TEOREMAS DE PUNTO FIJO Y APLICACIONES A ECUACIONES DIFERENCIALES E INTEGRALES

DENIS CAJAS GUACA
CARLOS ALBERTO PATIÑO ANACONA

UNIVERSIDAD DEL CAUCA
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES, EXACTAS Y DE LA EDUCACIÓN
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
POPAYÁN, CAUCA
2007

TEOREMAS DE PUNTO FIJO Y APLICACIONES A ECUACIONES DIFERENCIALES E INTEGRALES

DENIS CAJAS GUACA
CARLOS ALBERTO PATIÑO ANACONA

Presentado como requisito parcial para
optar al título de
MATEMÁTICO

Director:
Especialista ALEX MONTES PADILLA

UNIVERSIDAD DEL CAUCA
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES, EXACTAS Y DE LA EDUCACIÓN
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
POPAYÁN, CAUCA
2007

Nota de aceptación

Esp. Alex Manuel Montes P.
Director

Lic. Gerardo Arturo Loaiza M.
Jurado

Mg. Jhon Jairo Pérez.
Jurado

Fecha de sustentación: Popayán, 15 de junio de 2007

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo no habría sido posible sin la ayuda de Dios y demás personas a quienes aquí les expresamos nuestros sinceros agradecimientos:

- A nuestras familias quienes en todo momento nos brindaron su apoyo incondicional para culminar nuestros estudios.

- **Especialista Alex Manuel Montes Padilla**, profesor del Departamento de Matemáticas de la Universidad del Cauca y director del trabajo, por la asesoría, paciencia y constancia, al revisar nuestro manuscrito, aportándonos sus conocimientos.

- **Licenciado Gerardo Arturo Loaiza y Magíster Jhon Jairo Pérez**, profesores de la Universidad del Cauca, jurados asignados en la revisión del trabajo, por su disposición y sus valiosas y acertadas sugerencias para exitosa finalización del seminario.

- Profesores del Departamento de Matemáticas de la Universidad del Cauca quienes nos prepararon y formaron en el conocimiento de las matemáticas.

- A nuestros compañeros de estudio por su constante ayuda y a todas aquellas personas que contribuyeron para la culminación de este trabajo muchas gracias.

Fecha de sustentación: Popayán, 15 de junio de 2007

CONTENIDO

NOTACIÓN

$A \subseteq B$	A es subconjunto de B
$A \times B$	Producto cartesiano A por B
$x \in A$	x es elemento de A
$x \notin A$	x no es elemento de A
$\mathbb{R}$	Conjunto de los números reales
$gen\, A$	Envolvente lineal de A
$co\, A$	Envolvente convexa de A
$C([a,b])$	Espacio de funciones continuas sobre el segmento $[a,b]$

INTRODUCCIÓN

El Análisis Funcional es una de las ramas de la Matemática que más se ha desarrollado en los últimos años teniendo multiples aplicaciones en diferentes áreas, como la Teoría de Números, la Geometría, el Análisis Numérico y en especial las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias y Parciales. En su desarrollo han contribuido importantes matemáticos como David Hilbert, Stefan Banach, John Von Neumann entre otros. Se puede afirmar que los resultados obtenidos en esta área son centrales para el estudio de las Ecuaciones Diferenciales e Integrales cuyas aplicaciones son numerosas en diversos campos.

Como toda teoría matemática, el Análisis Funcional surge de la necesidad de encontrar nuevas técnicas para abordar problemas en que los métodos tradicionales no se pueden aplicar. En este trabajo estudiaremos un método conocido como el Método de Punto Fijo, que consiste básicamente en reducir el problema de garantizar la existencia de alguna solución para alguna ecuación diferencial o integral dada, a asegurar la existencia de algún punto fijo de un operador adecuado definido en un espacio adecuado. Tanto el operador como el espacio, dependen naturalmente del problema propuesto. Para lo anterior se utilizarán los Teoremas de Punto Fijo de Banach, Brouwer y Schauder los cuales constituyen una herramienta útil del Análisis funcional, para garantizar la existencia de soluciones para algunas ecuaciones diferenciales e integrales.

Capítulo 1

El Teorema de Punto Fijo de Banach y Aplicaciones a Ecuaciones Integrales y Diferenciales

1.1. Teorema de punto fijo de Banach

Definición 1.1.1 (Espacio Normado). *Sea X un espacio vectorial sobre un campo $\mathbb{K} = (\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C})$. Una norma en X es una función*

$$\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$$

que satisface:

i) $\|u\| \geq 0$ *para todo* $u \in X$.

ii) $\|u\| = 0$ *si y sólo si* $u = 0_X$.

iii) $\|\alpha u\| = |\alpha| \, \|u\|$ *para todo* $\alpha \in \mathbb{K}$ *y* $u \in X$.

iv) $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ *para todo* $u, v \in X$.

A un espacio vectorial X donde hay definida una norma, lo llamaremos Espacio Vectorial Normado *o* Espacio Normado.

Definición 1.1.2. *Sea X un espacio normado, una sucesión $(u_n) \in X$ es de Cauchy si para todo $\epsilon > 0$ existe un n_0 en los naturales tal que*

$$\|u_n - u_m\| < \epsilon \quad \textit{para todo} \quad n, m \geq n_0 \,.$$

Definición 1.1.3 (Espacio Completo). *Sea X un espacio normado, X es completo si toda sucesión de Cauchy $(u_n) \in X$ es convergente.*

Definición 1.1.4 (Espacio de Banach). *Un espacio normado X es de Banach si es completo.*

Definición 1.1.5 (Operador Lineal). *Sean X y Y espacios normados sobre $\mathbb{K}$ y $L \subseteq X$. El operador $T : L \to Y$ es* lineal *si, L es un subespacio lineal de X y*

$$T(\alpha u + \beta v) = \alpha T(u) + \beta T(v) \quad \textit{para todo } u, v \in L \textit{ y } \alpha, \beta \in \mathbb{K}.$$

Definición 1.1.6 (Contracción). *Sea X un espacio normado. Un operador $A : X \to X$, se dice una contracción en X si existe k, $0 \leq k < 1$ tal que*

$$\|Au - Av\| \leq k\|u - v\| \quad \textit{para todo} \quad u, v \in X.$$

Teorema 1.1.1 (Teorema de Punto Fijo de Banach). *Sea M un conjunto cerrado no vacío en un espacio de Banach X, y A una contracción en M, entonces A tiene un único punto fijo, es decir existe un único $u \in M$ tal que*

$$Au = u.$$

Demostración. Sea u_0 un punto arbitrario de M y definamos la sucesión (u_n) por

$$u_{n+1} = Au_n, \quad n = 0, 1, 2, ...$$

Probemos que (u_n) es una sucesión de Cauchy en M.
Como A es una contracción, existe $k, \;\; 0 \le k < 1$ tal que

$$\begin{aligned}
\|u_{n+1} - u_n\| &= \|Au_n - Au_{n-1}\| \le k\,\|u_n - u_{n-1}\| \\
&= k\,\|Au_{n-1} - Au_{n-2}\| \le k^2\,\|u_{n-1} - u_{n-2}\| \\
&\le \;\cdots\; \le k^n\,\|u_1 - u_0\|.
\end{aligned}$$

Entonces, usando la desigualdad triangular y la fórmula de la suma para la serie geométrica tenemos que

$$\begin{aligned}
\|u_n - u_{n+m}\| &= \|(u_n - u_{n+1}) + (u_{n+1} - u_{n+2}) + \cdots + (u_{n+m-1} - u_{n+m})\| \\
&\le \|u_n - u_{n+1}\| + \|u_{n+1} - u_{n+2}\| + \cdots + \|u_{n+m-1} - u_{n+m}\|\,, \\
&\le (k^n + k^{n+1} + \cdots + k^{n+m-1})\,\|u_1 - u_0\| \\
&\le k^n\,(1 + k + k^2 + \cdots + k^{m-1} + \cdots)\,\|u_1 - u_0\| \\
&= k^n\,(1-k)^{-1}\,\|u_1 - u_0\|,
\end{aligned}$$

de donde $\quad \|u_n - u_{n+m}\| \to 0 \quad$ cuando $\quad n \to \infty$, por lo tanto (u_n) es una sucesión de Cauchy en M. Además como X es un espacio de Banach y M es cerrado, existe $u \in M$ tal que

$$u_n \to u\;, \quad \text{cuando } \; n \to \infty\,.$$

Veamos que u es un punto fijo de A.
Como

$$\|Au_n - Au\| \le k\,\|u_n - u\| \;\to\; 0 \quad \text{cuando } \; n \to \infty\,,$$

entonces

$$\lim_{n\to\infty} Au_n = Au\,,$$

luego

$$Au = \lim_{n\to\infty} Au_n = \lim_{n\to\infty} u_{n+1} = u\,, \qquad \text{pues} \;\; u_{n+1} = Au_n\,,$$

por lo tanto

$$Au = u\,.$$

Mostremos unicidad. Sean $u, v \in M$ tales que

$$Au = u \;\; \text{y} \;\; Av = v\,,$$

entonces,

$$\|u - v\| = \|Au - Av\| \leq k\,\|u - v\|\,,$$

y como $0 \leq k < 1$, se tiene que

$$\|u - v\| = 0\,,$$

por lo tanto

$$u = v$$

$\square$

1.2. Una Aplicación del Teorema de Punto Fijo de Banach a Ecuaciones Integrales

Consideremos la Ecuación Integral

$$u(x) = \lambda \int_a^b F(x, y, u(y))\,dy \;+\; f(x)\;, \qquad (1)$$

donde λ es un parámetro, f una función definida en $[a, b]$, F una función definida en $[a, b] \times [a, b] \times \mathbb{R}$ y u una función real definida en $[a, b]$ que es desconocida.

