torno a la misma temática, la cual tuvo por objetivo describir los errores más frecuentes que cometen los estudiantes al aplicar la Ley de senos.

En principio se encontrarán los referentes teóricos que permitieron conocer los elementos más importantes que integran la actividad de investigación en Didáctica de las Matemáticas y desde los cuales se afrontó la investigación y el proyecto pedagógico de esta PPI. Luego, se ubica una presentación formal del tema: Ley de senos y Ley de cosenos; así como las características del contexto de la IETI de Popayán, sede principal, lugar donde se desarrollo ésta PPI. Después, se hallará todo lo concerniente a la práctica pedagógica: sesiones, temas enseñados y la planeación y formulación del problema de investigación.

[1] Tomado del reglamento de la Práctica Pedagógica Investigativa del programa de Licenciatura en Matemáticas.

Finalmente, aparecerán los resultados y conclusiones acerca de ésta PPI y de la investigación realizada.

## 2. TEMÁTICAS DE LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Para describir los errores más frecuentes que cometen los estudiantes al aplicar la Ley de senos, es conveniente conocer algunos referentes que proporcionen un marco teórico que permita comprender las rupturas entre conocimientos en los estudiantes. Tal es la principal finalidad de Vergnaud (1990) en su teoría de los campos conceptuales, la cual tiene una gran influencia por parte de Piaget (1936) y su concepto de *esquema*.

A continuación se hará una breve descripción de los conceptos más importantes de las teorías de Vergnaud (1990) y Piaget (1936) para afrontar la investigación y el proyecto pedagógico de esta PPI. Asimismo, se presentarán los elementos más importantes que integran la actividad de investigación en Didáctica de las Matemáticas, describiendo las corrientes metodológicas existentes y los objetivos prioritarios de los investigadores. Para ello, se tomará como referencia a Gutiérrez Rodríguez (1991).

Precisamente, uno de los elementos más importantes que integra la actividad de investigación en Didáctica de las Matemáticas, es reconocer que tipos de trabajos pueden ser considerados o no investigaciones en esta área. Gutiérrez Rodríguez (1991) describe tres tipos de trabajos, dos de los cuales pueden ser considerados investigaciones en Didáctica de las Matemáticas. El primero corresponde al trabajo de elaboración de teorías de enseñanza o aprendizaje de las Matemáticas. El segundo, el cual corresponde a este trabajo,

> "Consiste en estudiar algunas parcelas de la enseñanza o el aprendizaje de las Matemáticas, haciendo un análisis de los procesos de aprendizaje de los estudiantes, sus formas de comprensión de conceptos o las dificultades que encuentran, desarrollar métodos de enseñanza, etc."(pág. 3)

Una vez que ha quedado determinado qué tipos de trabajos se pueden considerar como investigaciones en Didáctica de las Matemáticas, es conveniente conocer cuáles son los principales parámetros que se manejan para determinar la calidad de una investigación. Gutiérrez Rodríguez (1991) reconoce tres parámetros: el “interés” o “significación”, el “rigor” o “fiabilidad” y la tercera medida es su “validez”. Tener en cuenta estos parámetros significará una mejor selección tanto de los temas de investigación como de los métodos de trabajo.

Luego de elegir un tema investigable se hace necesario saber que tipos de investigación existen. Como Gutiérrez Rodríguez (1991) afirma, conviene conocerlos para poder seleccionar el más apropiado para ese tema concreto. Él distingue seis tipos de investigación, entre los cuales se encuentra uno que denomina “análisis de comportamiento” de los sujetos. Dentro de este tipo de investigación se encuentra ubicado este trabajo, ya que el análisis de los procesos y las dificultades en el aprendizaje de conceptos es una de las investigaciones más frecuentes de este tipo.

> “Está comprobado por infinidad de trabajos que sólo una pequeña parte de los errores que cometen los estudiantes cuando resuelven un determinado tipo de problema o ejercicio son fortuitos (generados, por ejemplo, por falta de atención o por un fallo puntual de la memoria). Por el contrario, la mayoría de los errores se cometen de forma sistemática y aparecen de nuevo cuando se propone a los estudiantes otro problema o ejercicio similar. Esto significa que los estudiantes se equivocan porque aplican alguna idea incorrecta (un concepto mal entendido, una técnica mal aprendida, etc.) o, lo que es más frecuente, porque se basan en alguna idea cuyo campo de validez deja fuera a la situación en la que el estudiante la está aplicando.”(pág. 6)

Por otro lado, hay que decir, que existen diversos métodos de trabajo para realizar las investigaciones, que están relacionados, en cierto modo, con los diferentes tipos de investigación. Es importante conocer estos métodos ya que su adecuación al tipo de investigación que se realiza es fundamental.

Gutiérrez Rodríguez (1991) ofrece métodos de trabajo tanto de la fase de recogida de información como de la fase de tratamiento de dicha información.

En la fase de recogida de información, distingue un método de trabajo que denomina “estudio de casos”, el cual consiste en hacer un seguimiento continuo, completo y detallado de un número muy reducido de estudiantes durante una actividad. Esta característica, el número reducido de estudiantes, representa la debilidad del estudio de casos, ya que es muy problemático hacer generalizaciones a partir de muestras tan reducidas. No obstante, existen las técnicas “de rejilla” que permiten clasificar a los individuos de una población heterogénea en una serie de tipos de características muy concretas, en función de sus valores para ciertas variables, de manera que los resultados de un estudio de casos se puede generalizar a los individuos del mismo tipo que los observados. Como se observará más adelante, esta técnica será usada en este trabajo.

En la fase de tratamiento de dicha información se hallan los métodos “cualitativos”. Estos tienen como principios básicos de su forma de entender la educación, que los estudiantes son diferentes y que su comportamiento o su éxito en el aprendizaje no depende sólo de su habilidad o capacidad, sino que están relacionados con una serie de variables de tipo social que deben ser tenidas en cuenta. Estos métodos se adaptan a este trabajo ya que *“Por su forma de interpretar el aprendizaje de las Matemáticas, los métodos cualitativos se utilizan preferentemente en aquellos estudios centrados en el análisis de la formación de conceptos”*(Gutiérrez Rodríguez, 1991, pág. 10)

Finalmente, otro aspecto a tener en cuenta al desarrollar una investigación, es documentarse sobre qué otras investigaciones se han realizado hasta el momento sobre el problema de interés, cómo han sido desarrolladas y qué resultados han producido.

A este respecto, hay que mencionar, que no se hallaron trabajos que indaguen sobre los errores que cometen los estudiantes al aplicar la Ley de senos. Sin embargo, existen muchos trabajos que se preguntan sobre las dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las Matemáticas en general (Robayna, 1997).

Ahora bien, este trabajo se enmarca en un conjunto aún mayor de preocupaciones acerca de la forma como se construye conocimiento en Matemáticas y más aún en general. En este sentido a continuación presentamos los planteamientos generales de un autor que nos permitió comprender tales relaciones, de tal forma que el marco general del trabajo se viera complementado. Hablamos del trabajo de Jean Piaget.

Piaget (1936) centra su trabajo en el problema de la construcción del conocimiento y considera que hay que estudiarlo observando cómo pasa un individuo de un estado menor a un estado cualitativamente mayor de conocimiento, con la finalidad de construir una teoría del desarrollo del conocimiento científico o epistemología, tomando como modelo principal la Biología. Para Piaget (1936) el desarrollo intelectual constituye un proceso de *adaptación*[2] que es continuación del biológico y que presenta dos aspectos: *asimilación* y *acomodación*.

En la *asimilación*, el individuo incorpora eventos, objetos o situaciones en su diferente manera de pensar. En la *acomodación* las estructuras mentales existentes se reorganizan para incorporar nuevos aspectos del medio ambiente externo.

Según Piaget (1936) cada acto de *inteligencia* es caracterizado por el equilibrio entre la *asimilación* y la *acomodación*. Durante el acto de *inteligencia*, el individuo adopta requerimientos externos de la realidad, y al mismo tiempo mantiene sus estructuras mentales intactas o las modifica según las necesidades. De esta manera, el individuo incorpora eventos y objetos en su estructura mental.

Piaget (1936) llama *esquemas* al conjunto de acciones físicas, mentales, conceptos o teorías con los cuales el individuo organiza y adquiere información sobre el mundo. La noción de *esquema* desempeña un papel importante en la teoría piagetiana ya que en cada sector de la actividad de la *inteligencia*, se encontrarán *esquemas*. La finalidad de estos es fundamentalmente la de asegurar la *asimilación* de nuevos objetos en su diferente manera de pensar.

En sus estudios Piaget (1936) descubrió que el conocimiento evoluciona a lo largo de una serie de etapas, es por esto que en el desarrollo cognitivo[3] del individuo distingue diferentes estadios o períodos de desarrollo (*sensoriomotor, preoperatorio, operaciones concretas y operaciones formales*). La noción de estadio subraya la diferente naturaleza del

[2] Es un equilibrio entre la *asimilación* y la *acomodación*.
[3] Es el conjunto de transformaciones que se dan en el transcurso de la vida, por las cuales se aumentan los conocimientos y habilidades para percibir, pensar y comprender.

pensamiento del niño y del adulto, lo que supone adaptar los contenidos que se van a enseñar a las capacidades de los niños; las características del estudiante, como sujeto que tiene conceptos y modos concretos de enfrentarse a la realidad y que ha ido construyendo a lo largo de su desarrollo, junto con el principio de que el conocimiento se construye activamente[4], supone de hecho un cambio crucial en los métodos de enseñanza.

En resumen, Piaget (1936) construye un edificio teórico que aporta un enfoque y una metodología nueva para abordar el problema del conocimiento humano. Su teoría proporciona un modelo de cómo se forman los conocimientos y cómo se produce la formación de las estructuras conceptuales, que puede ser aprovechada para desarrollar una pedagogía que se adapta a las necesidades y a la posibilidad de comprensión de los individuos en los diferentes estadios; en este sentido su obra desencadena una gran cantidad de trabajos que revolucionan el mundo de la educación.

Justamente, uno de esos trabajos, es el realizado por Vergnaud (1990)con su teoría de los campos conceptuales. Esta teoría pretende ofrecer un referencial más fructífero que el de Piaget para estudiar el desarrollo cognitivo y el aprendizaje de competencias complejas, en particular, aquellas que es necesario movilizar en los ámbitos relacionados con la ciencia y la tecnología. Además, toma en consideración los propios contenidos del conocimiento y el análisis conceptual de su dominio, hecho que no es considerado en la teoría piagetiana.

