Una Aproximación Conjuntista al Problema de la Medida

María Eugenia Montoya Nava

UNIVERSIDAD DEL CAUCA

Facultad de Ciencias Naturales, Exactas y de la Educación

Departamento de Matemáticas

Popayán

2007

Una Aproximación Conjuntista al Problema de la Medida

Trabajo de grado presentado a la Universidad del Cauca como requisito parcial para optar al título de Matemático

Directora

Luz Victoria De La Pava Castro

UNIVERSIDAD DEL CAUCA

Facultad de Ciencias Naturales, Exactas y de la Educación

Departamento de Matemáticas

Popayán

2007

Prefacio

Este trabajo de grado se desarrolla en la modalidad de Seminario de Grado. Es una monografía producto del estudio de unos temas desarrollados en ciertas referencias bibliográficas. Se asume que el lector tiene algunos conocimientos previos en teoría de conjuntos y teoría de la medida. Sin embargo, el lector menos preparado puede consultar las referencias que aparecen a lo largo del trabajo y en la Bibliografía. Una referencia mucho más amplia y completa de los temas que se desarrollan en este trabajo es [**V**].

El trabajo se divide en dos capítulos. En el primer capítulo se presenta una serie de preliminares donde se habla de ciertos conceptos y resultados relacionados con ordinales, cardinales, cardinales grandes, filtros e ideales, medidas, entre otros. El segundo capítulo corresponde al cuerpo del trabajo; en este capítulo se pueden apreciar los resultados de la teoría de conjuntos que conectan el problema de la medida con los cardinales inaccesibles y con la Hipótesis del Continuo.

Prefacio

Introducción

Uno de los conceptos más importantes y fundamentales de las matemáticas es el de conjunto. Este es el objeto de estudio de la teoría de conjuntos. Más aún, los más relevantes para los matemáticos son los conjuntos infinitos. Un interés particular de la teoría de conjuntos es determinar cuánto más grande es un infinito que otro. Desde este punto de vista, el estudio de los cardinales, que son cierto tipo de conjuntos, es esencial. El primer cardinal infinito se denota por $\aleph_0$ y es el cardinal de cada conjunto numerable, es decir el cardinal de cada conjunto equipotente con el conjunto de los números naturales, $\mathbb{N}$.

Tres aspectos juegan un papel fundamental en el presente trabajo: Hipótesis del Continuo, cardinales inaccesibles y problema de la medida.

Hipótesis del Continuo. Cantor construyó los alephs,

$$\aleph_0, \aleph_1, \aleph_2, \ldots, \aleph_\omega, \ldots$$

etc., con la idea fundamental de que a cada conjunto infinito le correspondiera un único aleph, según el tamaño del conjunto. Además,

$$\aleph_0 < \aleph_1 < \aleph_2 < \cdots < \aleph_\omega < \cdots$$

La potencia $2^{\aleph_0}$ es un cardinal, precisamente el cardinal del conjunto de los números reales o, mejor, el cardinal del continuo. En este sentido, $2^{\aleph_0}$ debe ser igual a algún aleph. Surge entonces la pregunta: ¿Cuál aleph le corresponde a $2^{\aleph_0}$? La intuición de Cantor lo llevó a conjeturar que $2^{\aleph_0} = \aleph_1$. Esto es lo que se conoce como la Hipótesis del Continuo (HC) y que en otra versión dice: no hay ningún número cardinal entre $\aleph_0$ y $2^{\aleph_0}$. Hoy se sabe que la Hipótesis del Continuo es un enunciado indecidible en ZFC.

Cardinales inaccesibles. Un cardinal *débilmente inaccesible* o simplemente *inaccesible* es un cardinal no numerable, límite y regular. Un cardinal κ se dice *fuertemente inaccesible* si es débilmente inaccesible y además $2^\lambda < \kappa$ para todo $\lambda < \kappa$. Esta última propiedad justifica el nombre de inaccesible para este tipo de cardinal. Intuitivamente dice que κ es lo suficientemente grande como para que no se pueda obtener mediante operaciones aritméticas a partir de cardinales menores que él.

Problema de la medida. Sean S un conjunto y $\mathfrak{S}$ una $\sigma-$álgebra de subconjuntos de S. Una *medida* $\sigma-$*aditiva sobre* $\mathfrak{S}$ es una función $\mu : \mathfrak{S} \longrightarrow [0, +\infty]$ que satisface las siguientes condiciones:

i) $\mu(\emptyset) = 0$.

ii) Si $A \subseteq B$ entonces $\mu(A) \leq \mu(B)$.

iii) Si $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de elementos de $\mathfrak{S}$, disjuntos por pares, entonces

$$\mu\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} X_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu(X_n)$$

Una *medida sobre* S es una medida sobre la $\sigma-$álgebra $\wp(S)$.

En particular, existe una única medida $\sigma-$aditiva μ, sobre la $\sigma-$álgebra de conjuntos de Borel, que satisface las dos condiciones siguientes:

a) $\mu([a,b]) = b - a$, para todo $a, b \in \mathbb{R}$, con $a < b$.

b) Si A es un conjunto de Borel entonces $A + a$ también lo es y $\mu(A + a) = \mu(A)$, para todo $a \in \mathbb{R}$. (*Invariancia bajo traslaciones.*)

Tal medida se denomina la *medida de Lebesgue* y los elementos de la $\sigma-$álgebra de conjuntos de Borel se llaman *Lebesgue medibles* o *medibles según Lebesgue*. En el cuerpo del trabajo, el lector encontrará la definición explícita de un conjunto medible según Lebesgue.