Usaremos el teorema de punto fijo de Banach para demostrar, bajo algunas condiciones, la existencia de una única solución de la ecuación integral (1).

Teorema 1.2.1. *Sea $F : [a,b] \times [a,b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua con las siguientes propiedades:*

a) La derivada parcial

$$\frac{\partial F}{\partial z} : [a,b] \times [a,b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

es continua.

b) Existe un número $\zeta \in \mathbb{R}$ tal que

$$\left| \frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z) \right| \leq \zeta \qquad \textit{para todo } \; x, y \in [a,b], \;\; z \in \mathbb{R}.$$

Si λ es un número real distinto de cero tal que

$$(b-a)|\lambda|\zeta < 1$$

y $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua, entonces la ecuación (1) tiene una única solución $u \in C([a,b])$.

Demostración. Definamos el operador

$$\begin{array}{c} A : C([a,b]) \to C([a,b]) \\ u \quad \mapsto \quad Au \end{array}$$

por

$$(Au)(x) = \lambda \int_a^b F(x, y, u(y))\, dy \, + \, f(x) \quad , \qquad \text{para } \; x \in [a,b].$$

Au es una función continua.

Como f es continua, es suficiente probar la continuidad de la función

$$g(x) = \int_a^b F(x, y, u(y))\, dy$$

En efecto, sea $\epsilon > 0$, de la continuidad de F tenemos que, existe $\delta > 0$ tal que

$$|F(x_1, y_1, z_1) - F(x_2, y_2, z_2)| < \frac{\epsilon}{b-a}$$

para todo $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \in [a, b] \times [a, b] \times \mathbb{R}$, con

$$|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| + |z_1 - z_2| < \delta\,,$$

entonces,

$$\begin{aligned}
|g(x_1) - g(x_2)| &= \left| \int_a^b [F(x_1, y, u(y)) - F(x_2, y, u(y))]\, dy \right| \\
&\leq \int_a^b |F(x_1, y, u(y)) - F(x_2, y, u(y))|\, dy \\
&< \int_a^b \frac{\epsilon}{b-a}\, dy \;=\; \epsilon\,.
\end{aligned}$$

Veamos que A es una contracción en $C([a, b])$.

Como F es una función continua, por el Teorema del Valor Medio tenemos que para cada $x, y \in [a, b]$ fijos y $z_1, z_2 \in \mathbb{R}$, existe un $z_0 \in \mathbb{R}$, entre z_1 y z_2, tal que

$$|F(x, y, z_1) - F(x, y, z_2)| \leq \left| \frac{\partial F}{\partial z}(x, y, z_0) \right| |z_1 - z_2| \leq \zeta |z_1 - z_2|$$

Por lo tanto, para $x \in [a,b]$

$$\begin{aligned}
|(Au)(x) - (Av)(x)| &= \left|\lambda \int\limits_a^b [F(x,y,u(y)) - F(x,y,v(y))]\,dy\right| \\
&\leq |\lambda| \int\limits_a^b |F(x,y,u(y)) - F(x,y,v(y))|\,dy \\
&\leq |\lambda| \int\limits_a^b \zeta |u(y) - v(y)|\,dy \\
&\leq |\lambda| \int\limits_a^b \zeta \max_{a\leq y\leq b} |u(y) - v(y)|\,dy \\
&\leq |\lambda|\,(b-a)\zeta \max_{a\leq y\leq b} |u(y) - v(y)| \\
&= |\lambda|\,(b-a)\zeta\,\|u - v\|_{C([a,b])}\,,
\end{aligned}$$

entonces,

$$\|Au - Av\|_{C([a,b])} \leq |\lambda|\,(b-a)\zeta\,\|u - v\|_{C([a,b])}\,,$$

pero λ se tomó de tal manera que

$$|\lambda|\,(b-a)\,\zeta < 1\,.$$

Por consiguiente A es una contracción. Entonces tomando $M = C([a,b])$ y aplicando el Teorema de Punto Fijo de Banach, se tiene que A tiene un único punto fijo en $C([a,b])$, es decir existe un único $u \in C([a,b])$ tal que

$$u = Au\,,$$

o sea, existe un único $u \in C([a,b])$ tal que

$$u(x) = \lambda \int_a^b F(x,y,u(y))\,dy \,+\, f(x).$$

$\square$

1.3. Una Aplicación del Teorema de Punto Fijo de Banach a Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Consideremos el problema de valor inicial

$$u'(x) = F(x,u(x)) \quad \text{y} \quad u(x_0) = u_0\,, \qquad (1)$$

donde el punto $(x_0,u_0) \in \mathbb{R}^2$ esta dado y F es una función de dos variables dada.

En esta sección utilizaremos el teorema de punto fijo de Banach para demostrar el teorema de Picard - Lindelöf, que establece condiciones suficientes para que el problema (1) tenga una única solución.

Teorema 1.3.1 (Teorema de Picard - Lindelöf). *Consideremos el conjunto* $S = \{(x,z) \in \mathbb{R}^2 : |x - x_0| \leq r \;\; y \;\; |z - u_0| \leq r\}$ *con* $r > 0$ *fijo y* $(x_0,u_0) \in \mathbb{R}^2$ *.*

Sea $F : S \to \mathbb{R}$ *una función continua tal que su derivada parcial*

$$\frac{\partial F}{\partial z} : S \to \mathbb{R} \qquad \textit{también es continua,}$$

si h *es un número real tal que*

$$0 < h \leq r\,, \quad h\tau \leq r \quad y \quad h\rho < 1\,,$$

donde
$$\tau = \max_{(x,z)\in S} |F(x,z)| \qquad y \qquad \rho = \max_{(x,z)\in S} \left| \frac{\partial F}{\partial z}(x,z) \right| ,$$

entonces, el problema (1) *tiene una única solución.*

Demostración. Sea $C(I)$ el espacio de Banach de todas las funciones continuas de valor real definidas en el intervalo $I = [x_0 - h, x_0 + h]$ y $M = \{u \in C(I) : \|u - u_0\|_{C(I)} \leq r\}$, donde $u_0(x) = u_0$ para todo $x \in I$. Para $u \in C(I)$ definamos el operador

$$\begin{aligned} A : M &\to M \\ u &\mapsto Au \end{aligned}$$

por

$$(Au)(x) = u_0 + \int_{x_0}^{x} F(y, u(y))\, dy \ , \qquad \text{para} \ \ x \in I \, .$$

A está bien definido. En efecto, si $u \in M$, entonces para $y \in I$ se tiene que $(y, u(y)) \in S$, por lo tanto la integral está bien definida y su existencia se tiene debido a que F es continua en S.

Además, para $x \in I$

$$\begin{aligned} |(Au)(x) - u_0| &= \left| \int_{x_0}^{x} F(y, u(y))\, dy \right| \\ &\leq \left| \int_{x_0}^{x} \max_{(x,z)\in S} |F(x,z)|\, dy \right| \end{aligned}$$

luego,

$$\begin{aligned}
\left|\int_{x_0}^{x} \max_{(x,z)\in S} |F(x,z)|\, dy\right| &= |x-x_0| \max_{(x,z)\in S} |F(x,z)| \\
&\le h\tau \le r \qquad \text{para } \ x\in I\,,
\end{aligned}$$

por lo tanto:

$$\|Au-u_0\|_{C(I)} = \max_{x\in I} |(Au)(x)-u_0| \le r\,,$$

luego $Au \in M$.

