

**TRANSPORTE CUÁNTICO EN BARRERAS AFECTADAS POR
CAMPOS EXTERNOS**

JULIÁN ANDRÉS ZÚÑIGA



**UNIVERSIDAD DEL CAUCA
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES, EXACTAS Y DE LA
EDUCACIÓN
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
POPAYÁN
2007**

**TRANSPORTE CUÁNTICO EN BARRERAS AFECTADAS POR
CAMPOS EXTERNOS**

JULIÁN ANDRÉS ZÚÑIGA

TRABAJO DE GRADO

**En la modalidad de trabajo de investigación presentado como requisito parcial para
optar al título de matemático.**

Director

SERVIO TÚLIO PÉREZ MERCHANCANO Ph.D

PROFESOR TITULAR DEL DEPARTAMENTO DE FÍSICA

**UNIVERSIDAD DEL CAUCA
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES, EXACTAS Y DE LA
EDUCACIÓN
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
POPAYÁN
2007**

NOTA DE ACEPTACIÓN

Director

Servio Túlio Pérez Merchancano Ph.D

Jurado

Sonia Gaona Jurado Ph.D

Jurado

Francisco Enríquez Belalcázar Ph.D

Fecha de sustentación: Popayán, 12 de marzo de 2007

¡AL QUE TOMA MI MANO Y GUIA MIS PASOS!

A mi abuelo Víctor Daniel

Por brindarme lo mejor y permitir con sus enseñanzas que este logro
hiciera parte de mi vida.

A mi mamá y a mi hermano

Por todo su apoyo

AGRADECIMIENTOS

A CLAUDIA PATRICIA IDROBO “lulín” mi compañera y amiga incondicional. Por apoyarme y acompañarme en todas mis dificultades y éxitos.

A mis amigos por todos los momentos compartidos, y por facilitarme en muchas ocasiones el camino para llegar hasta aquí.

Ximena, Andrés, Carlos y Richard

A, Lorena Silva y Pablo Salazar por su gran calidad humana.

A, Helmer Ruiz por su gran colaboración y amistad.

A los integrantes del grupo **SENUMA**, porque en la cotidianidad del trabajo se formó una gran amistad. En especial a la directora del grupo Luz Elena Bolívar Ph.D. quien me apoyó durante todo el desarrollo de este proceso.

A todos los profesores de los departamentos de Matemáticas y Física que en su momento me brindaron apoyo y comprensión. Pues al creer en mi, me dieron la oportunidad de llevar a cabo mis ideas.

Por su constante ayuda y colaboración:

Director de tesis: **Servio Túlio Pérez Merchancano Ph.D**

A los evaluadores de mi universidad que dedicaron su tiempo al análisis de este trabajo, docentes:

Sonia Gaona Jurado Ph.D

Departamento de Física

Francisco Enríquez Belalcázar Ph.D

Departamento de Matemáticas

LISTA DE SÍMBOLOS

m_*	Masa del electrón libre
q	Carga del electrón
\hbar	Constante de Planck
a_0	Radio de Bohr
L_2	Espacio de Hilbert
$k_i, i = 1, 2$	Vector de onda en dirección x
k_y	Vector de onda en dirección y
k_B	Longitud magnética
Ω	Frecuencia ciclotrónica
ε	Campo eléctrico
B	Campo magnético
T	Coefficiente de transmisión
R	Coefficiente de reflexión
ω	Wronskiano
\rightarrow	Cambio sólo de izquierda a derecha
\leftrightarrow	Cambio en ambos sentido
∇	Operador Nabla o de Hamilton

CONTENIDO

	Pág
INTRODUCCIÓN	18
1. FORMALISMO FÍSICO-MATEMÁTICO DE LA ECUACIÓN DE SCHRÖDINGER	20
1.1 ARGUMENTOS QUE CONDUCEN A LA ECUACIÓN DE SCHRÖDINGER	21
1.2 PROPIEDADES REQUERIDAS PARA LAS FUNCIONES DE ONDA QUE SON SOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN DE SCHRÖDINGER.	25
1.3 INTERPRETACIÓN DE LA FUNCIÓN DE ONDA ASOCIADA A LA PARTÍCULA.	26
1.3.1 Normalización de la función de onda.	28
2. FORMALISMO FÍSICO-MATEMÁTICO DEL TRANSPORTE CUÁNTICO	30
2.1 PENETRACIÓN A TRAVÉS DE UNA BARRERA DE POTENCIAL	31
2.2 COEFICIENTES DE TRANSMISIÓN Y REFLEXIÓN	32
2.3 MÉTODO DE APROXIMACIÓN WKB.....	36
2.3.1 Teorema WKB.	37
2.3.2. Método WKB aplicado para el cálculo del coeficiente de transmisión para potenciales continuos.	38
3. BARRERA DE POTENCIAL FINITA RECTANGULAR SIN PRESENCIA DE CAMPOS EXTERNOS.	40
3.1 SOLUCIÓN AL SISTEMA DE ECUACIONES DE SCHRÖDINGER	40
3.2 COEFICIENTES DE TRANSMISIÓN Y REFLEXIÓN	43

3.2.1 Condiciones para que la función ψ sea continua	43
3.3 APROXIMACIÓN DEL COEFICIENTE DE TRANSMISIÓN UTILIZANDO EL MÉTODO WKB.....	47
3.4 TUNELAMIENTO DE UNA PARTÍCULA	50
3.5 DENSIDAD DE PROBABILIDAD	53
3.6 CORRIENTE DE PROBABILIDAD.....	54
4. BARRERA DE POTENCIAL FINITA RECTANGULAR EN PRESENCIA DE CAMPO ELÉCTRICO UNIFORME.....	57
4.1 SOLUCIÓN AL SISTEMA DE ECUACIONES DE SCHRÖDINGER	57
4.2 COEFICIENTES DE TRANSMISIÓN Y REFLEXIÓN	62
4.2.1 Condiciones para que la función ψ_ε sea continua	62
4.2.2 Condición que deben cumplir los coeficientes de transmisión y reflexión.	67
4.3 APROXIMACIÓN DEL COEFICIENTE DE TRANSMISIÓN UTILIZANDO EL MÉTODO WKB.....	68
4.4 TUNELAMIENTO DE LA PARTÍCULA.....	71
4.5 DENSIDAD DE PROBABILIDAD	74
4.6 CORRIENTE DE PROBABILIDAD.....	76
5. BARRERA DE POTENCIAL FINITA RECTANGULAR EN PRESENCIA DE CAMPO MAGNÉTICO UNIFORME	79
5.1 SOLUCIÓN AL SISTEMA DE ECUACIONES DE SCHRÖDINGER	79
5.2 COEFICIENTES DE TRANSMISIÓN Y REFLEXIÓN	86
5.2.1 Condiciones para que la función ψ_B sea continua.....	86
5.2.2 Condición que deben cumplir los coeficientes de transmisión y reflexión.	91
5.3 APROXIMACIÓN DEL COEFICIENTE DE TRANSMISIÓN UTILIZANDO EL MÉTODO WKB.....	94
5.4 TUNELAMIENTO DE LA PARTÍCULA.....	97
5.5 DENSIDAD DE PROBABILIDAD	100
5.6 CORRIENTE DE PROBABILIDAD.....	102

6. ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS	104
6.1 COEFICIENTE DE TRANSMISIÓN	104
6.1.1 Afectado por campo eléctrico uniforme.....	105
6.1.2 Afectados por campo magnético uniforme.....	107
6.2 COEFICIENTE DE TRANSMISIÓN AFECTADO POR CAMPOS EXTERNOS	110
6.3 TUNELAMIENTO DE UNA PARTÍCULA AFECTADA POR CAMPOS EXTERNOS	112
6.4 DENSIDAD DE PROBABILIDAD	113
6.4.1 Afectada por campo eléctrico uniforme.....	114
6.4.2 Afectada por campo magnético uniforme.....	115
6.5 DENSIDAD DE PROBABILIDAD AFECTADA POR CAMPOS EXTERNOS.....	116
6.6 CORRIENTE DE PROBABILIDAD.....	117
6.6.1 Afectada por campo eléctrico uniforme.....	117
6.6.2 Afectada por campo magnético uniforme.....	119
6.7 CORRIENTE DE PROBABILIDAD AFECTADA POR CAMPOS EXTERNOS	120
7. CONCLUSIONES	122
8. BIBLIOGRAFÍA	125

LISTA DE FIGURAS

	Pág
Figura 2.1 Representación de la transición de las bandas de conducción en la heteroestructura de AIs entre GaAs.....	30
Figura 2.2 Modelo de barreras de potencial rectangular Kronig–Penny.....	31
Figura 2.3 Barrera de potencial de Hylleraas con $V(x) = v_0 \text{Cosh}^{-2}\left(\frac{x}{a}\right)$	38
Figura 3.1 Barrera de potencial rectangular.....	41
Figura 3.2 Coeficientes de transmisión y reflexión en función de la energía aplicada a la partícula.....	46
Figura 3.3 Coeficientes de transmisión y reflexión en función del ancho de la barrera de potencial en radios de Bohr.....	47
Figura 3.4 Comparación del coeficiente de transmisión con el método WKB en función de la energía aplicada a la partícula.....	49
Figura 3.5 Comparación del coeficientes de transmisión con el método WKB en función del ancho de la barrera de potencial.....	49
Figura 3.6 Representación esquemática del tunelamiento para una barrera de potencial	52
Figura 3.7 Densidad de probabilidad para una barrera de potencial.....	54
Figura 3.8 Corriente de probabilidad en función de la energía aplicada a la partícula.....	56
Figura 4.1 Barrera de potencial rectangular afectada por campo eléctrico uniforme.....	59

Figura 4.2 Coeficientes de transmisión y reflexión afectados por campo eléctrico uniforme, en función de la energía aplicada a la partícula.	65
Figura 4.3 Coeficientes de transmisión y reflexión afectados por campo eléctrico uniforme, en función del ancho de la barrera de potencial	66
Figura 4.4 Coeficientes de transmisión y reflexión en función del campo eléctrico.....	67
Figura 4.5 Comparación del coeficiente de transmisión en presencia de campo eléctrico uniforme con el método WKB en función de la energía aplicada a la partícula.....	70
Figura 4.6 Comparación del coeficiente de transmisión en presencia de campo eléctrico uniforme con el método WKB en función del ancho de la barrera de potencial	71
Figura 4.7 Representación esquemática del tunelamiento para una barrera de potencial afectada por campo eléctrico uniforme.....	74
Figura 4.8 Densidad de probabilidad para una barrera de potencial afectada por campo eléctrico uniforme.....	76
Figura 4.9 Corriente de probabilidad afectada por campo eléctrico uniforme en función de la energía aplicada a la partícula.....	77
Figura 5.1 Movimiento de una partícula en presencia de un campo magnético uniforme de acuerdo con su carga.....	80
Figura 5.2 Barrera de potencial rectangular afectada por campo magnético uniforme	85
Figura 5.3 Coeficientes de transmisión y reflexión afectados por campo magnético uniforme, en función de la energía aplicada a la partícula.....	89
Figura 5.4 Coeficientes de transmisión y reflexión afectados por campo magnético uniforme, en función del ancho de la barrera de potencial. Normalizada en radio Bohr ...	90
Figura 5.5 Coeficientes de transmisión en función del campo magnético uniforme. (Medido en teslas)	91

Figura 5.6 Comparación del coeficiente de transmisión en presencia de campo magnético uniforme con el método WKB en función de la energía aplicada a la partícula.....	96
Figura 5.7 Comparación del coeficiente de transmisión en presencia de campo magnético uniforme con el método WKB en función del ancho de la barrera de potencial. Normalizada en radio de Bohr.....	97
Figura 5.8 Representación esquemática del tunelamiento para una barrera de potencial afectada por campo magnético uniforme	100
Figura 5.9 Densidad de probabilidad para una barrera de potencial afectada por campo magnético uniforme. Normalizada en radio de Bohr.....	101
Figura 5.10 Corriente de probabilidad afectada por campo magnético uniforme en función de la energía aplicada a la partícula.....	103
Figura 6.1 Coeficiente de transmisión para varios campos eléctricos en función de la energía aplicada a la partícula	105
Figura 6.2 Coeficiente de transmisión para varias energías aplicadas a la partícula en función del campo eléctrico uniforme	106
Figura 6.3 Coeficiente de transmisión para varios campos eléctricos en función del ancho de la barrera	106
Figura 6.4 Coeficiente de transmisión para varias energías aplicadas a la partícula en función del ancho de la barrera y campo eléctrico fijo.....	107
Figura 6.5 Coeficiente de transmisión para varios campos magnéticos en función de la energía aplicada a la partícula	108
Figura 6.6 Coeficiente de transmisión para varias energías aplicadas a la partícula en función del campo magnético uniforme.....	109
Figura 6.7 Coeficiente de transmisión para varios campos magnéticos en función del ancho de la barrera.....	109

Figura 6.8 Coeficiente de transmisión para varias energías aplicadas a la partícula en función del ancho de la barrera y campo magnético fijo.....	110
Figura 6.9 Coeficiente de transmisión en función de la energía aplicada a la partícula sin y en presencia de campos externos.....	111
Figura 6.10 Coeficiente de transmisión en función del ancho de la barrera sin y en presencia de campos externos	111
Figura 6.11 Tunelamiento de una partícula sin y en presencia de campos externos.....	113
Figura 6.12 Densidad de probabilidad en función de la posición de la partícula para varias energías aplicadas a ella. Con campo eléctrico fijo, normalizada en radio de Bohr.....	114
Figura 6.13 Densidad de probabilidad en función de la posición de la partícula para varias energías aplicadas a ella. Normalizada en radio de Bohr.....	115
Figura 6.14 Densidad de probabilidad en función de la posición de la partícula para varias energías aplicadas. Con campo magnético fijo, normalizada en radio de Bohr.....	115
Figura 6.15 Densidad de probabilidad en función de la posición de la partícula para varias energías aplicadas. Normalizada en radio de Bohr.	116
Figura 6.16 Densidad de probabilidad en función de la posición de la partícula, sin y en presencia de campos externos, normalizada en radio de Bohr.	117
Figura 6.17 Corriente de probabilidad en función del campo eléctrico para varias energías aplicadas a la partícula	118
Figura 6.18 Corriente de probabilidad en función de la energía aplicada a la partícula para varios campos eléctricos.....	119
Figura 6.19 Corriente de probabilidad en función del campo magnético para varias energías aplicadas a la partícula.....	119
Figura 6.20 Corriente de probabilidad en función de la energía aplicada a la partícula para varios campos magnéticos.....	120

Figura 6.21 Corriente de probabilidad en función de la energía aplicada a la partícula, sin y en presencia de campos externos.....	121
Figura B.1 Puntos de retroceso clásico.....	196
Figura C.1 Funciones de Airy y sus derivadas	207
Figura C.2 Funciones de Airy y sus derivadas con argumentos negativos	209
Figura D.1 Funciones hipergeométricas confluentes y sus derivadas	218
Figura D.2 Funciones hipergeométricas confluentes y sus derivadas con argumentos cuadráticos	219

LISTA DE ANEXOS

	Pág
ANEXO A: DESCRIPCIÓN DE LA BARRERA DE POTENCIAL FINITA RECTANGULAR SIN PRESENCIA DE CAMPOS EXTERNOS.....	129
ANEXO B: LÍMITES QUE INVOLUCRAN LAS FUNCIONES DE AIRY Y EL CAMPO ELÉCTRICO UNIFORME \mathcal{E}	135
ANEXO C: DESCRIPCIÓN DE LA BARRERA FINITA RECTANGULAR EN PRESENCIA DE CAMPO ELÉCTRICO UNIFORME.....	141
ANEXO D: LÍMITES QUE INVOLUCRAN LAS FUNCIONES HIPERGEOMÉTRICAS CONFLUENTES Y EL CAMPO MAGNÉTICO B.....	152
ANEXO E: DESCRIPCIÓN DE LA BARRERA DE POTENCIAL FINITA RECTANGULAR EN PRESENCIA DE CAMPO MAGNÉTICO UNIFORME.	167

LISTA DE APENDICES

	Pág
APENDICE A: DESCRIPCIÓN FÍSICO-MATEMÁTICA DE LA ECUACIÓN DE SCHRÖDINGER.....	184
APENDICE B: DESCRIPCIÓN DEL FORMALISMO FÍSICO MATEMÁTICO DEL TRANSPORTE CUÁNTICO.....	191
APÉNDICE C: FUNCIONES ESPECIALES PARA TRABAJAR CON CAMPOS ELÉCTRICOS UNIFORMES	202
APÉNDICE D: FUNCIONES ESPECIALES PARA TRABAJAR CON CAMPOS MAGNÉTICOS UNIFORMES.	213

RESUMEN

En la actualidad la física del estado sólido y en particular la que tiene que ver con nanoestructuras semiconductoras, es la base para el desarrollo de dispositivos cuánticos tales como diodos, transistores, leds, etc. Dichos mecanismos, a diferencia de los fabricados con materiales semiconductores en bloque, presentan propiedades físicas exóticas que los hacen excelentes candidatos para el uso diario en la electrónica. Propiedades físicas, como la densidad e intensidad de corriente entre otras, que tienen su explicación en gran parte en la teoría del transporte cuántico. El propósito de este trabajo de investigación es mostrar el comportamiento de los coeficientes de transmisión y reflexión, que son parte esencial para el análisis de las anteriores propiedades, en una barrera de potencial rectangular sin y en presencia de campos externos, pues dicha barrera es el elemento físico fundamental para el diseño y producción de nanodispositivos.

En este trabajo se realizaron cálculos físicos y matemáticos de transporte cuántico en una barrera de potencial rectangular unidimensional sin y en presencia de campos externos. En primera instancia se modeló cada una de las situaciones mediante la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo, la cual se transformó en la ecuación diferencial que describe un movimiento armónico simple en el caso de la no presencia de campos externos, mientras que al considerar un campo eléctrico y magnético uniforme de manera independiente que afecta la barrera de potencial se presentan las ecuaciones diferenciales de Airy y la Hipergeométrica Confluente, respectivamente. Las soluciones a estas ecuaciones son dadas a través de funciones especiales tales como las funciones de Airy y Kummer.

Una vez estructurado el formalismo matemático en cada uno de los casos, se prosigue con el estudio del transporte cuántico en términos de los coeficientes de transmisión y reflexión para cada uno de los casos antes mencionados, mostrando resultados interesantes a medida que los campos externos varían. Además, dichos coeficientes se comparan con el método de aproximación WKB con el fin de ver la precisión del método teniendo en cuenta que la energía suministrada a la partícula no sea superior al orden de la altura de la barrera. En este trabajo también se realizan análisis de los efectos de los campos externos en el tunelamiento cuántico, la densidad y la corriente de probabilidad, las cuales sugieren una interpretación física de las funciones de onda obtenidas de la ecuación de Schrödinger que modela cada problema.

INTRODUCCIÓN

La invención del transistor al finalizar la década de los años 40 y el desarrollo de la tecnología de circuitos integrados en la década de los 60, del siglo XX, permitieron que los grandes computadores fuesen reducidos de tamaño hasta llegar a las calculadoras actuales, más rápidas y versátiles que se conocen. Esta misma tecnología permitió compactar radios, televisores y muchos otros aparatos electrónicos que eran conformados a base de válvulas. Tal miniaturización se debió a las estrategias de reducción de costos y a la eficiencia de memorias de acceso rápido donde la información es procesada a través de millares de transistores conectados en “chips” diminutos.

Esta nueva implementación ha sido impulsada fundamentalmente por la investigación en ciencias naturales básicas como Física, Química y Biología, basándose en modelos, teorías y experiencias que tienen como soporte esencial el formalismo matemático y las ciencias computacionales. Lo anterior ha estimulado a una amplia cantidad de científicos de diferentes áreas al estudio de heteroestructuras semiconductoras, parte esencial de dispositivos electrónicos, a nivel teórico y experimental.

Con base en lo anterior, actualmente se realizan estudios teóricos sobre el fenómeno del tunelamiento cuántico en presencia de campos eléctricos y magnéticos, en algunas heteroestructuras ternarias como las conformadas por GaAs-Al_xGa_{1-x}As-GaAs ó GaAs-AlAs-GaAs, donde las bandas de conducción de estos compuestos pueden ser modeladas a través de barreras de potencial afectadas por dichos campos. Aquí, en particular se analizó dicho sistema en presencia de campos eléctricos y magnéticos de forma independiente. Además, se

hizo énfasis en el estudio del transporte cuántico a través del cálculo de los coeficientes de transmisión y reflexión, los cuales suministraron información acerca del porcentaje probable de electrones con energía E que pueden superar o no, una barrera de potencial finita de altura U_0 . Estos coeficientes son un indicativo de la cantidad de información que puede ser transmitida (coeficiente de transmisión) o retenida, (coeficiente de reflexión) durante un proceso de transmisión de información por un dispositivo electrónico.

El presente trabajo está dividido en siete capítulos. En los dos primeros se hace una descripción físico-matemática de la ecuación de Schrödinger y del transporte cuántico respectivamente. También se presenta una introducción de los primeros principios sobre fenómenos de transporte. En el tercero, cuarto y quinto capítulos se hace un estudio de transporte cuántico aplicado a una barrera de potencial sin y en presencia de campos eléctrico y magnético cuyos resultados muestran los efectos que producen tales campos en los coeficientes de transmisión y reflexión, en la densidad de probabilidad de encontrar la partícula y en la corriente de probabilidad. Estas características permiten determinar cómo se presenta el efecto túnel en cada uno de los casos mencionados. En el capítulo seis se detallan los resultados teóricos de las modelaciones que caracterizan el estudio del transporte cuántico. En el último capítulo se establecen las conclusiones generales del trabajo. Cada capítulo está soportado por un anexo, en el cual se detallan ciertos aspectos matemáticos propios del capítulo, lo que facilitaría al lector la comprensión del trabajo sin recurrir obligatoriamente a otras fuentes.

1. FORMALISMO FÍSICO-MATEMÁTICO DE LA ECUACIÓN DE SCHRÖDINGER

La teoría de Schrödinger se fundamenta en la aplicación de la mecánica ondulatoria basada en los trabajos de L. de Broglie, sobre las ondas de materia. Esta teoría dió origen al nacimiento de la mecánica cuántica “moderna”, dejando en claro que las partículas microscópicas no obedecen a las leyes newtonianas como ocurre para el caso de partículas macroscópicas. Para poder seguir desarrollando el trabajo que Schrödinger planteó, es importante entender más acerca del fundamento dado por L. de Broglie, quien formuló la hipótesis de que la dualidad onda-corpúsculo es una propiedad general de los objetos microscópicos y que la materia deberá presentar como la luz, un doble aspecto: ondulatorio y corpuscular. En otras palabras a un haz de partículas o a una partícula sola se le puede asociar una onda.

Schrödinger generalizó esta noción de ondas de materia y estableció la ecuación de propagación de la función de onda que representa un sistema cuántico dado. Esta generalización incluye la teoría newtoniana como caso especial en el límite macroscópico.

La ecuación de Schrödinger constituye el elemento esencial de la mecánica ondulatoria, la cual se construye por una regla de correspondencia a partir de la función hamiltoniana para el sistema clásico de energías en análisis. En últimas el problema se reduce a resolver una ecuación diferencial cuya solución debe tener ciertas características que más adelante se comentarán y que permitirán justificar aún más el hecho de que la función de ondas está asociada a la partícula.

Por último, es importante resaltar que casi simultáneamente a la teoría de Schrödinger apareció una teoría fundamentada en matrices que ayudó de igual manera al desarrollo de la mecánica cuántica. Esta teoría planteada por Heisenberg, Born y Jordan se basa en manejar cantidades observables o dinámicas como la posición, el momento y la energía, representada por matrices. Los aspectos cuánticos se introducen en la teoría por medio del principio de incertidumbre y se reflejan en las condiciones de conmutación sobre las matrices. Schrödinger demostró que estas dos teorías son equivalentes ^[1].

1.1 ARGUMENTOS QUE CONDUCEN A LA ECUACIÓN DE SCHRÖDINGER

El primer problema que se presenta no es cómo resolver la ecuación diferencial, sino cómo encontrar la ecuación. En este momento se está en la posición de Newton antes de encontrar la ecuación básica de la mecánica clásica o de Maxwell cuando buscaba las ecuaciones diferenciales que forman la base del electromagnetismo clásico. Es muy frecuente en física que la combinación de ecuaciones dé nacimiento a otras que explican fenómenos de la naturaleza de forma muy concisa. Sin embargo, la ecuación de onda de la mecánica cuántica no se deriva de ninguna de las ecuaciones de la física clásica. Esto no indica que no se pueda hacer uso de algunos postulados, como es el caso del planteado por L. de Broglie y Einstein (ver apéndice A.1), los cuales asocian la longitud de onda λ de la función de onda con el impulso lineal p de la partícula asociada y la frecuencia de la función de onda \mathcal{G} con la energía total E de la partícula, respectivamente, con la salvedad de que p y E sean constantes. Así pues, la ecuación de onda de la mecánica cuántica podrá obtenerse de estos postulados, cuya justificación no es que haya sido deducida por completo a partir de la

información experimental obtenida, sino que predice correctamente los resultados que pueden verificarse experimentalmente.

A continuación se enumeran cuatro suposiciones razonables concernientes a las propiedades deseables de la ecuación de onda mecánico cuántica.

1. Deberá responder a los postulados de Broglie – Einstein

$$\lambda = \frac{h}{p} \quad (1.1) \quad , \quad \mathcal{E} = \frac{E}{h} . \quad (1.2)$$

2. Deberá responder a la ecuación

$$E = \frac{p^2}{2m_*} + V \quad , \quad (1.3)$$

que relaciona la energía total E de una partícula de masa m_* con su energía cinética $\frac{p^2}{2m_*}$ y su energía potencial V .

3. La función de onda ψ deberá ser lineal, pues este requisito asegura que se podrán sumar las funciones de onda para producir las interferencias constructivas y destructivas de las ondas. Esta característica fue verificada experimentalmente por Davisson-Germen, quienes mostraron que los patrones de difracción también se encuentran en el movimiento de electrones y otras partículas ^[2]

4. La energía potencial V depende de la posición y del tiempo. Para el caso especial cuando $V(x,t) = V_0$ -constante, que es justamente el caso de una partícula libre, se puede demostrar que la estructura matemática

$$-\frac{\hbar^2}{2m_*} \frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial x^2} + V_0 \psi(x,t) = i\hbar \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial t} \quad (1.4)$$

satisface las cuatro suposiciones anteriores (ver apéndice A.2), donde la función de onda $\psi(x,t)$ debe de ser dos veces diferenciable respecto a la posición y una vez respecto al tiempo.

Esta ecuación diferencial fue obtenida por primera vez en 1926 por Edwin Schrödinger y por ello se le conoce como ecuación de Schrödinger.

Para el caso en que la energía potencial depende de la posición y/o el tiempo, se postula que la ecuación mecánico cuántica debe tener una estructura similar a 1.4. Es decir:

$$-\frac{\hbar^2}{2m_*} \frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial x^2} + V(x,t)\psi(x,t) = i\hbar \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial t}. \quad (1.5)$$

La validez de este postulado que muestra la ecuación de Schrödinger descrita en forma general se realiza mediante la comparación de sus implicaciones con la experimentación ^[3].

Cabe indicar que no es posible que la ecuación de Schrödinger sea válida para partículas que se mueven a velocidades relativistas, ya que en la deducción de la ecuación 1.4 se utiliza la condición de la energía clásica. Más adelante en 1928, P. Dirac comprobó que la ecuación 1.4 era consistente en el límite clásico. Es decir, Dirac desarrolló la teoría relativista de la mecánica cuántica utilizando esencialmente los mismos postulados de la teoría de Schrödinger, excepto que 1.3 lo sustituyó por su análogo relativista

$$E = c\sqrt{p^2 + (m_*c)^2} + V \quad (1.6)$$

Donde c representa la rapidez de la luz.

La ecuación de Schrödinger se puede expresar en forma tridimensional, pero como el objetivo de este trabajo no es manipular esta ecuación, solamente se hará únicamente mención de ella. En el contexto de este trabajo, se implementará la ecuación de Schrödinger unidimensional independiente del tiempo y no relativista

$$-\frac{\hbar^2}{2m_*} \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + V(x)\psi(x) = E\psi(x) \quad (1.7)$$

Los motivos que llevan a tomar esta decisión son estrictamente la disminución del grado de complejidad que surge al trabajar con los potenciales generados por los campos eléctrico y magnético. Claro está que si se supone que los potenciales generados por estos campos son estáticos respecto al tiempo, bastaría sólo multiplicar la solución obtenida de la ecuación de Schrödinger debida a cada campo por el factor $e^{-i\frac{E}{\hbar}t}$ que es el encargado de controlar el tiempo en la función de onda $\psi(x,t)$, y así poder tener en cuenta el tiempo para el comportamiento de la partícula.

Para poder entender de dónde se obtiene el factor $e^{-i\frac{E}{\hbar}t}$ es importante estudiar un poco la transformación de la ecuación de Schrödinger 1.5 a la ecuación autónoma 1.7, tal como se aprecia en el apéndice A.3.

1.2 PROPIEDADES REQUERIDAS PARA LAS FUNCIONES DE ONDA QUE SON SOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN DE SCHRÖDINGER.

Hasta el momento no se ha hecho mención sobre la plataforma matemática en la cual se desarrolla la mecánica cuántica, ya que no se ha manipulado la función de onda ψ ; sólo se ha establecido que debe ser lineal y diferenciable de la forma anteriormente mencionada, para ser consistente con la ecuación de Schrödinger. A parte de tener esta característica también tiene que pertenecer al espacio de Sobolev¹ $w_2^1([a,b])$ el cual es un subconjunto del espacio de Hilbert (de dimensión infinita), lo que implica que debe ser una función cuadrado integrable, hecho necesario para desarrollar la teoría de la mecánica cuántica [4].

Por lo tanto, Las condiciones bajo las cuales la función de onda ψ asociada a la partícula tiene sentido matemático corresponden a que $\psi \in C^1([a,b])$ es decir, ψ es continuamente diferenciable, además tanto ψ como ψ' deben de ser finitas.

Dado que la ecuación de Schrödinger es de segundo grado, y de ψ se exige solamente la primera derivada, entonces es de esperarse que las soluciones a la ecuación de Schrödinger que en este trabajo se estudian, son soluciones generalizadas (también llamadas distribuciones). Es de anotar que toda solución clásica es generalizada (el reciproco es falso). Por ello, no se descarta el hecho de que ciertas series, que definen las funciones especiales de los apéndices C y D, puedan sumarse y por lo tanto expresarse a través de funciones elementales. Habitualmente, las soluciones generalizadas que nos ocupa, pertenecen a la clase $w_2^1([a,b]) \subset L_2([a,b])$.

¹ Este tema puede ser leído en el texto “Sobolev spaces on Domains” de Burenkov V.I., editorial Taubner. 1998

Cabe resaltar, que la función onda asociada a la partícula ψ al ser cuadrado integrable admite aplicar la transformada de Fourier. Dicha transformada permite el cambio del espacio de posición al espacio de momentum (o espacio de Fourier) como se conoce en la mecánica cuántica ^[5]. En este último espacio es posible en muchas ocasiones resolver dificultades teóricas como experimentales, las cuales se presentan en el espacio de posición; puesto que la cantidad observable que se manipula en el espacio de momentum corresponde al vector de onda.

Que la función de onda ψ pertenezca al espacio de Hilbert también implica situaciones físicas que permitirán más adelante ayudar en el cálculo de los coeficientes de transmisión y reflexión (sección 3.2, 4.2 y 5.2), conceptos que serán explicados en la siguiente sección.

1.3 INTERPRETACIÓN DE LA FUNCIÓN DE ONDA ASOCIADA A LA PARTÍCULA.

La ecuación de Schrödinger permite calcular en principio un parámetro del sistema, su energía. Es decir los valores propios de la energía (desde el punto de vista del algebra lineal), lo que conlleva a indicar que el sistema en cuestión solo puede existir en ciertos estados de energía (hecho que no se presenta cuando se estudia el comportamiento de una partícula a través de una barrera de potencial, a menos que ella pase por encima de la barrera).

Sin embargo, continúan sin respuesta dos aspectos del problema. El primero, se refiere al significado físico de la función de onda: es conveniente saber cómo se relaciona la función de onda con las propiedades del sistema. El segundo aspecto se refiere a cómo se puede utilizar la función de onda para predecir propiedades del sistema distintas de sus estados de energía posibles.

La interpretación física actual de la función de onda no la dio Schrödinger, sino M. Born y E. Jordan poco después de la aparición del trabajo original de Schrödinger. El trabajo de ellos consistió en proponer a manera de postulado que “si en un instante t se realiza una medición para localizar a la partícula asociada con la función de onda (compleja conjugada) $\psi^*(x,t)$ entonces, la probabilidad $P(x,t)dx$ de encontrar la partícula en una coordenada entre x y $x+dx$ es igual a $\psi^*(x,t)\psi(x,t)dx$ ”^[6].

Analizando un poco más este postulado se puede afirmar que la conexión básica entre las propiedades de la función de onda $\psi(x,t)$ y el comportamiento de la partícula asociada está expresada en términos de la densidad de probabilidad $\rho(x,t)$. Esta cantidad especifica la probabilidad, por unidad de longitud en el eje x , de encontrar a la partícula en la vecindad de la coordenada x en el tiempo t^2 . En consecuencia

$$\rho(x,t) = |\psi(x,t)|^2. \quad (1.8)$$

Una implicación que se desprende de estos postulados se refiere a que es más probable encontrar la partícula en los sitios en el que la función de onda tenga una amplitud apreciable, puesto que $\rho(x,t)$ tendrá un valor estimable donde $\psi(x,t)$ tenga un valor considerable. Todo esto es debido a que la partícula esta conectada con la propagación de la función de onda asociada. Así pues, con la interpretación correcta de la función dada se resuelve también el segundo problema de los dos mencionados.

² Esta interpretación es tomada del texto “Física Cuántica Átomos, Moléculas, Sólidos, Núcleos y Partículas” de Eisberg R, editorial Limusa. S. A. 1999 p. 170.

1.3.1 Normalización de la función de onda. De acuerdo con la interpretación que se le da a la función de onda surge una restricción bastante importante acerca de que la probabilidad de encontrar la partícula en algún lugar del espacio (o en el eje x para el caso unidimensional) debe ser igual a uno. Lo que se traduce en

$$\int_{-\infty}^{\infty} \rho(x,t) dx = \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x,t)|^2 dx = 1. \quad (1.9)$$

Esta condición probabilística que se impone es posible gracias a que la función de onda $\psi(x,t)$ es cuadrado integrable, es decir que la integral 1.9 exista y es finita. Esto último puede llevar a que la integral en mención sea igual a $N^2 \neq 1$, pero siempre es posible acondicionar la función de onda para que se cumpla 1.9, puesto que la ecuación de Schrödinger es lineal y homogénea al igual que ψ permitiendo entonces multiplicar dicha solución por (N^{-1}) obteniéndose así lo deseado. Cabe explicar que si $N = 0$, la partícula no se ubica en ningún lugar del espacio y por lo tanto no tendría sentido físico estudiar este caso.

En el caso en que la función de onda ψ este conformada por ondas estacionarias como el que se presenta en el estudio de los problemas que se tratan en este trabajo, aparecen dificultades en la normalización de dicha función de onda, el cual se supera suprimiendo la función de onda fuera de una región grande, aunque finita, definida por $-\frac{L}{2} \leq x \leq \frac{L}{2}$. Esto es, el valor de la función dentro de este intervalo esta dado por la solución en sí, a la ecuación de Schrödinger generada de acuerdo al campo externo aplicado, mientras que por fuera del intervalo es igual a cero. Esta técnica es equivalente a la normalización en una caja ^[7]

Por último, al considerar lo dicho al final de la sección 2.2 se puede probar que la normalización se conserva en el espacio de momentum, en donde la interpretación se transforma en que la probabilidad de que, en una medición se encuentre que la

partícula tiene un vector de onda entre k y $k+dk$ está dada por $|g(k)|^2 dk$, en donde $g(k)$ es la transformada de Fourier de la función de onda $\psi(x,t)$.

2. FORMALISMO FÍSICO-MATEMÁTICO DEL TRANSPORTE CUÁNTICO

Los grandes avances tecnológicos que se han venido presentando desde la introducción del circuito integrado en 1950 en los sistemas electrónicos, han demostrado que el estudio del transporte de electrones se fundamenta en sistemas de baja dimensionalidad como son las heteroestructuras semiconductoras, cuyas composiciones pueden ser manipuladas a escalas nanométricas ^[8]. De ahí que los análisis teóricos se concentran a nivel subatómico, por lo tanto es necesario crear modelos que ayuden parcial o totalmente a predecir cómo ocurre el transporte cuántico cuando se manipulan diversos materiales semiconductores. Uno de estos modelos, la barrera de potencial, se presenta por ejemplo en el estudio de las bandas de conducción en el compuesto de AlAs envuelto en GaAs (figura 2.1) ^[9]. Este modelo no sólo es usado en heteroestructuras, pues su aplicación apareció para la explicación de la emisión nuclear de partículas alfa ^[10,11].

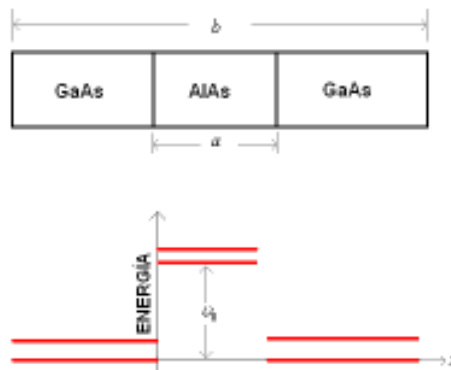


Figura 2.1 Representación de la transición de las bandas de conducción en la heteroestructura de AlAs entre GaAs.

En esta figura se muestran los dos niveles más bajos de la banda de conducción de cada compuesto.

Es importante destacar además, que el uso de las barreras de potencial han ayudado a introducir el concepto de bandas de energía en los metales, puesto que ellos están conformados por estructuras cristalinas caracterizadas por tener un potencial periódico (figura 2.2), consecuencia de la gran cantidad de electrones libres que contienen los metales. El modelo que ayuda en el análisis de lo anteriormente mencionado se conoce como Modelo Kronig–Penny ^[12,13].

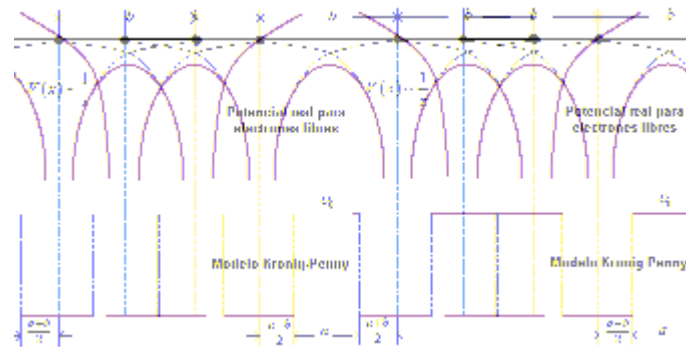


Figura 2.2 Modelo de barreras de potencial rectangular Kronig–Penny.

2.1 PENETRACIÓN A TRAVÉS DE UNA BARRERA DE POTENCIAL.

Uno de los efectos más sorprendentes descrito por la mecánica cuántica es la transmisión de partículas incidentes a través de una barrera de potencial cuya altura es mayor que la energía de la partícula. Clásicamente si la partícula no puede superar la barrera, se reflejaría. Este hecho no se presenta en los sistemas mecánico–cuánticos, puesto que una fracción de las partículas incidentes logra ser transmitidas, tal como lo demostró Gamow, Gurney y Candon en 1928 para explicar la desintegración radioactiva.

El pasar la partícula a través de la barrera y no por encima de ella, desde el punto de vista de la energía (y desde luego en términos espaciales) se le conoce como

el efecto túnel. El conocer que es posible que una partícula puede llegar a penetrar una barrera aparentemente impenetrable generó la necesidad de desarrollar conceptos tales como corriente de probabilidad, que a su vez desencadenó la posibilidad de poder hablar del coeficiente de transmisión y reflexión, términos que muestran la capacidad de tunelamiento de la partícula según la energía suministrada.

A continuación se presentará una teoría simple sobre corriente de probabilidad y coeficientes de transmisión y reflexión.

2.2 COEFICIENTES DE TRANSMISIÓN Y REFLEXIÓN

Antes de poder explicar por qué son importantes estos coeficientes es necesario hablar de la corriente de probabilidad, conocida también como flujo de probabilidad, el cual da la probabilidad por segundo de encontrar una partícula cruzando algún punto de referencia en una dirección particular, si se está trabajando en un caso unidimensional, ya que si se trata de tres dimensiones, el flujo de probabilidad se convierte en un vector con unidades, por ejemplo de probabilidad por centímetro cuadrado y por segundo, teniendo en cuenta que la probabilidad carece de dimensiones ^[14,15].

En caso general, para partículas no necesariamente libres, la corriente de probabilidad, j quedará definida por la expresión:

$$j(r, t) = -\frac{\hbar}{2m_*} [\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*] \cdot i, \quad (2.1)$$

donde el símbolo ∇ representa el operador Nabla.

Debido a que en este trabajo se desarrollarán los análisis de manera unidimensional e independiente del tiempo, la expresión (2.1) se reduce a

$$j(x) = -\frac{\hbar}{2m_*} \left[\psi^* \frac{d\psi}{dx} - \psi \frac{d\psi^*}{dx} \right] i . \quad (2.2)$$

Un análisis más detallado, acerca del por qué el flujo de probabilidad se expresa de acuerdo con la forma 2.1, se encuentra en el apéndice B.1.

El objetivo de esta sección es considerar una barrera de potencial rectangular, la cual permite bajo ciertas consideraciones, calcular la corriente de probabilidad antes y después de ella. Dicha barrera es definida de la siguiente manera:

$$V(x) = \begin{cases} 0 , & \text{si } x < x_0 \\ v(x) , & \text{si } x_0 < x < x_1 \\ 0 , & \text{si } x > x_1 \end{cases} . \quad (2.3)$$

El potencial $v(x)$ dependerá de la presencia o ausencia del campo eléctrico o magnético. Es decir, el potencial será estrictamente creciente o decreciente según el campo.

Teniendo en cuenta el potencial 2.3 es posible entonces hacer incidir una partícula sobre la barrera tal como ocurre en el efecto túnel. A esta partícula se le asociará un tren de ondas estacionarias desde la izquierda donde la partícula es libre; el resultado es de dos trenes de onda que viajan en direcciones opuestas, que según el potencial 2.3 solo dependen del espacio y se describen como sigue:

$$\psi_1(x) = A \exp[ik_1x] + B \exp[-ik_1x] , \quad \text{si } x < x_0 ; \quad (2.4)$$

donde el vector de onda, k_1 tiene una magnitud de $\sqrt{\frac{2m_*E}{\hbar^2}}$.

La energía en el máximo de la barrera es mayor que la energía total de la partícula en ese nivel; sin embargo, por el efecto túnel, se dice que la probabilidad de encontrar la partícula fuera de la barrera es finita ^[16]. En otras palabras aparece una función de onda con amplitud finita más allá de la barrera, la cual tiene el mismo vector de onda k_1 , pues en esta región la partícula pasa es libre. Por lo descrito, la función de onda para la región $x > x_1$ pasaría a ser una onda plana de la forma

$$\psi_3(x) = C \exp[ik_1x] , \quad (2.5)$$

donde las constantes complejas A , B y C son las amplitudes de las componentes correspondientes de cada onda, que se pueden identificar como sigue:

A es la amplitud de la onda que incide desde la izquierda sobre la barrera. B es la amplitud de la onda reflejada en la región $x < x_0$ y C es la amplitud de la onda transmitida a la región $x > x_1$.

Descritas las funciones de onda que intervienen para obtener la corriente de probabilidad, el paso a seguir entonces, es aplicar la expresión 2.2 a la función de onda para la región $x < x_0$ (ver la expresión 2.3) llegando a un flujo de probabilidad

$$j_1 = v(A^*A) - v(B^*B) , \quad (2.6).$$

donde la velocidad de grupo de la onda es dada por $v = \frac{\hbar k_1}{m}$.

La expresión 2.6 indica que la corriente neta de probabilidad es simplemente la diferencia de dos flujos componentes en direcciones opuestas.

Ahora aplicando de nuevo este mismo proceso, pero para la región donde la partícula ya ha tunelado, se llega a que la corriente de probabilidad asociada a ella está dada por

$$j_3 = v(C^*C) . \quad (2.7)$$

En la situación en la que todas las magnitudes observables son constantes en el tiempo, la continuidad de corriente de probabilidad requiere que $j_1 = j_3$ (la explicación de este hecho puede ser leída en el apéndice B.1.1), esto es

$$v(A^*A) - v(B^*B) = v(C^*C) . \quad (2.8)$$

Esta ecuación describe una corriente incidente, representada por $v(A^*A)$, que se divide en una corriente reflejada y transmitida. Este enunciado de conservación de corriente de probabilidad se satisface automáticamente por los valores de B y C calculados a partir de las condiciones de continuidad en ψ y $\frac{d\psi}{dx}$ a ambos lados de la barrera ^[17]. La fracción transmitida o coeficiente de transmisión T , es el cociente entre la corriente transmitida y la corriente incidente, es decir:

$$T = \frac{|C|^2}{|A|^2} . \quad (2.9)$$

Además la fracción de las partículas incidentes reflejadas, también llamado coeficiente de reflexión R , se define como el cociente entre la corriente reflejada y la corriente incidente:

$$R = \frac{|B|^2}{|A|^2} . \quad (2.10)$$

Puede demostrarse fácilmente que $T + R = 1$, es decir que se conserva el flujo total de probabilidad, o dicho de otra forma, la partícula se refleja o se transmite, pero nunca desaparece.

De lo anterior se puede afirmar que la partícula no se rompe en dos en el punto de discontinuidad del potencial, ya que toda ella o se transmite o se refleja. Además en un gran número de intentos, la probabilidad de ir en el sentido negativo del eje x es R y la de continuar en el sentido positivo es T ^[18]. Es importante resaltar que los coeficientes de T y R son independientes del sentido en que incida la partícula.

2.3 MÉTODO DE APROXIMACIÓN WKB

Al hacerse mucho más complejos los potenciales que describen la barrera, generan mayores complicaciones en la solución de la ecuación de Schrödinger dadas por estos potenciales; lo que en la mayoría de los casos conlleva a usar métodos de aproximación que proporcionen una solución suficientemente buena y simple. Tal es el caso del WKB, desarrollado simultáneamente por G. Wentzel, M. A. Kramers y L. Brillouin en 1926; y de cuyos apellidos deriva el acrónimo WKB.

Este método permite resolver en forma aproximada la ecuación de Schrödinger para el caso unidimensional^[19]. Además ayuda a aproximar el coeficiente de transmisión de manera independiente a la solución del sistema de E.D. de Schrödinger que describe el problema, permitiendo simplificar muchos procesos matemáticos que se usan al aplicar la definición 2.9 del coeficiente en mención. Lo cual se fundamenta en conocer la corriente de probabilidad incidente y transmitida. A continuación se enunciará un teorema que fundamenta matemáticamente la utilización del método de aproximación WKB.

2.3.1 Teorema WKB. Si la ecuación diferencial de segundo orden de dominio complejo, tiene la forma

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + f(x)y = 0, \text{ con } f(x) \neq 0. \quad (2.11)$$

donde f es una función continuamente diferenciable que toma valores reales y que varía lentamente, es decir que f satisface la condición WKB³.

$$\frac{1}{2} \left| \frac{f'}{\sqrt{f}} \right| \ll |f| \quad (2.12)$$

Entonces, la solución aproximada a esta ecuación tiene la forma

$$\psi(x) \approx [f(x)]^{-\frac{1}{4}} \left\{ c_1 \exp \left[i \int \sqrt{f(x)} dx \right] + c_2 \exp \left[-i \int \sqrt{f(x)} dx \right] \right\} \quad (2.13)$$

Donde c_1 y c_2 son constantes arbitrarias⁴.

Es claro que la ecuación de Schrödinger unidimensional se ajusta fácilmente a la forma de la ecuación diferencial 2.11 haciendo

$$f(x) = \frac{2m_*(E - V(x))}{\hbar^2} \quad (2.14)$$

En consecuencia la condición WKB aplicada a la mecánica cuántica tomaría la

$$\text{forma } \frac{1}{p^2} \left| \frac{dp}{dx} \right| \ll \hbar^{-1}, \quad (2.15)$$

³ En adelante \sqrt{z} , $z \in C$ se entiende $\sqrt{z} = \exp \left[i \frac{\arg z}{2} \right]$.