No todos los conjuntos Lebesgue medibles son de Borel. Existen conjuntos que no son de Borel pero son Lebesgue medibles [**Ji**, p. 98]. Sin embargo, la mayoría de los trabajos matemáticos se realizan sólo con conjuntos de Borel, pues se conocen mejor sus propiedades y esto hace que sean de más fácil manipulación. De hecho, hay tantos conjuntos de Borel como números reales, es decir, $2^{\aleph_0}$. De otro lado, la cantidad de conjuntos Lebesgue medibles coincide con la cantidad de subconjuntos de números reales, es decir, es $2^{2^{\aleph_0}}$.

Es deseable que todos los conjuntos de números reales sean Lebesgue medibles. Sin embargo, existen conjuntos de números reales que no lo son. El llamado *problema de la medida* es la pregunta: ¿Existe alguna medida $\sigma-$aditiva sobre $\mathbb{R}$ que extienda la medida de Lebesgue? Una respuesta parcial a esta pregunta es: no existe una medida $\sigma-$aditiva sobre $\mathbb{R}$ que extienda la medida de Lebesgue y que satisfaga la propiedad de invariancia bajo traslaciones [**HJ**, p. 151]. Esto implica que para que todos los conjuntos de números reales se puedan medir en algún sentido, preservando la medida de Lebesgue para los llamados Lebesgue medibles, se debe sacrificar alguna de las propiedades que satisface la medida de Lebesgue, en particular la de invariancia bajo traslaciones.

Los tres aspectos mencionados arriba están íntimamente relacionados. Por ejemplo, se puede mostrar que si existe una medida $\sigma-$aditiva sobre $\mathbb{R}$ que extienda la medida de Lebesgue entonces existe un cardinal débilmente inaccesible κ tal que $2^{\aleph_0} \geq \kappa$. Es decir, bajo dicho supuesto, la Hipótesis del Continuo falla. Además se puede mostrar cómo la existencia de cierto tipo de medidas sobre un conjunto asegura la existencia de cardinales inaccesibles. La conjugación de estos aspectos se desarrollará a lo largo del presente trabajo.

Contenido

Capítulo 1

Preliminares

1.1. El Sistema Axiomático ZFC

Durante el siglo XIX, se llevó a cabo un proceso de formalización de las matemáticas tomando como base la teoría de conjuntos. En un proceso de tal naturaleza se establecen propiedades que se quiere que tengan aquellos objetos que se llaman conjuntos. Estas propiedades o principios básicos son los axiomas de la teoría de conjuntos, a partir de los cuales se espera demostrar rigurosamente todos los resultados básicos aceptados por los matemáticos. A principios del siglo XX, Ernest Zermelo dio una lista de axiomas que después completó Abraham Fraenkel y que se conoce hoy como el sistema axiomático Zermelo-Fraenkel (ZF). Si además se incluye el axioma de elección, entonces el sistema axiomático se denota por ZFC.

A continuación se presenta el sistema ZFC. Cualquier variable que se use, mayúscula o minúscula, se asumirá que representa algún conjunto.

1. **Axioma de existencia.** *Hay un conjunto que no tiene elementos.* Este axioma garantiza la existencia del conjunto vacío.

2. **Axioma de extensionalidad.** *Si cada elemento de X es un elemento de Y y cada elemento de Y es un elemento de X, entonces $X = Y$.* Este axioma dice que si dos conjuntos tienen exactamente los mismos elementos, ellos son iguales.

3. **Axioma esquema de comprensión.** *Sea $p(x)$ una propiedad de x. Para cada A, existe un B tal que $x \in B$ si y sólo si $x \in A$ y se satisface $p(x)$.* Es decir, para cada conjunto A, existe el[1] conjunto $B = \{x \in A \mid p(x)\}$. Este axioma asegura que los elementos de un conjunto, que satisfacen una propiedad en particular, de nuevo forman un conjunto.

4. **Axioma del par**. *Para cada A y B, hay un C tal que $x \in C$ si y sólo si $x = A$ o $x = B$.* Este axioma asegura que dados dos conjuntos A y B, existe un conjunto C cuyos elementos son exactamente A y B.

5. **Axioma de la unión**. *Para cualquier S, existe un U tal que $x \in U$ si y sólo si $x \in A$ para algún $A \in S$.* Este axioma dice que la unión de los elementos de S es de nuevo un conjunto.

[1] La unicidad del conjunto B se puede demostrar gracias al axioma de extensionalidad.

6. **Axioma del conjunto potencia**. *Para cada S, existe P tal que $X \in P$ si y sólo si $X \subseteq S$.* Este axioma declara que a partir de un conjunto, la colección de subconjuntos de dicho conjunto es de nuevo un conjunto.

7. **Axioma del infinito**. *Existe un conjunto inductivo*[2]. Este axioma es el primero en asegurar la existencia de un conjunto infinito. De hecho, un conjunto inductivo es necesariamente infinito.

8. **Axioma esquema de reemplazo**. *Sea $p(x, y)$ una propiedad tal que para cada x existe un único y que satisface $p(x, y)$. Entonces dado A, existe B tal que para cada $x \in A$, hay un $y \in B$ para el cual $p(x, y)$ se cumple.* Intuitivamente, este axioma dice que si la propiedad $p(x, y)$ define a y como "función" de x entonces dado A, existe un B que contiene a la respectiva "imagen" de A.

9. **Axioma de fundamentación.** *Para cada $A \neq \varnothing$ existe $x \in A$ tal que $x \cap A = \varnothing$.* Una consecuencia de este axioma es que ningún conjunto pertenece a sí mismo.

10. **El axioma de elección**. *Cada sistema de conjuntos no vacíos tiene una función de elección*[3]. Para el lector interesado en este axioma y en los anteriores, consultar [**J**, pp. 3-15, 47-71] y [**HJ**, pp. 7, 137, 267].