Desde el punto de vista de la Didáctica de las Matemáticas, Vergnaud (1990) atribuye gran importancia a ideas claves de la teoría piagetiana, como son los conceptos de *adaptación, asimilación, acomodación* y *esquema.*

Vergnaud (1990) parte de la premisa de que el conocimiento está organizado en *campos conceptuales* cuyo dominio, por parte de los individuos, acontece a lo largo de un periodo de tiempo, a través de la experiencia, madurez y aprendizaje. Entiende el campo conceptual como un conjunto de situaciones, conceptos y teoremas.

[4] Piaget es uno de los primeros teóricos del constructivismo; considera que los niños construyen activamente el conocimiento.

Para Vergnaud (1990) un *concepto* adquiere sentido para el niño a través de las *situaciones* y de los problemas que se pretenden resolver, no simplemente reduciéndolo a su definición, al menos si se está interesado en su aprendizaje y enseñanza.

En cuanto a las *situaciones*, distingue dos tipos:

1. Aquellas para las que el individuo dispone de competencias necesarias para el tratamiento relativamente inmediato de la situación.
2. Aquellas para las que el individuo no tiene todas las competencias necesarias.

En el primer tipo, se va a observar conductas muy automatizadas por parte del individuo, organizadas por un único esquema; en el segundo tipo el individuo se ve obligado a reflexionar, explorar, realizar tentativas, etc. Esto lo llevará a esbozar varios esquemas que deberán ser acomodados, separados y recombinados para llegar a la solución buscada.

Vergnaud(1990) llama *esquemas*"*a la organización invariante de la conducta para una clase de situaciones dada*"(Vergnaud, 1990, pág. 2).

Los esquemas son frecuentemente eficaces, pero no siempre efectivos. Cuando un niño utiliza un esquema ineficaz para una cierta situación, la experiencia le conduce bien a cambiarlo, bien a modificarlo.

Por otra parte, los esquemas se basan en conceptualizaciones implícitas; así, los errores de los estudiantes muy frecuentemente tienen que ver con una conceptualización errada o insuficiente.

De esta manera, la teoría de los campos conceptuales envuelve la complejidad inherente a la necesidad de abarcar, desde una misma perspectiva teórica, todo el desarrollo de situaciones progresivamente dominadas, los conceptos y teoremas necesarios para operar eficientemente en las situaciones, y las palabras y símbolos utilizados para representar eficazmente esos conceptos, de acuerdo con el desarrollo cognitivo del individuo.

## 3. EL OBJETO MATEMÁTICO

La Trigonometría es una rama de las Matemáticas que estudia las relaciones entre los lados y los ángulos de los triángulos. Para este fin, hace uso, principalmente, de las razones trigonométricas.

Estas últimas son importantes porque se utilizan en la solución de los triángulos. Por solucionar un triángulo se entiende, calcular los valores de sus lados y sus ángulos.

Los triángulos se clasifican según el tamaño de sus lados y sus ángulos. Según sus lados se clasifican como triángulos equiláteros, isósceles o escalenos. Según sus ángulos, se clasifican en triángulos rectángulos y triángulos no rectángulos.

Un triangulo que contiene un ángulo recto se llama triángulo rectángulo. Para solucionar triángulos rectángulos se pueden usar las razones trigonométricas o el Teorema de Pitágoras.

Un triángulo que no contiene un ángulo recto se llama triángulo no rectángulo[5].Para solucionar triángulos no rectángulos se hace uso, principalmente, de la **Ley de senos** y la **Ley de cosenos.**

Ahora bien, es necesario conocer ciertas partes de un triángulo para poder aplicar éstas leyes. Las partes de un triángulo son seis: sus tres lados y sus ángulos respectivamente opuestos. Si están dadas tres partes y por lo menos una de ellas es un

[5] Existen dos clases de triángulos no rectángulos: obtusángulos y acutángulos. Un triángulo es obtusángulo si uno de sus ángulos es obtuso (mayor de 90° y menor que 180°); es acutángulo si sus tres ángulos son mayores de 0° y menores de 90°.

lado, pueden determinarse las partes restantes. El caso de los tres ángulos no tiene solución única pues hay infinitos triángulos semejantes que cumplen esta condición. De aquí, se desprenden cuatro posibilidades:

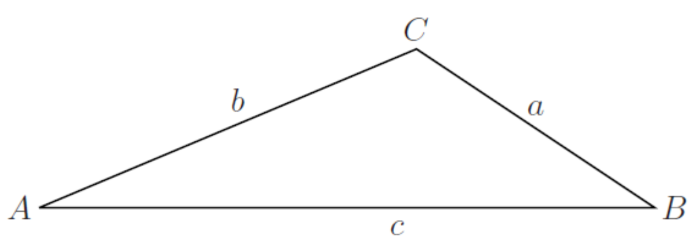
1. **LAA:** Dos ángulos y cualquiera de los lados.
2. **LLA:** Dos lados y el ángulo opuesto a alguno de estos dos lados.
3. **LAL:** Dos lados y el ángulo comprendido entre ellos.
4. **LLL:** Los tres lados.

Las dos primeras posibilidades se resuelven utilizando la Ley de senos; mientras que, las dos últimas se solucionan haciendo uso de la Ley de cosenos.

## 3.1.LEY DE SENOS

En seguida, se enunciará la Ley de senos. Para ello, se tomara en cuenta a Heineman (1983), quien lo hace de la siguiente manera: *En cualquier triángulo, los lados son proporcionales a los senos de los ángulos opuestos.*(pág. 163)

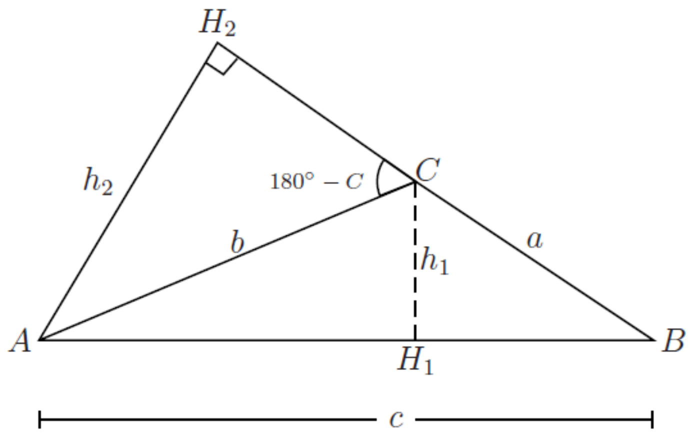
Esto es, dado el siguiente triángulo:




$$\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{sen}(\boldsymbol{A})} = \frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{sen}(\boldsymbol{B})} = \frac{\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{sen}(\boldsymbol{C})}$$

**Demostración:**

Consideremos el triángulo $ABC$ de la siguiente figura:




Sea $CH_1$, el segmento altura respecto al lado de medida $c$.

En el triángulo rectángulo $AH_1C$tenemos que:

$$sen(A) = \frac{h_1}{b}$$

De donde, $h_1 = bsen(A)$ (1)

En el triángulo rectángulo $CH_1B$ tenemos que:

$$sen(B) = \frac{h_1}{a}$$

De donde, $h_1 = asen(B)$ (2)

De (1) y de (2) obtenemos que:

$bsen(A) = asen(B)$

Por tanto:

$$\frac{a}{sen(A)} = \frac{b}{sen(B)} \quad (3)$$

La expresión (3) la hemos obtenido considerando la altura correspondiente al segmento$AB$ o al lado de medida $c$.

Consideremos ahora el segmento altura $AH_2$sobre la prolongación del lado $BC$.

En el triángulo rectángulo$AH_2B$tenemos que:

$$sen(B) = \frac{h_2}{c}$$

De donde, $h_2 = csen(B)$ (4)

En el triángulo rectángulo $ACH_2$tenemos que:

$$sen(180° - C) = \frac{h_2}{b}$$

De donde, $h_2 = bsen(180° - C)$

Pero, usando la identidad trigonométrica: $sen(\pi - \theta) = sen(\theta)$, obtenemos que:

$$h_2 = bsen(C) \ (5)$$

De (4) y de (5) obtenemos que:

$csen(B) = bsen(C)$

O sea:

$$\frac{b}{sen(B)} = \frac{c}{sen(C)} \ (6)$$

De (3) y de (6):

$$\frac{a}{sen(A)} = \frac{b}{sen(B)} = \frac{c}{sen(C)}$$

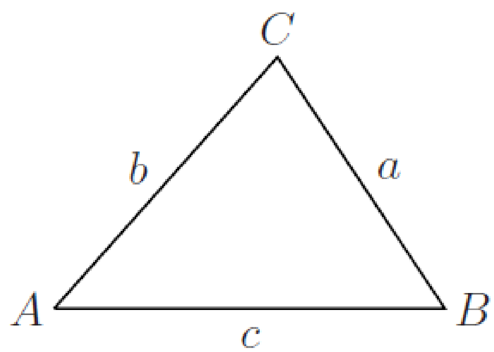
La Ley de senos equivale a las tres ecuaciones siguientes:

$$\frac{a}{sen(A)} = \frac{b}{sen(B)}, \frac{a}{sen(A)} = \frac{c}{sen(C)}, \frac{b}{sen(B)} = \frac{c}{sen(C)}$$

## 3.2.LEY DE COSENOS

Al igual que con la Ley de senos, para enunciar la Ley de cosenos se tendrá en cuenta nuevamente a Heineman (1983) quien lo hace de la siguiente manera:*El cuadrado de cualquier lado de un triángulo es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados menos el doble de su producto multiplicado por el coseno del ángulo incluido.*(pág. 174)

Esto es, dado el siguiente triángulo:




$$\boldsymbol{a^2 = b^2 + c^2 - 2 * bc * cos(A)}$$

$$\boldsymbol{b^2 = c^2 + a^2 - 2 * ca * cos(B)}$$

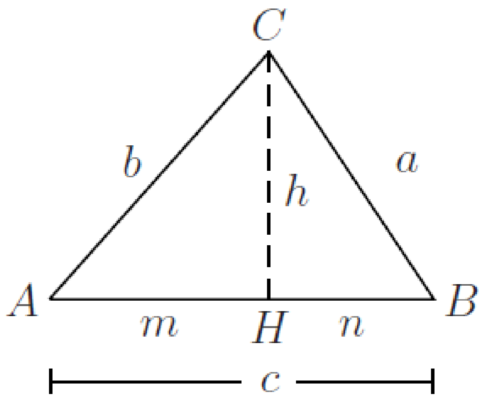
$$\boldsymbol{c^2 = a^2 + b^2 - 2 * ab * cos(C)}$$

**Demostración:**

Vamos a demostrar el teorema para el lado $a$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 * bc * \cos(A)$$

Consideremos el triángulo $ABC$ de la siguiente figura:




Sea $CH$ el segmento altura y sean $m$ y $n$ las longitudes de los segmentos en que el punto $H$divide el lado $AB$.