⁴ La demostración de este teorema puede ser leído en el Libro de “Matemática para ingenieros” de Mathews J., Walker R. L. Editorial Reverte S.A. p. 29-38

Donde p representa el momento lineal de la partícula y se define como

$$p = \sqrt{2m_*(E - V(x))}.$$

Luego, es posible aplicar el método WKB para resolver la ecuación de Schrödinger si se cumple la condición que lleva su mismo nombre (2.15).

2.3.2. Método WKB aplicado para el cálculo del coeficiente de transmisión para potenciales continuos. Consideremos una partícula de energía E menor a la máxima energía que puede alcanzar la barrera, la cual incide sobre ella, tal como se observa en la figura 2.3

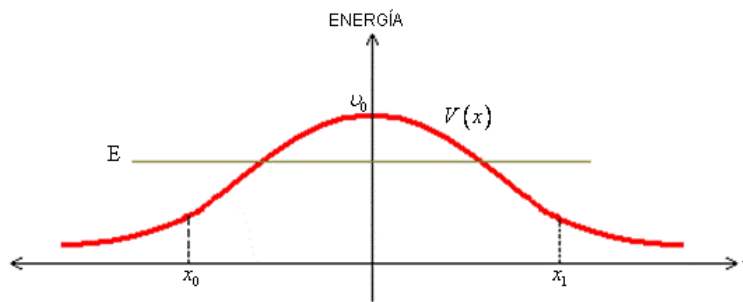


Figura 2.3 Barrera de potencial de Hylleraas con $V(x) = \nu_0 \text{Cosh}^{-2}\left(\frac{x}{a}\right)$

En general, el potencial continuo a considerar, se puede definir como sigue:

$$V(x) = \begin{cases} \nu_1(x), & \text{si } x < x_0 \\ \nu_2(x), & \text{si } x_0 < x < x_1 \\ \nu_3(x), & \text{si } x > x_1 \end{cases} \quad (2.16)$$

Donde los $\nu_i(x)$, $i = \overline{1,3}$ son potenciales continuos definidos en sus respectivas regiones.

Entonces, al hacer incidir la partícula por la izquierda de la barrera, se puede garantizar por el efecto túnel que existirá una corriente transmitida en la región donde $x > x_1$. De ahí que se puede demostrar que el coeficiente de transmisión se puede aproximar por el método WKB, mediante la fórmula

$$T \approx \exp \left[-\frac{2}{\hbar} \int_{x_0}^{x_1} \left[2m_* (v_2(x) - E) \right]^{\frac{1}{2}} dx \right], \quad (2.17)$$

siempre que se satisfaga la condición WKB. (La demostración puede ser analizada en el apéndice B.2)

En este trabajo, es posible aplicar la fórmula 2.17 para barreras de potencial discontinuas siempre y cuando los puntos de discontinuidad coincidan con los límites x_0 y x_1 .

3. BARRERA DE POTENCIAL FINITA RECTANGULAR SIN PRESENCIA DE CAMPOS EXTERNOS.

3.1 SOLUCIÓN AL SISTEMA DE ECUACIONES DE SCHRÖDINGER

En esta parte del trabajo se describe de manera exacta la solución a la ecuación de Schrödinger que se da para un potencial como el definido en 3.1. Este se caracteriza por ser discontinuo y de forma rectangular con una altura v_0 y un ancho a , parámetros que se ajustan de acuerdo con el modelo que la barrera de potencial represente; como por ejemplo los que se mencionaron en la sección 2.1.

$$V(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0 \\ v_0, & \text{si } 0 < x < a \\ 0, & \text{si } x > a \end{cases} \quad (3.1)$$

Por el potencial a considerar, la ecuación de Schrödinger se modifica en el interior de la barrera pero permanece de igual estructura en la periferia. Es decir, que se obtiene un sistema de E.D de forma

$$\begin{cases} -\frac{\hbar^2}{2m_*} \frac{d^2\psi_{1,3}}{dx^2} = E\psi_{1,3}, & \text{si } x < 0 \quad \wedge \quad x > a \\ -\frac{\hbar^2}{2m_*} \frac{d^2\psi_2}{dx^2} + v_0\psi_2 = E\psi_2, & \text{si } 0 < x < a \end{cases} \quad (3.2)$$

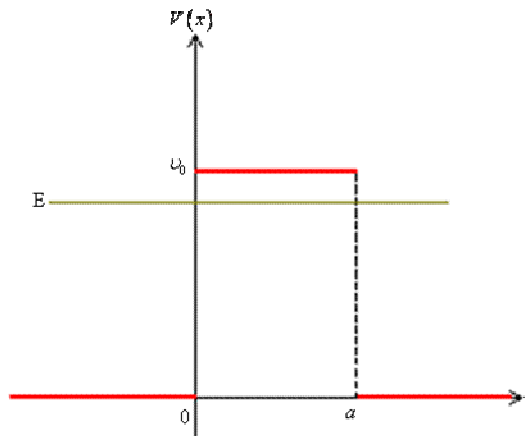


Figura 3.1 Barrera de potencial rectangular.

Es importante indicar que la energía aplicada a la partícula, representada por E , se maneja con un valor menor o igual a la altura de la barrera con el fin de poder apreciar el efecto túnel. El resolver este sistema permite calcular la densidad y corriente de probabilidad, magnitudes que permiten predecir respectivamente, la probabilidad de ubicar la partícula y calcular la probabilidad por segundo de encontrarla en una determinada dirección.

En la literatura, comúnmente las soluciones a la ecuación de Schrödinger para $x < 0$ y $x > a$, son conocidas, puesto que coinciden con la E.D. que describen un movimiento armónico simple (M.A.S.)^[20], es decir

$$\psi_1(x) = A \exp[ik_1x] + B \exp[-ik_1x], \quad \text{si } x < 0 \quad (3.3)$$

$$\psi_3(x) = C \exp[ik_1x] + D \exp[-ik_1x], \quad \text{si } x > a. \quad (3.4)$$

Soluciones, que desde el punto de vista físico representan ondas planas por tratarse de una partícula libre, donde la magnitud del vector de onda k_1 se define por la expresión:

$$k_1 = \sqrt{\frac{2m_*E}{\hbar^2}} \quad (3.5)$$

Esta magnitud depende únicamente de la energía aplicada a la partícula.

El primer término de la función de onda 3.3 muestra la incidencia de las partículas cuando se mueve en el sentido positivo al eje x , mientras que el segundo indica las partículas que se reflejan, más no las que se transmiten. En la función de onda 3.4 el término $\exp[-ik_1x]$ no tiene sentido físico, puesto que la partícula en esta región no se refleja sino que continúa como partícula libre, motivo por el cual se considera $D = 0$.

Para la E.D. de Schrödinger restante, la solución se obtiene por métodos elementales de E.D. de segundo orden ^[21]

$$\psi_2(x) = E \exp[k_2x] + F \exp[-k_2x], \quad \text{si } 0 < x < a. \quad (3.6)$$

Esta función representa una onda estacionaria en donde la magnitud del vector de onda (3.7) ya se encuentra afectado por la energía de la barrera, mostrando que la partícula deja de ser libre.

$$\text{Con } k_2 = \sqrt{\frac{2m_*(V_0 - E)}{\hbar^2}}. \quad (3.7)$$

Siguiendo con el análisis físico para la solución 3.6, el término $\exp[-k_2x]$ no desaparece, ya que en $x = a$ hay discontinuidad en el potencial, de ahí que parte de las partículas se reflejan y otras se transmiten, presentándose el fenómeno de refracción. En consecuencia, la solución al sistema de E.D. 3.2 es:

$$\psi(x) = \begin{cases} A \exp[ik_1 x] + B \exp[-ik_1 x], & \text{si } x < 0 \\ E \exp[k_2 x] + F \exp[-k_2 x], & \text{si } 0 < x < a \\ C \exp[ik_1 x], & \text{si } x > 0 \end{cases} \quad (3.8)$$

Es importante resaltar que hasta el momento la solución que se ha desarrollado aun no es cuadrado integrable en los reales. Situación que no genera por el momento problemas para el cálculo que se explicará en la sección siguiente.

3.2 COEFICIENTES DE TRANSMISIÓN Y REFLEXIÓN

El principal inconveniente de la función de onda descrita en el sistema 3.8 es la presencia de problemas de discontinuidad heredadas por el potencial que se está estudiando. Esta situación obliga a las amplitudes de onda a ajustarse para que $\psi \in L_2$. En el manejo de este proceso se logra determinar las amplitudes A y B las cuales son la clave para calcular los coeficientes de transmisión y reflexión, según lo expresado en 2.9 y 2.10 respectivamente, permitiendo obviar por el momento las corrientes de probabilidad incidente, reflejada y transmitida. En seguida se explican los procesos matemáticos fundamentales para el acondicionamiento de las amplitudes. Estos se pueden observar detalladamente en el anexo A.1.

3.2.1 Condiciones para que la función ψ sea continua. Las funciones que involucran el punto de discontinuidad en $x=0$, corresponden para este caso a las descritas en 3.3 y 3.6. Para satisfacer las condiciones de frontera para la barrera, $\psi_1(0) = \psi_2(0)$ y $\psi_1'(0) = \psi_2'(0)$, se plantea un sistema lineal cuyas variables son las constantes (o amplitudes) que intervienen en las funciones mencionadas anteriormente. El sistema puede ser expresado de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 - i \frac{k_2}{k_1} & 1 + i \frac{k_2}{k_1} \\ 1 + i \frac{k_2}{k_1} & 1 - i \frac{k_2}{k_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E \\ F \end{bmatrix} . \quad (3.9)$$

Es claro que las constantes E y F se calculan manipulando las funciones de onda 3.6 y

$$\psi_3(x) = C \exp[ik_1 x] \quad (3.10)$$

en el punto de discontinuidad $x = a$.

Entonces, el sistema que surge de $\psi_2(a) = \psi_3(a)$ y $\psi_2'(a) = \psi_3'(a)$, equivale a:

$$\begin{bmatrix} E \\ F \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \exp[ik_1 a] \begin{bmatrix} \left(1 + i \frac{k_1}{k_2}\right) \exp[-k_2 a] \\ \left(1 - i \frac{k_1}{k_2}\right) \exp[k_2 a] \end{bmatrix} C . \quad (3.11)$$

Según el sistema 3.11, las constantes A y B pueden ser descritas en función de la constante C , es decir, que se parametrizan como sigue:

$$\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \exp[ik_1 a] \begin{bmatrix} 2 \text{Cosh } k_2 a + i \left(\frac{k_2^2 + k_1^2}{k_1 k_2} \right) \text{Senh } k_2 a \\ -i \left(\frac{k_1^2 + k_2^2}{k_1 k_2} \right) \text{Senh } k_2 a \end{bmatrix} C . \quad (3.12)$$

De esta forma y teniendo en cuenta la expresión 2.9 se puede calcular sin mayor dificultad el coeficiente de probabilidad de las partículas que se transmiten después de la barrera. (Ver anexo A.1):

$$T\left(\frac{E}{\nu_0}\right) = \left[1 + \frac{\text{Senh}^2 \sqrt{\frac{2m_*\nu_0}{\hbar^2} a \left(1 - \frac{E}{\nu_0}\right)}}{4 \frac{E}{\nu_0} \left(1 - \frac{E}{\nu_0}\right)} \right]^{-1} . \quad (3.13)$$

Por otra parte, al utilizar de nuevo la matriz 3.12 es factible calcular el coeficiente de probabilidad de las partículas que se reflejan, de acuerdo con 2.10, el cual se expresa como

$$R\left(\frac{E}{\nu_0}\right) = \frac{\text{Senh}^2 \sqrt{\frac{2m_*\nu_0}{\hbar^2} a^2 \left(1 - \frac{E}{\nu_0}\right)}}{4 \frac{E}{\nu_0} \left(1 - \frac{E}{\nu_0}\right) + \text{Senh}^2 \sqrt{\frac{2m_*\nu_0}{\hbar^2} a^2 \left(1 - \frac{E}{\nu_0}\right)}} . \quad (3.14)$$

El motivo por el cual se expresan los coeficientes en función de la razón de la energía que se le aplica a la partícula y la altura de la barrera, es debido a la facilidad que se presenta para controlar la energía aplicada E como un múltiplo de la altura; lo que muestra en qué parte de la región de la barrera se encuentra la partícula, es decir, por encima de ella o tunelando ^[22].

Se resalta desde el punto de vista analítico que al sumar los coeficientes de transmisión 3.13 y reflexión 3.14 se manifiesta el hecho de la conservación de la densidad de probabilidad. Hecho que es observable en figura 3.2 (b), debido a la gran simetría entre los coeficientes.

En la figura 3.2 (a) se logra apreciar que la energía aplicada a la partícula alcanza su máximo al bordear la barrera, es decir, $E = \nu_0$, lo que indica que ella está enfrentando la barrera y además la está tunelando, ya que el coeficiente de transmisión (T) es distinto de *cero*. En la figura 3.2 (b) se aprecia que la partícula

ha dejado de tunelar para $E \geq \nu_0$ (el programa computacional con el cual se desarrolló este trabajo hace automáticamente los gráficos para este caso, conociendo los resultados cuando $E < \nu_0$). También es claro que los coeficientes se encuentran oscilando, situación que se presenta cuando la energía aplicada a la partícula se cuantiza por encima de la barrera. Estos valores de energía permitidos se observan en los valores máximos o mínimos que alcanzan los coeficientes de transmisión y reflexión respectivamente.

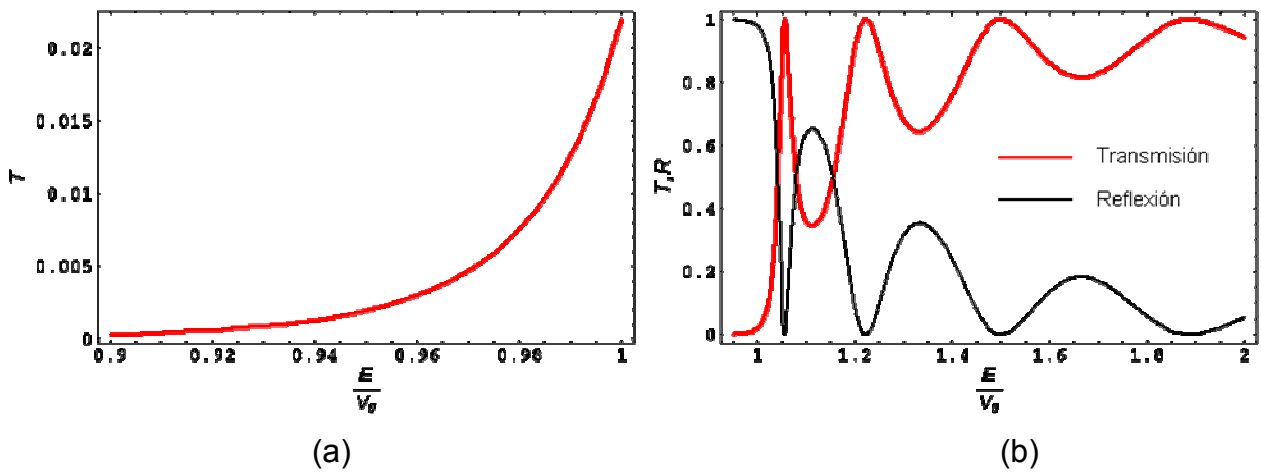


Figura 3.2 Coeficientes de transmisión y reflexión en función de la energía aplicada a la partícula

Es importante resaltar que para el análisis del coeficiente de transmisión y reflexión se tuvo en cuenta una barrera de potencial cuya altura es de 10 eV con un ancho de 2.06 Å, dimensión similar a la de una constante de red cristalina. (Estas condiciones siguen siendo las mismas para la figura 4.4).

Para aprovechar aun más las expresiones obtenidas para los distintos coeficientes, es importante observar qué ocurre con estos cuando el ancho de la barrera de potencial varía para cierta energía aplicada a la partícula. En la figura 3.3 se aprecia que a medida que el ancho de la barrera crece la probabilidad de

transmisión disminuye, lo que implica que la partícula pierde más energía cinética cuando tunela una barrera de potencial ancha.

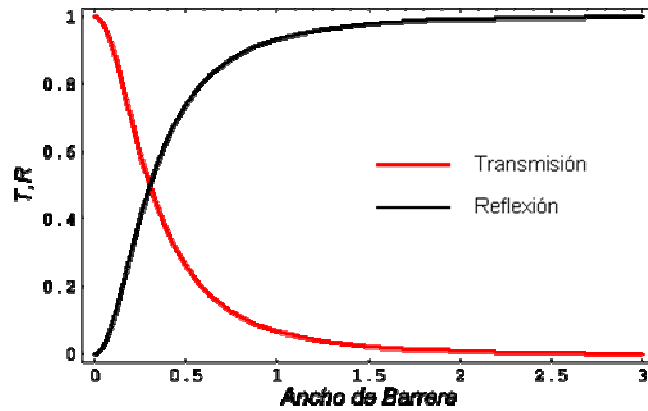


Figura 3.3 Coeficientes de transmisión y reflexión en función del ancho de la barrera de potencial en radios de Bohr

Las condiciones empleadas para esta figura corresponden a una barrera de potencial de 10 eV y una energía aplicada E de 9.8 eV. La escala para el ancho de la barrera está normalizada en radio de Bohr.

3.3 APROXIMACIÓN DEL COEFICIENTE DE TRANSMISIÓN UTILIZANDO EL MÉTODO WKB

El aplicar este método hace que los cálculos del coeficiente de transmisión se reduzcan notablemente en comparación con la definición 2.9, ya que no es necesario conocer la función de onda que es solución a la ecuación de Schrödinger. Debido a que los puntos de frontera del potencial definido en la expresión 3.1 coinciden con el ancho de la barrera, se posibilita el uso del método en cuestión. El paso a seguir, es garantizar que la condición WKB (2.15) se

cumpla. De ahí que se define el momento lineal de la partícula en el interior de la barrera como sigue:

$$p = \sqrt{2m_*(E - \nu_0)} . \quad (3.15)$$

Usando este momento lineal, se verifica que $\frac{1}{p^2} \left| \frac{dp}{dx} \right| = 0 \ll \hbar^{-1}$. (3.16)

Esta desigualdad muestra que no hay restricciones para la energía aplicada a la partícula en el interior de la barrera de potencial. De lo anterior, la aproximación del coeficiente de transmisión por el método WKB es dado por la ecuación 3.17 (según 2.17):

$$T \approx \exp \left[-\frac{2}{\hbar} \int_0^a [2m_*(\nu_0 - E)]^{\frac{1}{2}} dx \right] , \quad (3.17)$$

que equivale a $T\left(\frac{E}{\nu_0}\right) \approx \exp \left[-\frac{4m_*\nu_0}{\hbar^2} a \left(1 - \frac{E}{\nu_0}\right) \right]$. (3.18)

La figura 3.4 muestra que el coeficiente de transmisión calculado por el método WKB crece muy rápidamente cuando la partícula está bordeando la barrera. En comparación con el método teórico, esto conlleva a dar aproximaciones erradas de las partículas que logran tunelar en este sector de la barrera. Para energías bajas aplicadas a la partícula en comparación con ν_0 , el método en estudio es bueno como se logra apreciar en esta figura.

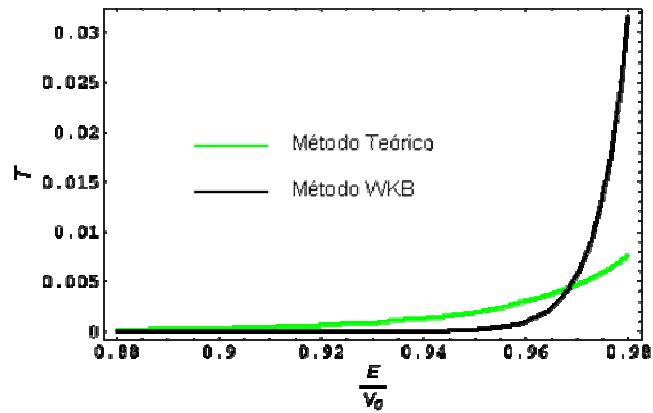


Figura 3.4 Comparación del coeficiente de transmisión con el método WKB en función de la energía aplicada a la partícula

De forma similar a la sección anterior, se aprecia en la figura 3.5 el coeficiente de transmisión en función del ancho de la barrera de potencial, y su comparación con el que se obtiene a través del método WKB. Es claro que el comportamiento por ambos métodos es similar cuando el ancho de la barrera está creciendo.

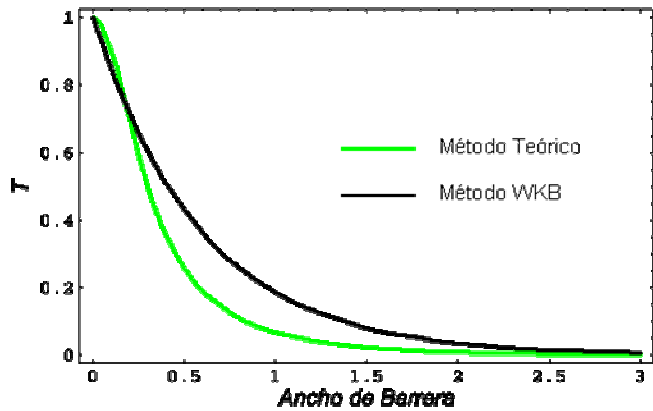


Figura 3.5 Comparación del coeficientes de transmisión con el método WKB en función del ancho de la barrera de potencial

Las condiciones para esta figura son similares a la de la figura 3.3.

3.4 TUNELAMIENTO DE UNA PARTÍCULA

Para poder dar una descripción cualitativa del tunelamiento de la partícula es necesario que la función de onda descrita en la expresión 3.8 tienda a *cero* para valores muy grandes por izquierda y derecha de x , para que pueda ser cuadrado integrable en correspondencia con las propiedades comentadas en la sección 1.2 ; De ahí que la función de onda ψ se redefine teniendo en cuenta las amplitudes de onda dadas por las matrices 3.11 y 3.12, quedando parametrizada en términos de la amplitud transmitida. Además, el dominio que se establece en 3.8 se restringe de tal manera que el ancho de la barrera sea menor que esta restricción, ya que para valores por fuera de este dominio la función de onda comentada debe tender a *cero*. Cabe anotar, que la clase de solución de la E.D. no se altera con esta redefinición.

El parámetro b que se introduce en la nueva función de onda que se describe a continuación, es el encargado de restringir su dominio. Además desde el punto de vista físico puede ser interpretado de varias maneras, esto depende de lo que se quiera modelar con la barrera. Por ejemplo, si se está trabajando con redes cristalinas unidimensionales, b representa la constante de red cristalina (ver figura 2.2). En heteroestructuras como las comentadas en la sección anterior, b podría interpretarse como la longitud total del compuesto (ver figura 2.1).

Esta estrategia, seguida para dar la condición de contorno, al problema de la barrera de potencial, será manejada de forma análoga sin importar el tipo de campo externo a la cual esté sometida, razón por la cual no se hará más mención sobre ella en el transcurso de este trabajo.

$$\psi(x) = C \begin{cases} 0, & \text{si } x < \frac{a-b}{2} \\ (P_1 + iP_2) \exp[k_1(x+a)i] + iP_3 \exp[-k_1(x-a)i], & \text{si } \frac{a-b}{2} < x < 0 \\ \frac{1}{2} \left(1 + i \frac{k_1}{k_2}\right) \exp[(x-a)k_2 + ik_1a] + \frac{1}{2} \left(1 - i \frac{k_1}{k_2}\right) \exp[-(x-a)k_2 + ik_1a], & \text{si } 0 < x < a \\ \exp[ik_1x], & \text{si } a < x < \frac{a+b}{2} \\ 0, & \text{si } x > \frac{a+b}{2} \end{cases} \quad (3.19)$$

Aquí,

$$P_1 = \text{Cosh } k_2 a, \quad P_2 = \left(\frac{k_2^2 - k_1^2}{2k_1 k_2} \right) \text{Senh } k_2 a, \quad P_3 = \left(\frac{k_1^2 + k_2^2}{2k_1 k_2} \right) \text{Senh } k_2 a.$$

Sin lugar a dudas la función de onda 3.19 es una función compleja, lo cual dificulta analizar el comportamiento de la partícula, antes, adentro y después de la barrera de potencial. La estrategia a seguir, es separar la función de onda en su parte real e imaginaria, concentrándose básicamente en la parte real, con la cual se obtiene una descripción cualitativa de la amplitud de las ondas que intervienen en el proceso, más no del movimiento que sufre de la partícula.

La parte real de la función de onda anteriormente mencionada es:

$$\psi_R(x) = C \begin{cases} 0, & \text{si } x < \frac{a-b}{2} \\ \delta_1 \text{Cos } k_1 x - \delta_2 \text{Sen } k_1 x, & \text{si } \frac{a-b}{2} < x < 0 \\ \delta_3 \text{Cosh}(x-a)k_2 - \delta_4 \text{Senh}(x-a)k_2, & \text{si } 0 < x < a \\ \text{Cos } k_1 x, & \text{si } a < x < \frac{a+b}{2} \\ 0, & \text{si } x > \frac{a+b}{2} \end{cases}; \quad (3.20)$$

con

$$\begin{aligned} \delta_1 &= \text{Cosh } k_2 a \text{Cosh } k_1 a + \frac{k_1}{k_2} \text{Senh } k_2 a \text{Senh } k_1 a, & \delta_3 &= \text{Cos } k_1 a, \\ \delta_2 &= \text{Cosh } k_2 a \text{Sen } k_1 a + \frac{k_2}{k_1} \text{Senh } k_2 a \text{Cos } k_1 a, & \delta_4 &= \frac{k_1}{k_2} \text{Sen } k_1 a. \end{aligned}$$

En el anexo A.2 se presenta un método para el cálculo de la constante C mediante la normalización de la función de onda 3.19, la cual permite construir gráficamente la función ψ_R representada en la figura 3.6.

Esta figura deja observar que las partículas antes de enfrentar la barrera de potencial se encuentran en su estado libre, ya que la longitud de la onda incidente se mantiene constante; al ingresar la partícula al interior de la barrera, la onda decae exponencialmente por el efecto túnel. Por último la nueva onda que se transmite después de la barrera tiene una menor amplitud de onda, pero su longitud de onda permanece constante, lo que muestra que algunas partículas se reflejaron y las otras siguieron libres.

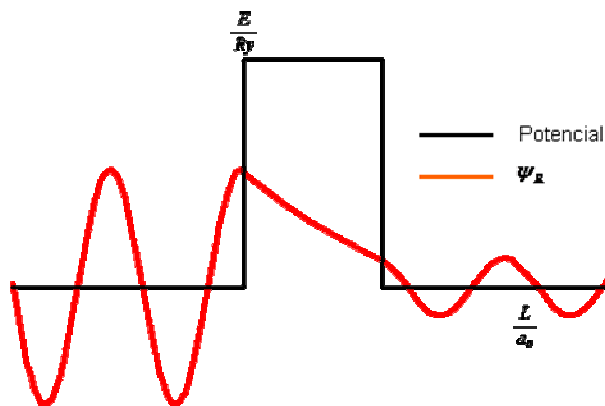


Figura 3.6 Representación esquemática del tunelamiento para una barrera de potencial

Las condiciones para las cuales fue hecha la figura corresponden a una barrera de potencial de altura 10 eV y una energía aplicada a la partícula E , de 9.8 eV, Donde la escala para el desplazamiento de las partículas está normalizada en radio de Bohr (a_0) y la escala de energía también se encuentra normalizada en Rydberg (Ry).

3.5 DENSIDAD DE PROBABILIDAD

La densidad de probabilidad (como ya se había descrito en la sección 1.3) permite calcular dónde es más probable encontrar la partícula, cuando está en su estado libre, o cuando se encuentran tunelando.

La expresión 3.20 describe analíticamente la densidad de probabilidad para un valor de amplitud de onda transmitida descrita en el anexo A, expresión A.12

$$|\psi(x)|^2 = C^2 \begin{cases} 0, & \text{si } x < \frac{a-b}{2} \\ P_1^2 + P_2^2 + P_3^2 + 2P_2P_3 \text{Cosh } 2k_1x, & \text{si } \frac{a-b}{2} < x < 0 \\ \frac{1}{2} \left[\left(1 + \frac{k_1^2}{k_2^2} \right) \text{Cosh } 2(x-a)k_2 + \left(1 - \frac{k_1^2}{k_2^2} \right) \right], & \text{si } 0 < x < a \\ 1, & \text{si } a < x < \frac{a+b}{2} \\ 0, & \text{si } x > \frac{a+b}{2} \end{cases} ; \quad (3.21)$$

donde P_1 , P_2 y P_3 son descritos en la sección anterior, en la ecuación 3.19.

La manera más práctica de estudiar la ecuación 3.20 es a través de la figura 3.8, pues en ella se observa que antes de que la partícula enfrente la barrera, la función de onda es fundamentalmente una onda estacionaria pero tiene una pequeña componente de onda viajera debido a que la onda viajera reflejada tiene una amplitud menor que la onda incidente. Por lo tanto, la densidad de probabilidad en esta región oscila pero tiene valores mínimos algo mayores que cero. Para las mayores amplitudes es más probable encontrar las partículas en su estado libre, situación muy distinta para el interior de la barrera, ya que la función de onda es principalmente una onda estacionaria de amplitud exponencialmente

decreciente. De ahí que la probabilidad de encontrar la partícula en esta región es muy pequeña. Por otra parte, cuando la partícula ha superado la barrera, la probabilidad de encontrarla permanece constante, pues la función de onda es una onda viajera pura. En consecuencia, la incertidumbre en su posición tiende al infinito ($\Delta x \rightarrow \infty$), debido al principio de incertidumbre de Heisenberg que establece que en esta situación es posible conocer con completa precisión el valor del impulso de la partícula. [23]

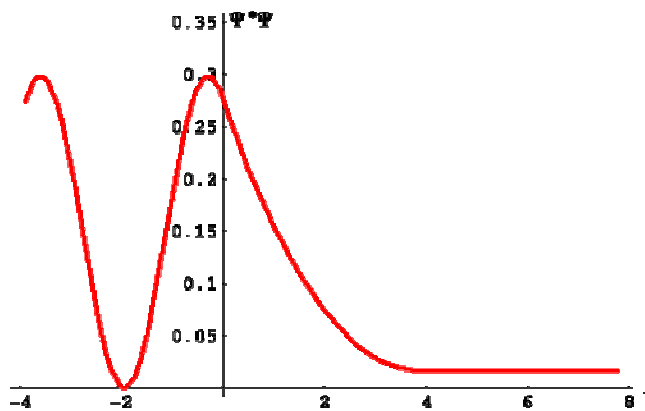


Figura 3.7 Densidad de probabilidad para una barrera de potencial

Para esta figura se ha considerado un ancho de barrera de potencial de 2.06 Å, con un parámetro b de 6.18 Å y una altura de la barrera de 10 eV. De acuerdo a estas condiciones la probabilidad de encontrar la partículas después de la barrera de potencial es de alrededor del 1.3%.

3.6 CORRIENTE DE PROBABILIDAD

Al retomar la expresión 2.2, se busca calcular la probabilidad por segundo de encontrar una partícula asociada con la función de onda 3.19 cruzando algún

punto de referencia en una dirección particular. Por lo tanto, recordando la expresión con la cual se obtiene la corriente de probabilidad,

$$j = \frac{-\hbar}{2m_*} \left[\psi^* \frac{d\psi}{dx} - \psi \frac{d\psi^*}{dx} \right] i \quad \text{si } E < \nu_0 ,$$

no es necesario manipular directamente la función de onda 3.19. En lugar de ella, se trabaja con la función de onda descrita en 3.8, con la ayuda de algunos resultados que se presentan cuando se están calculando los coeficientes de la sección 3.2. Sin mayor dificultad se verifica que antes, durante y después de la barrera de potencial la corriente de probabilidad se comporta de acuerdo a la expresión:

$$j\left(\frac{E}{\nu_0}\right) = \sqrt{\frac{2\nu_0}{m_*} \left(\frac{E}{\nu_0}\right)} \left[C\left(\frac{E}{\nu_0}\right) \right]^2 . \quad (3.22)$$

(Los cálculos para obtener esta expresión pueden ser observados en el anexo A.3). Esta expresión para la corriente de probabilidad es estrictamente creciente, de ahí que si aumenta la energía aplicada a las partículas el flujo probable de ella aumenta, ya que ella ha ganado suficiente energía cinética para superar la barrera de potencial, tal como se muestra en la figura 3.7.

Las oscilaciones que se aprecian en la figura 3.7 se deben a la constante de normalización C (o amplitud de onda transmitida), puesto que la expresión que describe esta constante (A.12) es afectada por la cuantización de la energía que se presenta por encima de la barrera de potencial. Es decir, las energías que permiten que se generen máximos en la corriente de probabilidad son exactamente las mismas que generan los máximos en el coeficiente de transmisión. Esto se verifica al analizar detenidamente la figura 3.2 (b). Cabe indicar, que los datos que modelan todas las gráficas de este trabajo representan

una aproximación de lo que experimentalmente puede ocurrir. De ahí que las justificaciones pueden darse al interpretar las gráficas.

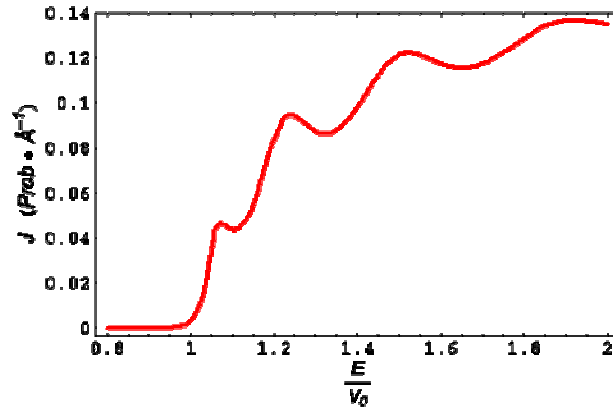


Figura 3.8 Corriente de probabilidad en función de la energía aplicada a la partícula

Las condiciones establecidas para esta figura son similares a la figura 3.6. Cabe aclarar que para efectos de interpretación la expresión que representa la corriente de probabilidad se dividió entre la velocidad de grupo de la función de onda ψ . Razón que explica las unidades presentadas para j .

4. BARRERA DE POTENCIAL FINITA RECTANGULAR EN PRESENCIA DE CAMPO ELÉCTRICO UNIFORME.

4.1 SOLUCIÓN AL SISTEMA DE ECUACIONES DE SCHRÖDINGER

El estudiar el fenómeno del transporte cuántico para heteroestructuras afectadas por campos eléctricos uniformes (o constantes), conlleva realizar cambios en el modelo de barrera de potencial, los cuales hacen que el estudio se haga más complejo, ya que aparecen otras energías de potencial. Una de ellas es generada directamente por la presencia del campo eléctrico, pues el realiza trabajo sobre la partícula cuando la desplaza de un lugar a otro y la otra energía está dada por la fuerza de atracción originada por la carga imagen cuando el electrón escapa por la presencia del campo ^[24]. La descripción de esta última energía se fundamenta en el concepto mismo de ella, y se expresa de la siguiente manera:

$$U_{F,A} = -\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 x}, \quad (4.1)$$

donde ϵ_0 representa la constante dieléctrica estática del material con el cual se trabaja y x la distancia entre la carga imagen y el electrón.

Por otro lado, para la energía potencial dada por el campo en estudio, se requiere mayor cuidado en su definición, puesto que el campo se debe aplicar paralelo al desplazamiento de la partícula; Pues de lo contrario, el problema dejaría de ser unidimensional; situación que aquí no se tendrá en cuenta por no corresponder a los objetivos de este trabajo. Teniendo en cuenta lo mencionado anteriormente y aplicando conceptos básicos que se utilizan debido a la presencia del campo

eléctrico (los cuales pueden ser leídos en el anexo C.1), la energía potencial es una cantidad proporcional al recorrido de la partícula ^[25,26], Es decir:

$$v_{\varepsilon} = -q\varepsilon x . \quad (4.2)$$

En consecuencia, si la partícula está sometida a una barrera de potencial como la definida en la expresión 3.1 y a demás se le aplica un campo eléctrico uniforme ε que afecte el interior de la barrera, esta sufre un cambio circunstancial en su energía potencial, ya que ella queda dependiendo de la posición de la partícula:

$$V_{\varepsilon}(x) = \begin{cases} 0 , & \text{si } x < 0 \\ v_0 - q\varepsilon x - \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 x} , & \text{si } 0 < x < a \\ 0 , & \text{si } x > a \end{cases} . \quad (4.3)$$

Se puede observar que debido a este potencial, resolver la ecuación de Schrödinger para el interior de la barrera llevaría procedimientos matemáticos bastante complejos que implicaría más tiempo en el desarrollo analítico y computacional del problema. Razón por la cual se trabajará con un modelo de potencial aproximado al definido en 4.3, pues no se considerará la presencia de las fuerzas de atracción ni campos eléctricos locales que se generan debido a las imperfecciones de la superficie donde se aplique el campo, ya que ellos podrían ser más intensos, lo que contribuiría a incrementar la corriente transmitida ^[27]. Por lo tanto el potencial 4.3 queda reducido a

$$V_{\varepsilon}(x) = \begin{cases} 0 , & \text{si } x < 0 \\ v_0 - q\varepsilon x , & \text{si } 0 < x < a \\ 0 , & \text{si } x > a \end{cases} . \quad (4.4)$$

Ahora, trabajar con este potencial no indica que el grado de complejidad del problema desaparezca por completo, éste queda reducido notablemente.

Para estudiar en detalle el comportamiento del potencial anteriormente mencionado, es importante observar su representación (figura 4.1), puesto que se muestra pérdida de simetría en la barrera, teniendo su máxima altura en v_0 , lo que a su vez genera que el ancho de la barrera no pueda superar el cociente $\frac{v_0}{q\varepsilon}$. Es decir, que la barrera sólo puede llegar a tener forma triangular, pues de lo contrario se presentaría una deformación en ella que conllevaría a manejar potenciales negativos, generando al tiempo una nueva barrera y un pozo de potencial entre 0 y a . Careciendo este hecho de sentido físico para el desarrollo de este trabajo. Cabe resaltar que al considerar la energía de potencial debido a la fuerza de atracción ($v_{F,A}$) formulada en 4.1, esta haría que la barrera se deflecte aun más, aumentando de nuevo la corriente transmitida.

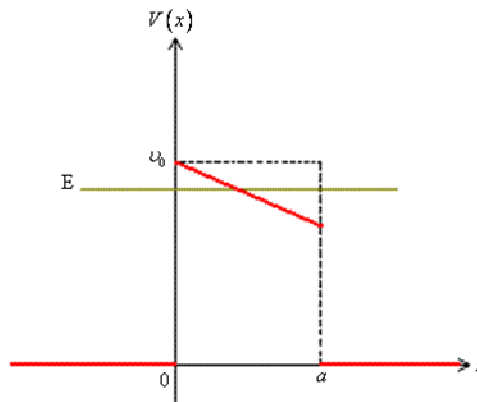


Figura 4.1 Barrera de potencial rectangular afectada por campo eléctrico uniforme

Como se había mencionado antes, el conocer de forma explícita el potencial 4.4 implica que el sistema de E.D. de Schrödinger, se modifique en la región correspondiente a la barrera de potencial. Por lo tanto,

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{\hbar^2}{2m_*} \frac{d^2\psi_{1,3}}{dx^2} = E\psi_{1,3} \quad , \quad \text{si } x < 0 \wedge x > a \\ -\frac{\hbar^2}{2m_*} \frac{d^2\psi_2}{dx^2} + (\nu_0 - q\varepsilon x)\psi_2 = E\psi_2 \quad , \quad \text{si } 0 < x < a \quad . \end{array} \right. \quad (4.5)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{\hbar^2}{2m_*} \frac{d^2\psi_{1,3}}{dx^2} = E\psi_{1,3} \quad , \quad \text{si } x < 0 \wedge x > a \\ -\frac{\hbar^2}{2m_*} \frac{d^2\psi_2}{dx^2} + (\nu_0 - q\varepsilon x)\psi_2 = E\psi_2 \quad , \quad \text{si } 0 < x < a \quad . \end{array} \right. \quad (4.6)$$

Es claro que el trabajo se concentrará en resolver la ecuación diferencial de Schrödinger 4.6, la que mostrará los efectos del campo eléctrico uniforme en el sistema. Usando la transformación que a continuación se describe, para $E < \nu_0$,

$$u = \alpha \left(x - \frac{\nu_0 - E}{q\varepsilon} \right), \quad (4.7) \quad \text{Con} \quad \alpha = \left(\frac{2m_*q\varepsilon}{\hbar^2} \right)^{1/3}, \quad (4.8)$$

de 4.7 se sigue:

$$\frac{d^2\psi_{2,\varepsilon}}{dx^2} = \alpha^2 \frac{d^2\psi_{2,\varepsilon}}{du^2}. \quad (4.9)$$

Al sustituir 4.7 y 4.9 en 4.6 se llega a un caso particular de la E.D. de Bessel, llamada E.D. de Airy (ver anexo C.1):

$$\frac{d^2\psi_{2,\varepsilon}}{du^2} + u\psi_{2,\varepsilon}(u) = 0. \quad (4.10)$$

La solución de esta E.D. es una combinación lineal de las funciones de Airy $\text{Ai}[-u]$ y $\text{Bi}[-u]$.^[28] Es decir, $\psi_{2,\varepsilon}(u) = E \text{Ai}[-u] + F \text{Bi}[-u]$.

Al retomar la sustitución 4.7 en el anterior resultado, se obtiene:

$$\psi_{2,\varepsilon}(x) = E \text{Ai} \left[\alpha \left(\frac{\nu_0 - E}{q\varepsilon} - x \right) \right] + F \text{Bi} \left[\alpha \left(\frac{\nu_0 - E}{q\varepsilon} - x \right) \right]. \quad (4.11)$$

Para poder realizar una interpretación física adecuada de esta función de onda, es necesario tener en cuenta la condición expuesta para el ancho de la barrera, ya que esta a su vez restringe el campo eléctrico ε , cuando el ancho de barrera es fijo. En consecuencia $\varepsilon < \frac{V_0}{qa}$, de ahí que el campo eléctrico no puede superar el orden de 10^{10} voltios por metro (V/m), lo que conlleva a trabajar con un orden $10^9 V/m$, que permitan observar efectos físicos importantes [29].

Por lo expuesto anteriormente, es claro que el argumento de las funciones de Airy que son parte de la función de onda 4.11, tiende a infinito. Esto permite a su vez compararlas con funciones equivalentes tipo exponencial, las cuales se muestran en el apéndice C.7, sugiriendo que la función de onda en estudio corresponde a una onda estacionaria modulada por el factor $(\alpha u)^{-1/4}$. Para las soluciones donde no interviene el campo eléctrico se tiene en cuenta las mismas situaciones físicas comentadas en la sección 3.1.

Luego la solución al sistema de E.D. de Schrödinger en estudio corresponde a:

$$\psi_\varepsilon(x) = \begin{cases} A \exp[ik_1 x] + B \exp[-ik_1 x], & \text{si } x < 0 \\ E \text{Ai} \left[\alpha \left(\frac{V_0 - E}{q\varepsilon} - x \right) \right] + F \text{Bi} \left[\alpha \left(\frac{V_0 - E}{q\varepsilon} - x \right) \right], & \text{si } 0 < x < a \\ C \exp[ik_1 x], & \text{si } x > a \end{cases} \quad (4.12)$$

donde la magnitud del vector de onda k_1 se define de igual manera que en la expresión 3.5

4.2 COEFICIENTES DE TRANSMISIÓN Y REFLEXIÓN

Debido a las discontinuidades presentes en la función de onda ψ_ε , sus amplitudes de onda tienen que ser acondicionadas de tal forma que ella y su primera derivada sean continuas. Por ello se muestran los cálculos más relevantes que permiten que la condición $\psi_\varepsilon \in L^2$ se cumpla; accediendo a su vez a determinar los coeficientes de transmisión y reflexión en presencia de un campo eléctrico uniforme.

4.2.1 Condiciones para que la función ψ_ε sea continua. Las funciones que involucran el punto de discontinuidad en $x = 0$ corresponden a aquellas que en su dominio se acercan tanto por la derecha como por la izquierda del punto en cuestión.

$$\text{Por lo tanto, } \begin{cases} \psi_{\varepsilon,1}(0) - \psi_{\varepsilon,2}(0) = 0 \\ \psi'_{\varepsilon,1}(0) - \psi'_{\varepsilon,2}(0) = 0 \end{cases} .$$

Se establece las constantes A y B en función de las constantes E y F respectivamente, como se puede observar en la expresión siguiente:

$$\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \text{Ai}[S] + i\frac{\alpha}{k_1} \text{Ai}'[S] & \text{Bi}[S] + i\frac{\alpha}{k_1} \text{Bi}'[S] \\ \text{Ai}[S] - i\frac{\alpha}{k_1} \text{Ai}'[S] & \text{Bi}[S] - i\frac{\alpha}{k_1} \text{Bi}'[S] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E \\ F \end{bmatrix} . \quad (4.13)$$

S representa el argumento de las funciones de Airy evaluadas en $x = 0$. Es decir

$$S = \alpha \left(\frac{\nu_0 - E}{q\varepsilon} \right) = \alpha \frac{\nu_0}{q\varepsilon} \left(1 - \frac{E}{\nu_0} \right) . \quad (4.14)$$

Procediendo de forma análoga para las funciones que involucran el punto de discontinuidad en $x = a$, se establece:

$$\begin{bmatrix} E \\ F \end{bmatrix} = \frac{\pi}{\alpha} \exp[ik_1 a] \begin{bmatrix} \alpha \text{Bi}'[S_a] + ik_1 \text{Bi}[S_a] \\ -\alpha \text{Ai}'[S_a] - ik_1 \text{Ai}[S_a] \end{bmatrix} C, \quad (4.15)$$

S_a es el argumento de las funciones de Airy evaluadas en $x = a$, lo que equivale a

$$S_a = \alpha \left(\frac{\nu_0 - E}{q\varepsilon} - a \right) = \alpha \left[\frac{\nu_0}{q\varepsilon} \left(1 - \frac{E}{\nu_0} \right) - a \right]. \quad (4.16)$$

(Los anteriores cálculos son detallados en el anexo C.2.1).

Ahora, sustituyendo 4.15 en 4.13 se determinan las amplitudes de onda A y B en términos de la amplitud de onda transmitida C :

$$\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \frac{\pi}{2\alpha} \exp[ik_1 a] \begin{bmatrix} \alpha (w_{\varepsilon,1} + w_{\varepsilon,2}) + \left(k_1 w_{\varepsilon,3} + \frac{\alpha^2}{k_1} w_{\varepsilon,4} \right) i \\ \alpha (w_{\varepsilon,1} - w_{\varepsilon,2}) + \left(k_1 w_{\varepsilon,3} - \frac{\alpha^2}{k_1} w_{\varepsilon,4} \right) i \end{bmatrix} C. \quad (4.17)$$

Las expresiones $w_{\varepsilon,i}$, $i = \overline{1,4}$, se definen como sigue:

$$\begin{aligned} w_{\varepsilon,1} &= \text{Ai}[S] \text{Bi}'[S_a] - \text{Ai}'[S_a] \text{Bi}[S], & w_{\varepsilon,2} &= \text{Ai}[S_a] \text{Bi}'[S] - \text{Ai}'[S] \text{Bi}[S_a], \\ w_{\varepsilon,3} &= \text{Ai}[S] \text{Bi}[S_a] - \text{Ai}[S_a] \text{Bi}[S], & w_{\varepsilon,4} &= \text{Ai}'[S] \text{Bi}'[S_a] - \text{Ai}'[S_a] \text{Bi}'[S]. \end{aligned}$$

Conociendo las amplitudes de onda A y B , se calcula el coeficiente de transmisión, el cual queda definido por la expresión (ver el anexo C.2.2):

$$T_{\varepsilon} \left(\frac{E}{\nu_0} \right) = \frac{4}{\pi^2} \left\{ \left(w_{\varepsilon,1} + w_{\varepsilon,2} \right)^2 + \left(\frac{k_1}{\alpha} w_{\varepsilon,3} + \frac{\alpha}{k_1} w_{\varepsilon,4} \right)^2 \right\}^{-1} . \quad (4.18)$$

De igual forma, el coeficiente de reflexión se define como sigue:

$$R_{\varepsilon} \left(\frac{E}{\nu_0} \right) = \frac{\left(w_{\varepsilon,1} - w_{\varepsilon,2} \right)^2 + \left(\frac{k_1}{\alpha} w_{\varepsilon,3} - \frac{\alpha}{k_1} w_{\varepsilon,4} \right)^2}{\left(w_{\varepsilon,1} + w_{\varepsilon,2} \right)^2 + \left(\frac{k_1}{\alpha} w_{\varepsilon,3} + \frac{\alpha}{k_1} w_{\varepsilon,4} \right)^2} . \quad (4.19)$$

Cabe recordar que estos coeficientes se obtienen por la aplicación de los conceptos dados en 2.9 y 2.10 respectivamente.

