# CONJUNTOS DE SIDON EN DIMENSIÓN DOS

**FERNANDO ANDRÉS BENAVIDES AGREDO**

**CARLOS ARTURO RODRIGUEZ PALMA**

UNIVERSIDAD DEL CAUCA
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES, EXACTAS Y DE LA EDUCACIÓN
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
POPAYÁN
2003

# CONJUNTOS DE SIDON
# EN DIMENSIÓN DOS

Trabajo de grado presentado como requisito parcial para optar al Título de Matemático


Estudiantes

**FERNANDO ANDRÉS BENAVIDES AGREDO**

**CARLOS ARTURO RODRIGUEZ PALMA**

Director

CARLOS ALBERTO TRUJILLO SOLARTE

UNIVERSIDAD DEL CAUCA
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES, EXACTAS Y DE LA EDUCACIÓN
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
POPAYAN


2003

Nota de aceptación

Director
Doctor. Carlos Alberto Trujillo

Jurado
Magíster. Jairo Roa

Jurado
Magíster. Julián Garcez

Fecha de sustentación:Popayán, Diciembre 4 De 2003

# TABLA DE CONTENIDO

# 1 INTRODUCCIÓN GENERAL

En este capítulo se presentan los conceptos, la notación, los problemas generales y los resultados que serán objeto de la presente monografía.

En la primera sección se considera la situación correspondiente a dimensión uno, la referencia fundamental es el Trabajo de Grado [2] , junto con los artículos [3] , [6].

En la segunda sección se presenta un resumen de los principales resultados obtenidos en dimensión dos. En este caso, la referencia básica es la Tesis Doctoral [8], junto con los artículos [9] , [10] .

## 1.1 Conjuntos de Sidon en dimensión uno

Un conjunto $A$ de enteros positivos se llama *conjunto de Sidon o conjunto* $B_2$ (en dimension uno ) si todas las sumas de la forma

$$a + a', \quad a, a' \in A, \quad a \leq a',$$

son distintas.

Sea $B_2$ la clase de todos los conjuntos de Sidon ( en dimensión uno, finitos o infinitos).

Para todo entero positivo $N$, se define la clase

$$B_2[N] := \{A \subset [1, N] : A \in B_2\},$$

donde $[1, N]$ denota el conjunto de los primeros $N$ enteros positivos

$$[1, N] := \{1, 2, 3, ..., N\}.$$

Y, $F_2(N)$ se define como el máximo número de elementos que pueden seleccionarse del intervalo entero $[1, N]$ de tal forma que ellos constituyan un conjunto de Sidon, es decir:

$$F_2(N) := máx \{|A| : A \in B_2[N]\},$$

donde $|A|$ denota el cardinal del conjunto $A$. En el caso finito, el problema general consiste en analizar el comportamiento asintótico de la función $F_2(N)$.

Para el caso infinito, la función a considerar es la función contadora definida como

$$A(N) = |A \cap [1, N]| = \sum_{\substack{a \in A, \\ a \leq N}} 1 = \sum_{s=1}^{N} \chi_A(s),$$

donde $\chi_A$ es la función característica del conjunto $A$. Por lo tanto, el problema general consiste en investigar el comportamiento asintótico de la función $A(N)$, cuando $A$ es un conjunto infinito en la clase $B_2$.

### 1.1.1 El caso finito

A continuación se enuncian los principales resultados obtenidos en el estudio del comportamiento asintótico de la función $F_2(N)$, para las demostraciones ver [2], [3], [6].

El resultado siguiente demuestra la existencia de una familia infinita de conjuntos de Sidon "densos". Esto permite obtener una cota inferior para la función $F_2(N)$, la cual resulta ser asintóticamente suficiente.

**Teorema (Bose, Chowla)**

Para toda potencia prima $p^k$ existe un conjunto de Sidon $A \subseteq \left[1, p^{2k} - 1\right]$ con $p^k$ elementos. En particular, para todo primo $p$ existe un conjunto de Sidon contenido en $\left[1, p^2 - 1\right]$ con $p$ elementos.

**Corolario.**

Para infinitos valores de $N$, se tiene que

$$F_2(N) \geq \sqrt{N}.$$

De estos resultados se obtiene que

$$\liminf_{N \to \infty} \frac{F_2(N)}{\sqrt{N}} \geq 1. \tag{1.1}$$

Por el otro lado, Erdös y Turán, Lindström, Rusza y otros logran obtener una cota superior. Su resultado se resume en el siguiente teorema.

**Teorema (Erdös y Turán).**

Para todo entero positivo $N$

$$F_2(N) \leq \sqrt{N} + N^{1/4} + 1.$$

**Corolario**.

La función $F_2(N)$ satisface la relación

$$\limsup_{N\to\infty} \frac{F_2(N)}{\sqrt{N}} \leq 1. \tag{1.2}$$

De (1.1) y (1.2), se sigue el resultado central.

**Teorema 1.1**

La función $F_2(N)$ se comporta asintóticamente como $\sqrt{N}$, es decir:

$$\lim_{N\to\infty} \frac{F_2(N)}{\sqrt{N}} = 1.$$

### 1.1.2 El caso infinito

En el caso de conjuntos de Sidon infinitos, la situación es más complicada, de hecho no se conoce un resultado tan satisfactorio como el Teorema 1.1. Los siguientes son algunos resultados obtenidos en el estudio del comportamiento asintótico de la función $A(N)$ cuando $A$ es un conjunto de Sidon (en dimensión uno). Las demostraciones pueden verse en [2], [7].

Paul Erdös construye una sucesión de Sidon infinita que permite obtener una cota inferior.

**Teorema 1.2 (Erdös).**

Existe un conjunto de Sidon infinito para el cual

$$\limsup_{N\to\infty} \frac{A(N)}{\sqrt{N}} \geq \frac{1}{2}.$$

Este resultado fue ligeramente mejorado por Krückeberg.

**Teorema 1.3 (Krückeberg).**

Existe un conjunto de Sidon infinito para el cual

$$\limsup_{N\to\infty}\frac{A\left(N\right)}{\sqrt{N}}\geq\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Por el otro lado, el mismo Erdös demostró el siguiente teorema.

**Teorema 1.4 (Erdös, 1955).**

La relación

$$\liminf_{N\to\infty}\left(\frac{A\left(N\right)}{\sqrt{N}}\sqrt{\log N}\right)=O(1)$$

es válida para todo conjunto de Sidon $A$.

**Corolario**.

Si $A$ es un conjunto de Sidon entonces

$$\liminf_{N\to\infty}\frac{A\left(N\right)}{\sqrt{N}}=0.$$

## 1.2 Conjuntos de Sidon en dimensión dos

En esta sección se presentan los conceptos, la notación y los resultados que constituyen los objetivos de la monografía. Todo lo expuesto aquí será justificado en los capítulos siguientes.

### 1.2.1 Definiciones y propiedades

**Definición 1.1 (Conjunto de Sidon en dimensión dos).**

Un conjunto $\mathbf{A}=\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,...,\mathbf{v}_n,...\}\subseteq\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ se llama un **conjunto de Sidon** (en dimensión dos ) si todas las sumas de la forma

$$\mathbf{v}_i+\mathbf{v}_j,\ \text{con } i\leq j,$$

son diferentes. Es decir si

$$(\mathbf{v}_i+\mathbf{v}_j=\mathbf{v}_k+\mathbf{v}_l)\Longrightarrow\{\mathbf{v}_i,\mathbf{v}_j\}=\{\mathbf{v}_k,\mathbf{v}_l\}.$$

Geométricamente el concepto de conjunto de Sidon en dimensión dos corresponde a un conjunto de puntos reticulares caracterizado por el hecho que no es posible tener un paralelogramo cuyos vértices sean puntos del conjunto (*puntos reticulares libres de paralelogramos*).

Mediante $\mathbb{B}_2$ se representa la clase de todos los conjuntos de Sidon (en dimensión dos ).

A partir de la definición de un conjunto de Sidon, se obtienen las siguentes propiedades.

**Propiedad 1.** $\mathbf{A} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n, ...\}$ es un conjunto de Sidon (en dimensión dos) si y sólo si todas las diferencias de la forma

$$\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j, \quad \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \in \mathbf{A}, \quad i \neq j, \tag{1.3}$$

son distintas.

**Prueba.** Suponga que $\mathbf{A}$ es un conjunto de Sidon (en dimension dos) y sean $\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j, \mathbf{v}_k, \mathbf{v}_l \in \mathbf{A}$ con $i \neq j, k \neq l$ tales que

$$\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j = \mathbf{v}_k - \mathbf{v}_l,$$

entonces

$$\mathbf{v}_i + \mathbf{v}_l = \mathbf{v}_k + \mathbf{v}_j,$$

como $\mathbf{A}$ es un conjunto de sidon (en dimension dos)

$$(\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_k \text{ y } \mathbf{v}_l = \mathbf{v}_j) \text{ o } (\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_j \text{ y } \mathbf{v}_k = \mathbf{v}_l),$$

como $i \neq j$ el segundo caso no es posible, luego las diferencias de la forma (1.3) son distintas.

Recíprocamente, suponga que las diferencias de la forma (1.3) son distintas. Para probar que $\mathbf{A}$ es un conjunto de Sidon, sean $\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j, \mathbf{v}_k, \mathbf{v}_l \in \mathbf{A}$ tales que

$$\mathbf{v}_i + \mathbf{v}_j = \mathbf{v}_k + \mathbf{v}_l,$$

entonces

$$\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_l = \mathbf{v}_k - \mathbf{v}_j,$$

por hipótesis, se obtiene que

$$i = k, \quad l = j,$$

y así, la suma con la cual se inicio es la misma. ∎

Sean $\mathbf{A}, \mathbf{B} \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, $\mathbf{w} \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ y $n \in \mathbb{Z}$. Utilizamos la siguiente notación:

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} := \{\mathbf{u} + \mathbf{v} : \mathbf{u} \in \mathbf{A}, \mathbf{v} \in \mathbf{B}\},$$

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} := \{\mathbf{u} - \mathbf{v} : \mathbf{u} \in \mathbf{A}, \mathbf{v} \in \mathbf{B}\},$$

$$\mathbf{w} + \mathbf{A} := \{\mathbf{w}\} + \mathbf{A} = \{\mathbf{w} + \mathbf{u} : \mathbf{u} \in \mathbf{A}\},$$

$$\mathbf{w} - \mathbf{A} := \{\mathbf{w}\} - \mathbf{A} = \{\mathbf{w} - \mathbf{u} : \mathbf{u} \in \mathbf{A}\},$$

$$n\mathbf{A} = \mathbf{A}n := \{n\mathbf{u} : \mathbf{u} \in \mathbf{A}\}.$$

**Propiedad 2.** Con la notación anterior, si $\mathbf{A}$ es un conjunto de Sidon (en dimensión dos) entonces también $\mathbf{w} + \mathbf{A}$, $n\mathbf{A}$ y $\mathbf{w}\ -\mathbf{A}$ son conjuntos de Sidon.

