CONSTRUCCIÓN DE CONJUNTOS $B_2[g]$ FINITOS EN DIMENSIÓN DOS

Trabajo de grado para optar al Título de Matemático

Estudiantes

ALFREDO GÓMEZ CALVACHE
HUGO LÓPEZ ARANDA
DIEGO FERNANDO RUIZ SOLARTE

Director

CARLOS ALBERTO TRUJILLO SOLARTE

UNIVERSIDAD DEL CAUCA
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES, EXACTAS Y DE LA EDUCACIÓN
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

POPAYÁN
2003

CONSTRUCCIÓN DE CONJUNTOS $B_2[g]$ FINITOS EN DIMENSIÓN DOS

ALFREDO GÓMEZ CALVACHE
HUGO LÓPEZ ARANDA
DIEGO FERNANDO RUIZ SOLARTE

UNIVERSIDAD DEL CAUCA
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES, EXACTAS Y DE LA EDUCACIÓN
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
POPAYÁN
2003

CONTENIDO

INTRODUCCIÓN

El desarrollo de este trabajo de grado, en la modalidad de monografía, se fundamenta de acuerdo a uno de los propósitos del Proyecto de Investigación “Sucesiones de Sidon y Conjuntos $B_h[g]$”, Código Colciencias 1103-05-1450, Contrato No. 041-2002-05-28 Colciencias - Universidad del Cauca, y en los trabajos de investigación [3] y [13]. En éste se busca dar una visión más amplia de las ideas constituidas por investigadores tales como C. Trujillo, M. Kolountzakis y estudiantes de pregrado de la Universidad del Cauca en el estudio de los conjuntos $B_2[g]$. El objetivo de este trabajo consiste en diseñar construcciones de conjuntos $B_2[g]$, con $g > 1$, en dimensión dos y compararlas con las conocidas en dimensión uno, y así determinar el máximo número de puntos que pueden seleccionarse del retículo $[1, N]^2$, de tal forma que constituyan un conjunto en cada una de las clases que se definen en la sección.1.2.1., para lo cual se inicia con un estudio de los resultados conocidos en dimensión uno, posteriormente se extienden algunos de ellos a dimensión dos y finalmente se construyen conjuntos que generalizan dichas extensiones.

1 CONJUNTOS $B_2[g]$

En la primera sección se considera la situación correspondiente a dimensión uno, la referencia fundamental es [3] junto con [4] y [10]. En la segunda sección se hace un resumen de los conceptos, notación y resultados obtenidos en dimensión dos, resultados que constituyen el objetivo central del trabajo y que serán justificados en los capítulos siguientes.

1.1 CONJUNTOS $B_2[g]$ EN DIMENSIÓN UNO

A continuación se describen los resultados conocidos en dimensión uno, los cuales constituyen la base del trabajo que se realiza en dimensión dos.

1.1.1 Conceptos y notación

Sean $\mathbb{N}$ el conjunto de enteros no negativos y $A = \{a_1, a_2, ..., a_k\} \subseteq \mathbb{N}$, con A finito y s y d enteros. Mediante $\sigma_A(s)$ se denota el número de representaciones de s como suma de dos elementos de A ordenados y no necesariamente distintos, esto es

$$\sigma_A(s) = |\{(a_i, a_j) \in A \times A : s = a_i + a_j \text{ con } a_i \leq a_j\}|,$$

donde $a_i, +a_j$ y $a_j + a_i$ es la misma representación.

Similarmente, $\delta_A(d)$ denota el número de representaciones de d, como diferencia de dos elementos de A, distintos

$$\delta_A(d) = |\{(a_i, a_j) \in A \times A : d = a_i - a_j \text{ con } a_i \neq a_j\}|,$$

donde $|X|$, denota el cardinal del conjunto X, y $X \times X$ corresponde al producto cartesiano usual.

También $S(A)$ representa el conjunto de todos los números que se pueden escribir como suma de dos elementos de A, definido de la siguente forma

$$S(A) = \{a_i + a_j : a_i, a_j \in A\}.$$

Similarmente $D(A)$ representa el conjunto de todos los números que se pueden escribir como diferencias no cero de dos elementos de A, es decir

$$D(A) = \{a_i - a_j : \ a_i, a_j \in A \text{ con } a_i \neq a_j\}.$$

Sea g un entero positivo. Se define la clase $B_2^+[g]$ como sigue

$$B_2^+[g] = \{A \subseteq \mathbb{N} : \sigma_A(s) \leq g, \text{ para todo } s \in \mathbb{Z}\},$$

igualmente se define la clase $B_2^-[g]$ de la siguiente forma

$$B_2^-[g] = \{A \subseteq \mathbb{N} : \delta_A(d) \leq g, \text{para todo } d \in \mathbb{Z}\},$$

finalmente se define la clase $B_2^{\pm}[g]$ así

$$B_2^{\pm}[g] = B_2^+[g] \cap B_2^-[g].$$

Para todo número natural N, mediante $[1, N]$ se representa el conjunto de los primeros N enteros positivos

$$[1, N] = \{1, ..., N\},$$

se define la clase $B_2^+[g, N]$

$$B_2^+[g, N] = \{A \in B_2^+[g] : A \subseteq [1, N]\},$$

igualmente se define la clase $B_2^-[g, N]$

$$B_2^-[g, N] = \{A \in B_2^-[g] : A \subseteq [1, N]\},$$

finalmente se define la clase $B_2^{\pm}[g, N]$

$$B_2^{\pm}[g, N] = \{A \in B_2^{\pm}[g] : A \subseteq [1, N]\} = B_2^+[g, N] \cap B_2^-[g, N].$$

En dimensión uno se estudia el comportamiento asintótico de las siguientes funciones

$$F_{2,g}^+(N) = máx\left\{|A| : A \in B_2^+[g, N]\right\},$$

$$F_{2,g}^-(N) = máx\left\{|A| : A \in B_2^-[g, N]\right\},$$

$$F_{2,g}^{\pm}(N) = máx\left\{|A| : A \in B_2^{\pm}[g, N]\right\},$$

para determinar el máximo número de enteros positivos que pueden seleccionarse de los primeros N, de tal forma que constituyan un conjunto cada una de las clases $B_2^+[g, N]$, $B_2^-[g, N]$ o $B_2^{\pm}[g, N]$.

1.1.2 Resultados conocidos

Cuando $g = 1$, los conjuntos en la clase $B_2^+[1]$ se llaman conjuntos de Sidon o simplemente conjuntos B_2. En este caso particular se tiene que

$$B_2^+[1] = B_2^-[1] = B_2^\pm[1].$$

Por lo tanto las tres funciones $F_{2,1}^\pm(N)$, $F_{2,1}^+(N)$, $F_{2,1}^-(N)$ son la misma. Representado estas funciones mediante $F_2(N)$, hoy se conoce que

$$\lim_{N\to\infty} \frac{F_2(N)}{\sqrt{N}} = 1,$$

ver [4], para una descripción detallada.

Para $g \geq 2$ no es cierto que las clases $B_2^+[g]$, $B_2^-[g]$, $B_2^\pm[g]$ coincidan, ver [3]. Sin embargo, García y Trujillo [7] probaron que

$$\lim_{N\to\infty} \frac{F_{2,g}^\pm(N)}{\sqrt{N}} = \lim_{N\to\infty} \frac{F_{2,g}^-(N)}{\sqrt{N}} = \sqrt{g}.$$

La existencia o no del límite

$$\lim_{N\to\infty} \frac{F_{2,g}^+(N)}{\sqrt{N}},$$

es un problema abierto. Aún, el caso $g = 2$ continúa sin resolverse. Hasta el momento, en dimensión uno, los mejores resultados conocidos son los siguientes

Para todo $g \geq 2$, Cilleruelo, Rusza y Trujillo [6] han demostrado que

$$\sqrt{g} < \frac{g + \lfloor g/2 \rfloor}{\sqrt{g + \lfloor g/2 \rfloor}} \leq \lim_{N\to\infty} \inf \frac{F_{2,g}^+(N)}{\sqrt{N}}.$$

Para $x \in \mathbb{R}$, la **parte entera** de x, notada por $\lfloor x \rfloor$, se define de la siguiente manera:

$$\lfloor x \rfloor = máx\{z \in \mathbb{Z} : \ z \leq x\}$$

Para $g = 2$, la mejor construcción de conjuntos $B_2^+[g]$ conocida [10] , implica que

$$\frac{4}{\sqrt{7}} \leq \lim_{N \to \infty} \inf \frac{F_{2,2}^+(N)}{\sqrt{N}}.$$

1.1.3 Conjuntos $B_2^+[2]$ que no son $B_2^-[2]$

La construcción de conjuntos $B_2^+[2]$ que no son son $B_2^-[2]$, conocidas hasta la fecha, se deben básicamente a M. Kolountzakis [11], y a C. Trujillo [10].

1.1.3.1 La construcción de Kolountzakis

En 1996, Kolountzakis [11] diseñóla siguiente construcción de conjuntos $B_2^+[2]$.

Dado un conjuntos de Sidon A, definir los siguientes conjuntos

$$B_0 = 2 \times A = \{2a : a \in A\},$$

$$B_1 = 2 \times A + 1 = \{2a + 1 : a \in A\},$$

$$B = B_0 \cup B_1.$$

Con estas definiciones, Kolountzakis prueba que B es un conjunto de la clase $B_2^+[2]$, el cual no está en la clase $B_2^-[2]$ si $|A| \geq 3$. Mediante esta construcción se obtiene la siguiente relación

$$\lim_{N \to \infty} \inf \frac{F_{2,2}^+(N)}{\sqrt{N}} \geq \sqrt{2}.$$

1.1.3.2 La construcción de Trujillo

En 1998, Trujillo [13] utiliza el concepto de un conjunto de Sidon módulo m.