Se aprecia en la figura 4.2 (a) que a medida que la energía aumenta, el coeficiente de transmisión alcanza un máximo y luego empieza a disminuir, suceso que no tiene sentido, puesto que la partícula pasa más fácilmente por encima de ella; a menos que la partícula haya tunelado y la energía donde se alcanza el máximo de transmisión corresponda al primer nivel permitido en la cuantización que se genera por encima de la barrera. Situación que ocurre para este caso en particular; también se observa en la figura 4.2 (b), la transición de la partícula cuando está en el interior de la barrera, $\frac{E}{\nu_0} < 1$ y por encima de ella. $\frac{E}{\nu_0} > 1$. Lo anterior indica que el campo eléctrico hace que haya más transmisión de partículas en comparación a cuando no se considera (ver figura 3.2 (b)).

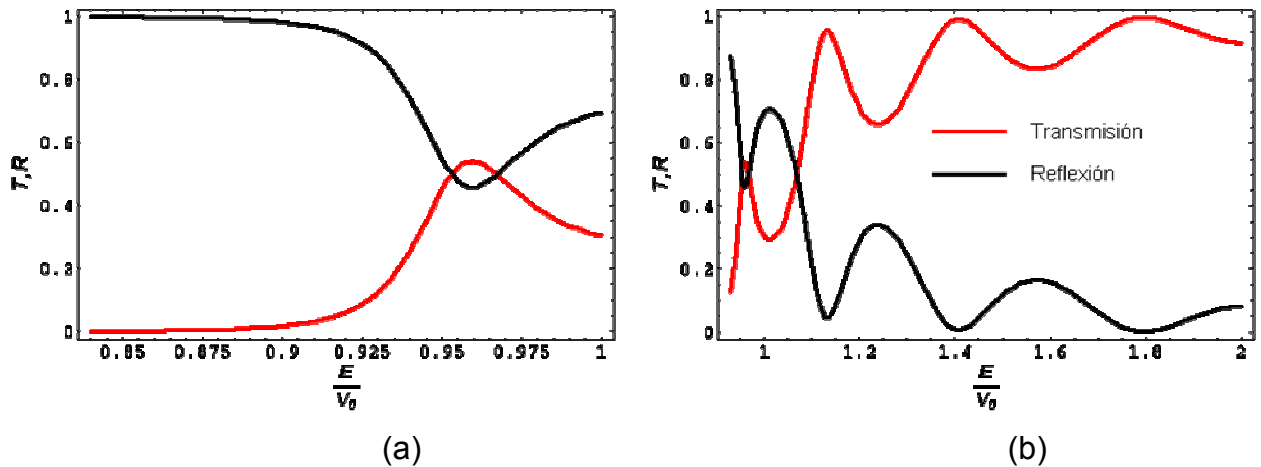


Figura 4.2 Coeficientes de transmisión y reflexión afectados por campo eléctrico uniforme, en función de la energía aplicada a la partícula.

Para el diseño de esta figura se tuvo en cuenta una barrera de potencial de altura 10 eV con un ancho de 2.06 Å, a la cual se le aplicó un campo eléctrico uniforme de 9×10^9 V/m.

Dado que las expresiones 4.18 y 4.19 permiten fijar la altura de la barrera ($v_0 = 10$ eV), la energía aplicada ($E=9.8$ eV) a la partícula y el campo eléctrico ($\varepsilon = 9 \times 10^9$ V/m), dejando variar el ancho de la barrera tal como lo muestra la figura 4.3; se observa, que los coeficientes están modulados por funciones exponenciales crecientes en la parte inferior y decrecientes en la parte superior, generando en ellos una disminución de la probabilidad de transmisión de manera lenta y tendiendo a ser constante a medida que el ancho de la barrera crece.

También se aprecian oscilaciones en los coeficientes de transmisión y reflexión, las cuales pueden ser explicadas cuando la partícula atraviesa la barrera para un determinado ancho, entrando éste último en resonancia con las energías permitidas del sistema, puesto que, de nuevo la partícula sigue estando por encima de la barrera. Esto sugiere que los niveles de energía permitidos son

paralelos a la deflexión que sufre la barrera debido al campo eléctrico ^[30]. Por ejemplo, para un ancho de barrera de 6 Å, como se aprecia en la figura 4.3, el coeficiente de transmisión ha alcanzado aproximadamente 6 máximos, es decir que la partícula tiene probablemente 6 niveles de energía permitidos que le ayudarían a seguir como una partícula libre y dejar atrás los efectos del campo eléctrico; siempre y cuando, al tunelar salga con un valor posible de estas 6 energías.

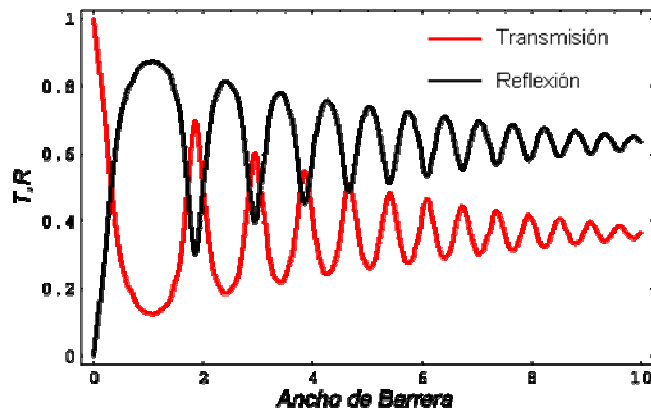


Figura 4.3 Coeficientes de transmisión y reflexión afectados por campo eléctrico uniforme, en función del ancho de la barrera de potencial

Ahora, siguiendo la misma idea expuesta para la construcción de la figura 4.3, se pueden establecer parámetros equivalentes, exceptuando el ancho de barrera ($a = 2.06 \text{ \AA}$); lo que permite variar el campo eléctrico en las expresiones 4.18 y 4.19. Generando el resultado que se expone en la figura 4.4.

En la mencionada figura se observa sin mayor dificultad que a medida que el campo eléctrico crece, el coeficiente de transmisión presenta este mismo comportamiento hasta un cierto campo donde alcanza un máximo, situación que se explica de forma análoga a la discusión expuesta en la figura 4.3 (debido a que al incrementar el campo eléctrico, la barrera se defleca más rápidamente permitiendo que las partículas pasen sin mucha dificultad). De ahí que el máximo

se explique como una resonancia entre el campo y la energía permitida de las partículas cuando salen y quedan por encima de la barrera.

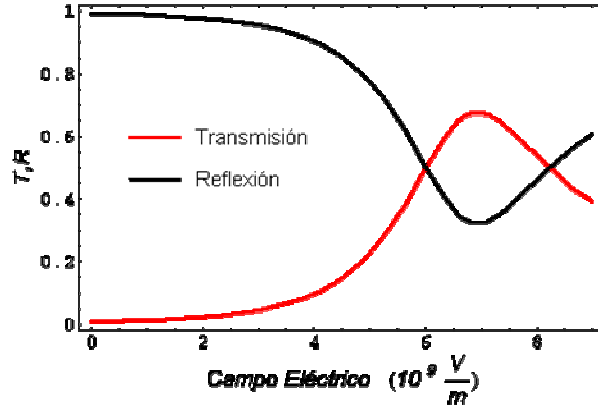


Figura 4.4 Coeficientes de transmisión y reflexión en función del campo eléctrico

4.2.2 Condición que deben cumplir los coeficientes de transmisión y reflexión. Se debe satisfacer que la probabilidad de partículas que se transmitan y se reflejan en conjunto es uno. Para este caso se suman las expresiones 4.18 y 4.19, reduciéndose a probar:

$$\frac{\pi^2}{4} \left\{ (w_{\varepsilon,1} + w_{\varepsilon,2})^2 + \left(\frac{k_1}{\alpha} w_{\varepsilon,3} + \frac{\alpha}{k_1} w_{\varepsilon,4} \right)^2 - (w_{\varepsilon,1} - w_{\varepsilon,2})^2 - \left(\frac{k_1}{\alpha} w_{\varepsilon,3} - \frac{\alpha}{k_1} w_{\varepsilon,4} \right)^2 \right\} = 1 ; \quad (4.20)$$

lo cual se verifica fácilmente, ya que el lado izquierdo se simplifica a la expresión $\pi^2 [w_{\varepsilon,1} w_{\varepsilon,2} + w_{\varepsilon,3} w_{\varepsilon,4}]$, que a su vez equivale al producto de los wronskianos de las funciones de Airy (Apéndice C.6) evaluados en $x = 0$ y $x = a$. Luego se demuestra la igualdad 4.20.

En analogía con el principio de correspondencia planteado por Niels Bohr (en 1923), en esta parte del trabajo se va a probar que el coeficiente de transmisión afectado por un campo eléctrico uniforme (T_ε) tiende al coeficiente de transmisión

sin presencia de campos externos (T) cuando el campo eléctrico tiende a cero.

Entonces:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} T_{\varepsilon} = \frac{4}{\pi^2} \left\{ \left[\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (w_{\varepsilon,1} + w_{\varepsilon,2}) \right]^2 + \left[\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{k_1}{\alpha} w_{\varepsilon,3} + \frac{\alpha}{k_1} w_{\varepsilon,4} \right) \right]^2 \right\}^{-1}$$

Estos límites son calculados detalladamente en el anexo B.2, Por lo tanto,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} T_{\varepsilon} = \left\{ \text{Cosh}^2 k_2 a - \left[1 - \left[4 \frac{E}{\nu_0} \left(1 - \frac{E}{\nu_0} \right) \right]^{-1} \right] \text{Senh}^2 k_2 a \right\}^{-1} .$$

Reduciendo el lado derecho,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} T_{\varepsilon} = \left[1 + \frac{\text{Senh}^2 \sqrt{\frac{2m_* \nu_0}{\hbar^2} a \left(1 - \frac{E}{\nu_0} \right)}}{4 \frac{E}{\nu_0} \left(1 - \frac{E}{\nu_0} \right)} \right]^{-1} = T . \quad (4.21)$$

El resultado anterior permite verificar lo que intuitivamente se planteaba.

4.3 APROXIMACIÓN DEL COEFICIENTE DE TRANSMISIÓN UTILIZANDO EL MÉTODO WKB

Después de haber realizando suficientes cálculos para obtener el coeficiente de transmisión afectando con campo eléctrico, es importante comparar dicho resultado con el método de aproximación WKB, para este tipo de coeficiente. Esto lleva a que se debe satisfacer la condición WKB, por lo tanto es necesario (pero

no suficiente) acondicionar $\frac{E}{v_0}$. Por motivos prácticos para este análisis, se aplicará directamente el método en cuestión; lo que conlleva a establecer la restricción precisa para que pueda cumplirse la mencionada condición. Retomando la definición 2.17 se tiene

$$T_\varepsilon \approx \exp \left[-\frac{2}{\hbar} \int_0^a [2m_*(v_0 - E - q\varepsilon x)]^{\frac{1}{2}} dx \right]. \quad (4.22)$$

Al calcular la integral, el coeficiente de transmisión afectado por campo eléctrico 4.18 se aproxima a la expresión:

$$T_\varepsilon \left(\frac{E}{v_0} \right) \approx \exp \left[-\frac{4}{3} \frac{\sqrt{2m_*}}{q\varepsilon\hbar} \left\{ \left[v_0 \left(1 - \frac{E}{v_0} \right) \right]^{\frac{3}{2}} - \left[v_0 \left(1 - \frac{E}{v_0} \right) - q\varepsilon a \right]^{\frac{3}{2}} \right\} \right], \quad (4.23)$$

de donde se observa que $\frac{v_0}{q\varepsilon} \left(1 - \frac{E}{v_0} \right) > a$ para que la expresión 4.23 no represente un número complejo, pues este coeficiente debe de ser un número real positivo.

En consecuencia se sigue $\frac{E}{v_0} < 1 - \frac{q\varepsilon a}{v_0}$. (4.24)

Esta condición indica hasta qué valor de energía aplicada a la partícula el método WKB funciona como una aproximación de la expresión 4.18. Por otro lado, al retomar el momento lineal que se define en el interior de la barrera

$$p = \sqrt{2m_*(E - v_0 + q\varepsilon x)}, \text{ se puede demostrar que } \frac{1}{p^2} \left| \frac{dp}{dx} \right| < [2(a-x)]^{-\frac{3}{2}} \ll \hbar^{-1}.$$

(Ver anexo C.3)

Al cumplirse la condición WKB para los valores de energía 4.24, el resultado 4.23 posee fundamento físico-matemático que permite manipularlo como se aprecia a continuación.

La figura 4.5 se observa que la aproximación WKB es aceptable hasta un valor inferior a la de la condición 4.23, aunque la probabilidad de transmisión que se muestra es del orden de 10^{-3} . Esto verifica que para energía cercanas al borde de la barrera el método en estudio falla, ya que las partículas han tunelado y podrían alcanzar una energía permitida para estar por encima de la barrera.

Los términos bajo los cuales las figuras 4.5 y 4.6 fueron realizadas corresponden exactamente a las comentadas para la figura 4.2 y 4.3 respectivamente, razón por la cual se hace posible efectuar la comparación con el método de aproximación WKB para coeficientes de transmisión.

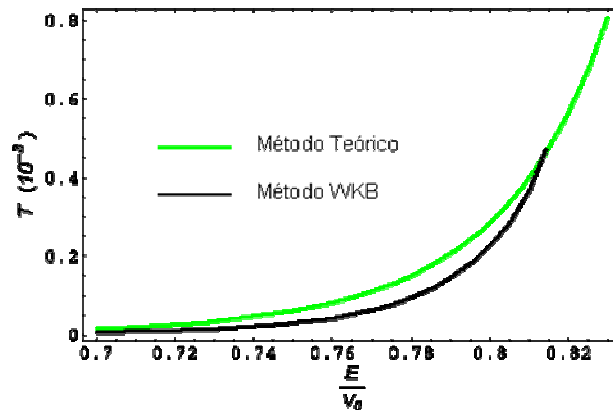


Figura 4.5 Comparación del coeficiente de transmisión en presencia de campo eléctrico uniforme con el método WKB en función de la energía aplicada a la partícula.

De forma análoga a la figura 4.3, el método de aproximación discutido en esta sección, es aplicable si se trabaja a lo sumo con un orden de 10^8 voltios por metro.

El inconveniente con estos campos eléctricos se debe a que no muestran cambios significativos en la estructura ^[31]. Además anteriormente se mostró que el coeficiente de transmisión se limita hasta cierto valor del ancho de la barrera, debido a que la expresión 4.23 siempre tiene que ser un número real positivo.

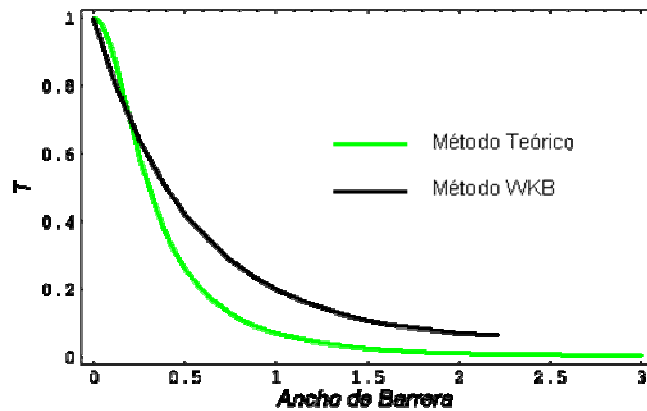


Figura 4.6 Comparación del coeficiente de transmisión en presencia de campo eléctrico uniforme con el método WKB en función del ancho de la barrera de potencial

4.4 TUNELAMIENTO DE LA PARTÍCULA

Las razones del por qué se redefine la función de onda establecida en expresión 4.12, como a continuación se expresa (4.25), son exactamente las mismas que las comentadas cuando la partícula no es afectada por ningún campo externo (sección 3.4).

$$\psi_\varepsilon(x) = C_\varepsilon \begin{cases} 0, & \text{si } x < \frac{a-b}{2} \\ P_{\varepsilon,1} \exp[i(x+a)k_1] + P_{\varepsilon,2} \exp[-i(x+a)k_1], & \text{si } \frac{a-b}{2} < x < 0 \\ P_{\varepsilon,3} \exp[ik_1 a] \text{Ai}\left[\alpha\left(\frac{v_0 - E}{q\varepsilon} - x\right)\right] + P_{\varepsilon,4} \exp[ik_1 a] \text{Bi}\left[\alpha\left(\frac{v_0 - E}{q\varepsilon} - x\right)\right], & \text{si } 0 < x < a \\ \exp[ik_1 x], & \text{si } a < x < \frac{a+b}{2} \\ 0, & \text{si } x > \frac{a+b}{2} \end{cases}; \quad (4.25)$$

donde

$$P_{\varepsilon,1} = \frac{\pi}{2} \left[(w_{\varepsilon,1} + w_{\varepsilon,2}) + \left(\frac{k_1}{\alpha} w_{\varepsilon,3} + \frac{\alpha}{k_1} w_{\varepsilon,4} \right) i \right], \quad P_{\varepsilon,2} = \frac{\pi}{2} \left[(w_{\varepsilon,1} - w_{\varepsilon,2}) + \left(\frac{k_1}{\alpha} w_{\varepsilon,3} - \frac{\alpha}{k_1} w_{\varepsilon,4} \right) i \right],$$

$$P_{\varepsilon,3} = \pi \left[\text{Bi}'[S_a] + \frac{k_1}{\alpha} \text{Bi}[S_a] i \right], \quad P_{\varepsilon,4} = \pi \left[\text{Ai}'[S_a] + \frac{k_1}{\alpha} \text{Ai}[S_a] i \right].$$

Esta nueva función de onda garantiza la solución desde el punto de vista matemático y físico del sistema de E.D de Schrödinger planteadas al inicio de la sección, puesto que ya hace parte del espacio L_2 ; situación que no ocurría con la función de onda definida en 4.12, ya que ella solo garantizaba una solución mas física que matemática para el sistema de E.D en mención. El paso a seguir consiste entonces, en establecer la parte real de la función de onda expresada en 4.25, pues ella permite realizar un análisis cualitativo del tunelamiento de la partícula cuando es afectada por un campo eléctrico uniforme. Cabe resaltar que la expresión analítica que a continuación se describe (4.26) no permite dar una idea de lo que está ocurriendo, pero su representación gráfica (figura 4.7) muestra situaciones interesantes, sobre todo cuando se compara con los resultados obtenidos de la expresión 3.20.

$$\psi_{\varepsilon,R}(x) = C_{\varepsilon} \begin{cases} 0, & \text{si } x < \frac{a-b}{2} \\ \delta_{\varepsilon,1} \text{Cos } k_1 x - \delta_{\varepsilon,2} \text{Sen } k_1 x, & \text{si } \frac{a-b}{2} < x < 0 \\ \delta_{\varepsilon,3} \text{Ai} \left[\alpha \left(\frac{v_0 - E}{q\varepsilon} - x \right) \right] - \delta_{\varepsilon,4} \text{Bi} \left[\alpha \left(\frac{v_0 - E}{q\varepsilon} - x \right) \right], & \text{si } 0 < x < a \\ \text{Cos } k_1 x, & \text{si } a < x < \frac{a+b}{2} \\ 0, & \text{si } x < \frac{a+b}{2} \end{cases} ; \quad (4.26)$$

con

$$\delta_{\varepsilon,1} = \pi \left[w_{\varepsilon,1} \text{Cos } k_1 a - \frac{k_1}{\alpha} w_{\varepsilon,3} \text{Sen } k_1 a \right], \quad \delta_{\varepsilon,2} = \pi \left[w_{\varepsilon,2} \text{Sen } k_1 a + \frac{\alpha}{k_1} w_{\varepsilon,4} \text{Cos } k_1 a \right],$$

$$\delta_{\varepsilon,3} = \pi \left[\text{Bi}'[S_a] \text{Cos } k_1 a - \frac{k_1}{\alpha} \text{Bi}[S_a] \text{Sen } k_1 a \right], \quad \delta_{\varepsilon,4} = \pi \left[\text{Ai}'[S_a] \text{Cos } k_1 a - \frac{k_1}{\alpha} \text{Ai}[S_a] \text{Sen } k_1 a \right].$$

(Los análisis sobre el cálculo de la constante de normalización C_{ε} se exponen en el anexo C.4).

En la figura 4.7 se muestra que en los sectores donde las partículas se comportan libremente tiene la misma longitud de onda, implicando que el momento lineal no cambia, aunque haya mayor amplitud de onda en presencia del campo eléctrico. Situación totalmente opuesta cuando las partículas están atravesando la barrera, ya que la presencia del campo eléctrico muestra un crecimiento exponencial en la función de onda indicando mayor posibilidad de tunelamiento, lo que concuerda con el análisis de la figura 4.2. Por otro lado, también se presenta un aumento del momento lineal respecto a la no presencia de campo eléctrico. De ahí, que hay mayor energía cinética para este caso.

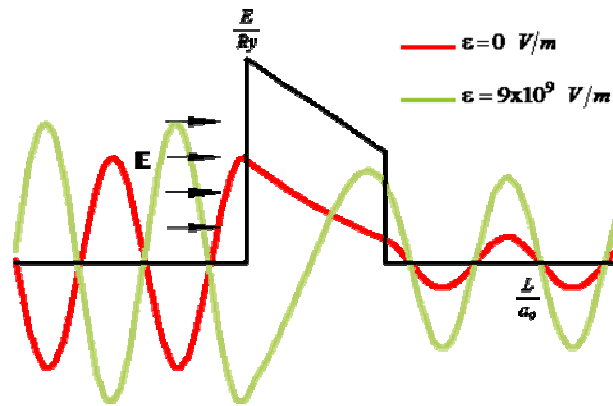


Figura 4.7 Representación esquemática del tunelamiento para una barrera de potencial afectada por campo eléctrico uniforme

Las condiciones particulares para esta representación son similares a las dadas para la figura 3.6.

4.5 DENSIDAD DE PROBABILIDAD

La expresión 4.27 que define la densidad de probabilidad para este caso, presenta cambios sustanciales en comparación al resultado logrado para una barrera sin presencia de campos, ya que la probabilidad de que la partícula tunele son más altas, tal como se muestra en la figura 4.8 para valores mayores a 4 radios de Bohr. Esto también se puede constatar para el sector $a < x < \frac{a+b}{2}$ de la expresión en mención, pues $C_{\epsilon}^2 > C^2$. (La amplitud de onda transmitida C se describe en el anexo A.2).

$$|\psi_\varepsilon(x)|^2 = C_\varepsilon^2 \begin{cases} 0, & \text{si } x < \frac{a-b}{2} \\ |P_{\varepsilon,1}|^2 + 2\text{Re}[P_{\varepsilon,1}P_{\varepsilon,2}^*]\text{Cos}2k_1x + 2\text{Im}[P_{\varepsilon,1}P_{\varepsilon,2}^*]\text{Sen}2k_1x + |P_{\varepsilon,2}|^2, & \text{si } \frac{a-b}{2} < x < 0 \\ |P_{\varepsilon,3}|^2 \text{Ai}[S_{x,\varepsilon}]^2 + 2\text{Re}[P_{\varepsilon,3}P_{\varepsilon,4}^*]\text{Ai}[S_{x,\varepsilon}]\text{Bi}[S_{x,\varepsilon}] + |P_{\varepsilon,4}|^2 \text{Bi}[S_{x,\varepsilon}]^2, & \text{si } 0 < x < a \\ 1, & \text{si } a < x < \frac{a+b}{2} \\ 0, & \text{si } x > \frac{a+b}{2} . \end{cases} \quad (4.27)$$

El argumento de las funciones de Airy, $S_{x,\varepsilon}$ tiene la misma estructura que el definido en función de onda 4.25 y los $P_{\varepsilon,i}$, con $i = \overline{1,4}$, son exactamente las constantes complejas dadas en esta función. Siguiendo con el análisis de la figura 4.8, es evidente que la probabilidad de encontrar la partícula libre antes de la barrera es más pequeña para el caso de presencia de campo eléctrico dado que la probabilidad de reflexión disminuye, o sea, aumenta la transmisión. Por otro lado, en el interior de la barrera (entre 0 y 4 radios de Bohr) se puede apreciar que la probabilidad de encontrar las partículas no decae tan súbitamente cuando hay presencia de campo eléctrico lo que, de nuevo, garantiza una mayor penetración de partículas a través de la barrera. Ahora, cuando la partícula supera la barrera pero ya no es afectada por el campo, la probabilidad de encontrarla pasa a ser más alta que para el caso discutido en la sección 3.5, aunque en este sector el momento lineal sea el mismo y tengan igual impulso.

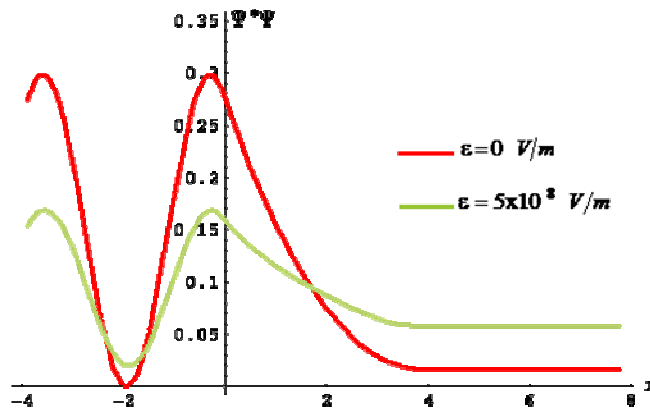


Figura 4.8 Densidad de probabilidad para una barrera de potencial afectada por campo eléctrico uniforme

Para esta figura se ha considerado de nuevo un ancho de barrera de potencial de 2.06 Å, con un parámetro b de 6.18 Å y una altura de la barrera de 10 eV. De acuerdo a estas condiciones la probabilidad de encontrar la partícula después de la barrera de potencial afectada con campo es de alrededor del 8%, superior al 1.3% para el caso de no presencia de campo.

4.6 CORRIENTE DE PROBABILIDAD

La expresión algebraica que se determina para la densidad de corriente de probabilidad, es análoga a la presentada para la barrera sin presencia de campos externos, es decir, que la probabilidad por segundo de encontrar una partícula cruzando algún punto de referencia en una dirección particular, es uniforme en todo el espacio unidimensional, con la única diferencia que la amplitud de transmisión (o constante de normalización) está parametrizada respecto al campo eléctrico:

$$j_{\varepsilon}\left(\frac{E}{v_0}\right) = \sqrt{\frac{2v_0}{m_*}\left(\frac{E}{v_0}\right)} \left[C_{\varepsilon}\left(\frac{E}{v_0}\right) \right]^2. \quad (4.28)$$

La verificación de este resultado se encuentra explicada en el anexo C.5.

En la figura 4.9 (b), es claro que hay mayor presencia de corriente de probabilidad en presencia de campo eléctrico; también se puede observar que alcanza máximos en los mismos valores de energía para los cuales la partícula ha tunelado y se encuentra en algunos de los estados de cuantización que se generan por encima de la barrera (ver figura 4.2 (b)). Lo anterior es mas posible analizarlo en la figura 4.9 (a), puesto que para la energía $E = 0.965v_0$ la corriente de probabilidad alcanza un máximo de 5.6 por ciento de probabilidad de encontrar la partícula asociada a la función de onda 4.25 por cada angstrom recorrido.

Se resalta además, que para un valor de energía aplicada a la partícula de $0.965v_0$, el coeficiente de transmisión alcanzó su máximo, Como se aprecia en la figura 4.2 (a). Sección donde se dio una explicación adecuada para este hecho.

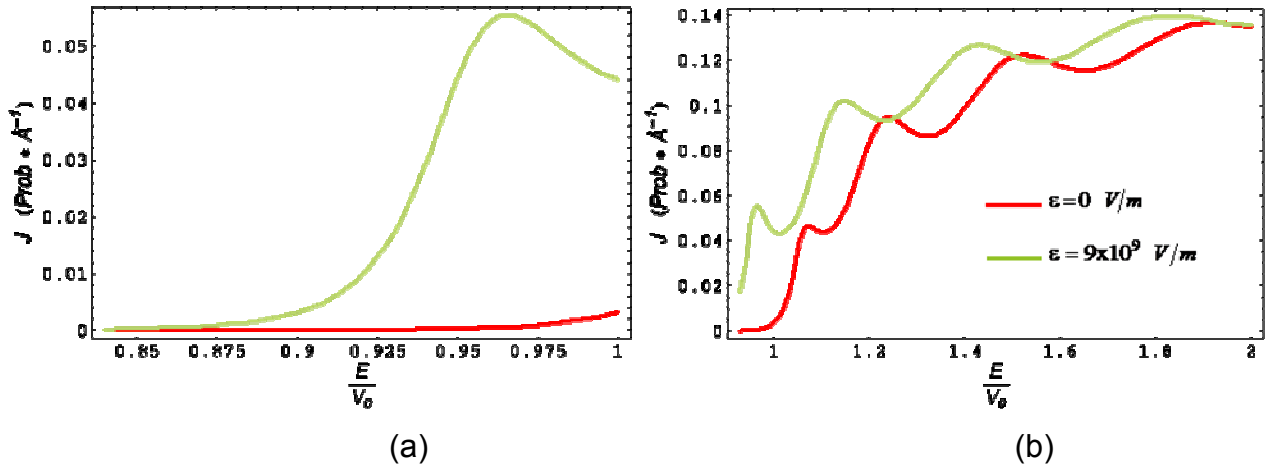


Figura 4.9 Corriente de probabilidad afectada por campo eléctrico uniforme en función de la energía aplicada a la partícula

La descripción de las condiciones para el diseño de esta gráfica es análoga a las establecidas para la representación del efecto túnel (Figura 4.7). También es importante comentar que para generar estas gráficas la corriente de probabilidad se dividió por la velocidad de grupo de la función de onda descrita 4.25, para poder garantizar que la probabilidad total no supere la unidad lo que a su vez genera una adecuada interpretación de la información. De ahí que las unidades estén en probabilidad por Å.

5. BARRERA DE POTENCIAL FINITA RECTANGULAR EN PRESENCIA DE CAMPO MAGNÉTICO UNIFORME

5.1 SOLUCIÓN AL SISTEMA DE ECUACIONES DE SCHRÖDINGER

Continuando con el estudio del transporte cuántico bajo efectos de un campo magnético uniforme \vec{B} , se presentan de nuevo cambios en el sistema, ya que cuando la partícula enfrenta la barrera entra en contacto con el campo magnético, lo que hace que se mueva en un plano perpendicular a este, lo que lleva en principio a pensar en comportamientos bidimensionales, situación que se descarta al realizar un análisis cuidadoso de los cálculos que se presentan. Por lo tanto el movimiento de la partícula sigue siendo de manera unidimensional, tal como corresponde al objetivo de este trabajo.

Si se considera que en el transcurso del trabajo el movimiento de la partícula se ha supuesto paralela al eje x , entonces se ve conveniente realizar el estudio en el plano xy , lo que implicaría que el campo magnético se aplique paralelo al eje z , es decir $\vec{B} = B\hat{z}$, por tratarse de un campo magnético uniforme. Bajo estas consideraciones cabe aclarar que el campo es perpendicular a la velocidad de desplazamiento (v) de la partícula cargada; además también se le asocia la fuerza de Lorentz (F_L),^[32] la cual es causante de que la partícula se desplace por una circunferencia de radio constante r en el plano perpendicular al campo magnético (es decir plano xy). Esto indica que la fuerza en mención es centrípeta y perpendicular a su vez a la velocidad de desplazamiento.

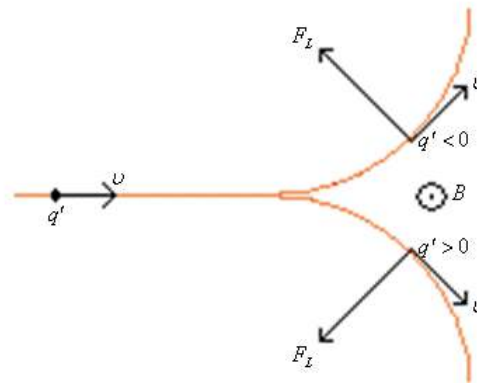


Figura 5.1 Movimiento de una partícula en presencia de un campo magnético uniforme de acuerdo con su carga

En este caso, a diferencia de la barrera de potencial afectada por campo eléctrico, no se conoce hasta el momento de forma explícita el potencial que afecta de manera directa a la barrera, en consecuencia para poder determinar la ecuación de Schrödinger que describe el efecto de campo magnético se hará uso de la función Hamiltoniana, técnica usada frecuentemente en la física para el estudio de las partículas a través de energías asociadas a esta.

El Hamiltoniano en este caso se define por:

$$H = \frac{1}{2m_*} \left[P_x^2 + (P_y - q'Bx)^2 \right] + \nu_0 . \quad (5.1)$$

(El anexo E.1 se muestra una explicación físico-matemática más detallada sobre este Hamiltoniano).

Donde P_x y P_y son los operadores momentum en sus respectivas direcciones, B la magnitud del campo magnético y ν_0 la energía potencial (representa la altura de la barrera). Teniendo en cuenta la ecuación de Schrödinger a manera de

operadores ^[33] $H\psi = E\psi$, se puede describir la ecuación para este caso como sigue:

$$-\frac{\hbar^2}{2m_*} \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x^2} + \frac{1}{2m_*} \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial y} + q'Bx \right)^2 \psi_2 + \nu_0 \psi_2 = E \psi_2 . \quad (5.2)$$

Además se verifica fácilmente que

$$\left(i\hbar \frac{\partial}{\partial y} + q'Bx \right)^2 \psi_2 = -\hbar^2 \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial y^2} + 2q'\hbar Bx \frac{\partial \psi_2}{\partial y} i + (q'Bx)^2 \psi_2 . \quad (5.3)$$

Por lo tanto, $H\psi = E\psi$ equivale a la E.D. descrita en términos de la longitud magnética $k_B^2 = \frac{\hbar}{qB}$ es decir,

$$\frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial y^2} - (k_B^4 x^2 + k_2^2) \psi_2 - \frac{2x}{k_B^2} \frac{\partial \psi_2}{\partial y} i = 0 . \quad (5.4)$$

(Referirse al anexo E.1)

Se observa entonces, una ecuación diferencial elíptica parcial con términos complejos que involucra la presencia del campo magnético. Por lo tanto el sistema de ecuaciones de Schrödinger a resolver es:

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{\hbar^2}{2m_*} \frac{d^2 \psi_{1,3}}{dx^2} = E \psi_{1,3} \quad , \quad \text{si } x < 0 \quad \wedge \quad x > a \end{array} \right. \quad (5.5)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial y^2} - (k_B^4 x^2 + k_2^2) \psi_2 - \frac{2x}{k_B^2} \frac{\partial \psi_2}{\partial y} i = 0 \quad , \quad \text{si } 0 < x < a \end{array} \right. \quad (5.6)$$

De forma análoga a la descripción del estudio con campo eléctrico se procederá a resolver la E.D. 5.6.

Supongamos que la función de onda ψ_2 , es una función de onda más estacionaria que plana que viaja paralela al eje y con una amplitud a determinar, la que a su vez es una función de x . Es decir,

$$\psi_{2,B}(x,y) = u(x) \exp[ik_y y] ; \quad (5.7)$$

Donde k_y el vector de onda en dirección y . Bajo esta primera sustitución se obtiene la E.D. ordinaria de segundo orden:

$$\frac{d^2u}{dx^2} - \left[\frac{1}{k_B^4} (x - k_B^2 k_y)^2 + k_2^2 \right] u(x) = 0 . \quad (5.8)$$

(Referirse al anexo E.2), siendo k_2 el vector de onda en dirección x definido anteriormente en la expresión 3.7. Realizando la sustitución:

$$\beta = \frac{1}{k_B^2} (x - k_B^2 k_y)^2 , \quad (5.9)$$

La E.D. 5.8 se lleva a otra E.D. de segundo orden, la cual puede ser resuelta asintóticamente:

$$\frac{d^2u}{d\beta^2} + \frac{1}{2\beta} \frac{du}{d\beta} - \frac{1}{4} \left(1 + \frac{\lambda_B^2}{\beta} \right) u(\beta) = 0 . \quad (5.10)$$

Con $\lambda_B^2 = k_B^2 k_2^2$ (Ver anexo E.2).

En consecuencia la solución a la E.D. 5.10 es de la forma:

$$u(\beta) = \exp\left[-\frac{1}{2}\beta\right] \phi(\beta) . \quad (5.11)$$

Por lo tanto, la nueva función a encontrar es $\phi(\beta)$. Al tener en cuenta que:

$$\frac{du}{d\beta} = \left(\frac{d\phi}{d\beta} - \frac{1}{2}\phi(\beta) \right) \exp\left[-\frac{1}{2}\beta\right], \quad (5.12)$$

$$\frac{d^2u}{d\beta^2} = \left(\frac{1}{4}\phi(\beta) - \frac{d\phi}{d\beta} + \frac{d^2\phi}{d\beta^2} \right) \exp\left[-\frac{1}{2}\beta\right]. \quad (5.13)$$

Y al reemplazar 5.11, 5.12 y 5.13 en 5.10 se llega a la E.D llamada hipergeométrica confluyente ^[34] (ver apéndice D.6):

$$\beta \frac{d^2\phi}{d\beta^2} + \left(\frac{1}{2} - \beta \right) \frac{d\phi}{d\beta} - \left(\frac{\lambda_B^2 + 1}{4} \right) \phi(\beta) = 0 \quad (5.14)$$

La solución a esta E.D. es una combinación lineal de funciones hipergeométricas confluentes de primera y segunda especie de Kummer (ver apéndice D.5). Es decir:

$$\phi(\beta) = EM\left(\frac{\lambda_B^2 + 1}{4}; \frac{1}{2}; \beta\right) + FU\left(\frac{\lambda_B^2 + 1}{4}; \frac{1}{2}; \beta\right).$$

La solución 5.11 de la E.D. 5.10 se transforme en:

$$u(\beta) = E \exp\left[-\frac{1}{2}\beta\right] M\left(\frac{\lambda_B^2 + 1}{4}; \frac{1}{2}; \beta\right) + F \exp\left[-\frac{1}{2}\beta\right] U\left(\frac{\lambda_B^2 + 1}{4}; \frac{1}{2}; \beta\right).$$

La cual da la solución E.D. 5.6, retomando el cambio de variable 5.9,

$$\psi_{2,B}(x,y) = \left\{ EM\left(\frac{\lambda_B^2 + 1}{4}; \frac{1}{2}; \beta\right) + FU\left(\frac{\lambda_B^2 + 1}{4}; \frac{1}{2}; \beta\right) \right\} \exp\left[-\frac{1}{2}\beta + ik_y y\right].$$

Por lo tanto esta es la función que soluciona la ecuación de Schrödinger que se presenta cuando se tiene en cuenta la energía potencial debida por un campo magnético.

Luego, la solución al sistema de E.D. de Schrödinger planteadas es:

$$\psi_B(x,y) = \begin{cases} A \exp[ik_1x] + B \exp[-ik_1x] , & \text{si } x < 0 \\ \left\{ E M\left(\frac{\lambda_B^2 + 1}{4}; \frac{1}{2}; \beta\right) + F U\left(\frac{\lambda_B^2 + 1}{4}; \frac{1}{2}; \beta\right) \right\} \exp\left[-\frac{1}{2}\beta + ik_y y\right] , & \text{si } 0 < x < a \\ C \exp[ik_1x] , & \text{si } x > a . \end{cases} \quad (5.15)$$

Cabe aclarar que en esta solución la variable y desaparece cuando se calculan las constantes E y F en los puntos de discontinuidad $x=0$ y $x=a$. Pues, más adelante se demostrará que estas constantes tienen incluido el factor $\exp[-ik_y y]$, lo que conlleva a que la función de onda en mención tenga carácter unidimensional. De lo anterior se sigue que la función ϕ tiene el mismo factor $\exp[-ik_y y]$, que consecuentemente se llega a

$$\psi_{2,B} = u_1(x) . \quad (5.16)$$

Esta última igualdad permite comparar E.D. 5.8 asociadas a la función u con la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo (1.7) descrita en la sección 1.1, y así determinar el potencial que experimenta la partícula afectada por el campo magnético en el interior de la barrera:

$$V_B(x) = \frac{\hbar^2}{2m_*} \left(\frac{x}{k_B} - k_B k_y \right)^2 + \nu_0 , \quad \text{si } 0 < x < a . \quad (5.17)$$

Por lo anterior, la energía potencial que se presenta cuando una barrera de potencial finita rectangular es afectada por un campo magnético, esta dada por:

$$V_B(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0 \\ \frac{\hbar^2}{2m_*} \left(\frac{x}{k_B} - k_B k_y \right)^2 + v_0, & \text{si } 0 < x < a \\ 0, & \text{si } x > a. \end{cases} \quad (5.18)$$

En la figura 5.2 el potencial en el interior de la barrera representa una parábola de vértice cuyas coordenadas son dadas por $(k_B^2 k_y, v_0)$. Lo que muestra que el potencial es simétrico respecto a la recta $x = k_B^2 k_y$, generando entonces un pozo cuando el ancho de la barrera supera el valor $k_B^2 k_y$. Así $k_y > \frac{a}{k_B^2}$; condición que permite que la modelación tenga sentido físico. Además, al tener en cuenta que la función hipergeométrica confluyente de segunda especie de Kummer tiene problemas de convergencia (ya que en últimas esta función es una serie) cuando el argumento β es cero, entonces ella no tiene sentido para $x = k_B^2 k_y$. En otras palabras, la longitud del vector de onda k_y no puede tomar el valor $\frac{x}{k_B^2}$ [35].

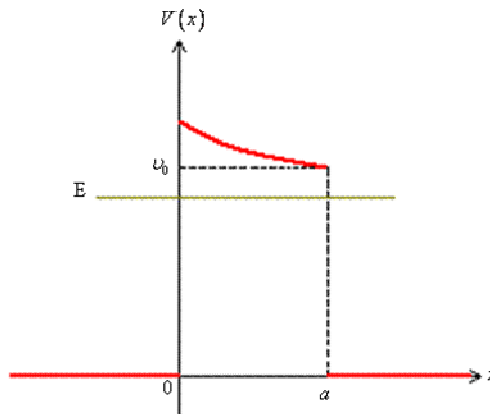


Figura 5.2 Barrera de potencial rectangular afectada por campo magnético uniforme

Es claro que descarta $k_y = \frac{a}{k_B^2}$, pues de lo contrario la función de Kummer de segunda especie diverge.

5.2 COEFICIENTES DE TRANSMISIÓN Y REFLEXIÓN

Siguiendo la misma metodología planteada en la sección 3.2 y 4.2, se adecuarán las amplitudes de las ondas de la función ψ_B para que pueda pertenecer al espacio de Hilbert (L_2).

5.2.1 Condiciones para que la función ψ_B sea continua. Las regiones que involucran el punto de discontinuidad $x = 0$ se analizan de manera análoga a las secciones ya comentadas. Las constantes o amplitudes de onda A y B se parametrizan en función de las constantes E y F , respectivamente. Por lo tanto:

$$\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \frac{\xi}{2k_1} \begin{bmatrix} k_1 M[S] + (\rho_0 M[S] - M'[S])i & k_1 U[S] + (\rho_0 U[S] - U'[S])i \\ k_1 M[S] - (\rho_0 M[S] - M'[S])i & k_1 U[S] + (\rho_0 U[S] - U'[S])i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E \\ F \end{bmatrix} \quad (5.19)$$

Aquí $\xi = \exp\left[-\frac{1}{2}\beta_0 + ik_y y\right]$ y S representan los parámetros y el argumento de las funciones hipergeométricas confluentes de primera y segunda especie. Es decir:

$$S = \left(\frac{\lambda_B^2 + 1}{4}; \frac{1}{2}; \beta_0 \right) = \left(\frac{\lambda_B^2 + 1}{4}; \frac{1}{2}; k_B^2 k_y^2 \right). \quad (5.20)$$

β_0 denota el evaluar β , definida en 5.9 en el punto $x = 0$. De igual manera $\rho_0 = \rho(0)$, donde:

$$\rho_x = \frac{x}{k_B^2} - k_y . \quad (5.21)$$

Al estudiar las regiones que involucra el punto de discontinuidad $x = a$, el sistema que permite establecer las amplitudes de onda E y F en términos de la amplitud de onda transmitida C (las que a su vez generan el mismo efecto de parametrizar las amplitudes A y B , en términos de esta misma onda transmitida C). Aplicando las condiciones de la sección 1.2 se tiene:

$$\begin{cases} \psi_{2,B}(a, y) - \psi_{3,B}(a) = 0 \\ \left. \frac{\partial \psi_{2,B}}{\partial x} \right|_{x=a} - \left. \frac{\partial \psi_{3,B}}{\partial x} \right|_{x=a} = 0 . \end{cases} \quad (5.22)$$

Para lograr obtener una mayor simplificación en los cálculos se debe utilizar el wronskiano de las funciones de Kummer de primera y segunda especie, el cual se define como a continuación se indica (ver el anexo E.3):

$$\omega(M, U)(S_a) = \frac{2}{k_B} \sqrt{\pi} \left[\Gamma\left(\frac{\lambda_B^2 + 1}{4}\right) \right]^{-1} \exp[\beta_a] . \quad (5.23)$$

Donde $\Gamma\left(\frac{\lambda_B^2 + 1}{4}\right)$ es la función gama y $\beta_a = \beta(a)$. Mediante el sistema 5.22 y el wronskiano 5.23 se puede llegar a calcular las amplitudes de onda E y F tal como se muestra en el anexo E.3.1:

$$\begin{bmatrix} E \\ F \end{bmatrix} = \eta \begin{bmatrix} U'[S_a] - \rho_a U[S_a] - k_1 U[S_a] i \\ \rho_a M[S_a] - M'[S_a] + k_1 M[S_a] i \end{bmatrix} \exp\left[-\frac{1}{2}\beta_a + i(k_1 a - k_y y)\right] C . \quad (5.24)$$

Con $\eta = \frac{k_B}{2\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{\lambda_B^2 + 1}{4}\right)$. S_a y ρ_a se definen de forma similar a S y ρ_0

respectivamente, pero evaluadas en el punto $x = a$. De ahí que:

$$S_a = \left(\frac{\lambda_B^2 + 1}{4}; \frac{1}{2}; \beta_a\right) = \left(\frac{\lambda_B^2 + 1}{4}; \frac{1}{2}; \frac{1}{k_B^2} (a - k_B^2 k_y)^2\right) \quad (5.25), \quad \rho_a = \left(\frac{a}{k_B^2} - k_y\right) \quad (5.26)$$

Al analizar el sistema 5.24 se demuestra que las amplitudes de onda E y F tienen como factor $\exp[-ik_y y]$; al ser sustituidas en 5.15 hace que la función de onda $\psi_{2,B}$ sólo dependa de la variable x . Al sustituir 5.24 en el sistema 5.19 se pueden establecer las constantes A y B , cuya escritura resulta más fácil si se introducen las siguientes notaciones

$$\begin{aligned} w_{B,1} &= M[S]U[S_a] - M'[S_a]U[S], & w_{B,3} &= M[S]U[S_a] - M[S_a]U[S], \\ w_{B,2} &= M[S_a]U[S] - M'[S]U[S_a], & w_{B,4} &= M'[S]U[S_a] - M'[S_a]U[S]. \end{aligned}$$

Y a su vez

$$\begin{aligned} \tau_+ &= (w_{B,1} + w_{B,2}) - (\rho_a - \rho_0)w_{B,3}, & \zeta_+ &= k_1^{-1} \left[\rho_a w_{B,2} - \rho_0 w_{B,1} + (\rho_a \rho_0 + k_1^2)w_{B,3} + w_{B,4} \right], \\ \tau_- &= (w_{B,1} - w_{B,2}) - (\rho_a + \rho_0)w_{B,3}, & \zeta_- &= k_1^{-1} \left[\rho_a w_{B,2} - \rho_0 w_{B,1} + (\rho_a \rho_0 - k_1^2)w_{B,3} + w_{B,4} \right]. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \frac{\eta}{2} \begin{bmatrix} \tau_+ + \zeta_+ i \\ \tau_- + \zeta_- i \end{bmatrix} \exp\left[-\frac{1}{2}(\beta_a + \beta_0) + ik_1 a\right] C. \quad (5.27)$$

Luego, la expresión que ayuda a determinar la probabilidad de transmisión cuando la barrera es afectada por un campo magnético uniforme es (Ver la igualdad E.38 y E.39 del anexo E.3.):

$$T_B\left(\frac{E}{V_0}\right) = 4\eta^{-2} \exp[\beta_a + \beta_0] \{\tau_+^2 + \zeta_+^2\}^{-1} . \quad (5.28)$$

De igual manera el coeficiente de reflexión está dado por la expresión:

$$R_B\left(\frac{E}{V_0}\right) = \frac{\tau_-^2 + \zeta_-^2}{\tau_+^2 + \zeta_+^2} . \quad (5.29)$$

A diferencia del resultado obtenido cuando la barrera era afectada por campo eléctrico, la probabilidad de transmisión es un valor muy bajo cuando hay presencia de campo magnético, tal como se observa en la figura 5.3 (a); este suceso era de esperarse puesto que el campo en estudio no acelera la partícula, si no que tiende a frenarla de acuerdo a su intensidad.