**Prueba**. Sean $\mathbf{t}_i, \mathbf{t}_j, \mathbf{t}_k, \mathbf{t}_l \in \mathbf{w} + \mathbf{A}$ tales que

$$\mathbf{t}_i + \mathbf{t}_j = \mathbf{t}_k + \mathbf{t}_l,$$

por definición de $\mathbf{w} + \mathbf{A}$ existen $\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j, \mathbf{v}_k, \mathbf{v}_l \in \mathbf{A}$ tales que

$$\mathbf{t}_i = \mathbf{w} + \mathbf{v}_i, \quad \mathbf{t}_j = \mathbf{w} + \mathbf{v}_j, \quad \mathbf{t}_k = \mathbf{w} + \mathbf{v}_k, \quad \mathbf{t}_l = \mathbf{w} + \mathbf{v}_l,$$

entonces

$$(\mathbf{w} + \mathbf{v}_i) + (\mathbf{w} + \mathbf{v}_j) = (\mathbf{w} + \mathbf{v}_k) + (\mathbf{w} + \mathbf{v}_l),$$

de ahí que

$$\mathbf{v}_i + \mathbf{v}_j = \mathbf{v}_k + \mathbf{v}_l,$$

como $\mathbf{A}$ esta en la clase $\mathbb{B}_2$, se tiene $\{\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j\} = \{\mathbf{v}_k, \mathbf{v}_l\}$, lo cual equivale a $\{\mathbf{t}_i, \mathbf{t}_j\} = \{\mathbf{t}_k, \mathbf{t}_l\}$. Por lo tanto $\mathbf{w} + \mathbf{A}$ es un conjunto de Sidon.

De manera analoga se prueban los otros dos casos. ∎

**Definición 1.2 (Congruencia en dimensión dos).**

Sean $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$, $\mathbf{v}' = (v_1', v_2')$, $\mathbf{m} = (m_1, m_2) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, con $m_1, m_2 > 0$. Se dice que $\mathbf{v}$ es congruente con $\mathbf{v}'$ modulo $\mathbf{m}$ , y se escribe $\mathbf{v} \equiv \mathbf{v}'(\operatorname{mod} \mathbf{m})$, si

$$\mathbf{v}_1 \equiv \mathbf{v}_2(\operatorname{mod} m_1),$$

$$\mathbf{v}_1' \equiv \mathbf{v}_2'(\operatorname{mod} m_2).$$

**Definición 1.3 (Conjunto de Sidon módulo m).**

Un conjunto $\mathbf{A} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n, ...\} \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ se llama **conjunto de Sidon módulo m** (en dimensión dos) si todas las sumas de la forma

$$\mathbf{v}_i + \mathbf{v}_j, \quad \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \in A, \quad i \leq j$$

son incongruentes modulo $\mathbf{m}$. Es decir si

$$\mathbf{v}_i + \mathbf{v}_j \equiv \mathbf{v}_k + \mathbf{v}_l(\operatorname{mod} \mathbf{m}) \Longrightarrow \{\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j\} = \{\mathbf{v}_k, \mathbf{v}_l\}.$$

**Propiedad 3.** Si $\mathbf{A}$ es un conjunto de Sidon modulo $\mathbf{m}$ entonces $\mathbf{A}$ es un conjunto de Sidon.

**Prueba.** Sea $\mathbf{A}$ un conjunto de Sidon modulo $\mathbf{m} = (m_1, m_2)$. Si $\mathbf{A}$ no es un conjunto de Sidon, entonces existen

$$\mathbf{v} = (v_1, v_2),\ \mathbf{v}' = (v_1', v_2'),\ \mathbf{w} = (w_1, w_2),\ \mathbf{w}' = (w_1', w_2') \in \mathbf{A},$$

con $\{\mathbf{v}, \mathbf{v}'\} \neq \{\mathbf{w}, \mathbf{w}'\}$ tales que

$$\mathbf{v} + \mathbf{v}' = w + w'.$$

Claramente, esto implica que

$$\mathbf{v} + \mathbf{v}' = w + w'(\operatorname{mod} \mathbf{m}),$$

que es una contradicción. ■

### 1.2.2 Resultados en el caso finito

En esta sección se exponen los resultados, en el caso finito, que serán probados en la monografía.

Para todo entero positivo $N$, se define la clase

$$\mathbb{B}_2[N] := \{\mathbf{A} \subset [1, N]^2 : \mathbf{A} \in \mathbb{B}_2\}$$

donde $[1,N]^2$ denota el retículo cuadrado

$$\{1,2,3,...,N\ \}\times\{1,2,3,...,N\}.$$

El problema que se estudia en la monografía consiste en analizar el comportamiento asintótico de la función

$$\mathbb{F}_2(N) := máx\{|\mathbf{A}| : A \in \mathbb{B}_2\,[N]\},$$

donde $|\mathbf{A}|$ denota el cardinal del conjunto $\mathbf{A}$.

Mediante las construcciones que se desarrollan en el Capítulo Dos, se prueba que la función en cuestión satisface la relación

$$\liminf_{N\to\infty}\frac{\mathbb{F}_2\,(N)}{N}\geq 1. \tag{1.4}$$

Por otro lado, utilizando un método para contar pequeñas diferencias, similar al que utilizan Erdös y Turán [4] en una dimensión, se encuentra una cota superior para la función $\mathbb{F}_2(N)$ :

$$\limsup_{N\to\infty}\frac{F_2(N)}{N}\leq 1. \tag{1.5}$$

De (1.4) y (1.5), se deduce uno de los principales resultados de este trabajo:

$$\lim_{N\to\infty}\frac{\mathbb{F}_2(N)}{N}=1.$$

Esta relación se demuestra en el Capítulo Tres.

### 1.2.3 Resultados en el caso infinito

Para el caso infinito, sea $\mathbb{A}(N)$ la función contadora de elementos de $\mathbf{A}$ cuya componentes son menores o iguales que $N$, es decir

$$\mathbb{A}(N)=|\mathbf{A}\cap[1,N]^2|=|\{(a,a')\in\mathbf{A}:1\leq a,a'\leq N\}|\,.$$

El problema que nos interesa consiste en investigar el comportamiento asintótico de la función $\mathbb{A}(N)$.

Como veremos, los resultados en el caso infinito son mucho menos satisfactorios que aquellos para el caso finito.

El primer resultado del Capítulo Cuatro demuestra la existencia de una sucesión de Sidon (infinita) $\mathbf{A}$, tal que:

$$\limsup_{N\to\infty}\frac{\mathbb{A}(N)}{N}\geq\frac{1}{2}.$$

Por otro lado, no se tiene un resultado similar al Teorema 1.4 de Erdös, mencionado en la sección correspondiente a dimensión uno. Es decir, no se sabe si

$$\liminf_{N\to\infty}\frac{\mathbb{A}(N)\log N}{N}=O(1).$$

Sin embargo, para $m,n$ enteros positivos se considera la función contadora de $\mathbf{A}$ en rectángulos:

$$\mathbb{A}(m,n)=|\mathbf{A}\cap[1,m]\times[1,n]|=|\{(a,a')\in\mathbf{A}:1\leq a\leq m,1\leq a'\leq n\}|\,.$$

El segundo resultado del Capítulo Cuatro prueba que la relación

$$\lim_{N\to\infty}\left(\inf_{\substack{m>N\\ n>N}}\frac{\mathbb{A}(m,n)}{\sqrt{mn}}\log N\right)\ll 1,$$

es válida para toda sucesión infinita $\mathbf{A}$ en la clase $\mathbb{B}_2$.

# 2 CONSTRUCCIONES FINITAS

En este capitulo se desarrollan las construcciones de conjuntos de Sidon finitos en dimensión dos. Inicialmente se consideran construcciones que se generan a partir de conjuntos de Sidon en dimensión uno, las cuales se ilustran con ejemplos; posteriormente se exhiben las construcciones que no tienen dependencia de los conjuntos de Sidon en dimensión uno.

## 2.1 Dependientes de una dimensión

Es conveniente observar que el simple producto cartesiano de dos conjuntos de Sidon en dimensión uno no produce un conjunto de Sidon en dimensión dos, esto se debe a la siguiente igualdad

$$(a, b) + (c, d) = (a, d) + (c, b) ,$$

geométricamente esto se debe a que en un producto cartesiano siempre hay rectángulos y por tanto paralelogramos.

Sin embargo, considere el siguente conjunto y su tabla para la suma

$$\mathbf{A} = \{(1, 1) , (2, 2) , (4, 3) , (8, 4) , (16, 5)\}$$

**TABLA PARA LA SUMA**

| $(1,1)$ | $(2,2)$ | $(4,3)$ | $(8,4)$ | $(16,5)$ |
|---|---|---|---|---|
| $(2,2)$ | $(3,3)$ | $(5,4)$ | $(9,5)$ | $(17,6)$ |
| | $(4,4)$ | $(6,5)$ | $(10,6)$ | $(18,7)$ |
| | | $(8,6)$ | $(12,7)$ | $(20,8)$ |
| | | | $(16,8)$ | $(24,9)$ |
| | | | | $(32,10)$ |

De la tabla de sumas para el conjunto $\mathbf{A}$, notamos que ninguna de las parejas se repite, por lo cual $\mathbf{A}$ es un conjunto $\mathbb{B}_2$.