Sea m un entero positivo. Un conjunto $A \subset [1, m]$ es un *conjunto de Sidon módulo m* si todas las sumas de la forma

$$a + a', \text{con } a, a' \in A \text{ y } a \leq a',$$

son incongruentes módulo m. Es decir, si para todo $x, y, u, v \in A$

$$[x + y \equiv u + v (\acute{mod}\ m)] \text{ entonces } [(u, v) = (x, y) \quad \text{ó} \quad (u, v) = (y, x)] \,.$$

Con esta definición, Trujillo modificó la idea de Kolountzakis para permitir la unión de tres conjuntos de Sidon módulo m, de la siguiente forma:

Sea A un conjunto de Sidon módulo m, definir los conjuntos:

$$A_0 = A,$$

$$A_1 = A + m = \{a + m : a \in A\} \,,$$

$$A_3 = A + 3m = \{a + 3m : a \in A\} \,,$$

$$B = A_0 \cup A_1 \cup A_3.$$

Así, resulta que el conjunto B está en la clase $B_2^+ [2]$ y no está.en la clase $B_2^- [2]$. Esta construcción implica que

$$\lim_{N \to \infty} \inf \frac{F_{2,2}^+(N)}{\sqrt{N}} \geq \frac{3}{2}. \tag{1.1}$$

Dado A un conjunto de Sidon módulo m; al considerar los siguientes conjuntos

$$A_0 = A,$$

$$A_1 = A + m = \{a + m : a \in A\},$$

$$A_4 = A + 4m = \{a + 4m : a \in A\},$$

$$A_6 = A + 6m = \{a + 6m : a \in A\},$$

$$B = A_0 \cup A_1 \cup A_4 \cup A_6.$$

se demuestra que B está en la clase $B_2^+[2]$ y no está.en la clase $B_2^-[2]$ y se mejora el resultado (1.1) ver [3], donde se consiguió la siguiente cota inferior

$$\underset{N\to\infty}{lím} \inf \frac{F_{2,2}^+(N)}{\sqrt{N}} \geq \frac{4}{\sqrt{7}}.$$

1.1.4 Conjuntos $B_2^-[2]$ que no son $B_2^+[2]$

En el año 2000, Trujillo [12] construye conjuntos en la clase $B_2^-[2]$ que no están en la clase $B_2^+[2]$ de la siguiente forma:

Sea A un conjunto de Sidon contenido en $[1, N]$, con $|A| \geq 3$, definir los conjuntos siguientes

$$3N - A = \{3N - a : a \in A\},$$

$$B = A \cup (3N - A),$$

el conjunto B es un conjunto que satisface los requerimientos.

1.1.5 Conjuntos $B_2^{\pm}[2]$

En el 2001, Trujillo construye conjuntos en la clase $B_2^{\pm}[2]$ como sigue:

Sean m un entero positivo par y A un conjunto de Sidon contenido en $[1, m]$ módulo m, el conjunto

$$B = A(mód\ m/2) = \{a(mód\ m/2) : a \in A\} \subseteq [1, m/2],$$

está en la clase $B_2^{\pm}[2]$.

1.1.6 Construcciones generales

En esta sección se resumen las construcciones que justifican algunos resultados mencionados en la sección 1.1.2 y que generalizan las construcciones expuestas en las secciones 1.1.3 y 1.1.5.

1.1.6.1 Conjuntos $B_2^{+}[g]$ con $g \geq 2$

En el 2002, Cilleruelo, Rusza y Trujillo [6] generalizan la construcción 1.1.3.2 de conjuntos $B_2^{+}[2]$, para todo $g \geq 2$. Ellos introducen un nuevo concepto.

Un conjunto de enteros $A = \{a_0, a_1, ..., a_k\}$ satisface la condición $B_2^{*}[g]$ si todo entero z, tiene a lo sumo g soluciones como suma de dos elementos de A, teniendo en cuenta que $a_i + a_j$ y $a_j + a_i$ es contada como dos soluciones cuando $i \neq j$.

Con esta definición, ellos demuestran el siguiente resultado:

Si el conjunto de enteros $A = \{a_0, a_1, ..., a_k\}$ satisface la condición $B_2^* [g]$ y C es un conjunto de Sidon módulo m, entonces el conjunto

$$B = \bigcup_{i=0}^{k} (C + ma_i)$$

es un conjunto $B_2^+ [g]$.

Esta construcción permite demostrar que

$$\underset{N\to\infty}{lím} \inf \frac{F_{2,g}^+(N)}{\sqrt{N}} \geq \frac{g + \lfloor g/2 \rfloor}{\sqrt{g + \lfloor g/2 \rfloor}}.$$

1.1.6.2 Conjuntos $B_2^{\pm} [g]$ con $g \geq 2$

En el 2002, García y Trujillo [7] generalizan la construcción de conjuntos $B_2^{\pm} [g]$, para todo $g \geq 2$, de la siguiente forma:

Sean m y g enteros positivos con g divisor de m, y $A \subseteq [1, m]$ un conjunto de Sidon módulo m, ellos demuestran que el conjunto

$$B = A(mód\ \frac{m}{g}) = \left\{ \left(a mód\ \frac{m}{g} \right) : a \in A \right\},$$

está en la clase $B_2^{\pm} [g]$.

Esta construcción permite demostrar que

$$\underset{N\to\infty}{lím} \inf \frac{F_{2,g}^{\pm}(N)}{\sqrt{N}} \geq \sqrt{g}.$$

1.2 CONJUNTOS $B_2[g]$ EN DIMENSIÓN DOS

En esta sección se presenta la notación, los conceptos y algunos resultados conocidos sobre conjuntos $B_2[g]$ en dimensión dos.

1.2.1 Conceptos y notación

Sean $\mathbf{A} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, ..., \mathbf{v}_k\}$ un subconjunto de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ y $\mathbf{w} \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Mediante $\sigma_{\mathbf{A}}(\mathbf{w})$ se denota el número de representaciones de $\mathbf{w}$ como suma de dos elementos de $\mathbf{A}$ no necesariamente distintos, esto es

$$\sigma_{\mathbf{A}}(\mathbf{w}) = \left|\{(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j) \in \mathbf{A} \times \mathbf{A} : \mathbf{w} = \mathbf{v}_i + \mathbf{v}_j \text{ con } i \leq j\}\right|. \tag{1.2}$$

Similarmente, $\delta_{\mathbf{A}}(\mathbf{w})$ denota el número de representacioines de $\mathbf{w}$ como diferencia de dos elementos de $\mathbf{A}$, distintos, esto es

$$\delta_{\mathbf{A}}(\mathbf{w}) = \left|\{(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j) \in \mathbf{A} \times \mathbf{A} : \mathbf{w} = \mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j \text{ con } i \neq j\}\right|. \tag{1.3}$$

Es claro que

$$\delta_{\mathbf{A}}(\mathbf{w}) = \delta_{\mathbf{A}}(-\mathbf{w}), \text{ para todo } \mathbf{w},$$

$$\delta_{\mathbf{A}}(\mathbf{w}) = 0, \text{ para todo } \mathbf{w} \notin D(\mathbf{A}),$$

$$\sigma_{\mathbf{A}}(\mathbf{w}) = 0, \text{ para todo } \mathbf{w} \notin S(\mathbf{A}).$$

Sea g un entero positivo. Se dice que $\mathbf{A}$ está en la clase $B_2^+[g]$ ó que $\mathbf{A}$ es un conjunto $B_2^+[g]$ si

$$\sigma_{\mathbf{A}}(\mathbf{w}) \leq g, \text{ para todo } \mathbf{w} \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}.$$

Similarmente, $\mathbf{A}$ está en la clase $B_2^-[g]$ ó $\mathbf{A}$ es un conjunto $B_2^-[g]$ si

$$\delta_{\mathbf{A}}(\mathbf{w}) \leq g, \text{ para todo } \mathbf{w} \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$$

Mediante $B_2^{\pm}[g]$ se representa la intersección de las dos clases

$$B_2^{\pm}[g] = B_2^-[g] \cap B_2^+[g].$$

Dados dos conjuntos $\mathbf{A}_0$ y $\mathbf{A}_1$ se define el conjunto

$$\mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_1 = \{\mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_1 : \mathbf{a}_0 \in \mathbf{A}_0 \text{ y } \mathbf{a}_1 \in \mathbf{A}_1\}$$

y mediante $\sigma_{\mathbf{A}_0,\mathbf{A}_1}(\mathbf{w})$ se denota

$$\sigma_{\mathbf{A}_0,\mathbf{A}_1}(\mathbf{w}) = |\{(\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1) \in \mathbf{A}_0 \times \mathbf{A}_1 : \mathbf{w} = \mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_1\}|.$$

Análogamente se define el conjunto

$$\mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_0 = \{\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_0 : \mathbf{a}_1 \in \mathbf{A}_1 \text{ y } \mathbf{a}_0 \in \mathbf{A}_0\}$$

y mediante $\delta_{\mathbf{A}_1,\mathbf{A}_0}(\mathbf{w})$, se denota

$$\delta_{\mathbf{A}_1,\mathbf{A}_0}(\mathbf{w}) = |\{(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_0) \in \mathbf{A}_1 \times \mathbf{A}_0 : \mathbf{w} = \mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_0\}|.$$

Se define $S(\mathbf{A})$ como el conjunto de sumas de elementos de $\mathbf{A}$ de la siguiente forma

$$S(\mathbf{A}) = \{\mathbf{v}_i + \mathbf{v}_j : \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \in \mathbf{A}\}.$$

Similarmente se define $D(\mathbf{A})$ como el conjunto de diferencias de elementos de $\mathbf{A}$ de la suiguiente forma

$$D(\mathbf{A}) = \{\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j : \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \in \mathbf{A} \text{ con } i \neq j\}.$$

Ejemplo 1.1.

Sea $\mathbf{A} = \{(3,6), (3,9), (5,3), (5,6), (6,15), (6,18), (8,12), (8,15)\}$.

Tabla 1. Sumas de $\mathbf{A}$.

$(3,6)$	$(3,9)$	$(5,3)$	$(5,6)$	$(6,15)$	$(6,18)$	$(8,12)$	$(8,15)$
$(6,12)$	$(6,15)$	$(8,9)$	$(8,12)$	$(9,21)$	$(9,24)$	$(11,18)$	$(\mathbf{11},\mathbf{21})$
	$(6,18)$	$(8,12)$	$(8,15)$	$(9,24)$	$(9,27)$	$(\mathbf{11},\mathbf{2}1)$	$(11,24)$
		$(10,6)$	$(10,9)$	$(11,18)$	$(\mathbf{11},\mathbf{21})$	$(13,15)$	$(13,18)$
			$(10,12)$	$(\mathbf{11},\mathbf{21})$	$(11,24)$	$(13,18)$	$(13,21)$
				$(12,30)$	$(12,33)$	$(14,27)$	$(14,30)$
					$(12,36)$	$(14,30)$	$(14,33)$
						$(16,24)$	$(16,27)$
							$(16,30)$

Como $\sigma_{\mathbf{A}}(\mathbf{w}) \leq 4$ para todo $\mathbf{w} \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, se concluye que $\mathbf{A} \in B_2^+[4]$.