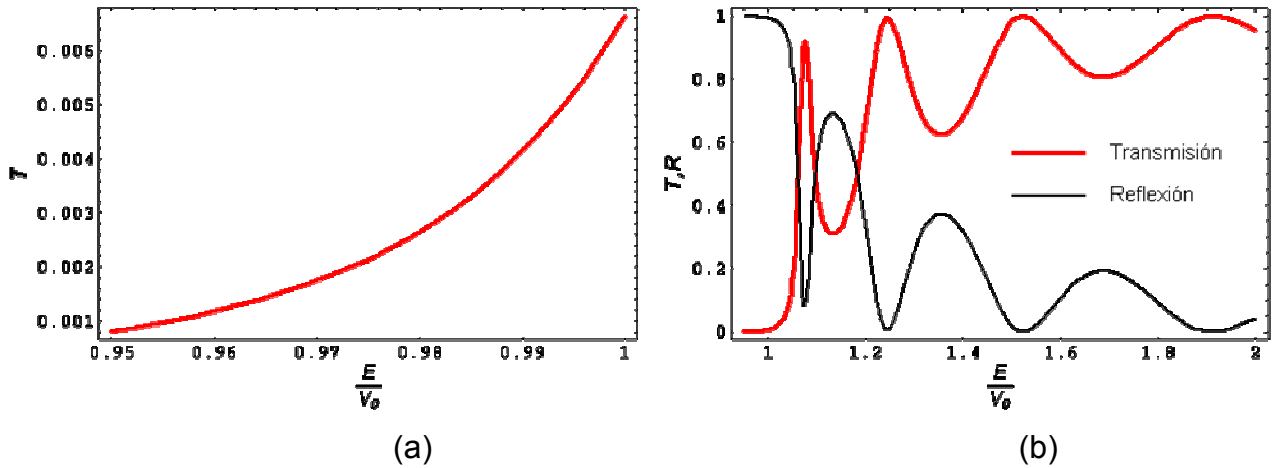


Figura 5.3 Coeficientes de transmisión y reflexión afectados por campo magnético uniforme, en función de la energía aplicada a la partícula.

Para la anterior modelación se tubo en cuenta una barrera de potencial de altura 10 eV con un ancho de 2.06 Å, a la cual se le aplicó un campo magnético uniforme de 0.3 T.

En la figura 5.3 (b) los comportamientos que se aprecian son muy similares a los ya comentados en las otras secciones, con la diferencia que los máximos están ubicados a mayores energías por encima de la barrera, mostrando de nuevo que la cuantización de la barrera sigue siendo por arriba de ella y además que se afecta de acuerdo al campo.

Al manipular las expresiones 5.28 y 5.29 de manera análoga al campo eléctrico se obtienen curvas donde se observa que a medida que el ancho de la barrera crece la probabilidad de transmisión disminuye aun más (figura 5.4). Así mismo se muestra que el campo magnético desfavorece la transmisión, ya que trata de localizar la partícula dentro de la barrera.

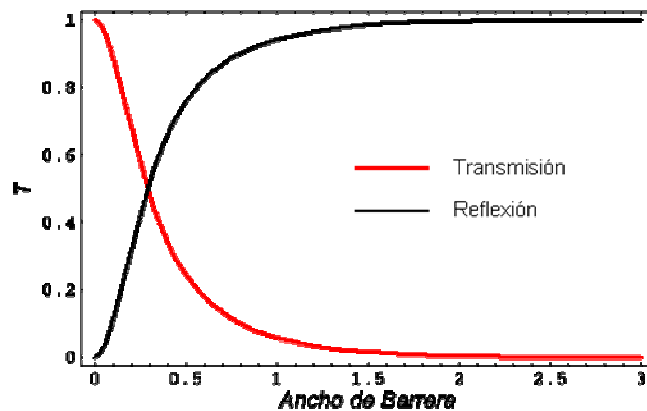


Figura 5.4 Coeficientes de transmisión y reflexión afectados por campo magnético uniforme, en función del ancho de la barrera de potencial. Normalizada en radio Bohr

Tanto esta figura como la siguiente se estructuraron bajo las mismas condiciones de la figura 5.3, con el fin de establecer resultados correspondientes para llegar a afirmaciones concordantes.

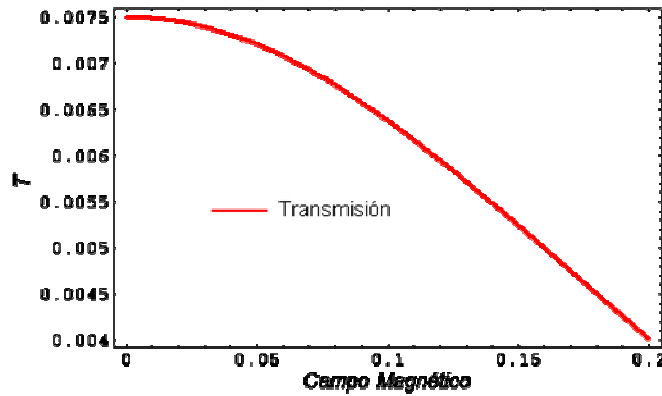


Figura 5.5 Coeficientes de transmisión en función del campo magnético uniforme.
(Medido en teslas)

5.2.2 Condición que deben cumplir los coeficientes de transmisión y reflexión. Introduciendo algunas notaciones para facilitar la prueba de que $T_B + R_B = 1$.

$$\text{Sea } \gamma = \frac{\eta}{4} \exp[-(\beta_a + \beta_0)] , \quad (5.30)$$

$$\mu_1 = \gamma(\tau_+^2 + \zeta_+^2) , \quad (5.31) \quad \mu_2 = \gamma(\tau_-^2 + \zeta_-^2) . \quad (5.32)$$

Utilizando la matriz 5.27 y la anterior notación, se puede escribir

$$A^* A = \mu_1 C^* C \quad \text{y} \quad B^* B = \mu_2 C^* C$$

(Ver anexo E.3, expresión E.38 y E.39)

Entonces de acuerdo con 5.28 y 5.29 el probar $T_B + R_B = 1$ es equivalente a demostrar que $\mu_1 - \mu_2 = 1$.

Por procesos algebraicos, la parte izquierda de la anterior igualdad se reduce a

$4\gamma \{w_{B,1}w_{B,2} + w_{B,3}w_{B,4}\}$, lo que equivale a que

$$\mu_1 - \mu_2 = 4\gamma [\omega(M,U)(\beta_0)] [\omega(M,U)(\beta_a)] .$$

(ver el apéndice D.7. y la expresión 5.23). Al cumplirse esta primera condición para los coeficientes en mención, ya es posible entonces analizar el comportamiento que tiene el coeficiente de transmisión cuando el campo magnético es muy pequeño. Desde el punto de vista físico la partícula describe un movimiento circular de radio $r = \frac{m_*v}{qB}$ cuando se encuentra afectada por un campo

como el que se está estudiando. Por lo tanto, de acuerdo a la magnitud del campo que se desea analizar, el radio de la circunferencia que describe la partícula es mucho mas grande que 1, lo que indica que para recorridos cortos la partícula se mueve en forma paralela al eje perpendicular al campo magnético uniforme, que en nuestro caso corresponde al eje x . Esto permite despreciar el vector de onda k_y , situación que genera las siguientes aproximaciones: $\beta_x \approx \frac{x^2}{k_B^2}$ y $\rho_x \approx \frac{x}{k_B}$.

De ahí, que las funciones hipergeométricas confluentes de primera y segunda especie se pueden aproximar con el nuevo argumento β_x (Ver anexo D.1). De acuerdo a lo anterior es conveniente seguir con la notación de las funciones $w_{B,i}$, $i = \overline{1,4}$, pero entendiendo que sus argumentos están aproximados debido al campo magnético que se está considerando.

Para $B \ll 1$, la expresión del coeficiente de transmisión 5.28 se aproxima como sigue:

$$T_B \approx 4\eta^{-2} \exp \left[\frac{a^2}{k_B^2} \right] \left\{ \left[w_{B,1} + w_{B,2} - \rho_a w_{B,3} \right]^2 + k_1^{-2} \left[\rho_a w_{B,2} + k_1^2 w_{B,3} + w_{B,4} \right]^2 \right\}^{-1} . \quad (5.33)$$

Teniendo en cuenta el anterior resultado ya es posible mirar la tendencia de Γ_B cuando $B \rightarrow 0$, pero para ello es importante multiplicar por el factor $\Gamma\left(\frac{\lambda_B^2 + 3}{4}\right)$, el cual permite que los cálculos que siguen se hagan más sencillos; llegando a la expresión:

$$\Gamma_B \approx 4\eta^{-2}\Gamma^2\left(\frac{\lambda_B^2 + 3}{4}\right)\exp\left[\frac{a^2}{k_B^2}\right]\left\{\Gamma\left(\frac{\lambda_B^2 + 3}{4}\right)\left[w_{B,1} + w_{B,2} - \rho_a w_{B,3}\right]^2 + k_1^{-2}\left[\Gamma\left(\frac{\lambda_B^2 + 3}{4}\right)\left[\rho_a w_{B,2} + k_1^2 w_{B,3} + w_{B,4}\right]\right]^2\right\}^{-1}. \quad (5.34)$$

Luego,

$$\Gamma_B \approx 16\pi \lim_{B \rightarrow 0} \frac{1}{k_B^2} \Gamma^{-2}\left(\frac{\lambda_B^2 + 1}{4}\right) \Gamma^2\left(\frac{\lambda_B^2 + 3}{4}\right) \exp\left[\frac{a^2}{k_B^2}\right] \lim_{B \rightarrow 0} \left\{ \Gamma\left(\frac{\lambda_B^2 + 3}{4}\right) \left[w_{B,1} + w_{B,2} - \rho_a w_{B,3} \right]^2 + k_1^{-2} \left[\Gamma\left(\frac{\lambda_B^2 + 3}{4}\right) \left[\rho_a w_{B,2} + k_1^2 w_{B,3} + w_{B,4} \right] \right]^2 \right\}^{-1}$$

Mediante el cálculo de algunos limites que involucran la función gamma y las funciones hipergeométricas confluentes (anexo D). La expresión del lado derecho anteriormente descrita, se reduce a:

$$\lim_{B \rightarrow 0} \left\{ \text{Cosh}^2 k_2 a + \frac{1}{4} \left(\frac{k_1^2 + k_2^2}{k_1 k_2} \right) \text{Senh}^2 k_2 a \right\}^{-1}. \quad (5.35)$$

Reduciendo el anterior límite se demuestra que cuando el campo magnético tiende a cero el coeficiente transmisión 5.28 tiende al coeficiente de transmisión 3.13. Es decir

$$\lim_{B \rightarrow 0} T_B = \left[1 + \frac{\text{Senh}^2 \sqrt{\frac{2m_* \nu_0}{\hbar^2} a^2 \left(1 - \frac{E}{\nu_0}\right)}}{4 \frac{E}{\nu_0} \left(1 - \frac{E}{\nu_0}\right)} \right]^{-1} = T. \quad (5.36)$$

5.3 APROXIMACIÓN DEL COEFICIENTE DE TRANSMISIÓN UTILIZANDO EL MÉTODO WKB

Considerando de nuevo el potencial dado por el campo magnético (5.17), el cual interviene desde luego en toda la barrera, se puede expresar el momento lineal acorde a este potencial mediante la expresión:

$$p = \sqrt{2m_* \left[E - \frac{\hbar^2}{2m_*} \left(\frac{x}{k_B^2} - k_y \right)^2 - \nu_0 \right]}. \quad (5.37)$$

Establecido este momento lineal se debe verificar que la condición WKB se cumpla con el fin de poder aplicar la relación 2.17. Así,

$$\frac{1}{p^2} \left| \frac{dp}{dx} \right| = \frac{\hbar^2}{k_B^2} \left| \frac{x}{k_B^2} - k_y \right| |p|^{-3} < (qB)^{-1}, \quad \text{donde} \quad |p|^3 > \hbar^3 \left| \frac{x}{k_B^2} - k_y \right|^3.$$

Se puede apreciar que la última desigualdad no tiene términos de la energía aplicada, E a la partícula, lo que sugiere que no es necesario acondicionar la energía E y la altura de la barrera ν_0 para garantizar que la condición WKB se cumpla. Caso contrario al análisis que se presentó cuando la barrera era afectada por campo eléctrico. Al retomar la expresión $(qB)^{-1}$, la constante que se tiene en

cuenta es valor inverso de la carga cuyo orden es de 10^{19} , el cual es muy inferior al orden inverso de la constante de Planck, se tiene $(qB)^{-1} \ll \hbar^{-1}$.

Luego la condición WKB se satisface (ver el anexo E.4):

$$\frac{1}{p^2} \left| \frac{dp}{dx} \right| \ll \hbar^{-1} .$$

En consecuencia, el calcular el coeficiente de transmisión por el método WKB queda reducido a calcular la siguiente integral:

$$I = -\frac{2}{k_B^2} \int_0^a \sqrt{(x - k_B^2 k_y)^2 + (k_2 k_B^2)^2} dx . \quad (5.38)$$

La sustitución $z = x - k_B^2 k_y$ da ^[36]

$$I = -\frac{2}{k_B^2} \left[\frac{z}{2} \sqrt{z^2 + (k_2 k_B^2)^2} + \frac{(k_2 k_B^2)^2}{2} \ln \left[z + \sqrt{z^2 + (k_2 k_B^2)^2} \right] \right]_{z(0)}^{z(a)} . \quad (5.39)$$

Esto implica según la expresión 2.17 que

$$T_B \approx \left[\frac{\sqrt{(k_B k_y)^2 + \lambda_B^2} - k_B k_y}{\sqrt{\beta_a + \lambda_B^2} + \sqrt{\beta_a}} \right]^{\lambda_B^2} \exp \left[\sqrt{\beta_a} \sqrt{\beta_a + \lambda_B^2} - k_B^2 k_y \sqrt{(k_B k_y)^2 + \lambda_B^2} \right] , \quad (5.40)$$

siempre que $k_y > \frac{a}{k_B^2}$ y $\frac{E}{v_0} < 1$.

La representación de la expresión 5.40 en función del cociente entre la energía aplicada a la partícula y la altura de la barrera para un campo magnético de 0.3 T, muestra un comportamiento netamente exponencial, tal como se aprecia en la figura 5.6. Lo que indica que para valores de energía cercanos a la altura de la barrera, el coeficiente de transmisión por el método WKB crece rápidamente en comparación con el método teórico, situación que hace que pierda efectividad el método WKB para este tipo de energías.

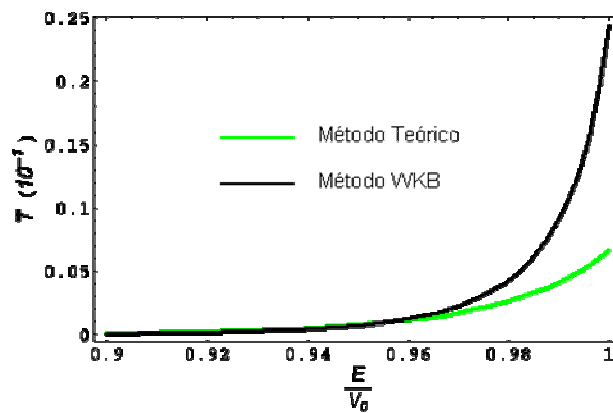


Figura 5.6 Comparación del coeficiente de transmisión en presencia de campo magnético uniforme con el método WKB en función de la energía aplicada a la partícula.

El análisis de la aproximación del coeficiente de transmisión 5.40, pero en función del ancho de la barrera de potencial a una energía aplicada a la partícula de 9.8 eV, muestra comportamientos muy parecidos tanto para la aproximación como para el resultado teórico dado en la expresión 5.28, ya que éstos difieren prácticamente en que el primero decrece lentamente a medida que el ancho crece; mientras que por el método teórico el decrecimiento es más rápido (figura 5.7).

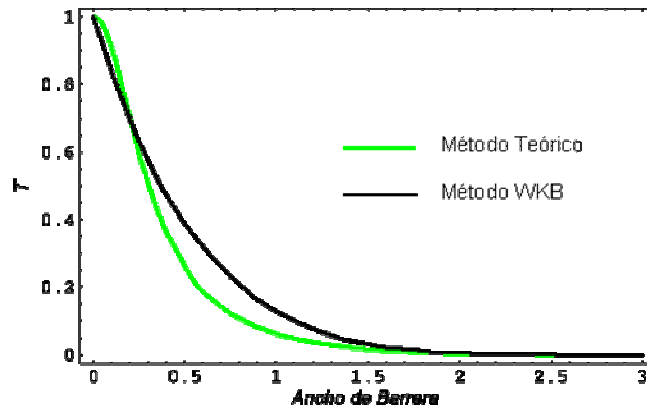


Figura 5.7 Comparación del coeficiente de transmisión en presencia de campo magnético uniforme con el método WKB en función del ancho de la barrera de potencial. Normalizada en radio de Bohr

5.4 TUNELAMIENTO DE LA PARTÍCULA

Como ya se ha comentado en las secciones 3.4 y 4.4, la condición física que permiten realizar un análisis cualitativo del tunelamiento de una partícula se fundamenta en la representación gráfica de la parte real de la expresión:

$$\psi_B(x) = C_B \begin{cases} 0, & \text{si } x < \frac{a-b}{2} \\ P_{B,1} \exp[i(x+a)k_1] + P_{B,2} \exp[-i(x-a)k_1], & \text{si } \frac{a-b}{2} < x < 0 \\ \left\{ P_{B,3} M\left(\frac{\lambda_B^2+1}{4}; \frac{1}{2}; \beta\right) + P_{B,4} U\left(\frac{\lambda_B^2+1}{4}; \frac{1}{2}; \beta\right) \right\} \exp\left[-\frac{1}{2}\beta + ik_1 a\right], & \text{si } 0 < x < a \\ \exp[ik_1 x], & \text{si } a < x < \frac{a+b}{2} \\ 0, & \text{si } x > \frac{a+b}{2} \end{cases} \quad (5.41)$$

Donde $\beta = \frac{1}{k_B^2} (x - k_B^2 k_y)^2$ y además

$$\begin{aligned}
P_{B,1} &= R_1 \{ \tau_+ - \zeta_+ i \} , & P_{B,2} &= R_1 \{ \tau_- + \zeta_- i \} , \\
P_{B,3} &= R_2 \left\{ \left(U[S_a] - \rho_a U[S_a] \right) - k_1 U[S_a] i \right\} , \\
P_{B,4} &= R_2 \left\{ \left(\rho_a M[S_a] - M[S_a] \right) + k_1 M[S_a] i \right\} .
\end{aligned}$$

Las constantes R_1 y R_2 se definen a través de las expresiones:

$$R_1 = \frac{k_B}{4\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{\lambda_B^2 + 1}{4}\right) \exp\left[-\frac{1}{2}(\beta_a + \beta_0)\right] , \quad R_2 = \frac{k_B}{2\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{\lambda_B^2 + 1}{4}\right) \exp\left[-\frac{1}{2}\beta_a\right] .$$

Bajo los argumentos explicados en las secciones antes referidas a la función de onda dada por la expresión 5.41, esta satisface con las condiciones de ser un elemento del espacio de Hilbert, esto se aprecia en el análisis de la normalización de la función.

La parte real de la función de onda 5.41 es dada por la expresión:

$$\psi_{R,B}(x) = C_B \begin{cases} 0 , & \text{si } x < \frac{a-b}{2} \\ \delta_{B,1} \text{Cos } k_1 x + \delta_{B,2} \text{Sen } k_1 x , & \text{si } \frac{a-b}{2} < x < 0 \\ \delta_{B,3} M\left(\frac{\lambda_B^2 + 1}{4}; \frac{1}{2}; \beta\right) \exp\left[-\frac{1}{2}\beta\right] + \delta_{B,4} U\left(\frac{\lambda_B^2 + 1}{4}; \frac{1}{2}; \beta\right) \exp\left[-\frac{1}{2}\beta\right] , & \text{si } 0 < x < a \\ \text{Cos } k_1 x , & \text{si } a < x < \frac{a+b}{2} \\ 0 , & \text{si } x > \frac{a+b}{2} ; \end{cases} \quad (5.42)$$

donde

$$\delta_{B,1} = 2R_1 \left[\left(w_{B,1} - \rho_a w_{B,3} \right) \text{Cos } k_1 a + k_1 w_{B,3} \text{Sen } k_1 a \right] ,$$

$$\delta_{B,2} = 2R_1 \left[k_1^{-1} (\rho_a w_{B,2} - \rho_0 w_{B,1} + \rho_a \rho_0 w_{B,3} + w_{B,4}) \text{Cos } k_1 a - (w_{B,2} + \rho_0 w_{B,3}) \text{Sen } k_1 a \right],$$

$$\delta_{B,3} = (U'[S_a] - \rho_a U[S_a]) \text{Cos } k_1 a + k_1 U[S_a] \text{Sen } k_1 a ,$$

$$\delta_{B,4} = (\rho_a M[S_a] - M'[S_a]) \text{Cos } k_1 a - k_1 M[S_a] \text{Sen } k_1 a .$$

Los análisis de la onda transmitida C_B se encuentran detallados en el anexo E.6.

Físicamente se espera que lo revelado por el coeficiente de transmisión en la figura 5.3 sea reflejado en el tunelamiento de la partícula, es decir que la amplitud de la onda afectada por el campo magnético sea menor a la que no está afectada por campos. Al observar la figura 5.8 aparentemente se presenta una contradicción antes de que la partícula enfrente la barrera, situación que se explica debido a que hay más probabilidad de que la onda se refleje (en comparación con la onda que no es afectada por campos externos), la cual al sumarse con la onda incidente genera el fenómeno que se aprecia en la figura en mención. También se puede apreciar que después que atraviesa la barrera la onda asociada a la partícula satisface lo que se esperaba en un principio.

Cabe resaltar que en esta figura la longitud de onda asociada a la partícula se mantiene constante antes de enfrentar la barrera, aunque con un pequeño desfase dado por la presencia del campo magnético. Desfase que se corrige después que la partícula atraviesa la barrera, mostrándose en ambas situaciones la misma longitud de onda y por ende la conservación del momento lineal, lo que indica que la partícula se comporta libremente.

Para esta figura la altura y el ancho de la barrera se preservan de igual forma a los anteriores resultados.

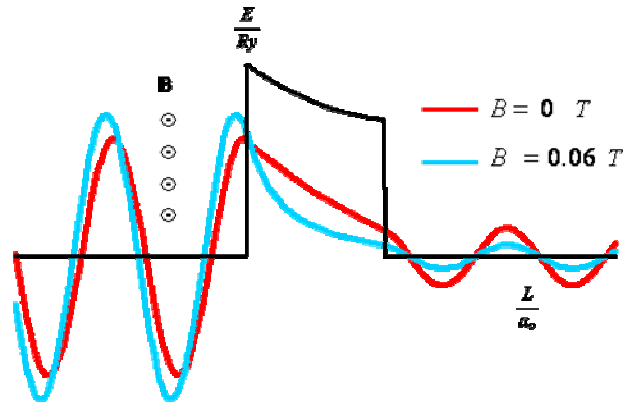


Figura 5.8 Representación esquemática del tunelamiento para una barrera de potencial afectada por campo magnético uniforme

5.5 DENSIDAD DE PROBABILIDAD

Se puede apreciar que la densidad de probabilidad definida por la expresión 5.43 tiene una estructura similar a la dada por la presencia de campo eléctrico (4.27), lo que indica que el comportamiento de probabilidad está sujeto necesariamente al campo, ya que las funciones en que difieren van de acuerdo al campo externo tratado:

$$|\psi_B(x)|^2 = C_B^2 \begin{cases} 0, & \text{si } x < \frac{a-b}{2} \\ |P_{B,1}|^2 + 2\text{Re}[P_{B,1}P_{B,2}^*]\text{Cos}2k_1x - 2\text{Im}[P_{B,1}P_{B,2}^*]\text{Sen}2k_1x + |P_{B,2}|^2, & \text{si } \frac{a-b}{2} < x < 0 \\ \left\{ |P_{B,3}|^2 M[S_{x,B}]^2 + 2\text{Re}[P_{B,3}P_{B,4}^*]M[S_{x,B}]U[S_{x,B}] + |P_{B,4}|^2 U[S_{x,B}]^2 \right\} \exp[-\beta_x], & \text{si } 0 < x < a \\ 1, & \text{si } a < x < \frac{a+b}{2} \\ 0, & \text{si } x > \frac{a+b}{2} \end{cases} ; \quad (5.43)$$

donde $S_{x,B} = \left(\frac{\lambda_B^2 + 1}{4}; \frac{1}{2}; \frac{1}{k_B^2} (x - k_B^2 k_y)^2 \right)$ y $P_{B,i}$, con $i = \overline{1,4}$ son las constantes complejas definidas en la función de onda 5.41.

Como se aprecia en la figura 5.9, es más probable encontrar la partícula en el lado derecho como partícula libre, debido al movimiento que genera el campo magnético sobre ella. En consecuencia la probabilidad de que la partícula cruce la barrera disminuye con respecto a la ausencia de campo magnético. Es decir el campo magnético no favorece el tunelamiento cuántico, fenómeno que no se presenta si el campo con el cual se afecta la barrera es eléctrico.

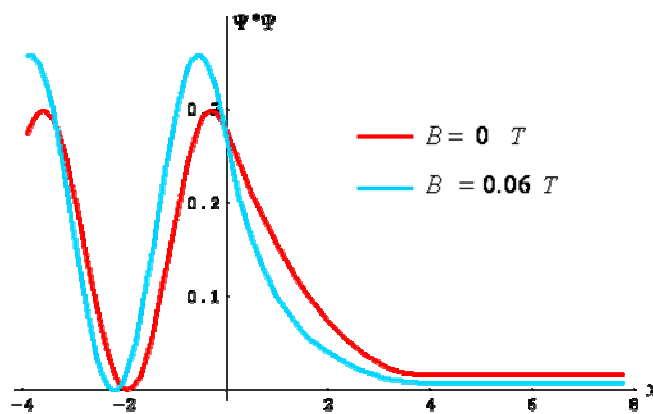


Figura 5.9 Densidad de probabilidad para una barrera de potencial afectada por campo magnético uniforme. Normalizada en radio de Bohr.

Para esta figura se ha tenido en cuenta un ancho de barrera de potencial de 2.06 Å, con un parámetro b de 6.18 Å y una altura de la barrera de 10 eV. De acuerdo a estas condiciones la probabilidad de encontrar la partículas después de la barrera de potencial afectada con campo magnético es de alrededor del 1% inferior al 1.3% para el caso de ausencia de campo.

5.6 CORRIENTE DE PROBABILIDAD

Para este caso, de nuevo la corriente de probabilidad tiene una estructura similar a la obtenida cuando la barrera está afectada por campo eléctrico, pues la única diferencia que se presenta se refiere a la constante de parametrización que es dada por el campo en estudio. Esto ratifica que los fenómenos estudiados en este trabajo se caracterizan por tener dos tipos de ondas en el interior de la barrera, ondas planas las cuales preservan la estructura de velocidad de grupo por densidad de probabilidad ^[37] (tal como se aprecia en la expresión 5.44) y principalmente por ondas estacionarias. Cabe indicar que dicha estructura se ha venido presentando en cada una de las secciones anteriores referentes a este tema. Teniendo en cuenta la función de onda 5.41 y los cálculos necesarios para hallar la corriente de probabilidad se llega a:

$$j_B \left(\frac{E}{v_0} \right) = \sqrt{\frac{2v_0}{m_*} \left(\frac{E}{v_0} \right)} \left[C_B \left(\frac{E}{v_0} \right) \right]^2 . \quad (5.44)$$

Este resultado se detalla en el anexo E.7.

En correspondencia con lo antes comentado, se puede observar en la figura 5.10 (a) que la corriente de probabilidad para energías aplicadas a la partícula inferiores a la altura de la barrera es muy pequeña debido al campo magnético considerado (1 T). Mientras que si la partícula se empieza a liberar del campo en mención, su corriente de probabilidad comienza a crecer, ya que se está comportando como una partícula libre (figura 5.10 (b)).

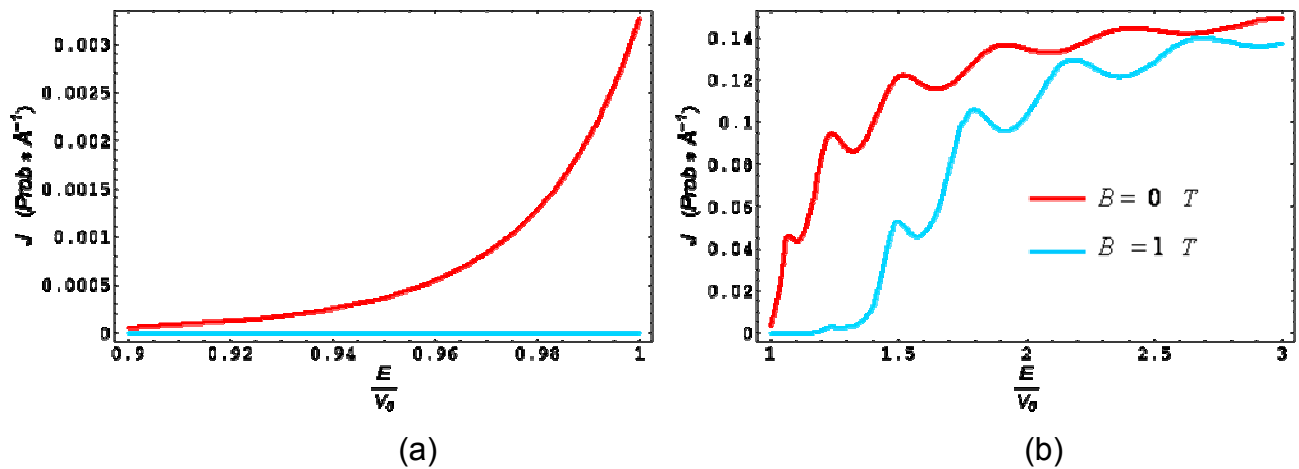


Figura 5.10 Corriente de probabilidad afectada por campo magnético uniforme en función de la energía aplicada a la partícula

Es importante comentar que para construir estas gráficas la corriente de probabilidad se dividió entre la velocidad de grupo de la función de onda descrita en 5.41, De ahí que las unidades estén en probabilidad por Å. (El objetivo de este procedimiento es mejorar la escala de presentación de la gráfica y su interpretación).

6. ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS

En esta parte del trabajo se complementa los resultados ya comentados en las secciones 3, 4 y 5, mediante comparaciones directas entre los campos externos en cada uno de los tópicos que ayudan al estudio del transporte cuántico en una barrera de potencial.

La metodología que se sigue para detallar los resultados de este trabajo se fundamenta en el modelamiento de las funciones que describen los coeficientes de transmisión, el tunelamiento de la partícula, la densidad de probabilidad y la corriente de probabilidad; cada uno de ellos afectados por el campo eléctrico o el campo magnético. Por otra parte, la presentación de las gráficas se hace a través de escalas adimensionales, situación que ayuda a generalizar el comportamiento de la partícula: antes, durante y después de atravesar la barrera de potencial afectada por los mencionados campos. Cabe indicar que los datos que se utilizan para los distintos análisis responden a modelamientos teóricos para un electrón libre.

6.1 COEFICIENTE DE TRANSMISIÓN

Por motivos prácticos, el análisis solo se concentrará en el coeficiente de transmisión, ya que el coeficiente de reflexión puede ser considerado como su complemento ($R = 1 - T$). A continuación se mostrarán diversos resultados en función de la energía aplicada a la partícula, el ancho de la barrera o los campos externos.

6.1.1 Afectado por campo eléctrico uniforme. En la figura 6.1 se observa claramente que se presenta un valor de energía para la partícula por debajo de la altura de la barrera para los cuales la función que describe el coeficiente de transmisión alcanza un máximo, que depende de la intensidad del campo eléctrico; esto sugiere que la partícula alcanzó un nivel de energía permitido del sistema, el cual se da para valores superiores a la altura de la barrera. Esto es físicamente posible si la partícula tunela, fenómeno que es permitido debido a que la barrera se deflecta por la presencia del campo eléctrico. Por lo tanto si se incrementa la intensidad del campo, la probabilidad de tunelar crece.

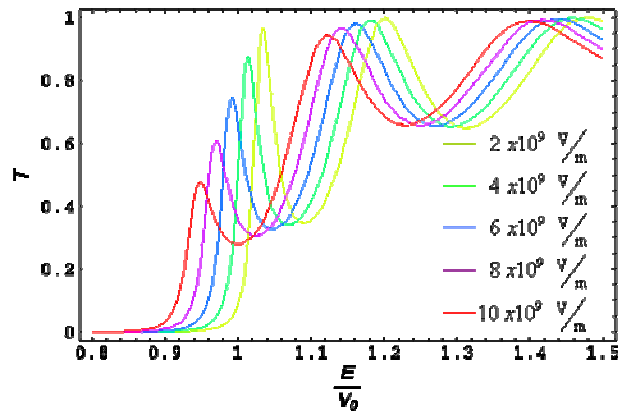


Figura 6.1 Coeficiente de transmisión para varios campos eléctricos en función de la energía aplicada a la partícula

Así mismo, en la figura 6.2 se corrobora aun más que el campo eléctrico es un factor que favorece en gran parte al tunelamiento de una partícula.

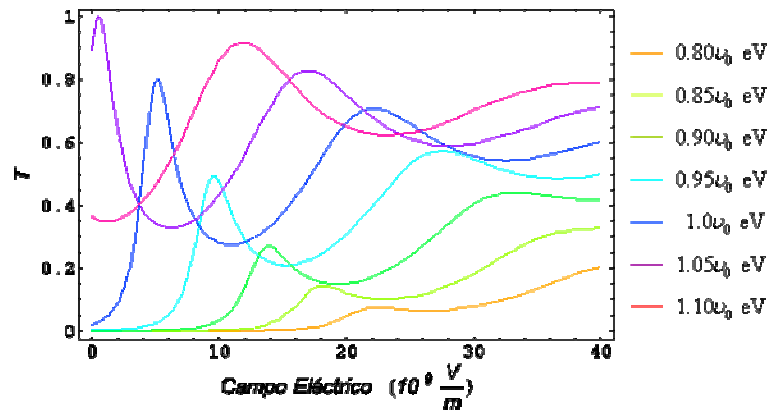


Figura 6.2 Coeficiente de transmisión para varias energías aplicadas a la partícula en función del campo eléctrico uniforme

Por otro lado, al analizar el coeficiente de transmisión en función del ancho de la barrera los comportamientos que se observan son muy similares a los ya comentados en las anteriores figuras, pues a medida que el campo eléctrico crece la transmisión aumenta alcanzándose valores máximos y mínimos, estos últimos permiten determinar los valores del ancho de la barrera que no ayudan a que la probabilidad de la partícula sea la mejor para que ésta tunele, tal como se muestra en las figuras 6.3 y 6.4.

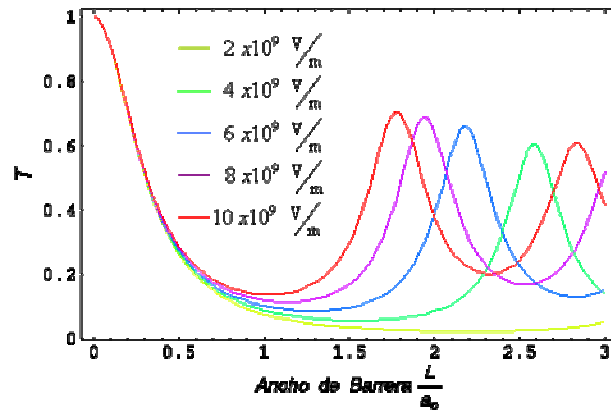


Figura 6.3 Coeficiente de transmisión para varios campos eléctricos en función del ancho de la barrera

Como debería de esperarse, en la figura 6.4 se muestra que a mayor energía aplicada a la partícula teniendo en cuenta el no superar la altura de la barrera ($E < v_0$), la transmisión aumenta, debido a que la barrera es más angosta en la parte superior, permitiendo que el porcentaje de probabilidad de que la partícula tunele sea más amplio. Teniendo en cuenta que los resultados de la figura 6.4 se obtuvieron para un campo eléctrico de $9 \times 10^9 \text{ V/m}$, hay valores para el ancho de la barrera y la energía aplicada a la partícula que no favorecen la transmisión, razón que obedece a la estructura que tiene dicho coeficiente para “campos altos”, puesto que depende de las tendencias de las funciones de Airy para estos casos (ver apéndice C.7).

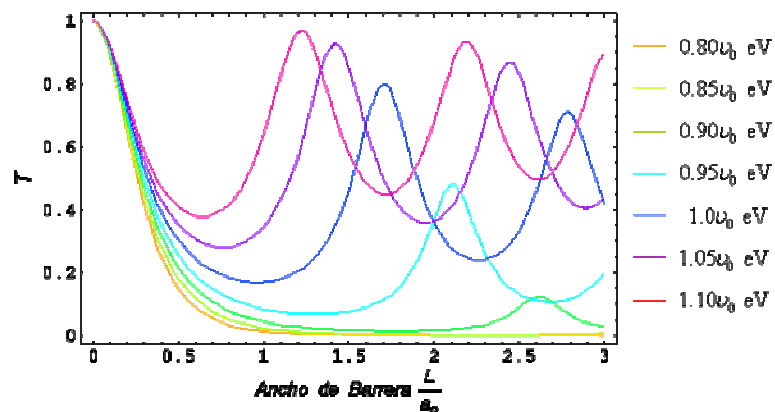


Figura 6.4 Coeficiente de transmisión para varias energías aplicadas a la partícula en función del ancho de la barrera y campo eléctrico fijo

6.1.2 Afectados por campo magnético uniforme. Los efectos del campo magnético en el coeficiente de transmisión se hacen más evidentes cuando el campo se incrementa, puesto que este hace que la partícula se localice, debido a que la frecuencia ciclotrónica cada vez es más grande, siendo necesario incrementar la energía aplicada a la partícula para que logre escapar del campo y así el coeficiente aumente, tal como la muestra la figura 6.5. También se aprecia en esta figura que a la partícula se le dificulta pasar la barrera, aun estando por encima de ella, al considerar campos altos.

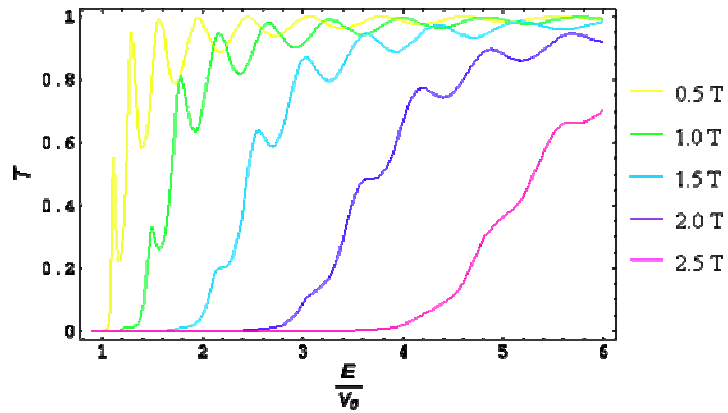


Figura 6.5 Coeficiente de transmisión para varios campos magnéticos en función de la energía aplicada a la partícula

En la figura 6.6 se observa que no necesariamente si se incrementa la energía de la partícula y el campo magnético, el coeficiente de transmisión aumenta, puesto que este no solo depende de la energía sino también del campo. Es importante mencionar que para una energía de 1.10 veces la altura de la barrera $\left(\frac{E}{V_0} = 1.10\right)$ y un campo magnético aproximado de 0.425 teslas se presenta un estado resonante del sistema, donde posiblemente la partícula ha cruzado la barrera y aun se encuentre por encima de ella, debido que la barrera se altera en forma parabólica lo que hace suponer que muy probablemente los niveles de energía de cuantización se deformen de esta manera.

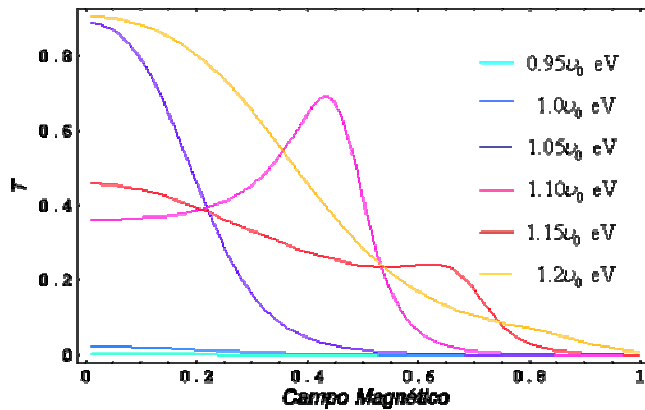


Figura 6.6 Coeficiente de transmisión para varias energías aplicadas a la partícula en función del campo magnético uniforme

Al dejar fija la energía aplicada a la partícula (9.8 eV) y variar el ancho de la barrera para algunos campos magnéticos, los comportamientos comentados anteriormente siguen siendo similares, puesto que a menor campo la probabilidad de tunelar aumenta dando la posibilidad de que el ancho de barrera sea más grandes (figura 6.7).

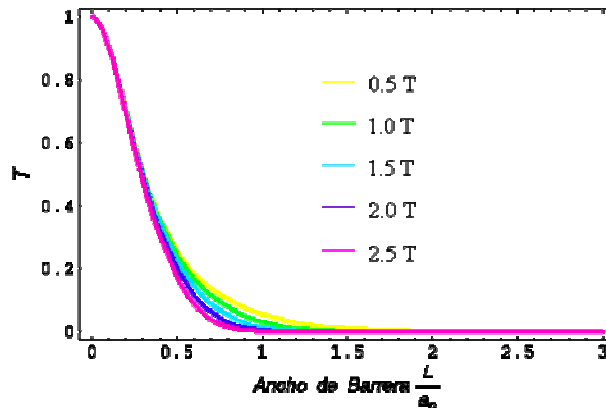


Figura 6.7 Coeficiente de transmisión para varios campos magnéticos en función del ancho de la barrera

Para el caso de un campo magnético fijo (1 T) se aprecia en la figura 6.8 que a mayor energía aplicada a la partícula empiezan a surgir valores del ancho de la barrera que hacen que aparezcan máximos para el coeficiente de transmisión.

Esto muestra que para valores superiores de energía con respecto a la altura de la barrera el sistema sigue siendo cuantizado.

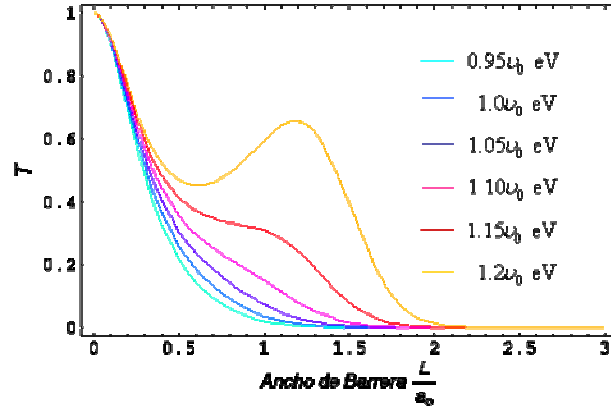


Figura 6.8 Coeficiente de transmisión para varias energías aplicadas a la partícula en función del ancho de la barrera y campo magnético fijo

6.2 COEFICIENTE DE TRANSMISIÓN AFECTADO POR CAMPOS EXTERNOS

Al comparar los efectos en la transmisión, tanto del campo eléctrico como del magnético en función de la energía aplicada a la partícula se observa en la figura 6.9 que para energías menores a la altura de la barrera el campo eléctrico favorece el tunelamiento, puesto que defleca la barrera y permite cruzarla más fácilmente, mientras que el campo magnético localiza la partícula, necesiándose más energía para poder cruzar la barrera. Por otro lado, cuando no se tiene en cuenta ningún campo externo el coeficiente crece a medida que la energía crece hasta alcanzar la unidad o la altura de la barrera, de ahí en adelante se presentan ciertas energías que entran en resonancia, siendo ellas las permitidas para un sistema cuantizado. Situación idéntica se presenta para los distintos campos.

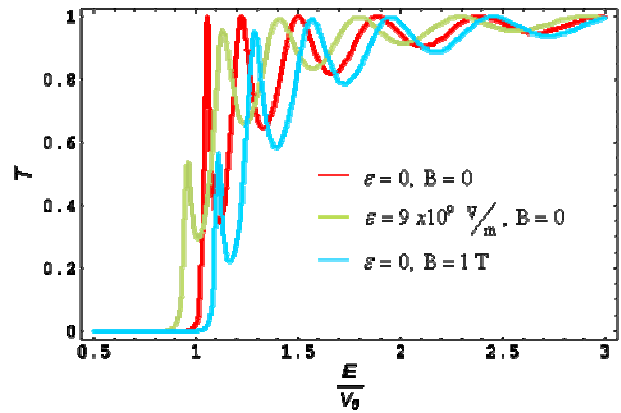


Figura 6.9 Coeficiente de transmisión en función de la energía aplicada a la partícula sin y en presencia de campos externos

En la figura 6.10 de nuevo se muestra que cuando hay presencia de campo eléctrico y el ancho de la barrera varía, el coeficiente de transmisión es más grande que para los otros dos casos, además se presentan máximos, lo que es evidencia de que la partícula ya cruzó la barrera y alcanzó un nivel de cuantización, ya que la energía aplicada a la partícula en este caso corresponde a 9.8 eV inferior al altura de la barrera que es de 10 eV.

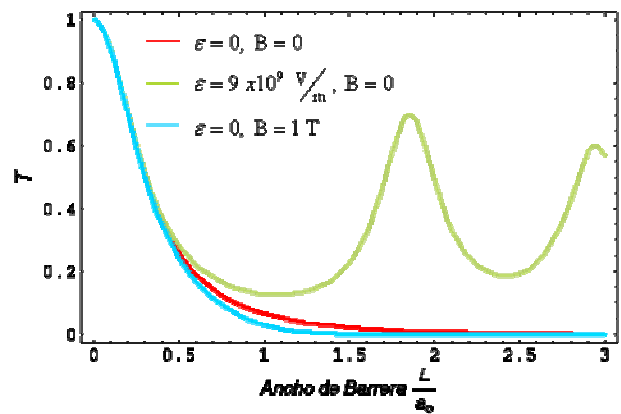


Figura 6.10 Coeficiente de transmisión en función del ancho de la barrera sin y en presencia de campos externos

6.3 TUNELAMIENTO DE UNA PARTÍCULA AFECTADA POR CAMPOS EXTERNOS

La figura 6.11 muestra detalles muy importantes acerca de tunelamiento de la partícula cuando está en presencia de algún campo externo. Al analizarla de derecha a izquierda es claro que las tres funciones de onda se intersecan en el punto de equilibrio, lo que indica que tiene la misma longitud de onda, es decir el mismo momento lineal, por lo tanto la partícula se comporta libremente al igual que antes de enfrentar la barrera, donde también se evidencia una longitud de onda similar, con la única diferencia de que la onda que es afectada por el campo magnético está un poco desfasada, lo que se interpreta como el hecho de que este campo localiza la partícula de acuerdo a la intensidad que tenga.

Al analizar las amplitudes de onda después que la partícula ha tunelado se observa que la de mayor amplitud esta dada cuando la función de onda transmitida es la afectada por el campo eléctrico, ya que este acelera la partícula amplificando su amplitud, lo que se interpreta como una mayor posibilidad de la partícula para tunelar (afirmación que se puede verificar al observar la figura 6.9). Por otro lado, debido a que la amplitud de onda que se muestra para la onda transmitida en presencia de campo magnético es más pequeña que la onda sin la presencia de campos externos, la probabilidad de que la partícula tunele se disminuye mucho más que cuando hay ausencia de campos.