Si obsevamos detalladamente las componentes de los elementos de $\mathbf{A}$, vemos que las primeras componentes son potencias no negativas de dos, las cuales constituyen un conjunto de Sidon en dimensión uno.

Este ejemplo nos conduce al siguente resultado.

**Proposición 2.1**

Sean $\mathbf{A} \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, $A_1$ el conjunto de las primeras componentes de $\mathbf{A}$ y $A_2$ el conjunto de las segundas componentes de $\mathbf{A}$. Si $A_1$ (respectivamente $A_2$) es un conjunto de Sidon en dimensión uno y si todas las primeras componentes (respectivamente segundas componentes) de los elementos de $\mathbf{A}$ son distintas, entonces $\mathbf{A}$ es un conjunto de Sidon en dimensión dos.

**Prueba.** Supongamos que $A_1$ es un conjunto de Sidon en dimensión uno y que todas las primeras componentes de los elementos de $\mathbf{A}$ son distintas, probemos que $\mathbf{A}$ es un conjunto de Sidon en dimensión dos.

Sean $\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j, \mathbf{v}_k, \mathbf{v}_l \in \mathbf{A}$ tales que

$$\mathbf{v}_i + \mathbf{v}_j = \mathbf{v}_k + \mathbf{v}_l, \tag{2.1}$$

donde $\mathbf{v}_i = (a_i, b_i), \mathbf{v}_j = (a_j, b_j), \mathbf{v}_k = (a_k, b_k), \mathbf{v}_l = (a_l, b_l)$. De (2.1) se tiene

$$a_i + a_j = a_k + a_l,$$

como $A_1$ es un conjunto de Sidon en dimensión uno, se tiene

$$\{a_i, a_j\} = \{a_k, a_l\}.$$

Consideremos los siguientes casos $(a_i = a_k, a_j = a_l)$ o $(a_i = a_l, a_j = a_k)$.

Si $a_i = a_k$ y $a_j = a_l$, entonces $b_i = b_k$ y $b_j = b_l$, luego $\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_k$ y $\mathbf{v}_j = \mathbf{v}_l$.

Análogamente, si $a_i = a_l$ y $a_j = a_k$ se tiene que $\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_l$ y $\mathbf{v}_j = \mathbf{v}_k$.

Por lo tanto $\mathbf{A}$ es un conjunto de Sidon.

La prueba para el caso restante, es idéntica.■

Observe que en la construcción anterior las segundas componentes pueden ser independientes de las primeras, o recíprocamente. En la siguiente construcción hay una relación más estrecha entre las dos componentes.

Sean $A \subseteq \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}^+$, mediante$[A]_b$ denotamos el conjunto obtenido de $A$ representando cada uno de sus elementos en la base $b$. Es decir, si $[x]_b$ denota la representación base $b$ del entero $x$, se define el siguiente conjunto:

$$[A]_b := \{[a]_b : a \in A\},$$

es claro que si $A \subseteq \left[0, b^2 - 1\right]$ entonces

$$[A]_b \subseteq [0, b-1] \times [0, b-1] \, .$$

**Teorema 2.1.**

Si $A \subseteq \left[0, b^2 - 1\right]$ es un conjunto de Sidon en dimensión uno, entonces $[A]_b$ es un conjunto Sidon en dimensión dos y es tal que

$$|\,[A]_b\,| = |A|, \quad [A]_b \subseteq [0, b-1]^2 \, .$$

**Demostración.** De la unicidad de la representación base $b$ de un entero se sigue que $|\,[A]_b\,| = |A|$. Mientras que $[A]_b \subseteq [0, b-1]^2$ es consecuencia del hecho que $A \subseteq \left[0, b^2 - 1\right]$.

Sea $A$ un conjunto de Sidon en dimensión uno, probemos que $[A]_b$ es un conjunto de Sidon en dimensión dos.

Supongamos que

$$[a_1]_b + [a_1']_b = [a_2]_b + [a_2']_b \, ,$$

debido a la representación base $b$, existen enteros $q_i, r_i, q_i', r_i'$ $(i = 1, 2)$ , tales que

$$a_i = q_i b + r_i \quad \text{con } 0 \leq r_i, q_i \leq b - 1,$$

$$a_i' = q_i' b + r_i' \quad \text{con } 0 \leq r_i', q_i' \leq b - 1,$$

luego

$$(q_1 + q_1', r_1 + r_1') = (q_2 + q_2', r_2 + r_2'),$$

$$q_1 + q_1' = q_2 + q_2',$$

$$r_1 + r_1' = r_2 + r_2'.$$

Entonces

$$(q_1 + q_1')b + (r_1 + r_1') = (q_2 + q_2')b + (r_2 + r_2'),$$

$$a_1 + a_1' = a_2 + a_2',$$

y como $A$ es un conjunto de Sidon, $\{a_1, a_1'\} = \{a_2, a_2'\}$ ,y por unicidad de la representación base $b$, esto implica que

$$\{[a_1]_b, [a_1']_b\} = \{[a_2]_b, [a_2']_b\},$$

finalizando la demostración. ■

**Ejemplo 2.1.** El conjunto $A = \{20, 26, 34, 35, 38, 51, 83, 102, 109\}$ es un conjunto de Sidon en dimensión uno. Entonces para $b = 11$, su correspondiente conjunto $\mathbb{B}_2$ es

$$[A]_{11} = \{(1,9), (2,4), (3,1), (3,2), (3,5), (4,7), (9,3), (9,10)\} \subseteq [0,10]^2.$$

Veamos la tabla de las sumas para $[A]_{11}$

| **TABLA PARA LA SUMA** | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **(1, 9)** | **(2, 4)** | **(3, 1)** | **(3, 2)** | **(3, 5)** | **(4, 7)** | **( 9, 3)** | **( 9, 10)** |
| $(2,18)$ | $(3,13)$ | $(4,10)$ | $(4,11)$ | $(4,14)$ | $(5,16)$ | $(10,12)$ | $(10,19)$ |
| | $(4,8)$ | $(5,5)$ | $(5,6)$ | $(5,9)$ | $(6,11)$ | $(11,7)$ | $(11,14)$ |
| | | $(6,2)$ | $(6,3)$ | $(6,6)$ | $(7,8)$ | $(12,4)$ | $(12,11)$ |
| | | | $(6,4)$ | $(6,7)$ | $(7,9)$ | $(12,5)$ | $(12,12)$ |
| | | | | $(6,10)$ | $(7,12)$ | $(12,8)$ | $(12,15)$ |
| | | | | | $(4,14)$ | $(13,10)$ | $(13,17)$ |
| | | | | | | $(18,6)$ | $(18,13)$ |
| | | | | | | | $(18,20)$ |

## 2.2 Independientes

Sabemos que para todo primo $p$ existe un conjunto $\mathbb{B}_2$ módulo $p^2-1$ [2], con $p$ elementos, digamos $A \subset \left[0,p^2-1\right]$ y, por los resultados de la sección anterior $[A]_p \subset [0,p-1]^2$ es un conjunto $\mathbb{B}_2$ con $p$ elementos, pero no necesariamente es un conjunto $\mathbb{B}_2$ módulo $(p,p)$.

**Ejemplo 2.2** Sea $p=7$,

$$A=\{1,2,5,11,31,36,38\}$$

es un conjunto de Sidon módulo 48. Sin embargo

$$[A]_7=\{(0,1),(0,2),(0,5),(1,4),(4,3),(5,1),(5,3)\}$$

es un conjunto $\mathbb{B}_2$, pero no lo es módulo $(7,7)$ ya que

$$(0,2)+(1,4)\equiv(1,6)\,(\mathrm{mod}(7,7)),$$

$$(4,3)+(4,3)\equiv(1,6)\,(\mathrm{mod}(7,7)).$$

El siguiente teorema muestra como construir conjuntos $\mathbb{B}_2$ finitas independientemente de las construcciones en una dimensión. Ademas, el conjunto $\mathbb{B}_2$ obtenida lo es tambien módulo $(p,p)$.

Sea $p$ un primo, mediante $k_p^2$ denotamos el único entero $x$ talque

$$k^2 \equiv x \,(\operatorname{mod} p)\,, \quad 0 \leq x \leq p-1.$$

**Teorema 2.3.**

Para todo primo $p > 2$, el conjunto

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}(p) := \left\{ \left(k, k_p^2\right) : k = 0, 1, 2, ..., p-1 \right\}$$

es un conjunto de Sidon módulo $(p, p)$ en dimensión dos.

**Demostración.** Supongamos que

$$\left(k, k_p^2\right) + \left(l, l_p^2\right) \equiv \left(s, s_p^2\right) + \left(t, t_p^2\right) \pmod{(p,p)}, \quad \text{con } 0 \leq k, l, s, t \leq p-1,$$

entonces,

$$k + l \equiv s + t \pmod{p} \quad \text{y} \quad k_p^2 + l_p^2 \equiv s_p^2 + t_p^2 \pmod{p}\,, \tag{2.3}$$

$$k - s \equiv t - l \pmod{p} \quad \text{y} \quad k_p^2 - s_p^2 \equiv t_p^2 - l_p^2 \pmod{p}\,.$$

Si

$$k - s \equiv t - l \equiv 0 \,(\operatorname{mod} p)\,,$$

entonces, como $0 \leq k, l, s, t \leq p-1$,

$$k - s = t - l = 0$$

de donde

$$k = s \quad \text{y} \quad t = l.$$

Ahora supongamos que

$$k - s \equiv t - l \not\equiv 0 \,(\operatorname{mod} p)\,. \tag{2.4}$$

De (2.3) se obtiene

$$k^2 - s^2 \equiv t^2 - l^2 \,(\operatorname{mod} p)$$

$$(k-s)\,(k+s) \equiv (t-l)\,(t+l) \,(\operatorname{mod} p)$$

y por (2.4)

$$k + s \equiv t + l \,(\operatorname{mod} p) \,. \tag{2.5}$$

Sumando (2.4) y (2.5)

$$2k \equiv 2t \,(\operatorname{mod} p) \,.$$

Como $p > 2$,

$$k \equiv t \,(\operatorname{mod} p) \,,$$

luego $k = t$, que junto con (2.4), $s = l$.