De lo anterior se tiene que

$$S(\mathbf{A}) = \left\{ \begin{array}{c} (6,12), (6,15), (6,18), (8,9), (8,12), (8,15), (9,21), \\ (9,24), (9,27), (10,6), (10,9), (10,12), (11,18), (11,21), \\ (11,24), (12,30), (12,33), (12,36), (13,15), (13,18), (13,21), \\ (14,27), (14,30), (14,33), (16,24), (16,27), (16,30) \end{array} \right\}$$

Tabla 2. Diferencias de $\mathbf{A}$.

$(3,6)$	$(3,9)$	$(5,3)$	$(5,6)$	$(6,15)$	$(6,18)$	$(8,12)$	$(8,15)$
	$(0,3)$	$(2,-3)$	$(2,0)$	$(\mathbf{3},\mathbf{9})$	$(3,12)$	$(5,6)$	(5,9)
		$(2,-6)$	$(2,-3)$	$(3,6)$	$(\mathbf{3},\mathbf{9})$	(5,3)	$(5,6)$
			$(0,3)$	$(1,12)$	$(1,15)$	$(\mathbf{3},\mathbf{9})$	$(3,12)$
				$(1,9)$	$(1,12)$	$(3,6)$	$(\mathbf{3},\mathbf{9})$
					$(0,3)$	$(2,-3)$	$(2,0)$
						$(2,-6)$	$(2,-3)$
							$(0,3)$

Como $\delta_{\mathbf{A}}(\mathbf{w}) \leq 4$, para todo $\mathbf{w} \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ se concluye que $\mathbf{A} \in B_2^-[4]$. Por lo tanto $\mathbf{A}$ pertenece a la clase $B_2^{\pm}[4]$.

Observe que no se coloca la parte inferior de la tabla debido a la antisemetría de la misma, es decir, las entradas inferiores son las negativas de las superiores. De lo anterior se sigue:

$$D(\mathbf{A}) = \left\{ \begin{array}{c} \pm(0,3), \pm(2,-3), \pm(2,0), \pm(3,9), \pm(3,12), \pm(5,6), \pm(5,9), \\ \pm(2,-6), \pm(3,6), \pm(5,3), \pm(1,12), \pm(1,15), \pm(11,24), \pm(1,9) \end{array} \right\}$$

1.2.2 El problema general

El problema general a considerar consiste en determinar el máximo número de puntos que pueden seleccionarse del retículo $[1,N]^2$, de tal forma que constituyan un conjunto en las clases $B_2^+[g]$, $B_2^-[g]$ o $B_2^{\pm}[g]$. Para ello se estudia el comportamiento asintótico de las siguientes funciones

$$\mathbb{F}_g^+(N) = máx\{|\mathbf{A}| : \mathbf{A} \subseteq [1,N]^2, \mathbf{A} \in B_2^+[g]\},$$

$$\mathbb{F}_g^-(N) = máx\{|\mathbf{A}| : \mathbf{A} \subseteq [1,N]^2, \mathbf{A} \in B_2^-[g]\},$$

$$\mathbb{F}_g^{\pm}(N) = máx\{|\mathbf{A}| : \mathbf{A} \subseteq [1,N]^2, \mathbf{A} \in B_2^{\pm}[g]\}.$$

Para estudiar dicho comportamiento asintótico, es conveniente establecer cotas inferiores, I_g^+, y cotas superiores, S_g^+,tales que

$$I_g^+ \leq \lim_{N\to\infty} \inf \frac{\mathbb{F}_g^+(N)}{N} \leq \lim_{N\to\infty} \sup \frac{\mathbb{F}_g^+(N)}{N} \leq S_g^+.$$

El denominador N, en las relaciones anteriores, se justifica de la siguiente forma:

Primero, es claro que

$$\frac{\mathbb{F}_1^+(N)}{N} \leq \frac{\mathbb{F}_g^+(N)}{N}, \text{ para todo } g \geq 1,$$

y por [13] o [1] se sabe

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\mathbb{F}_1^+(N)}{N} = 1,$$

y así

$$1 \leq \lim_{N\to\infty} \inf \frac{\mathbb{F}_g^+(N)}{N}. \tag{1.4}$$

Por otro lado, observe que si $\mathbf{A} \subseteq [1,N] \times [1,N]$ y $|\mathbf{A}| = k$, entonces se pueden formar

$$\binom{k}{2} + k = \binom{k+1}{2}$$

sumas de dos elementos no necesariamente distintos de $\mathbf{A}$, todas contenidas en el retículo $[2,2N]\times[2,2N]$, si además, $\mathbf{A}\in B_2^+[g]$ cada suma se repite a lo sumo g veces. Por lo tanto

$$\binom{k+1}{2}\leq g\,(2N-1)^2\,,$$

se sigue entonces

$$k^2\leq k(k+1)\leq 2g\,(2N-1)^2\leq 8gN^2,$$

lo cual implica que para todo $\mathbf{A}\in B_2^+[g]$ con $\mathbf{A}\subseteq[1,N]^2$, se tiene $|\mathbf{A}|\leq 2N\sqrt{2g}$. Así

$$\mathbb{F}_g^+(N)\leq 2N\sqrt{2g}.$$

Se puede concluir entonces

$$\mathit{lím}_{N\to\infty}\sup\frac{\mathbb{F}_g^+(N)}{N}\leq 2\sqrt{2g}.$$

Esta relación junto con (1.4), implican

$$1\leq \mathit{lím}_{N\to\infty}\inf\frac{\mathbb{F}_g^+(N)}{N}\leq \mathit{lím}_{N\to\infty}\sup\frac{\mathbb{F}_g^+(N)}{N}\leq 2\sqrt{2g}. \tag{1.5}$$

En forma similar si $\mathbf{A}\subseteq[1,N]\times[1,N]$ con $|\mathbf{A}|=k$, entonces se pueden formar

$$2\binom{k}{2}$$

diferencias de dos elementos de $\mathbf{A}$, distintos, contenidas en $[1-N,N-1]\times[1-N,N-1]$, si además $\mathbf{A}\in B_2^-[g]$ cada diferencia se repite a lo sumo g veces, se tiene

$$2\binom{k}{2}\leq g\,(2N-1)^2\,,$$

Luego,

$$(k-1)^2 \leq k^2 - k \leq g\,(2N-1)^2\,,$$

$$k - 1 \leq \sqrt{g}\,(2N-1)\,,$$

$$k \leq 2\sqrt{g}N + 1 - \sqrt{g},$$

y por lo tanto

$$k \leq 2\sqrt{g}N.$$

De donde

$$\mathbb{F}_g^-(N) \leq 2\sqrt{g}N, \text{ para todo } N.$$

Entonces se puede concluir que

$$\lim_{N\to\infty} \sup \frac{\mathbb{F}_g^-(N)}{N} \leq 2\sqrt{g}. \tag{1.6}$$

Por otro lado, como $\mathbb{F}_1^+(N) = \mathbb{F}_1^-(N) \leq \mathbb{F}_g^-(N)$, se sigue

$$1 \leq \lim_{N\to\infty} \inf \frac{\mathbb{F}_g^-(N)}{N}.$$

Relación que junto con (1.6) implica

$$1 \leq \lim_{N\to\infty} \inf \frac{\mathbb{F}_g^-(N)}{N} \leq \lim_{N\to\infty} \sup \frac{\mathbb{F}_g^-(N)}{N} \leq 2\sqrt{g}. \tag{1.7}$$

Finalmente, como

$$\mathbb{F}_g^{\pm}(N) \leq mín\left\{\mathbb{F}_g^-(N), \mathbb{F}_g^+(N)\right\},$$

entonces

$$1 \leq \lim_{N\to\infty} \inf \frac{\mathbb{F}_g^{\pm}(N)}{N} \leq \lim_{N\to\infty} \sup \frac{\mathbb{F}_g^{\pm}(N)}{N} \leq 2\sqrt{g}. \tag{1.8}$$

2 CONSTRUCCIÓN DE CONJUNTOS $B_2[2]$

En esta sección se considera el caso particular $g = 2$. El punto de partida es [3], realizado en la Universidad del Cauca correspondiente a dimensión uno. Se desarrollan extensiones de las construcciones expuestas en el capítulo uno y se verifica que las clases $B_2^+[2]$, $B_2^-[2]$ y $B_2^{\pm}[2]$, al igual que en dimensión uno, son distintas.

2.1 CONJUNTOS $B_2^+[2]$ QUE NO SON $B_2^-[2]$

A continuación se construyen conjuntos que permiten verificar que las clases $B_2^+[2]$ y $B_2^-[2]$ son distintas, para ello se consideran las construcciones realizadas por Kolountzakis y Trujillo en dimensión uno.

2.1.1 Construcción análoga a la de Kolountzakis

En dimensión uno, Koluntzakis [11] diseñó la construcción dada en 1.1.3.1.

En dimension dos, se extiende dicha construcción como sigue:

Para $\mathbf{A} \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ y m, n enteros, se definen los siguientes conjuntos:

$$\mathbf{A}_0 = 2 \times \mathbf{A} = \{2\mathbf{a} : \mathbf{a} \in \mathbf{A}\},$$

$$\mathbf{A}_1 = 2 \times \mathbf{A} + (m, n) = \{2\mathbf{a} + (m, n) : \mathbf{a} \in \mathbf{A}\},$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{A}_0 \cup \mathbf{A}_1$$

A partir de estos conjuntos se tiene el siguiente teorema.

Teorema 2.1. Si $\mathbf{A}$ es un conjunto de Sidon y m, n son enteros al menos uno impar, entonces $\mathbf{B}$ es un conjunto $B_2^+[2]$.