En el triángulo rectángulo $HCB$, por el Teorema de Pitágoras:

$$a^2 = h^2 + n^2 = h^2 + (c - m)^2 = h^2 + c^2 - 2 * c * m + m^2$$
$$= h^2 + m^2 + c^2 - 2 * c * m \ (1)$$

En el triángulo rectángulo $AHC$ por el Teorema de Pitágoras:

$b^2 = h^2 + m^2$ (2)

Además, $\cos(A) = \frac{m}{b}$
De donde, $m = b\cos(A)$ (3)

Reemplazando (2) y (3) en (1), obtenemos que:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 * bc * \cos(A)$$

En forma similar se podría demostrar la Ley de cosenos para los lados $b$ y $c$.

## 3.3.SOLUCIÓN DE LAS CUATRO POSIBILIDADES

Como lo mencionamos anteriormente, las dos primeras posibilidades se resuelven utilizando la Ley de senos. Mientras que las dos últimas se solucionan haciendo uso dela Ley de cosenos. A continuación se presenta en forma detallada la solución de cada una de ellas.

1. **LAA:** Dos ángulos y cualquiera de los lados.

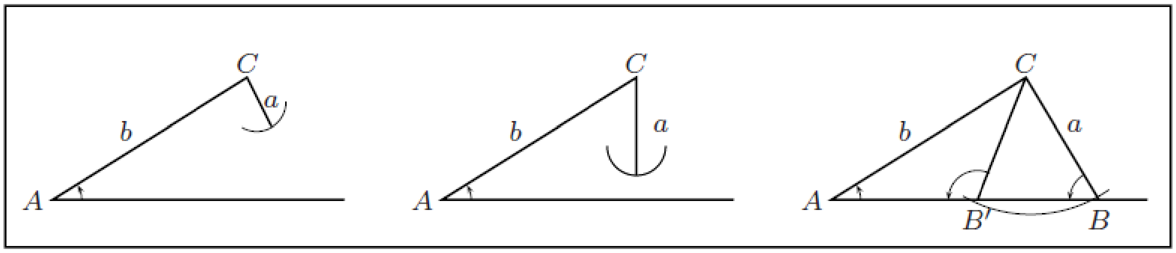
Cuando se conoce un lado y dos ángulos de un triángulo, puede encontrarse inmediatamente el tercer ángulo a partir del teorema que establece, que la suma de los ángulos internos de cualquier triángulo es igual a $180°$. Los dos lados restantes pueden encontrarse con la Ley de senos. Esto se debe a que, en cualquiera de las tres ecuaciones a las cuales equivale la Ley de senos, están presentes dos ángulos y un lado. De esta manera, tendríamos una ecuación con cuatro términos, de los cuales tres cantidades son conocidas y una es desconocida. Puede encontrarse el valor de la incógnita con los métodos algebraicos ordinarios.

2. **LLA:** Dos lados y el ángulo opuesto a alguno de estos dos lados.

Si se dan dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos, el triángulo no está siempre determinado en una forma única. Con las partes dadas, pueden construirse dos triángulos, uno ó ninguno.

Para evitar confusiones innecesarias, se utilizará $A$ para designar el ángulo dado, $a$ para representar el lado opuesto, y $b$ para indicar el otro lado conocido. Constrúyase el ángulo $A$ y déjese $b$ como el lado adyacente; así se fija el vértice $C$. Con $C$ como centro y $a$ como radio, tiéndase un arco que corte el otro lado adyacente a $A$. En la siguiente figura se ilustran las diferentes posibilidades:

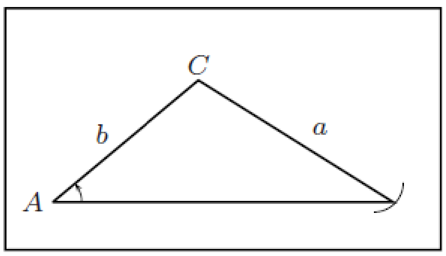
$a < b$

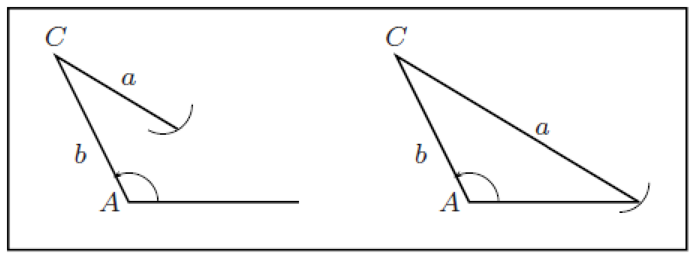



$sen(B) > 1$ — *No se forma triángulo* — $I$

$sen(B) = 1$ — *Se forma un triángulo* — $II$

$sen(B) < 1$ — *Se forman dos triángulos* — $III$




$a \geq b$ — *Se forma un triángulo* — $IV$

$a \leq b$ — *No se forma triángulo* — $V$

$a > b$ — *Se forma un triángulo* — $VI$

Los últimos tres diagramas (diagramas $IV$, $V$ y $VI$) pueden identificarse rápidamente con sólo notar los tamaños relativos de $a$ y $b$. Si $A$ es agudo y $a < b$, es necesario iniciar la solución antes que pueda establecerse el número de triángulos posibles. Para hacer esto, utilizamos la Ley de senos:

$$sen(B) = \frac{b\ sen(A)}{a}$$

Después de determinar los valores de $sen(B)$, puede clasificarse definitivamente el problema como uno de los varios tipos. Con frecuencia es posible determinar el número de soluciones con sólo construir una figura a escala.

3. **LAL:** Dos lados y el ángulo comprendido entre ellos.

Cuando se conocen dos lados y el ángulo comprendido entre ellos, hallamos el lado restante mediante la Ley de cosenos. Esto se debe a que en cada forma de ésta Ley, están presentes los tres lados y el ángulo comprendido entre dos cualesquiera de ellos. Los dos ángulos restantes pueden hallarse mediante la Ley de senos o también mediante la Ley de cosenos.

4. **LLL:** Los tres lados.

Cuando se conocen los tres lados, hallamos los ángulos restantes mediante la Ley de cosenos. Por ejemplo, si queremos hallar el ángulo $A$, utilizamos la Ley de cosenos $a^2 = b^2 + c^2 - 2 * bc * \cos(A)$ y despejamos $A$ de ésta última.

## 3.4.CAMPO CONCEPTUAL DE LA LEY DE SENOS

Debido a que la Ley de senos es el concepto de interés en la parte que concierne a este trabajo, a continuación se presenta los determinantes del campo conceptual en este caso. El campo conceptual de la Ley de senos es a la vez el conjunto de las situaciones cuyo tratamiento implica el uso de una o varias de las ecuaciones a las cuales equivale la Ley de senos, y el conjunto de conceptos y teoremas que permiten analizar estas situaciones como tareas matemáticas. De este modo son elementos constitutivos de la Ley de senos, los conceptos de razón trigonométrica, triángulo no rectángulo y sus clases, proporcionalidad, Teorema de Pitágoras, ángulo agudo, rango de la función seno…

Estos conceptos no van solos, no tendrían casi alcance si a los teoremas no se les da su función en el tratamiento de las situaciones:

1. La suma de los ángulos internos de un triángulo es igual a 180°.
2. En todo triángulo, a mayor lado se opone mayor ángulo y recíprocamente.

# 4. CARACTERISTICAS DEL ENTORNO

Esta PPI se llevo a cabo con los estudiantes del grado decimo C de la IETI de Popayán, sede principal, la cual se encuentra ubicada en la Carrera 2 # 5N-31, vía Pomona (Ver anexo 1.1).

La IETI de Popayán, se creó en el año de 1959 con el auspicio y la decidida colaboración de la Ministra de Educación de aquel entonces, doña Josefina Valencia de Ubach y los doctores Víctor Mosquera Chaux, Álvaro Simmonds y Antonio Lemos Guzmán, quienes desempeñaban los cargos de Gobernador, Secretario de Educación y Rector de la Universidad del Cauca respectivamente en aquella época.

A mediados del mes de octubre de 1959 y bajo la rectoría del señor Eliécer Gómez Guerra, se inician las tareas escolares dictando las primeras clases en el paraninfo de la Universidad del Cauca; en la segunda semana del mes de Noviembre, fue necesario recurrir a las instalaciones del hotel de turismo (hoy Monasterio), para continuar las labores académicas y administrativas. En enero de 1960, se traslada a las inconclusas instalaciones que hoy ocupa, donadas por la Universidad del Cauca y ubicadas en el barrio Tulcán.

En principio, se da al servicio de la comunidad educativa la especialidad de ebanistería, al siguiente año las especialidades de mecánica industrial, mecánica automotriz y electricidad.

La oficina Regional de Rehabilitación y entidades extranjeras, como: C.A.R.E. y S.C.E.C.A. (Servicio Cooperativo de Educación Colombo Americano), del programa de E.U. “Alianza para el progreso”, colabora en la donación y dotación de elementos educativos, de equipos y herramientas de taller.

En el periodo lectivo 1964-1965, se crea la especialidad de dibujo técnico, se abre el quinto curso de bachillerato con lo cual los estudiantes obtuvieron el titulo de expertos. Además, durante la década de los años sesenta se ofrecen y realizan cursos nocturnos de capacitación técnica para el beneficio de la ciudadanía payanesa. En 1973, por resolución N° 5855 del 13 de Junio y emanada del Ministerio de Educación Nacional, es aprobado el plan de estudios de primero a séptimo egresando la primera promoción de bachilleres técnicos.

De 1975 en adelante, la IETI de Popayán, funcionó con cuatro años de educación básica secundaria y dos de educación media técnica, obteniéndose el título de bachiller técnico en una de las especialidades ofrecidas. Luego, se adopta la doble jornada de estudio y se establece la matricula para el personal femenino.

En el año de 1972, la República Democrática Alemana asigna una dotación para la Institución que consistió en laboratorios de dibujo técnico, electricidad, electrónica, metalmecánica y ebanistería. A partir de 1990, la IETI de Popayán, sede principal, ha venido laborando con la implementación de una sala de cómputo y una de bilingüismo y en el año 2000 la especialidad de metalistería entra en funcionamiento. Posteriormente, en el año 2008, empezó a funcionar la especialidad desarrollo de software y su primera promoción se graduó en el año 2009, cuando la Institución cumplía cincuenta años de servicio a la comunidad. Sistemas, es la última especialidad que se creó en el presente año, con el debido apoyo del Servicio Nacional de Aprendizaje (SENA).