En ambos casos tenemos

$$\{k, l\} = \{s, t\} \,,$$

de donde se sigue

$$\left\{\left(k, k_p^2\right), \left(l, l_p^2\right)\right\} = \left\{\left(s, s_p^2\right), \left(t, t_p^2\right)\right\}$$

finalizando la demostración. ■

**Ejemplo 2.3.** Sea $p = 7$, entonces $\mathbf{A(7)} = \{(1.1), (2.4), (3.2), (4.2), (5.4), (6.1)\}$, su tabla para la suma es:

| **TABLA PARA LA SUMA** | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| (1.1) | (2.4) | (3.2) | (4.2) | (5.4) | (6.1) |
| (2.2) | (3.5) | (4.3) | (5.3) | (6.5) | (7.2) |
| | (4.8) | (5.6) | (6.6) | (7.8) | (8.5) |
| | | (6.4) | (7.4) | (8.6) | (9.3) |
| | | | (8.4) | (9.6) | (10.3) |
| | | | | (10.8) | (11.5) |
| | | | | | (12.2) |

Tabla para la suma módulo $(7,7)$:

| **TABLA PARA LA SUMA MÓDULO (7,7)** | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| (1.1) | (2.4) | (3.2) | (4.2) | (5.4) | (6.1) |
| (2.2) | (3.5) | (4.3) | (5.3) | (6.5) | (0.2) |
| | (4.8) | (5.6) | (6.6) | (0.1) | (1.5) |
| | | (6.4) | (0.4) | (1.6) | (2.3) |
| | | | (1.4) | $(2,6)$ | (3.3) |
| | | | | (3.8) | (4.5) |
| | | | | | (5.2) |

Esta construcción da lugar a una interesante partición del retículo $[1,p-1]^2$ en conjuntos de Sidon módulo $(p,p)$.

**Lema 2.1.**

Para todo primo impar $p$ existe una partición del retículo $[1,p-1]^2$ en $p-1$ subconjuntos tales que cada uno tiene $p-1$ elementos y es un conjunto $\mathbb{B}_2$ módulo $(p,p)$.

**Prueba**. Para cada $u = 1, 2, ..., p-1$, definamos

$$\mathbf{A}_u = \{\left((uk) \bmod p, \left(uk^2\right) \bmod p\right) : k = 1, 2, ..., p-1\}.$$

Sean $\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j, \mathbf{v}_k, \mathbf{v}_l \in \mathbf{A}_u$, para algún $u = 1, 2, ..., p-1$, tales que

$$\mathbf{v}_i + \mathbf{v}_j = \mathbf{v}_k + \mathbf{v}_l$$

donde $1 \leq i, j, k, l \leq p-1$. Por defición de $\mathbf{A}_u$

$$((ui)_{p,} \left(ui^2\right)_p) + ((uj)_{p,} \left(uj^2\right)_p) \equiv ((uk)_{p,} \left(uk^2\right)_p) + ((ul)_{p,} \left(ul^2\right)_p) \pmod p,$$

donde $(uk)_p$ es el único entero $x$ talque $uk \equiv x (\bmod p)$; $1 \leq x \leq p-1$. Entonces

$$ui + uj \equiv uk + ul \pmod p,$$

$$ui^2 + uj^2 \equiv uk^2 + ul^2 \pmod p,$$

como $p$ es primo se tiene que

$$i + j \equiv k + l \pmod{p},$$

$$i^2 + j^2 \equiv k^2 + l^2 \pmod{p},$$

y por la prueba del teorema anterior se sigue que $\mathbf{A}_u$ es un conjunto $\mathbb{B}_2$ módulo $(p, p)$.

Claramente se puede ver que $|\mathbf{A}_u| = p - 1$.

Sean $u, u', 1 \leq u, u' \leq p - 1$, con $u \neq u'$, mostremos que $\mathbf{A}_u \cap \mathbf{A}_{u'} = \emptyset$. Supongamos lo contrario, es decir que $\mathbf{A}_u \cap \mathbf{A}_{u'} \neq \emptyset$, sea $\mathbf{v} \in \mathbf{A}_u \cap \mathbf{A}_{u'}$, luego $\mathbf{v}$ se puede expresar de las siguientes maneras

$$\mathbf{v} = ((uk)_{p,} \left(uk^2\right)_p) = ((u'l)_{p,} \left(u'l^2\right)_p),$$

para algunos $k.l$, $1 \leq k, l \leq p - 1$, entonces

$$uk \equiv u'l \pmod{p}, \tag{2.6}$$

$$uk^2 \equiv u'l^2 \pmod{p}, \tag{2.7}$$

de (2.7) se obtiene

$$uk \equiv (u'l)\left(lk^{-1}\right) \pmod{p},$$

y por (2.6)

$$l \equiv k \pmod{p},$$

como $1 \leq k, l \leq p - 1$ entonces $l = k$, con lo cual $u = u'$, una contradicción Luego $\mathbf{A}_u \cap \mathbf{A}_{u'} = \emptyset$.

Falta probar que

$$\bigcup_{u=1}^{p-1} \mathbf{A}_u = [1, p-1]^2.$$

Pero esto es inmediato si se observa que

$$\left|\bigcup_{u=1}^{p-1} \mathbf{A}_u\right| = \sum_{u=1}^{p-1} |\mathbf{A}_u| = (p-1)^2.$$

Por lo tanto la colección $\{\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, ..., \mathbf{A}_{p-1}\}$ satisface el lema. ■

**Ejemplo 2.4.** Si $p = 7$, entonces

$$\mathbf{A}_1 = \{(1,1)\,,(2,4)\,,(3,2)\,,(4,2)\,,(5,4)\,,(6,1)\},$$

$$\mathbf{A}_2 = \{(2,2)\,,(4,1)\,,(6,4)\,,(1,4)\,,(3,1)\,,(5,2)\},$$

$$\mathbf{A}_3 = \{(3,3)\,,(6,5)\,,(2,6)\,,(5,6)\,,(1,5)\,,(4,3)\},$$

$$\mathbf{A}_4 = \{(4,4)\,,(1,2)\,,(5,1)\,,(2,1)\,,(6,2)\,,(3,4)\},$$

$$\mathbf{A}_5 = \{(5,5)\,,(3,6)\,,(1,3)\,,(6,3)\,,(4,6)\,,(2,5)\},$$

$$\mathbf{A}_6 = \{(6,6)\,,(5,3)\,,(4,5)\,,(3,5)\,,(2,3)\,,(1,6)\},$$

satisfacen el lema anterior.

Esta curiosa partición tiene un pequeño defecto: si bien las primeras componentes de los puntos en cada clase son distintos, no lo son las segundas componentes (debido a que cada residuo cuadrático tiene dos "raices" cuadradas módulo $p$).

La siguiente construcción permite una partición que no tiene tal deficiencia, en cada clase se toma un punto de cada vertical y un punto de cada horizontal.

Sean $p$ un primo, $\alpha$ una raiz primitiva de $p$, para $i = 1, 2, ..., p-1$, sea $\alpha_p^i$ el unico entero $x$ talque

$$\alpha^i \equiv x \,(\operatorname{mod} p)\,; \quad 1 \leq x \leq p-1.$$

Definamos el conjunto

$$\mathbf{A}\,(p,\alpha) = \{\left(i,\alpha_p^i\right) : i = 1, 2, ..., p-1\}.$$

**Teorema 2.4.**

El conjunto $\mathbf{A}\,(p,\alpha)$ es un conjunto de Sidon en dimensión dos con $p-1$ elementos contenidos en $[1, p-1]^2$.

**Demostración.** Supongamos que

$$(k,\alpha_p^k) + (l,\alpha_p^l) = (s,\alpha_p^s) + (t,\alpha_p^t), \text{ donde } 1 \leq k,l,s,t \leq p-1,$$

entonces

$$k+l=s+t \text{ y } \alpha_p^k+\alpha_p^l=\alpha_p^s+\alpha_p^t,$$

luego

$$\alpha^k\alpha^l=\alpha^s\alpha^t,$$

de donde

$$\alpha_p^k\alpha_p^l=\alpha_p^s\alpha_p^t, \text{ y } \alpha_p^k+\alpha_p^l=\alpha_p^s+\alpha_p^t.$$

Sean

$$B=\alpha_p^k\alpha_p^l=\alpha_p^s\alpha_p^t y A=\alpha_p^k+\alpha_p^l=\alpha_p^s+\alpha_p^t,$$

en $GF(p)=\mathbb{Z}_p$ (campo finito con $p$ elementos).

Entonces $\{\alpha_p^k,\alpha_p^l\},\{\alpha_p^s,\alpha_p^t\}$,son raices del polinomio $X^2-AX+B$,de donde

$$\{\alpha_p^k,\alpha_p^l\}=\left\{\alpha_p^s,\alpha_p^t\right\} y \ \{k,l\}=\{s,t\}.$$

Por lo tanto

$$\{(k,\alpha_p^k),(l,\alpha_p^l)\}=\left\{(s,\alpha_p^s),(t,\alpha_p^t)\right\}.$$

Esto finaliza la prueba del teorema. ■

**Comentario**. No es difícil demostrar que el conjunto $\mathbf{A}(p,\alpha)$ construido en el teorema anterior es un conjunto de Sidon módulo $(p-1,p)$.