Demostración. Si el conjunto de sumas de $\mathbf{B}$ se representa por los siguientes bloques

$$\begin{array}{cc} \mathbf{A}_0 & \mathbf{A}_1 \\ \hline \multicolumn{1}{|c|}{S(\mathbf{A}_0)} & \multicolumn{1}{c|}{\mathbf{A}_0+\mathbf{A}_1} \\ \hline & \multicolumn{1}{|c|}{S(\mathbf{A}_1)} \\ \cline{2-2} \end{array},$$

se observa que en los conjuntos $S(\mathbf{A}_0)$, $S(\mathbf{A}_1)$ sólo aparecen parejas con componentes pares, mientras que el conjunto $\mathbf{A}_0+\mathbf{A}_1$ está conformado por parejas con al menos una componente impar. De lo anterior se sigue

$$S(\mathbf{A}_0) \cap (\mathbf{A}_0+\mathbf{A}_1) = S(\mathbf{A}_1) \cap (\mathbf{A}_0+\mathbf{A}_1) = \phi.$$

Además como $\mathbf{A}_0$, $\mathbf{A}_1$ son conjutos de Sidon se tiene $\sigma_{\mathbf{A}_0}(\mathbf{x}), \sigma_{\mathbf{A}_1}(\mathbf{x}) \leq 1$ para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

Para probar que $\mathbf{B}$ es un conjunto $B_2^+[2]$ es suficiente demostrar que $\sigma_{\mathbf{A}_0,\mathbf{A}_1}(\mathbf{x}) \leq 2$ para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

Sea $\mathbf{v} \in \mathbf{A}_0+\mathbf{A}_1$, considerar dos representaciones como sigue

$$\mathbf{v} = \mathbf{a}_0+\mathbf{a}_1 = \mathbf{a}_0'+\mathbf{a}_1', \tag{2.1}$$

donde $\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_0' \in \mathbf{A}_0$ y $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_1' \in \mathbf{A}_1$. Por definición de $\mathbf{A}_1$

$$\mathbf{a}_1 = \mathbf{b}_0 + (m,n),$$

$$\mathbf{a}_1' = \mathbf{d}_0 + (m,n),$$

para algunos $\mathbf{b}_0, \mathbf{d}_0 \in \mathbf{A}_0$. Así

$$\mathbf{v} = \mathbf{a}_0 \dot{+} (\mathbf{b}_0 \dot{+} (m,n)) = \mathbf{a}_0' \dot{+} (\mathbf{d}_0 \dot{+} (m,n)), \tag{2.2}$$

cancelando (m,n), se sigue

$$\mathbf{a}_0 \dot{+} \mathbf{b}_0 = \mathbf{a}_0' \dot{+} \mathbf{d}_0.$$

Como $\mathbf{A}_0$ es conjunto de Sidon se tiene

$$(\mathbf{a}_0 = \mathbf{a}_0') \text{ y } (\mathbf{b}_0 = \mathbf{d}_0) \tag{2.3}$$

o

$$(\mathbf{a}_0 = \mathbf{d}_0) \text{ y } (\mathbf{b}_0 = \mathbf{a}_0') \tag{2.4}$$

Si se da el caso (2.3), de (2.2) se tiene la representación única $\mathbf{a}_0 \dot{+} (\mathbf{b}_0 \dot{+} (m,n))$ para $\mathbf{v}$.

Si se da el caso (2.4), de (2.2), se obtienen dos representaciones

$$\mathbf{b}_0 \dot{+} (\mathbf{a}_0 \dot{+} (m,n)) = \mathbf{a}_0 \dot{+} (\mathbf{b}_0 \dot{+} (m,n))$$

para $\mathbf{v}$. Esto es

$$\mathbf{v} = \mathbf{a}_0 \dot{+} (\mathbf{b}_0 \dot{+} (m,n))$$

o

$$\mathbf{v} = \mathbf{b}_0 \dot{+} (\mathbf{a}_0 \dot{+} (m,n))$$

Luego no hay lugar a una tercera representación para $\mathbf{v}$. ■

Ejemplo 2.1. Sea $\mathbf{A} = \{(1,1),(2,4),(3,2)\}$. Siguiendo la construcción anterior, se tiene

$$\mathbf{A}_0 = 2 \times \mathbf{A} = \{(2,2),(4,8),(6,4)\},$$

$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{A}_0 + (1,1) = \{(3,3),(5,9),(7,5)\},$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{A}_0 \cup \mathbf{A}_1 = \{(2,2),(4,8),(6,4),(3,3),(5,9),(7,5)\}.$$

El conjunto de sumas para **B** está dado por la siguiente tabla

Tabla 3. Sumas de **B**

$\mathbf{A}_0$			$\mathbf{A}_1$		
$(\mathbf{2},\mathbf{2})$	$(\mathbf{4},\mathbf{8})$	$(\mathbf{6},\mathbf{4})$	$(\mathbf{3},\mathbf{3})$	$(\mathbf{5},\mathbf{9})$	$(\mathbf{7},\mathbf{5})$
$(4,4)$	$(6,10)$	$(8,6)$	$(5,5)$	$(7,11)$	$(9,7)$
	$(8,16)$	$(10,12)$	$(7,11)$	$(9,17)$	$(\mathbf{11},\mathbf{13})$
		$(12,8)$	$(9,7)$	$(\mathbf{11},\mathbf{13})$	$(13,9)$
			$(6,6)$	$(8,12)$	$(10,8)$
				$(10,18)$	$(12,14)$
					$(14,10)$

Es claro que $\mathbf{B} \in B_2^+[2]$.

Similarmente, se consideran los conjuntos

$$\mathbf{A}_0 = 2 \times \mathbf{A} = \{(2,2),(4,8),(6,4)\},$$

$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{A}_0 + (1,0) = \{(3,2),(5,8),(7,4)\},$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{A}_0 \cup \mathbf{A}_1 = \{(2,2),(4,8),(6,4),(3,2),(5,8),(7,4)\}.$$

El conjunto de sumas para $\mathbf{B}$ está dado por la siguiente tabla

Tabla 4. Sumas de $\mathbf{B}$

	$\mathbf{A}_0$			$\mathbf{A}_1$	
$(\mathbf{2},\mathbf{2})$	$(\mathbf{4},\mathbf{8})$	$(\mathbf{6},\mathbf{4})$	$(\mathbf{3},\mathbf{2})$	$(\mathbf{5},\mathbf{8})$	$(\mathbf{7},\mathbf{4})$
$(4,4)$	$(6,10)$	$(8,6)$	$(5,4)$	$(\mathbf{7},\mathbf{10})$	$(9,6)$
	$(8,16)$	$(10,12)$	$(\mathbf{7},\mathbf{10})$	$(9,16)$	$(11,12)$
		$(12,8)$	$(9,6)$	$(11,12)$	$(13,8)$
			$(6,4)$	$(8,10)$	$(10,6)$
				$(10,16)$	$(12,12)$
					$(14,8)$

Se puede observar de la tabla 4 que $\mathbf{B} \in B_2^+[2]$.

2.1.2 Construcción Análoga a la de Trujillo

En dimensión uno, Trujillo [13] diseñó la construcción dada en 1.1.3.2.

En dimensión dos, es necesario definir un conjunto de Sidon módulo m componente a componente.

Sean $\mathbf{A} \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ y m un entero mayor que 1. Se dice que $\mathbf{A}$ es un *conjunto de Sidon módulo* m, si para todo $\mathbf{v}, \mathbf{v}', \mathbf{u}, \mathbf{u}' \in \mathbf{A}$ se tiene

$$\mathbf{v} + \mathbf{v}' \equiv \mathbf{u} + \mathbf{u}' (\textit{mód } m) \Longrightarrow \{\mathbf{v}, \mathbf{v}'\} = \{\mathbf{u}, \mathbf{u}'\},$$

donde la suma y la reducción módulo m son componente a componente.

La construcción en dos dimensiones es como sigue:

Sea $\mathbf{A}$ un conjunto de Sidon módulo m contenido en $[1,m]^2$. Se definen los siguientes conjuntos

$$\mathbf{A}_0 = \mathbf{A},$$

$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{A} + (m,0) = \{(a+m,b) : (a,b) \in \mathbf{A}\},$$

$$\mathbf{A}_2 = \mathbf{A} + (0,m) = \{(a,b+m) : (a,b) \in \mathbf{A}\},$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{A}_0 \cup \mathbf{A}_1 \cup \mathbf{A}_2 \subseteq [1,2m]^2.$$

Con estos conjuntos se tiene el siguiente teorema.

Teorema 2.2 $\mathbf{B}$ es un conjunto $B_2^+[2]$ con $|\mathbf{B}| = 3|\mathbf{A}|$ y $\mathbf{B} \subseteq [1,2m]^2$.

Demostración. La tabla de sumas de $\mathbf{B}$ se representa por los siguientes bloques

$\mathbf{A}_0$	$\mathbf{A}_1$	$\mathbf{A}_2$
$\mathbf{A}_0+\mathbf{A}_0$	$\mathbf{A}_0+\mathbf{A}_1$	$\mathbf{A}_0+\mathbf{A}_2$
	$\mathbf{A}_1+\mathbf{A}_1$	$\mathbf{A}_1+\mathbf{A}_2$
		$\mathbf{A}_2+\mathbf{A}_2$

Como $\mathbf{A}_i$ es un conjunto de Sidon para cada $i = 0,1,2$, en los bloques $\mathbf{A}_i + \mathbf{A}_i$ no hay repeticiones puesto que

$$\sigma_{\mathbf{A}_i,\mathbf{A}_i}(\mathbf{v}) \leq 1, \text{ para todo } \mathbf{v} \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}.$$

Por otro lado, en cada uno de los bloques $\mathbf{A}_i + \mathbf{A}_j$ con $0 \leq i < j \leq 2$, no hay parejas con más de dos representaciones. En efecto, considere el bloque $\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2$, y suponga

$$\mathbf{w} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1' + \mathbf{v}_2', \text{ con } \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1' \in \mathbf{A}_1 \text{ y } \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_2' \in \mathbf{A}_2, \tag{2.5}$$

entonces por definición, se sigue

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{a} + (m, 0) \quad \text{y} \quad \mathbf{v}_1' = \mathbf{a}' + (m, 0),$$

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{b} + (0, m) \quad \text{y} \quad \mathbf{v}_2' = \mathbf{b}' + (0, m),$$

para algunos $\mathbf{a}, \mathbf{a}', \mathbf{b}, \mathbf{b}' \in \mathbf{A}$. Reemplazando en (2.5), se tiene

$$(\mathbf{a} + (m, 0)) + (\mathbf{b} + (0, m)) = (\mathbf{a}' + (m, 0)) + (\mathbf{b}' + (0, m)),$$

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{a}' + \mathbf{b}',$$

y como $\mathbf{A}$ es un conjunto de Sidon módulo m, se sigue

$$\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\} = \{\mathbf{a}', \mathbf{b}'\}.$$

Luego, en (2.5), $\mathbf{w}$ tiene representación única si $\mathbf{a} = \mathbf{a}'$ y $\mathbf{b} = \mathbf{b}'$, y dos representaciones si $\mathbf{a} = \mathbf{b}'$ y $\mathbf{b} = \mathbf{a}'$ con $(\mathbf{a} \neq \mathbf{a}')$.