A partir de los anteriores axiomas se desarrolla toda la teoría de conjuntos que

[2] Un conjunto I es ***inductivo*** si $\varnothing \in I$ y si para cada $x \in I$, se tiene que $x \cup \{x\} \in I$.

[3] Una función f sobre S es de ***elección*** si $f(X) \in X$ para $X \in S$.

soporta gran parte de la matemática moderna, es decir, se desarrolla toda la aritmética, se construyen los números naturales, los enteros, los racionales y los reales. Sin embargo, estos axiomas no dan respuesta a todas las preguntas que se pueden formular dentro de la teoría. De hecho, si se supone que ZFC es consistente[4], entonces ZFC es incompleto. Es decir, hay enunciados φ en el lenguaje de la teoría de conjuntos para los cuales no es posible demostrar ni φ ni $\neg\varphi$, a partir de los axiomas de ZFC. A este tipo de enunciados se les llama *independientes* de ZFC.

Un ejemplo de un enunciado de la teoría de conjuntos ZFC que es independiente de ZFC es $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ el cual se conoce como la Hipótesis del Continuo (HC). Kurt Gödel, en 1938, probó que si ZF es no contradictorio entonces ZFC + HC también lo es. Después, Paul Cohen, en 1963, usando la técnica del *forcing*, mostró que ZFC + ($\neg$HC) es consistente siempre que ZF lo sea. Estos dos resultados prueban que si ZF es consistente entonces HC es indecidible a partir del sistema axiomático ZFC. Para profundizar en estos temas el lector puede consultar [**J**] o [**Ku**].

1.2. Ordinales

Como se ha dicho antes, los números naturales $\mathbb{N}$ se definen conjuntistamente a partir de los axiomas ZFC. El conjunto vacío, cuya existencia está garantizada por

[4]Una teoría es *consistente* si de ella es imposible derivar contradicciones. Equivalentemente, una teoría es consistente si tiene un modelo.

los axiomas, se puede identificar con el número cero y gracias a algunos de los demás axiomas se puede definir cada número natural n como un conjunto de n elementos así:

$0 = \emptyset$

$1 = \{0\}$

$2 = \{0, 1\}$

$\vdots$

$n + 1 = n \cup \{n\} = \{0, 1, 2, ..., n - 1, n\}$ ($n + 1$ se llama el sucesor[5] de n)

$\vdots$

Construido cada número natural, se construye entonces el conjunto

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ..., n, n + 1, ...\}$$

de todos los números naturales. Este se denota por ω, es decir, $\omega = \mathbb{N}$.

Como una extensión de los números naturales se definen los ordinales, los cuales se construyen siguiendo dos principios de generación: la operación sucesor y el paso al límite. En particular, cada número natural $n \neq 0$ es un ordinal sucesor, pues cada $n \neq 0$ tiene un antecesor inmediato. Sin embargo, $\omega = \mathbb{N}$ es un ordinal que no tiene un antecesor inmediato. En este caso, ω es un ordinal que se obtiene como límite de los anteriores y no es sucesor de ningún ordinal. Se tiene entonces que

[5] En general, el sucesor de un conjunto x se denota por $x + 1$ y se define como $x \cup \{x\}$.

ω se obtiene por paso al límite. Si, a su vez, se aplica la operación sucesor a ω se obtiene $\omega + 1 = \omega \cup \{\omega\} = \{0, 1, 2..., n, ..., \omega\}$. Siguiendo los dos principios de generación mencionados se pueden construir ordinales cada vez más y más grandes.

$0, 1, 2, 3, ..., n, n+1, ..., \omega, \omega+1, \omega+2, ..., \omega 2, ..., \omega 3, ..., \omega^{\omega}, ..., \omega^{\omega^{\omega}}, \omega^{\omega^{\omega}}+1, ..., \alpha, ...$

Las siguientes definiciones formalizan el concepto de ordinal.

Definición 1.1 *Un conjunto parcialmente ordenado* $(A, \prec)$ *es un conjunto* ***bien ordenado*** *si cada subconjunto no vacío de* A *tiene un elemento* $\prec -$*mínimo.*

Definición 1.2 *Un conjunto* T *se dice* ***transitivo*** *si cada elemento de* T *es un subconjunto de* T.

Por ejemplo los conjuntos $A = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$, $B = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$ son conjuntos transitivos. Obsérvese que

$\varnothing \in B$ y $\varnothing \subseteq B$.

$\{\varnothing\} \in B$ y $\{\varnothing\} \subseteq B$.

$\{\varnothing, \{\varnothing\}\} \in B$ y $\{\varnothing, \{\varnothing\}\} \subseteq B$.

Definición 1.3 *Un conjunto* α *es un* ***número ordinal*** *si*

a) α *es transitivo y*

b) α *es bien ordenado por la relación de pertenencia* $\in_{\alpha}$.

De acuerdo con los dos principios de generación de ordinales, estos se clasifican en dos tipos: sucesor y límite.

Definición 1.4 *Un ordinal α es un **ordinal sucesor** si existe un ordinal β tal que $\alpha = \beta + 1$. Un ordinal es un **ordinal límite** si no es sucesor.*

Un tipo especial de número ordinal es el de cardinal.

Definición 1.5 *Un ordinal α es un **número cardinal** si α no es equipotente con ningún $\beta < \alpha$.*

Cada número natural n es un cardinal. El conjunto de todos los cardinales finitos es el conjunto $\mathbb{N}$. El primer cardinal transfinito es el conjunto de los números naturales que, como número cardinal, se denota $\aleph_0$. Mediante recursión transfinita, se define para cada ordinal α un cierto cardinal $\aleph_\alpha$ [**HJ**, p. 131].

A continuación se presentan los teoremas de Inducción Transfinita y Recursión Transfinita con el ánimo de justificar ciertas definiciones y propiedades posteriores.