**Ejemplo 2.5.** Sea $p=7,\alpha=3$, entonces $\mathbf{A}(7,3)=\{(1,3),(2,2),(3,6),(4,4),(5,5),(6,1)\}$. Su tabla para la suma es:

| **TABLA PARA LA SUMA** | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $(1,3)$ | $(2,2)$ | $(3,6)$ | $(4,4)$ | $(5,5)$ | $(6,1)$ |
| $(2,6)$ | $(3,5)$ | $(4,9)$ | $(5,7)$ | $(6,8)$ | $(7,4)$ |
| | $(4,4)$ | $(5,8)$ | $(6,6)$ | $(7,7)$ | $(8,3)$ |
| | | $(6,12)$ | $(7,10)$ | $(8,11)$ | $(9,7)$ |
| | | | $(8,8)$ | $(9,9)$ | $(10,5)$ |
| | | | | $(10,10)$ | $(11,6)$ |
| | | | | | $(12,2)$ |

Su tabla para la suma módulo $(6,7)$ es:

| **TABLA PARA LA SUMA MÓDULO** $(6,7)$ | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $(1,3)$ | $(2,2)$ | $(3,6)$ | $(4,4)$ | $(5,5)$ | $(6,1)$ |
| $(2,6)$ | $(3,5)$ | $(4,2)$ | $(5,0)$ | $(0,1)$ | $(1,4)$ |
| | $(4,4)$ | $(5,1)$ | $(0,6)$ | $(1,0)$ | $(2,3)$ |
| | | $(0,5)$ | $(1,3)$ | $(2,4)$ | $(3,0)$ |
| | | | $(2,1)$ | $(3,2)$ | $(4,5)$ |
| | | | | $(4,3)$ | $(5,6)$ |
| | | | | | $(0,2)$ |

El siguiente resultado lema establece la existencia de la partición del retículo $[1,p-1]^2$ mencionada anteriormente.

**Lema 2.2.**

Sea $p$ un primo y $\alpha$ una raiz primitiva modulo $p$. Para cada $u = 1,2,...,p-1$ el conjunto

$$\mathbf{A}_u = \{(k, (u\alpha^k) \bmod p) : k = 1,2,...,p-1\}$$

es un conjunto de Sidon módulo $(p-1,p)$. Además la colección

$$P = \{\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, ..., \mathbf{A}_{p-1}\},$$

es una partición del retículo $[1, p-1]^2$.

**Prueba**. Sean $u, 1 \leq u \leq p-1$, y $\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j, \mathbf{v}_k, \mathbf{v}_l$ elementos de $\mathbf{A}_u$ tales que

$$\mathbf{v}_i + \mathbf{v}_j = \mathbf{v}_k + \mathbf{v}_l,$$

donde $1 \leq i, j, k, l \leq p-1$. Entonces

$$(i, (u\alpha^i)_p) + (j, (u\alpha^j)_p) \equiv (k, (u\alpha^k)_p) + (l, (u\alpha^l)_p) \pmod{(p-1, p)},$$

luego

$$i + j \equiv k + l (\operatorname{mod} p-1), \tag{2.8}$$

$$u\alpha^i + u\alpha^j \equiv u\alpha^k + u\alpha^l (\operatorname{mod} p),$$

como $p$ es primo

$$\alpha^i + \alpha^j \equiv \alpha^k + \alpha^l (\operatorname{mod} p), \tag{2.9}$$

de (2.8) y (2.9), procediendo como en la prueba del teorema anterior, se tiene que $\mathbf{A}_u$ es un conjunto $\mathbb{B}_2$ módulo $(p-1, p)$. Claramente se puede ver que $|\mathbf{A}_u| = p-1$. La prueba de que $P$ es una partición del reticulo $[1, p-1]^2$ se realiza en forma similar a la prueba del Lema 2.1. ∎

**Ejemplo 2.6.** Sean $p = 7$ y $\alpha = 3$. Tenemos

$$\mathbf{A}_1 = \{(1,3), (2,2), (3,6), (4,4), (5,5), (6,1)\},$$

$$\mathbf{A}_2 = \{(1,6), (2,4), (3,5), (4,1), (5,3), (6,2)\},$$

$$\mathbf{A}_3 = \{(1,2), (2,4), (3,4), (4,5), (5,1), (6,3)\},$$

$$\mathbf{A}_4 = \{(1,5), (2,1), (3,3), (4,2), (5,6), (6,4)\},$$

$$\mathbf{A}_5 = \{(1,1), (2,3), (3,2), (4,6), (5,4), (6,5)\},$$

$$\mathbf{A}_6 = \{(1,4), (2,5), (3,1), (4,3), (5,2), (6,6)\}.$$

# 3 COMPORTAMIENTO ASINTÓTICO DE LA FUNCIÓN $\mathbb{F}_2(N)$

Por definición $\mathbb{F}_2(N)$ representa el maximo número de puntos que pueden seleccionarse del retículo $[1, N]^2$, de tal forma que constituyan un conjunto de Sidon. Inicialmente se presentan las estimaciones inferiores de $\mathbb{F}_2(N)$ obtenidas a partir de las construcciones del capitulo anterior, posteriormente se exponen métodos de conteo para acotar superiormente dicha función.

## 3.1 Cotas inferiores

A partir de las construcciones presentadas en el Capítulo 2 es posible obtener buenas cotas inferiores para la función

$$\mathbb{F}_2(N) := máx \left\{ |\mathbf{A}| : \mathbf{A} \subset [1, N]^2 \text{ y } \mathbf{A} \in \mathbb{B}_2 \right\}.$$

De la construcción que utiliza residuos cuadráticos módulo $p$ (Teorema 2.3), se sigue el siguiente lema.

**Lema 3.1.**

Para todo primo $p$ se tiene

$$\mathbb{F}_2(p) \geq p.$$

**Prueba**. Se sigue del Teorema 2.3, considerando el conjunto

$$\mathbf{B} = \mathbf{A}(p) + (1, 1). \blacksquare$$

De la construcción de Bose-Chowla en dimensión uno y del Teorema 2.1, obtenemos el siguiente resultado.

**Teorema 3.1.**

Para todo primo $p$ y todo número natural $k$, existe un conjunto de Sidon $\mathbf{B}$ en dimensión dos, tal que

$$|\mathbf{B}| = p^k, \quad \mathbf{B} \subseteq \left[0, p^k - 1\right]^2.$$

**Demostración**. Por el Teorema (Bose, Chowla), presentado en la introducción, en dimensión uno para todo primo $p$ y todo número natural $k$ existe un conjunto de Sidon $A$ contenido en el intervalo entero $\left[1, p^{2k} - 1\right]$ con $p^k$ elementos. Si ahora utilizamos el Teorema 2.1 del capítulo anterior, con $b = p^k$, obtenemos que

$$\mathbf{B} = [A]_b + (1,1) \subseteq \left[1, p^k\right]^2,$$

que es un conjunto de Sidon en dimensión dos. ■

**Corolario**.

Para todo primo $p$ y todo número natural $k$, tenemos

$$\mathbb{F}_2(p^k) \geq p^k.$$

**Teorema 3.2.**

La función $\mathbb{F}_2(N)$ satisface la siguiente relación:

$$\liminf_{N \to \infty} \frac{\mathbb{F}_2(N)}{N} \geq 1$$

**Demostración.** Por el Lema 3.1:

$$\mathbb{F}_2^{(2)}(p) \geq p,$$

para todo primo $p$.

Ahora, para todo entero positivo $N \geq 2$ existen primos consecutivos $p, p'$ tales que

$$p \leq N < p'.$$

Como la función $\mathbb{F}_2(N)$ es no decreciente, se sigue que

$$\frac{\mathbb{F}_2(N)}{N} \geq \frac{\mathbb{F}_2(p)}{p'} \geq \frac{p}{p'}.$$

Como el cociente entre primos consecutivos tiende a 1, se sigue que:

$$\liminf_{N\to\infty} \frac{\mathbb{F}_2(N)}{N} \geq 1. \blacksquare$$

## 3.2 Cotas superiores

Sea $\mathbf{A} \subset [1, N]^2$ un conjunto de Sidon. Contando todas las posibles sumas de dos elementos de $\mathbf{A}$ obtenemos una cota superior para $\mathbb{F}_2(N)$.

El número total de sumas de la forma $\mathbf{v} + \mathbf{v}'$, con $\mathbf{v}, \mathbf{v}' \in \mathbf{A}$ y $\mathbf{v} \leq \mathbf{v}'$ (orden lexicográfico) es

$$\binom{|\mathbf{A}|}{2} + |\mathbf{A}| = \binom{|\mathbf{A}|+1}{2}.$$

Todas estas sumas están contenidas en el retículo $[2, 2N]^2$, y como son todas diferentes

$$\frac{|\mathbf{A}|\left(|\mathbf{A}|+1\right)}{2} \leq (2N-1)^2\,,$$

de donde

$$|\mathbf{A}| \leq 2\sqrt{2}N.$$

Esta cota se mejora si se cuentan diferencias. Hay $|\mathbf{A}|^2 - |\mathbf{A}|$ diferencias de dos elementos distintos de $\mathbf{A}$, todas contenidas en el reticulo $[-(N-1), N-1]^2$. Entonces

$$(|\mathbf{A}|-1)^2 \leq |\mathbf{A}|^2 - |\mathbf{A}| \leq (2N-1)^2,$$

de donde

$$|\mathbf{A}| \leq 2N,$$

luego

$$\mathbb{F}_2(N) \leq 2N.$$

Mediante un método de conteo más fino se mejora esta cota. En efecto, utilizando una extensión a dimensión dos del método de Erdös y Turán en dimensión uno, obtenemos el siguiente teorema.

**Teorema 3.3.**

Para todo entero positivo $N$, suficientemente grande

$$\mathbb{F}_2(N) \leq N + O(N^{1/2}).$$

**Demostración.** Sean $U, N$ enteros positivos tales que $1 \leq U \leq N$ y sea $\mathbf{A} \subseteq [1, N]^2$ un conjunto de Sidon.

Consideremos los $(N+U)^2$ reticulos siguientes

$$I(i,j) = [i-U, i-1] \times [j-U, j-1],$$

donde $i, j = 1, 2, ..., N+U$. Mediante $\mathbf{A}(i,j)$ denotamos el número de elementos de $\mathbf{A}$ que están en el reticulo $I(i,j)$, esto es:

$$\mathbf{A}(i,j) = |I(i,j) \cap \mathbf{A}|.$$

Primero probemos que *todo* $\mathbf{v} = (v_1, v_2) \in A$, *aparece en exactamente* $U^2$ *retículos* $I(i,j)$.