Las amplitudes correspondientes a las ondas transmitidas, que se muestran antes que la partícula enfrente la barrera se explican considerando las ondas reflejadas, puesto que a mayor amplitud de onda menor es la cantidad de ondas reflejadas y más las transmitidas. Por lo tanto la amplitud de onda más grande debe corresponder a la onda afectada por campo eléctrico, tal como se observa en la figura 6.11. Siguiendo en este mismo sentido, la amplitud de onda a mencionar se relaciona con la función de onda que no está afectada por campos externos, pero

como se puede apreciar en la figura esta situación no se presenta, ya que el campo magnético atrae la partícula y no se generan muchas ondas reflejadas que cuando se trata de la función de onda sin presencia de campos. De ahí que se espera que si el campo magnético aumenta atraerá a un más la partícula y la amplitud de onda que se presenta antes de la barrera será mayor que incluso la generada por el campo eléctrico.

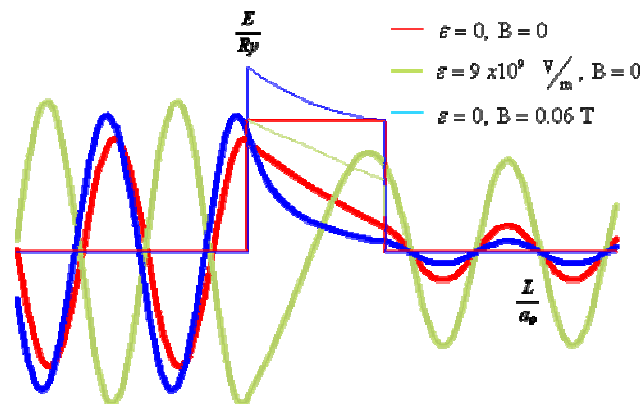


Figura 6.11 Tunelamiento de una partícula sin y en presencia de campos externos

Cabe decir que el comportamiento de la modulación de las ondas principalmente estacionarias en el interior de la barrera tienen la forma de una exponencial creciente para el caso del campo eléctrico y una exponencial decreciente para los casos de campo magnético y la ausencia de campos externos, coincidiendo en su orden con la efectividad de transmisión después de haber tunelado la barrera.

6.4 DENSIDAD DE PROBABILIDAD

El estudio de la densidad de probabilidad en este trabajo va a permitir verificar que tipo de campo aplicado a una barrera de potencial ayuda más al transporte cuántico, además ayuda a reconocer donde es más probable encontrar la partícula, lo que conlleva a interpretar el principio de incertidumbre en cada caso.

6.4.1 Afectada por campo eléctrico uniforme. Al considerar un campo eléctrico de $5 \times 10^8 \text{ V/m}$ se obtienen los siguientes resultados:

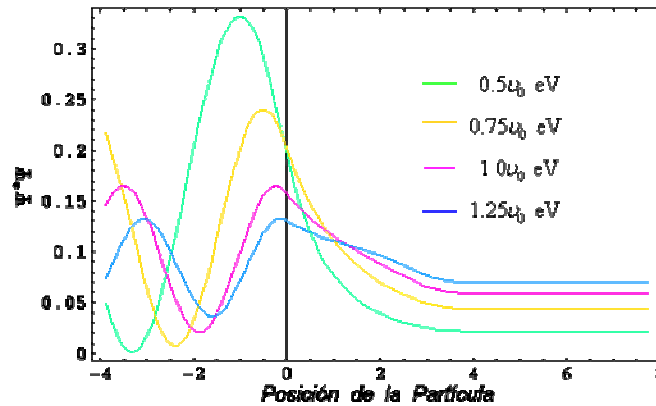


Figura 6.12 Densidad de probabilidad en función de la posición de la partícula para varias energías aplicadas a ella. Con campo eléctrico fijo, normalizada en radio de Bohr.

En esta figura se observa que a medida que la energía aplicada a la partícula crece, la probabilidad de tunelar aumenta, mientras que decrece la probabilidad de encontrarla antes de la barrera.

Para el resultado que a continuación se describe se consideran dos campos eléctricos, uno de igual magnitud al utilizado para los resultados anteriores y otro de magnitud de $4 \times 10^8 \text{ V/m}$, los cuales se distinguen en la figura 6.13 porque el de mayor magnitud genera una curva por debajo del de menor magnitud. Entonces se puede apreciar que si el campo disminuye, al igual que la energía aplicada a la partícula, la probabilidad de que esta atraviese la barrera disminuye, mostrándose una relación directa de la energía de la partícula, con el campo eléctrico y con la probabilidad de encontrarla después de la barrera.

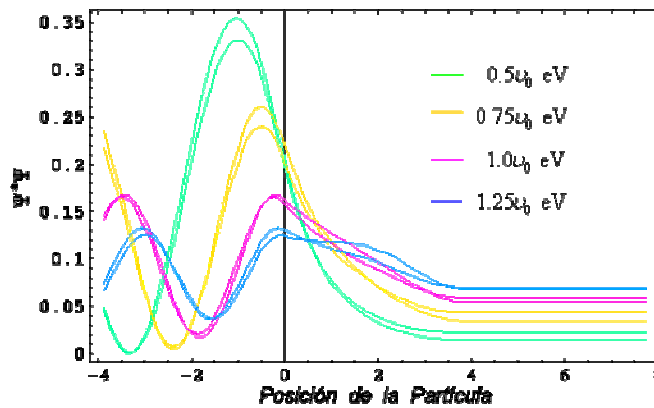


Figura 6.13 Densidad de probabilidad en función de la posición de la partícula para varias energías aplicadas a ella. Normalizada en radio de Bohr.

6.4.2 Afectada por campo magnético uniforme. Para lograr los resultados representados en la figura 6.14 se aplicó un campo magnético de 0.06 T en donde se aprecia un caso totalmente opuesto a su análogo con campo eléctrico (figura 6.12), ya que al incrementar la energía aplicada a la partícula en un rango no muy superior a la altura de la barrera, la probabilidad de tunelar disminuye, esto se debe a que la partícula se acerca a la parábola magnética que se forma en la parte superior de la barrera siendo la parte más afectada por el campo y presentándose mayor probabilidad de encontrarla libre antes de enfrentar la barrera.

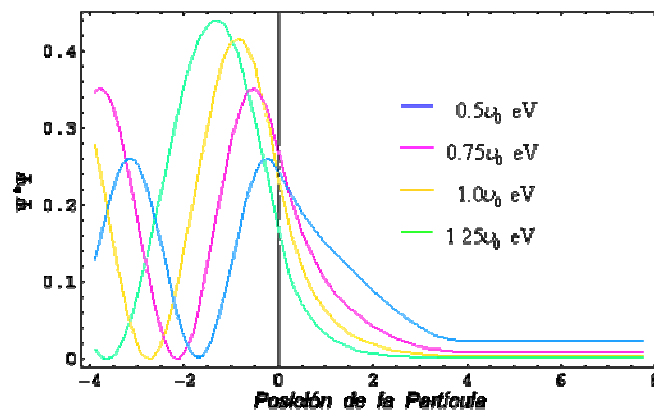


Figura 6.14 Densidad de probabilidad en función de la posición de la partícula para varias energías aplicadas. Con campo magnético fijo, normalizada en radio de Bohr.

Para la interpretación de la figura 6.15 se debe tener en cuenta que el campo con menor intensidad (0.04 T) siempre va estar por debajo, mientras que el de mayor intensidad (0.06 T) se ubica por encima. De ahí que a mayor energía aplicada a la partícula y mayor magnitud en el campo magnético se muestra que la probabilidad de encontrarla después de la barrera disminuye. Generándose una relación inversa entre la energía aplicada o el campo magnético y la densidad de probabilidad.

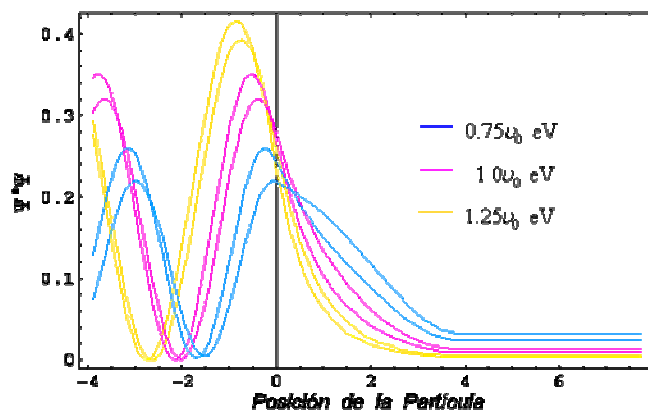


Figura 6.15 Densidad de probabilidad en función de la posición de la partícula para varias energías aplicadas. Normalizada en radio de Bohr.

6.5 DENSIDAD DE PROBABILIDAD AFECTADA POR CAMPOS EXTERNOS

Es evidente que en la figura 6.16 se muestra que existe la probabilidad de que la partícula tunele la barrera sin importar el tipo de campo a utilizar, mientras que la magnitud de la probabilidad sí depende de estos campos, ya que cuando hay presencia de campo magnético la probabilidad de tunelar disminuye, situación opuesta si se tiene en cuenta el campo eléctrico. Reafirmando de nuevo lo comentado en los resultados anteriores, debido a las comparaciones directas que permite hacer la figura en análisis.

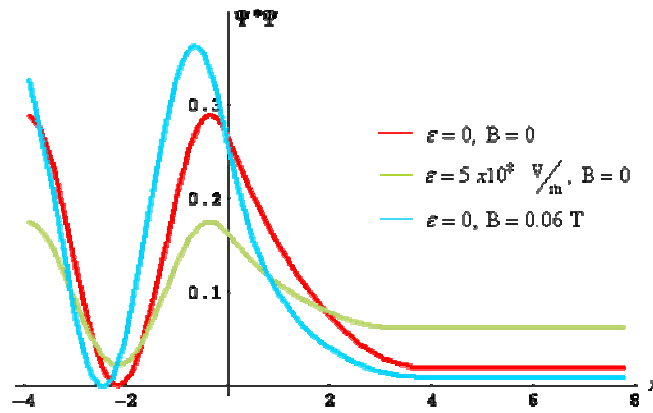


Figura 6.16 Densidad de probabilidad en función de la posición de la partícula, sin y en presencia de campos externos, normalizada en radio de Bohr.

6.6 CORRIENTE DE PROBABILIDAD

El hacer una adecuada interpretación de la corriente de probabilidad, depende básicamente de tener claro dos cosas: lo que significa la corriente o flujo de probabilidad y la presentación adecuada de los resultados. Para este caso se vio la necesidad de hacer un cambio en las unidades de corriente de probabilidad, el cual consistió en dividir el flujo de corriente, con unidad de probabilidad por segundo, entre la velocidad de grupo, cuya unidad está dada en Angstrom por segundo, quedando una unidad resultante de probabilidad por Angstrom, lo que implica un cambio en la interpretación del flujo de probabilidad puesto que ahora se entenderá como la probabilidad, por Angstrom, de encontrar una partícula cruzando algún punto de referencia.

6.6.1 Afectada por campo eléctrico uniforme. En la figura 6.17 se aprecia que el flujo de probabilidad se ve favorecido al incrementar la energía aplicada a la partícula a medida que el campo eléctrico aumenta; además se observan máximos que responden a los valores de los campos y energías aplicadas a la partícula que

hacen que el sistema entre en resonancia, incluso para energías menores a la altura de la barrera debido a la deflexión que esta sufre por el campo eléctrico.

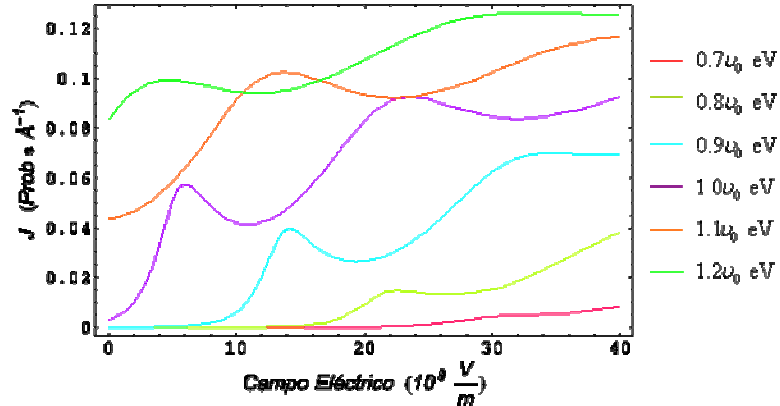


Figura 6.17 Corriente de probabilidad en función del campo eléctrico para varias energías aplicadas a la partícula

Considerando que la barrera de potencial tiende ser un potencial triangular a medida que el campo eléctrico aumenta, efecto que genera una disminución del ancho de la barrera en la parte superior, ayudando a que la partícula tunele para energías aplicadas a ésta muy cercanas a la altura de la barrera tal como se observa en la figura 6.18 (a), lo que muestra más flujo de probabilidad, indicando que probablemente la partícula está atravesando la barrera. Además se observa que para un campo eléctrico de $40 \frac{V}{m}$, tanto para energías por debajo (figura 6.18 (a)) como por encima (figura 6.18 (b)) de la altura de la barrera la curva carece de picos, lo que puede sugerir un comportamiento libre de la partícula debido a la ausencia de estados de resonancia; dicho en otras palabras la partícula se acerca al estado continuo de energía.

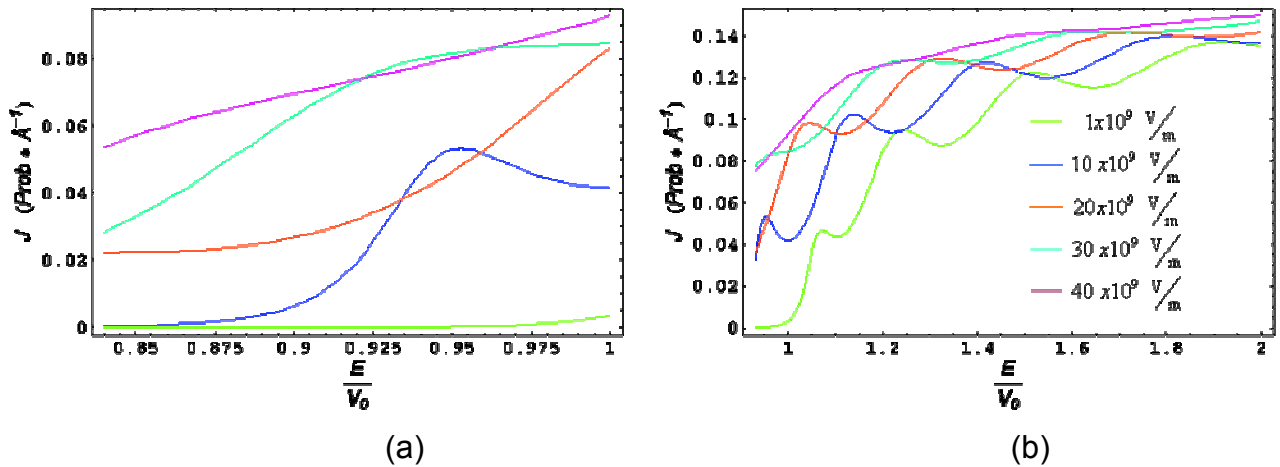


Figura 6.18 Corriente de probabilidad en función de la energía aplicada a la partícula para varios campos eléctricos

6.6.2 Afectada por campo magnético uniforme. Al tener menos campo magnético pero mayor energía aplicada a la partícula, ésta tiene más posibilidad de liberarse de los efectos del campo, incrementándose además la corriente de probabilidad (figura 6.19), situación opuesta a cuando se incrementa el campo, ya que el flujo disminuye, lo que indica que la partícula es localizada debido al campo magnético, impidiendo que tunele fácilmente.

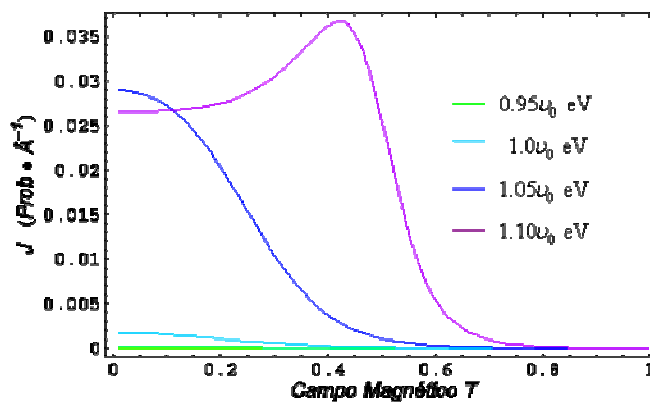


Figura 6.19 Corriente de probabilidad en función del campo magnético para varias energías aplicadas a la partícula

Por último, al intercambiar las variables presentes en la figura anterior por parámetros y viceversa, se sigue observando que a menor intensidad de campo magnético mayor es la corriente de probabilidad, sin importar la energía aplicada a la partícula, figura 6.20. En el momento en que la partícula adquiere una energía permitida puede desplazarse sin mayor dificultad en el sistema, por lo tanto el flujo de probabilidad por cada Angstrom recorrido aumenta, lo que hace que se presenten máximos en la figura 6.20 (b). En esta misma figura se sigue observando que a mayor campo magnético el flujo de probabilidad es menor debido a que se localiza aun más la partícula.

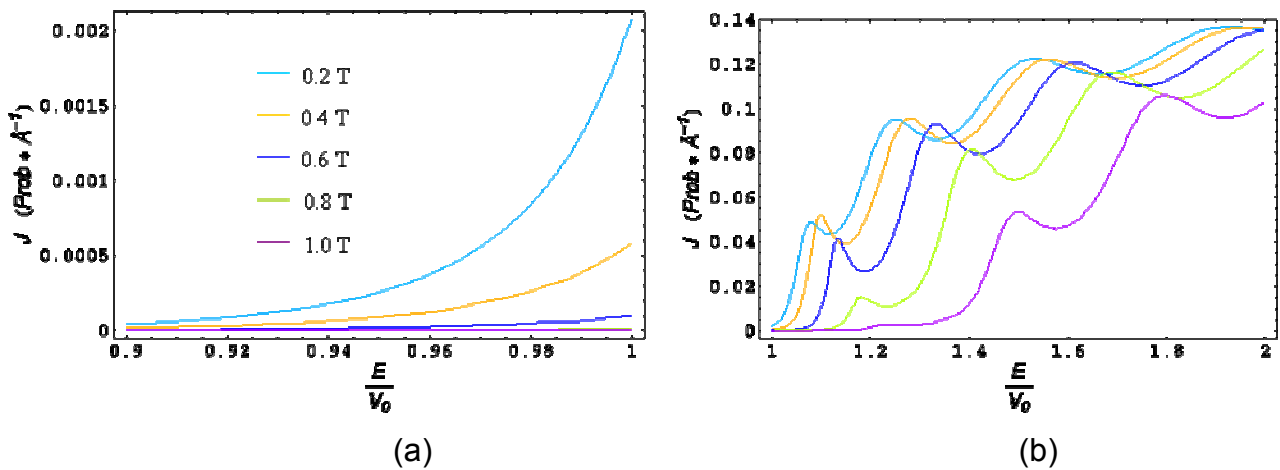


Figura 6.20 Corriente de probabilidad en función de la energía aplicada a la partícula para varios campos magnéticos

6.7 CORRIENTE DE PROBABILIDAD AFECTADA POR CAMPOS EXTERNOS

En el siguiente resultado (figura 6.21) es evidente que la corriente de probabilidad es más alta cuando hay presencia de campo eléctrico ya que este acelera la partícula y le ayuda a tunelar la barrera, lo que no se presenta cuando hay campo

magnético, pues éste tiende a atraer la partícula disminuyendo el flujo de probabilidad, mientras que si la partícula no está afectada por ningún campo externo su corriente de probabilidad sólo depende de la intensidad de la energía que a ella se le aplique.

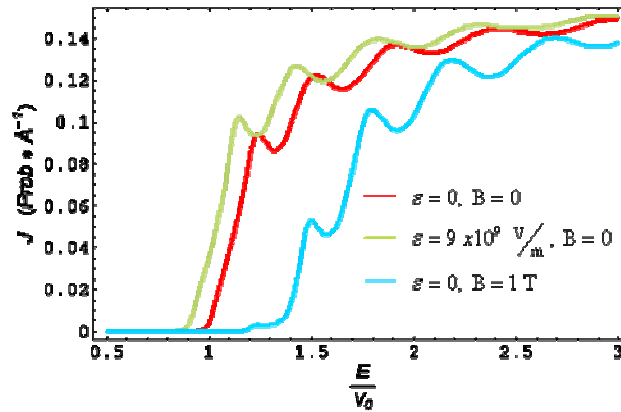


Figura 6.21 Corriente de probabilidad en función de la energía aplicada a la partícula, sin y en presencia de campos externos

7. CONCLUSIONES

Los análisis físico-matemáticos realizados en este trabajo permitieron verificar que el estudio del transporte cuántico para barreras afectadas por campos eléctricos y magnéticos uniformes se pueden modelar a través de las ecuaciones diferenciales tales como la de Airy y la Hipergeométrica Confluente respectivamente; logrando obtener ecuaciones analíticas que se interpretan como funciones de onda asociadas a la partícula que cumplen las condiciones de pertenecer al espacio de Sóbolev el cual es un subespacio de Hilbert.

Los resultados analíticos obtenidos para los coeficientes de transmisión y reflexión para barreras de potencial unidimensionales afectadas por campos externos no han sido reportados hasta el momento en la literatura que está a nuestro alcance, pues en este tópico se acostumbra a trabajar en la mecánica cuántica con el método de aproximación WKB, que como se probó está limitado para establecer las energías donde el sistema se cuantiza, además tiene un rango de energía inferior a la altura de la barrera donde el método tiene soporte matemático para que tenga validez, tal como se presenta en el caso del campo eléctrico. Cabe resaltar que estas dificultades del método WKB no se generan en las expresiones analíticas obtenidas, puesto que ellas no están restringidas por las energías y permiten determinar los valores donde el sistema entra en resonancia; de ahí la importancia de estos resultados.

Por otro lado, desde el punto de vista físico-matemático es posible demostrar que el coeficiente de transmisión, cuando es afectado por campos externos, tiende al coeficiente de transmisión sin presencia de campos, siempre y cuando estos tiendan a cero.

De igual manera se consiguieron otros resultados importantes que ayudan a describir el tunelamiento cuántico. Estos resultados continuación se interpretan desde el punto de vista físico.

Los campos eléctricos altos, en el transporte cuántico en barreras, permiten incrementar el porcentaje de probabilidad de que la partícula tunele, teniendo la posibilidad que su energía entre en resonancia con el sistema, aun siendo esta menor que la altura de la barrera. La manera en la que se puede garantizar que la probabilidad de tunelar no disminuya abruptamente cuando el ancho de la barrera se incrementa, consiste en aumentar el campo eléctrico y aplicarle a la partícula una energía que esté cerca al límite del borde de la barrera de potencial, debido a que en este sector la deflexión hace que sea más fácil tunelarla.

El aplicar un campo magnético en una barrera de potencial genera efectos en la partícula que disminuyen la probabilidad de que esta tunele, puesto que de acuerdo a su intensidad la frecuencia ciclotrónica aumenta, haciendo que los giros que hace la partícula sean de radios más pequeños; viéndose en la necesidad de incrementar su energía para que escape del campo e ingrese a un estado resonante.

Un efecto semejante se observa cuando se aumenta la energía aplicada a la partícula para el caso donde el campo magnético es fijo y se varía el ancho de la barrera, ya que el coeficiente de transmisión aumenta e incluso presenta máximos que muestran las energías de la partícula de un rango mayor a la altura de la barrera donde el sistema se cuantiza.

Al analizar la parte real de las distintas funciones de onda que son solución a la ecuación de Schrödinger, se verifica que la longitud de onda conserva valor constante antes y después de la barrera, lo que indica que el momento lineal se conserva o su energía cinética permanece estable; situación típica que se da

cuando la partícula se mueve libremente. De forma análoga, la parte real de estas funciones de onda presentan las amplitudes de la onda transmitida que verifican aun más el hecho de que el campo eléctrico favorece el fenómeno de tunelamiento debido a que estas tienen un mayor valor comparadas con las amplitudes del campo magnético y con las de ausencia de campos externos.

La densidad de probabilidad, además de indicar el rango donde posiblemente se encuentre la partícula en el sistema, permitió determinar las condiciones cualitativas para que los campos externos generen en la partícula una mejor transmisión. Para el caso del campo eléctrico se necesita incrementarlo de tal manera que la barrera no pierda sentido físico, y aumentar la energía aplicada a la partícula sin rebasar la altura de la barrera. Estas condiciones son totalmente opuestas al caso del campo magnético, ya que en estas circunstancias la partícula disminuye la capacidad de tunelar y no escapa totalmente del campo en cuestión.

La corriente de probabilidad o flujo de probabilidad permite determinar de nuevo condiciones cualitativas muy similares a las expresadas anteriormente, ya que si el campo eléctrico aumenta, a medida que la energía aplicada a la partícula se incrementa, el flujo de corriente se ve favorecido; circunstancia opuesta a cuando se tiene las mismas condiciones pero con el campo magnético, debido a que el flujo disminuye, lo que indica que la partícula es localizada, impidiendo que tunele fácilmente.

Finalmente se puede concluir que al considerar el cambio de escala hecho en este trabajo, que dejó dependiendo el flujo de probabilidad en términos de la constante de normalización (o la amplitud de onda transmitida), se pudieron también calcular las energías donde el sistema se cuantiza por encima de la barrera. Es decir, que la constante de normalización permitió determinar de igual manera que los coeficientes de transmisión y reflexión, los niveles de energía resonantes.

8. BIBLIOGRAFÍA

- [1] TOBÓN Ramiro. Introducción a la Mecánica Cuántica. Calí: Univalle, 1985. p. 41.
- [2] EISBERG R. y RESNICK. R. Física Cuántica Átomos, Moléculas, Sólidos, Núcleos y Partículas. México: Limusa. S. A, 1999. p. 163.
- [3] FRENCH E. y TAYLOR F. Introducción a la Física Cuántica. Barcelona: Reverté S.A, 1982. p. 99, 100.
- [4] THALLER B. Visual Quantum Mechanics. New York: Springer verlag, 2000. p.21-24.
- [5] Ibid., p. 27-29.
- [6] EISBERG, Op. Cit., p. 170.
- [7] EISBERG. R. Fundamentos de Física Moderna. Séptima edición. México: Noriega, 1999. p. 221, 222.
- [8] DAVIES J.H. The physics of low dimensional semiconductors. New York: Cambridge University Press, 1998. p. XV.
- [9] Ibid., p. 91, 92, 96.
- [10] FRENCH, Op. Cit., p. 364-373.

- [11] GASIOROWICZ S. Quantum Physics. Second Edition. New York: Jhon Wiley & Son, Inc, 1996. p. 86-89.
- [12] PAVLOV P.V. y JOJLOV A. F. Física del estado sólido. Moscú: MIR, 1987. p. 250-257.
- [13] GASIOROWICZ, Op Cit., p. 99-103.
- [14] EISBERG. R. y RESNICK. R, Física cuántica átomos, moléculas, sólidos, núcleos y partículas, Op. Cit., p. 238.
- [15] FRENCH, Op. Cit., p. 345, 346.
- [16] ACOSTA V., COWAN CLYDE L. y GRAHAM B.J. Curso de física moderna. México: Harla, 1.975. p.188, 189.
- [17] FRENCH, Op. Cit., p.357.
- [18] EISBERG. R, Fundamentos de física moderna, Op. Cit., p. 231.
- [19] ROSU. H. C. Mecánica Cuántica. Los alamos electronic archives: Physics/9808031., p 61-64.
- [20] LOMAS D. y LOVELOCK D. Ecuaciones diferenciales a través de gráficas, modelos y datos. México: CECOSA, 2000. p. 244-247.
- [21] FRENCH A. P. Vibraciones y Ondas. Barcelona: Reverté, 2000. p. 3-17.

- [22] COHEN-TANNAOUDJI C., DIU B. y LALOË F. Quantum Mechanics. Paris: Jhon Wiley & Sons, 1990. p. 238-240.
- [23] EISBERG. R. y RESNICK. R., Física cuántica átomos, moléculas, sólidos, núcleos y partículas, Op. Cit., p. 221, 242.
- [24] BOROWITZ S. Fundamentos de la Mecánica Cuántica. España: Reverté S.A., 1973. p. 215.
- [25] SERWAY R. A. Física: Tomo II. Colombia: Mc Graw-Hill., 1997. p. 714, 715-717.
- [26] FRENCH A. P. y TAYLOR E. F., Introducción a la Física Cuántica, Op. Cit., p. 360, 361.
- [27] BOROWITZ, Op. Cit., p. 215.
- [28] ANDREWS L. C. Special Functions of Mathematics for Engineers. New York: Mc Graw-Hill., 1992. p. 312, 315, 316.
- [29] FRENCH A. P. y TAYLOR E. F., Introducción a la Física Cuántica, Op. Cit., p. 363, 364.
- [30] SHALIMOVA K.V. Física de los Semiconductores. Moscú: MIR, 1975. p. 51, 52.
- [31] FRENCH A. P. y TAYLOR E. F., Introducción a la Física Cuántica, Op. Cit., p. 363.

- [32] YAVORSKI B. M. y DETLAP A. A. Manual de Física para Ingenieros y Estudiantes. Moscú: MIR, 1971. p.456, 457.
- [33] GASIOROWICZ, Op. Cit., p. 68, 69, 114-128.
- [34] ANDREWS, Op. Cit., p. 388-390.
- [35] ABRAMOWTZ M. y STEGUN I. A. Handbook of mathematical functions. New York: Dover Publications, 1972. p. 504.
- [36] Ibid., p.13.
- [37] COHEN, Op. Cit., p. 238-240.

ANEXO A: DESCRIPCIÓN DE LA BARRERA DE POTENCIAL FINITA RECTANGULAR SIN PRESENCIA DE CAMPOS EXTERNOS.

A.1 COEFICIENTE DE TRANSMISIÓN Y REFLEXIÓN

Al manejar este tipo de barreras de potencial, es claro que el sistema de E.D. de Schrödinger que se generan son las descritas en (3.2):

$$\begin{cases} -\frac{\hbar^2}{2m_*} \frac{d^2\psi_{1,3}}{dx^2} = E\psi_{1,3}, & \text{si } x < 0 \quad \wedge \quad x > a \\ -\frac{\hbar^2}{2m_*} \frac{d^2\psi_2}{dx^2} + v_0\psi_2 = E\psi_2, & \text{si } 0 < x < a, \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

cuyas soluciones desde el punto de vista de la mecánica cuántica tienen la forma

$$\psi(x) = \begin{cases} A \exp[ik_1x] + B \exp[-ik_1x], & \text{si } x < 0 \\ E \exp[k_2x] + F \exp[-k_2x], & \text{si } 0 < x < a \\ C \exp[ik_1x], & \text{si } x > a \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

Aunque la función de onda ψ no cumpla con todas las condiciones para ser solución del sistema de E.D. mencionado, en esta parte del trabajo se dejará de lado la parte física y se manipularán las soluciones sólo desde el punto de vista matemático.

A.1.1 Funciones que involucran el punto de discontinuidad en $x=0$. En este caso es necesario que las funciones de onda descritas para $x < 0$ y $0 < x < a$ satisfagan:

$$\begin{cases} \psi_1(0) - \psi_2(0) = 0 \\ \psi_1'(0) - \psi_2'(0) = 0 \end{cases}, \quad (\text{A.3})$$

o en forma matricial,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -i\frac{k_2}{k_1} & -i\frac{k_2}{k_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E \\ F \end{bmatrix} \quad (\text{A.4})$$

Realizando manipulaciones algebraicas matriciales se logra despejar A y B en términos de E y F respectivamente (ver 3.9).

A.1.2 Funciones que involucran el punto de discontinuidad en $x=a$. En correspondencia con a A.3 y teniendo en cuenta las funciones de onda descritas para $0 < x < a$ y $x > a$ se plantea el sistema:

$$\begin{bmatrix} \exp[k_2 a] & \exp[-k_2 a] \\ \exp[k_2 a] & -\exp[-k_2 a] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E \\ F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ i\frac{k_1}{k_2} \end{bmatrix} C \exp[ik_1 a] . \quad (\text{A.5})$$

Al calcular la inversa de la primera matriz que se presenta de izquierda a derecha, se obtiene la expresión 3.11.

Cabe resaltar que el wronskiano de la matriz a la cual se le calcula la inversa es -2 . Es decir

$$\omega(\exp[k_2 x], \exp[-k_2 x]) = -2 . \quad (\text{A.6})$$

El concepto de Wronskiano se explica ampliamente en el apéndice C.7, más exactamente en la expresión C.39 y C.40.

Por otra parte, al reemplazar la matriz definida en 3.11 en la matriz 3.9 se plantea una igualdad de matrices que permite conocer la amplitud de la onda incidente y reflejada:

$$\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \exp[ik_1 a] \begin{bmatrix} 1 - i \frac{k_2}{k_1} & 1 + i \frac{k_2}{k_1} \\ 1 + i \frac{k_2}{k_1} & 1 - i \frac{k_2}{k_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \left(1 + i \frac{k_1}{k_2}\right) \exp[-k_2 a] \\ \left(1 - i \frac{k_1}{k_2}\right) \exp[k_2 a] \end{bmatrix} C . \quad (\text{A.7})$$

Realizando algunas operaciones se pueden establecer las siguientes relaciones:

$$A^* A = \left\{ 1 + \left[4 \frac{E}{v_0} \left(1 - \frac{E}{v_0} \right)^{-1} \right] \text{Senh}^2 k_2 a \right\} C^* C . \quad (\text{A.8})$$

Esta igualdad permite verificar el resultado 3.13 que corresponde al coeficiente de transmisión. De forma análoga el coeficiente de reflexión (3.14) queda determinado con C.9:

$$B^* B = \left\{ \left[4 \frac{E}{v_0} \left(1 - \frac{E}{v_0} \right) \right]^{-1} \text{Senh}^2 k_2 a \right\} C^* C . \quad (\text{A.9})$$

A.2 CONSTANTE DE NORMALIZACIÓN DE LA FUNCIÓN DE ONDA ψ

Para normalizar la función de onda ψ descrita en A.2 se aplicará el método de normalización en una caja comentado en la sección 1.3.1. De ahí que es

necesario redefinir la función de onda de manera tal que cumpla las condiciones de la sección 1.2:

$$\psi(x) = C \begin{cases} 0, & \text{si } x < \frac{a-b}{2} \\ (P_1 + iP_2) \exp[k_1(x+a)i] + iP_3 \exp[-k_1(x-a)i], & \text{si } \frac{a-b}{2} < x < 0 \\ \frac{1}{2} \left(1 + i \frac{k_1}{k_2}\right) \exp[(x-a)k_2 + ik_1a] + \frac{1}{2} \left(1 - i \frac{k_1}{k_2}\right) \exp[-(x-a)k_2 + ik_1a], & \text{si } 0 < x < a \\ \exp[ik_1x], & \text{si } a < x < \frac{a+b}{2} \\ 0, & \text{si } x > \frac{a+b}{2} \end{cases}, \quad (\text{A.10})$$

con

$$P_1 = \text{Cosh } k_2 a, \quad P_2 = \left(\frac{k_2^2 - k_1^2}{2k_1 k_2} \right) \text{Senh } k_2 a, \quad P_3 = \left(\frac{k_1^2 + k_2^2}{2k_1 k_2} \right) \text{Senh } k_2 a.$$

Debido a que los sistemas 3.11 y 3.12 están parametrizados con la amplitud de onda transmitida, C , de igual manera que la función de onda A.10, entonces es necesario facilitar los cálculos, lo cual se logra al considerar C como un valor real, es decir $C^* C = C^2$.

Teniendo en cuenta el anterior hecho, y recordando que la probabilidad de encontrar las partículas en el dominio definido en A.10 es uno, se plantea:

$$\int_{\frac{a-b}{2}}^0 \psi_1^* \psi_1 dx + \int_0^a \psi_2^* \psi_2 dx + \int_a^{\frac{a+b}{2}} \psi_3^* \psi_3 dx = 1. \quad (\text{A.11})$$

Lo que obliga sin lugar a duda a manipular la densidad de probabilidad definida en 3.21, presentándose integrales de funciones conocidas.

Por último, se puede determinar la constante de normalización A.12:

$$C = C\left(\frac{E}{\nu_0}\right) = \sqrt{2} \left\{ (P_1^2 + P_2^2 + P_3^2 + 1)(b-a) + 2\frac{P_2 P_4}{k_1} \text{Senh}(b-a)k_1 + \right. \\ \left. + \frac{1}{2k_2} \left(1 + \frac{k_1^2}{k_2^2} \right) \text{Senh} 2ak_2 + a \left(1 - \frac{k_1^2}{k_2^2} \right) \right\}^{-\frac{1}{2}}, \quad (\text{A.12})$$

donde P_1 , P_2 y P_3 son descritos en la función de onda A.10.

Este resultado tiene importancia desde el punto de vista de la mecánica cuántica, ya que cuando la energía aplicada a la partícula supera la altura de la barrera, las funciones hiperbólicas que aquí se presentan se transforman en funciones trigonométricas, las cuales por su periodicidad muestran que la energía se cuantiza por encima de la barrera de potencial. Afectando así, los resultados que dependan directamente de esta constante.

Por otra parte, las magnitudes de los vectores de onda k_1 y k_2 definidos en 3.5 y 3.7 respectivamente, pueden ser redefinidos en función de $\frac{E}{\nu_0}$. Esto explica el hecho de que C sea también una función del mismo cociente de energías, en correspondencia con los coeficientes de transmisión y reflexión.

A.3 CORRIENTE DE PROBABILIDAD

En esta parte del trabajo se pretende verificar que la corriente de probabilidad es constante respecto a su posición y dependiente de la energía aplicada a las partículas.

En consecuencia, si la partícula no ha enfrentado la barrera, es decir, $\frac{a-b}{2} < x < 0$, la corriente de probabilidad se reduce a

$$j = \frac{\hbar k_1}{m_*} (A^* A - B^* B) . \quad (\text{A.13})$$

Al retomar A.8 y A.9, se tiene $A^* A - B^* B = (\text{Cosh}^2 k_2 a - \text{Senh}^2 k_2 a) C^2 = C^2$. Entonces

$$j_1 = \frac{\hbar k_1}{m_*} C^2 , \quad \text{si} \quad \frac{a-b}{2} < x < 0 . \quad (\text{A.14})$$

Ahora, si la partícula está en el interior de la barrera,

$$j_2 = \frac{-\hbar k_2}{m_*} (F^* E - E^* F) i , \quad \text{si} \quad 0 < x < a . \quad (\text{A.15})$$

Teniendo en cuenta la matriz 3.11,

$$F^* E - E^* F = \frac{1}{4} \left[\left(1 + i \frac{k_1}{k_2} \right)^2 - \left(1 - i \frac{k_1}{k_2} \right)^2 \right] C^2 = i \frac{k_1}{k_2} C^2 .$$

Por lo tanto A.15 se transforma a A.14.

Por último, si la partícula ha superado la barrera sin ninguna dificultad, se alcanza a describir la corriente de probabilidad en la forma

$$j_3 = \frac{-\hbar}{2m_*} (2ik_1 C^2) i , \quad \text{si} \quad a < x < \frac{a+b}{2} .$$

De donde se sigue de nuevo A.14.

$$\text{Luego, } j \left(\frac{E}{v_0} \right) = \sqrt{\frac{2v_0}{m_*} \left(\frac{E}{v_0} \right)} \left[C \left(\frac{E}{v_0} \right) \right]^2 . \quad (\text{A.16})$$

ANEXO B: LÍMITES QUE INVOLUCRAN LAS FUNCIONES DE AIRY Y EL CAMPO ELÉCTRICO UNIFORME \mathcal{E}

Los diversos límites a calcular en este apéndice, están enfocados en parte, a probar que el coeficiente de transmisión afectado con campo eléctrico uniforme ($T_{\mathcal{E}}$) tiende al coeficiente de transmisión sin presencia de campos externos (T) cuando el campo eléctrico tiende a cero.

B.1 ANÁLISIS DE LOS ARGUMENTOS DE LAS FUNCIONES DE AIRY CUANDO EL CAMPO ELÉCTRICO TIENDE A CERO.

Se empezará entonces, a retomar los argumentos de las funciones de Airy que se describen en el análisis de la barrera de potencial afectada por un campo eléctrico uniforme.

Sea

$$S = \alpha \left(\frac{v_0 - E}{q\mathcal{E}} \right) = \alpha \frac{v_0}{q\mathcal{E}} \left(1 - \frac{E}{v_0} \right), \quad S_a = \alpha \left(\frac{v_0 - E}{q\mathcal{E}} - a \right) = \alpha \left[\frac{v_0}{q\mathcal{E}} \left(1 - \frac{E}{v_0} \right) - a \right],$$

$$\text{con } \alpha = \left(\frac{2m_*q\mathcal{E}}{\hbar^2} \right)^{1/3}.$$

Fácilmente se observa que ellos tienden a infinito cuando el campo eléctrico tiende a cero. Situación que permite aplicar más adelante los resultados expuestos en el apéndice C.7.

Se estudiará entonces, los siguientes límites.

$$\mathbf{B.1.1} \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{2}{3} [S_a^{3/2} - S^{3/2}] = -k_2 a \quad (\text{B.1})$$

Demostración

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{2}{3} [S_a^{3/2} - S^{3/2}] = \frac{2}{3} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\alpha \left(\frac{\nu_0 - E}{q\varepsilon} \right) \right]^{3/2} \left[\left(1 - \frac{aq\varepsilon}{\nu_0 - E} \right)^{3/2} - 1 \right].$$

$$\text{Pero} \quad \left[1 + \left(-\frac{aq}{\nu_0 - E} \varepsilon \right) \right]^{3/2} - 1 \sim -\frac{3}{2} \frac{aq}{\nu_0 - E} \varepsilon, \quad \text{si } \varepsilon \rightarrow 0.$$

$$\text{Luego,} \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{2}{3} [S_a^{3/2} - S^{3/2}] = -\sqrt{\frac{2m_*(\nu_0 - E)}{\hbar^2}} a = -k_2 a.$$

$$\mathbf{B.1.2} \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{S_a}{S} \right)^{1/4} = 1. \quad (\text{B.2})$$

Demostración

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{S_a}{S} \right)^{1/4} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[1 - \frac{qa}{\nu_0 - E} \varepsilon \right]^{1/4} = 1.$$

Luego, se puede concluir que $S_a^{1/4} \sim S^{1/4}$, si $\varepsilon \rightarrow 0$.

$$\mathbf{B.1.3} \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \alpha (S.S_a)^{1/4} = k_2 \quad (\text{B.3})$$

Demostración:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \alpha (S.S_a)^{1/4} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \alpha^{3/2} \left[\frac{v_0 - E}{q\varepsilon} \right]^{1/2} .$$

El anterior resultado se obtiene al aplicar el hecho $S_a^{1/4} \sim S^{1/4}$, si $\varepsilon \rightarrow 0$.

$$\text{Luego, } \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \alpha^{3/2} \left[\frac{v_0 - E}{q\varepsilon} \right]^{1/2} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{2m_* q\varepsilon}{\hbar^2} \right)^{1/2} \left[\frac{v_0 - E}{q\varepsilon} \right]^{1/2} = k_2 .$$

B.2 TENDENCIA DEL COEFICIENTE DE TRANSMISIÓN AFECTADO POR CAMPO ELÉCTRICO AL COEFICIENTE DE TRANSMISIÓN SIN PRESENCIA DE CAMPOS EXTERNOS.

A continuación se calculan varios límites que ayudarán a probar la igualdad

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} T_\varepsilon = T$$

$$\mathbf{B.2.1} \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (w_{\varepsilon,1} + w_{\varepsilon,2}) = \frac{2}{\pi} \text{Cosh } k_2 a \quad (\text{B.4})$$

Demostración:

Retomando $w_{\varepsilon,1} = \text{Ai}[S] \text{Bi}'[S_a] - \text{Ai}'[S_a] \text{Bi}[S]$ y las equivalencias expuestas en el apéndice C.7, además de los resultados de la sección anterior, se verifica:

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \text{Ai}[S] \text{Bi}'[S_a] &= \frac{\pi^{-1}}{2} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{S_a}{S} \right)^{1/4} \exp \left[\frac{2}{3} (S_a^{3/2} - S^{3/2}) \right] \\ &= \frac{\pi^{-1}}{2} \exp[-k_2 a] . \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \text{Ai}'[S_a] \text{Bi}[S] &= -\frac{\pi^{-1}}{2} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{S_a}{S} \right)^{1/4} \exp \left[\frac{2}{3} (S_a^{3/2} - S^{3/2}) \right] \\ &= -\frac{\pi^{-1}}{2} \exp[k_2 a] . \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

En consecuencia $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} w_{\varepsilon,1} = \frac{1}{\pi} \text{Cosh } k_2 a$. (B.7)

De otro lado se conoce $w_{\varepsilon,2} = \text{Ai}[S_a] \text{Bi}'[S] - \text{Ai}'[S] \text{Bi}[S_a]$ y de forma similar:

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \text{Ai}[S_a] \text{Bi}'[S] &= \frac{\pi^{-1}}{2} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{S}{S_a} \right)^{1/4} \exp \left[-\frac{2}{3} (S_a^{3/2} - S^{3/2}) \right] \\ &= \frac{\pi^{-1}}{2} \exp[k_2 a] . \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \text{Ai}'[S] \text{Bi}[S_a] &= -\frac{\pi^{-1}}{2} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{S}{S_a} \right)^{1/4} \exp \left[\frac{2}{3} (S_a^{3/2} - S^{3/2}) \right] \\ &= -\frac{\pi^{-1}}{2} \exp[-k_2 a] . \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

Por B.8 y B.9, $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} w_{\varepsilon,2} = \frac{1}{\pi} \text{Cosh } k_2 a$. (B.10)

Por lo tanto $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (w_{\varepsilon,1} + w_{\varepsilon,2}) = \frac{2}{\pi} \text{Cosh } k_2 a$.

$$\mathbf{B.2.2} \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{k_1}{\alpha} w_{3,\varepsilon} + \frac{\alpha}{k_1} w_{4,\varepsilon} \right) = \frac{1}{\pi} \left(\frac{k_2}{k_1} - \frac{k_1}{k_2} \right) \text{Senh } k_2 a \quad (\text{B.11})$$

Demostración

De nuevo, usando las equivalencias del apéndice C.7 y los límites B.1 y B.3, y además $w_{\varepsilon,3} = \text{Ai}[S] \text{Bi}[S_a] - \text{Ai}[S_a] \text{Bi}[S]$, se obtiene:

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{k_1}{\alpha} \text{Ai}[S] \text{Bi}[S_a] &= \frac{\pi^{-1}}{2} k_1 \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \alpha^{-1} (S.S_a)^{-1/4} \exp \left[\frac{2}{3} (S_a^{3/2} - S^{3/2}) \right] \\ &= \frac{\pi^{-1}}{2} \frac{k_1}{k_2} \exp[-k_2 a] . \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{k_1}{\alpha} \text{Ai}[S_a] \text{Bi}[S] &= \frac{\pi^{-1}}{2} k_1 \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \alpha^{-1} (S_a.S)^{-1/4} \exp \left[-\frac{2}{3} (S_a^{3/2} - S^{3/2}) \right] \\ &= \frac{\pi^{-1}}{2} \frac{k_1}{k_2} \exp[k_2 a] \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

$$\text{Por B.12 y B.13 se comprueba} \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{k_1}{\alpha} w_{\varepsilon,3} = -\frac{1}{\pi} \frac{k_1}{k_2} \text{Senh } k_2 a . \quad (\text{B.14})$$

Análogamente, si $w_{\varepsilon,4} = \text{Ai}'[S] \text{Bi}'[S_a] - \text{Ai}'[S_a] \text{Bi}'[S]$

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\alpha}{k_1} \text{Ai}'[S] \text{Bi}'[S_a] &= -\frac{\pi^{-1}}{2k_1} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \alpha (S.S_a)^{1/4} \exp \left[\frac{2}{3} (S_a^{3/2} - S^{3/2}) \right] \\ &= -\frac{\pi^{-1}}{2} \frac{k_2}{k_1} \exp[-k_2 a] . \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\alpha}{k_1} \text{Ai}'[S_a] \text{Bi}'[S] &= -\frac{\pi^{-1}}{2k_1} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \alpha (S_a \cdot S)^{1/4} \exp\left[-\frac{2}{3}(S_a^{3/2} - S^{3/2})\right] \\ &= -\frac{\pi^{-1} k_2}{2 k_1} \exp[k_2 a] . \end{aligned} \quad (\text{B.16})$$

$$\text{Luego, } \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\alpha}{k_1} w_{\varepsilon,4} = \frac{1}{\pi} \frac{k_2}{k_1} \text{Senh } k_2 a \quad (\text{B.17})$$

En resumen, según B.14 y B.17 se prueba B.11.