Teorema 1.6 (Principio de Inducción Transfinita) *Sea $p(x)$ una propiedad. Supóngase que*

a) $p(0)$.

b) $p(\alpha)$ *implica* $p(\alpha + 1)$ *para todo ordinal* α.

c) *Para todo ordinal límite $\alpha \neq 0$, si $p(\beta)$ para todo $\beta < \alpha$, entonces $p(\alpha)$.*

Luego $p(\alpha)$ para todo ordinal α.

Definición 1.7 *Una* ***sucesión transfinita*** *de elementos de A es una función $f : \alpha \to A$ donde α es un ordinal. Si $f(\beta) = a_\beta$ para cada $\beta < \alpha$, entonces la sucesión transfinita f se denota así $\langle a_\beta : \beta < \alpha \rangle$.*

Teorema 1.8 (Recursión Transfinita) *Sean Ω un número ordinal y A un conjunto. Sea $S = \bigcup_{\alpha<\Omega} A^\alpha$ el conjunto de todas las sucesiones transfinitas de elementos de A de longitud menor que Ω. Sea $g : S \to A$ una función. Entonces existe una única función $f : \Omega \to A$ tal que para todo $\alpha < \Omega$*

$$f(\alpha) = g(f \upharpoonright \alpha)$$

Definición 1.9 *Un cardinal infinito $\aleph_\alpha$ es* ***sucesor*** *si α es un ordinal sucesor, esto es, $\aleph_\alpha = \aleph_{\beta+1}$ para algún β. Si α es un ordinal límite entonces $\aleph_\alpha$ es un cardinal* ***límite****.*

Definición 1.10 *Se dice que α es* ***el cardinal de un conjunto*** *A si α es equipotente con A.*

Tanto para los ordinales como para los cardinales, se pueden definir las operaciones aritméticas, suma, producto y exponenciación, de manera recursiva. A continuación se presentan algunas propiedades de estas operaciones que serán de utilidad en lo que sigue.

Para cada α y β tales que $\alpha \leq \beta$, se tiene que

a) $\aleph_\alpha + \aleph_\beta = \aleph_\beta + \aleph_\alpha = \aleph_\beta$.

b) Para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $n + \aleph_\alpha = \aleph_\alpha$.

c) $\aleph_\alpha \cdot \aleph_\beta = \aleph_\beta \cdot \aleph_\alpha = \aleph_\beta$.

d) Para todo $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ se tiene que $n \cdot \aleph_\alpha = \aleph_\alpha$.

En general, la aritmética de cardinales cumple las mismas propiedades de la aritmética de los números naturales.

Los números cardinales dan cuenta de la cantidad de elementos de un conjunto A. De hecho, se puede probar, bajo el axioma de elección, que para cada conjunto infinito A existe un único $\aleph_\alpha$ tal que el cardinal de A, $|A|$, es $\aleph_\alpha$ [**HJ**, pp. 130-132]. Es decir, bajo el axioma de elección, todos los posibles tamaños de infinito se encuentran en la colección de los alephs. Una pregunta que entonces interesa es: ¿Cuál es el cardinal de un conjunto A? o de otra manera, ¿cuál aleph es igual a la cantidad de elementos de un conjunto A?

Observación 1.11 *En lo que sigue, se usarán letras griegas como κ, λ, etc. para denotar cardinales.*

Es necesario presentar algunas definiciones que permitan comprender el concepto de cardinal inaccesible. Este tipo de cardinal será el primer ejemplo de cardinal *grande* que se abordará en el trabajo.

Definición 1.12 *Sea $\langle \alpha_\nu : \nu < \vartheta \rangle$ una sucesión transfinita de números ordinales de longitud ϑ. Se dice que la sucesión $\langle \alpha_\nu \rangle$ es* ***creciente*** *si $\alpha_\nu < \alpha_\mu$ siempre que $\nu < \mu < \vartheta$.*

Definición 1.13 *Si ϑ es un ordinal límite y si $\langle \alpha_\nu : \nu < \vartheta \rangle$ es una sucesión creciente de ordinales, se define $\alpha = \lim\limits_{\nu \to \vartheta} \alpha_\nu = \sup \{\alpha_\nu : \nu < \vartheta\}$. El ordinal α es el* ***límite*** *de la sucesión $\langle \alpha_\nu \rangle$.*

Definición 1.14 *Un cardinal infinito κ se llama* ***singular*** *si existe una sucesión transfinita creciente $\langle \alpha_\nu : \nu < \vartheta \rangle$ de ordinales $\alpha_\nu < \kappa$ y de longitud $\vartheta < \kappa$ tal que $\lim\limits_{\nu \to \vartheta} \alpha_\nu = \kappa$.*

Cardinales infinitos como $\aleph_{\omega+n}$, $\aleph_{\omega+\omega+n}$ con $n \in \mathbb{N}$ son ejemplos de cardinales singulares. En efecto, $\aleph_{\omega+n} = \lim\limits_{m<\omega} \aleph_{m+n}$ y $\aleph_{\omega+\omega+n} = \lim\limits_{m<\omega} \aleph_{m+\omega+n}$.

Definición 1.15 *Un cardinal infinito es* ***regular*** *si no es singular.*

Todo cardinal sucesor infinito es un cardinal regular [**HJ**, 162].

Definición 1.16 *Un cardinal infinito κ es un cardinal* ***límite fuerte*** *si $2^\lambda < \kappa$ para todo $\lambda < \kappa$.*

El primer cardinal infinito $\aleph_0$ es un cardinal límite fuerte. En efecto, para todo cardinal $n < \aleph_0$, se tiene que $2^n < \aleph_0$.