El primer retículo donde aparece $\mathbf{v}$ es

$$[v_1 + 1 - U, v_1] \times [v_2 + 1 - U, v_2],$$

cuando $i = v_1 + 1, j = v_2 + 1$, el último retículo donde aparece $\mathbf{v}$ es:

$$[v_1, v_1 + U - 1] \times [v_2, v_2 + U - 1],$$

cuando $i = v_1 + U, j = v_2 + U$.

Por lo tanto

$$\sum_{i=1}^{N+U} \sum_{j=1}^{N+U} \mathbf{A}(i,j) = U^2 |\mathbf{A}| \tag{3.1}$$

Elevando al cuadrado (3.1) y utilizando la desigualdad de Cauchy-Schwartz, se tiene

$$
\begin{aligned}
\left(U^2 |\mathbf{A}|\right)^2 &= \left(\sum_{i=1}^{N+U} \sum_{j=1}^{N+U} \mathbf{A}(i,j)\right)^2 \leq \left(\sum_{j=1}^{N+U} 1^2\right)\left(\sum_{i=1}^{N+U}\left(\sum_{j=1}^{N+U} \mathbf{A}(i,j)\right)^2\right) \\
&\leq (N+U) \sum_{i=1}^{N+U}\left(\sum_{j=1}^{N+U} \mathbf{A}(i,j)\right)^2 \\
&\leq (N+U) \sum_{i=1}^{N+U}\left(\sum_{j=1}^{N+U} 1^2\right)\left(\sum_{j=1}^{N+U} \mathbf{A}(i,j)^2\right) \\
&\leq (N+U)^2 \sum_{i=1}^{N+U} \sum_{j=1}^{N+U} \mathbf{A}(i,j)^2
\end{aligned}
$$

Entonces

$$
\sum_{i=1}^{N+U} \sum_{j=1}^{N+U} \mathbf{A}(i,j)^2 \geq \left(\frac{U^2}{N+U}\right)^2 |\mathbf{A}|^2 . \tag{3.2}
$$

Como

$$
\binom{\mathbf{A}(i,j)}{2} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{A}(i,j)^2 - \mathbf{A}(i,j)\right),
$$

tenemos

$$
\sum_{i=1}^{N+U} \sum_{j=1}^{N+U} \binom{\mathbf{A}(i,j)}{2} = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{N+U} \sum_{j=1}^{N+U} \mathbf{A}(i,j)^2 - U^2 |\mathbf{A}|\right), \tag{3.3}
$$

de (3.2) y (3.3) se obtiene

$$
\sum_{i=1}^{N+U} \sum_{j=1}^{N+U} \binom{\mathbf{A}(i,j)}{2} \geq \frac{U^2 |\mathbf{A}|}{2}\left[\frac{U^2 |\mathbf{A}|}{(N+U)^2} - 1\right]. \tag{3.4}
$$

Por otro lado como $\binom{\mathbf{A}(i,j)}{2}$ es el número de subconjuntos de $I(i,j) \cap \mathbf{A}$ con dos elementos, es también el número de pares $(\mathbf{v}, \mathbf{v}')$ con $\mathbf{v}, \mathbf{v}' \in I(i,j) \cap \mathbf{A}$, $\mathbf{v} < \mathbf{v}'$ (orden lexicográfico). Cada par da lugar a un único $\mathbf{w} = \mathbf{v}' - \mathbf{v}$, tal que $\mathbf{w} = (d_1, d_2)$ está en el retículo

$$
[1, U-1] \times [1-U, U-1] \cup \{0\} \times [1, U-1],
$$

de donde $(1 \leq d_1 \leq U-1$ y $|d_2| \leq U-1)$ o $(d_1 = 0$ y $1 \leq d_2 \leq U-1)$.

Ahora, en la suma (3.4), cada par es contado $(U - d_1)(u - |d_2|)$ veces, luego

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{N+U}\sum_{j=1}^{N+U}\binom{\mathbf{A}(i,j)}{2} &\leq 2\sum_{d_1=1}^{U-1}\sum_{d_2=1}^{U-1}(U-d_1)(U-|d_2|)+2\sum_{d_1=1}^{U-1}U(U-d_1)\\
&= 2\left(\sum_{d_1=1}^{U-1}(U-d_1)\right)^2+2U\sum_{d_1=1}^{U-1}U(U-d_1)\\
&= 2\left(\frac{U(U-1)}{2}\right)^2+2U\left(\frac{U(U-1)}{2}\right)\\
&= \frac{U^2\left(U^2-1\right)}{2}\\
&\leq \frac{U^4}{2},
\end{aligned}
$$

entonces

$$
\sum_{i=1}^{N+U}\sum_{j=1}^{N+U}\binom{\mathbf{A}(i,j)}{2} \leq \frac{U^4}{2}. \tag{3.5}
$$

De (3.4) y (3.5) se tiene

$$
\begin{aligned}
\frac{U^4}{2} &\geq \frac{U^2|\mathbf{A}|}{2}\left(\frac{U^2|\mathbf{A}|}{(N+U)^2}-1\right)\\
U^4 &\geq \frac{U^4|\mathbf{A}|}{(N+U)^2}-U^2|\mathbf{A}|\\
(N+U)^2 &\geq |\mathbf{A}|^2-\left(\frac{N+U}{U}\right)^2|\mathbf{A}|,
\end{aligned}
$$

completando cuadrados

$$
(N+U)^2+\frac{1}{4}\left(\frac{N+U}{U}\right)^4 \geq \left(|\mathbf{A}|-\frac{1}{2}\left(\frac{N+U}{U}\right)^2\right)^2,
$$

de donde

$$
|\mathbf{A}| \leq \frac{1}{2}\left(\frac{N+U}{U}\right)^2+\left[(N+U)^2+\frac{1}{4}\left(\frac{N+U}{U}\right)^4\right]^{\frac{1}{2}}.
$$

Del hecho que $1 \leq U \leq N$, se tiene

$$
\begin{aligned}
|\mathbf{A}| &\leq \frac{1}{2}\left(\frac{N+U}{U}\right)^2+\left[(N+U)^2+4\left(\frac{N}{U}\right)^4\right]^{\frac{1}{2}}\\
|\mathbf{A}| &\leq \frac{1}{2}\left(\frac{N+U}{U}\right)^2+N\left[1+2\left(\frac{U}{N}\right)+\left(\frac{U}{N}\right)^2+4\left(\frac{N}{U^2}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}
$$

Para $N$ suficientemente grande, si tomamos $U = \left\lfloor N^{\frac{3}{4}}\right\rfloor$ se tiene que

$$
|\mathbf{A}| \leq N + O(N^{\frac{1}{2}}).
$$

Como esta relación es válida para todo $\mathbf{A} \subset [1, N]^2$ , tenemos

$$\mathbb{F}_2(N) \leq N + O(N^{\frac{1}{2}}),$$

con lo cual se concluye la demostración. ■

**Corolario**.

La función $\mathbb{F}_2(N)$ satisface la siguiente relación

$$\limsup_{N\to\infty} \frac{\mathbb{F}_2(N)}{N} \leq 1.$$

Finalmente, este corolario junto con el Teorema 3.2 implican el resultado fundamental de esta monografía en el caso finito.

**Teorema 3.4.**

La función $\mathbb{F}_2(N)$ se comporta asintóticamente como $N$, es decir

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\mathbb{F}_2(N)}{N} = 1.$$

## 3.3 Conjuntos $\mathbb{B}_2$ en rectángulos

Una extensión natural del problema anterior consiste en estudiar conjuntos $\mathbb{B}_2$ contenidos en rectángulos. **"¿Cuál es el maximo número de puntos que podemos selecionar del retículo** $[1, M] \times [1, N]$ **de tal manera que cuatro de ellos nunca sean los vértices de un paralelogramo?"**

Sea $\mathbb{G}_2(M, N)$ dicho número maximal, esto es:

$$\mathbb{G}_2(M, N) = \max\{|\mathbf{A}| : \mathbf{A} \subset [1, M] \times [1, N], \mathbf{A} \in \mathbb{B}_2\},$$

observemos que en la notación anterior

$$\mathbb{F}_2(N) = \mathbb{G}_2(N, N).$$

Veamos como construir conjuntos de Sidon en dimensión dos contenidos en rectángulos, a partir de conjuntos de Sidon en dimensión uno.

Dados enteros positivos $M, N$, con $M \geq N$. Si se desea construir un conjunto de Sidon contenido en el rectángulo $[1, M] \times [0, N-1]$, entonces escogemos un primo $p$ tal que $p^2 - 2 \leq M(N-1)$.

Sabemos que existe un conjunto de Sidon $A = \{a_i\}$ (en dimensión uno) con $p$ elementos y tal que $A \subset \left[1, p^2 - 1\right]$. Trasladando los elementos de $A$, podemos suponer que $A \subseteq \left[M, p^2 + M - 2\right]$.

A cada entero $a_i \in A$ le asociamos “el vector”

$$\mathbf{v}_i = \left( \left\lfloor \frac{a_i}{N} \right\rfloor, a_i - \left\lfloor \frac{a_i}{N} \right\rfloor N \right),$$

y consideremos el conjunto de puntos reticulares correspondiente

$$\mathbf{A}^* = \{\mathbf{v}_i : i = 1, 2, ..., p\},$$

$$\mathbf{A}^* \subset [1, M] \times [0, N-1],$$

$$|\mathbf{A}^*| = p.$$

Probemos que $\mathbf{A}^*$ es un conjunto $\mathbb{B}_2$.

Si

$$\mathbf{v}_i + \mathbf{v}_j = \mathbf{v}_k + \mathbf{v}_l,$$

entonces

$$\left\lfloor \frac{a_i}{N} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{a_j}{N} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{a_k}{N} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{a_l}{N} \right\rfloor,$$

$$a_i + a_j - \left\lfloor \frac{a_i}{N} \right\rfloor N - \left\lfloor \frac{a_j}{N} \right\rfloor N = a_k + a_l - \left\lfloor \frac{a_k}{N} \right\rfloor N - \left\lfloor \frac{a_l}{N} \right\rfloor N,$$

multiplicando la primera igualdad por $N$ y sumando con la segunda, tenemos

$$a_i + a_j = a_k + a_l,$$

y como $A$ es un conjunto de Sidon, se sigue que:

$$\{a_i, a_j\} = \{a_k, a_l\}$$

y, claramente

$$\{\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j\} = \{\mathbf{v}_k, \mathbf{v}_l\}.$$

Así, $A^*$ es un conjunto de Sidon contenido en el rectángulo $[1, M] \times [0, N-1]$.