Similarmente se prueba que en los demás bloques $A_i + A_j$ no hay parejas con más de dos representaciones.

Para terminar de demostrar que $\mathbf{B} \in B_2^+[2]$ es suficiente probar que los bloques en la tabla de sumas de $\mathbf{B}$ son disjuntos por pares.

Observe primero que

$$\mathbf{A}_0 \subset [1, m] \times [1, m],$$

$$\mathbf{A}_1 \subset [m+1, 2m] \times [1, m],$$

$$\mathbf{A}_2 \subset [1, m] \times [m+1, 2m],$$

luego

$$S(\mathbf{A}_0) \subset [2, 2m] \times [2, 2m]\,,$$

$$S(\mathbf{A}_1) \subset [2m+2, 4m] \times [2, 2m]\,,$$

$$S(\mathbf{A}_2) \subset [2, 2m] \times [2m+2, 4m]\,,$$

$$\mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_1 \subset [m+2, 3m] \times [2, 2m]\,,$$

$$\mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_2 \subset [2, 2m] \times [m+2, 3m]\,,$$

$$\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 \subset [m+2, 3m] \times [m+2, 3m]\,.$$

Debido al tamaño de las componentes, es fácil ver que

$$S(\mathbf{A}_0) \cap S(\mathbf{A}_1) = S(\mathbf{A}_0) \cap S(\mathbf{A}_2) = S(\mathbf{A}_1) \cap S(\mathbf{A}_2) = \phi,$$

$$(\mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_1) \cap S(\mathbf{A}_2) = (\mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_2) \cap S(\mathbf{A}_1) = \phi.$$

Para demostrar

$$S(\mathbf{A}_0) \cap (\mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_1) = S(\mathbf{A}_0) \cap (\mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_2) = S(\mathbf{A}_2) \cap (\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2) = \phi,$$

$$S(\mathbf{A}_1) \cap (\mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_1) = S(\mathbf{A}_1) \cap (\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2) = \phi,$$

$$S(\mathbf{A}_2) \cap (\mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_2) = S(\mathbf{A}_2) \cap (\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2) = \phi,$$

debido a la similitud de las pruebas, se demostrará que $S(\mathbf{A}_2) \cap (\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2) = \phi$.

Para ello suponga que $\mathbf{w} \in S(\mathbf{A}_2) \cap (\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2)$, entonces

$$\mathbf{w} = (\mathbf{a} + (0, m)) + (\mathbf{a}' + (0, m)) = (\mathbf{b} + (m, 0)) + (\mathbf{b}' + (0, m)), \tag{2.6}$$

para algunos $\mathbf{a}, \mathbf{a}', \mathbf{b}, \mathbf{b}' \in \mathbf{A}$. Reduciendo módulo m, se tiene

$$\mathbf{a} + \mathbf{a}' \equiv \mathbf{b} + \mathbf{b}' (\textit{mód } m),$$

y como $\mathbf{A}$ es un conjunto de Sidon módulo m

$$\{\mathbf{a},\mathbf{a}'\} = \{\mathbf{b},\mathbf{b}'\},$$

que junto con (2.6) implica

$$2(0,m) = (m,m),$$

que no es posible.

Resta demostrar que

$$(\mathbf{A}_0+\mathbf{A}_1)\cap(\mathbf{A}_0+\mathbf{A}_2) = (\mathbf{A}_0+\mathbf{A}_1)\cap(\mathbf{A}_1\cap\mathbf{A}_2) = \phi,$$

$$(\mathbf{A}_0+\mathbf{A}_2)\cap(\mathbf{A}_1+\mathbf{A}_2) = \phi.$$

De nuevo, debido a la similitud en las pruebas, sólo se demuestra la primera igualdad.

Suponga que $\mathbf{w}\in(\mathbf{A}_0+\mathbf{A}_1)\cap(\mathbf{A}_0+\mathbf{A}_2)$, entonces

$$\mathbf{w} = \mathbf{a} + (\mathbf{a}' + (m,0)) = \mathbf{b} + (\mathbf{b}' + (0,m)), \tag{2.7}$$

para algunos $\mathbf{a},\mathbf{a}',\mathbf{b},\mathbf{b}'\in\mathbf{A}$. Reduciendo módulo m, se tiene

$$\mathbf{a}+\mathbf{a}' \equiv \mathbf{b}+\mathbf{b}' (\textit{mód } m),$$

y como $\mathbf{A}$ es un conjunto de Sidon módulo m

$$\{\mathbf{a},\mathbf{a}'\} = \{\mathbf{b},\mathbf{b}'\},$$

que junto con (2.7) implica

$$(m,0) = (0,m),$$

que no es posible. Por lo tanto $\mathbf{B}\in B_2^+[2]$.

Es fácil ver que $|\mathbf{B}| = 3|\mathbf{A}|$, y $\mathbf{B}\subseteq[1,2m]^2$. Esto finaliza la demostración. ■

2.1.3 Utilización de multiplicadores que forman un conjunto de Sidon

La construcción 2.1.2 presentada en la sección anterior puede ser generalizada de la siguiente forma:

Sean $\mathbf{A}, \mathbf{T} \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ y m un entero mayor que 1. Para cada $\mathbf{t} = (t_1, t_2) \in \mathbf{T}$ se define el siguiente conjunto

$$\mathbf{A_t} = \mathbf{A} + \mathbf{t}m = \{(a + t_1 m, b + t_2 m) : (a, b) \in \mathbf{A}\}.$$

Entonces

Teorema 2.3 Si $\mathbf{A}$ es un conjunto de Sidon módulo m y $\mathbf{T} = \{\mathbf{t}_1, ..., \mathbf{t}_k\}$ un conjunto de Sidon, entonces el conjunto

$$\mathbf{B} = \bigcup_{\mathbf{t} \in \mathbf{T}} \mathbf{A_t}$$

es un conjunto $B_2^+[2]$.

Demostración. Definir los siguientes conjuntos

$$\mathbf{A}_i = \mathbf{A} + \mathbf{t}_i m$$

para cada $i = 1, 2, ..., k$.

Para demostrar el teorema es suficiente probar las siguientes afirmaciones:

1. $\sigma_{\mathbf{A}_i}(\mathbf{s}) \leq 1$, para todo $\mathbf{s} \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

2. $\sigma_{\mathbf{A}_i, \mathbf{A}_j}(\mathbf{s}) \leq 2$ con $1 \leq i < j \leq k$ para todo $\mathbf{s} \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

3. Los conjuntos $S(\mathbf{A}_i)$ con $1 \leq i \leq k$ y $(\mathbf{A}_j + \mathbf{A}_l)$ con $1 \leq j < l \leq k$, son disjuntos por pares.

La afirmación 1 es inmediata porque cada $\mathbf{A}_i$ es un conjunto de Sidon.

Para la afirmación 2, sean $\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_i' \in \mathbf{A}_i$ y $\mathbf{a}_j, \mathbf{a}_j' \in \mathbf{A}_j$ tales que

$$\mathbf{a}_i+\mathbf{a}_j = \mathbf{a}_i'+\mathbf{a}_j'.$$

por definición de $\mathbf{A}_i + \mathbf{A}_j$ se tiene

$$(\mathbf{a} + \mathbf{t}_i m) + (\mathbf{a}' + \mathbf{t}_j m) = (\mathbf{a}'' + \mathbf{t}_i m) + (\mathbf{a}''' + \mathbf{t}_j m)\,,$$

para algunos $\mathbf{a}, \mathbf{a}', \mathbf{a}'', \mathbf{a}''' \in \mathbf{A}$. Luego

$$\mathbf{a} + \mathbf{a}' \equiv \mathbf{a}''+\mathbf{a}'''(\textit{mód } m).$$

Como $\mathbf{A}$ es un conjunto de Sidon módulo m, se tiene

$$(\mathbf{a} = \mathbf{a}'' \text{ y } \mathbf{a}'= \mathbf{a}''')\text{ó } (\mathbf{a} = \mathbf{a}''' \text{ y } \mathbf{a}'= \mathbf{a}'').$$

Si $\mathbf{a} = \mathbf{a}''$ y $\mathbf{a}'= \mathbf{a}'''$, se sigue que $\mathbf{a}_i= \mathbf{a}_i'$ y $\mathbf{a}_j= \mathbf{a}_j'$, así que la representación es única. Mientras que, si $\mathbf{a} = \mathbf{a}'''$ y $\mathbf{a}'= \mathbf{a}''$, se siguen a lo sumo representaciones dobles, así

$$(\mathbf{a} + \mathbf{t}_i m) + (\mathbf{a}'+\mathbf{t}_j m) \;\text{ y }\; (\mathbf{a}'+\mathbf{t}_i m) + (\mathbf{a} + \mathbf{t}_j m)\,,$$

luego, no es posible tener una tercera representación de un mismo elemento de $\mathbf{A}_i + \mathbf{A}_j$.