Actualmente, la IETI de Popayán, sede principal, de carácter oficial y mixto, está comprometida, de manera permanente, con el desarrollo social, mediante la educación critica, reflexiva, responsable y creativa, dirigida a estudiantes de todos los estratos en los niveles de educación preescolar, básica y media técnica.

Además, tiene como misión formar personas íntegras capaces de ingresar a la educación superior y al sector productivo, fortaleciendo habilidades, capacidades, competencias académicas y laborales, mediante el conocimiento, adopción y la producción de tecnología que contribuyan al progreso social y económico del país.

Asimismo, la IETI de Popayán, sede principal, se centra en la formación técnica de los estudiantes para la solución de necesidades regionales y nacionales a través de la articulación con cadenas de formación y alianzas estratégicas con entidades públicas y privadas.

Entre los objetivos generales que la IETI de Popayán, sede principal, pretende desarrollar se encuentran:

- Actualizar y unificar planes y programas académico-técnicos que contribuyan al mejoramiento de la calidad de la educación.
- Fomentar el desarrollo de competencias en el estudiante para que contribuyan en la búsqueda de soluciones de las necesidades personales y sociales de la región a través de la formación técnica.
- Establecer convenios interinstitucionales que permitan un mayor desarrollo y actualización en lo académico y técnico que garanticen la ocupación laboral y/o continuación de estudios a nivel tecnológico o profesional de los egresados.
- Fomentar la identidad, la pertenencia y la proyección institucional partiendo de la integración de la comunidad educativa en diversas actividades formativas.

Hoy en día, la IETI de Popayán está constituida por la sede principal y cinco sedes más: Mercedes Pardo de Simmonds, San Camilo, Laura Valencia, Jardín Piloto y Gerardo Garrido, con una población escolar de 2529 estudiantes de grado cero a once, 88 docentes, 9 directivos docentes y 25 administrativos[6]

Como se mencionó anteriormente, esta PPI se llevó a cabo con los estudiantes del grado décimo C y con la ayuda fundamental del docente de Matemáticas de la IETI de Popayán, sede principal, profesor Guillermo Villavicencio. El grado décimo C estuvo conformado por 34 estudiantes (27 niños y 7 niñas) de estratos 1 a 3, cuyas edades estaban entre los 15 y 17 años (Ver anexo 1.2).

[6] Tomado del manual de convivencia de la IETI de Popayán, sede principal.

Por último, hay que mencionar, que todas las actividades propuestas en el plan de acción (Ver anexo 2), se realizaron en conjunto con todos los estudiantes, durante alrededor de un mes y medio.

# 5. LA PRÁCTICA PEDAGÓGICA

Después de haber aprobado más del 60% de los créditos exigidos en el plan de estudios del programa de Licenciatura en Matemáticas, incluido en este porcentaje los créditos del curso de Didáctica de las Matemáticas II, se pudo dar inicio a la PPI I.

Durante el transcurso de ésta, se desarrollaron varias actividades. Entre ellas, se hizo un estudio y análisis de los cursos de Matemáticas en los diferentes niveles de educación básica, media y superior. La idea de ésta actividad era encontrar una temática en la cual desarrollar la PPI.

Una vez hecho esto, se estudiaron varios referentes teóricos. Entre los cuales se encuentran: Gutiérrez Rodríguez (1991), Piaget (1936) y Vergnaud (1990). Con estos referentes se buscó tener una fundamentación teórica desde la cual afrontar la investigación y el proyecto pedagógico de esta PPI.

De esta manera, se dio inicio a la elaboración de dicho proyecto. El mismo giro alrededor del tema: Solución de ecuaciones e inecuaciones con valor absoluto.

Luego de elaborar ese proyecto, surgió la necesidad de establecer un convenio con una Institución Educativa de carácter formal o no formal que permitiera desarrollar dicho proyecto en ella. En ese entonces, la Universidad del Cauca tenía un convenio con la Escuela Normal Superior de Popayán, sin embargo, debido a la gestión de uno de los practicantes, se creó otro convenio con la IETI de Popayán, sede principal, la cual acogió las propuestas iniciales de todos los estudiantes de ésta PPI.

Durante el transcurso de la PPI II, se dio el primer contacto con dicha Institución. En él, se tuvo la oportunidad de presentarle al grupo de docentes del área de Matemáticas, el proyecto realizado en la PPI I. Debido a que, el tema de interés de ese proyecto se encontraba en el cuarto periodo, se vio la necesidad de cambiarlo ya que se contaría con muy poco tiempo para la elaboración de este documento final.

De esta manera, fue considerada la propuesta realizada por uno de los docentes del área de Física, quien manifestó su interés en que uno de los practicantes desarrollara su PPI en dicha área, opción que fue descartada después de haber sostenido varias reuniones con el docente y encontrar dificultades en desarrollar la PPI.

En razón a que aún no se tenía ningún acuerdo con ninguno de los docentes de la Institución, se hizo necesario hablar con cada uno de ellos. Fue entonces cuando uno de los docentes de Matemáticas, profesor Guillermo Villavicencio, expresó su interés en hacer parte de esta PPI. Coincidencialmente, este docente orientó el área de Matemáticas cuando cursaba mis estudios de educación media en el colegio, lo cual fue un motivo más para trabajar con él.

Una vez confirmado este vínculo, se sostuvo una reunión con el docente antes mencionado. En ella, se propuso trabajar el tema: Ley de senos y Ley de cosenos. Las razones fueron dos, estaba ubicado en el primer periodo, lo cual permitiría tener más tiempo para la elaboración de este documento. La segunda razón, proporcionada por el docente, fue la dificultad de los estudiantes en dicha temática. Así, se decidió realizar el proyecto pedagógico de ésta PPI con base en ese tema.

Además de acordar la temática a trabajar, se adquirieron ciertos compromisos por ambas partes. Entre ellos, se estableció la importancia de que durante la intervención en el aula, la presencia del docente de la Institución fuese disminuyendo, ya que se pretendía que el practicante aprendiera de manera gradual el manejo de un grupo.

Otro acuerdo al cual se llegó fue el número de sesiones para realizar la intervención en el aula. Este número sería fijado una vez presentado el proyecto de PPI a realizar. Era el momento entonces, de empezar a diseñar dicho proyecto.

Con base a la sugerencia del docente de la IETI de Popayán, sede principal, de trabajar el tema: Ley de senos y Ley de cosenos, se preguntó sobre *¿Cuáles son los errores más frecuentes que cometen los estudiantes del grado décimo C de la IETI de Popayán, sede principal, al aplicar la Ley de senos?*, la cual se constituyó en la pregunta de investigación, definiendo como objetivo general de la misma: “Describir los errores más frecuentes que cometen los estudiantes del grado décimo C de la IETI de Popayán, sede principal, al aplicar la Ley de senos”.

En la PPI III, se puso en marcha el proyecto, el cual iba siendo modificado de acuerdo con las sugerencias del director de práctica, del docente de la IETI de Popayán, sede principal, y de las situaciones que se presentaban en dicha Institución (Tales como: izadas de bandera, reunión de padres de familia, etc.) que impedían el normal desarrollo de las sesiones de clase.

Para la intervención como maestro ante los estudiantes, se realizó un plan de acción, en el que se consideraron 10 actividades a desarrollar en 9 sesiones, las cuales fueron avaladas por el docente de la IETI de Popayán, sede principal.

En la primera sesión se realizó una evaluación diagnóstico (Ver anexo 3), con ella se quiso conocer las estrategias que aplican los estudiantes para resolver dos situaciones en las que se deben utilizar la Ley de senos y la Ley de cosenos.

Con la primera actividad, denominada “Hallando Triángulos” (Ver anexo 3) se procuró que los estudiantes conocieran la existencia de los triángulos no rectángulos.

Para exponer el tema: Ley de senos, se diseño la segunda actividad, llamada “Ley de senos” (Ver anexo 3), la cual tenía como fin que los estudiantes reconocieran las relaciones que existen entre los lados de un triángulo y los senos de sus ángulos respectivamente opuestos. En otras palabras, que ellos mismos formularan la Ley de senos.

Con las actividades siguientes se quiso que los estudiantes reconocieran la importancia de la Ley de senos al aplicarla a situaciones pertenecientes a las posibilidades 1 y 2 expuestas en la página 15. Para ello se elaboró la Guía N°1: Ley de senos (Ver anexo 3), con el fin de orientar a los estudiantes en la solución de dichas situaciones.

En último lugar, se elaboró el Taller N°1: Ley de senos (Ver anexo 3) para que estudiaran para el Examen N°1: Ley de senos (Ver anexo 3) con el fin de evaluarlos en dicha temática.

Una vez acabado el tema: Ley de senos, se dio paso a exponer la Ley de cosenos en clase. Para ello se enunció esta ley y posteriormente se realizó la demostración para un lado del triángulo.

En las sesiones siguientes se pretendió que los estudiantes aplicaran la Ley de cosenos a situaciones pertenecientes a las posibilidades 3 y 4 presentadas en la página 17. De nuevo se hizo una Guía N°2: Ley de cosenos (Ver anexo 3), para encaminarlos en la solución de estas situaciones.

Por último, se presentó el Examen N°2: Ley de cosenos (Ver anexo 3) a los estudiantes, con el fin de evaluarlos en esta temática.

Finalmente, hay que decir, que los temas enseñados a los estudiantes del grado décimo C de la IETI de Popayán, sede principal, fueron:

**1.** Definición de Triángulo no rectángulo y sus clases.
**2.** Ley de senos
**2.1** Solución de triángulos no rectángulos cuando se dan dos ángulos y cualquiera de los lados.
**2.2** Solución de triángulos no rectángulos cuando se dan dos lados y el ángulo opuesto a alguno de estos dos lados.
**3.** Ley de cosenos
**3.1** Solución de triángulos no rectángulos cuando se dan dos lados y el ángulo comprendido entre ellos.
**3.2** Solución de triángulos no rectángulos cuando se dan los tres lados.