**Ejemplo 3.1.** Sabemos que

$$\{7, 39, 58, 63, 65, 86, 92, 100, 101, 104\}.$$

es un conjunto de Sidon (en dimensión uno). Para $M = 12, N = 9$, consideremos el conjunto trasladado

$$A = \{12, 44, 63, 68, 70, 91, 97, 105, 106, 109\}.$$

Por la construcción anterior tenemos:

$$\mathbf{A}^* = \{(1,3), (4,8), (7,0), (7,5), (7,7), (10,1), (10,7), (11,6), (11,7), (12,1)\}, .$$

Entonces $\mathbf{A}^*$es un conjunto $\mathbb{B}_2$ contenido en $[1, 12] \times [0, 8]$, y $\mathbf{A}^* + (0, 1) \subset [1, 12] \times [1, 9]$.

Esta construcción permite demostrar que

$$\liminf_{MN \to \infty} \frac{\mathbb{G}_2(M, N)}{\sqrt{MN}} \geq 1.$$

Por otro lado, modificando de manera apropiada el argumento de conteo utilizado para obtener la cota superior de $\mathbb{F}_2(N)$, también se puede demostrar que

$$\limsup_{MN \to \infty} \frac{\mathbb{G}_2(M, N)}{\sqrt{MN}} \leq 1.$$

De estos dos resultados se sigue que

$$\lim_{MN \to \infty} \frac{\mathbb{G}_2(M, N)}{\sqrt{MN}} = 1.$$

Para detalles, ver [8].

# 4 CONJUNTOS DE SIDON INFINITOS

En este capítulo consideramos conjuntos de Sidon infinitos en dos dimensiones.

Si $\mathbf{A} \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, recordemos que la función contadora de $\mathbf{A}$, denotada mediante $\mathbb{A}(N)$, representa el número de elementos de $\mathbf{A}$ cuyas componentes son positivas y menores o iguales que $N$, es decir

$$\mathbb{A}(N) := \left| \mathbf{A} \cap [1, N]^2 \right|.$$

Es claro que si $\mathbf{A}$ es un conjunto de Sidon, entonces

$$\mathbb{A}(N) \leq \mathbb{F}_2(N) \leq N + O(N^{1/2}).$$

## 4.1 Límite superior (construcción)

Una forma de construir conjuntos de Sidon infinitos y suficientemente densos consiste en considerar la unión de conjuntos de Sidon finitos, adecuadamente seleccionados. Este proceso es similar al método constructivo utilizado en una dimensión [2] .

Comenzamos con el siguiente resultado.

**Teorema 4.1.**

Existe un conjunto de Sidon infinito $\mathbf{A}$ tal que

$$\limsup_{N \to \infty} \frac{\mathbb{A}(N)}{N} \geq \frac{1}{2}$$

**Demostración.** Vamos a probar que dado cualquier conjunto de Sidon finito

$$\mathbf{A}_0 = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_k\} \subset [1, x]^2 ,$$

podemos extenderla a un conjunto de Sidon $\mathbf{A}$, tal que:

$$\mathbf{A}_0 \subset \mathbf{A} \subset [1, 2l + o(l)]^2 ,$$

$$|\mathbf{A}| \geq l + o(l),$$

para valores adecuados de $l$, esto sera suficiente puesto que podemos iterar el proceso inductivamente.

Sea $p$ un primo suficientemente grande, digamos

$$p = x^4 + o(x^4),$$

y sea $\mathbf{B}$ un conjunto de Sidon contenido en $[1, p]^2$ con $p$ elementos (sabemos que existe por las construcciones finitas ).

A pesar de que, en general, la unión de dos conjuntos de Sidon no necesariamente es de nuevo un conjunto de Sidon, será posible quitar de $\mathbf{B}$ un número suficientemente pequeño de sus elementos para obtener un conjunto de Sidon que nos permita demostrar el teorema.

Considermos todas las posibles relaciones de la forma

$$\mathbf{v} - \mathbf{v}' = \mathbf{w} - \mathbf{w}', \quad \mathbf{v}, \mathbf{v}' \in \mathbf{A}_0, \quad \mathbf{w}, \mathbf{w}' \in \mathbf{B},$$

como $\mathbf{A}_0$ es un conjunto de Sidon todas las diferencias $\mathbf{v} - \mathbf{v}', \mathbf{v} \neq \mathbf{v}'$, son distintas, y hay a lo sumo

$$|\mathbf{A}_0|^2 = k^2 - k = O(x^2) = o(p)$$

de ellas, por lo tanto quitamos de $\mathbf{B}$ esos $o(p)$ elementos. Llamemos $\mathbf{B}_0$ al conjunto de elementos que nos quedan en $\mathbf{B}$.

Sean:

$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{B}_0 + (p + x, p + x),$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 \cup \mathbf{A}_1.$$

Observemos que

$$\mathbf{A} \subset [1, 2p + o(p)]^2, \ \ |\mathbf{A}| = p + o(p).$$

Nos falta demostrar que $\mathbf{A}$ es un conjunto de Sidon.

Para probar esto, consideremos el siguiente diagrama que representa el conjunto de sumas de dos elementos de $\mathbf{A}$ :

| | |
|---|---|
| $\mathbf{A}_0$ | $\mathbf{A}_1$ |
| $S(\mathbf{A}_0)$ | $\mathbf{A}_0+\mathbf{A}_1$ |
| | $S(\mathbf{A}_1)$ |

donde para el conjunto $X=\{x_1,x_2,...,x_s\}$, $S(X)$ se define como

$$S(X)=\{x_i+x_j : i\leq j\}\,.$$

Como $\mathbf{A}_0,\mathbf{A}_1$ son conjuntos de Sidon, en cada uno de los bloques $S(\mathbf{A}_0),S(\mathbf{A}_1)$ no hay elementos con doble representación.

También, debido a la construcción en el bloque $\mathbf{A}_0+\mathbf{A}_1$ no hay elementos con doble representación, en efecto si

$$\mathbf{v}+\mathbf{a}'=\mathbf{v}'+\mathbf{a},\ \text{con } \mathbf{v},\mathbf{v}'\in\mathbf{A}_0,\mathbf{a},\mathbf{a}'\in\mathbf{A}_1, \tag{4.1}$$

entonces por definición de $\mathbf{A}_1$

$$\mathbf{a}=\mathbf{w}+(p+x,p+x),\ \mathbf{w}\in\mathbf{B}_0,$$

$$\mathbf{a}'=\mathbf{w}'+(p+x,p+x),\ \mathbf{w}'\in\mathbf{B}_0,$$

reemplazando en (4.1), se obtiene

$$\mathbf{v}-\mathbf{v}'=\mathbf{w}-\mathbf{w}',$$

que no es posible porque $\mathbf{B}_0$ fue construido prohibiendo esta relación.

Por otro lado, los tres bloques son disjuntos por pares porque:

$$S(\mathbf{A}_0)\subset[2,2x]^2\,,$$

$$S(\mathbf{A}_1)\subset[2p+2x+2,4p+2x]^2\,,$$

$$\mathbf{A}_0+\mathbf{A}_1\subset[p+x+2,2p+2x]^2\,.$$

Hasta el momento hemos demostrado que todo conjunto de Sidon

$$\mathbf{A}_0\subset[1,x]^2\,,$$

puede extenderse a un conjunto de Sidon

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 \cup \mathbf{A}_1 \subset [1, 2p + o(p)]^2 ,$$

con $|\mathbf{A}| = p + o(p)$, donde $p = x^4 + o(x^4)$ es primo. Iterando esta construcción en forma inductiva, se obtiene que existe una sucesión infinita de primos $\{p_n\}$ tal que

$$\mathbb{A}(2p_n + o(p_n)) \geq p_n + o(p_n),$$

luego

$$\limsup_{N \to \infty} \frac{\mathbb{A}(N)}{N} \geq \frac{1}{2},$$

como queríamos demostrar. ■

## 4.2 Límite inferior

En esta sección consideramos el comportamiento de la función que cuenta el número de elementos que puede tener un conjunto de Sidon infinito en un rectángulo.

Sea $\mathbf{A}$ un conjunto de Sidon y sean $m, n$ enteros positivos. Definimos la función:

$$\mathbb{A}(m, n) := |\mathbf{A} \cap [1, m] \times [1, n]| .$$

Para esta función se tiene el siguiente resultado.

**Teorema 4.2.**

Si $\mathbf{A}$ es un conjunto de Sidon infinito, entonces

$$\lim_{N \to \infty} \left( \inf_{\substack{m > N \\ n > N}} \frac{\mathbb{A}(m, n)}{\sqrt{mn}} \log N \right) \ll 1.$$

**Demostración.** Para cada $s, t \in \mathbb{Z}^+$, definimos el retículo

$$I(s, t) := ((s-1)N, sN] \times ((t-1)N, tN],$$

mientras que $D_{\mathbf{A}}(s, t)$ es el número de elementos de $\mathbf{A}$ en dicho retículo

$$D_{\mathbf{A}}(s, t) := |\mathbf{A} \cap I(s, t)| .$$

Observemos que

$$\mathbb{A}(sN, tN) = \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{t} D_{\mathbf{A}}(i, j).$$

Vamos a estimar la suma

$$\sum_{s,t=1}^{N} \frac{D_{\mathbf{A}}(s,t)}{(st)^{1/2}}$$

de dos maneras.