La afirmación 3, se demuestra probando lo siguiente

$$S(\mathbf{A}_i) \cap S(\mathbf{A}_j) = \phi \text{ con } 1 \leq i < j \leq k, \tag{2.8}$$

$$S(\mathbf{A}_i) \cap (\mathbf{A}_j + \mathbf{A}_l) = \phi \text{ con } i = 1, 2, ..., k \text{ y } 1 \leq j < l \leq k, \tag{2.9}$$

$$(\mathbf{A}_j + \mathbf{A}_l) \cap (\mathbf{A}_r + \mathbf{A}_s) = \phi \text{ con } 1 \leq j < l \leq k \text{ y } 1 \leq r < s \leq k. \tag{2.10}$$

Para probar (2.8), suponga que, si existen $\mathbf{a}_i$, $\mathbf{a}_i'$, $\mathbf{a}_j$, $\mathbf{a}_j' \in \mathbf{A}$ tales que

$$(\mathbf{a}_i + \mathbf{t}_i m) + (\mathbf{a}_i' + \mathbf{t}_i m) = (\mathbf{a}_j + \mathbf{t}_j m) + (\mathbf{a}_j' + \mathbf{t}_j m), \tag{2.11}$$

entonces

$$\mathbf{a}_i + \mathbf{a}_i' \equiv \mathbf{a}_j + \mathbf{a}_j' (\acute{m}\acute{o}d\ m),$$

de donde se sigue

$$\mathbf{a}_i + \mathbf{a}_i' = \mathbf{a}_j + \mathbf{a}_j'.$$

Luego de (2.11), se tiene $\mathbf{t}_i = \mathbf{t}_j$, que contradice el hecho de que $i < j$.

Para probar (2.9) suponga que existen $\mathbf{a}_i$, $\mathbf{a}_i'$, $\mathbf{a}_j$, $\mathbf{a}_l \in \mathbf{A}$ tales que

$$(\mathbf{a}_i + \mathbf{t}_i m) + (\mathbf{a}_i' + \mathbf{t}_i m) = (\mathbf{a}_j + \mathbf{t}_j m) + (\mathbf{a}_l + \mathbf{t}_l m), \tag{2.12}$$

entonces

$$\mathbf{a}_i + \mathbf{a}_i' \equiv \mathbf{a}_j + \mathbf{a}_l (m\acute{o}d\ m),$$

y de nuevo

$$\mathbf{a}_i + \mathbf{a}_i' = \mathbf{a}_j + \mathbf{a}_l,$$

luego de (2.12) se tiene $2\mathbf{t}_i = \mathbf{t}_j + \mathbf{t}_l$, esto contradice el hecho que $\mathbf{T}$ es un conjunto de Sidon.

Finalmente, para probar (2.10) suponga que existen $\mathbf{a}_j$, $\mathbf{a}_l$, $\mathbf{a}_r$, $\mathbf{a}_s \in \mathbf{A}$ tales que

$$(\mathbf{a}_j+\mathbf{t}_j m) + (\mathbf{a}_l+\mathbf{t}_l m) = (\mathbf{a}_r+\mathbf{t}_r m) + (\mathbf{a}_s+\mathbf{t}_s m)\,, \tag{2.13}$$

entonces

$$\mathbf{a}_j+\mathbf{a}_l \equiv \mathbf{a}_r+\mathbf{a}_s (m\acute{o}d\ m),$$

y de nuevo

$$\mathbf{a}_j+\mathbf{a}_l = \mathbf{a}_r+\mathbf{a}_s,$$

luego de (2.13) se tiene $\mathbf{t}_j+\mathbf{t}_l= \mathbf{t}_r+\mathbf{t}_s$, que no se puede dar ya que $\mathbf{T}$ es un conjunto de Sidon. Esto finaliza la demostración.■

Ejemplo 2.2. Sea $\mathbf{A} = \{(0,2)\,,(0,4)\,,(0,5)\}$ un conjunto de Sidon módulo 10 y sea $\mathbf{T} = \{(0,0)\,,(1,0)\,,(0,1)\}$ entonces

$$\mathbf{B} = \{(0,2)\,,(0,4)\,,(0,5)\,,(10,2)\,,(10,4)\,,(10,5)\,,(0,12)\,,(0,14)\,,(0,15)\}\,,$$

es un conjunto $B_2^+[2]$, como se puede verificar en la tabla siguiente:

Tabla 5. Sumas de $\mathbf{B}$.

$(0,2)$	$(0,4)$	$(0,5)$	$(10,2)$	$(10,4)$	$(10,5)$	$(0,12)$	$(0,14)$	$(0,15)$
$(0,4)$	(0.6)	$(0,7)$	$(10,4)$	$(10,6)$	$(10,7)$	$(0,14)$	$(0,16)$	$(0,17)$
	$(0,8)$	$(0,9)$	$(10,6)$	$(10,8)$	$(10,9)$	$(0,16)$	$(0,18)$	$(0,19)$
		$(0,10)$	$(10,7)$	$(10,9)$	$(10,10)$	$(0,17)$	$(0,19)$	$(0,20)$
			$(20,4)$	$(20,6)$	$(20,7)$	$(10,14)$	$(10,16)$	$(\mathbf{10},\mathbf{17})$
				$(20,8)$	$(20,9)$	$(10,16)$	$(10,18)$	$(10,19)$
					$(20,10)$	$(\mathbf{10},\mathbf{17})$	$(10,19)$	$(10,20)$
						$(0,24)$	$(0,26)$	$(0,27)$
							$(0,28)$	$(0,29)$
								$(0,30)$

Observe que en el Teorema 2.3 se utilizó $\mathbf{T} = \{(0,0),(1,0),(0,1)\}$, que es un conjunto de Sidon.

2.2 CONJUNTOS $B_2^-[2]$ QUE NO SON $B_2^+[2]$

En dimensión uno, Trujillo [12] realizó la construcción dada en 1.1.4.

Análogamente, en dimensión dos, si $\mathbf{A} \subseteq [1,N]^2$ con $\mathbf{A}$ un conjunto de Sidon se definen los siguientes conjuntos

$$\mathbf{A}_1 = (3N,3N) - \mathbf{A} = \{(3N-a, 3N-b) : (a,b) \in \mathbf{A}\},$$

$$\mathbf{B}{=}\mathbf{A} \cup \mathbf{A}_1.$$

Con la notación anterior, se tiene el siguiente resultado.

Teorema 2.4. $\mathbf{B}$ es un conjunto $B_2^-[2]$, y si $|\mathbf{A}| \geq 3$ entonces $\mathbf{B}$ no es un conjunto $B_2^+[2]$.

Demostración. Considere el siguiente diagrama para el conjunto de las diferencias de $\mathbf{B}$,

$\mathbf{B}_0$	$\mathbf{B}_1$
$\mathbf{B}_0 - \mathbf{B}_0$	$\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_0$
	$\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_1$

Donde $\mathbf{B}_0 = \mathbf{A}$ y $\mathbf{B}_1 = \mathbf{A}_1$.

Es suficiente con demostrar que las siguientes afirmaciones son verdaderas:

1. $\delta_{\mathbf{B}_i}(\mathbf{d}) \leq 1$ con $i = 0, 1$, para todo $\mathbf{d} \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

2. $\delta_{\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_0}(\mathbf{d}) \leq 2$, para todo $\mathbf{d} \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

3. $(\mathbf{B}_0 - \mathbf{B}_0) \cap (\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_0) = (\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_1) \cap (\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_0) = \phi$.

La afirmación 1 es inmediata porque $\mathbf{B}_i$ con $i = 0, 1$ es un conjunto de sidon.

Para demostrar la afirmación 2 considere

$$[(3N, 3N) - (a_1', a_2')] - (a_1, a_2) = [(3N, 3N) - (b_1', b_2')] - (b_1, b_2) \tag{2.14}$$

dos representaciones de un elemento $\mathbf{w} \in (\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_0)$, donde (a_1, a_2), (a_1', a_2'), (b_1, b_2), (b_1', b_2') pertenecen a $\mathbf{B}_0$ y $(3N - a_1', 3N - a_2')$, $(3N - b_1', 3N - b_2') \in \mathbf{B}_1$.

De (2.14) se sigue

$$(a_1', a_2') + (a_1, a_2) = (b_1', b_2') + (b_1, b_2).$$

Como $\mathbf{B}_0$ es un conjunto de Sidon,

$$(a_1', a_2') = (b_1', b_2') \text{ y } (a_1, a_2) = (b_1, b_2), \tag{2.15}$$

o

$$(a_1', a_2') = (b_1, b_2) \text{ y } (b_1', b_2') \;=\; (a_1, a_2). \tag{2.16}$$

Si se tiene (2.15) entonces en (2.14) se logra una única representación para $\mathbf{w}$, mientras que si se da el caso (2.16) se obtienen a lo sumo dos representaciones para $\mathbf{w}$ en (2.14)

$$[(3N, 3N) - (a_1', a_2')] - (a_1, a_2) = [(3N, 3N) - (a_1, a_2)] - (a_1', a_2').$$

Para la afirmación 3, dado que

$$\mathbf{B}_0 \subseteq [1, N]^2 \text{ y } \mathbf{B}_1 \subseteq [2N, 3N-1]^2,$$

se tiene

$$\begin{aligned}
(\mathbf{B}_0 - \mathbf{B}_0) &\subseteq [1-N, N-1]^2, \\
(\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_1) &\subseteq [1-N, N-1]^2, \\
(\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_0) &\subseteq [N, 3N-2]^2.
\end{aligned} \tag{2.17}$$

Debido a las contenencias en 2.17 se descarta cualquier posible intersección entre $(\mathbf{B}_0 - \mathbf{B}_0)$ y $(\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_0)$ y entre $(\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_1)$ y $(\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_0)$.

Finalizando la demostración. ■

Observe que el mismo resultado es válido si en lugar del vector $(3N, 3N)$ se utiliza cualquiera de los vectores $(3N, 0)$ o $(0, 3N)$.

2.3 CONJUNTOS $B_2^{\pm}[4]$

En dimensión uno, Trujillo [12] construye conjuntos en la clase $B_2^{\pm}[2]$, dado en 1.1.6.2.