Definición 1.17 *Un cardinal es (**débilmente**) **inaccesible** si es no numerable, límite y regular.*

Definición 1.18 *Un cardinal κ es **fuertemente inaccesible** si es débilmente inaccesible y además límite fuerte.*

Intuitivamente, el adjetivo inaccesible se puede comprender en el sentido de que κ no puede ser obtenido como resultado de operaciones aritméticas aplicadas a cardinales menores que κ.

En el sistema axiomático ZFC no es posible probar la existencia de un cardinal inaccesible. Si κ es un cardinal inaccesible entonces V_κ es un modelo de ZFC. De esta forma, si ZFC demuestra la existencia de un cardinal inaccesible, ZFC demuestra su propia consistencia, lo cual contradice el Teorema de Incompletitud de Gödel. Esto indica que si se quiere trabajar con cardinales inaccesibles, se debe suponer su existencia. Para el lector poco familiarizado con estos temas, e interesado en comprender mejor esta parte, puede remitirse a [**E**], [**J**] y [**K**].

1.3. Filtros e Ideales

Los conceptos de filtro e ideal constituyen un insumo de gran importancia para establecer la relación entre el problema de la medida, los cardinales inaccesibles y la Hipótesis del Continuo. Es por esto que se dedicará esta sección a profundizar en algunas propiedades y resultados que tienen que ver con filtros e ideales.

Definición 1.19 *Sea S un conjunto no vacío. Una colección F de subconjuntos de S es un **filtro** sobre S si satisface las siguientes condiciones:*

a) $S \in F$ y $\varnothing \notin F$.

b) Si $X \in F$ y $Y \in F$, entonces $X \cap Y \in F$.

c) Si $X \in F$ y $X \subseteq Y \subseteq S$, entonces $Y \in F$.

Ejemplo 1.20 *Sea $S = \{a, b, c, d, e\}$. El conjunto*

$$F = \{\{a, b, c\}, \{a, b, c, d\}, \{a, b, c, e\}, \{a, b, c, d, e\}\}$$

es un filtro sobre S.

Definición 1.21 *Un filtro F sobre S es un filtro **principal** si existe un conjunto A en F tal que $F = \{X \subseteq S : A \subseteq X\}$.*

El filtro F que se muestra en el ejemplo anterior es principal. Basta con observar que $F = \{X \subseteq S : \{a, b, c\} \subseteq X\}$.

Definición 1.22 *Un filtro U sobre S es un **ultrafiltro** si para todo $Y \subseteq S$ se tiene que $Y \in U$ o $S - Y \in U$.*

El filtro

$$F = \{\{a, b, c\}, \{a, b, c, d\}, \{a, b, c, e\}, \{a, b, c, d, e\}\}$$

no es un ultrafiltro sobre $S = \{a, b, c, d, e\}$, pues existen subconjuntos de S para los cuales ni ellos ni sus complementos están en F. En particular, $\{a, e\} \notin F$ y $S - \{a, e\} = \{b, c, d\} \notin F$.

El conjunto $\{\{a, b\}, \{b\}\}$ es un ultrafiltro sobre $\{a, b\}$.

La existencia de ultrafiltros no principales sobre un conjunto S tiene relación con la existencia de una medida sobre S. Más adelante se verá que para asegurar la existencia de una medida se requieren ciertas exigencias conjuntistas no tan naturales.

Por ahora, se centra de nuevo la atención en las propiedades de filtros. En principio, se verá que la existencia de un ultrafiltro sobre un conjunto S, implica la existencia de un ultrafiltro sobre cualquier conjunto de la misma cardinalidad de S.

Lema 1.23 *Sean S y M conjuntos tales que $|S| = |M|$. Si hay un ultrafiltro no principal sobre S entonces hay un ultrafiltro no principal sobre M.*

Demostración. Sea U un ultrafiltro no principal sobre S. Sea g una biyección de S en M. La función $G : \wp(S) \to \wp(M)$ definida por $G(X) = g[X]$ [6] para todo

[6] $g[X] = \{g(x) : x \in X\}$

$X \in \wp(S)$ también es una biyección. Se probará que

$$G[U] = \{G(X) : X \in U\}$$

es un ultrafiltro no principal sobre M.

a) Como $S \in U$ entonces $M = G(S) \in G[U]$. Ahora, como $\varnothing \notin U$ entonces $G(\varnothing) \notin G(U)$. Pero $G(\varnothing) = \varnothing$ luego $\varnothing \notin G[U]$.

b) Sean $Y_1, Y_2 \in G[U]$. Entonces existen $X_1, X_2 \in U$ tales que $G(X_1) = Y_1$ y $G(X_2) = Y_2$. Luego,

$$Y_1 \cap Y_2 = G(X_1) \cap G(X_2) = G(X_1 \cap X_2)$$

de donde $Y_1 \cap Y_2 \in G[U]$.

c) Sean $Y_1 \in G[U]$ y $Y_1 \subseteq Y_2 \subseteq M$. Entonces existe $X_1 \in U$ tal que $G(X_1) = Y_1$. Luego, $G(X_1) \subseteq Y_2$ y así $X_1 \subseteq G^{-1}(Y_2)$ de donde $G^{-1}(Y_2) \in U$. Por lo tanto, $Y_2 = G(G^{-1}(Y_2)) \in G[U]$.