# 6. RESULTADOS

## 6.1.RESULTADOS DE LA PPI

En relación con los resultados de las actividades, guías, talleres y evaluaciones propuestas a los estudiantes se pudo encontrar que:

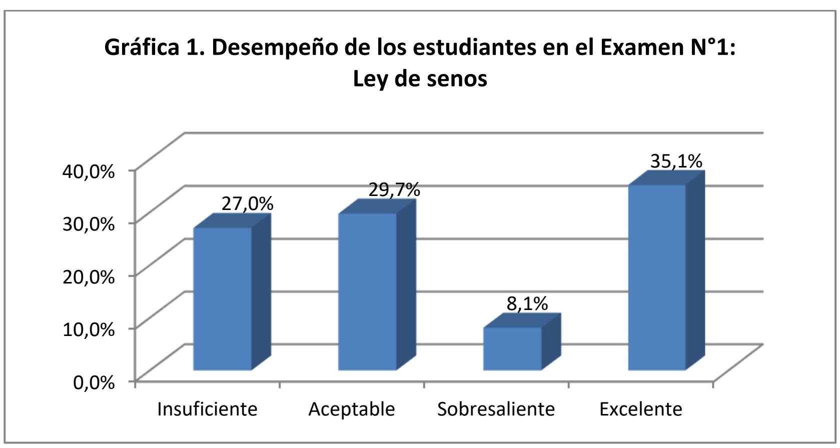
- La evaluación diagnóstico sirvió para conocer algunas estrategias que usaron los estudiantes para resolver las situaciones que se propusieron. La estrategia más común, fue aplicar las razones trigonométricas y el Teorema de Pitágoras. Sin embargo, el 52% de los estudiantes dejó la hoja de respuestas en blanco.

- La Actividad N°1: Hallando triángulos, fue realizada por todos los estudiantes en grupos de 2 personas, tal como fue acordado. Para unos grupos, la actividad no resultó de gran interés y no quisieron resolverla. No obstante, la mayoría de los grupos la resolvieron correctamente, encontrando que los triángulos ade y bcd no son rectángulos. De esta manera, se preguntaron de qué tipo eran estos triángulos. Esto dio pie para que ellos reconocieran la existencia de los triángulos no rectángulos y sus clases.

- La Actividad N°2: Ley de senos, que se presenta en el Anexo 3, fue desarrollada por todos los estudiantes de manera individual, con el seguimiento por parte del practicante. Con respecto a la pregunta realizada para la primera tabla, algunos no encontraron relación alguna entre las columnas 2 y 3 y las columnas 4 y 5, debido a lo cual no concluyeron nada. Otros, sin embargo, después de analizar detenidamente las columnas, llegaron al resultado deseado. Esto es, que a mayor lado se opone mayor ángulo y recíprocamente. Hay que decir, que fue necesario aclarar cuál es el lado opuesto a un ángulo y viceversa en un triángulo.

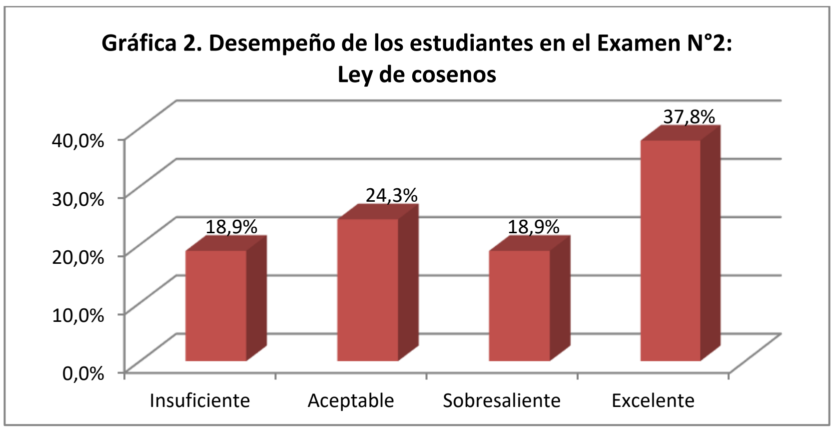
En relación a las preguntas realizadas para la tercera tabla, todos los estudiantes respondieron acertadamente la relación existente entre las columnas 2, 3 y 4. Es decir, todos respondieron que estas columnas eran iguales para los cuatro triángulos. Cuando se les preguntó si esto ocurría para todos los triángulos, algunos no respondieron nada, otros decían que si, mientras que los demás expresaban que no. Para que salieran de dudas, fue necesario proponerles que llenaran la Tabla 3 para otro triángulo. De esta manera, con la ayuda de todos los estudiantes se formuló la Ley de senos.

- En las actividades siguientes, se propusieron situaciones en donde se aplicó la Ley de senos. La mayoría se realizaron en clase con la ayuda de la Guía N°1: Ley de senos, y de todos los estudiantes, las restantes se dejaron como ejercicio para la casa, como por ejemplo las propuestas del Taller N°1: Ley de senos. Estas sirvieron para que los estudiantes estudiaran para el Examen N°1: Ley de senos. Los resultados[7] de este examen fueron los siguientes:




[7] La escala numérica equivalente a la cualitativa es: Insuficiente (0.0 a 1.9), Aceptable (2.0 a 2.9), Sobresaliente (3.0 a 3.9) y Excelente (4.0 a 5.0).

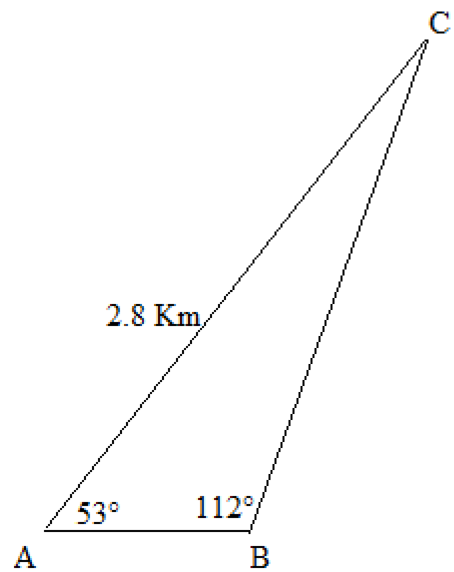
- La Ley de cosenos se enunció y fue demostrada en clase para un lado del triángulo, tal como se había planeado. Las demostraciones para los dos lados restantes fueron dejadas como ejercicio para la casa. El 50% de los estudiantes entregaron estas demostraciones, razón por la cual se les adicionó decimas para el Examen N°2: Ley de cosenos.
- Las situaciones que se propusieron para aplicar la Ley de cosenos fueron hechas por los estudiantes en el tablero con la ayuda del practicante y de la Guía N°2: Ley de cosenos. Esta sirvió para saber cuál es el procedimiento a seguir para resolver situaciones pertenecientes a las posibilidades 3 y 4.
- Por último, los resultados del Examen N°2: Ley de cosenos fueron los siguientes:




## 6.2.RESULTADOS DE LA INVESTIGACIÓN

Para dar respuesta a la pregunta de investigación se utilizó como instrumento la siguiente situación que fue propuesta en el punto 1 del Examen N°1: Ley de senos:

*Una persona se encuentra en el punto A de la siguiente figura y desea dirigirse al punto C, que se encuentra a 2.8 Km en línea recta. Debido a que el terreno está en malas condiciones, decide seguir el camino de A a B para dirigirse, finalmente, hacia C. ¿Cuál es la distancia total que deberá recorrer?*




**SOLUCIÓN:**

1. Como $A + B + C = 180°$, entonces $53° + 112° + C = 180°$. De donde $C = 15°$.
2. Usando la Ley de senos $\frac{a}{sen(A)} = \frac{b}{sen(B)}$ tenemos que $\frac{a}{sen(53°)} = \frac{2.8}{sen(112°)}$. De aquí, $a = 2.41$Km.
3. Usando la Ley de senos $\frac{b}{sen(B)} = \frac{c}{sen(C)}$ obtenemos que $\frac{2.8}{sen(112°)} = \frac{c}{sen(15°)}$. Luego, $c = 0.78$ Km. (También es correcto usar la Ley de senos $\frac{a}{sen(A)} = \frac{c}{sen(C)}$ para hallar el lado $c$)
4. Por lo tanto, la distancia total que deberá recorrer la persona para dirigirse de A hacia C es $a + c = 3.19$ Km.

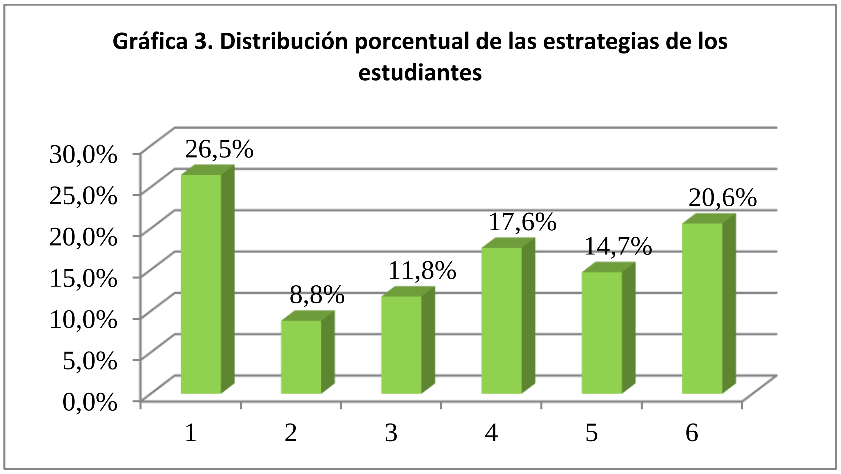
Después de obtener los resultados de esta situación, se dio paso a estudiar minuciosamente la solución dada por cada uno de los estudiantes. Seguido a esto, se decidió hacer uso de la técnica de rejilla descrita en la parte final de la página 4. Ésta consistió en clasificar a cada uno de los estudiantes con base en las estrategias utilizadas por ellos para la solución de la situación.

Las estrategias[8] usadas por los estudiantes, y que a continuación se presentan ordenadas jerárquicamente según su grado de complejidad, fueron las siguientes:

1. **SITUACIÓN ESCOLAR IDEAL:** Denominada de esta manera, ya que fue usada por los estudiantes que resolvieron la situación de la forma esperada. Esto es, hallaron los lados $a$ y $c$ mediante la Ley de senos y respondieron correctamente la pregunta sumando los dos lados encontrados.
2. **SOLUCIÓN IDEAL CON ERROR DE PROCEDIMIENTO:** Esta estrategia fue utilizada por los estudiantes que resolvieron la situación despejando erróneamente el lado $a$, $c$ o ambos en la Ley de senos y que respondieron correctamente la pregunta sumando los dos lados encontrados.
3. **SOLUCIÓN DE LA SITUACIÓN SIN COMPRENSIÓN DE LA PREGUNTA:** Esta estrategia fue usada por los estudiantes que encontraron correctamente los lados $a$ y $c$ usando la Ley de senos, pero respondieron mal o no respondieron la pregunta de la situación.
4. **SOLUCIÓN INCOMPLETA DE LA SITUACIÓN SIN COMPRENSIÓN DE LA PREGUNTA:** Esta estrategia fue empleada por los estudiantes que solucionaron de manera incompleta la situación encontrando tan solo el lado $a$ ó el lado $c$ y respondieron mal o no respondieron la pregunta.
5. **SOLUCIÓN DE LA SITUACIÓN CON ERROR SIN COMPRENSIÓN DE LA PREGUNTA:** Aquí se encuentran los estudiantes que encontraron equivocadamente los lados $a$ y $c$ y que respondieron mal o no respondieron la pregunta planteada en la situación.
6. **EXPOSICIÓN INCOMPRENSIBLE DE LA SOLUCIÓN:** En esta última estrategia se ubican los estudiantes que no realizaron nada y los que plantearon estrategias realmente inexplicables en los términos utilizados en este trabajo.