Veamos que A es una contracción en M. Como F es continua, por el Teorema del Valor Medio, para cada $(x,z_1),(x,z_2) \in S$ existe un $(x,z_0)\in S$, con z_0 entre z_1 y z_2, tal que

$$|F(x,z_1)-F(x,z_2)| = \left|\frac{\partial F}{\partial z}(x,z_0)\right| |z_1-z_2| \le \rho\,|z_1-z_2|$$

Por consiguiente para todo $u,v\in M$ tenemos que

$$\begin{aligned}
|(Au)(x)-(Av)(x)| &= \left|\int_{x_0}^{x} [F(y,u(y))-F(y,v(y))]\, dy\right| \\
&\le \left|\int_{x_0}^{x} \rho\,|u(y)-v(y)|\, dy\right| \\
&\le \left|\int_{x_0}^{x} \rho \max_{y\in I} |u(y)-v(y)|\, dy\right|,
\end{aligned}$$

luego,

$$\begin{aligned}
\left| \int_{x_0}^{x} \rho \max_{y \in I} |u(y) - v(y)| \, dy \right| &= |x - x_0| \, \rho \max_{y \in I} |u(y) - v(y)| \\
&\leq h \, \rho \max_{y \in I} |u(y) - v(y)| \\
&= h \, \rho \, \|u - v\|_{C(I)} \, ,
\end{aligned}$$

entonces,

$$\|Au - Av\|_{C(I)} \leq h \, \rho \, \|u - v\|_{C(I)} \, ,$$

pero h y ρ se tomaron de tal manera que

$$h \, \rho < 1 \, .$$

Por lo tanto A es una contracción en M. Por el Teorema de Punto Fijo de Banach se sigue que A tiene un único punto fijo $u \in M$, es decir, existe una función u definida en el intervalo I tal que

$$u = Au \, ,$$

o sea, existe un único $u \in M$ tal que

$$u(x) = u_0 + \int_{x_0}^{x} F(y, u(y)) \, dy \qquad (2)$$

Por lo tanto, derivando (2) con respecto a x, obtenemos

$$u'(x) = F(x, u(x)) \quad \text{y} \quad u(x_0) = u_0 \, .$$

$\square$

Capítulo 2

Teorema de Punto Fijo de Brouwer

2.1. Definiciones Básicas y Teorema de Punto Fijo de Brouwer

Definición 2.1.1 (Operador Continuo). *Sean X y Y espacios normados sobre $\mathbb{K}$ y $M \subseteq X$. El operador $A : M \to Y$ es* continuo, *si para cada $u \in M$ y cada número $\epsilon > 0$, existe un número $\delta > 0$ ($\delta = \delta(\epsilon, u)$) tal que*

$$\|v - u\| < \delta \;\; y \;\; v \in M \quad \textit{implica} \quad \|Au - Av\| < \epsilon.$$

Equivalentemente, A es continuo si y sólo si, para cada sucesión $(u_n) \in M$,

$$\lim_{n\to\infty} u_n = u \quad \textit{con } u \in M \quad \textit{implica} \quad \lim_{n\to\infty} Au_n = Au\,.$$

Definición 2.1.2 (Conjunto Compacto). *Sea M un conjunto en un espacio normado, M es compacto si cada sucesión (u_n) en M tiene una subsucesión que converge en M. Esto es, existe (u_{n_k}) de (u_n) tal que*

$$u_{n_k} \to u\,, \quad \textit{cuando} \quad n_k \to \infty \quad \textit{para algún} \quad u \in M\,.$$

Definición 2.1.3 (Conjunto Convexo). *Un conjunto M en un espacio lineal es* convexo *si,*

$$u, v \in M \quad y \quad 0 \leq \alpha \leq 1 \quad \textit{implica} \quad \alpha u + (1-\alpha)v \in M.$$

Definición 2.1.4 (Homeomorfismo). *Sean M y Y subconjuntos de un espacio normado sobre $\mathbb{K}$. El operador*

$$A : M \to Y$$

es un homeomorfismo, *si es continuo y biyectivo, y el operador inverso $A^{-1} : Y \to M$ también es continuo. Se dice que Y es homeomorfo a M.*

Teorema 2.1.1 (Teorema de Punto Fijo de Brouwer). *Sea*

$$A : M \to M$$

un operador continuo, donde M es un conjunto no vacío, compacto y convexo en un espacio normado finito dimensional. Entonces A tiene al menos un punto fijo.

Este teorema representa uno de los principios de existencia más importantes en matemáticas. Su prueba se presentara en la sección 2.3 . Ahora estudiemos una consecuencia de dicho teorema.

Corolario 2.1.1. *Sea*

$$B : K \to K$$

un operador continuo, donde K es un subconjunto de un espacio normado y es homeomorfo al conjunto M considerado en el teorema anterior. Entonces B tiene al menos un punto fijo.

Demostración. Sea $C : M \to K$ un homeomorfismo. Entonces, el operador

$$C^{-1} \circ B \circ C : M \to M$$

es continuo, pues es composición de operadores continuos. Ahora, por el teorema anterior el operador

$$A = C^{-1} \circ B \circ C$$

tiene al menos un punto fijo, esto es, existe $u \in M$ tal que

$$C^{-1}(B(Cu)) = u\,,$$

tomando $Cu = v$ con $v \in K$ tenemos que

$$C^{-1}(Bv) = u\,,$$

de donde se sigue que

$$Bv = Cu\,.$$

Luego

$$Bv = v\,, \quad v \in K\,,$$

por lo tanto B tiene al menos un punto fijo.

$\square$

2.2. Elementos Geométricos, Lema de Sperner y Lema de Knaster, Kuratowski, y Mazurkiewicz

En esta sección presentamos algunas definiciones y resultados necesarios para la demostración del Teorema de Punto Fijo de Brouwer.

Notación:

Sea M un subconjunto no vacío de un espacio normado X sobre $\mathbb{K}$.

- A la envolvente lineal de M la notaremos por

$$gen\, M.$$

Esto es, $u \in gen\, M$ si y sólo si, para algún n fijo, $n = 1, 2, 3, ...$

$$u = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n$$

donde $u_1, ..., u_n \in M$ y $\alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbb{K}$.

- A la envolvente convexa de M la denotaremos por

$$co\, M.$$

Esto es, $u \in co\, M$ si y sólo si, para algún n fijo, $n = 1, 2, 3, ...$

$$u = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n$$

donde $u_1, ..., u_n \in M$ y $0 \leq \alpha_1, ..., \alpha_n \leq 1$ con $\alpha_1 + \cdots + \alpha_n = 1$.

Definición 2.2.1. *Sea $N = 1, 2, ...$. Los puntos $u_0, ..., u_N$ en un espacio lineal X sobre $\mathbb{K}$, se dice que están en* posición general *si,*

$$u_1 - u_0,\ u_2 - u_0, ...,\ u_N - u_0$$

son linealmente independientes.

Esta definición no depende de la numeración de los puntos. Por ejemplo, si $u_0, ..., u_N$ están en posición general, también lo están $u_1, u_0, u_2, ..., u_N$. (Ver pag. 46 de [6])

Proposición 2.2.1. *Sea $N = 1, 2, ...$. Supongamos que los puntos $u_0, \ldots, u_N$ están en posición general, y que*

$$u - u_0 \notin gen\, \{u_1 - u_0, \ldots, u_N - u_0\}\,, \qquad (*)$$

entonces los puntos $u_0, \ldots, u_N, u$ también están en posición general.

Demostración. Supongamos que

$$\alpha_1(u_1-u_0)+\cdots+\alpha_N(u_N-u_0)+\alpha(u-u_0)=0 \quad \text{con } \alpha_j,\alpha\in\mathbb{K} \text{ para todo } j\,.$$

Si $\alpha\neq 0$, entonces

$$u-u_0=\beta_1(u_1-u_0)+\cdots+\beta_N(u_N-u_0) \quad \text{con } \beta_j=\frac{-\alpha_j}{\alpha}\,,$$

lo cual contradice $(*)$. Por lo tanto $\alpha=0$, luego $\alpha_j=0$ para $j=1,...,N$, es decir que los puntos $u_0,\ldots,u_N,u$ están en posición general.

□

Definición 2.2.2. *Sea X un espacio lineal sobre $\mathbb{K}$ y $N=1,2,\ldots$, el conjunto*

$$S=co\{u_0,...,u_N\}$$

donde los puntos $u_0,...,u_N\in X$ están en posición general, es un $N-simplex$.