En forma análoga, en dimensión dos, se procede como sigue: Si $\mathbf{A}$ es un conjunto de Sidon módulo m, contenido en el retículo $[1, m]^2$, con m par, se define el conjunto

$$\mathbf{B} = \mathbf{A}(m\acute{o}d\ m/2) = \{(am\acute{o}d\ m/2, bm\acute{o}d\ m/2) : (a, b) \in \mathbf{A}\} \subseteq [1, m/2]^2 .$$

Con esta notación se tiene el siguiente teorema.

Teorema 2.7. Si m es un entero positivo par y $\mathbf{A}$ un conjunto de Sidon módulo m, contenido en el retículo $[1, m]^2$, entonces $\mathbf{B} = \mathbf{A}(m\acute{o}d\ m/2)$ es un conjunto $B_2^{\pm}[4]$.

Demostración. Sea α un elemento de $S(\mathbf{B})$ y

$$(b_i, b_i') + (v_i, v_i'), \tag{2.18}$$

para $i = 1, ..., 5$, cinco representaciones de α como sumas de dos elementos de $\mathbf{B}$.

Por definición de $\mathbf{B}$ existen

$$(a_1, a_1'),\ (a_2, a_2'),\ (a_3, a_3'),\ (a_4, a_4'),\ (a_5, a_5'),\ (z_1, z_1'),\ (z_2, z_2'),\ (z_3, z_3'),\ (z_4, z_4'),\ (z_5, z_5')$$

que pertenecen a $\mathbf{A}$ tales que

$$a_i = \frac{m}{2}k_i + b_i,$$
$$a'_i = \frac{m}{2}k'_i + b'_i,$$
$$z_i = \frac{m}{2}q_i + v_i,$$
$$z'_i = \frac{m}{2}q'_i + v'_i,$$

para $i = 1, ..., 5$.

Reemplazando las igualdades anteriores en (2.18) se tiene que las expresiones

$$(a_i - \frac{m}{2}k_i, a'_i - \frac{m}{2}k'_i) + (z_i - \frac{m}{2}q_i, z'_i - \frac{m}{2}q'_i),$$

para $i = 1, ..., 5$, son iguales. Luego también las expresiones

$$(a_i, a'_i) - \frac{m}{2}(k_i, k'_i) + (z_i, z'_i) - \frac{m}{2}(q_i, q'_i) \tag{2.19}$$

para $i = 1, ..., 5$, son iguales.

Entre $(k_1, k'_1) + (q_1, q'_1)$, $(k_2, k'_2) + (q_2, q'_2)$, $(k_3, k'_3) + (q_3, q'_3)$, $(k_4, k'_4) + (q_4, q'_4)$, $(k_5, k'_5) + (q_5, q'_5)$ hay por lo menos dos que son congruentes módulo dos, sin pérdida de generalidad se puede suponer

$$(k_1, k'_1) + (q_1, q'_1) \equiv (k_2, k'_2) + (q_2, q'_2) \ \ (m\acute{o}d\ 2),$$

luego en (2.19)

$$(a_1, a'_1) + (z_1, z'_1) = (a_2, a'_2) + (z_2, z'_2) + \frac{m}{2}\left[(k_1, k'_1) + (q_1, q'_1) - (k_2, k'_2) - (q_2, q'_2)\right]$$

lo cual implica

$$(a_1, a_1') + (z_1, z_1') \equiv (a_2, a_2') + (z_2, z_2') \, (m\acute{o}d\ m), \tag{2.20}$$

De (2.20) y del hecho de que $\mathbf{A}$ es un conjunto de Sidon módulo m se cumple

$$\{(a_1, a_1'), (z_1, z_1')\} = \{(a_2, a_2'), (z_2, z_2')\},$$

y por definición del conjunto $\mathbf{B}$ se tiene que $\{(b_1, b_1'), (v_1, v_1')\} = \{(b_2, b_2'), (v_2, v_2')\}$. Luego en (2.18) hay dos representaciones idénticas. Así, $\mathbf{B}$ es un conjunto $B_2^+ [4]$.

Similarmente se prueba que $\mathbf{B} \in B_2^- [4]$.■

Ejemplo 2.3. Sea

$$\mathbf{A} = \{(1,1), (1,25), (1,3), (2,5), (4,6), (3,28), (1,32), (2,37), (24,6), (24,9)\},$$

se puede verificar que es un conjunto de Sidon módulo 42. De acuerdo con la definición de $\mathbf{B}$ se tiene

$$\mathbf{B} = \{(1,1), (1,4), (1,3), (2,5), (3,6), (3,9), (4,6), (3,7), (1,11), (2,16)\},$$

Tabla 6. Sumas de **B**.

$(1,1)$	$(1,3)$	$(1,4)$	$(1,11)$	$(2,5)$	$(2,16)$	$(3,6)$	$(3,7)$	$(3,9)$	$(4,6)$
$(2,2)$	$(2,4)$	$(2,5)$	$(2,12)$	$(3,6)$	$(3,17)$	$(4,7)$	$(4,8)$	$(\mathbf{4},\mathbf{10})$	$(5,7)$
	(2.6)	$(2,7)$	$(2,14)$	$(3,8)$	(3.19)	(4.9)	$(\mathbf{4},\mathbf{10})$	$(4,12)$	$(5,9)$
		$(2,8)$	$(2,15)$	$(3,9)$	$(3,20)$	$(\mathbf{4},\mathbf{10})$	$(4,11)$	$(4,13)$	$(5,10)$
			$(2,22)$	$(3,16)$	$(3,27)$	$(4,17)$	$(4,18)$	$(4,20)$	$(5,17)$
				$(\mathbf{4},\mathbf{10})$	$(4,21)$	$(5,11)$	$(5,12)$	$(5,14)$	$(6,11)$
					$(4,32)$	$(5,22)$	$(5,23)$	$(5,25)$	$(6,22)$
						$(6,12)$	$(6,13)$	$(6,15)$	$(7,12)$
							$(6,14)$	$(6,16)$	$(7,13)$
								$(6,18)$	$(7,15)$
									$(8,12)$

Tabla 7. Diferencias de **B**.

$(1,1)$	$(1,3)$	$(1,4)$	$(1,11)$	$(2,5)$	$(2,16)$	$(3,6)$	$(3,7)$	$(3,9)$	$(4,6)$
	$(0,2)$	$(0,3)$	$(0,10)$	$(1,4)$	$(1,15)$	$(\mathbf{2},\mathbf{5})$	$(2,6)$	$(2,8)$	$(3,5)$
		$(0,1)$	$(0,8)$	$(1,2)$	$(1,13)$	$(2,3)$	$(2,4)$	$(2,6)$	$(3,3)$
			$(0,7)$	$(1,1)$	$(1,12)$	$(2,2)$	$(2,3)$	$(\mathbf{2},\mathbf{5})$	$(3,2)$
				$(1,-6)$	$(1,5)$	$(2,-5)$	$(2,-4)$	$(2,-2)$	$(3,-5)$
					$(0,11)$	$(1,1)$	$(1,2)$	$(1,4)$	$(2,1)$
						$(1,-10)$	$(1,-9)$	$(1,-7)$	$(2,-10)$
							$(0,1)$	$(0,3)$	$(1,0)$
								$(0,2)$	$(1,-1)$
									$(1,-3)$

De las tablas 6 y 7 se concluye que **B** está en la clase $B_2^{\pm}[4]$.

3 GENERALIZACIONES

En este capítulo se exponen las construcciones de conjuntos $B_2^+[g]$ y $B_2^{\pm}[g]$, construcciones que generalizan aquellas presentadas en el capítulo anterior para $g = 2$.

3.1 CONJUNTOS $B_2^+[g]$

Para generalizar la construcción de conjuntos $B_2^+[2]$ se necesita la siguiente definición.

Definición. Sea $\mathbf{A} = \{(a_0, v_0), (a_1, v_1), ..., (a_k, v_k)\} \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ **A** satisface la condición $B_2^*[g]$ si para toda pareja $(z, z') \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, la ecuación

$$(z, z') = (a_i, v_i) + (a_i', v_i'),$$

tiene a lo sumo g soluciones, teniendo en cuenta que $(a_i, v_i) + (a_j, v_j)$ y $(a_j, v_j) + (a_i, v_i)$ se cuentan como dos soluciones cuando $i \neq j$.

Con esta definición se tiene el siguiente resultado.

Teorema 3.1. **Teorema 3.1.** Si el conjunto $\mathbf{A} = \{(a_0, v_0), (a_1, v_1), ..., (a_k, v_k)\}$ satisface la condición $B_2^*[g]$ y $\mathbf{C}$ es un conjunto de Sidon módulo m, entonces el conjunto

$$\mathbf{B} = \bigcup_{i=0}^{k} (\mathbf{C} + m(a_i, v_i)),$$

es un conjunto $B_2^+[g]$.

Demostración. Primero note que si $\mathbf{b}_{ij}$ y $\mathbf{b}_{qt}$ son elementos de $\mathbf{B}$ tales que

$$\mathbf{b}_{ij} = (c_i, d_i) + m(a_j, v_j),$$

$$\mathbf{b}_{qt} = (c_q, d_q) + m(a_t, v_t),$$

entonces si $\mathbf{r} \in S(\mathbf{B})$ con $\mathbf{r} = \mathbf{b}_{ij} + \mathbf{b}_{qt}$, se tiene que $\mathbf{r}$ se puede representar tambìen como la suma $\mathbf{r} = \mathbf{b}_{ij} + \mathbf{b}_{qt}$.

Ahora, suponga que $\mathbf{w} \in S(\mathbf{B})$ admite $g+1$ representaciones como suma de dos elementos de $\mathbf{B}$

$$\mathbf{w} = \mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_1^{'} = \mathbf{b}_2 + \mathbf{b}_2^{'} = ... = \mathbf{b}_{g+1} + \mathbf{b}_{g+1}^{'}. \tag{3.1}$$

Por definición de $\mathbf{B}$, para cada $i = 1, 2, ..., g+1$

$$\mathbf{b}_i = (c_i, d_i) + m(a_i, v_i \text{ con } (c_i, d_i) \in \mathbf{C} \text{ y } (a_i, v_i) \in \mathbf{A},$$

$$\mathbf{b}_i' = (c_i', d_i') + m(a_i', v_i' \text{ con } (c_i', d_i') \in \mathbf{C} \text{ y } (a_i', v_i') \in \mathbf{A}.$$

Reemplazando en (3.1) se obtiene que las $g+1$ expresiones siguientes

$$(c_1, d_1) + m\,(a_1, v_1) + (c_1', d_1') + m\,(a_1', v_1')\,, \tag{3.2}$$

$$(c_2, d_2) + m\,(a_2, v_2) + (c_2', d_2') + m\,(a_2', v_2')\,,$$

$$\vdots$$

$$(c_{g+1}, d_{g+1}) + m\,(a_{g+1}, v_{g+1}) + (c_{g+1}', d_{g+1}') + m(a_{g+1}', v_{g+1}'),$$

son iguales.