[8] En esta investigación se entenderá por estrategia, como "*todo sistema y toda secuencia de procedimientos, susceptibles de ser repetidos y transferidos a otras situaciones, que constituyen los medios para alcanzar el fin hacia el que tiende el sujeto*" (Inhelder, 1978, pág. 5)

A continuación se encuentran algunas respuestas a la pregunta de investigación con base a las anteriores estrategias utilizadas por los estudiantes.




Se observa que el 26,5% de los estudiantes utilizaron la estrategia “**SITUACIÓN ESCOLAR IDEAL**”, esto quiere decir que este porcentaje de estudiantes no comete ningún tipo de errores al aplicar la Ley de senos. Mientras que el 8,8 % de los estudiantes que usaron la estrategia “**SOLUCIÓN IDEAL CON ERROR DE PROCEDIMIENTO**” cometen errores de procedimiento como despejar erróneamente algunas de las variables en una de las ecuaciones a las cuales equivale la Ley de senos. Sin embargo, se puede decir que este porcentaje de estudiantes aplica correctamente la Ley de senos ya que sus errores son de tipo procedimental, los cuales son ajenos a la comprensión del concepto como tal.

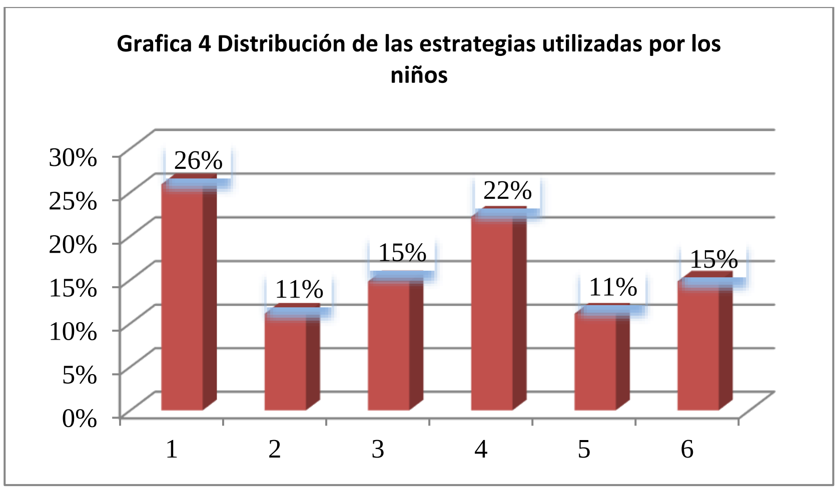
Por otro lado, el 11,8% de los estudiantes que utilizaron la estrategia “**SOLUCIÓN DE LA SITUACIÓN SIN COMPRENSIÓN DE LA PREGUNTA**” no contextualizan la Ley de senos, pues aunque aplican ésta correctamente, no logran comprender la relación que existe entre el concepto y sus aplicaciones en situaciones.

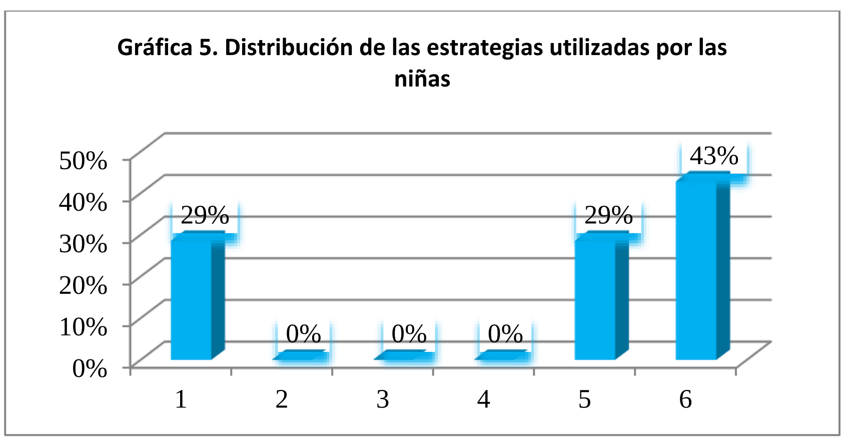
También, se ve que el 17,6% de los estudiantes que utilizaron la estrategia “**SOLUCIÓN INCOMPLETA DE LA SITUACIÓN SIN COMPRENSIÓN DE LA PREGUNTA**” no reconocen todas las ecuaciones a las cuales equivale la Ley de senos, ya que tan solo usan una de las ecuaciones para hallar el lado $a$ ó el lado $c$. Además, al igual que los estudiantes que utilizaron la estrategia anterior, no contextualizan la Ley de senos.

Por otra parte, el 14,7% de los estudiantes que utilizaron la estrategia "**SOLUCIÓN DE LA SITUACIÓN CON ERROR SIN COMPRENSIÓN DE LA PREGUNTA**" cometen errores de tipo conceptual. Por ejemplo, no reconocen la relación entre los lados y los senos de sus ángulos respectivamente opuestos. Además, tampoco contextualizan la Ley de senos.

Finalmente, el 20,6 % de los estudiantes que utilizaron la estrategia denominada "**EXPOSICIÓN INCOMPRENSIBLE DE LA SOLUCIÓN**" no han apropiado en absoluto la Ley de senos, ya que usan el Teorema de Pitágoras y las razones trigonométricas para resolver triángulos no rectángulos como el presentado en la situación.

Ahora bien, observemos la distribución del uso de estrategias tanto en niños como en niñas:



Se observa cómo es similar el porcentaje de niños y niñas que no cometen errores al aplicar la Ley de senos, un 26% contra un 29% respectivamente. Sin embargo, el porcentaje de niñas que no han apropiado aun el concepto es mucho mayor que el de los niños en un orden del 43% contra un 11% respectivamente.

Además, el 52% de los niños utilizaron estrategias que se pueden considerar exitosas en términos de la aplicación de la Ley de senos, a saber las estrategias 1, 2 y 3, mientras que tan solo el 29 % de las niñas logran usar ésta Ley correctamente.

También, es mayor el porcentaje de niños que cometen errores de tipo procedimental al aplicar la Ley de senos, comparado con las niñas esto ocurre en un orden del 11% contra un 0% respectivamente.

Por último, es mucho mayor el porcentaje de niñas que cometen errores de tipo conceptual al aplicar la Ley de senos, en comparación con los niños esto sucede en un orden del 29% contra un 11% respectivamente.

# 7. ANÁLISIS Y CONCLUSIONES

Culminando esta PPI, fueron muchos los aprendizajes que se obtuvieron de ésta como practicante. De igual manera, son varios los aportes para el mejoramiento de la PPI los que este proceso entrega.

Precisamente, uno de los principales aprendizajes obtenidos como practicante en la IETI de Popayán, sede principal, fue el tener un primer contacto con la realidad y poner en práctica todos los conocimientos adquiridos en los cursos básicos que conforman el plan de estudios del Programa de Licenciatura en Matemáticas, reconociendo así la pertinencia de los principios, teorías, concepciones, modelos generales y disciplinares de la Pedagogía, la Didáctica de las Matemáticasy la investigación aprendidos.

De igual forma, ese primer contacto con la realidad permitió afianzar mi deseo de querer ser un excelente Licenciado en Matemáticas y conocer la gran responsabilidad que tengo como educador ante la sociedad.

Además, esta PPI sirvió para mejorar mis capacidades lectoras y sobre todo escritoras, las cuales me servirán para desempeñarme mejor profesionalmente.

Entre los principales aportes para el mejoramiento de la PPI que este proceso entrega, está el convenio realizado con la IETI de Popayán, sede principal, ya que cuando se desarrolló esta PPI tan solo se contaba con un convenio con la Escuela Normal Superior de Popayán, lo cual limitaba el campo de acción de los practicantes. Sin embargo, es necesario que se sigan generando este tipo de vínculos para beneficio de los practicantes venideros.

Asimismo, es necesario aumentar el número de créditos otorgados a la PPI III ya que preparar clase, elaborar talleres y evaluaciones y posteriormente calificarlos requiere de mucho tiempo, toda vez que aún se están viendo cursos del plan de estudio.

Igualmente, una recomendación para los practicantes venideros, es empezar la elaboración de este documento final antes de la PPI IV ya que un semestre es poco tiempo para lograr tal fin.

En cuanto a la práctica como tal, las actividades realizadas marcaron muy bien su objetivo y entregaron resultados que valen la pena analizar.

Por ejemplo, el 52% de los estudiantes que dejaron en blanco la hoja de respuestas de la evaluación diagnóstico reflejan en parte la falta de interés de estos por las Matemáticas, por lo cual es necesario formar más docentes en la educación básica secundaria encaminados a combatir esta apatía por las Matemáticas.

Asimismo, la Actividad N°2: Ley de senos permitió evidenciar un avance conceptual acerca de la Ley de senos en los estudiantes, pues la mayoría de ellos lograron enunciar esta Ley por medio de la metodología empleada en esta actividad. Sin embargo, esta actividad y otras más, muestran que a pesar de la planeación hay estudiantes que no son afines con el tipo de metodología utilizada, lo que supone un gran reto como educador.

Por otro lado, las guías fueron muy importantes para los estudiantes pues les ayudaron a encontrar el procedimiento a seguir para resolver situaciones que involucraban el uso de la Ley de senos y la Ley de cosenos. Además, éstas hacían las clases más dinámicas, logrando mayor participación en clase por parte de los estudiantes en el momento de resolver situaciones en el tablero.

En particular, la Guía N°1: Ley de senos, fue especialmente importante para la posibilidad numero 2, la cual fue la que causó mayor problemática para ser entendida por los estudiantes.

Así pues, todo este conjunto de actividades permitieron que cerca del 44% de los estudiantes aprobaran el Examen N°1: Ley de senos, porcentaje que fue aumentado en un 13% para el Examen N°2: Ley de cosenos, lo cual contrasta con el pobre desempeño mostrado en la evaluación diagnóstico al inicio de esta práctica pedagógica. Esto evidencia que la planeación de las clases y la orientación como practicante ante los estudiantes entregaron resultados satisfactorios que vale la pena mejorar ya en el ejercicio profesional.