Primero, por la *fórmula de sumación parcial de Abel*, en dos dimensiones, tenemos:

$$\begin{aligned}
\sum_{s,t=1}^{N} \frac{D_{\mathbf{A}}(s,t)}{(st)^{1/2}} &\gg \sum_{s=1}^{N} \sum_{t=1}^{N} \left( \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{t} D_{\mathbf{A}}(i,j) \right) \frac{1}{(st)^{3/2}} \\
&= \sum_{s=1}^{N} \sum_{t=1}^{N} \frac{\mathbb{A}(sN, tN)}{(st)^{3/2}}
\end{aligned}$$

Si llamamos $\Gamma$ al limite inferior en el enunciado del teorema, tenemos:

$$\begin{aligned}
\sum_{s,t=1}^{N} \frac{D_{\mathbf{A}}(s,t)}{(st)^{1/2}} &\gg \Gamma \sum_{s=1}^{N} \sum_{t=1}^{N} \frac{(sNtN)^{1/2}}{\log N (st)^{3/2}} \\
&\gg \frac{\Gamma N}{\log N} \left( \sum_{s=1}^{N} \sum_{t=1}^{N} \frac{1}{st} \right) \\
&\gg \frac{\Gamma N}{\log N} (\log N)^2 \\
&= \Gamma N (\log N)
\end{aligned}$$

Por otro lado, aplicando la desigualdad de Cauchy:

$$\begin{aligned}
\sum_{s,t=1}^{N} \frac{D_{\mathbf{A}}(s,t)}{(st)^{1/2}} &\ll \left( \sum_{s,t=1}^{N} D_{\mathbf{A}}^2(s,t) \right)^{1/2} \left( \sum_{s,t=1}^{N} \frac{1}{st} \right)^{1/2} \\
&\ll \left( \sum_{s,t=1}^{N} D_{\mathbf{A}}^2(s,t) \right)^{1/2} \log N
\end{aligned}$$

Entonces

$$\Gamma \ll \frac{1}{N} \left( \sum_{s,t=1}^{N} D_{\mathbf{A}}^2(s,t) \right)^{1/2}. \tag{4.2}$$

Ahora, estimamos la suma

$$\sum_{s,t=1}^{N} D_{\mathbf{A}}^2(s,t),$$

contando diferencias.

Como $\mathbf{A}$ es un conjunto de Sidon, todas las diferencias

$$\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j, \text{ con } \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \in \mathbf{A}, \ \mathbf{v}_i \neq \mathbf{v}_j$$

son distintas. Asi, el número de soluciones de

$$0 < \|\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j\| < N, \text{ con } \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \in \mathbf{A}, \ \mathbf{v}_i \neq \mathbf{v}_j,$$

es menor que $4N$,donde la norma $\|\|$ es la norma del máximo. Entonces

$$\sum_{s,t=1}^{N} D_{\mathbf{A}}^2(s,t) < 4N^2, \tag{4.3}$$

porque

$$\mathbf{v}_i \neq \mathbf{v}_j, \ \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \in \mathbf{A} \cap I(s,t) \Rightarrow 0 < \|\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j\| < N.$$

Ahora

$$\sum_{s,t=1}^{N} D_{\mathbf{A}}^2(s,t) \leq \sum_{s,t=1}^{N} 1 + \sum_{\substack{s,t=1 \\ D_{\mathbf{A}}(s,t)\geq 2}}^{N} D_{\mathbf{A}}^2(s,t). \tag{4.4}$$

Tambien, si $D_{\mathbf{A}}(s,t) \geq 2$ entonces

$$D_{\mathbf{A}}^2(s,t) \leq 2D_{\mathbf{A}}(s,t)(D_{\mathbf{A}}(s,t) - 1) = 4\binom{D_{\mathbf{A}}(s,t)}{2}. \tag{4.5}$$

Reemplazando (4.5) en (4.4) y utilizando (4.3), tenemos :

$$\begin{aligned} \sum_{s,t=1}^{N} D_{\mathbf{A}}^2(s,t) &\leq N^2 + 4\sum_{s,t=1}^{N} \binom{D_{\mathbf{A}}(s,t)}{2} \\ &\leq O(N^2), \end{aligned}$$

y utilizando este resultado en (4.2), finaliza la prueba del Teorema. ■

# 5 CONCLUSIONES

En este capítulo se destacan los resultados más importantes y los problemas abiertos que surgieron durante el desarrollo del trabajo realizado.

## 5.1 Resultados más importantes

1. El Teorema 2.1, permite concluir que: si $\mathbb{F}_2(N)$ corresponde al número máximo de puntos que pueden seleccionarse del retículo $[1,N]^2$ para obtener un conjunto de Sidon (en dimensión dos) y $F_2(N^2)$ es el número de elementos que pueden escogerse de los primeros $N^2$ enteros positivos de tal forma que constituyan un conjunto de Sidon (en dimensión uno), entonces

$$\mathbb{F}_2(N) \geq F_2(N^2),$$

   entonces

$$\liminf_{N\to\infty} \frac{F_2(N^2)}{N} \leq \liminf_{N\to\infty} \frac{\mathbb{F}_2(N)}{N},$$
$$\limsup_{N\to\infty} \frac{F_2(N^2)}{N} \leq \limsup_{N\to\infty} \frac{\mathbb{F}_2(N)}{N}.$$

   Es decir, *buenas cotas inferiores (construcciones) en dimensión uno implican buenas cotas inferiores (construcciones) en dimensión dos y, recíprocamente, buenas cotas superiores en dimensión dos implican buenas cotas superiores en dimensión uno.*

2. En el caso finito, el resultado central del trabajo consiste en haber probado que $\mathbb{F}_2(N)$ se comporta asintóticamente como $N$. Resultado que es similar al que se tiene para dimensión uno: $F_2(N)$ es asintóticamente $\sqrt{N}$. Quizás este resultado pueda ser extendido a cualquier dimensión, ver sección siguiente.

3. Muy interesantes resultan los Lemas 2.1 y 2.2 que establecen la existencia de particiones del

retículo $[1, p-1]^2$ en $p-1$ clases, cada una con $p-1$ elementos, y cada clase es un conjunto de Sidon.

4. En el caso infinito, el Teorema 4.1 muestra la existencia de un conjunto de Sidon infinito **A** tal que
$$\limsup_{N\to\infty} \frac{\mathbb{A}(N)}{N} \geq \frac{1}{2},$$
resultado que es análogo al de Krückeberg en una dimensión.

## 5.2 Algunos problemas abiertos

1. **¿Es posible mejorar el término error en el Teorema 3.3?** De acuerdo con una conjetura de Erdös en dimensión uno, ¿es posible demostrar que
$$\mathbb{F}_2(N) \leq N + O\left(N^{\varepsilon}\right),$$
para todo $\varepsilon > 0$?

2. **¿Es posible extender los métodos de Lindström, Rusza y Trujillo?** Para demostrar el Teorema 3.3 se extendió el método de conteo que Erdös y Turán utilizaron en dimensión uno. En el artículo [3] se consideran otros tres métodos, debidos a Lindström, Rusza y Trujillo, es conveniente realizar un análisis detallado de dichos métodos para identificar la posibilidad de mejorar el término error mencionado en el punto anterior.

3. **¿Cómo construir conjuntos de Sidon módulo $(m, n)$?** En la monografía se lograron construir conjuntos de Sidon módulo $(p, p)$ y módulo $(p-1, p)$, con $p$ primo. Es interesante obtener construcciones para otros valores de $m, n$, en particular cuando $m$ y $n$ no sean primos. Este tipo de construcciones es solicitado en el artículo [5].

4. **¿Es posible mejorar el $1/2$ del Teorema 4.1?** Es dicer, ¿existe un conjunto de Sidon infinito **A**, en dimensión dos tal que
$$\limsup_{N\to\infty} \frac{\mathbb{A}(N)}{N} > \frac{1}{2}?$$

5. **¿Es posible obtener un resultado similar al Teorema 4.2 para cuadrados en lugar de rectángulos?** Es decir, si $\mathbf{A}$ es un conjunto de Sidon infinito, ¿es verdad que

$$\liminf_{N\to\infty} \frac{\mathbb{A}(N)}{N} \log N \ll 1?$$

# BIBLIOGRAFIA

[1] . **Benavides F., Rodríguez C., Trujillo C.** *Conjuntos de Sidon en dimensión dos.* Ponencia presentada en el IX Encuentro de la Escuela Regional de Matemáticas, Neiva, 15 al 19 de septiembre de2003.

[2] . **Campo L., Gómez S., Mutis W., Pisso P**. *Sucesiones de Sidon en Dimensión Uno.* Trabajo de Grado, Licenciatura en Matemáticas, Universidad del Cauca, 2000.

[3] . **Campo L., Mutis W., Trujillo C.** *Cotas superiores para conjuntos de Sidon finitos.* Ponencia presentada en el IX Encuentro de la Escuela Regional de Matemáticas, Neiva, 15 al 19 de septiembre de2003.

[4] . **Erdös P., Turán P.** *On a problem of Sidon in additive number theory and some related problems.* J. London Math. Soc. (2) 16 (1941), 212-215.

[5] . **Gómez A., López H., Ruíz F., Trujillo C.** *Construcciones de conjuntos $B_2[g]$ en dimensión dos.* Ponencia presentada en el IX Encuentro de la Escuela Regional de Matemáticas, Neiva, 15 al 19 de septiembre de2003.

[6] . **Gómez S., Pisso P., Trujillo C.** *Conjuntos de Sidon módulo m y particiones.* Ponencia presentada en el IX Encuentro de la Escuela Regional de Matemáticas, Neiva, 15 al 19 de septiembre de2003.

[7] . **Halberstam H., Roth K.F.** *Sequences.* Vol. I, Oxford University Press, New York, Londres, 1966.

[8] . **Trujillo C.** *Sucesiones de Sidon.* Tesis Doctoral, Universidad Politécnica de Madrid, 1998.

[9] . **Trujillo C.** *Retículos libres de paralelogramos.* Ponencia presentada en el VII Encuentro de la Escuela Regional de Matemáticas, Universidad de Antioquia, 23 al 27 de agosto de 1999.

[10] . **Trujillo C.** *Conjuntos de Sidon en dimensión dos.* Ponencia presentada en las VII Jornadas Nacionales de Matemáticas, Universidad Autónoma de Bucaramanga, Bucaramanga, 30 de noviembre al 3 de diciembre de 1999.