Definición 2.2.3. *Dado un elemento v de un $N-simplex$ S, existen $\alpha_0,\alpha_1,...,\alpha_N$ tales que*

$$v=\sum_{j=0}^{N}\alpha_j u_j$$

$\alpha_0,\alpha_1,...,\alpha_N$ son las coordenadas baricéntricas *de v. Dado que los puntos $u_0,...,u_N$ se encuentran en posición general dicha representación está determinada de forma única.*

Definición 2.2.4. *El punto*

$$b=\frac{1}{N+1}\sum_{j=0}^{N}u_j$$

es el baricentro de S. Se puede probar que b es un punto interior de S. (Ver pag. 48 de [6])

Definición 2.2.5. *Sea M un conjunto no vacío en un espacio normado X, se define el diámetro de M por*

$$diam\, M = \sup_{u,v \in M} \|u - v\|.$$

Definición 2.2.6. *Sea $S = co\{u_0, ..., u_N\}$ un (N)-simplex con $N = 1, 2, ...$. Los $(N-1)$-simplex*

$$S_0 = co\{u_1, ..., u_N\},\ S_1 = co\{u_0, u_2 ..., u_N\}, ...,\ S_N = co\{u_0, ..., u_{N-1}\}$$

son las $(N-1)$-caras de S opuestas a los puntos $u_0, ..., u_N$, respectivamente.
Una γ-cara de S es la envolvente convexa de $\gamma + 1$ vértices distintos de S, donde $\gamma = 0, 1, ..., (N-1)$.

Definición 2.2.7. *Una subdivisión baricéntrica del 1-simplex $S = co\{u_0, u_1\}$, es la colección de los siguientes 1-simplex*

$$S_0 = co\{b, u_0\} \quad y \quad S_1 = co\{b, u_1\}$$

donde b es el baricentro de S.
Por inducción, la subdivisión baricéntrica de un N-simplex S con baricentro b es la colección de todos los N-simplex

$$S_0 = co\{b, v_1, ..., v_N\},\ S_1 = co\{b, v_0, v_2, ..., v_N\},\ ...,\ S_N = co\{b, v_0, ..., v_{N-1}\}$$

donde $v_0, ..., v_N$ son vértices de algún $(N-1)$-simplex obtenido por una subdivisión baricéntrica de una $(N-1)$-caras de S.

Proposición 2.2.2. *Sea $S = co\{u_0, ..., u_N\}$ un N-simplex en un espacio normado X sobre $\mathbb{K}$, donde $N = 1, 2, ...$. Entonces, el conjunto S es convexo y compacto.*

Demostración. Por definición S es convexo. Mostremos que S es compacto. En efecto, sea (v_n) una sucesión en S. Entonces

$$v_n = \sum_{j=0}^{N} \alpha_{j_n} u_j \, ,$$

donde

$$0 \leq \alpha_{j_n} \leq 1 \quad j = 1, ..., N \qquad \text{y} \qquad \alpha_{0_n} + \cdots + \alpha_{N_n} = 1 \qquad \text{para todo } n \, .$$

Luego, dado que la sucesión (α_{0_n}) es acotada aplicando el Teorema de Bolzano - Weierstrass tenemos que existe una subsucesión convergente de (α_{0_n}), esto es,

$$\alpha_{0_{n^{(0)}}} \to \alpha_0 \qquad \text{cuando} \quad n^{(0)} \to \infty \, ,$$

de igual manera la sucesión (α_{1_n}) tiene una subsucesión convergente, esto es,

$$\alpha_{1_{n^{(1)}}} \to \alpha_1 \qquad \text{cuando} \quad n^{(1)} \to \infty \, ,$$

continuando con éste proceso tenemos que la sucesión (α_{N_n}) tiene una subsucesión convergente, esto es,

$$\alpha_{N_{n^{(N)}}} \to \alpha_N \qquad \text{cuando} \quad n^{(N)} \to \infty \, .$$

De donde

$$0 \leq \alpha_j \leq 1 \qquad \text{para} \quad j = 1, ..., N \, .$$

y

$$\alpha_{0_{n^{(N)}}} + \alpha_{1_{n^{(N)}}} + \cdots + \alpha_{N_{n^{(N)}}} = 1 \qquad \text{para todo } n^{(N)} \, .$$

Aplicando límite cuando $n^{(N)} \to \infty$, obtenemos

$$\alpha_0 + \cdots + \alpha_N = 1 \qquad \text{para todo} \quad j = 1, ..., N \, .$$

Tomando $v = \sum_{j=0}^{N} \alpha_j u_j$, tenemos que $v \in S$ y

$$v_{n^{(N)}} \to v \qquad \text{cuando} \quad n^{(N)} \to \infty\,.$$

Por lo tanto, S es compacto.

$\square$

Proposición 2.2.3. *Sea M un subconjunto no vacío, cerrado, acotado, convexo y con un punto interior, de un espacio normado X.*
Entonces, M es homeomorfo a la bola cerrada $B = \{u \in X : \|u\| \leq 1\}$.

Demostración. (Ver pag. 49 de [6])

$\square$

Proposición 2.2.4. *Sea M un conjunto no vacío, compacto y convexo en un espacio normado X finito dimensional.*
Entonces, M es homeomorfo con algún $N-$ simplex S en X.

Demostración. si M consta de un solo punto, entonces la proposición se cumple para $N = 0$.
Supongamos ahora que M consta por lo menos de dos puntos distintos. Como la $dimX < \infty$, el máximo número $(N+1)$ de puntos en posición general que existen en el conjunto M es finito. Supongamos que los puntos

$$u_0, \ldots, u_N \in M$$

están en posición general. Después de usar una traslación, podemos asumir que $u_0 = 0$. Consideremos los conjuntos

$$L = gen\,\{u_1, \ldots, u_N\} \qquad \text{y} \qquad S = co\,\{u_0, \ldots, u_N\}\,.$$

Supongamos que $u \in M$ y $u \notin L$ por la Proposición 2.2.1 tenemos que los puntos $u_0, ..., u_N, u$ están en posición general.

Esto contradice el hecho de que $(N+1)$ es el número máximo de puntos en posición general que existen en M, por lo tanto

$$M \subseteq L\,,$$

además, ya que M es convexo y $\{u_0, ..., u_N\} \subset M$,entonces

$$S \subseteq M\,.$$

Por otra parte, por la Definición 2.2.4 el baricentro de S es un punto interior de S por lo tanto M también tiene un punto interior.
Ahora aplicando la Proposición 2.2.3, se tiene que el conjunto M es homeomorfo a la bola

$$B = \{u \in L : \|u\| \leq 1\}.$$

Además por Proposición 2.2.2, el conjunto S es compacto, convexo y tiene un punto interior, por lo tanto también es homeomorfo a la bola B. Por consiguiente, existen homeomorfismos

$$A : M \to B \quad \text{ y } \quad C : S \to B\,.$$

Luego, la función

$$C^{-1} \circ A : M \to S$$

es un homeomorfismo del conjunto M sobre el N-simplex S.

$\square$

Definición 2.2.8 (Triangulación). *Sea* $S = co\{u_0, ..., u_N\}$ *un* $N-simplex$ *con* $N \geq 1$*. Por una triangulación de* S *entendemos una colección finita*

$$S_1, ..., S_J \qquad\qquad (*)$$

de $N-simplex$ S_j *tales que*

a) $S = \bigcup_{j=1}^{J} S_j$

b) *Si $j \neq k$, entonces la intersección $S_j \cap S_k$ es vacía o es una cara común de dimensión $(N-1)$ o menor.*

Definición 2.2.9 (Simplex de Sperner). *Un S_j con $j = 1,..,J$ obtenido mediante una triangulación de un $N-simplex$ S, es un* N-simplex de Sperner*, si todos sus vértices llevan números diferentes, esto es, los vértices de S_j llevan los números $0, 1, ..., N$.*

Lema 2.2.1 (Lema de Sperner). *Supongamos que cada uno de los números $0, 1, ..., N$ está asociado con un vértice v de los $N-simplex$ S_j en $(*)$. Supongamos que*

$$v \in co\{u_{i_0}, ..., u_{i_k}\}\,, \qquad k = 0, ..., N\,, \qquad (1)$$

es decir, uno de los números $i_0, ..., i_k$ está asociado con v. Entonces, el número de N-simplex de Sperner *es impar.*

Demostración. Por inducción sobre N.

i) Para $N = 1$. S es un $1-simplex$ (un segmento) etiquetado con 0 y 1. Si a S le aplicamos una triangulación y aplicamos (1), obtenemos $1-simplex \quad S_j,\ j = 1, ..., J$.