## 8. BIBLIOGRAFÍA


Gutiérrez Rodríguez, A. (1991). La investigación en didáctica de las matemáticas. Matematicas: Cultura y aprendizaje, I, 149-194.

Heineman, R. (1983). Trigonometría plana (Quinta edición ed.). (A. R. Zetina, Trad.) Mexico: McGRAW- HILL.

Inhelder, B. (1978). Las estrategias cognitivas: Aproximación al estudio de los procedimientos de resolución de problemas. *Anuario de Psicología*, 3-20.

Piaget, J. (1936). *El nacimiento de la inteligencia en el niño.* Madrid.

Robayna, M. M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las Matemáticas en la Educación Secundaria. En *La educación matemática en la enseñanza secundaria*, 125-154. España.

Vergnaud, G. (1990). La teoría de los campos conceptuales. *Recherches en didáctique des Mathématiques*, *X*, 133-170.

**ANEXOS**

**ANEXO 1: INSTITUCIÓN EDUCATIVA TÉCNICO INDUSTRIAL (IETI) DE POPAYÁN, SEDE PRINCIPAL**

**ANEXO 1.1: INSTALACIONES DE LA IETI**

**ANEXO 1.2: LOS ESTUDIANTES Y EL DOCENTE DE MATEMÁTICAS DEL GRADO DÉCIMO C DE LA IETI**

## ANEXO 2: PLAN DE ACCIÓN

| N° | ACTIVIDAD | OBJETIVO | METODOLOGÍA | RECURSOS | TIEMPO | OBSERVACIONES |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | Presentación del curso y desarrollo de la Evaluación diagnóstico. | Conocer al grupo de estudiantes del grado décimo C y sus estrategias ante situaciones relacionadas con la Ley de senos y la Ley de cosenos. | **1.** Presentar a los estudiantes la Evaluación diagnóstico que consta de dos situaciones.<br>**2.** Los estudiantes de manera individual tratarán de solucionar la Evaluación diagnóstico. | Humanos:<br>❖ Estudiantes<br>❖ Docente de Matemáticas de la IETI de Popayán, sede principal.<br>Material:<br>Lápiz, hojas y borradores<br>Financieros:<br>✓ Fotocopias de la Evaluación diagnóstico: $1700 | 30 min**.** | La presentación del curso fue realizada por el docente de Matemáticas de la IETI de Popayán, sede principal, profesor Guillermo Villavicencio.<br><br>Se les otorgó un tiempo máximo de 20 minutos para solucionar la Evaluación diagnóstico.<br><br>Se recortó la sesión de 50 a 30 minutos debido a una reunión con padres de familia. |
| 2 | Actividad N°1: Hallando triángulos. | • Reconocer la existencia de triángulos no rectángulos.<br>• Clasificar los triángulos según sus ángulos.<br>• Definir el triángulo no rectángulo y sus clases. | **1.** Presentar a los estudiantes la Actividad N°1.<br>**2.** Los estudiantes en grupos de dos personas realizan la Actividad N°1.<br>**3.** Socializaremos las soluciones dadas por los grupos a la Actividad N°1.<br>**4.** Mediante las soluciones dadas se dará a conocer la definición de triángulo no rectángulo y sus clases. | Humanos:<br>❖ Estudiantes<br>Material:<br>Lápiz, colores, hojas, borradores, transportador, tablero y marcadores<br>Financieros:<br>✓ Fotocopias de la Actividad N°1: $850<br>✓ Marcadores: $3000 | 30 min. | Se recortó la sesión de 50 a 30 minutos debido a una izada de bandera. |
| 3 | Actividad N°2: Ley de senos. | Enunciar la Ley de senos. | **1.** Presentar a los estudiantes la | Humanos:<br>❖ Estudiantes | 50 min. | |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | Actividad N°2.<br>**2.** Los estudiantes de manera individual resuelven la Actividad N°2.<br>**3.** Socializaremos las respuestas dadas por los estudiantes a la Actividad N°2.<br>**4.** Mediante las respuestas dadas por ellos se enunciará la Ley de senos. | Material:<br>Lápiz, calculadora, hojas, borradores, tablero y marcadores<br>Financieros:<br>✓ Fotocopias de la Actividad N°2: $1700<br>✓ Marcadores: $3000 | | |
| 4 | Guía N°1: Ley de senos. | Resolver triángulos no rectángulos en los que se dan dos ángulos y cualquiera de los lados (Posibilidad 1). | **1.** Presentar a los estudiantes la Guía N°1.<br>**2.** Aplicar el procedimiento descrito en la Guía N°1 en dos situaciones relacionadas con la Posibilidad 1. | Humanos:<br>❖ Estudiantes<br>Material:<br>Lápiz, calculadora, hojas, borradores, tablero y marcadores<br>Financieros:<br>✓ Fotocopias de la Guía N°1: $1700<br>✓ Marcadores: $3000 | 50 min. | |
| 5 | Guía y Taller N°1: Ley de senos. | Resolver triángulos no rectángulos en los que se dan dos lados y el ángulo opuesto a alguno de estos dos lados (Posibilidad 2). | **1.** Aplicar el procedimiento descrito en la Guía N°1 en dos situaciones relacionadas con la Posibilidad 2.<br>**2.** Presentar a los estudiantes el Taller N°1.<br>**3.** Los estudiantes de manera | Humanos:<br>❖ Estudiantes<br>Material:<br>Lápiz, calculadora, hojas, borradores, tablero y marcadores<br>Financieros:<br>✓ Fotocopias del Taller N°1: $850<br>✓ Marcadores: $3000 | 50 min. | Parte del Taller N°1 se desarrollo en clase, la parte restante se dejó de tarea para la casa. |

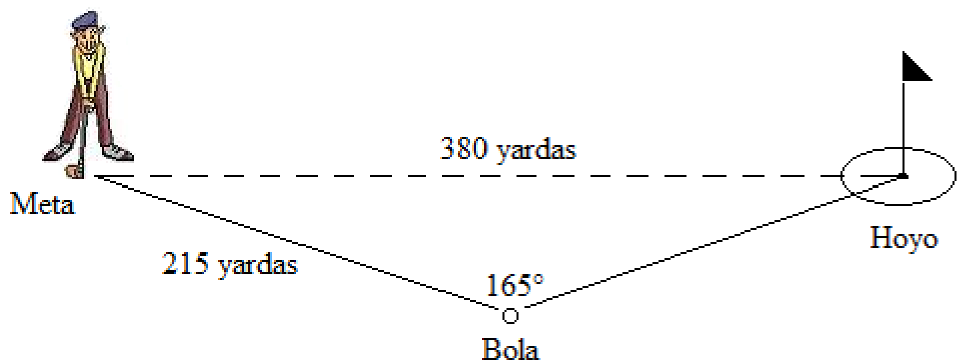
| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | individual resolverán el Taller N°1. | | | |
| 6 | Examen N°1: Ley de senos. | Evaluar a los estudiantes con respecto a la Ley de senos. | **1.** Presentar a los estudiantes el Examen N°1.<br>**2.** Los estudiantes de manera individual resolverán el Examen N°1. | Humanos:<br>❖ Estudiantes<br>Material:<br>Lápiz, calculadora, hojas, borradores.<br>Financieros:<br>✓ Fotocopias del Examen N°1: $850. | 50 min. | Se dieron decimas para el Examen N°1 a quienes entregaron el Taller N°1. |
| 7 | Mediante clase magistral se enunciará y demostrará la Ley de cosenos. | Enunciar la Ley de cosenos. | **1.** Presentar a los estudiantes la Ley de cosenos.<br>**2.** Demostrar la Ley de cosenos para un lado del triángulo. | Humanos:<br>❖ Estudiantes<br>Material:<br>Tablero y marcadores.<br>Financieros:<br>✓ Marcadores: $3000 | 50 min | |
| 8 | Guía N°2: Ley de cosenos. | Resolver triángulos no rectángulos en los que se dan dos lados y el ángulo comprendido entre ellos (Posibilidad 3) y en los que se dan los tres lados (Posibilidad 4) | **1.** Aplicar el procedimiento descrito en la Guía N°2 en cuatro situaciones relacionadas con la Posibilidad 3 y 4. | Humanos:<br>❖ Estudiantes<br>Material:<br>Lápiz, calculadora, hojas, borradores, tablero y marcadores.<br>Financieros:<br>✓ Fotocopias de la Guía N°2: $1700<br>✓ Marcadores: $3000 | 50 min. | |
| 9 | Examen N°2: Ley de cosenos. | Evaluar a los estudiantes con respecto a la Ley de cosenos. | **1.** Presentar a los estudiantes el Examen N°2.<br>**2.** Los estudiantes de manera individual resolverán el Examen N°2. | Humanos:<br>❖ Estudiantes<br>Material:<br>Lápiz, calculadora, hojas, borradores.<br>Financieros:<br>✓ Fotocopias del Examen N°2: $850. | 50 min. | |

## ANEXO 3: ACTIVIDADES, TALLERES, GUIAS Y EVALUACIONES PROPUESTAS

### EVALUACIÓN DIAGNÓSTICO

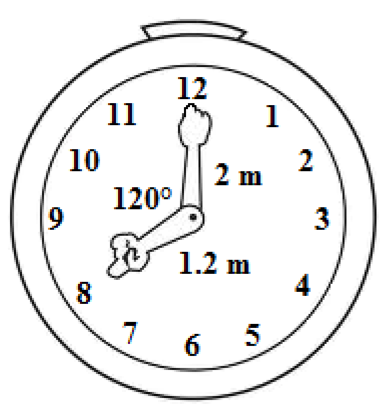
Resuelve las siguientes situaciones:

1. La distancia en línea recta entre la meta y un hoyo de golf es de 380 yardas. Un golfista le pega a la pelota y la coloca a 215 yardas. Desde el punto donde está la pelota ella mide un ángulo de 165º entre la meta y el hoyo (Véase la siguiente figura). Encuentre el ángulo de su lanzamiento.



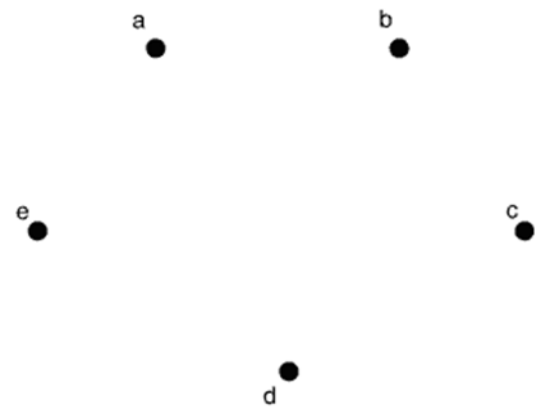

¿Cuál es la distancia entre la bola y el hoyo?