Estas igualdades implican las siguientes congruencias

$$(c_1, d_1) + (c_1', d_1') \equiv ... \equiv (c_{g+1}, d_{g+1}) + (c_{g+1}', d_{g+1}')(m\acute{o}d\ m).$$

Como $\mathbf{C}$ es un conjunto de Sidon módulo m,

$$\{(c_1, d_1), (c_1', d_1')\} = ... = \{(c_{g+1}, d_{g+1}), (c_{g+1}', d_{g+1}')\}.$$

Con estas igualdades en (3.2) se tiene

$$(a_1, v_1) + (a_1', v_1') = (a_2, v_2) + (a_2', v_2') = ... = (a_{g+1}, v_{g+1}) + (a_{g+1}', v_{g+1}').$$

Ahora, como $\mathbf{A}$ satisface la condición $B_2^*[g]$, existen j, k tales que

$$(a_j, v_j) = (a_k, v_k) \text{ y } \left(a_j', v_j'\right) = (a_k', v_k'),$$

entonces para estos j y k se tiene

$$\mathbf{b}_j = \mathbf{b}_k \text{ y } \mathbf{b}_j' = \mathbf{b}_k'.$$

Es decir, dos representaciones de $\mathbf{w}$ en (3.1) son idénticas. Por lo tanto, no hay elementos con $g+1$ representaciones.■

3.2 CONJUNTOS $B_2^{\pm}[g]$

A continuación damos a conocer la generalización de la construcción de conjuntos $B_2^{\pm}[4]$, para $g = (g_1)^2$, donde g_1 es un entero mayor que 1.

Teorema 3.2. Sean m y g_1 enteros positivos con $g_1 \geq 2$ y g_1 divisor de m y $\mathbf{A}$ un conjunto de Sidon módulo m contenido en el retículo $[1, m]^2$, entonces, el conjunto

$$\mathbf{B} = \mathbf{A}(\textit{mód } m/g_1) = \left\{\left(a_1 \textit{mód } \frac{m}{g_1}, a_2 \textit{mód } \frac{m}{g_1}\right) : (a_1, a_2) \in \mathbf{A}\right\},$$

es un conjunto $B_2^{\pm}[g]$, donde $g = (g_1)^2$ y 2 representa la dimensión.

Demostración. Sea $\mathbf{w}$ un elemento de $S(\mathbf{B})$ y suponga $g+1$ representaciones de $\mathbf{w}$ como suma de dos elementos de $\mathbf{B}$

$$(b_1, b_1') + (v_1, v_1') = (b_2, b_2') + (v_2, v_2') = ... = (b_{g+1}, b_{g+1}') + (v_{g+1}, v_{g+1}'), \tag{3.3}$$

donde $(b_i, b_i'), (v_i, v_i') \in \mathbf{B}$, para todo $i = 1, 2, ..., g+1$.

Por definición de $\mathbf{B}$ existen $(a_1, a_1'), ..., (a_{g+1}, a_{g+1}'), (z_1, z_1'), ..., (z_{g+1}, z_{g+1}')$ que pertenecen a $\mathbf{A}$ tales que

$$a_i = \frac{m}{g_1}k_i + b_i,$$

$$a_i' = \frac{m}{g_1}k_i' + b_i',$$

$$z_i = \frac{m}{g_1}q_i + v_i,$$

$$z_i' = \frac{m}{g_1}q_i' + v_i',$$

para todo $i = 1, 2, ..., g+1$.

Reemplazando las igualdades anteriores en (3.3) se obtiene que las expresiones

$$\left(a_i - \frac{m}{g_1}k_{_i}, a_{_i}' - \frac{m}{g_1}k_{_i}'\right) + \left(z_i - \frac{m}{g_1}q_i, z_{_i}' - \frac{m}{g_1}q_{_i}'\right),$$

son iguales. Luego también las expresiones

$$(a_i - \frac{m}{g_1}k_i, a_i' - \frac{m}{g_1}k_i') + (z_i - \frac{m}{g_1}q_i, z_i' - \frac{m}{g_1}q_i'), \tag{3.4}$$

para $i = 1, 2, ..., g+1$ son iguales. Entre las sumas $(k_1, k_1') + (q_1, q_1')$, $(k_2, k_2') + (q_2, q_2')$, ..., $\left(k_{g+1}, k_{g+1}'\right) + \left(q_{g+1}, q_{g+1}'\right)$, ...,hay por lo menos dos que son congruentes módulo g_1. Sin pérdida de generalidad se puede suponer

$$(k_i, k_i') + (q_i, q_i') \equiv \left(k_j, k_j'\right) + \left(q_j, q_j'\right) (\acute{m}\acute{o}d\ g_1),$$

para $1 \leq i < j \leq g+1$.

Luego en (3.4)

$$(a_i, a'_i) + (z_i, z'_i) = \left(a_j, a'_j\right) + \left(z_j, z'_j\right) + \frac{m}{g_1}\left[(k_i, k'_i) + (q_i, q'_i) - \left(k_j, k'_j\right) - \left(q_j, q'_j\right)\right],$$

lo cual implica

$$(a_i, a'_i) + (z_i, z'_i) \equiv \left(a_j, a'_j\right) + \left(z_j, z'_j\right) (\text{mód } m),$$

De (3.4) y como $\mathbf{A}$ es un conjunto de Sidon módulo m entonces

$$\{(a_i, a'_i), (z_i, z'_i)\} = \{(a_j, a'_j), (z_j, z'_j)\},$$

y así por definición de $\mathbf{B}$ se tiene

$$\{(b_i, b'_i), (v_i, v'_i)\} = \{(b_j, b'_j), (v_j, v'_j)\},$$

luego en (3.3) hay por lo menos dos reprensentaciones que son la misma. Así $\mathbf{B}$ es un conjunto $B_2^+[g]$.

Similarmente se prueba que $\mathbf{B} \in B_2^-[g]$.■

3.3 CONSTRUCCIÓN DEPENDIENTE DE UNA DIMENSIÓN

De aquí en adelante mediante α se representará cualquiera de los símbolos $+, -, \pm$. En esta sección se demuestra que a partir de cualquier conjunto $B_2^\alpha[g]$ en dimensión uno es posible obtener un conjunto $B_2^\alpha[g]$ en dimensión dos con la misma cardinalidad.

Sean $A \subset \mathbb{Z}$ y $b \in \mathbb{Z}^+$, mediante $[A]_b$ se denota el conjunto obtenido de A representando cada uno de sus elementos en la base b. Es decir, si $a = qb + r$ denota la representación del entero a en la base b entonces $[a]_b = (q, r)$ y

$$[A]_b = \{[a]_b : a \in A\}.$$

Es claro que si $A \subseteq [0, b^2 - 1]$ entonces $[A]_b \subseteq [0, b-1] \times [0, b-1]$ y además, debido a la unicidad de la representación base b de un entero, $|[A]_b| = |A|$.

Ejemplo 3.2. Sea

$$A = \{1, 3, 7, 15, 21, 29, 33, 35\} \subseteq \left[0, 6^2 - 1\right],$$

entonces el conjunto $[A]_6$ asociado al conjunto A es

$$[A]_6 = \{(0,1), (0,3), (1,1), (2,3), (3,3), (4,5), (5,3), (5,5)\} \subseteq [0,5]^2.$$

Con estas observaciones se tiene el siguiente resultado.

Teorema 3.3. Si A es un conjunto $B_2^\alpha[g]$ contenido en el intervalo $[0, b^2 - 1]$, entonces $[A]_b$ es un conjunto $B_2^\alpha[g]$ contenido en el retículo $[0, b-1]^2$ con el mismo cardinal de A.

Demostración. Sólo resta demostrar que si $A \in B_2^\alpha[g]$ con $A \subset [0, b^2 - 1]$, $[A]_b \in B_2^\alpha[g]$, en dimensión dos. Únicamente se considera el caso en que α representa el símbolo $+$, puesto que los demás casos son similares.

Sean $g + 1$ representaciones de un elemento cualquiera $\mathbf{w}$ de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, como suma de dos elementos de $[A]_b$, como sigue

$$[a_1]_b + \left[a_1'\right]_b = ... = \left[a_{g+1}\right]_b + \left[a_{g+1}'\right]_b;$$

donde a_i, $a_i' \in A$,para todo i, $1 \leq i \leq g+1$. Utilizando la notación base b se tiene

$$(q_1, r_1) + \left(q_1', r_1'\right) = ... = (q_{g+1}, r_{g+1}) + (q_{g+1}', r_{g+1}'),$$

esto es

$$(q_1 + q_1', r_1 + r_1') = ... = (q_{g+1} + q_{g+1}', r_{g+1} + r_{g+1}'),$$

y así

$$q_1 + q_1' = ... = q_{g+1} + q_{g+1}',$$

$$r_1 + r_1' = ... = r_{g+1} + r_{g+1}',$$

por tanto

$$(q_1 + q_1')\, b + (r_1 + r_1') = ... = (q_{g+1} + q_{g+1}')b + (r_{g+1} + r_{g+1}'),$$

$$a_1 + a_1' = ... = a_{g+1} + a_{g+1}'$$

y como $A \in B_2^+[g]$ existen i, j con $1 \leq i, j \leq g+1$ tales que

$$\{a_i, a_i'\} = \{a_j, a_j'\}.$$

Por unicidad de la representación base b, esto implica

$$\{[a_i]_b\,, [a_i']_b\} = \left\{[a_j]_b\,, \left[a_j'\right]_b\right\},$$

es decir no es posible tener $g+1$ representaciones distintas de un $\mathbf{w} \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Esto finaliza la demostración. ■