Ahora, sea a_1 el número de $1-simplex$ etiquetados con ceros en ambos extremos y sea b_1 el número de $1-simplex$ etiquetados con 0 en un extremo y 1 en el otro, (b_1 es el número de $1-simplex\ de\ Sperner$).

Sea $A_{(0)}$ el número total de ceros contados tomando por separado cada $1-simplex$ que resulta después de la triangulación que se le aplicó a S, este número está dado por :

$$A_{(0)} = 2a_1 + b_1\,.$$

Esta suma es un número impar, dado que todo punto interior de S etiquetado con cero es contado dos veces y todo punto en la frontera de S etiquetado con cero es contado una vez.

Por lo tanto b_1 es un número impar.

Para $N = 2$. S es un $2 - simplex$ (un triángulo) etiquetado con 0,1 y 2. si a S le aplicamos una triangulación y aplicamos (1), obtenemos $2 - simplex \quad S_j, \;\; j = 1, ..., J$.
Sean a_2 el número de $2 - simplex$ etiquetados solamente con 0 y 1, b_2 el número de $2 -$ *simplex de Sperner* y $A_{(1)}$ el número total de $1-$*simplex de Sperner* contados tomando por separado cada $2-simplex$ que resulta después de la triangulación que se le aplicó a S, este número está dado por :

$$A_{(1)} = 2a_2 + b_2 \,.$$

Esta suma es un número impar, dado que cada $1 -$ *simplex de Sperner* en el interior de S es contado dos veces y por el caso anterior tenemos que el número de $1 -$ *simplex de Sperner* en las caras de S es impar.
Por lo tanto b_2 es un número impar.

ii) Supongamos que para N el lema se cumple y probémoslo para $N + 1$.
Para N, S es un $N - simplex$ etiquetado con los números $0, 1, ..., N$, al aplicar una triangulación a S y al aplicar (1) obtenemos los $N - simplex$ S_j, $j = 1, ..., J$.
Sea

$$A_{(N-1)} = 2a_N + b_N$$

el número total de $(N - 1) -$ *simplex de Sperner* contados tomando por separado cada $N - simplex$ que resulta después de la triangulación que se le aplicó a S, donde a_N es el número de $N - simplex$ etiquetados solamente con los números $0, 1, ..., N - 1$ y b_N el número de $N -$ *simplex de Sperner*.
Luego, como el lema es verdadero para N, entonces el número $A_{(N-1)}$ es impar, lo cual implica que el número b_N es impar también.

Ahora, para $N+1$ tenemos que S es un $(N+1)-simplex$ etiquetado con los números $0,1,...,N+1$, después de aplicar una triangulación a S y aplicando (1) obtenemos los $(N+1)-simplex$ S_j, $j=1,...,J$.

Sean a_{N+1} el número de $(N+1)-simplex$ etiquetados solamente con los números $0,1,...,N$, b_{N+1} el número de $(N+1)-simplex\ de\ Sperner$ y

$$A_{(N)} = 2a_{N+1} + b_{N+1}$$

el número de $N-simplex\ de\ Sperner$ contados tomando por separado cada $(N+1)-simplex$ que resulta después de la triangulación que se le aplicó a S.
Luego, el número $A_{(N)}$ es impar, debido a que cada $N-simplex\ de\ Sperner$ en el interior de S es contado dos veces y por la Hipótesis Inductiva tenemos que este número es impar en las caras de S, pues cada cara de S es un $N-simplex\ de\ Sperner$.
Por lo tanto b_{N+1} es un número impar.

$\square$

Lema 2.2.2 (Lema de Knaster, Kuratowski, y Mazurkiewicz). *Sea $S = co\{u_0,...,u_N\}$ un $N-simplex$ con $N=1,2,\dots,$ en un espacio normado X finito dimensional. Supongamos que tenemos los conjuntos cerrados $C_0,...,C_N$ en X tales que*

$$co\{u_{i_0},...,u_{i_k}\} \subseteq \bigcup_{m=0}^{k} C_{i_m} \qquad (2)$$

para todo sistema posible de indices $\{i_0,...,i_k\}$ y todo $k=0,...,N$. Entonces existe un punto $v \in S$ tal que $v \in C_j$ para todo $j=0,...,N$.

Demostración. Para $N=0$, S consiste de un solo punto, y el resultado se obtiene de inmediato.

Ahora sea $N \geq 1$. Consideremos una triangulación $S_1, ..., S_J$ de S. Sea v algún vértice de S_j, $j = 1, ..., J$, supongamos que

$$v \in co\{u_{i_0}, ..., u_{i_k}\} \qquad \text{para algún} \;\; k = 0, ..., N\,.$$

luego, uno de los números $i_0, ..., i_k$ está asociado con v.
Por (2), hay un conjunto C_k tal que

$$v \in C_k\,.$$

Asociemos el número k con el vértice v. Se sigue del lema de Sperner (*Lema* 2.2.1) que hay al menos un *simplex de Sperner* S_j cuyos vértices llevan los números $0, ..., N$. Por consiguiente los vértices $v_0, ..., v_N$ de S_j satisfacen la condición

$$v_k \in C_k \qquad \text{para todo} \;\; k = 0, ..., N\,. \qquad\qquad (3)$$

Por otra parte, consideremos ahora una sucesión de triangulaciones del simplex S de tal manera que el diámetro de los simplex de la triangulación tiendan a cero. En particular tomemos una sucesión de subdivisiones baricéntricas de S. De lo anterior se sigue que hay puntos

$$v_k^{(n)} \in C_k \qquad \text{para todo} \;\; k = 0, ..., N \quad y \quad n = 1, 2, ...$$

tales que

$$\lim_{n \to \infty} diam\; co\{v_0^{(n)}, ..., v_N^{(n)}\} = 0\,. \qquad\qquad (4)$$

Como el simplex S es compacto, existe una subsucesión convergente de $v_k^{(n)}$, de nuevo denotada por $(v_k^{(n)})$, tal que

$$v_1^{(n)} \to v \qquad \text{cuando} \quad n \to \infty \quad y \quad v \in S\,.$$

Por (4),

$$v_k^{(n)} \to v \qquad \text{cuando} \quad n \to \infty \qquad \text{para todo} \;\; k = 0, ..., N\,.$$

Luego, como el conjunto C_k es cerrado, tenemos que

$$v \in C_k \qquad \text{para todo} \;\; k = 0, ..., N \, .$$

$\square$

2.3. Prueba del Teorema de Punto Fijo de Brouwer

Demostración. Sea S un $N-simplex$ en un espacio normado finito dimensional, y

$$A : S \rightarrow S$$

un operador continuo, donde $N = 0, 1, ...$. Mostremos que A tiene un punto fijo.

i) Para $N = 0$, el conjunto S consiste de un solo punto y el resultado se obtiene de inmediato.

ii) Sea $N = 1$. Entonces, $S = co\{u_0, u_1\}$, esto es S es el segmento $[u_0, u_1]$. Sean

$$A : [u_0, u_1] \rightarrow [u_0, u_1]$$

una función continua y B una función definida por

$$B(u) = A(u) - u \qquad \text{para todo} \;\; u \in [u_0, u_1] \, .$$

Luego $A(u_0),\; A(u_1) \in [u_0, u_1]$, por lo tanto $A(u_0) \geq u_0$ y $A(u_1) \leq u_1$, entonces

$$B(u_0) \geq 0 \qquad \text{y} \qquad B(u_1) \leq 0 \, .$$

Ahora, por el Teorema del Valor Intermedio tenemos que existe un $u \in [u_0, u_1]$ tal que $B(u) = 0$. por lo tanto

$$A(u) = u \, .$$

iii) Sea $N = 2$. Entonces, $S = co\{u_0, u_1, u_2\}$, esto es S es un triángulo. Cada punto $u \in S$ tiene la representación

$$u = \alpha_0(u)u_0 + \alpha_1(u)u_1 + \alpha_2(u)u_2\,,$$

donde $\alpha_j(u)$ representa la $j-$ésima coordenada baricéntrica de u, con

$$0 \leq \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2 \leq 1 \qquad \text{y} \qquad \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 = 1\,. \tag{1}$$