2. El minutero del reloj del parque Caldas tiene 2m de largo. La manecilla que marca las horas tiene una longitud de 1.2m. ¿Cuál es la distancia entre las puntas de las manecillas a las 8 en punto, sabiendo que el ángulo que forman entre sí es de 120º? (Véase la siguiente figura).



## ACTIVIDAD Nº 1: HALLANDO TRIÁNGULOS

Para este juego necesitaremos dos colores distintos, un transportador y dos jugadores. Se jugará sobre un dibujo de 5 puntos como éste:




Cada uno de los jugadores tratará, en su turno, de formar un triángulo uniendo tres de los puntos del dibujo intentando formar la mayoría de triángulos posibles.

**Nota importante:** En este juego sólo cuentan los triángulos cuyos vértices sean puntos del dibujo inicial.

**Reglas del juego:**

**1.** Se escoge al azar cuál jugador comenzará el juego.
**2**. Los jugadores por turnos tratan de formar un triángulo uniendo tres puntos cualesquiera del dibujo inicial.
**3.** Gana el jugador que forme más triángulos.

Ahora, saquen aparte todos los triángulos que obtuvieron y midan sus ángulos con la ayuda del transportador. ¿Son todos triángulos rectángulos?

## ACTIVIDAD Nº 2: LEY DE SENOS

En cada uno de los triángulos, mide los tres ángulos y los tres lados. Con los datos que obtuviste, completa las tablas.

Para llenar las tablas, necesitarás calculadora, transportador y una regla.

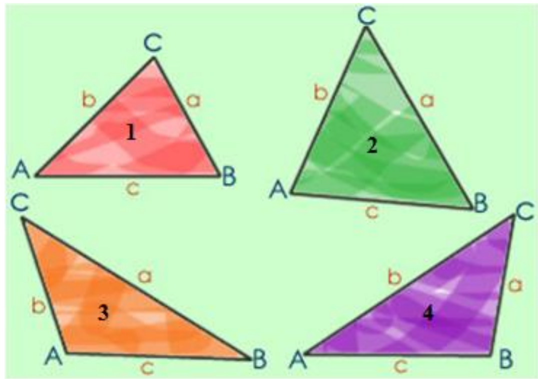



**TABLA Nº 1**

| Nº TRIÁNGULO | LADO MAYOR | ÁNGULO MAYOR | LADO MENOR | ÁNGULO MENOR |
|---|---|---|---|---|
| **1** | | | | |
| **2** | | | | |
| **3** | | | | |
| **4** | | | | |

Observa los datos de la Tabla Nº 1 cuidadosamente.

¿Qué relación existe entre la columna 2 y 3?

¿Qué relación existe entre la columna 4 y 5?

¿Qué puedes concluir?

¿Pasará esto en todos los triángulos?

- Ahora, con la ayuda de la calculadora completa las siguientes tablas:

**TABLA Nº 2**

| Nº TRIANGULO | ANGA | ANGB | ANGC | L a | L b | L c | SenA | SenB | SenC |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **1** | | | | | | | | | |
| **2** | | | | | | | | | |
| **3** | | | | | | | | | |
| **4** | | | | | | | | | |

*Ang: Ángulo. L: Lado.*

**TABLA Nº 3**

| Nº TRIANGULO | a/senA | b/senB | c/senC |
|---|---|---|---|
| 1 | | | |
| 2 | | | |
| 3 | | | |
| 4 | | | |

Observa los datos de la Tabla Nº 3 cuidadosamente.

¿Qué relación existe entre las columnas 2, 3 y 4?

¿Qué puedes decir?

¿Pasará esto con cualquier triángulo?

Lo que acabas de comprobar es que en cualquier triángulo siempre se cumple que:

$$\frac{a}{sen(A)} = \frac{b}{sen(B)} = \frac{c}{sen(C)}$$

y a esto se le llama **Ley de senos**.

**GUIA N°1: LEY DE SENOS**

$$\boldsymbol{\frac{a}{sen(A)} = \frac{b}{sen(B)} = \frac{c}{sen(C)}}$$

**POSIBILIDAD 1. LAA:** Dos ángulos y cualquiera de los lados.

Cuando se conoce un lado y dos ángulos de un triángulo, puede encontrarse inmediatamente el tercer ángulo a partir del teorema que establece, que la suma de los ángulos internos de cualquier triángulo es igual a $180°$. Los dos lados restantes pueden encontrarse con la Ley de senos. Esto se debe a que, en cualquiera de las tres ecuaciones a las cuales equivale la Ley de senos, están presentes dos ángulos y un lado. De esta manera, tendríamos una ecuación con cuatro términos, de los cuales tres cantidades son conocidas y una es desconocida. Puede encontrarse el valor de la incógnita con los métodos algebraicos ordinarios.

**POSIBILIDAD 2. LLA:** Dos lados y el ángulo opuesto a alguno de estos dos lados.

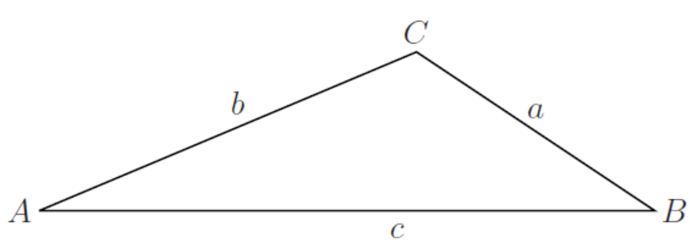
Si se dan dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos, el triángulo no está siempre determinado en una forma única. Con las partes dadas, pueden construirse dos triángulos, uno ó ninguno.

Para evitar confusiones innecesarias, se utilizará $A$ para designar el ángulo dado, $a$ para representar el lado opuesto, y $b$ para indicar el otro lado conocido. A continuación se ilustran los diferentes casos:

1. Si $a < b$ y $sen(B) > 1$ entonces no se forma triángulo.
2. Si $a < b$ y $sen(B) = 1$ entonces se forma un triángulo.
3. Si $a < b$ y $sen(B) < 1$ entonces se forman dos triángulos.
4. Si $a \geq b$ entonces se forma un triángulo.
5. Si $A \geq 90°$y $a \leq b$ entonces no se forma triángulo.
6. Si $A \geq 90°$y $a > b$ entonces se forma un triángulo.

## TALLER N°1: LEY DE SENOS

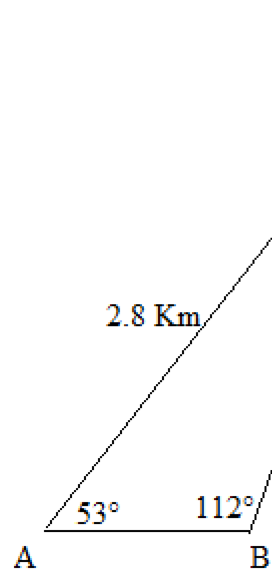
Con base al siguiente triángulo y cada uno de los siguientes datos, determina si existe un triangulo ó dos o ninguno. Si existen uno dos triángulos, resuélvelos.




1. $A = 70°$, $a = 2$ y $b = 4$.
2. $B = 110°$, $b = 3$ y $a = 5$.
3. $C = 120°$, $c = 4$ y $a = 2$.

## EXAMEN N°1: LEY DE SENOS

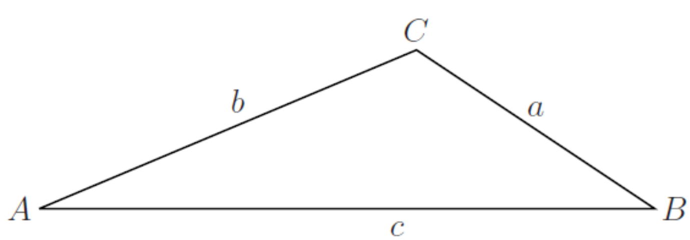
**1.** Una persona que se encuentra en el punto A de la siguiente figura desea dirigirse al punto C, que se encuentra a 2.8 Km en línea recta. Debido a que el terreno está en malas condiciones, decide seguir el camino de A a B para dirigirse, finalmente, hacia C. ¿Cuál es la distancia total que deberá recorrer?




**2.** Con base al siguiente triángulo y cada uno de los siguientes datos, determina si existe un triangulo ó dos o ninguno. Si existen uno dos triángulos, resuélvelos.

**a)** $A = 67°$, $b = 125$ y $a = 100$.

**b)** $C = 80°$, $c = 5$ y $a = 6$.



## GUIA N°2: LEY DE COSENOS

$$\boldsymbol{a^2 = b^2 + c^2 - 2 * bc * cos(A)}$$

$$\boldsymbol{b^2 = c^2 + a^2 - 2 * ca * cos(B)}$$

$$\boldsymbol{c^2 = a^2 + b^2 - 2 * ab * cos(C)}$$

**POSIBILIDAD 3. LAL:** Dos lados y el ángulo comprendido entre ellos.

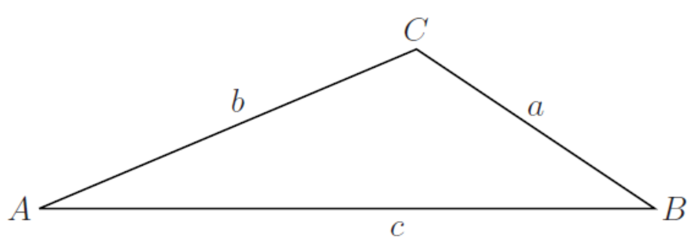
Cuando se conocen dos lados y el ángulo comprendido entre ellos, hallamos el lado restante mediante la Ley de cosenos. Esto se debe a que en cada forma de la Ley de cosenos, están presentes los tres lados y el ángulo comprendido entre dos cualesquiera de ellos. Los dos ángulos restantes pueden hallarse mediante la Ley de senos o también mediante la Ley de cosenos.

**POSIBILIDAD 4. LLL:** Los tres lados.

Cuando se conocen los tres lados, hallamos los ángulos restantes mediante la Ley de cosenos. Por ejemplo, si queremos hallar el ángulo $A$, utilizamos la Ley de cosenos $a^2 = b^2 + c^2 - 2bccosA$ y despejamos $A$ de ésta última.

## EXAMEN N°2: LEY DE COSENOS

**1.** Encuentra los ángulos del siguiente triángulo con base a los siguientes datos:




**a)** $a = 7, b = 6, c = 9.$

2. El minutero del reloj del parque Caldas tiene 2m de largo. La manecilla que marca las horas tiene una longitud de 1.2m. ¿Cuál es la distancia entre las puntas de las manecillas a las 8 en punto, sabiendo que el ángulo que forman entre sí es de 120º? (Véase la siguiente figura).