Por todo lo anterior se puede calcular

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} T_\varepsilon = \frac{4}{\pi^2} \left\{ \left[\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (w_{\varepsilon,1} + w_{\varepsilon,2}) \right]^2 + \left[\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{k_1}{\alpha} w_{\varepsilon,3} + \frac{\alpha}{k_1} w_{\varepsilon,4} \right) \right]^2 \right\}^{-1} . \quad (\text{B.18})$$

Reemplazando los resultados B.4 y B.11

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} T_\varepsilon = \frac{4}{\pi^2} \left\{ \left[\frac{2}{\pi} \text{Cosh } k_2 a \right]^2 + \left[\frac{1}{\pi} \left(\frac{k_2}{k_1} - \frac{k_1}{k_2} \right) \text{Senh } k_2 a \right]^2 \right\}^{-1}$$

o, lo que es igual,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} T_\varepsilon = \left\{ \text{Cosh}^2 k_2 a - \left[1 - \left[4 \frac{E}{\nu_0} \left(1 - \frac{E}{\nu_0} \right) \right]^{-1} \right] \text{Senh}^2 k_2 a \right\}^{-1} .$$

Luego se ha probado: $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} T_\varepsilon = T$.

ANEXO C: DESCRIPCIÓN DE LA BARRERA FINITA RECTANGULAR EN PRESENCIA DE CAMPO ELÉCTRICO UNIFORME

C.1 ECUACIÓN DE SCHRÖDINGER GENERADA DEBIDO AL CAMPO ELÉCTRICO UNIFORME \mathcal{E} .

Para poder establecer la ecuación de Schrödinger que se presenta en este caso, es necesario describir el potencial que genera este campo en la partícula.

Por lo tanto, se empezará considerando dos puntos P_1 y P_2 separados por una distancia ds . Después se aplicará un campo eléctrico \mathcal{E}_s entre estos dos puntos, (donde \mathcal{E}_s es la componente del campo eléctrico entre los dos puntos), el cual ejerce una fuerza sobre la carga ($\vec{F} = q\vec{\mathcal{E}}_s$), la que a su vez realizará trabajo para desplazarla de P_1 a P_2 . El trabajo está dado por el término

$$d\bar{w} = q\bar{\mathcal{E}}_s ds . \tag{C.1}$$

En el momento en que la carga se mueve entre los puntos P_1 y P_2 se define una diferencial de potencial eléctrico du , mediante la expresión

$$d\bar{u} = -\frac{d\bar{w}}{q} \tag{C.2}$$

Al comparar C.1 y C.2 se expresa

$$\overline{\varepsilon}_s = -\frac{d\overline{u}}{ds} . \quad (\text{C.3})$$

Debido a que en este trabajo los análisis son para el caso unidimensional se tendrá en cuenta un campo eléctrico paralelo al eje x , es decir que $\overline{\varepsilon}_s = \varepsilon \hat{x}$.

En consecuencia el decrecimiento de la razón de cambio del potencial eléctrico respecto a su desplazamiento es constante (ε). De ahí que

$$\varepsilon = -\frac{du}{dx} , \quad (\text{C.4})$$

lo que implica que

$$u = -\varepsilon x . \quad (\text{C.5})$$

Teniendo en cuenta la energía potencial debida al campo eléctrico v_ε , se define

$$v_\varepsilon = qu . \quad (\text{C.6})$$

Entonces, por C.5 y C.6 se sigue que $v_\varepsilon = -\varepsilon qx$.

Por otro lado, al tener en cuenta una barrera de potencial como la definida en la sección 3.1 en presencia de un campo eléctrico uniforme, la partícula que incida sobre esta se verá afectada tanto por la energía potencial dada por la barrera como por la del campo v_ε .

Lo anterior conlleva a establecer que la partícula deja de moverse libremente, puesto que posee una energía potencial que depende de su posición y de la magnitud del campo eléctrico, dada por

$$v_\varepsilon(x) = -q\varepsilon x + v_0 . \quad (\text{C.7})$$

Por último, al considerar la anterior energía, la ecuación de Schrödinger que se genera, tiene la forma

$$-\frac{\hbar^2}{2m_*} \frac{d^2\psi_{2,\varepsilon}}{dx^2} + (v_0 - q\varepsilon x)\psi_{2,\varepsilon} = E\psi_{2,\varepsilon} , \quad (\text{C.8})$$

que introduciendo nuevas constantes se reduce a

$$\frac{d^2\psi_{2,\varepsilon}}{dx^2} - (k_2^2 - \alpha^3 x)\psi_{2,\varepsilon} = 0 \quad (\text{C.9})$$

(Constantes definidas previamente en la sección 4.1)

El paso a seguir, consiste en llevar la E.D. de segundo grado C.9 a una E.D. conocida, lo cual se logra realizando la siguiente sustitución

$$x = \alpha^{-1} \left(u + \frac{k_2^2}{\alpha^2} \right) , \quad (\text{C.10})$$

donde $\frac{d^2\psi_{2,\varepsilon}}{dx^2} = \alpha^2 \frac{d^2\psi_{2,\varepsilon}}{du^2}$ (C.11)

Sustituyendo C.10 y C.11 en C.9 se llega a

$$\alpha^2 \frac{d^2\psi_{2,\varepsilon}}{du^2} - \left[k_2^2 - \alpha^2 \left(u + \frac{k_2^2}{\alpha^2} \right) \right] \psi_{2,\varepsilon}(u) = 0 .$$

Ecuación que se reduce a la E.D. de Airy expresada en 4.10.

C.2 COEFICIENTE DE TRANSMISIÓN Y REFLEXIÓN

Al estudiar funciones especiales tales como las de Airy, es importante hacer notar la estructura que tienen sus derivadas, puesto que en ellas se apoyan gran parte de los cálculos de este trabajo. Así,

$$\frac{d}{dx}(\text{Ai}[-u]) = -\alpha \text{Ai}'[-u] , \quad (\text{C.12})$$

$$\frac{d}{dx}(\text{Bi}[-u]) = -\alpha \text{Bi}'[-u] . \quad (\text{C.13})$$

Para efectos de cálculo tanto teórico como computacional, se deben tener en cuenta las funciones $\text{Ai}'[-u]$ y $\text{Bi}'[-u]$ que se pueden definir según la sugerencia dada en el apéndice C.5.

Por lo tanto la derivada de la función de onda descrita en el interior de la barrera se expresa mediante

$$\psi'_{2,\varepsilon} = -\alpha \left\{ E \text{Ai}' \left[\alpha \left(\frac{\nu_0 - E}{q\varepsilon} - x \right) \right] + F \text{Bi}' \left[\alpha \left(\frac{\nu_0 - E}{q\varepsilon} - x \right) \right] \right\} . \quad (\text{C.14})$$

Por otro lado, se retomará de nuevo en todos cálculos, las notaciones que a continuación se describen para los argumentos de las funciones de Airy.

$$S = \alpha \left(\frac{\nu_0 - E}{q\varepsilon} \right) = \alpha \frac{\nu_0}{q\varepsilon} \left(1 - \frac{E}{\nu_0} \right) , \quad S_a = \alpha \left(\frac{\nu_0 - E}{q\varepsilon} - a \right) = \alpha \left[\frac{\nu_0}{q\varepsilon} \left(1 - \frac{E}{\nu_0} \right) - a \right] .$$

C.2.1 Funciones que involucran al punto de discontinuidad en $x = 0$.

$$\psi_{1,\varepsilon}(x) = A \exp[ik_1 x] + B \exp[-ik_1 x], \quad \text{si } x < 0; \quad (\text{C.15})$$

$$\psi_{2,\varepsilon}(x) = E \text{Ai}\left[\alpha\left(\frac{v_0 - E}{q\varepsilon} - x\right)\right] + F \text{Bi}\left[\alpha\left(\frac{v_0 - E}{q\varepsilon} - x\right)\right], \quad \text{si } 0 < x < a. \quad (\text{C.16})$$

Se debe cumplir que $\psi_{1,\varepsilon}(0) = \psi_{2,\varepsilon}(0)$ y $\psi'_{1,\varepsilon}(0) = \psi'_{2,\varepsilon}(0)$, lo que equivale a:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{Ai}[S] & \text{Bi}[S] \\ i\frac{\alpha}{k_1} \text{Ai}'[S] & i\frac{\alpha}{k_1} \text{Bi}'[S] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E \\ F \end{bmatrix}. \quad (\text{C.17})$$

de donde muy fácilmente se pueden despejar las constantes A y B en términos de E y F (ver 4.13).

C.2.2 Funciones que involucran al punto de discontinuidad en $x = a$. Con las funciones de onda C.16 y $\psi_{3,\varepsilon}(x) = C \exp[-k_1 a]$ si $x > a$ (C.18)

se establece:

$$\begin{bmatrix} \text{Ai}[S_a] & \text{Bi}[S_a] \\ \alpha \text{Ai}'[S_a] & \alpha \text{Bi}'[S_a] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E \\ F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -ik_1 \end{bmatrix} C \exp[ik_1 a]. \quad (\text{C.19})$$

Sistema matricial equivalente al sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \psi_{2,\varepsilon}(a) - \psi_{3,\varepsilon}(a) = 0 \\ \psi'_{2,\varepsilon}(a) - \psi'_{3,\varepsilon}(a) = 0. \end{cases} \quad (\text{C.20})$$

Ahora, para poder obtener las constantes E y F de la ecuación C.19, es necesario utilizar el Wronskiano de las funciones de Airy:

$$\text{Sea } L_\varepsilon = \begin{bmatrix} \text{Ai}[S_a] & \text{Bi}[S_a] \\ \alpha \text{Ai}'[S_a] & \alpha \text{Bi}'[S_a] \end{bmatrix}; \quad (\text{C.21})$$

su matriz inversa está dada por la expresión:

$$L_\varepsilon^{-1} = [\omega(\text{Ai}, \text{Bi})(u)]^{-1} \begin{bmatrix} \alpha \text{Bi}'[S_a] & -\text{Bi}[S_a] \\ -\alpha \text{Ai}'[S_a] & \text{Ai}[S_a] \end{bmatrix}$$

que de acuerdo con el resultado C.35 del apéndice C.6,

$$L_\varepsilon^{-1} = \frac{\pi}{\alpha} \begin{bmatrix} \alpha \text{Bi}'[S_a] & -\text{Bi}[S_a] \\ -\alpha \text{Ai}'[S_a] & \text{Ai}[S_a] \end{bmatrix}. \quad (\text{C.22})$$

Multiplicando la ecuación C.19 por la anterior matriz a ambos lados de la igualdad, se obtiene

$$\begin{bmatrix} E \\ F \end{bmatrix} = \frac{\pi}{\alpha} \exp[ik_1 a] \begin{bmatrix} \alpha \text{Bi}'[S_a] + ik_1 \text{Bi}[S_a] \\ -\alpha \text{Ai}'[S_a] - ik_1 \text{Ai}[S_a] \end{bmatrix} C.$$

Retomando lo comentado en la sección 4.2.1 se obtiene el resultado 4.17. Es decir, la amplitud de las ondas incidente y reflejada A y B respectivamente, en términos de amplitud de onda transmitida C .

$$A^* A = \frac{\pi^2}{4} \left\{ (w_{\varepsilon,1} + w_{\varepsilon,2})^2 + \left(\frac{k_1}{\alpha} w_{\varepsilon,3} + \frac{\alpha}{k_1} w_{\varepsilon,4} \right)^2 \right\} C^* C, \quad (\text{C.23})$$

$$B^* B = \frac{\pi^2}{4} \left\{ (w_{\varepsilon,1} + w_{\varepsilon,2})^2 + \left(\frac{k_1}{\alpha} w_{\varepsilon,3} - \frac{\alpha}{k_1} w_{\varepsilon,4} \right)^2 \right\} C^* C ; \quad (\text{C.24})$$

resultados con los cuales se calculan los coeficientes de transmisión (4.18) y reflexión (4.19) como a continuación se muestra:

$$T_\varepsilon = \frac{C^* C}{A^* A} = \frac{4}{\pi^2} \left\{ (w_{\varepsilon,1} + w_{\varepsilon,2})^2 + \left(\frac{k_1}{\alpha} w_{\varepsilon,3} + \frac{\alpha}{k_1} w_{\varepsilon,4} \right)^2 \right\}^{-1} .$$

De igual forma se obtiene

$$R_\varepsilon = \frac{C^* C}{B^* B} = \frac{(w_{\varepsilon,1} - w_{\varepsilon,2})^2 + \left(\frac{k_1}{\alpha} w_{\varepsilon,3} - \frac{\alpha}{k_1} w_{\varepsilon,4} \right)^2}{(w_{\varepsilon,1} + w_{\varepsilon,2})^2 + \left(\frac{k_1}{\alpha} w_{\varepsilon,3} + \frac{\alpha}{k_1} w_{\varepsilon,4} \right)^2} .$$

C.3 DEMOSTRACIÓN DE LA CONDICIÓN WKB

Lo que se busca probar es $\frac{1}{p^2} \left| \frac{dp}{dx} \right| \ll \hbar^{-1}$, donde el momento lineal p , está dado

por

$$p = \sqrt{2m_*(E - \nu_0 + q\varepsilon x)} . \quad (\text{C.25})$$

Esta expresión puede reescribirse en términos de constantes ya conocidas, como se aprecia en seguida:

$$|p|^2 = (k_2^2 - \alpha^3 x) \hbar^2 = \alpha^3 \left[\frac{\nu_0}{q\varepsilon} \left(1 - \frac{E}{\nu_0} \right) - x \right] \hbar^2 . \quad (\text{C.26})$$

Ahora, por la condición 4.24 se da la desigualdad

$$|p|^2 > \alpha^3 (a-x) \hbar^2 = 2m_* q \varepsilon (a-x) . \quad (\text{C.27})$$

Lo que resta, es recordar que la magnitud del campo eléctrico uniforme debe ser del orden 10^9 V/m , puesto que el ancho de la barrera no debe superar el cociente $\frac{v_0}{q\varepsilon}$, (al no ser así ella pierde el sentido físico que se le desea dar en este trabajo).

Por tal razón $a \leq 10 \text{ \AA}$. En consecuencia $\frac{1}{p^2} \left| \frac{dp}{dx} \right| = \frac{m_* q \varepsilon}{|p|^3} < 20^{-1}$ (C.28)

Luego, la prueba queda concluida, pues el orden de la constante de Planck (\hbar) es de 10^{-34} .

C.4 CONSTANTE DE NORMALIZACIÓN DE LA FUNCIÓN DE ONDA ψ_ε

Para que la función de onda ψ_ε sea cuadrado integrable, es necesario que pertenezca al espacio de Hilbert, por lo tanto se redefine la función de onda de acuerdo a la expresión 4.25.

Por otro lado, calculando la densidad de probabilidad de la función 4.25 se llega

$$|\psi_\varepsilon(x)|^2 = C_\varepsilon^2 \begin{cases} 0, & \text{si } x < \frac{a-b}{2} \\ |P_{\varepsilon,1}|^2 + 2\text{Re}[P_{\varepsilon,1}P_{\varepsilon,2}^*] \text{Cos}2k_1x + 2\text{Im}[P_{\varepsilon,1}P_{\varepsilon,2}^*] \text{Sen}2k_1x + |P_{\varepsilon,2}|^2, & \text{si } \frac{a-b}{2} < x < 0 \\ |P_{\varepsilon,3}|^2 \text{Ai}[S_{x,\varepsilon}]^2 + 2\text{Re}[P_{\varepsilon,3}P_{\varepsilon,4}^*] \text{Ai}[S_{x,\varepsilon}] \text{Bi}[S_{x,\varepsilon}] + |P_{\varepsilon,4}|^2 \text{Bi}[S_{x,\varepsilon}]^2, & \text{si } 0 < x < a \\ 1, & \text{si } a < x < \frac{a+b}{2} \\ 0, & \text{si } x > \frac{a+b}{2} \end{cases} , \quad (\text{C.29})$$

donde

$$P_{\varepsilon,1} = \frac{\pi}{2} \left[(w_{\varepsilon,1} + w_{\varepsilon,2}) + \left(\frac{k_1}{\alpha} w_{\varepsilon,3} + \frac{\alpha}{k_1} w_{\varepsilon,4} \right) i \right], \quad P_{\varepsilon,2} = \frac{\pi}{2} \left[(w_{\varepsilon,1} - w_{\varepsilon,2}) + \left(\frac{k_1}{\alpha} w_{\varepsilon,3} - \frac{\alpha}{k_1} w_{\varepsilon,4} \right) i \right],$$

$$P_{\varepsilon,3} = \pi \left[\text{Bi}'[S_a] + \frac{k_1}{\alpha} \text{Bi}[S_a] i \right], \quad P_{\varepsilon,4} = \pi \left[\text{Ai}'[S_a] + \frac{k_1}{\alpha} \text{Ai}[S_a] i \right].$$

Teniendo en cuenta la función de onda C.29 y el hecho de que la probabilidad de encontrar la partícula en todo el espacio debe ser uno, se plantea la ecuación C.30, la cual permite hallar el valor de la amplitud de onda transmitida:

$$\int_{\frac{a-b}{2}}^0 \psi_{1,\varepsilon}^* \psi_{1,\varepsilon} dx + \int_0^a \psi_{2,\varepsilon}^* \psi_{2,\varepsilon} dx + \int_a^{\frac{a+b}{2}} \psi_{3,\varepsilon}^* \psi_{3,\varepsilon} dx = 1. \quad (\text{C.30})$$

Utilizando las siguientes integrales que involucran las funciones de Airy, las cuales se calculan fácilmente por el método de integración por partes,

$$I_{\text{Ai}} = \int_0^a \text{Ai}[S_{x,\varepsilon}]^2 dx = \frac{1}{\alpha} \left[-S_{x,\varepsilon} \text{Ai}[S_{x,\varepsilon}]^2 + \text{Ai}'[S_{x,\varepsilon}]^2 \right]_{x=0}^{x=a},$$

$$I_{\text{Ai,Bi}} = \int_0^a \text{Ai}[S_{x,\varepsilon}] \text{Bi}[S_{x,\varepsilon}] dx = \frac{1}{\alpha} \left[-S_{x,\varepsilon} \text{Ai}[S_{x,\varepsilon}] \text{Bi}[S_{x,\varepsilon}] + \text{Ai}'[S_{x,\varepsilon}] \text{Bi}'[S_{x,\varepsilon}] \right]_{x=0}^{x=a},$$

$$I_{\text{Bi}} = \int_0^a \text{Bi}[S_{x,\varepsilon}]^2 dx = \frac{1}{\alpha} \left[-S_{x,\varepsilon} \text{Bi}[S_{x,\varepsilon}]^2 + \text{Bi}'[S_{x,\varepsilon}]^2 \right]_{x=0}^{x=a},$$

se llega a conocer la constante de normalización:

$$C_\varepsilon \left(\frac{E}{v_0} \right) = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \left\{ \frac{b-a}{4} \left(|P_{\varepsilon,1}|^2 + |P_{\varepsilon,2}|^2 \right) + \frac{1}{k_1} \left[2 \operatorname{Im} [P_{\varepsilon,1} P_{\varepsilon,2}^*] \operatorname{Sen}^2 k_1 \frac{(b-a)}{2} + \operatorname{Re} [P_{\varepsilon,1} P_{\varepsilon,2}^*] \operatorname{Sen} k_1 (b-a) \right] + |P_{\varepsilon,3}|^2 I_{\text{Ai}} + 2 \operatorname{Re} [P_{\varepsilon,3} P_{\varepsilon,4}^*] I_{\text{Ai,Bi}} + |P_{\varepsilon,4}|^2 I_{\text{Bi}} + \frac{b-a}{\pi^2} \right\}^{-\frac{1}{2}}. \quad (\text{C.31})$$

Cabe resaltar que esta amplitud de onda se encuentra parametrizada por la magnitud del campo eléctrico uniforme, situación que hace que se presenten cambios en la corriente de probabilidad, los cuales serán comentados más adelante en los análisis de los resultados.

C.5 CORRIENTE DE PROBABILIDAD

Es claro que el desarrollo de este cálculo depende de la función de onda ψ_ε , definida en C.29. De ahí que, j se estudiará antes, durante y después de la barrera:

$$j_\varepsilon = \frac{-\hbar}{2m_*} \left[\psi_\varepsilon^* \frac{d\psi_\varepsilon}{dx} - \psi_\varepsilon \frac{d\psi_\varepsilon^*}{dx} \right] i, \quad \text{si } E < v_0 \quad (\text{C.32})$$

$$\text{Si } \frac{a-b}{2} < x < 0, \quad j_{1,\varepsilon} = \frac{\hbar k_1}{m_*} [A^* A - B^* B]. \quad (\text{C.33})$$

Pero por C.23 y C.24, $A^* A - B^* B = \pi^2 [\omega(\text{Ai}, \text{Bi})(S) \cdot \omega(\text{Ai}, \text{Bi})(S_a)] C^2$. O sea $A^* A - B^* B = C^2$.

$$\text{Por lo tanto C.33 se reduce a } j_{1,\varepsilon} = \frac{\hbar k_1}{m_*} C^2. \quad (\text{C.34})$$

De otro lado si $0 < x < a$,
$$j_{2,\varepsilon} = \frac{-\hbar}{2\pi m_*} \alpha [F^* E - E^* F] i . \quad (\text{C.35})$$

Utilizando la matriz 4.15 se puede verificar que

$$E^* F - E^* F = \frac{2\pi k_1}{\alpha} C^2 i .$$

De ahí que $j_{2,\varepsilon}$ tiene la misma estructura que C.34.

Por último, si $a < x < \frac{a+b}{2}$, se prueba que $j_{3,\varepsilon} = \frac{\hbar k_1}{m} C^2$.

Luego se ha demostrado la expresión 4.28 para $\frac{a-b}{2} < x < \frac{a+b}{2}$.

ANEXO D: LÍMITES QUE INVOLUCRAN LAS FUNCIONES HIPERGEOMÉTRICAS CONFLUENTES Y EL CAMPO MAGNÉTICO B

Los diversos límites a demostrar en este anexo, están enfocados en parte, a probar que el coeficiente de transmisión afectado con campo magnético uniforme (T_B) tiende al coeficiente de transmisión sin presencia de campos externos (T) cuando el campo magnético tiende a cero.

D.1 ANÁLISIS DE LOS ARGUMENTOS DE LAS FUNCIONES HIPERGEOMÉTRICAS CONFLUENTES CUANDO EL CAMPO MAGNÉTICO TIENDE A CERO

Al retomar la función de onda que es solución de la ecuación de Schrödinger en el interior de la barrera cuando es afectada por campo magnético (D.1), es posible realizar primero una aproximación al argumento (D.2) de las funciones de Kummer para campos magnéticos muy pequeños, para luego analizar la tendencia de las mencionadas funciones cuando el campo magnético tienda a cero:

$$\psi_{2,B}(x,y) = \left\{ E M\left(\frac{\lambda_B^2 + 1}{4}; \frac{1}{2}; \beta\right) + F U\left(\frac{\lambda_B^2 + 1}{4}; \frac{1}{2}; \beta\right) \right\} \exp\left[-\frac{1}{2}\beta + ik_y y\right], \quad (D.1)$$

$$\text{donde } k_B^2 = \frac{\hbar}{qB}, \quad \lambda_B^2 = k_B^2 k_2^2 \quad \text{y} \quad \beta = \frac{1}{k_B^2} (x - k_B^2 k_y)^2. \quad (D.2)$$

Ahora si $B \ll 1$, entonces $\beta \approx \frac{x^2}{k_B^2}$. De ahí que las funciones de Kummer

presentes en la expresión D.1 se aproximan a:

$$M\left(\frac{\lambda_B^2 + 1}{4}; \frac{1}{2}; \beta\right) \approx M\left(\frac{\lambda_B^2 + 1}{4}; \frac{1}{2}; \frac{x^2}{k_B^2}\right), \quad (D.3)$$

$$U\left(\frac{\lambda_B^2 + 1}{4}; \frac{1}{2}; \beta\right) \approx U\left(\frac{\lambda_B^2 + 1}{4}; \frac{1}{2}; \frac{x^2}{k_B^2}\right). \quad (D.4)$$

Por otro lado, se prueba fácilmente que

$$\frac{x^2}{k_B^2} \sim \frac{k_2^2 x^2}{\lambda_B^2 + r} \quad \text{cuando } B \rightarrow 0 \text{ y } r \in R. \quad (D.5)$$

Por lo tanto al combinar esta equivalencia con la representación integral de las funciones de Kummer⁵ se puede establecer:

$$M\left(\frac{\lambda_B^2 + r}{4}; \frac{1}{2}; \frac{x^2}{k_B^2}\right) \sim M\left(\frac{\lambda_B^2 + r}{4}; \frac{1}{2}; \frac{k_2^2 x^2}{\lambda_B^2 + r}\right), \quad \text{si } B \rightarrow 0; \quad (D.6)$$

$$U\left(\frac{\lambda_B^2 + r}{4}; \frac{1}{2}; \frac{x^2}{k_B^2}\right) \sim U\left(\frac{\lambda_B^2 + r}{4}; \frac{1}{2}; \frac{k_2^2 x^2}{\lambda_B^2 + r}\right), \quad \text{si } B \rightarrow 0. \quad (D.7)$$

Al considerar todo lo anterior, ya es posible calcular la tendencia de estas funciones cuando el campo magnético tiende a cero. Para este efecto se demostrarán las siguientes implicaciones, con la salvedad de que resultados son ya demostrados.

⁵ Estos resultados pueden ser leídos en el texto de Abramowitz M., Stegun I. A. "Handbook of the mathematica funcions" Editorial Dover Publications. 1972, p. 505,506

D.2 LIMITES QUE INVOLUCRAN LAS FUNCIONES HIPERGEOMÉTRICAS CONFLUENTES CON EL CAMPO MAGNÉTICO, CUANDO ESTE TIENDE A CERO

D.2.1 Si $\lim_{a \rightarrow \infty} M\left(a; c; \frac{x}{a}\right) = \Gamma(c) x^{\frac{1-c}{2}} I_{c-1}(2\sqrt{x})$, entonces:

$$a. \quad \lim_{B \rightarrow 0} M\left(\frac{\lambda_B^2 + 1}{4}; \frac{1}{2}; \frac{x^2}{k_B^2}\right) = \text{Cosh } k_2 x \quad (\text{D.8})$$

$$b. \quad \lim_{B \rightarrow 0} M'\left(\frac{\lambda_B^2 + 1}{4}; \frac{1}{2}; \frac{x^2}{k_B^2}\right) = k_2 \text{ Senh } k_2 x. \quad (\text{D.9})$$

Demostración

a. Considerando $r = 1$ en la equivalencia D.6 se tiene

$$M\left(\frac{\lambda_B^2 + 1}{4}; \frac{1}{2}; \frac{x^2}{k_B^2}\right) \sim M\left(\frac{\lambda_B^2 + 1}{4}; \frac{1}{2}; \frac{k_2^2 x^2}{\lambda_B^2 + 1}\right) \quad \text{si } B \rightarrow 0.$$

Por lo tanto,

$$\lim_{B \rightarrow 0} M\left(\frac{\lambda_B^2 + 1}{4}; \frac{1}{2}; \frac{x^2}{k_B^2}\right) = \lim_{B \rightarrow 0} M\left(\frac{\lambda_B^2 + 1}{4}; \frac{1}{2}; \frac{k_2^2 x^2}{\lambda_B^2 + 1}\right). \quad (\text{D.10})$$

Considerando la siguiente sustitución $\xi = \frac{\lambda_B^2 + 1}{4}$, si $B \rightarrow 0$ entonces $\xi \rightarrow 0$. De ahí que el límite D.10 es igual a

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} M\left(\xi; \frac{1}{2}; \frac{k_2^2 x^2}{4\xi}\right) = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{k_2^2 x^2}{4}\right)^{1/4} I_{-1/2}\left(2\sqrt{\frac{k_2^2 x^2}{4}}\right). \quad (D.11)$$

Por el resultado expuesto en el apéndice C.2 expresión C.9 se llega a,

$$\lim_{B \rightarrow 0} M\left(\frac{\lambda_B^2 + 1}{4}; \frac{1}{2}; \frac{x^2}{k_B^2}\right) = \text{Cosh } k_2 x$$

b. Por expresión D.13 del apéndice D.5 se establece claramente

$$\lim_{B \rightarrow 0} M\left(\frac{\lambda_B^2 + 1}{4}; \frac{1}{2}; \frac{x^2}{k_B^2}\right) = x \lim_{B \rightarrow 0} \frac{\lambda_B^2 + 1}{k_B^2} M\left(\frac{\lambda_B^2 + 5}{4}; \frac{3}{2}; \frac{x^2}{k_B^2}\right). \quad (D.12)$$

De nuevo tomando $r = 5$ en la equivalencia D.6,

$$M\left(\frac{\lambda_B^2 + 5}{4}; \frac{3}{2}; \frac{x^2}{k_B^2}\right) \sim M\left(\frac{\lambda_B^2 + 5}{4}; \frac{3}{2}; \frac{k_2^2 x^2}{\lambda_B^2 + 5}\right), \quad \text{si } B \rightarrow 0.$$

Ahora, realizando la sustitución $\xi = \frac{\lambda_B^2 + 5}{4}$ similar al caso anterior, en el límite de la derecha (D.12), se obtiene,

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} M\left(\xi; \frac{3}{2}; \frac{k_2^2 x^2}{4\xi}\right) = \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \left(\frac{k_2^2 x^2}{4}\right)^{-1/4} I_{1/2}\left(2\sqrt{\frac{k_2^2 x^2}{4}}\right). \quad (D.13)$$

Por el apéndice D.1, expresión D.3, $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ y usando el resultado del apéndice C.2 expresión C.8 se logra el siguiente resultado:

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} M\left(\xi; \frac{3}{2}; \frac{k_2^2 x}{4\xi}\right) = \frac{1}{k_2 x} \text{Senh } k_2 x . \quad (\text{D.14})$$

Por último, reemplazando el anterior resultado en el límite D.12 se llega a lo que se deseaba demostrar:

$$\lim_{B \rightarrow 0} M'\left(\frac{\lambda_B^2 + 1}{4}; \frac{1}{2}; \frac{x^2}{k_B^2}\right) = k_2 \text{Senh } k_2 x$$

D.2.2 Si $\lim_{a \rightarrow \infty} \Gamma(1 + a - c) U\left(a; c; \frac{x}{a}\right) = 2x^{\frac{1-c}{2}} k_{c-1}(2\sqrt{x})$, entonces:

$$\text{a. } \lim_{B \rightarrow 0} \Gamma\left(\frac{\lambda_B^2 + 3}{4}\right) U\left(\frac{\lambda_B^2 + 1}{4}; \frac{1}{2}; \frac{x^2}{k_B^2}\right) = \sqrt{\pi} \exp[-k_2 x] , \quad (\text{D.15})$$

$$\text{b. } \lim_{B \rightarrow 0} \Gamma\left(\frac{\lambda_B^2 + 3}{4}\right) U'\left(\frac{\lambda_B^2 + 1}{4}; \frac{1}{2}; \frac{x^2}{k_B^2}\right) = -\sqrt{\pi} k_2 \exp[-k_2 x] . \quad (\text{D.16})$$

Demostración

a. Considerando de nuevo $r = 1$, pero en D.7, se tiene:

$$U\left(\frac{\lambda_B^2 + 1}{4}; \frac{1}{2}; \frac{x^2}{k_B^2}\right) \sim U\left(\frac{\lambda_B^2 + 1}{4}; \frac{1}{2}; \frac{k_2^2 x^2}{\lambda_B^2 + 1}\right) \text{ si } B \rightarrow 0 \text{ y teniendo en cuenta la}$$

sustitución $\xi = \frac{\lambda_B^2 + 1}{4}$, el límite en estudio es igual (según la hipótesis) a

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} \Gamma\left(\frac{1}{2} + \xi\right) U\left(\xi; \frac{1}{2}; \frac{k_2^2 x^2}{4\xi}\right) = 2\left(\frac{k_2^2 x^2}{4}\right)^{1/4} k_{-1/2}\left(2\sqrt{\frac{k_2^2 x^2}{4}}\right) . \quad (\text{D.17})$$

Por el resultado C.12 expuesto en el apéndice C.2 se obtiene que

$$k_{-\frac{1}{2}}(k_2 x) = \sqrt{\frac{\pi}{2k_2 x}} \exp[-k_2 x] \quad (\text{esto es posible ya que, } k_{\frac{1}{2}}(k_2 x) = k_{-\frac{1}{2}}(k_2 x)).$$

Operando algebraicamente la parte derecha de D.17 se demuestra que

$$\lim_{B \rightarrow 0} \Gamma\left(\frac{\lambda_B^2 + 3}{4}\right) U\left(\frac{\lambda_B^2 + 1}{4}; \frac{1}{2}; \frac{x^2}{k_B^2}\right) = \sqrt{\pi} \exp[-k_2 x] .$$

b. Con ayuda de la relación D.15 del apéndice D.5 se establece

$$\lim_{B \rightarrow 0} \Gamma\left(\frac{\lambda_B^2 + 3}{4}\right) U\left(\frac{\lambda_B^2 + 1}{4}; \frac{1}{2}; \frac{x^2}{k_B^2}\right) = -\frac{x}{2} \lim_{B \rightarrow 0} \frac{\lambda_B^2 + 1}{k_B^2} \Gamma\left(\frac{\lambda_B^2 + 3}{4}\right) U\left(\frac{\lambda_B^2 + 5}{4}; \frac{3}{2}; \frac{x^2}{k_B^2}\right) .$$

Usando $r = 5$ en D.7, se llega a

$$U\left(\frac{\lambda_B^2 + 5}{4}; \frac{3}{2}; \frac{x^2}{k_B^2}\right) \sim U\left(\frac{\lambda_B^2 + 5}{4}; \frac{3}{2}; \frac{k_2^2 x^2}{\lambda_B^2 + 1}\right), \quad \text{si } B \rightarrow 0 .$$

Usando la sustitución $\xi = \frac{\lambda_B^2 + 5}{4}$, el límite de la derecha se reduce a

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} \Gamma\left(1 + \xi - \frac{3}{2}\right) U\left(\xi; \frac{3}{2}; \frac{k_2^2 x^2}{4\xi}\right) = 2 \left(\frac{k_2^2 x^2}{4}\right)^{-\frac{1}{4}} k_{\frac{1}{2}}\left(2\sqrt{\frac{k_2^2 x^2}{4}}\right) . \quad (\text{D.18})$$

Utilizando de nuevo la propiedad C.12 del apéndice C.2, la expresión del lado derecho se reduce a

$\lim_{B \rightarrow 0} \Gamma\left(\frac{\lambda_B^2 + 3}{4}\right) U'\left(\frac{\lambda_B^2 + 1}{4}; \frac{1}{2}; \frac{x^2}{k_B^2}\right) = -\sqrt{\pi} k_2 \exp[-k_2 x]$. Que era lo que se quería probar.

D.3 LIMITES QUE INVOLUCRAN LA FUNCIÓN GAMMA CON EL CAMPO MAGNÉTICO, CUANDO ESTE TIENDE A CERO.

Con la ayuda de la propiedad D.4 del apéndice D.1, es posible obtener la siguiente equivalencia, la cual permite demostrar un resultado mucho más importante para ser aplicado en los análisis del coeficiente de transmisión cuando el campo magnético tiende a cero.

$$\text{D.3.1} \quad \left[\Gamma\left(\frac{\lambda_B^2 + 1}{4}\right) \right]^{-2} \sim \left(\frac{\lambda_B^2 + 1}{4}\right) \left[\Gamma\left(\frac{\lambda_B^2 + 3}{4}\right) \right]^{-2}, \quad \text{si } B \rightarrow 0. \quad (\text{D.19})$$

Demostración

El probar D.19 es equivalente a probar que el límite D.20 tiende a uno cuando el campo magnético tienda a cero.

$$\lim_{B \rightarrow 0} \left[\frac{\Gamma\left(\frac{\lambda_B^2 + 1}{4}\right)}{\left(\frac{\lambda_B + 1}{4}\right)^{-1/2} \Gamma\left(\frac{\lambda_B^2 + 3}{4}\right)} \right]^{-2}. \quad (\text{D.20})$$

Teniendo en cuenta la sustitución $\xi = \frac{\lambda_B^2 + 1}{4}$, D.20 se reduce a

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \left[\frac{\Gamma(\xi + \frac{1}{2})}{\xi^{\frac{1}{2}} \Gamma(\xi)} \right]^2 = \left[\lim_{\xi \rightarrow 0} \left(1 + \frac{1}{2\xi} \right)^{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}} \right]^2 = 1$$

$$\mathbf{D.3.2} \quad \lim_{B \rightarrow 0} \frac{\lambda_B^2 + 1}{k_B} \Gamma\left(\frac{\lambda_B^2 + 3}{4}\right) \left[\Gamma\left(\frac{\lambda_B^2 + 5}{4}\right) \right]^{-1} = 2k_2 . \quad (\text{D.21})$$

Demostración

Con un pequeño arreglo algebraico, el lado izquierdo de D.21 equivale a

$$\lim_{B \rightarrow 0} \frac{\lambda_B^2 + 1}{k_B} \left(\frac{\lambda_B^2 + 3}{4} \right)^{-\frac{1}{2}} \lim_{B \rightarrow 0} \left(\frac{\lambda_B^2 + 3}{4} \right)^{\frac{1}{2}} \Gamma\left(\frac{\lambda_B^2 + 3}{4}\right) \left[\Gamma\left(\frac{\lambda_B^2 + 3}{4} + \frac{1}{2}\right) \right]^{-1} ,$$

donde el primer límite

$$\lim_{B \rightarrow 0} \frac{\lambda_B^2 + 1}{k_B} \left(\frac{\lambda_B^2 + 3}{4} \right)^{-\frac{1}{2}} = 2 \lim_{B \rightarrow 0} \sqrt{\frac{(k_B^2 k_2^2 + 1)}{k_B^2 (k_B^2 k_2^2 + 3)}} = 2k_2 .$$

Restaría probar que el límite faltante tiende a uno. Por ello, sea $\xi = \frac{k_B^2 + 3}{4}$,

entonces,

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{\xi^{\frac{1}{2}} \Gamma(\xi)}{\Gamma(\xi + \frac{1}{2})} = \left[\lim_{\xi \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2\xi} \right)^{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}} \right]^{-1} = 1 .$$

Luego, se ha demostrado el límite D.21.

D.4 TENDENCIA DEL COEFICIENTE DE TRANSMISIÓN AFECTADO POR CAMPO MAGNÉTICO AL COEFICIENTE DE TRANSMISIÓN SIN PRESENCIA DE CAMPOS EXTERNOS.

Antes de estudiar la tendencia de las funciones $w_{B,i}, i = \overline{1,4}$ cuando el campo magnético tiende a cero, las cuales se retomarán a continuación; es importante ver en principio el comportamiento de dichas funciones cuando éste campo es mucho más pequeño que uno:

$$\begin{aligned} w_{B,1} &= M[S]U'[S_a] - M'[S_a]U[S], & w_{B,3} &= M[S]U[S_a] - M[S_a]U[S], \\ w_{B,2} &= M[S_a]U'[S] - M'[S]U[S_a], & w_{B,4} &= M'[S]U'[S_a] - M'[S_a]U'[S]. \end{aligned}$$

En sí, los cambios se presentan en los argumentos de las funciones, que de acuerdo en con valores donde se estén evaluando generan a su vez cambios en la estructura de las funciones $w_{B,i}, i = \overline{1,4}$.

De nuevo al tener en cuenta las aproximaciones D.3 y D.4 se logra apreciar que hay problemas de convergencia para $x = 0$ (recordando que S representa el argumento evaluado en $x = 0$). Esta dificultad puede ser superada si se analiza la tendencia de las funciones de Kummer cuando $x \rightarrow 0^+$ en lugar de $x = 0$. Para ello es necesario retomar las equivalencias expresadas en D.20 y D.22 del apéndice D.8.

La función de Kummer de primera especie $M\left(\frac{\lambda_B^2 + 1}{4}; \frac{1}{2}; \frac{x^2}{k_B^2}\right)$, según D.20

(apéndice D.8) equivale a uno, mientras que su derivada tiende a cero (esto se debe al aplicar primero la propiedad D.13 para $k = 1$ y luego de nuevo D.20 de los apéndices D.5 y D.8 respectivamente), cuando x tiende a cero.

Para la función de Kummer de segunda especie se tiene

$$U\left(\frac{\lambda_B^2 + 1}{4}; \frac{1}{2}; \frac{x^2}{k_B^2}\right) \sim \sqrt{\pi} \left[\Gamma\left(\frac{\lambda_B^2 + 3}{4}\right) \right]^{-1} \quad \text{si } x \rightarrow 0 \quad \text{Según D.22 (apéndice D.8).}$$

Además

$$U'\left(\frac{\lambda_B^2 + 1}{4}; \frac{1}{2}; \frac{x^2}{k_B^2}\right) \sim -\frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\lambda_B^2 + 1}{k_B} \left[\Gamma\left(\frac{\lambda_B^2 + 5}{4}\right) \right]^{-1} \quad \text{si } x \rightarrow 0^+,$$

de acuerdo con D.15 para $k = 1$ y de nuevo D.21 (de los apéndices D.5 y D.8 respectivamente).

En consecuencia,

$$w_{B,1} \approx U\left(\frac{\lambda_B^2 + 1}{4}; \frac{1}{2}; \frac{a^2}{k_B^2}\right) - \sqrt{\pi} \left[\Gamma\left(\frac{\lambda_B^2 + 3}{4}\right) \right]^{-1} M'\left(\frac{\lambda_B^2 + 1}{4}; \frac{1}{2}; \frac{a^2}{k_B^2}\right), \quad (\text{D.22})$$

$$w_{B,2} \approx -\frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\lambda_B^2 + 1}{k_B} \left[\Gamma\left(\frac{\lambda_B^2 + 5}{4}\right) \right]^{-1} M\left(\frac{\lambda_B^2 + 1}{4}; \frac{1}{2}; \frac{a^2}{k_B^2}\right), \quad (\text{D.23})$$

$$w_{B,3} \approx U\left(\frac{\lambda_B^2 + 1}{4}; \frac{1}{2}; \frac{a^2}{k_B^2}\right) - \sqrt{\pi} \left[\Gamma\left(\frac{\lambda_B^2 + 3}{4}\right) \right]^{-1} M\left(\frac{\lambda_B^2 + 1}{4}; \frac{1}{2}; \frac{a^2}{k_B^2}\right), \quad (\text{D.24})$$

$$w_{B,4} \approx \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\lambda_B^2 + 1}{k_B} \left[\Gamma\left(\frac{\lambda_B^2 + 5}{4}\right) \right]^{-1} M'\left(\frac{\lambda_B^2 + 1}{4}; \frac{1}{2}; \frac{a^2}{k_B^2}\right). \quad (\text{D.25})$$

Siempre y cuando $x \rightarrow 0^+$.

Considerando los hechos anteriores se pueden comprobar los siguientes límites

$$\mathbf{D.4.1} \quad \lim_{B \rightarrow 0} \Gamma\left(\frac{\lambda_B^2 + 3}{4}\right) w_{B,1} = -\sqrt{\pi} k_2 \text{Cosh } k_2 a . \quad (\text{D.26})$$

Demostración

$$\Gamma\left(\frac{\lambda_B^2 + 3}{4}\right) w_{B,1} = \Gamma\left(\frac{\lambda_B^2 + 3}{4}\right) (M[S]U'[S_a] - M'[S_a]U[S]) \quad (\text{D.27})$$

Si el campo magnético $B \ll 1$, entonces D.27 se puede aproximar de acuerdo con D.22:

$$\Gamma\left(\frac{\lambda_B^2 + 3}{4}\right) w_{B,1} \approx \Gamma\left(\frac{\lambda_B^2 + 3}{4}\right) U'\left(\frac{\lambda_B^2 + 1}{4}; \frac{1}{2}; \frac{a^2}{k_B^2}\right) - \sqrt{\pi} M'\left(\frac{\lambda_B^2 + 1}{4}; \frac{1}{2}; \frac{a^2}{k_B^2}\right).$$

Por lo tanto,

$$\lim_{B \rightarrow 0} \Gamma\left(\frac{\lambda_B^2 + 3}{4}\right) w_{B,1} = \lim_{B \rightarrow 0} \Gamma\left(\frac{\lambda_B^2 + 3}{4}\right) U'\left(\frac{\lambda_B^2 + 1}{4}; \frac{1}{2}; \frac{a^2}{k_B^2}\right) - \sqrt{\pi} \lim_{B \rightarrow 0} M'\left(\frac{\lambda_B^2 + 1}{4}; \frac{1}{2}; \frac{a^2}{k_B^2}\right).$$

Usando el resultado D.16, D.9 y propiedades de las funciones hiperbólicas se logra demostrar que

$$\lim_{B \rightarrow 0} \Gamma\left(\frac{\lambda_B^2 + 3}{4}\right) w_{B,1} = -\sqrt{\pi} k_2 \text{Cosh } k_2 a$$

$$\mathbf{D.4.2} \quad \lim_{B \rightarrow 0} \Gamma\left(\frac{\lambda_B^2 + 3}{4}\right) w_{B,2} = -\sqrt{\pi} k_2 \operatorname{Cosh} k_2 a . \quad (\text{D.28})$$

Demostración

$$\Gamma\left(\frac{\lambda_B^2 + 3}{4}\right) w_{B,2} = \Gamma\left(\frac{\lambda_B^2 + 3}{4}\right) (M[S_a]U[S] - M[S]U[S_a]) . \quad (\text{D.29})$$

Si el campo magnético $B \ll 1$, entonces D.29 se aproxima de acuerdo con D.23:

$$\Gamma\left(\frac{\lambda_B^2 + 3}{4}\right) w_{B,2} = -\frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\lambda_B^2 + 1}{k_B} \Gamma\left(\frac{\lambda_B^2 + 3}{4}\right) \left[\Gamma\left(\frac{\lambda_B^2 + 5}{4}\right) \right]^{-1} \mathbf{M}\left(\frac{\lambda_B^2 + 1}{4}; \frac{1}{2}; \frac{a^2}{k_B^2}\right) .$$

Entonces

$$\lim_{B \rightarrow 0} \Gamma\left(\frac{\lambda_B^2 + 3}{4}\right) w_{B,2} \approx -\frac{\sqrt{\pi}}{2} \lim_{B \rightarrow 0} \frac{\lambda_B^2 + 1}{k_B} \Gamma\left(\frac{\lambda_B^2 + 3}{4}\right) \left[\Gamma\left(\frac{\lambda_B^2 + 5}{4}\right) \right]^{-1} \lim_{B \rightarrow 0} \mathbf{M}\left(\frac{\lambda_B^2 + 1}{4}; \frac{1}{2}; \frac{a^2}{k_B^2}\right)$$

Luego, por D.21 y D.8 se demuestra D.28.

$$\mathbf{D.4.3} \quad \lim_{B \rightarrow 0} \Gamma\left(\frac{\lambda_B^2 + 3}{4}\right) w_{B,3} = -\sqrt{\pi} k_2 \operatorname{Senh} k_2 a . \quad (\text{D.30})$$

Demostración

$$\Gamma\left(\frac{\lambda_B^2 + 3}{4}\right) w_{B,3} = \Gamma\left(\frac{\lambda_B^2 + 3}{4}\right) (M[S]U[S_a] - M[S_a]U[S]) . \quad (\text{D.31})$$

Si el campo magnético $B \ll 1$, entonces D.31 se aproxima de acuerdo a D.24

$$\lim_{B \rightarrow 0} \Gamma\left(\frac{\lambda_B^2 + 3}{4}\right) w_{B,3} = \lim_{B \rightarrow 0} \Gamma\left(\frac{\lambda_B^2 + 3}{4}\right) U\left(\frac{\lambda_B^2 + 1}{4}; \frac{1}{2}; \frac{a^2}{k_B^2}\right) - \sqrt{\pi} \lim_{B \rightarrow 0} M\left(\frac{\lambda_B^2 + 1}{4}; \frac{1}{2}; \frac{a^2}{k_B^2}\right)$$

Luego, por los límites D.15 y D.8 se prueba que el límite en estudio.

$$\mathbf{D.4.4} \quad \lim_{B \rightarrow 0} \Gamma\left(\frac{\lambda_B^2 + 3}{4}\right) w_{B,4} = \sqrt{\pi} k_2^2 \operatorname{Senh} k_2 a . \quad (\text{D.32})$$

Demostración

$$\Gamma\left(\frac{\lambda_B^2 + 3}{4}\right) w_{B,4} = \Gamma\left(\frac{\lambda_B^2 + 3}{4}\right) (M'[S]U'[S_a] - M'[S_a]U'[S]) . \quad (\text{D.33})$$

De nuevo considerando en primera instancia el campo magnético $B \ll 1$, D.33 se aproxima según D.25:

$$\lim_{B \rightarrow 0} \Gamma\left(\frac{\lambda_B^2 + 3}{4}\right) w_{4,B} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \lim_{B \rightarrow 0} \frac{\lambda_B^2 + 1}{k_B} \Gamma\left(\frac{\lambda_B^2 + 3}{4}\right) \left[\Gamma\left(\frac{\lambda_B^2 + 5}{4}\right) \right]^{-1} \lim_{B \rightarrow 0} M'\left(\frac{\lambda_B^2 + 1}{4}; \frac{1}{2}; \frac{a^2}{k_B^2}\right) .$$

Por último, de acuerdo con los límites D.21y D.9, se prueba el resultado D.32.