Luego, como los puntos u_0, u_1 y u_2 están en posición general, las coordenadas baricéntricas α_0, α_1 y α_2 del punto u están únicamente determinadas por u.
Definamos el conjunto C_j para $j = 0, 1, 2$ de la siguiente manera:

$$C_j = \{u \in S : \alpha_j(Au) \leq \alpha_j(u)\}\,,$$

este conjunto es cerrado. Mas aún la condición (2) de el Lema de Knaster, Kuratowski, y Mazurkiewicz (*Lema* 2.2.2) se satisface, esto es,

$$co\{u_{i_0}, ..., u_{i_k}\} \subseteq \bigcup_{m=0}^{k} C_{i_m}\,, \qquad k = 0, 1, 2\,.$$

En efecto, si esto no es verdad, entonces hay un punto $u \in co\{u_{i_0}, ..., u_{i_k}\}$ tal que $u \notin \bigcup_{m=0}^{k} C_{i_m}$, es decir que,

$$\alpha_{i_m}(Au) > \alpha_{i_m}(u) \qquad \text{para todo } \; m = 0, ..., k \; \text{ y algún } \; k = 0, 1, 2\,. \tag{2}$$

Esto contradice (1). En efecto, si reenumeramos los vértices, la condición (2) se convierte en

$$\alpha_j(Au) > \alpha_j(u) \qquad \text{para todo } \; j = 0, ..., k \; \text{ y algún } \; k = 0, 1, 2\,. \tag{2^*}$$

Además, como $u \in S$ y $Au \in S$, se sigue de (1) que

$$\alpha_0(u)+\alpha_1(u)+\alpha_2(u) = 1 \qquad \text{y} \qquad \alpha_0(Au)+\alpha_1(Au)+\alpha_2(Au) = 1\,. \tag{2^{**}}$$

luego, (2^*) contradice (2^{**}).

Ahora, el Lema de Knaster, Kuratowski, y Mazurkiewicz (*Lema* 2.2.2) garantiza la existencia de un punto $v \in S$ tal que

$$v \in C_j \qquad \text{para todo} \;\; j = 0, 1, 2\,.$$

Esto implica que

$$\alpha_j(Av) \leq \alpha_j(v) \qquad \text{para todo} \;\; j = 0, 1, 2\,.$$

Por lo tanto, de (2^{**}) con $u = v$, se sigue que

$$\alpha_j(Av) = \alpha_j(v) \qquad \text{para} \;\; j = 0, 1, 2\,,$$

de donde concluimos que

$$Av = v\,.$$

iv) Continuando con el proceso en una forma recursiva, para $N = n$ con $n \geq 3$, $S = co\{u_0, ..., u_n\}$. Cada punto $u \in S$ tiene la representación

$$u = \alpha_0(u)u_0 + \cdots + \alpha_n(u)u_n\,,$$

donde $\alpha_j(u)$ representa la $j-$ésima coordenada baricéntrica de u, con

$$0 \leq \alpha_0, ..., \alpha_n \leq 1 \qquad \text{y} \qquad \alpha_0 + \cdots + \alpha_n = 1\,. \qquad (3)$$

Luego, como los puntos $u_0, ..., u_n$ están en posición general, las coordenadas baricéntricas $\alpha_0, ..., \alpha_n$ del punto u están únicamente determinadas por u. Definamos el conjunto C_j para $j = 0, ..., n$ de la siguiente manera:

$$C_j = \{u \in S : \alpha_j(Au) \leq \alpha_j(u)\}\,,$$

éste conjunto es cerrado. Mas aún la condición (2) de el Lema de Knaster, Kuratowski, y Mazurkiewicz (*Lema* 2.2.2) se satisface, esto es,

$$co\{u_{i_0}, ..., u_{i_k}\} \subseteq \bigcup_{m=0}^{k} C_{i_m}\,, \qquad k = 0, ..., n\,.$$

En efecto, si esto no es verdad, entonces hay un punto $u \in co\{u_{i_0}, ..., u_{i_k}\}$ tal que $u \notin \bigcup_{m=0}^{k} C_{i_m}$, es decir que,

$$\alpha_{i_m}(Au) > \alpha_{i_m}(u) \qquad \text{para todo} \;\; m = 0, ..., k \;\; \text{y algún} \quad k = 0, ..., n\,. \tag{4}$$

Esto contradice (3). En efecto, si reenumeramos los vértices, la condición (4) se convierte en

$$\alpha_j(Au) > \alpha_j(u) \qquad \text{para todo} \;\; j = 0, ..., k \;\; \text{y algún} \quad k = 0, ..., n\,. \tag{4*}$$

Además, como $u \in S$ y $Au \in S$, se sigue de (3) que

$$\alpha_0(u) + \cdots + \alpha_n(u) = 1 \qquad \text{y} \qquad \alpha_0(Au) + \cdots + \alpha_n(Au) = 1\,. \tag{4**}$$

luego, (4^*) contradice (4^{**}).

Ahora, el Lema de Knaster, Kuratowski, y Mazurkiewicz (*Lema* 2.2.2) garantiza la existencia de un punto $v \in S$ tal que

$$v \in C_j \qquad \text{para todo} \;\; j = 0, ..., n\,.$$

Esto implica que

$$\alpha_j(Av) \leq \alpha_j(v) \qquad \text{para todo} \;\; j = 0, ..., n\,.$$

Por lo tanto, de (4^{**}) con $u = v$, se sigue que

$$\alpha_j(Av) = \alpha_j(v) \qquad \text{para} \;\; j = 0, ..., n\,,$$

de donde concluimos que

$$Av = v\,.$$

En conclusión de i), ii), iii) y iv) tenemos que para todo $N = 0, 1, \ldots$, el operador $A : S \to S$ tiene un punto fijo.

Por otra parte, sea M un subconjunto no vacío, compacto y convexo de un espacio normado finito dimensional. Por la Proposición 2.2.4, tenemos que M es homeomorfo a algún $N - \textit{simplex}\ S$. Usando los pasos i), ii), iii), iv) anteriores y algunos argumentos de la prueba del Corolario 2.1.1 mostramos que cada operador continuo $A : M \to M$ tiene un punto fijo. $\square$

Capítulo 3

El Teorema de Punto Fijo de Schauder y Aplicaciones a Ecuaciones Integrales y Diferenciales

3.1. Teorema de punto fijo de Schauder

Definición 3.1.1 (Conjunto Relativamente Compacto). *Sea M un conjunto en un espacio normado, M es relativamente compacto si cada sucesión (u_n) en M tiene una subsucesión convergente.*

Definición 3.1.2 (Conjunto Equicontinuo). *Sea $X = C([a,b])$, un conjunto $M \subseteq X$ es equicontinuo si para cada $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que*

$$|x - y| < \delta \quad y \quad u \in M \qquad implica \qquad |u(x) - u(y)| < \epsilon\,.$$

Definición 3.1.3 (Operador Uniformemente Continuo). *Sean X y Y espacios normados sobre $\mathbb{K}$ y $M \subseteq X$. El operador $A : M \to Y$ es* uniformemente continuo*, si para cada $\epsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ ($\delta = \delta(\epsilon)$) tal que*

$$para\ cada\ \ u, v \in M \ \ y\ \ \|v - u\| < \delta \qquad implica \qquad \|Au - Av\| < \epsilon.$$

Definición 3.1.4 (Operador Compacto). *Sean* X *y* Y *espacios normados sobre* $\mathbb{K}$ *y* $M \subseteq X$*. El operador* $A : M \to Y$ *es compacto si*

i) A *es continuo, y*

ii) A *transforma conjuntos acotados en conjuntos relativamente compactos, esto es si* $B \subseteq M$ *es acotado, entonces* $A(B)$ *es relativamente compacto.*

Proposición 3.1.1 (Teorema de Arzela - Ascoli). *Sea* $X = C([a,b])$ *con* $\|u\| = \max\limits_{a \leq x \leq b} |u(x)|$ *y* $a, b \in \mathbb{R}$*. Si* M *es un subconjunto de* X *acotado y equicontinuo, entonces* M *es relativamente compacto.*

Demostración. (Ver pag. 35 de [6])

□

Proposición 3.1.2. *Sean* X *y* Y *espacios normados sobre* $\mathbb{K}$ *y* $M \subseteq X$*, sea* $A : M \to Y$ *un operador continuo, si* M *es compacto, entonces* A *es uniformemente continuo sobre* M*.*

Demostración. Supongamos que A no es uniformemente continuo. Entonces, existe $\epsilon_0 > 0$ y las sucesiones (u_n) y (v_n) en M tal que

$$\|u_n - v_n\| \leq \frac{1}{n} \quad \text{y} \quad \|Au_n - Av_n\| \geq \epsilon_0 \quad \text{para todo } n\,. \qquad (1)$$

Como M es compacto, existe una subsucesión de (u_n), de nuevo denotada por (u_n), tal que

$$u_n \to u \quad \text{cuando} \quad n \to \infty \quad \text{para algún } u \in M\,.$$

Esto implica que

$$\|v_n - u\| \leq \|v_n - u_n\| + \|u_n - u\| \to 0 \quad \text{cuando} \quad n \to \infty\,,$$

es decir,

$$v_n \to u \quad \text{cuando} \quad n \to \infty\,.$$

Luego, por la continuidad del operador A, tenemos que

$$(Au_n - Av_n) \to 0 \qquad \text{cuando} \quad n \to \infty \, .$$

Esto contradice la condición (1). Por lo tanto, el operador A es uniformemente continuo sobre M.