Por las propiedades a) - c), $G[U]$ es un filtro sobre M.

d) Sea $Y \in \wp(M)$. Si $Y \notin G[U]$ entonces existe $X \in \wp(S)$ tal que $G(X) = Y$ y

$X \notin U$ de donde, por ser U un ultrafiltro, $S - X \in U$. Luego

$$M - Y = G(S) - G(X) = G(S - X) \in G[U]$$

Esto muestra que $G[U]$ es un ultrafiltro.

e) Supóngase que $G[U]$ es principal, entonces $G[U] = \{Y \subseteq M : A \subseteq Y\}$ para algún $A \in G[U]$. Luego $U = \{X : G^{-1}(A) \subseteq X\}$ y por tanto U es un ultrafiltro principal sobre S. Contradicción. Así que $G[U]$ es no principal. ■

El concepto de ideal es el dual del concepto de filtro. Esto se verá en su definición y en las sucesivas propiedades.

Definición 1.24 *Sea S un conjunto no vacío. Una colección I de subconjuntos de S es un **ideal** sobre S si cumple las siguientes condiciones:*

a) $\varnothing \in I$ y $S \notin I$.

b) Si $X \in I$ y $Y \in I$, entonces $X \cup Y \in I$.

c) Si $Y \in I$ y $X \subseteq Y \subseteq S$, entonces $X \in I$.

Ejemplo 1.25 *Sea $S = \{a, b, c, d, e\}$. El conjunto $I = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$ es un ideal sobre S.*

Definición 1.26 *Un ideal I sobre S es **principal** si existe $A \in I$ tal que $I = \{X : X \subseteq A\}$.*

El ideal I definido en el Ejemplo 1.25, es un ideal principal sobre $S = \{a, b, c, d, e\}$. En efecto, $I = \{X \subseteq S : X \subseteq \{a, b\}\}$.

Definición 1.27 *Un ideal I sobre S es* ***primo*** *si para cada $X \subseteq S$ se cumple que $X \in I$ o $S - X \in I$.*

Existe una caracterización de los ideales no principales, dentro de los ideales primos, así:

Lema 1.28 *Sea I un ideal primo sobre S. Entonces I es no principal si y sólo si cada conjunto unitario de S pertenece a I.*

Demostración.

$\Longrightarrow$) Supóngase que I es no principal y que existe $a \in S$ tal que $\{a\} \notin I$, entonces $S - \{a\} \in I$. Ahora, como I es no principal, existe un $A \in I$ tal que $A \nsubseteq S - \{a\}$. Así que $a \in A$. Luego, $S = A \bigcup (S - \{a\}) \in I$. Contradicción.

$\Longleftarrow$) Supóngase que para cada $a \in S$ se tiene que $\{a\} \in I$. Si I es principal, es decir, si $I = \{X : X \subseteq A\}$ para algún $A \in I$, entonces se tiene que $\{a\} \subseteq A$, para cada $a \in S$; esto es, $A = S$. Contradicción. ■

De interés también para este trabajo son los filtros e ideales que conservan intersecciones y uniones, respectivamente, de cierta cantidad κ de conjuntos.

Definición 1.29 *Sea κ un cardinal no numerable.*

- *Un filtro F sobre S es $\kappa-$**completo** si para cada cardinal $\lambda < \kappa$ y cada $\{X_\alpha : \alpha < \lambda\} \subseteq F$, se tiene que $\bigcap_{\alpha<\lambda} X_\alpha \in F$.*
- *Un ideal I sobre S es $\kappa-$**completo** si para cada cardinal $\lambda < \kappa$ y cada $\{X_\alpha : \alpha < \lambda\} \subseteq I$, se tiene que $\bigcup_{\alpha<\lambda} X_\alpha \in I$.*
- *Un filtro (ideal) $\aleph_1-$completo se dice $\sigma-$**completo** o **completo numerable**.*

Definición 1.30 *Un ideal I sobre un conjunto S es $\sigma-$**saturado** si satisface las tres propiedades siguientes:*

i) *Para cada $x \in S$, $\{x\} \in I$.*

ii) *I es $\sigma-$completo.*

iii) *Si $S \subseteq \wp(S)$ es una colección no numerable y mutuamente disjunta entonces $S \cap I \neq \varnothing$.*

El lema siguiente muestra que la propiedad de $\sigma-$saturación se preserva bajo biyecciones.

Lema 1.31 *Sean S y M conjuntos equipotentes. Si hay un ideal $\sigma-$saturado sobre S entonces hay un ideal $\sigma-$saturado sobre M.*

Demostración. Sea $f : S \to M$ una biyección. Sea I un ideal $\sigma-$saturado sobre S. Se va a probar que $J = \{f[A] : A \in I\}$ es un ideal $\sigma-$saturado sobre M.

- $\varnothing = f[\varnothing] \in J$. $M = f[S] \notin J$.

- Sean $X, Y \in J$. Entonces existen $A, B \in I$ tales que $f[A] = X$ y $f[B] = Y$. Por ser f biyectiva se tiene que $X \cup Y = f[A \cup B]$. Como $A \cup B \in I$ se tiene que $X \cup Y \in J$.

- Sea $X \subseteq Y$ con $Y \in J$. Entonces $f^{-1}[X] \subseteq f^{-1}[Y] \subseteq S = f^{-1}[M]$. Como $f[f^{-1}[Y]] = Y \in J$ se tiene que $f^{-1}[Y] \in I$ y entonces también $f^{-1}[X] \in I$. Así que $X \in J$.

Hasta el momento, se ha demostrado que J es un ideal sobre M. En seguida se probará que J es $\sigma-$saturado.

- Sea $x \in M$. Como f es biyectiva, existe $y \in S$ tal que $f(y) = x$. Además, $f[\{y\}] = \{x\}$ y como $y \in S$ se tiene que $\{y\} \in I$, entonces $\{x\} \in J$.

- Sea $\{Y_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq J$. Entonces, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $X_n \in I$ tal que $f[X_n] = Y_n$. Por la biyectividad de f se tiene que $f\left[\bigcup\limits_{n=0}^{\infty} X_n\right] = \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} Y_n$ y como I es $\sigma-$completo, $\bigcup\limits_{n=0}^{\infty} X_n \in I$. En consecuencia, $\bigcup\limits_{n=0}^{\infty} Y_n \in J$.