A continuación se presenta un límite donde la técnica de prueba es muy distinta de las anteriores realizadas, pero con una gran utilidad en el sentido de abreviar cálculos para poder demostrar el objetivo principal de esta sección.

$$\mathbf{D.4.5} \quad \lim_{B \rightarrow 0} \rho_a \Gamma \left(\frac{\lambda_B^2 + 3}{4} \right) w_{B,i} = 0 \quad \text{con } i = 2, 3 \quad (\text{D.34})$$

El probar D.34 resulta muy fácil, puesto que en el momento de realizar la aproximación para el campo magnético mucho menor que uno, ρ_a pasa a hacer una relación directa del campo magnético. Es decir, $\rho_a \rightarrow 0$ cuando $B \rightarrow 0$. Además como los límites D.28 y D.30 existen y son finitos, entonces se obtiene el resultado.

Después de esta serie de resultados, es el momento de analizar que sucede con el coeficiente de transmisión (5.28), cuando se considera el campo magnético B mucho menor que la unidad.

$$T_B \approx \frac{16\pi}{k_B^2} \left[\Gamma \left(\frac{\lambda_B^2 + 1}{4} \right) \right]^{-2} \exp \left[\frac{a^2}{k_B^2} \right] \left\{ \left[w_{B,1} + w_{B,2} - \rho_a w_{B,3} \right]^2 + k_1^{-2} \left[\rho_a w_{B,2} + k_1^2 w_{B,3} + w_{B,4} \right]^2 \right\}^{-1},$$

donde las funciones $w_{B,i}$, $i = \overline{1,4}$ son las definidas de la D.22 a la D.25.

Antes de mirar la tendencia de T_B cuando $B \rightarrow 0$ se debe multiplicar por el factor

$$\Gamma^2 \left(\frac{\lambda_B^2 + 3}{4} \right), \text{ el cual permite realizar los cálculos de una forma más sencilla,}$$

llegando a la expresión:

$$T_B \approx \frac{16\pi}{k_B^2} \Gamma^{-2} \left(\frac{\lambda_B^2 + 1}{4} \right) \Gamma^2 \left(\frac{\lambda_B^2 + 3}{4} \right) \exp \left[\frac{a^2}{k_B^2} \right] \left\{ \Gamma \left(\frac{\lambda_B^2 + 3}{4} \right) \left[w_{B,1} + w_{B,2} - \rho_a w_{B,3} \right]^2 + k_1^{-2} \left[\Gamma \left(\frac{\lambda_B^2 + 3}{4} \right) \left[\rho_a w_{B,2} + k_1^2 w_{B,3} + w_{B,4} \right] \right]^2 \right\}^{-1}. \quad (\text{D.35})$$

A continuación se analizará lo que ocurre con T_B cuando $B \rightarrow 0$.

$$T_B \approx 16\pi \lim_{B \rightarrow 0} \frac{1}{k_B^2} \Gamma^{-2} \left(\frac{\lambda_B^2 + 1}{4} \right) \Gamma^2 \left(\frac{\lambda_B^2 + 3}{4} \right) \exp \left[\frac{a^2}{k_B^2} \right] \lim_{B \rightarrow 0} \left\{ \Gamma \left(\frac{\lambda_B^2 + 3}{4} \right) \left[w_{B,1} + w_{B,2} - \rho_a w_{B,3} \right]^2 + k_1^{-2} \left[\Gamma \left(\frac{\lambda_B^2 + 3}{4} \right) \left[\rho_a w_{B,2} + k_1^2 w_{B,3} + w_{B,4} \right] \right]^2 \right\}^{-1} .$$

Estudiando por separado los límites involucrados, se establece:

$$\lim_{B \rightarrow 0} \frac{1}{k_B^2} \Gamma^{-2} \left(\frac{\lambda_B^2 + 1}{4} \right) \Gamma^2 \left(\frac{\lambda_B^2 + 3}{4} \right) \exp \left[\frac{a^2}{k_B^2} \right] = \frac{1}{4} \lim_{B \rightarrow 0} \frac{\lambda_B^2 + 1}{k_B^2} = \frac{k_2^2}{4} . \quad (D.36)$$

Esto es posible por el resultado D.19.

$$\lim_{B \rightarrow 0} \left\{ \Gamma \left(\frac{\lambda_B^2 + 3}{4} \right) \left[w_{B,1} + w_{B,2} - \rho_a w_{B,3} \right]^2 + k_1^{-2} \left[\Gamma \left(\frac{\lambda_B^2 + 3}{4} \right) \left[\rho_a w_{B,2} + k_1^2 w_{B,3} + w_{B,4} \right] \right]^2 \right\}^{-1} \quad (D.37)$$

Es claro que para este cálculo es indispensable manejar los resultados D.26, D.28, D.30 y D.32 además del límite expresado en D.34. Por lo tanto, después de varias transformaciones algebraicas se tiene la expresión:

$$\frac{1}{4\pi k_2^2} \left\{ \text{Cosh}^2 k_2 a + \frac{1}{4} \left(\frac{k_1^2 + k_2^2}{k_1 k_2} \right) \text{Senh}^2 k_2 a \right\}^{-1} . \quad (D.38)$$

Luego por D.36 y D.38,

$$\lim_{B \rightarrow 0} T_B = \left\{ \text{Cosh}^2 k_2 a + \frac{1}{4} \left(\frac{k_1^2 + k_2^2}{k_1 k_2} \right) \text{Senh}^2 k_2 a \right\}^{-1} = T .$$

ANEXO E: DESCRIPCIÓN DE LA BARRERA DE POTENCIAL FINITA RECTANGULAR EN PRESENCIA DE CAMPO MAGNÉTICO UNIFORME.

E.1 ECUACIÓN DE SCHÖDINGER GENERADA DEBIDO AL CAMPO MÁGNETICO UNIFORME B

Al aplicar un campo magnético B a una barrera de potencial, esta se afecta de tal manera que no es posible describir su cambio de forma explícita. De ahí la necesidad de usar la función de Lagrange $\mathcal{L}(r, \dot{r})$, la que se define como la diferencia entre la energía cinética y la potencial.

$$\mathcal{L}(r, \dot{r}) = \frac{1}{2} m_* (\dot{\vec{r}})^2 + q \dot{\vec{r}} \cdot \vec{A} - v_0 \quad (\text{E.1})$$

Donde \vec{A} es el vector potencial magnético, el cual sirve para definir el campo magnético \vec{B} .

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad (\text{E.2})$$

Por lo expuesto en el segundo párrafo de la sección 5.1, \vec{A} se puede definir como el vector $(0, Bx, 0)$. Entonces $\vec{\nabla} \times \vec{A} = B\hat{z}$, donde $\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$ es el vector gradiente.

La función Hamiltoniana H se define en términos de la función de Lagrange de la siguiente manera:

$$H(r, \dot{r}) = P \circ \vec{r} - \mathcal{L}(r, \dot{r}) , \quad (\text{E.3})$$

donde P es el operador momentum que en forma vectorial se define como $-i\hbar\vec{\nabla}$ y en términos de la función de Lagrange, mediante

$$P = \frac{\partial}{\partial \dot{r}} \mathcal{L}(\vec{r}, \dot{r}) . \quad (\text{E.4})$$

Por otro lado, al calcular el lado derecho de la expresión anterior, considerando E.1, se puede obtener \vec{r} en términos del operador momentum y vector potencial magnético. Al reemplazar en E.3 se obtiene

$$H = \frac{1}{2m_*} [P - q'\vec{A}]^2 + \nu_0 . \quad (\text{E.5})$$

Por último, el hamiltoniano E.5 se reduce aún más si se tiene en cuenta que la partícula se mueve en el plano xy por efectos del campo magnético. Es decir $P = (P_x, P_y, 0)$.

$$\text{Luego, } H = \frac{1}{2m_*} [P_x^2 + (P_y - q'Bx)^2] + \nu_0 . \quad (\text{E.6})$$

Según lo anterior, y teniendo en cuenta la ecuación de Schrödinger en términos de operadores $H\psi = E\psi$, se puede establecer como sigue:

$$-\frac{\hbar^2}{2m_*} \frac{\partial^2 \psi_{2,B}}{\partial x^2} + \frac{1}{2m_*} \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial y} + q'Bx \right)^2 \psi_{2,B} + \nu_0 \psi_{2,B} = E \psi_{2,B} . \quad (\text{E.7})$$

Además se verifica fácilmente que

$$\left(i\hbar \frac{\partial}{\partial y} + q'Bx \right)^2 \psi_{2,B} = -\hbar^2 \frac{\partial^2 \psi_{2,B}}{\partial y^2} + 2q'\hbar Bx \frac{\partial \psi_{2,B}}{\partial y} i + (q'Bx)^2 \psi_{2,B} . \quad (\text{E.8})$$

Por lo tanto, $H\psi = E\psi$ equivale a la E. D.

$$-\frac{\hbar^2}{2m_*} \frac{\partial^2 \psi_{2,B}}{\partial x^2} + \left[\frac{1}{2} m_* \Omega^2 x^2 + (\nu_0 - E) \right] \psi_{2,B} - \frac{\hbar^2}{2m_*} \frac{\partial^2 \psi_{2,B}}{\partial y^2} + \Omega \hbar x \frac{\partial \psi_{2,B}}{\partial y} i = 0 . \quad (\text{E.9})$$

La cual está en términos de la frecuencia ciclotrónica $\Omega = \left\| \frac{q'}{m_*} \vec{B} \right\|$. O también puede

ser descrita en términos de la longitud magnética $k_B^2 = \frac{\hbar}{qB}$, es decir

$$\frac{\partial^2 \psi_{2,B}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi_{2,B}}{\partial y^2} - (k_B^4 x^2 + k_2^2) \psi_{2,B} - \frac{2x}{k_B^2} \frac{\partial \psi_{2,B}}{\partial y} i = 0 . \quad (\text{E.10})$$

Esta última E.D. es la más fácil de estudiar, además involucra el vector de onda característico en el interior de la barrera. $k_2^2 = \frac{2m_* (\nu_0 - E)}{\hbar^2}$.

E.2 SOLUCIÓN A LA ECUACIÓN DIFERENCIAL DE SCHRÖDINGER DEBIDA AL CAMPO MAGNÉTICO UNIFORME B

A continuación el trabajo será resolver E.D. E.10 para ello se supondrá una función solución $\psi_{2,B}$ dos veces diferenciable.

$$\psi_{2,B}(x, y) = u(x) \exp[ik_y y] \quad (\text{E.11})$$

Cabe indicar que en la sección 5.1 se comenta la interpretación física que tiene la función $\psi_{2,B}$, de ahí que k_y representa el vector de onda en dirección y , más no una simple constante a determinar.

Como es de costumbre en este método de solución, el problema se reduce a establecer la función u a través de los siguientes procesos

$$\frac{\partial^2 \psi_{2,B}}{\partial x^2} = \exp[ik_y y] \frac{d^2 u}{dx^2}, \quad (\text{E.12})$$

$$\frac{\partial \psi_{2,B}}{\partial y} = ik_y \exp[ik_y y] u(x), \quad (\text{E.13})$$

$$\frac{\partial^2 \psi_{2,B}}{\partial y^2} = -k_y^2 \exp[ik_y y] u(x). \quad (\text{E.14})$$

Sustituyendo las funciones de la E.11 a la E.14 en la E.D. E.10, se logra una E.D ordinaria de segundo orden, tal como se esperaba.

$$\frac{d^2 u}{dx^2} - \left[\frac{1}{k_B^4} (x - k_B^2 k_y)^2 + k_2^2 \right] u(x) = 0 \quad (\text{E.15})$$

La estrategia a seguir ahora, es llevar la E.D. E.15 a una E.D conocida; para ello es necesario realizar la sustitución

$$\beta = \frac{1}{k_B^2} (x - k_B^2 k_y)^2, \quad (\text{E.16})$$

De donde se logra

$$\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{4}{k_B^2} \left(\beta \frac{d^2u}{d\beta^2} + \frac{1}{2} \frac{du}{d\beta} \right). \quad (\text{E.17})$$

Al sustituir en la E.D. E.15 esta se transforma en nueva E.D. con un término más de primer orden:

$$\frac{d^2u}{d\beta^2} + \frac{1}{2\beta} \frac{du}{d\beta} - \frac{1}{4} \left(1 + \frac{\lambda_B^2}{\beta} \right) u(\beta) = 0 \quad (\text{E.18})$$

El primer paso para resolver esta nueva E.D. consiste en mirar el comportamiento asintótico de ella. El cual se presenta cuando $B \rightarrow 0$ ya que según E.16, la variable $\beta \rightarrow \infty$. Entonces, la E.D. se reduce a

$$\frac{d^2u_\infty}{d\beta^2} - \frac{1}{4} u_\infty = 0. \quad (\text{E.19})$$

La solución a esta E.D. es muy conocida y tiene la forma

$$u_\infty(\beta) = A_1 \exp\left[\frac{1}{2}\beta\right] + A_2 \exp\left[-\frac{1}{2}\beta\right]. \quad (\text{E.20})$$

Es evidente que la parte creciente debe ser descartada, pues de lo contrario la función E.20 tiende a infinito cuando $\beta \rightarrow \infty$. Esto lleva a establecer una solución de la forma:

$$u(\beta) = \exp\left[-\frac{1}{2}\beta\right] \phi(\beta), \quad (\text{E.21})$$

Y debe determinarse la función $\phi(\beta)$, teniendo en cuenta:

$$\frac{du}{d\beta} = \left(\frac{d\phi}{d\beta} - \frac{1}{2} \phi(\beta) \right) \exp\left[-\frac{1}{2}\beta\right], \quad (\text{E.22})$$

$$\frac{d^2 u}{d\beta^2} = \left(\frac{1}{4} \phi(\beta) - \frac{d\phi}{d\beta} + \frac{d^2 \phi}{d\beta^2} \right) \exp\left[-\frac{1}{2}\beta\right]. \quad (\text{E.23})$$

Al reemplazar de la E.21 a la E.23 en E.18 se llega a la E.D llamada hipergeométrica confluyente (apéndice D.6, expresión D.16):

$$\beta \frac{d^2 \phi}{d\beta^2} + \left(\frac{1}{2} - \beta \right) \frac{d\phi}{d\beta} - \left(\frac{\lambda_B^2 + 1}{4} \right) \phi(\beta) = 0.$$

De acuerdo con la expresión D.17 (apéndice D.6), la solución es una combinación lineal de las funciones de Kummer. Es decir,

$$\phi(\beta) = E M\left(\frac{\lambda_B^2 + 1}{4}; \frac{1}{2}; \beta\right) + F U\left(\frac{\lambda_B^2 + 1}{4}; \frac{1}{2}; \beta\right).$$

De ahí que la solución E.21 de la E.D. E.18 se transforma en

$$u(\beta) = E \exp\left[-\frac{1}{2}\beta\right] M\left(\frac{\lambda_B^2 + 1}{4}; \frac{1}{2}; \beta\right) + F \exp\left[-\frac{1}{2}\beta\right] U\left(\frac{\lambda_B^2 + 1}{4}; \frac{1}{2}; \beta\right),$$

La cual proporciona la solución E.D. E.10, si se retoma la sustitución E.16:

$$\psi_{2,B}(x, y) = \left\{ E M\left(\frac{\lambda_B^2 + 1}{4}; \frac{1}{2}; \beta\right) + F U\left(\frac{\lambda_B^2 + 1}{4}; \frac{1}{2}; \beta\right) \right\} \exp\left[-\frac{1}{2}\beta + ik_y y\right].$$

Esta es en últimas la función que soluciona la ecuación de Schrödinger que se presenta cuando se tiene en cuenta la energía potencial dada por un campo magnético.

E.3 COEFICIENTE DE TRANSMISIÓN Y REFLEXIÓN

Para realizar un desarrollo adecuado en la descripción analítica de los coeficientes en cuestión, se trabajará de forma análoga como cuando se consideraba un campo eléctrico. En otras palabras se describirán cuidadosamente las derivadas de las funciones de Kummer (caso particular de las funciones hipergeométricas confluentes) que aquí se utilizan, pues en ellas se basan varios cálculos importantes.

$$\frac{d}{dx} M\left(\frac{\lambda_B^2 + 1}{4}; \frac{1}{2}; \left(\frac{x}{k_B} - k_B k_y\right)^2\right) = M'\left(\frac{\lambda_B^2 + 1}{4}; \frac{1}{2}; \left(\frac{x}{k_B} - k_B k_y\right)^2\right); \quad (\text{E.24})$$

la igualdad del lado derecho representa

$$M'\left(\frac{\lambda_B^2 + 1}{4}; \frac{1}{2}; \left(\frac{x}{k_B} - k_B k_y\right)^2\right) = \frac{\lambda_B^2 + 1}{k_B^2} (x - k_B^2 k_y) M\left(\frac{\lambda_B^2 + 5}{4}; \frac{1}{2}; \beta_x\right). \quad (\text{E.25})$$

De igual forma,

$$\frac{d}{dx} U\left(\frac{\lambda_B^2 + 1}{4}; \frac{1}{2}; \left(\frac{x}{k_B} - k_B k_y\right)^2\right) = U'\left(\frac{\lambda_B^2 + 1}{4}; \frac{1}{2}; \left(\frac{x}{k_B} - k_B k_y\right)^2\right); \quad (\text{E.26})$$

que al tener en cuenta la expresión D.15 (apéndice D.5) para $k = 1$, da

$$U'\left(\frac{\lambda_B^2 + 1}{4}; \frac{1}{2}; \left(\frac{x}{k_B} - k_B k_y\right)^2\right) = -\frac{1}{2} \frac{\lambda_B^2 + 1}{k_B^2} (x - k_B^2 k_y) U\left(\frac{\lambda_B^2 + 5}{4}; \frac{1}{2}; \beta_x\right). \quad (\text{E.27})$$

Para efectos de cálculos tanto teóricos como computacionales, se debe tener en cuenta la notación $M'\left(\frac{\lambda_B^2+1}{4}; \frac{1}{2}; \beta_x\right)$ y $U'\left(\frac{\lambda_B^2+5}{4}; \frac{1}{2}; \beta_x\right)$ definidas en E.25 y E.27 respectivamente, puesto que ellas consideran las derivadas internas de las funciones de Kummer. Permitiendo que los procesos matemáticos que a continuación se describan sean más prácticos.

Luego

$$\frac{\partial}{\partial x} \psi_{2,B} = \exp\left[-\frac{1}{2}\beta_x + ik_y y\right] \left\{ E\left[M'\left(\frac{\lambda_B^2+1}{4}; \frac{1}{2}; \beta_x\right) - \rho_x M\left(\frac{\lambda_B^2+1}{4}; \frac{1}{2}; \beta_x\right)\right] + F\left[U'\left(\frac{\lambda_B^2+1}{4}; \frac{1}{2}; \beta_x\right) - \rho_x U\left(\frac{\lambda_B^2+1}{4}; \frac{1}{2}; \beta_x\right)\right] \right\}, \quad (E.28)$$

con $\rho_x = \frac{x}{k_B^2} - k_y$. Expresión que representa la derivada interna la función exponencial.

Por otro lado, es conveniente no trabajar directamente con el resultado D.19 (apéndice D.7); en su lugar utiliza la expresión D.18 (apéndice D.7) de acuerdo con las notaciones E.25 y E.27, lo que conlleva de nuevo a la propiedad D.19, pero con la garantía de considerar solo una vez la derivada interna. Entonces, según D.18 se obtiene el wronskiano para las funciones de Kummer

$$\omega(M, U)(\beta_x) = -\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \left[\Gamma\left(\frac{\lambda_B^2+1}{4}\right)\right]^{-1} \beta_x^{-1/2} \exp[\beta_x] \frac{d\beta_x}{dx};$$

Pero $\beta_x^{-1/2} = k_B |x - k_B^2 k_y|^{-1}$ y $\frac{d\beta_x}{dx} = \frac{2}{k_B^2} (x - k_B^2 k_y)$. Esto implica que el wronskiano se exprese como

$$\omega(M,U)(\beta_x) = -\frac{2}{k_B} \sqrt{\pi} \frac{(x - k_B^2 k_y)}{|x - k_B^2 k_y|} \left[\Gamma \left(\frac{\lambda_B^2 + 1}{4} \right) \right]^{-1} \exp \left[\left(\frac{a}{k_B} - k_B k_y \right)^2 \right]. \quad (\text{E.29})$$

Por último, para poder desarrollar la siguiente sección de este apéndice se debe retomar la notación

$$S = \left(\frac{\lambda_B^2 + 1}{4}; \frac{1}{2}; k_B^2 k_y^2 \right), \quad S_a = \left(\frac{\lambda_B^2 + 1}{4}; \frac{1}{2}; \left(\frac{a}{k_B} - k_B k_y \right)^2 \right).$$

E.3.1 Funciones que involucran el punto de discontinuidad en $x = 0$

$$\psi_{1,B}(x) = A \exp[ik_1 x] + B \exp[-ik_1 x] \quad \text{si } x < 0. \quad (\text{E.30})$$

Para valores entre 0 y a , que involucran el interior de la barrera la función de onda a considerar es

$$\psi_{2,B}(x,y) = \left\{ EM \left(\frac{\lambda_B^2 + 1}{4}; \frac{1}{2}; \beta_x \right) + F U \left(\frac{\lambda_B^2 + 1}{4}; \frac{1}{2}; \beta_x \right) \right\} \exp \left[-\frac{1}{2} \beta_x + ik_y y \right]. \quad (\text{E.31})$$

Se debe cumplir:

$$\begin{cases} \psi_{1,B}(0) - \psi_{2,B}(0,y) = 0 \\ \left. \frac{\partial \psi_{1,B}}{\partial x} \right|_{x=0} - \left. \frac{\partial \psi_{2,B}}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \end{cases} \quad (\text{E.32})$$

lo que equivale matricialmente a

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \frac{\xi}{k_1} \begin{bmatrix} k_1 M[S] & k_1 U[S] \\ (\rho_0 M[S] - M'[S]) i & (\rho_0 U[S] - U'[S]) i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E \\ F \end{bmatrix}. \quad (\text{E.33})$$

Donde muy fácilmente se puede despejar las constantes A y B en términos de E y F (5.19).

E.3.2 Funciones que involucran el punto de discontinuidad en $x = a$. Se debe tener en cuenta la función $\psi_{2,B}$ (E.31) y la función de onda

$$\psi_{3,B} = C \exp[ik_1 x] , \quad \text{si } x > a . \quad (\text{E.34})$$

Aplicando la condición 5.22 en forma matricial,

$$\begin{bmatrix} M[S_a] & U[S_a] \\ M'[S_a] - \rho_a M[S_a] & U'[S_a] - \rho_a U[S_a] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E \\ F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ ik_1 \end{bmatrix} \exp\left[\frac{1}{2}\beta_a + i(k_1 a - k_y y)\right] C , \quad (\text{E.35})$$

Ahora, para poder obtener las constantes E y F de la ecuación E.35, es necesario utilizar el Wronskiano de las funciones de Kummer.

$$\text{Sea } L_B = \begin{bmatrix} M[S_a] & U[S_a] \\ M'[S_a] - \rho_a M[S_a] & U'[S_a] - \rho_a U[S_a] \end{bmatrix} . \quad (\text{E.36})$$

Su matriz inversa es dada por la expresión

$$L_B^{-1} = [\omega(M,U)(S_a)]^{-1} \begin{bmatrix} U'[S_a] - \rho_a U[S_a] & -U[S_a] \\ -(M'[S_a] - \rho_a M[S_a]) & M[S_a] \end{bmatrix} .$$

Ahora, el valor que le corresponde al wronskiano E.29 evaluado en a es:

$$\omega(M,U)(S_a) = \frac{2}{k_B} \sqrt{\pi} \left[\Gamma\left(\frac{\lambda_B^2 + 1}{4}\right) \right]^{-1} \exp[\beta_a] . \quad (\text{E.37})$$

Esta expresión se reduce de esta manera debido a la condición $a < k_B^2 k_y$, pues de lo contrario la barrera perdería sentido físico.

Al multiplicar por la matriz inversa L_B^{-1} , al sistema matricial E.35 se obtiene

$$\begin{bmatrix} E \\ F \end{bmatrix} = \eta \begin{bmatrix} U'[S_a] - \rho_a U[S_a] - k_1 U[S_a]i \\ \rho_a M[S_a] - M'[S_a] + k_1 M[S_a]i \end{bmatrix} \exp\left[-\frac{1}{2}\beta_a + i(k_1 a - k_y y)\right] C .$$

En el proceso de que se cumpla $\psi_B \in L^2$, se presenta la oportunidad de calcular el coeficiente de transmisión y reflexión conociendo la amplitud de onda incidente y reflejada A y B respectivamente, en términos de la amplitud de onda transmitida C . Esto implica que

$$A^* A = \frac{\eta^2}{4} (\tau_+^2 + \zeta_+^2) \exp[-(\beta_a + \beta_0)] C^* C ; \quad (\text{E.38})$$

Resultado que conlleva al coeficiente de transmisión (5.28). De igual forma,

$$B^* B = \frac{\eta^2}{4} (\tau_-^2 + \zeta_-^2) \exp[-(\beta_a + \beta_0)] C^* C , \quad (\text{E.39})$$

De donde es posible calcular el coeficiente de reflexión (5.29). Cabe recordar que las notaciones que se presentan en E.38 y E.39 están definidas en la sección 5.2.

E.4 DEMOSTRACIÓN DE LA CONDICIÓN WKB

Al reescribir el momento lineal definido en 5.37 se tiene:

$$|p|^2 = \hbar^2 \left[\left(\frac{x}{k_B^2} - k_y \right)^2 + k_2^2 \right], \quad (\text{E.40})$$

de donde se desprende que $|p|^3 > \hbar^3 \left| \frac{x}{k_B^2} - k_y \right|^3$ y además

$$\frac{1}{p^2} \left| \frac{dp}{dx} \right| = \frac{\hbar^2}{k_B^2} \left| \frac{x}{k_B^2} - k_y \right| |p|^{-3} < \frac{\hbar^{-1}}{k_B^2} \left(\frac{x}{k_B^2} - k_y \right)^{-2}. \quad (\text{E.41})$$

De otro lado, como $k_y > \frac{a}{k_B^2}$, entonces

$$\left(\frac{x}{k_B^2} - k_y \right)^{-2} < \left(\frac{a}{k_B^2} - \frac{x}{k_B^2} \right)^{-2} < \frac{k_B^4}{(x-a)^2}. \quad (\text{E.42})$$

Sustituyendo la desigualdad E.42 en E.41 se obtiene $\frac{1}{p^2} \left| \frac{dp}{dx} \right| < \hbar^{-1} k_B^2 = \frac{1}{qB}$.

Por último, si se comparan los órdenes entre las cantidad $(qB)^{-1}$ y \hbar^{-1} queda demostrada la condición WKB.

E.6 CONSTANTE DE NORMALIZACIÓN DE LA FUNCIÓN DE ONDA ψ_B

Para que la función de onda ψ_B sea cuadrado integrable es necesario que cumpla las condiciones de la sección 1.2. De ahí que se redefine como se muestra en la expresión 5.41, para luego considerar la función $|\psi_B(x)|^2$

$$|\psi_B(x)|^2 = C_B^2 \begin{cases} 0, & \text{si } x < \frac{a-b}{2} \\ |P_{B,1}|^2 + 2\text{Re}[P_{B,1}P_{B,2}^*]\text{Cos}2k_1x - 2\text{Im}[P_{B,1}P_{B,2}^*]\text{Sen}2k_1x + |P_{B,2}|^2, & \text{si } \frac{a-b}{2} < x < 0 \\ \left\{ |P_{B,3}|^2 M[S_{x,B}]^2 + 2\text{Re}[P_{B,3}P_{B,4}^*]M[S_{x,B}]U[S_{x,B}] + |P_{B,4}|^2 U[S_{x,B}]^2 \right\} \exp[-\beta_x], & \text{si } 0 < x < a \\ 1, & \text{si } a < x < \frac{a+b}{2} \\ 0, & \text{si } x > \frac{a+b}{2} \end{cases} \quad (\text{E.43})$$

Donde $S_{x,B} = \left(\frac{\lambda_B^2 + 1}{4}, \frac{1}{2}; \beta_x \right)$, $\beta_x = \frac{1}{k_B^2} (x - k_B^2 k_y)^2$ y además

$$P_{B,1} = R_1 \{ \tau_+ - \zeta_+ i \}, \quad P_{B,2} = R_1 \{ \tau_- + \zeta_- i \},$$

$$P_{B,3} = R_2 \{ (U[S_a] - \rho_a U[S_a]) - k_1 U[S_a] i \},$$

$$P_{B,4} = R_2 \{ (\rho_a M[S_a] - M[S_a]) + k_1 M[S_a] i \}.$$

Y las constantes R_1 y R_2 se definen a través de las expresiones:

$$R_1 = \frac{k_B}{4\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{\lambda_B^2 + 1}{4}\right) \exp\left[-\frac{1}{2}(\beta_a + \beta_0)\right], \quad R_2 = \frac{k_B}{2\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{\lambda_B^2 + 1}{4}\right) \exp\left[-\frac{1}{2}\beta_a\right].$$

Teniendo clara la forma de la función E.43, ya se puede reescribir la identidad

$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi_B(x)|^2 dx = 1$, en donde surgen tres integrales en el sector que corresponde al

interior de la barrera ($0 < x < a$) que no puede calcularse analíticamente, sino a través de métodos numéricos con los cuales cuenta el paquete computacional Matemática (versión 5.0)⁶. Dichas integrales se describen a continuación:

$$I_M = \int_0^a \exp[-\beta_x] \left[M\left(\frac{\lambda_B^2 + 1}{4}; \frac{1}{2}; \beta_x\right) \right]^2 dx, \quad (E.44)$$

$$I_{M,U} = \int_0^a \exp[-\beta_x] M\left(\frac{\lambda_B^2 + 1}{4}; \frac{1}{2}; \beta_x\right) U\left(\frac{\lambda_B^2 + 1}{4}; \frac{1}{2}; \beta_x\right) dx, \quad (E.45)$$

$$I_U = \int_0^a \exp[-\beta_x] \left[U\left(\frac{\lambda_B^2 + 1}{4}; \frac{1}{2}; \beta_x\right) \right]^2 dx. \quad (E.46)$$

Al continuar con el trabajo de calcular el valor de la constante de normalización C

y resolviendo mas particularmente $\int_{\frac{a-b}{2}}^0 \psi_{1,B}^* \psi_{1,B} dx + \int_0^a \psi_{2,B}^* \psi_{2,B} dx + \int_a^{\frac{a+b}{2}} \psi_{3,B}^* \psi_{3,B} dx = C_B^{-2}$ se

llega a:

$$C_B \left(\frac{E}{v_0} \right) = \left\{ \frac{b-a}{2} \left(|P_{B,1}|^2 + |P_{B,2}|^2 \right) + \frac{1}{k_1} \left[2 \operatorname{Im} [P_{B,1} P_{B,2}^*] \operatorname{Sen}^2 k_1 \frac{(b-a)}{2} + \operatorname{Re} [P_{B,1} P_{B,2}^*] \operatorname{Sen} k_1 (b-a) \right] + |P_{B,3}|^2 I_M + 2 \operatorname{Re} [P_{B,3} P_{B,4}^*] I_{M,U} + |P_{B,4}|^2 I_U + \frac{b-a}{2} \right\}^{-\frac{1}{2}}. \quad (E.48)$$

⁶ las integrales de la E.44-E.46 son calculas en el paquete computacional Mathematica (versión 5.0) por el método de aproximación el cual trae definido.

De forma análoga que en el campo eléctrico, para este caso la amplitud de onda transmitida queda parametrizada, pero en términos del campo magnético, situación que hace que se presenten cambios en la corriente de probabilidad.

E.7 CORRIENTE DE PROBABILIDAD PARA EL CAMPO MAGNÉTICO

Realizando procesos análogos a los comentados para calcular la corriente de probabilidad para el caso del campo eléctrico, se describen los cálculos en tres pasos:

$$j_B = -\frac{\hbar}{2m_*} \left[\psi_B^* \frac{d\psi_B}{dx} - \psi_B \frac{d\psi_B^*}{dx} \right] i, \quad \text{si } E < \nu_0. \quad (\text{E.49})$$

Antes que la partícula enfrente la barrera se tiene en cuenta la función de onda

$$\psi_{1,B}(x) = A \exp[ik_1 x] + B \exp[-ik_1 x], \quad \text{si } \frac{a-b}{2} < x < 0.$$

Y aprovechando cálculos previos con la barrera de potencial sin presencia de campos externos,

$$j_{1,B} = \frac{\hbar k_1}{m_*} (A^* A - B^* B) = \frac{\hbar k_1}{m_*} (|P_{B,1}|^2 - |P_{B,2}|^2) = 4R_1^2 \frac{\hbar k_1}{m_*} (w_{B,1} w_{B,2} + w_{B,3} w_{B,4}) C^2. \quad (\text{E.50})$$

Pero como $R_1 = \frac{k_B}{4\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{\lambda_B^2 + 1}{4}\right) \exp\left[-\frac{1}{2}(\beta_a + \beta_0)\right]$, y

$$w_{B,1} w_{B,2} + w_{B,3} w_{B,4} = \left[\omega(M, U)(S) \cdot \omega(M, U)(S_a) \right],$$

entonces la expresión E.50 se reduce a

$$j_{1,B} = \frac{\hbar k_1}{m_*} C^2, \quad \text{si} \quad \frac{a-b}{2} < x < 0. \quad (\text{E.51})$$

Para el interior de la barrera se maneja la función de onda:

$$\psi_{2,B}(x) = \exp\left[-\frac{1}{2}\beta_x + ik_1 a\right] \left\{ P_{B,3} \text{M}\left(\frac{\lambda_B^2 + 1}{4}; \frac{1}{2}; \beta_x\right) + P_{B,4} \text{U}\left(\frac{\lambda_B^2 + 1}{4}; \frac{1}{2}; \beta_x\right) \right\} C. \quad (\text{E.52})$$

Por lo tanto,

$$j_{2,B} = \frac{\hbar}{2m_*} \left(-2R_2^2 \text{Im}[P_{B,3} P_{B,4}^*] \omega(\text{M}, \text{U})(\beta_x)\right) \exp[-\beta_x] C^2 \quad (\text{E.53})$$

Expresión que se simplifica al retomar $R_2 = \frac{k_B}{2\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{\lambda_B^2 + 1}{4}\right) \exp[-\frac{1}{2}\beta_a]$ y el wronskiano de las funciones de Kummer (E.29):

$$j_{2,B} = \frac{\hbar k_1}{m_*} C^2, \quad \text{si} \quad 0 < x < a. \quad (\text{E.54})$$

Por último, para la corriente de probabilidad dada después de la barrera, la función de onda a considerar es:

$$\psi_{3,B}(x) = C \exp[ik_1 x]. \quad (\text{E.55})$$

Por cálculos previos en el anexo A.3,

$$j_{3,B} = \frac{\hbar k_1}{m_*} C^2, \quad \text{si} \quad a < x < \frac{a+b}{2}. \quad (\text{E.56})$$

En resumen, la densidad de corriente de probabilidad se comporta según lo definido en 5.44. Además se resalta que las unidades siguen siendo probabilidad por S^{-1} .

APENDICE A: DESCRIPCIÓN FÍSICO-MATEMÁTICA DE LA ECUACIÓN DE SCHRÖDINGER

A.1 POSTULADOS QUE SOPORTAN LA ECUACIÓN DE SCHRÖDINGER

A.1.1 Postulado de Albert Einstein. En su trabajo del efecto fotoeléctrico en 1905, Albert Einstein presentó las relaciones:

$$E = \hbar \mathcal{G} \quad \text{y} \quad p = \hbar k$$

Donde E es la energía del fotón de un haz y \mathcal{G} es la frecuencia de la onda de luz. La constante \hbar es conocida como la constante de Planck, cuyo valor aproximado es

$$\hbar = 1.0546 \times 10^{-34} \text{ Joule} \cdot \text{S}.$$

(La dimensión física “energía por tiempo” es llamada acción). p es el momento del fotón y k el vector de onda (encargado de la dirección de propagación)

A.1.2 Postulado de L. de Broglie. Broglie postuló en 1924 que la longitud de onda λ y la frecuencia \mathcal{G} de la onda asociada con una partícula de momentum p y energía relativista, están dadas por las ecuaciones:

$$\mathcal{G} = \frac{E}{\hbar} \quad \text{y} \quad \lambda = \frac{\hbar}{p},$$

y que el movimiento de la partícula está gobernado por las propiedades de propagación de la onda asociada.

Cabe anotar que estos dos postulados son equivalentes en las ecuaciones, ya que

$$\hbar = \frac{h}{2\pi} \quad \text{y} \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}.$$

Antes de enunciar el siguiente postulado se debe aclarar que no es clave en la descripción de la ecuación de Schrödinger, pero los resultados que se logran a través de esta ecuación tienen gran concordancia con el postulado a mencionar.

A.1.3 Postulado de Incertidumbre de Heisenberg. En 1927 el físico alemán W. Heisenberg propuso una interesante adición al significado de los conceptos ondulatorios corpusculares. Planteó un límite fundamental a la determinación simultánea de ciertos pares de variables, tales como la posición y el momento.

La expresión que plantea el principio de incertidumbre $\Delta p_x \Delta x \geq \hbar$ indica que no sólo hay un límite a la precisión de una medición sino que mientras más exactamente se localiza una partícula en su posición, mayor será la incertidumbre en la medición de su momento y viceversa.

Una implicación que surge de manera inmediata, la cual ayuda a interpretar la densidad de probabilidad de la partícula se refiere a que si $\Delta x \rightarrow \infty$, entonces $\Delta p_x \rightarrow 0$. Es decir el momento queda totalmente determinado.

A.2 OBTENCIÓN DE LA ECUACIÓN DE SCHRÖDINGER PARA UNA PARTÍCULA LIBRE

Cuando una partícula es libre su energía potencial es constante en su posición y tiempo, es decir

$$V(x, t) = v_0. \tag{A.1}$$

Por lo tanto, la fuerza que actúa sobre la partícula es cero, puesto que

$$F = -\frac{\partial}{\partial x}V(x,t) .$$

Para este caso el impulso lineal p de la partícula será constante e igual a la energía total E , lo que significa que la partícula libre tiene para su onda asociada su longitud y frecuencia constantes. Así pues para este caso, la ecuación diferencial deseada tendrá como soluciones ondas senoidales viajeras de longitud y frecuencia constante.

Utilizando la relación de Broglie-Einstein en la ecuación de energías 1.3 se tiene que

$$\frac{\hbar^2}{2m_*\lambda^2} + V(x,t) = \hbar\mathcal{G} . \quad (\text{A.2})$$

Por conveniencia en los cálculos es necesario introducir el concepto de vector de onda k y frecuencia angular $\omega = 2\pi\mathcal{G}$, para evitar un factor de 2 en la función de onda $\psi(x,t)$.

En consecuencia A.2 equivale a
$$\frac{\hbar^2}{2m_*}k^2 + \nu_0 = \hbar\omega . \quad (\text{A.3})$$

Por otro lado, la condición 3 de la sección 1.1 exige que cada término de la ecuación sea lineal en $\psi(x,t)$. De ahí que la ecuación no puede contener términos independientes de, o términos como $[\psi(x,t)]^2$. Valiéndose de este hecho se encontrará la forma de la ecuación de Schrödinger que sólo contenga términos en esta función y sus derivadas. Esta ecuación dará una ecuación diferencial que tiene como solución la función de onda para la partícula libre. Se puede considerar que

$$\psi(x,t) = \text{Cos}(kx - wt) + \gamma \text{Sen}(kx - wt) . \quad (\text{A.4})$$

Observando A.3, el factor k^2 se logra al tomar la segunda derivada de A.4 respecto al espacio, mientras que el factor w se obtiene de la primera derivada respecto al tiempo. Como la ecuación diferencial que se busca debe ser consistente con la igualdad A.3, entonces deberá contener una segunda derivada espacial de $\psi(x,t)$ y una primera derivada temporal de $\psi(x,t)$. Pero también deberá haber un término que contenga el factor de v_0 , pues este aparece en A.3. Por todo lo anterior Schrödinger planteó la siguiente estructura para la ecuación diferencial.

$$\alpha \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + v_0 \psi = \beta \frac{\partial \psi}{\partial t} . \quad (\text{A.5})$$

En donde las constantes α y β deben ser determinadas. Calculando entonces las derivadas respectivas según A.4 y reemplazando en A.5 se llega a

$$\left[-\alpha k^2 + v_0 + \beta w \gamma \right] \text{Cos}(kx - wt) + \left[-\alpha k^2 \gamma + v_0 \gamma - \beta w \right] \text{Sen}(kx - wt) . \quad (\text{A.6})$$

Para que esta igualdad sea válida es necesario que los coeficientes tanto del coseno como el del seno sean cero.

Entonces se obtiene

$$\begin{cases} -\alpha k^2 + v_0 = -\beta \gamma w & (\text{A.7}) \\ -\alpha k^2 + v_0 = \frac{\beta w}{\gamma} & (\text{A.8}) \end{cases} .$$

Este sistema puede ser resuelto, si se tiene en cuenta la ecuación A.3

En efecto, si se restan A.7 y A.8 se establece que $\gamma^2 = -1$ o $\gamma = \pm i$. Esto conlleva a que la función de onda de A.4 sea una función compleja.

Por otro lado sustituyendo $\gamma = \pm i$ en A.7 se tiene:

$$-\alpha k^2 + v_0 = \pm i\beta w. \quad (\text{A.9})$$

Que se puede comparar directamente con A.3, lo que implica que

$$\alpha = -\frac{\hbar^2}{2m_*} \quad \text{y} \quad \beta = \pm i\hbar.$$

Para el último término β , no es importante la elección del signo. Por conveniencia se tomará el signo positivo.

$$\text{Luego,} \quad -\frac{\hbar^2}{2m_*} \frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial x^2} + v_0 \psi(x,t) = i\hbar \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial t}. \quad (\text{A.10})$$

Schrödinger propuso a manera de postulado, que aún cuando el potencial $V(x,t)$ no sea constante, la ecuación en estudio que lleva su mismo nombre mantiene la estructura de la ecuación A.10. Esto es,

$$-\frac{\hbar^2}{2m_*} \frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial x^2} + V(x,t)\psi(x,t) = i\hbar \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial t}, \quad (\text{A.11})$$

y también que las soluciones de esta ecuación diferencial son las funciones de onda correctas asociadas con la partícula que se mueve bajo la acción de la fuerza que corresponde a ese potencial.

A.3 ECUACIÓN DE SCHRÖDINGER INDEPENDIENTE DEL TIEMPO

Para resolver la ecuación diferencial parcial A.11 se utilizará el método de separación de variables el cual transforma la ecuación en estudio en varias ecuaciones diferenciales ordinarias según el número de variables de la función de onda asociada a la partícula. La única condición que se presenta, es que la energía potencial no depende explícitamente del tiempo.

De acuerdo al tipo de función de onda que se ha estado manejando en este trabajo, se buscarán soluciones en las cuales la función de onda se pueda escribir como el producto de ellas. Es decir,

$$\psi(x,t) = \psi(x)\varphi(t) . \quad (\text{A.12})$$

Sustituyendo la forma supuesta de la función de onda en la ecuación A.11 y restringiendo la energía potencial de tal manera que sea independiente del tiempo como ya se había mencionado, se tiene:

$$\frac{1}{\psi(x)} \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + V(x)\psi(x) \right] = i\hbar \frac{1}{\varphi(t)} \frac{d\varphi(t)}{dt} . \quad (\text{A.13})$$

Es evidente que el lado izquierdo no depende del tiempo. De forma similar, el lado derecho no depende de la posición, situación que conduce a que estas dos expresiones están igualadas a un valor común constante, la cual puede ser denotada por μ . El resultado de esta consideración conduce a dos ecuaciones.

$$\left\{ \frac{1}{\psi(x)} \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + V(x)\psi(x) \right] = \mu \right. \quad (\text{A.14})$$

$$\left. \left\{ i\hbar \frac{1}{\varphi(t)} \frac{d\varphi(t)}{dt} = \mu \right. \right. \quad (\text{A.15})$$

La solución a la ecuación diferencial ordinaria de primer orden en φ es dada por

$$\varphi(t) = \exp\left[-i\frac{\mu}{\hbar}t\right]. \quad (\text{A.16})$$

Esta función φ es oscilatoria en el tiempo, de frecuencia $\vartheta = \frac{\mu}{\hbar}$, pero según los postulados de de Broglie-Einstein, la frecuencia también deberá estar dada por $\vartheta = \frac{E}{\hbar}$, que al comparar este par de expresiones, se observa que la constante de separación deberá ser igual a la energía total de la partícula. Utilizando el valor de μ en la ecuación espacial A.14, se tiene

$$\frac{-\hbar}{2m_*} \frac{d^2\psi}{dx^2} + V(x)\psi = E\psi, \quad (\text{A.17})$$

ecuación diferencial conocida como ecuación de Schrödinger independiente del tiempo.

Por último, la solución a la ecuación de Schrödinger A.11 viene dada por

$$\psi(x,t) = \psi(x) \exp\left[-i\frac{E}{\hbar}t\right],$$

donde la parte compleja por lo general se presenta por la solución dependiente del tiempo.

APENDICE B: DESCRIPCIÓN DEL FORMALISMO FÍSICO MATEMÁTICO DEL TRANSPORTE CUÁNTICO

B.1 CORRIENTE DE PROBABILIDAD

Para poder demostrar la expresión (2.1), es necesario realizar algunas manipulaciones matemáticas a la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo; después, mediante una interpretación física por analogía con el principio de la conservación de la carga o de los líquidos en movimiento⁷ obtener el resultado esperado.

Consideremos las siguientes ecuaciones

$$-\frac{\hbar^2}{2m_*} \nabla^2 \psi + V(r)\psi = i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t}, \quad (\text{B.1})$$

y su ecuación conjugada compleja se obtiene tomando el conjugado de cada miembro.

$$-\frac{\hbar^2}{2m_*} \nabla^2 \psi^* + V(r)\psi^* = -i\hbar \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \quad (\text{B.2})$$

Ahora, multiplicando por ψ^* a B.1 y B.2 por ψ , se obtiene un nuevo sistema de ecuaciones que al restarlas miembro a miembro, resulta:

⁷ Este principio de la carga puede ser leído en Acosta Virgilio “Curso de física moderna” Editorial Harla p. 157, mientras que este mismo principio pero para líquidos en movimientos se puede estudiar en Eisberg R. “Fundamentos de física moderna”. Editorial Noriega p. 179.

$$\frac{\hbar^2}{2m_*}(\psi^* \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \psi^*) = i\hbar \left(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} + \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \right)$$

Retomando la derivada de un producto y simplificando,

$$\frac{\partial}{\partial t}(\psi^* \psi) + \frac{\hbar}{2m_* i}(\psi^* \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \psi^*) = 0 \quad (\text{B.3})$$

El miembro del lado izquierdo indica el cambio de la densidad de probabilidad respecto al tiempo. El lado derecho debe manipularse aún más, para poder darle alguna interpretación física. Haciendo uso del cálculo vectorial y en particular a las propiedades de la divergencia de un vector se establece que

$$\frac{\hbar}{2m_* i}(\psi^* \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \psi^*) = \nabla \circ \left[\frac{\hbar}{2m_* i}(\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*) \right].$$

Para simplificar la escritura es conveniente introducir las siguientes notaciones:

$$\rho = \psi^* \psi = |\psi|^2, \quad \mathbf{j} = \frac{\hbar}{2m_* i}(\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*). \quad (\text{B.4})$$

Por lo tanto, la ecuación B.3 se transforma en

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + \text{div } \mathbf{j} = 0. \quad (\text{B.5})$$

Esta ecuación es la ya conocida expresión de una ley de conservación. En consecuencia \mathbf{j} debe ser la corriente de probabilidad⁸. Según esto, la ecuación B.5 se interpretará para este caso como el principio de la conservación de la

⁸ Esta afirmación se realiza por analogía con la teoría de la ley de conservación.

corriente de probabilidad. Luego, la corriente de probabilidad para el caso unidimensional queda definida por

$$j(x, t) = \frac{\hbar}{2m_*} \left(\psi^* \frac{d\psi}{dx} + \psi \frac{d\psi^*}{dx} \right) i . \quad (\text{B.6})$$

B.1.1 Velocidad de variación de probabilidad en una dimensión. Es un concepto que puede ser descrito en forma general, pero debido a los procesos desarrollados en este trabajo, se integrará la ecuación B.3 para el caso unidimensional entre las fronteras x_1 y x_2 , es decir

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial t} (\psi^* \psi) dx = -\frac{i\hbar}{2m_*} \int_{x_1}^{x_2} \left(\psi^* \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \psi \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial x^2} \right) dx .$$

El integrando de la expresión del lado derecho es equivalente a $\frac{\partial}{\partial x} \left(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial x} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial x} \right)$; entonces al cambiar el orden de la integración y diferenciación del lado izquierdo se obtiene

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{x_1}^{x_2} |\psi|^2 dx = \frac{-i\hbar}{2m_*} \left(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial x} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial x} \right) \Bigg|_{x_1}^{x_2} = j(t, x_1) - j(t, x_2) . \quad (\text{B.7})$$

Esta ecuación nos dice que la velocidad de variación de la probabilidad total en la región comprendida entre x_1 y x_2 es igual a la diferencia entre la corriente de probabilidad que entra y sale de la misma región. En el caso particular donde todas las magnitudes observables son constantes en el tiempo el lado izquierdo de la expresión B.7 se hace cero y se establece una continuidad de corriente de probabilidad debido a que $j(t, x_1) = j(t, x_2)$.