$\square$

Proposición 3.1.3. *Sea* $r > 0$ *fijo y definamos los conjuntos* $M = \{u \in C([a,b]) : \|u\| \leq r\}$ *y* $Q = [a,b] \times [a,b] \times [-r,r]$. *Además sea* $F : Q \to \mathbb{R}$ *una función continua y consideremos el operador*

$$\begin{aligned} A : M &\to C([a,b]) \\ u &\mapsto \quad Au \end{aligned}$$

definido por

$$(Au)(x) = \int_a^b F(x, y, u(y))\, dy \qquad \textit{para} \quad x \in [a,b] \, .$$

Entonces el operador A *es compacto.*

Demostración. Veamos que el operador $A : M \to C([a,b])$ es continuo. En efecto, sea $\epsilon > 0$, entonces por la Proposición 3.1.2 la función F es uniformemente continua sobre el compacto Q, esto implica que, existe $\delta > 0$ tal que

$$|F(x_1, y_1, z_1) - F(x_2, y_2, z_2)| < \frac{\epsilon}{b-a} \qquad (2)$$

para (x_1, y_1, z_1), $(x_2, y_2, z_2) \in Q$ con $|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2)| + |z_1 - z_2| < \delta$.

Luego, si $u, v \in M$

$$\|u - v\| = \max_{a \leq y \leq b} |u(y) - v(y)| < \delta \, ,$$

entonces para $x \in [a,b]$

$$\begin{aligned}
|(Au)(x) - (Av)(x)| &= \left| \int_a^b [F(x,y,u(y)) - F(x,y,v(y))]\, dy \right| \\
&\leq \int_a^b |F(x,y,u(y)) - F(x,y,v(y))|\, dy \\
&< \int_a^b \frac{\epsilon}{b-a}\, dy = \epsilon\,,
\end{aligned}$$

de donde

$$\|Au - Av\| = \max_{a \leq x \leq b} |(Au)(x) - (Av)(x)| < \epsilon\,.$$

Veamos ahora que el operador A transforma conjuntos acotados en conjuntos relativamente compactos. Como el conjunto M es acotado. Por el Teorema de Arzela - Ascoli (Proposición 3.1.1), debemos probar que $A(M)$ es acotado, y equicontinuo.

Mostremos que $A(M)$ es acotado. Sea $\mu = \max_{(x,y,z) \in Q} |F(x,y,z)|$, entonces, para todo $u \in M$, si $x \in [a,b]$

$$\begin{aligned}
|(Au)(x)| &= \left| \int_a^b F(x,y,u(y))\, dy \right| \\
&\leq \int_a^b |F(x,y,u(y))|\, dy \\
&\leq \int_a^b \mu\, dy = (b-a)\,\mu\,,
\end{aligned}$$

de donde

$$\|Au\| = \max_{a\leq x\leq b} |(Au)(x)| \leq (b-a)\,\mu\,.$$

Mostremos que $A(M)$ es equicontinuo. Si $\epsilon > 0$, sea $\delta > 0$ como en (2) y $|x_1 - x_2| < \delta$ con $x_1, x_2 \in [a,b]$ implica

$$\begin{aligned}
|(Au)(x_1) - (Au)(x_2)| &= \left| \int_a^b [F(x_1,y,u(y)) - F(x_2,y,u(y))]\,dy \right| \\
&\leq \int_a^b |F(x_1,y,u(y)) - F(x_2,y,u(y))|\,dy \\
&< \epsilon \qquad \text{para todo } u \in M\,.
\end{aligned}$$

Luego, como $A(M)$ es acotado y equicontinuo concluimos que el conjunto $A(M)$ es relativamente compacto. Por lo tanto, el operador $A : M \to X$ es compacto.

$\square$

Proposición 3.1.4 (Teorema de Aproximación Para Operadores Compactos). *Sean X y Y espacios de Banach sobre $\mathbb{K}$ y $M \subseteq X$ un conjunto acotado no vacío, si el operador $A : M \to Y$ es compacto, entonces para todo $n = 1, 2, ...$ existe un operador continuo*

$$A_n : M \to Y$$

tal que

$$\sup_{u\in M} \|Au - A_n u\| \leq \frac{1}{n} \qquad y \qquad dim(gen\, A_n(M)) < \infty\,,$$

además, $A_n(M) \subseteq co\, A(M)\,.$ (3)

Demostración. (Ver pag. 41 de [6])

$\square$

Teorema 3.1.1 (Teorema de Punto Fijo de Schauder). *Sea* $A : M \to M$ *un operador compacto, donde* M *es un subconjunto no vacío, acotado, cerrado y convexo de un espacio de Banach* X. *Entonces* A *tiene al menos un punto fijo.*

Este Teorema fue probado por Schauder en 1930. Si $dim\, X < \infty$, éste teorema coincide con el Teorema de Punto Fijo de Brouwer.

Demostración. Sea $u_0 \in M$. Reemplazando u con $u - u_0$, podemos asumir que $0 \in M$. Ahora del Teorema de Aproximación Para Operadores Compactos (Proposición 3.1.4) tenemos que, para todo $n = 1, 2, \ldots,$ existe un operador continuo

$$A_n : M \to X_n$$

tal que

$$\|Au - A_n u\| \leq \frac{1}{n} \qquad \text{para todo } \; u \in M\,, \qquad (4)$$

donde $X_n = gen\,(A_n(M))$ es un subespacio finito dimensional de X.

Definamos

$$M_n = X_n \cap M\,.$$

Entonces, M_n es un subconjunto acotado, cerrado y convexo de X_n con $0 \in M_n$, se sigue de (3) y de la convexidad de M que

$$A_n(M) \subseteq co\, A(M) \subseteq M\,.$$

Ahora, por el Teorema de Punto Fijo de Brouwer, tenemos que el operador

$$A_n : M_n \to M_n$$

tiene un punto fijo u_n, esto es

$$A_n u_n = u_n\,, \quad u_n \in M_n \qquad \text{para todo } \; n = 1, 2, \ldots\,.$$

Por (4),

$$\|Au_n - u_n\| \le \frac{1}{n}, \qquad \text{para todo } \ n = 1, 2, \ldots . \qquad (5)$$

Como $M_n \subseteq M$ para todo n, la sucesión (u_n) es acotada. Por la compacidad del operador $A : M \to M$ tenemos que existe una subsucesión (Au_n), tal que

$$Au_n \to v \qquad \text{cuando } \ n \to \infty, \qquad (6)$$

para algún $v \in M$ por ser M cerrado. Por (5) y (6),

$$\|v - u_n\| \le \|v - Au_n\| + \|Au_n - u_n\| \to 0 \qquad \text{cuando } \ n \to \infty .$$

Luego,

$$u_n \to v \qquad \text{cuando } \ n \to \infty .$$

Como el operador $A : M \to M$ es continuo, se sigue que

$$Au_n \to Av \qquad \text{cuando } \ n \to \infty, \qquad (7)$$

por lo tanto, de (6) y (7) tenemos que

$$Av = v .$$

□

3.2. Una Aplicación del Teorema de Punto Fijo de Schauder a Ecuaciones Integrales

Consideremos la Ecuación Integral

$$u(x) = \lambda \int_a^b F(x, y, u(y))\, dy , \qquad (1)$$

donde λ es un parámetro, u una función definida en $[a, b]$, y F una función definida en $Q = [a, b] \times [a, b] \times [-r, r]$ para $r > 0$ fijo.