- Sea $\mathbb{S} \subseteq \wp(M)$ una colección no numerable y mutuamente disjunta. Sea

$$\mathbb{T} = \left\{f^{-1}[Y] : Y \in \mathbb{S}\right\}$$

  Como f es biyectiva, $\mathbb{T}$ es una subcolección, no numerable y mutuamente disjunta, de $\wp(S)$. Por tanto, en virtud de que I es un ideal $\sigma-$saturado, existe $X \in I$ tal que $X \in \mathbb{T}$. Luego, $f[X] \in J$ y $f[X] \in \mathbb{S}$. ■

Al inicio de esta sección se mencionó la relación de dualidad entre filtro e ideal. Dado un filtro se puede definir un ideal asociado con el filtro y viceversa. Además, ciertas propiedades importantes se trasladan del uno al otro. Los siguientes dos lemas, muestran de modo explícito cómo hacer esto.

Lema 1.32 *Sea F un filtro sobre S. El conjunto $I = \{S - X : X \in F\}$ es un ideal sobre S.*

Demostración.

a) Como $S \in F$ y $\varnothing = S - S$, entonces $\varnothing \in I$. Por otra parte, si $S \in I$ entonces $S = S - X$ para algún $X \in F$. Pero esto implica que $X = \varnothing$, es decir, $\varnothing \in F$. Contradicción. Así que $S \notin I$.

b) Sean $Y_1, Y_2 \in I$. Por hipótesis se tiene que $Y_1 = S - X_1$, $Y_2 = S - X_2$ con $X_1, X_2 \in F$. Luego $Y_1 \cup Y_2 = (S - X_1) \cup (S - X_2) = S - (X_1 \cap X_2)$. Por ser F un filtro sobre S, se cumple que $X_1 \cap X_2 \in F$. Así que $Y_1 \cup Y_2 \in I$.

c) Sean $Y_2 \in I$ y $Y_1 \subseteq Y_2$. Se tiene que $Y_2 = S - X$ para algún $X \in F$. Luego $Y_1 \subseteq S - X$ de donde $X \subseteq S - Y_1$. Como F es un filtro $S - Y_1 \in F$, así que $Y_1 = S - (S - Y_1) \in I$. ■

Lema 1.33 *Sea I un ideal sobre S. El conjunto $F = \{S - X : X \in I\}$ es un filtro sobre S.*

Demostración.

a) Si $\varnothing \in F$ entonces $\varnothing = S - Y$ para algún $Y \in I$, luego $Y = S$ de donde $S \in I$, lo cual es contradictorio. Así que $\varnothing \notin F$. Por otro lado, como $\varnothing \in I$ y $S = S - \varnothing$ se tiene que $S \in F$.

b) Sean $Y_1, Y_2 \in F$. Entonces $Y_1 = S - X_1$ y $Y_2 = S - X_2$ con $X_1, X_2 \in I$, luego $Y_1 \cap Y_2 = (S - X_1) \cap (S - X_2) = S - (X_1 \cup X_2)$. Como $X_1 \cup X_2 \in I$, se tiene que $Y_1 \cap Y_2 \in F$.

c) Sean $Y_1 \subseteq Y_2$ con $Y_1 \in F$. Se tiene que $Y_1 = S - X$ para algún $X \in I$. Luego, $S - X \subseteq Y_2$ y entonces $S - Y_2 \subseteq X$. Así que $S - Y_2 \in I$, por lo que $Y_2 = S - (S - Y_2) \in F$. ■

Definición 1.34 *El filtro F definido en el lema anterior es el* ***filtro dual*** *de I sobre S. De igual forma, el ideal I sobre S definido en el Lema 1.32 es el* ***ideal dual*** *de F sobre S.*

Observación 1.35 *Decir que I es el dual de F es equivalente a decir que F es dual de I.*

Estas nociones duales son útiles en cuanto permiten demostrar propiedades de filtros usando propiedades de ideales y viceversa. En las demostraciones de algunos de los lemas que siguen se recurre al ideal dual o al filtro dual para llevar a cabo su desarrollo.

Lema 1.36 *Sea I el ideal dual del filtro F sobre un conjunto S. Entonces I es un ideal principal sobre S si, y sólo si, F es un filtro principal sobre S.*

Demostración.

$\Longrightarrow$) Supóngase que el ideal I es principal sobre S. Entonces $I = \{X : X \subseteq X_1\}$ para algún $X_1 \in I$. Luego $S - X_1 \in F$. Se probará que $F = \{Y \subseteq S : S - X_1 \subseteq Y\}$. En efecto, si $Y \subseteq S$ y $S - X_1 \subseteq Y$ se tiene, por ser F filtro, que $Y \in F$. Además, si $Y \in F$, $Y = S - X$ para algún $X \in I$. Luego, $X \subseteq X_1$ y entonces $S - X_1 \subseteq Y$.

$\Longleftarrow$) La demostración es análoga a la anterior. ∎

Lema 1.37 *Un filtro sobre S es un ultrafiltro si y sólo si su ideal dual es primo.*

Demostración. Sea U un filtro sobre S y sea I su ideal dual.

$\Longrightarrow$) Supóngase que U es un ultrafiltro. Sea $Y \subseteq S$ entonces $Y \in U$ o $S - Y \in U$. Si $Y \in U$ se tiene que $S - Y \in I$ y si $S - Y \in U$ entonces $Y = S - (S - Y) \in I$. Luego, I es primo.

$\Longleftarrow$) La demostración es análoga a la anterior. ∎

Lema 1.38 *Sea U un ultrafiltro sobre S. Se tiene que U es principal si y sólo si algún subconjunto unitario de S pertenece a U.*

Demostración.