B.2 COEFICIENTE DE TRANSMISIÓN POR EL MÉTODO WKB

La demostración de la fórmula que simplifica el cálculo del coeficiente de transmisión a través del método en cuestión, se fundamenta básicamente en la solución a la ecuación de Schrödinger que se describe por la barrera de potencial a analizar, aunque el resultado no depende de dicha solución.

Se empezará retomando el resultado del teorema WKB (2.13), pues este falla para x_0 , donde $f(x_0) = 0$. No obstante es válido a la izquierda y derecha de este punto. Por ello se cuestiona cómo es que $\psi(x < x_0)$ pasa a $\psi(x > x_0)$. Esto indica que deben existir unas fórmulas de conexión que permitan definir la función ψ en este punto. Con ayuda de la teoría de E.D. ordinarias y de las funciones de variable compleja, puede demostrarse que las fórmulas de conexión existen y son de la forma:

$$\psi_1(x) = [-f(x)]^{-\frac{1}{4}} \exp\left[-\int_x^{x_0} \sqrt{-f(x)} dx\right] \rightarrow 2[f(x)]^{-\frac{1}{4}} \cos\left(\int_{x_0}^x \sqrt{f(x)} dx - \frac{\pi}{4}\right), \quad (\text{B.8})$$

con $f'(x) > 0$, es decir la función f tiene pendiente positiva. Esta fórmula de conexión muestra que a la izquierda de x_0 la función ψ_1 se comporta como una función exponencial decreciente y pasa a la derecha de x_0 como un coseno de fase $\frac{\pi}{4}$ y con el doble de amplitud que la exponencial. De forma análoga se describen las fórmulas de conexión cuando la pendiente de f es negativa. Para el caso de que $f'(x) = 0$, se tiene que la E.D. 2.11 es de coeficientes constantes, lo que permite obtener su solución de manera exacta.

El paso siguiente, es aplicar las fórmulas de conexión a la mecánica cuántica, es decir, la función f se considera como la definida en 2.14 con la condición de que

varía lentamente, lo que implica que el potencial $V(x)$ es quien debe asumir dicha condición, además de ser continuo.

Se necesita entonces establecer para qué valores de x , el método en cuestión se aplica para la ecuación de Schrödinger. Puesto que

$$[f(x)]^{-\frac{1}{2}} = \frac{\hbar}{p} = \lambda, \quad (\text{B.9})$$

si $V(x) \approx E$, la longitud de onda (λ) puede ser muy grande, aún siendo \hbar pequeña. En consecuencia $[f(x)]^{-\frac{1}{4}}$ tiene un valor mucho menor que uno, lo que significa que la solución 2.13 es inconsistente. De lo anterior, λ debe ser suficientemente pequeña para evitar la inconsistencia mencionada, lo cual se logra cuando $x \rightarrow \infty$ o $x \rightarrow -\infty$, ya que el potencial $V(x)$ varía lentamente.

Entonces, una solución exacta de la ecuación de Schrödinger es posible por el método WKB cuando $x \gg x_0$ y cuando $x \ll x_0$, con x_0 dado de la igualdad:

$$V(x_0) - E = 0. \quad (\text{B.10})$$

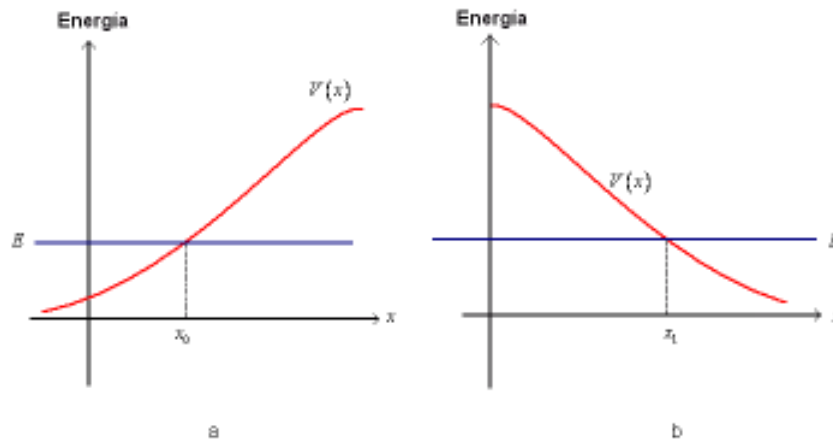


Figura B.1 Puntos de retroceso clásico

El punto x_0 se llama punto de retroceso clásico, porque una partícula clásica de energía E , que se mueve en un potencial $V(x)$ será rechazada hacia atrás al llegar al mismo.

Para poder superar la dificultad que tiene la solución aproximada WKB (B.8) para la ecuación de Schrödinger en la región donde $V(x_0) = E$, es necesario adecuarla teniendo en cuenta la mecánica cuántica. Por lo tanto deben de existir fórmulas que ayudan a la solución en la región mencionada.

B.2.1 Fórmulas de conexión para la mecánica cuántica⁹. Por motivos de facilidad en los análisis es necesario introducir las siguientes notaciones:

$$\text{Sea } \tilde{\lambda} = \frac{\hbar}{[2m_*(E - v_2(x))]^{\frac{1}{2}}} \quad (\text{B.11}), \quad \tilde{l} = \frac{\hbar}{[2m_*(v_2(x) - E)]^{\frac{1}{2}}}. \quad (\text{B.12})$$

⁹ Estas fórmulas de conexión aplicadas a la mecánica cuántica se encuentran enunciadas en el libro de Borowitz S. "Fundamentos de la Mecánica Cuántica". Editorial Reverté, p. 201 – 203. O en el libro de Merzbacher E "Quantum Mechanics", p 121-125.

Si el punto de retroceso es a la izquierda x_0 (figura B.1 a) de la región clásica con potencial creciente (correspondiente al caso donde $f'(x) > 0$), entonces se asocia la función coseno con una exponencial decreciente, de acuerdo con la relación B.8:

$$2(\tilde{\lambda})^{\frac{1}{2}} \text{Cos} \left(\int_x^{x_0} \frac{dx}{\tilde{\lambda}} - \frac{\pi}{4} \right) \leftrightarrow (\tilde{l})^{\frac{1}{2}} \exp \left[-\int_{x_0}^x \frac{dx}{\tilde{l}} \right]. \quad (\text{B.13})$$

De igual manera si se tiene una función seno se debe asociar una exponencial creciente con amplitud negativa:

$$(\tilde{\lambda})^{\frac{1}{2}} \text{Sen} \left(\int_x^{x_0} \frac{dx}{\tilde{\lambda}} - \frac{\pi}{4} \right) \leftrightarrow -(\tilde{l})^{\frac{1}{2}} \exp \left[\int_{x_0}^x \frac{dx}{\tilde{l}} \right]. \quad (\text{B.14})$$

De manera análoga, para puntos de retroceso a la derecha x_1 (figura B.1 b) de la región clásica con potencial decreciente (correspondiente al caso donde $f'(x) < 0$), se presentan:

$$(\tilde{l})^{\frac{1}{2}} \exp \left[-\int_x^{x_1} \frac{dx}{\tilde{l}} \right] \leftrightarrow 2(\tilde{\lambda})^{\frac{1}{2}} \text{Cos} \left(\int_{x_1}^x \frac{dx}{\tilde{\lambda}} - \frac{\pi}{4} \right), \quad (\text{B.15})$$

$$-(\tilde{l})^{\frac{1}{2}} \exp \left[\int_x^{x_1} \frac{dx}{\tilde{l}} \right] \leftrightarrow (\tilde{\lambda})^{\frac{1}{2}} \text{Sen} \left(\int_{x_1}^x \frac{dx}{\tilde{\lambda}} - \frac{\pi}{4} \right). \quad (\text{B.16})$$

A los cambios de funciones B.15 y B.16 indican como las funciones exponenciales decrecientes o crecientes se cambian por funciones sinusoidales de fase y amplitud dada.

B.2.2 Solución aproximada a la ecuación de Schrödinger por el método WKB¹⁰. El sistema de ecuaciones de Schrödinger que se analizará es el que surge al manipular el potencial definido en 2.16. Por ello es necesario resolverla y estudiar la barrera de derecha a izquierda, es decir:

Para $x > x_1$, y según las condiciones comentadas en la sección 2.2, se puede asegurar que en dicha región existirá únicamente una onda saliente:

$$\psi_3(x) = -(\tilde{l})^{1/2} \exp\left[\int_x^{x_1} \frac{dx}{\tilde{l}}\right], \quad (\text{B.17})$$

en correspondencia con la fórmula B.16, ya que la pendiente del potencial es negativa.

Transformando algebraicamente la solución B.17, se puede conectar esta con la correspondiente solución de la ecuación de Schrödinger para el interior de la barrera. La notación B.12 se relaciona con la B.11 a través de la expresión $\tilde{l} = -i\tilde{\lambda}$.

Por lo tanto $\int_x^{x_1} \frac{dx}{\tilde{l}} = i \int_{x_1}^x \frac{dx}{\tilde{\lambda}}$, que sustituyendo en B.17 conduce a

$$\psi_3(x) = -i(\tilde{\lambda})^{1/2} \exp\left[i\left(\int_{x_1}^x \frac{dx}{\tilde{\lambda}} - \frac{\pi}{4}\right)\right]. \quad (\text{B.19})$$

Para hacer más cómodo el uso de las fórmulas de conexión, la función de onda ψ_3 puede escribirse como:

¹⁰ Esta aproximación se encuentra demostrada de forma análoga en “Fundamentos de la Mecánica Cuántica” de Borowitz S., p. 210-212.

$$\psi_3(x) = A(\tilde{\lambda})^{1/2} \left[\text{Cos} \left(\int_{x_1}^x \frac{dx}{\tilde{\lambda}} - \frac{\pi}{4} \right) + i \text{Sen} \left(\int_{x_1}^x \frac{dx}{\tilde{\lambda}} - \frac{\pi}{4} \right) \right]. \quad (\text{B.20})$$

De acuerdo con las fórmulas de conexión B.15 y B.16, la anterior función de onda se convierte, en la región $x_0 < x < x_1$ en:

$$\psi_2(x) = \frac{A}{2}(\tilde{l})^{1/2} \exp \left(-\int_x^{x_1} \frac{dx}{\tilde{l}} \right) - i A(\tilde{l})^{1/2} \exp \left(\int_x^{x_1} \frac{dx}{\tilde{l}} \right). \quad (\text{B.21})$$

Es ahora necesaria una expresión para la onda incidente. Esta puede hallarse prolongando la función B.21 a la región $x < x_0$, para lo cual es preciso llevar a cabo ciertas transformaciones en dicha función.

$$\text{Es claro } \exp \left[\int_{x_0}^{x_1} \frac{dx}{\tilde{l}} \right] = \exp \left[\int_{x_0}^x \frac{dx}{\tilde{l}} \right] \exp \left[\int_x^{x_1} \frac{dx}{\tilde{l}} \right], \quad (\text{B.22})$$

$$\text{y si designamos por } \delta = \exp \left[\int_{x_0}^{x_1} \frac{dx}{\tilde{l}} \right], \quad (\text{B.23})$$

entonces, por B.22 y B.23 se obtiene:

$$\exp \left[-\int_x^{x_1} \frac{dx}{\tilde{l}} \right] = \delta^{-1} \exp \left[\int_{x_0}^x \frac{dx}{\tilde{l}} \right] \quad \text{o} \quad \exp \left[\int_x^{x_1} \frac{dx}{\tilde{l}} \right] = \delta \exp \left[-\int_{x_0}^x \frac{dx}{\tilde{l}} \right] \quad (\text{B.24})$$

Sustituyendo B.24 en B.21,

$$\psi_2(x) = \frac{A}{2}(\tilde{l})^{1/2} \delta^{-1} \exp \left[\int_{x_0}^x \frac{dx}{\tilde{l}} \right] - i A \delta (\tilde{l})^{1/2} \exp \left[\int_{x_0}^x \frac{dx}{\tilde{l}} \right]. \quad (\text{B.25})$$

Esta última función tiene la forma precisa para ser extendida a la región $x < x_0$ por medio de las fórmulas B.13 y B.14:

$$\psi_1(x) = \frac{-A}{2} (\tilde{\lambda})^{\frac{1}{2}} \delta^{-1} \text{Sen} \left(\int_x^{x_0} \frac{dx}{\tilde{\lambda}} - \frac{\pi}{4} \right) - 2iA\delta (\tilde{\lambda})^{\frac{1}{2}} \text{Cos} \left(\int_x^{x_0} \frac{dx}{\tilde{\lambda}} - \frac{\pi}{4} \right). \quad (\text{B.26})$$

En resumen, la solución aproximada por el método WKB al sistema de ecuaciones de Schrödinger planteadas por el potencial 2.16, es:

$$\psi(x) = A(\tilde{\lambda})^{\frac{1}{2}} \begin{cases} \frac{-\delta^{-1}}{2} \text{Sen} u_{\lambda_0} - 2i \text{Cos} u_{\lambda_0}, & \text{si } x < x_0 \\ B \left(\frac{1}{2} \exp \left[-\int_x^{x_1} \frac{dx}{\tilde{l}} \right] + i \exp \left[-\int_x^{x_1} \frac{dx}{\tilde{l}} \right] \right), & \text{si } x_0 < x < x_1 \\ \text{Cos} u_{\lambda_1} + i \text{Sen} u_{\lambda_1}, & \text{si } x < x_1. \end{cases} \quad (\text{B.27})$$

Donde $u_{\lambda_0} = \int_x^{x_0} \frac{dx}{\tilde{\lambda}} - \frac{\pi}{4}$, $u_{\lambda_1} = \int_{x_1}^x \frac{dx}{\tilde{\lambda}} - \frac{\pi}{4}$ y $B = \exp \left[\frac{-3\pi}{4} i \right]$.

B.2.3 Demostración de la fórmula que representa el coeficiente de transmisión por el método WKB. El coeficiente de transmisión en general se calcula como la razón de la corriente transmitida entre la incidente, motivo por el cual se debe establecer la amplitud de la onda incidente (O_I) y la amplitud de la onda reflejada (O_R). Para tal hecho, se separa la función de onda (B.26) que se obtiene al usar la aproximación WKB, en la suma de dos funciones de onda, a saber, incidente y reflejada. Esto implica que

$$\psi_1(x) = -A(\tilde{\lambda})^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{4i\delta} + i\delta \right) \exp \left[iu_{\lambda_0} \right] + A(\tilde{\lambda})^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{4i\delta} - i\delta \right) \exp \left[-iu_{\lambda_0} \right]. \quad (\text{B.28})$$

En consecuencia,
$$O_I = -A \left(\tilde{\lambda} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\delta - \frac{1}{4\delta} \right) i . \quad (\text{B.29})$$

De la función de onda B.20, es claro que la amplitud de onda transmitida (O_T) está dada por

$$O_T = A \left(\tilde{\lambda} \right)^{\frac{1}{2}} . \quad (\text{B.30})$$

Recordando que la corriente transmitida es dada por $j_T = \frac{\hbar}{2m} |O_T|^2$ y la corriente

incidente por $j_I = \frac{\hbar}{2m} |O_I|^2$ se obtiene: $T = \frac{|O_T|^2}{|O_I|^2}$, Según (3.9).

De donde sigue:

$$T = \left[\left(\delta - \frac{1}{4\delta} \right)^2 \right]^{-1} = \left(\delta^2 + \frac{1}{16\delta^2} - \frac{1}{2} \right)^{-1} . \quad (\text{B.31})$$

Retomando (B.23), en la mayoría de los casos de interés práctico, la barrera es lo suficientemente gruesa para que $\delta \gg \delta^{-1}$ lo que implica $\delta^2 \gg -\frac{1}{2}$.

Así pues, en el coeficiente de transmisión B.31 se puede prescindir de la expresión $\left(\frac{1}{16\delta^2} \right) + \frac{1}{2}$:

$$T \approx \exp \left[-\frac{2}{\hbar} \int_{x_0}^{x_1} \left[2m_* (\nu_2(x) - E) \right]^{\frac{1}{2}} dx \right] . \quad (\text{B.32})$$

APÉNDICE C: FUNCIONES ESPECIALES PARA TRABAJAR CON CAMPO ELÉCTRICO UNIFORME

C.1 Función de Bessel

Al astrónomo alemán F.W Bessel quien describió por primera vez la órbita del cometa Halley y que trabajó también en movimientos planetarios, se le otorga el crédito de haber desarrollado la ecuación diferencial que lleva su nombre y haber sistematizado en general todas las propiedades de su solución. Dichas soluciones son conocidas como funciones de Bessel.

La función de Bessel de primera especie se define según orden:

$$\text{C.1.1 De orden entero, } J_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+n}}{2^{2k+n} k!(k+n)!}, \text{ si } -\infty < x < \infty \quad (\text{C.1})$$

con $n = 0, 1, 2, \dots$

$$\text{Además } J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x). \quad (\text{C.2})$$

$$\text{C.1.2 De orden no entero (o de orden } p), J_p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+p}}{2^{2k+p} k! \Gamma(k+p+1)} \quad (\text{C.3})$$

con $p \geq 0$ y bajo el mismo dominio de C.1

La función Γ , es llamada función Gamma, la cual se define más adelante en el apéndice D.1. Al cambiar p por $-p$ en C.3 se define $J_{-p}(x)$, para $p > 0$.

La función de Bessel de segunda especie o función de Newman se caracteriza por ser una combinación lineal de las funciones J_p y J_{-p} . Se denota por γ_p y se define como sigue:

$$\gamma_p(x) = \frac{(\cos p\pi)J_p(x) - J_{-p}(x)}{\operatorname{Sen} p\pi}, \quad p \geq 0. \quad (\text{C.4})$$

C.2 MODIFICACIONES A LAS FUNCIONES DE BESSEL

C.2.1 Modificación a la función de primera especie. Si se cambia x por ix en la función J_p se obtiene:

$$J_p(ix) = i^p \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+p}}{2^{2k+p} k! \Gamma(k+p+1)}, \quad p > 0. \quad (\text{C.5})$$

En consecuencia a la función I_p , definida como:

$$I_p(x) = i^{-p} J_p(ix) \quad (\text{C.6})$$

se le llama modificación de la función de Bessel de primera especie.

Al cambiar p por $-p$ en C.6 se define automáticamente la función I_{-p} y se puede demostrar que:

$$y = c_1 I_p + c_2 I_{-p} \quad (\text{C.7})$$

Es una solución a la E.D, C.13, donde c_1 y c_2 son constantes reales. Además, si

$p = \frac{1}{2}$, se puede afirmar:

$$I_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \operatorname{Senh} x \quad (\text{C.8}), \quad I_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \operatorname{Cosh} x \quad (\text{C.9})$$

C.2.2 Modificación a la función de segunda especie. De manera análoga a lo utilizado para obtener C.5 se puede definir la modificación de la función de Bessel de segunda especie, k_p , llamada más frecuentemente como función de Macdonald. Por lo tanto C.4 se transforma en:

$$k_p(x) = \frac{\pi}{2} \frac{I_{-p}(x) - I_p(x)}{\operatorname{Sen} p\pi}, \quad p \geq 0, \quad (\text{C.10})$$

Usando directamente la definición C.10 se verifica $k_p(x) = k_{-p}(x)$ que en principio muestra otra solución a la E.D. C.13, cuya forma es:

$$y = c_1 I_p(x) + c_2 k_p(x) \quad (\text{C.11})$$

Al tomar en cuenta $p = \frac{1}{2}$, la función de Macdonald se transforma en:

$$k_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} \exp[-x]. \quad (\text{C.12})$$

C.3 ECUACIÓN DIFERENCIAL DE BESSEL

Esta ecuación de segundo orden tiene la siguiente estructura:

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - p^2)y = 0, \quad (\text{C.13})$$

con $p \neq n$ para $n = 1, 2, 3, \dots$

Cuya solución es $y = c_1 J_p(x) + c_2 J_{-p}(x)$ (C.14)

En la modelación de problemas especializados de ingeniería y física la E.D C.13 se generaliza aún más, tomando la forma:

$$x^2 y'' + (1 - 2a)xy' + (b^2 c^2 x^{2c} + (a^2 - c^2 p^2))y = 0 . \quad (C.15)$$

Al realizar el cambio de variable $y = x^a z$ a esta E.D., se transforma en la E.D. C.13, luego la solución a la E.D. C.15 es

$$y = x^a (C_1 J_p(bx^c) + C_2 J_{-p}(bx^c)) . \quad (C.16)$$

C.4 FUNCIONES DE AIRY

Estas funciones se caracterizan por ser solución de la E.D. que lleva su mismo nombre, la cual tiene mucha aplicación en el ámbito de la fisicomatemática, pues modela problemas de difracción en el campo de la óptica, describe las energías presentes en una barrera afectada con campo eléctrico, entre otras diversas situaciones.

La función de Airy de primera especie se simboliza por Ai y se define en términos de la función C.6.

$$Ai[x] = \frac{1}{3} \sqrt{x} \left[I_{-\frac{1}{3}} \left(\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \right) - I_{\frac{1}{3}} \left(\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \right) \right] . \quad (C.17)$$

Aplicando C.10, se puede definir C.17 como sigue:

$$\text{Ai}[x] = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{x}{3}} k_{\frac{1}{3}} \left(\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \right). \quad (\text{C.18})$$

De forma similar, la función de Airy de segunda especie se simboliza por Bi y también se define en términos de la función C.6.

$$\text{Bi}[x] = \sqrt{\frac{x}{3}} \left[I_{-\frac{1}{3}} \left(\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \right) + I_{\frac{1}{3}} \left(\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \right) \right]. \quad (\text{C.19})$$

Por otro lado, usando el hecho de que

$$I_p(x) = \frac{1}{2} [I_{p-1}(x) + I_{p+1}(x)], \quad (\text{C.20})$$

se puede demostrar que:

$$\text{Ai}'[x] = -\frac{x}{\pi\sqrt{3}} k_{\frac{1}{3}} \left(\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \right) \quad (\text{C.21}), \quad \text{Bi}'[x] = \frac{x}{\sqrt{3}} \left[I_{-\frac{1}{3}} \left(\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \right) + I_{\frac{1}{3}} \left(\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \right) \right] \quad (\text{C.22})$$

A continuación, en la figura C.1 se muestran las funciones de Airy y sus derivadas. El motivo por el cual se presentan estas gráficas desplazadas a la derecha α unidades, es debido a que en este trabajo la solución que se genera para la E.D.4.10, en sus argumentos se presenta este comportamiento. Es claro que sus tendencias no presentan ningún cambio significativo, con respecto a las funciones de Airy que no manejan argumentos compuestos.

Se aprecia en esta figura que la función de Airy Bi y su derivada crecen a medida que el argumento se comporta de igual manera, en contraste con su amplitud de onda, pues mientras que la primera decrece a medida que x es más pequeño, en su derivada la amplitud de onda se hace pequeña a medida que x crece.

El comportamiento para la función de Airy Ai es muy análogo a la función Bi , como puede observarse en la figura. La única diferencia notable se presenta cuando el argumento crece, puesto que esta función y su derivada tienden a cero.

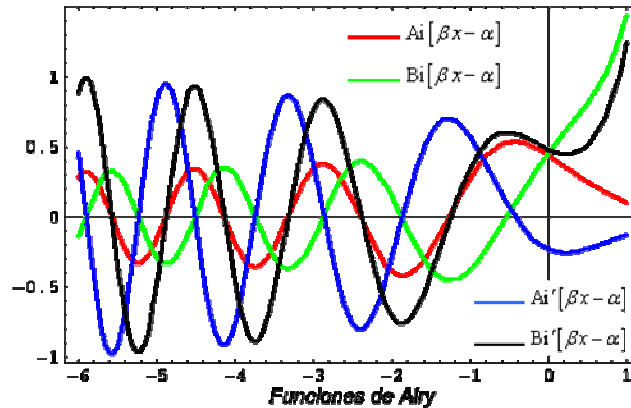


Figura C.1 Funciones de Airy y sus derivadas

C.5 ECUACIÓN DIFERENCIAL DE AIRY

No es de sorprenderse que la E.D. de Airy sea un caso particular de la E.D. de Bessel, debido a que sus soluciones $Ai[x]$ y $Bi[x]$ son combinaciones lineales de funciones de Bessel.

De ahí que, la estructura de la E.D. de Airy sea

$$y''' - xy = 0 . \tag{C.23}$$

Si a esta E.D., se le multiplica por x^2 y se compara con la E.D. C.15 se obtiene la solución:

$$y = \sqrt{x} \left[C_1 I_{\frac{1}{3}} \left(\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \right) + C_2 I_{-\frac{1}{3}} \left(\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \right) \right]. \quad (\text{C.24})$$

Otra solución equivalente a esta, corresponde a una combinación lineal de las funciones de Airy. $Ai[x]$ y $Bi[x]$. Es decir,

$$y = c_1 Ai[x] + c_2 Bi[x]. \quad (\text{C.25})$$

Ahora, si a la E.D. C.23 se sustituye x por $-x$ se obtiene una nueva E.D. también llamada Airy.

$$y'' + xy = 0 \quad (\text{C.26})$$

La solución es análoga a C.25, con la diferencia de que se hace la misma sustitución ya comentada, pero en el argumento de las funciones de Airy.

$$y = c_1 Ai[-x] + c_2 Bi[-x]; \quad (\text{C.27})$$

Donde
$$Ai[-x] = \frac{1}{3} \sqrt{x} \left[J_{-\frac{1}{3}} \left(\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \right) + J_{\frac{1}{3}} \left(\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \right) \right], \quad (\text{C.28})$$

$$Bi[-x] = \sqrt{\frac{x}{3}} \left[J_{-\frac{1}{3}} \left(\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \right) - J_{\frac{1}{3}} \left(\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \right) \right]. \quad (\text{C.29})$$

Con la relación
$$J'_p(x) = \frac{1}{2} [J_{p-1}(x) - J_{p+1}(x)] \quad (\text{C.30})$$

Se define sin ningún problema las funciones de Airy $Ai'[-x]$ y $Bi'[-x]$.

En la figura C.2, se aprecian los cambios que genera el signo menos en el argumento de las funciones de Airy, incluyendo sus derivadas. También se puede

observar que cuando crece o decrece el argumento no presentan cambios con respecto a lo comentado para la figura C.1, a diferencia de lo que ocurre con sus amplitudes.

Vale decir, que tanto esta figura como la anterior, se realizaron bajo las mismas condiciones en las cuales se desarrolló el problema de la barrera afectada por campo eléctrico uniforme. Siendo este el motivo más importante para que los argumentos a trabajar fueran compuestos.

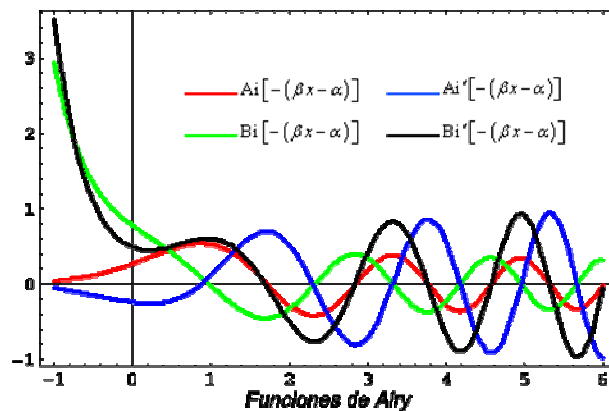


Figura C.2 Funciones de Airy y sus derivadas con argumentos negativos

C.6 WRONSKIANO DE LAS FUNCIONES DE AIRY

Sean y_1 y y_2 soluciones de la E.D. de segundo orden

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = 0 . \quad (\text{C.31})$$

Entonces, el Wronskiano de las funciones y_1, y_2 es:

$$\omega(y_1, y_2)(x) = y_1 y_2' - y_1' y_2 , \quad (\text{C.32})$$

que también puede ser redefinido a través de la fórmula de Abel¹¹

$$\omega(y_1, y_2)(x) = C \exp\left[-\int a(x) dx\right], \quad (\text{C.33})$$

Donde $C = \lim_{x \rightarrow 0^+} x(y_1 y_2' - y_1' y_2)$.

En concordancia con lo expuesto y debido a que la E.D. C.23 ó C.26 se ajusta a la E.D. C.31 se define el Wronskiano de las funciones de Airy en la forma:

$$\omega(\text{Ai}, \text{Bi})(x) = \text{Ai}[x]\text{Bi}'[x] - \text{Ai}'[x]\text{Bi}[x]. \quad (\text{C.34})$$

Pero haciendo uso C.33, C.34 se reduce a

$$\omega(\text{Ai}, \text{Bi})(x) = \frac{1}{\pi}. \quad (\text{C.35})$$

C.7 EQUIVALENCIAS PARA LAS FUNCIONES DE AIRY CUANDO EL ARGUMENTO ES MUY GRANDE.

Si se tienen en cuenta las equivalencias que se presentan para las funciones de Bessel de primera y segunda especie¹²

$$I_p(x) \sim \frac{\exp[x]}{\sqrt{2\pi x}}, \quad p \geq 0, \quad \text{si } x \rightarrow \infty; \quad (\text{C.36})$$

$$k_p(x) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2x}} \exp[-x], \quad p \geq 0, \quad \text{si } x \rightarrow \infty; \quad (\text{C.37})$$

¹¹ La fórmula de Abel puede ser leída en el texto de Andrews L. "Special functions of mathematics for engineers". Editorial McGraw-Hill. 1992, p 246.

¹² Estas equivalencias se encuentran demostradas en el texto de Andrews L. Op. Cit. p 317-319.

se puede demostrar los resultados que a continuación se enuncian. Ellos permitirán mas adelante, deducir enunciados de mayor importancia para el desarrollo de este trabajo.

$$\mathbf{C.7.1} \quad \text{Ai}[x] \sim \frac{1}{2} \pi^{-\frac{1}{2}} x^{-\frac{1}{4}} \exp\left[-\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}}\right], \quad \text{si } x \rightarrow \infty. \quad (\text{C.38})$$

Demostración

Al aplicarle la equivalencia C.37, a la expresión C.18 que define la función de Airy, se llega a

$$\text{Ai}[x] \sim \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{x}{3}} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}}\right)^{-\frac{1}{2}} \exp\left[-\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}}\right], \quad \text{si } x \rightarrow \infty.$$

Luego, se prueba C.38.

$$\mathbf{C.7.2} \quad \text{Bi}[x] \sim \pi^{-\frac{1}{2}} x^{-\frac{1}{4}} \exp\left[\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}}\right], \quad \text{si } x \rightarrow \infty. \quad (\text{C.39})$$

Demostración

La estrategia a seguir, es probar que el límite entre la razón de estas dos expresiones tiende a uno. Entonces considerando la función de Airy Bi definida en C.19 se obtiene:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \pi^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{4}} \sqrt{\frac{x}{3}} I_{\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}}\right) \left[\frac{I_{-\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}}\right)}{I_{\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}}\right)} + 1 \right] \exp\left[-\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}}\right];$$

que al aplicar el resultado C.36 se reduce a calcular

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left[\frac{I_{-\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right)}{I_{\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right)} + 1 \right]$ el cual es uno, al aplicar de nuevo el resultado C.36.

Luego, se ha demostrado la equivalencia planteada.

$$\mathbf{C.7.3} \quad \text{Ai}'[x] \sim -\frac{1}{2} \pi^{-\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{4}} \exp\left[-\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right], \quad \text{si } x \rightarrow \infty. \quad (\text{C.40})$$

Demostración

De forma similar, haciendo uso de C.21 y aplicando la equivalencia C.37, se obtiene el resultado C.40.

$$\mathbf{C.7.4} \quad \text{Bi}'[x] \sim \pi^{-\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{4}} \exp\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right], \quad \text{si } x \rightarrow \infty. \quad (\text{C.41})$$

Demostración:

Usando la definición C.22 y la estrategia seguida para probar la equivalencia C.39 se llega a demostrar esta equivalencia.

APÉNDICE D: FUNCIONES ESPECIALES PARA TRABAJAR CON CAMPO MAGNÉTICO UNIFORME.

D.1 FUNCIÓN GAMMA (Integral de Euler de segunda especie)

Es una importante función especial, que surgió del estudio planteado por L. Euler en 1729 donde describe el factorial como el resultado de una función integral, tal como sigue

$$n! = \int_0^{\infty} e^{-t} t^n dt \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

La generalización de este hecho para calcular el factorial de cualquier número positivo fue planteada en 1809 por A. Legendre, lo que generó el estudio de la función gamma, denotada por $\Gamma(x)$ y definida

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt, \quad x > 0 \quad (\text{D.1})$$

Algunas características fundamentales de $\Gamma(x)$ pueden ser descritas en forma cualitativa mediante un análisis de su gráfica, como por ejemplo sus asintotas y sus concavidades. Esta gráfica puede consultarse en cualquier texto de cálculo avanzado. La función gamma puede definirse en forma recurrente:

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x}; \quad x > -1, \quad x \neq 0. \quad (\text{D.2})$$

La anterior representación tiene una gran utilidad en algunos cálculos y en estudios analíticos, como por ejemplo¹³

$$1. \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!}{2^{2n} n!} \sqrt{\pi}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{D.3})$$

$$2. \frac{\Gamma(x+a)}{x^a \Gamma(x)} \sim \left(1 + \frac{a}{x}\right)^{a-\frac{1}{2}}, \quad \text{si } x \rightarrow \infty. \quad (\text{D.4})$$

D.2 SÍMBOLO DE POCHHAMER

Es una notación utilizada para productos definidos de la siguiente manera

$$(a)_0 = 1, \quad (a)_n = a(a+1)\dots(a+n-1); \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{D.5})$$

Con $a \geq 0$.

Es fácil ver, que $(1)_n = n!$. Además el símbolo de Pochhamer también puede ser redefinido para valores no negativos en términos de la función gamma, como sigue:

$$(a)_n = \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)}; \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{D.6})$$

Esta nueva asociación permite realizar estudios teóricos más profundos en la definición de otras funciones.

¹³ Los resultados aquí expuestos se pueden estudiar más ampliamente en el texto de Andrews L. "Special functions of the mathematics for engineers". Editorial Mc Graw-Hill. 1992. p. 77

D.3 FUNCIÓN HIPERGEOMÉTRICA

El primero en realizar un estudio sistemático sobre este tipo de funciones fue Gauss en 1812. Aunque se resalta que Euler trabajó en este tema, solo a Gauss se le da más crédito en el desarrollo teórico de las funciones hipergeométricas.

La serie

$$1 + \frac{ab}{c}x + \frac{a(a+1)b(b+1)}{c(c+1)}\frac{x^2}{2!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n} \frac{x^n}{n!}, \quad |x| < 1, \quad (\text{D.7})$$

siempre que a , b o c no sean cero o un entero negativo.

Es llamada serie hipergeométrica ella recibe este nombre porque si $a = 1$ y $c = b$ se reduce a la serie geométrica.

La serie hipergeométrica se denota por $F(a, b; c; x)$ o ${}_2F_1(a, b; c; x)$, donde el 2 y el 1 se refieren al número de símbolos de Pochhammer del numerador y el denominador respectivamente. El punto y coma separa los parámetros del numerador del denominador además del argumento de la serie: Entonces

$$F(a, b; c; x) = \sum \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n} \frac{x^n}{n!}, \quad |x| < 1 \quad (\text{D.8})$$

A la serie descrita en D.7 se le llama función hipergeométrica.

D.4 ECUACIÓN HIPERGEOMÉTRICA

La E.D. de segundo grado:

$$x(1-x)y'' + [c - (a+b+1)x]y' - aby = 0, \quad (D.9)$$

es llamada ecuación hipergeométrica de Gauss. Su solución es una combinación lineal de las funciones hipergeométricas de primera y segunda especie. Es decir,

$$y = c_1 F(a, b; c; x) + c_2 G(a, b; c; x) \quad (D.10)$$

Donde $F(a, b; c; x)$ también se llama función hipergeométrica de primera especie y $G(a, b; c; x)$ de segunda especie. Esta última se define como:

$$G(a, b; c; x) = \frac{\Gamma(1-c)}{\Gamma(a-c+1)\Gamma(b-c+1)} F(a, b; c; x) + \frac{\Gamma(c-1)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} x^{1-c} F(1+a-c, 1+b-c; 2-c; x)$$

$$c \neq 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (D.11)$$

donde a y b son distinto de cero y enteros no negativos.

D.5 FUNCIONES HIPERGEOMÉTRICAS CONFLUENTES

También conocidas como funciones de Kummer, puesto que E. Kummer en 1836 estudió las propiedades relacionadas con las funciones hipergeométricas confluentes. Este tipo de funciones al igual que las funciones hipergeométricas se relacionan con un gran número de funciones especiales. La función de Kummer de primera especie se denota por $M(a; c; x)$ y se relaciona con la función hipergeométrica según la fórmula:

$$M(a; c; x) = \lim_{b \rightarrow \infty} F\left(a, b; c; \frac{x}{b}\right) = \lim_{b \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n} \frac{\left(\frac{x}{b}\right)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n}{(c)_n} \frac{x^n}{n!} \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{(b)_n}{b^n} .$$

De ahí que $M(a; c; x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n}{(c)_n} \frac{x^n}{n!}$, $-\infty < x < \infty$. (D.12)

La serie D.12 no está definida para $c = 0, -1, -2, \dots$ y si a es un entero negativo.

La función $M(a; c; x)$ presenta una propiedad algebraica bastante útil para el cálculo de la k -ésima derivada en términos de ella misma, tal como se muestra a continuación.

$$\frac{d^k}{dx^k} M(a; c; x) = \frac{(a)_k}{(c)_k} M(a+k; c+k; x) , \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (D.13)$$

La función hipergeométrica confluyente de segunda especie se denota por $U(a; c; x)$ y se define en términos de la función $M(a; c; x)$, análogamente a D.11:

$$U(a; c; x) = \frac{\pi}{\text{Sen } c\pi} \left[\frac{M(a; c; x)}{\Gamma(1+a-c)\Gamma(c)} - x^{1-c} \frac{M(1+a-c; 2-c; x)}{\Gamma(a)\Gamma(2-c)} \right] , \quad (D.14)$$

siempre que $c \neq 0, -1, -2, \dots$

La k -ésima derivada de la función de Kummer de segunda especie viene dada por la expresión:

$$\frac{d^k}{dx^k} U(a; c; x) = (-1)^k (a)_k U(a+k; c+k; x) , \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (D.15)$$

En general se puede afirmar que las funciones de Kummer tienen propiedades de recurrencia de forma similar a las funciones hipergeométricas¹⁴.

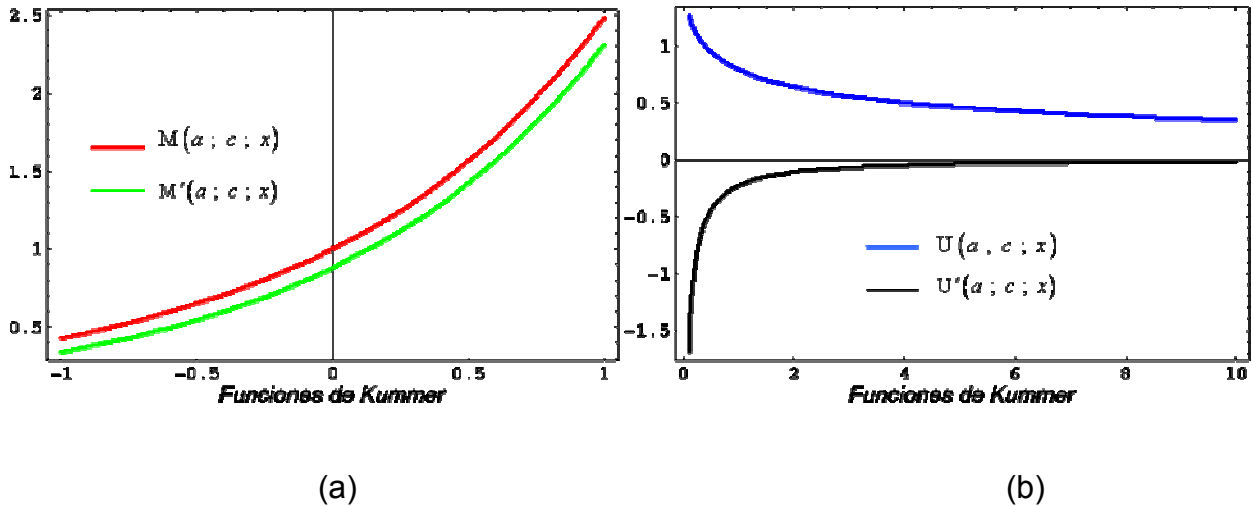


Figura D.1 Funciones hipergeométricas confluentes y sus derivadas

En la figura D.1 (a) se aprecia que el comportamiento de la función de primera especie de Kummer al igual que su derivada crecen a medida que su argumento lo hace. Los valores pequeños que toman estas funciones o cercanos entre sí solo depende de los parámetros a y c que pueden tomar. Para el caso de la función de segunda especie U (figura D.1 (b)) su comportamiento difiere de su derivada pero tiene la misma tendencia a cero, cuando x crece al infinito para valores pequeños del argumento.

¹⁴ Estas recurrencias se encuentran por ejemplo en el texto de Abramowitz M., Stegun I. A. "Handbook of the mathematica functions". Editorial Dover Publications. 1972, p.504-511.

D.6 ECUACIÓN HIPERGEOMÉTRICA CONFLUENTE

Se puede mostrar que las funciones de Kummer D.12 y D.14 son linealmente independientes y además que son solución de la ecuación diferencial de segundo orden

$$xy'' + (c - x)y' - ay = 0. \quad (D.16)$$

Esta ecuación surge al realizar el cambio de variable $x = \frac{t}{b}$ en la E.D. D.9 y luego se hace tender b a infinito.

En resumen, la solución a esta E.D tiene la forma

$$y = c_1 M(a; c; x) + c_2 U(a; c; x) \quad (D.17)$$

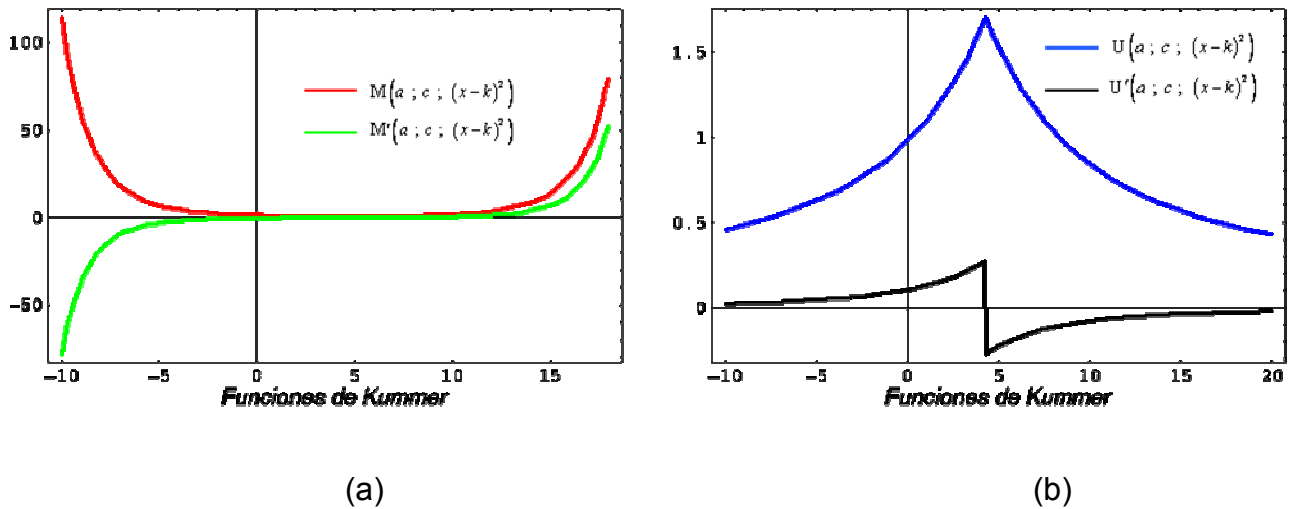


Figura D.2 Funciones hipergeométricas confluentes y sus derivadas con argumentos cuadráticos

Los motivos por los cuales se presenta esta figura responden al hecho de que cuando una barrera de potencial es afectada por un campo magnético en su modelación se genera la E.D. hipergeométrica confluyente cuya solución corresponde a las funciones de Kummer pero con argumentos cuadráticos tal como se aprecia la figura D.2. El manejar este tipo de argumentos en estas funciones hace más notorio el punto de discontinuidad para el caso de la función de Kummer de segunda especie (figura D.2 (b)). Por otro lado, al observar la figura D.2 (a) se observa que la función de Kummer de primera especie es cóncava hacia arriba mostrando una gran atenuación para un intervalo corto. Intervalo que se manipula constantemente en esta parte del trabajo. De ahí la dificultad computacional para poder observar los cambios que se presentan en las distintas gráficas que relacionan el campo magnético.

D.7 WRONSKIANO DE LAS FUNCIONES HIPERGEOMÉTRICAS CONFLUENTES

Haciendo uso de C.32 y C.33 del apéndice C.6 se puede demostrar que el Wronskiano de las funciones $M(a; c; x)$ y $U(a; c; x)$ es

$$\omega(M, U)(x) = -\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)} x^{-c} \exp[x] . \quad (D.18)$$

Cabe anotar que la fórmula D.18 sufre un pequeño cambio cuando el argumento es una función compuesta (de forma similar que las funciones de Airy), es decir:

$$\omega(M, U)(\beta) = -\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)} \beta^{-c} \exp[\beta] \frac{d\beta}{dx} , \quad (D.19)$$

siempre que $\beta = \beta(x)$.

D.8 EQUIVALENCIAS PARA LAS FUNCIONES HIPERGEOMÉTRICAS CONFLUENTES CUANDO EL ARGUMENTO ES MUY PEQUEÑO

Los resultados que a continuación se mencionan tienen una gran utilidad cuando se realizan análisis para campos magnéticos pequeños¹⁵. Por lo tanto, estas equivalencias se aplicaron continuamente en los cálculos del anexo D (sección D.4).

$$M(a; c; x) \sim 1, \quad \text{si } x \rightarrow 0. \quad (\text{D.20})$$

$$U(a; c; x) \sim \frac{\Gamma(c-1)}{\Gamma(a)} x^{1-c}, \quad \text{si } x \rightarrow 0^+ \quad \text{para } c > 1. \quad (\text{D.21})$$

$$U(a; c; x) \sim \frac{\Gamma(1-c)}{\Gamma(1+a-c)}, \quad \text{si } x \rightarrow 0 \quad \text{para } 0 < c < 1. \quad (\text{D.22})$$

¹⁵ Los resultados aquí expuestos se pueden estudiar más ampliamente en el texto de Abramowitz M., Stegun I. A. "Handbook of the matemática functions". Editorial Dover Publications. 1972, p. 512.