Teorema 3.2.1. *Sean* $F : Q \to \mathbb{R}$ *una función continua y* $\lambda > 0$ *un número real tal que*

$$\lambda\,(b-a)\max_{(x,y,z)\in Q}|F(x,y,z)| < r\,,$$

entonces la ecuación (1) tiene al menos una solución

$$u \in M = \{u \in C([a,b]) : \|u\| \le r\}\,.$$

Demostración. Definamos el operador

$$\begin{aligned} A : M &\to M \\ u &\mapsto Au \end{aligned}$$

por

$$(Au)(x) = \lambda \int_a^b F(x,y,u(y))\,dy \qquad \text{para } x \in [a,b]\,.$$

A está bien definido. En efecto, del Capítulo 1 (Sección 1.2, prueba del Teorema 1.2.1) se sigue la continuidad de Au, además para $u \in M$ y $x \in [a,b]$,

$$\begin{aligned} |(Au)(x)| &= \left|\lambda \int_a^b F(x,y,u(y))\,dy\right| \\ &\le \lambda \int_a^b |F(x,y,u(y))|\,dy \\ &\le \lambda \int_a^b \max_{(x,y,z)\in Q}|F(x,y,z)|\,dy \\ &= \lambda\,(b-a)\max_{(x,y,z)\in Q}|F(x,y,z)| \\ &< r\,. \end{aligned}$$

Por lo tanto $A(M) \subseteq M$. De la proposición 3.1.3, se sigue que el operador $A : M \to M$ es compacto. Luego, aplicando el Teorema de Punto Fijo de Schauder tenemos que A tiene al menos un punto fijo en M, es decir existe al menos un $u \in M$ tal que

$$u = Au\,,$$

o sea, existe $u \in M$ tal que

$$u(x) = \lambda \int_a^b F(x, y, u(y))\, dy\,.$$

$\square$

3.3. Una Aplicación del Teorema de Punto Fijo de Schauder a Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Consideremos el problema de valor inicial

$$u'(x) = F(x, u(x)) \quad \text{y} \quad u(x_0) = u_0\,, \qquad (1)$$

donde el punto $(x_0, u_0) \in \mathbb{R}^2$ está dado y F es una función de dos variables dada.

Teorema 3.3.1 (Teorema de Peano). *Sean*

$$S = \{(x, z) \in \mathbb{R}^2 : |x - x_0| \leq r \;\; y \;\; |z - u_0| \leq r\}$$

con $(x_0, u_0) \in \mathbb{R}^2$, $r > 0$ *fijo y* $F : S \to \mathbb{R}$ *una función continua, si* h *es un número real tal que*

$$0 < h \leq r \quad y \quad h\,\varphi \leq r$$

donde

$$\varphi = \max_{(x,z)\in S} |F(x,z)|\,,$$

entonces, el problema (1) *tiene al menos una solución.*

A diferencia del Teorema de Picard - Lindelöf (Teorema 1.3.1), el Teorema de Peano sólo garantiza existencia de la solución y no unicidad.

Demostración. Sea $M = \{u \in C([a,b]) : \|u - u_0\| \leq r\}$, donde $a = x_0 - h,\ b = x_0 + h$ y $u_0(x) = u_0$ para todo $x \in [a,b]$.
Definamos el operador

$$\begin{aligned} A : M &\to M \\ u &\mapsto Au \end{aligned}$$

por

$$(Au)(x) = u_0 + \int_{x_0}^{x} F(y, u(y))\, dy \qquad \text{para} \ \ x \in [a,b]\,.$$

A está bien definido. En efecto, del Capítulo 1 (Sección 1.2, prueba del Teorema 1.2.1) se sigue la continuidad de Au, además para $u \in M$ y $x \in [a,b]$,

$$\begin{aligned} |(Au)(x) - u_0| &= \left| \int_{x_0}^{x} F(y,u(y))\, dy \right| \\ &\leq \int_{x_0}^{x} |F(y,u(y))|\, dy \end{aligned}$$

luego,

$$\begin{aligned}
\int_{x_0}^{x} |F(y,u(y))|\,dy &\leq \int_{x_0}^{x} \max_{(x,z)\in S} |F(x,z)|\,dy\,, \\
&\leq \left| \int_{x_0}^{x} \max_{(x,z)\in S} |F(x,z)|\,dy \right| \\
&= |x-x_0| \max_{(x,z)\in S} |F(x,z)| \\
&\leq h\varphi \leq r\,.
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\|Au-u_0\| = \max_{a\leq x\leq b} |(Au)(x)-u_0| \leq r\,.$$

Luego, $A(M) \subseteq M$. De donde tenemos que el conjunto $A(M)$ es acotado.

Veamos que $A(M)$ es equicontinuo. En efecto, Sean $x_1, x_2 \in [a,b]$ y $u \in M$ tales que $|x_1-x_2| < \delta$ para $\delta > 0$, entonces

$$\begin{aligned}
|(Au)(x_1)-(Au)(x_2)| &= \left| \int_{x_0}^{x_1} F(y,u(y))\,dy - \int_{x_0}^{x_2} F(y,u(y))\,dy \right| \\
&= \left| \int_{x_1}^{x_2} F(y,u(y))\,dy \right| \\
&\leq \int_{x_1}^{x_2} |F(y,u(y))|\,dy \\
&\leq \int_{x_1}^{x_2} \max_{(x,z)\in S} |F(x,z)|\,dy\,,
\end{aligned}$$

luego,

$$\int_{x_1}^{x_2} \max_{(x,z)\in S} |F(x,z)|\, dy \;\leq\; \left| \int_{x_1}^{x_2} \max_{(x,z)\in S} |F(x,z)|\, dy \right|$$

$$= \; |x_2 - x_1|\, \varphi \;<\; \delta\, \varphi\, .$$

Tomando $\delta = \frac{\epsilon}{\varphi}$ con $\varphi \neq 0$ tenemos que

$$|(Au)(x_1) - (Au)(x_2)| < \epsilon\, .$$

Hemos demostrado que $A(M)$ es acotado y equicontinuo, entonces del Teorema de Arzela - Ascoli (Proposición 3.1.1) se sigue que el conjunto $A(M)$ es relativamente compacto en X .

Ahora veamos que A es continuo. En efecto, sea $\epsilon > 0$, entonces como la función F es continua, esto implica que, existe $\delta > 0$ tal que

$$|F(x_1, z_1) - F(x_2, z_2)| < \frac{\epsilon}{r} \qquad (2)$$

para (x_1, z_1) , $(x_2, z_2) \in S$ con $|x_1 - x_2| + |z_1 - z_2| < \delta$.

Luego, si $u, v \in M$ tal que

$$\|u - v\| = \max_{a\leq x\leq b} |u(x) - v(x)| < \delta\, ,$$

entonces para $x \in [a, b]$, se tiene que

$$|(Au)(x) - (Av)(x)| \;=\; \left| \int_{x_0}^{x} [F(y, u(y)) - F(y, v(y))]\, dy \right|$$

$$\leq \; \int_{x_0}^{x} |F(y, u(y)) - F(y, v(y))|\, dy\, ,$$

luego, por (2) tenemos que

$$\begin{aligned}\int_{x_0}^{x} |F(y,u(y)) - F(y,v(y))|\, dy \ &< \ \int_{x_0}^{x} \frac{\epsilon}{r}\, dy \ = \ (x - x_0)\frac{\epsilon}{r} \\ &\leq \ r\,\frac{\epsilon}{r} \ = \ \epsilon\,.\end{aligned}$$

De donde,

$$\|Au - Av\| = \max_{a\leq x\leq b} |(Au)(x) - (Av)(x)| < \epsilon\,.$$

Por lo tanto el operador $A : M \to M$ es compacto.

Por último aplicando el Teorema de Punto Fijo de Schauder tenemos que el operador A tiene al menos un punto fijo en M, es decir existe al menos un $u \in M$ tal que

$$u = Au\,,$$

o sea, existe $u \in M$ tal que

$$u(x) = u_0 + \int_{x_0}^{x} F(y,u(y))\, dy\,. \qquad (3)$$

Por lo tanto, derivando (3) con respecto a x, obtenemos

$$u'(x) = F(x,u(x)) \quad \text{y} \quad u(x_0) = u_0\,.$$

$\square$

Bibliografía

[1] APOSTOL, Tom. Análisis Matemático. Editorial Reverté, S.A. Barcelona. 1988.

[2] BRÉZIS, Haim. Análisis Funcional. Alianza Editorial. París. 1983.

[3] C. EVANS, Lawrence. Partial Differential Equations. Vol 19. The American Mathematical Society. 1998.

[4] KREYSZIG, Edwin. Introductory Functional Analysis with Applications. John Wiley & Sons. New York. 1978.

[5] RUDIN, Walter. Principles of Mathematical Analysis. Editorial Mc Graw Hill. Auckland. 1976.

[6] ZEIDLER, Eberhard. Applied Functional Analysis. Vol 108. Springer. 1995.