$\Longrightarrow$) Supóngase que U es principal, es decir, que $U = \{X \subseteq S : A \subseteq X\}$, para algún A en U. Además, supóngase que para cada $a \in S$ se tiene que $\{a\} \notin U$. Luego para cada $a \in S$ se tiene que $S - \{a\} \in U$ de donde $A \subseteq S - \{a\}$, para cada $a \in S$, esto es, $A = \varnothing$. Contradicción.

$\Longleftarrow$) Supóngase que existe $a \in S$ tal que $\{a\} \in U$. Entonces para cada $A \in U$ se tiene que $A \cap \{a\} \neq \varnothing$ de donde $\{a\} \subseteq A$ para cada $A \in U$. Además si $X \subseteq S$ y $\{a\} \subseteq X$ entonces, por ser U un filtro, $X \in U$. Así que $U = \{X \subseteq S : \{a\} \subseteq X\}$, esto es U es principal. ■

Lema 1.39 *Si I es un ideal primo sobre S, entonces su filtro dual F es $\wp(S) - I$.*

Demostración.

i) Sea $Y \in F$. Entonces $Y = S - X$ para algún $X \in I$. Esto implica que $Y \notin I$. De lo contrario, se tendría que $X \cup Y \in I$, esto es, $S \in I$; lo cual es imposible. De modo que $Y \in \wp(S) - I$.

ii) Sea $Y \in \wp(S) - I$, entonces $Y \in \wp(S)$ y $Y \notin I$; por ser I un ideal primo, $S - Y \in I$, por lo cual $Y \in F$. ■

Por último, se verá que la condición de $\kappa-$completitud para un filtro (ideal) también se traslada a su ideal (filtro) dual.

Lema 1.40 *Un filtro es $\kappa-$completo si y sólo si su ideal dual es $\kappa-$completo.*

Demostración. Sea F un filtro sobre S y sea I su ideal dual.

$\Longrightarrow$) Supóngase que F es $\kappa-$completo. Sea $\{X_\alpha : \alpha < \lambda\}$ una colección de elementos de I donde λ es un cardinal tal que $\lambda < \kappa$. Entonces se tiene que para cada $\alpha < \lambda$, $X_\alpha = S - Y_\alpha$ para algún $Y_\alpha \in F$. Por ser F un filtro $\kappa-$completo se tiene que $\bigcap_{\alpha<\lambda} Y_\alpha \in F$, luego

$$\bigcup_{\alpha<\lambda} X_\alpha = \bigcup_{\alpha<\lambda} (S - Y_\alpha) = S - \bigcap_{\alpha<\lambda} Y_\alpha \in I$$

$\Longleftarrow$) Supóngase que I es $\kappa-$completo. Sea $\{Y_\alpha : \alpha < \lambda\} \subseteq F$ donde, de nuevo, λ es un cardinal tal que $\lambda < \kappa$. Para cada $\alpha < \lambda$, $Y_\alpha = S - X_\alpha$ para algún $X_\alpha \in I$ y como $\bigcup_{\alpha<\lambda} X_\alpha \in I$,

$$\bigcap_{\alpha<\lambda} Y_\alpha = \bigcap_{\alpha<\lambda} (S - X_\alpha) = S - \bigcup_{\alpha<\lambda} X_\alpha \in F$$

■

Lema 1.41 *Sean S y M conjuntos equipotentes. Si hay un ultrafiltro no principal $\kappa-$completo sobre S entonces hay un ultrafiltro no principal $\kappa-$completo sobre M.*

Demostración. Sea U un ultrafiltro no principal $\kappa-$completo sobre S. Sea g una biyección de S en M. Sea $G : \wp(S) \to \wp(M)$ tal que $G(X) = g[X]$ para cada $X \in \wp(S)$. Por el Lema 1.23 se tiene que el ultrafiltro $V = G[U]$ es no principal sobre M. Resta entonces probar la condición de $\kappa-$completud para V. Sean λ un cardinal menor que κ y $\mathbb{S} = \{Y_\alpha : \alpha < \lambda\}$ una colección de elementos de V. Se tiene que para cada $Y_\alpha \in \mathbb{S}$ existe un único $X_\alpha \in U$ tal que $G(X_\alpha) = Y_\alpha$. Luego, como U es $\kappa-$completo, $\bigcap\limits_{\alpha<\lambda} X_\alpha \in U$ y por tanto, $\bigcap\limits_{\alpha<\lambda} Y_\alpha = \bigcap\limits_{\alpha<\lambda} G(X_\alpha) = G\left(\bigcap\limits_{\alpha<\lambda} X_\alpha\right) \in V$.

■

1.4. Nociones de Medida

La estructura algebraica sobre la cual se definen las medidas es la llamada $\sigma-$**álgebra.**

Definición 1.42 *Sea S un conjunto. Una colección $\mathfrak{S} \subseteq \wp(S)$ es una $\sigma-$**álgebra** de subconjuntos de S si*

a) $S \in \mathfrak{S}$.

b) Si $X \in \mathfrak{S}$ entonces $S - X \in \mathfrak{S}$.

c) Si $\{X_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathfrak{S}$ entonces $\bigcup\limits_{n=0}^{\infty} X_n \in \mathfrak{S}$.

Observación 1.43 *Nótese que de la definición de $\sigma-$álgebra, se pueden probar las siguientes propiedades para toda $\sigma-$álgebra $\mathfrak{S}$:*

i) $\varnothing \in \mathfrak{S}$.

ii) Para toda colección $\{X_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathfrak{S}$, $\bigcap\limits_{n=0}^{\infty} X_n \in \mathfrak{S}$.

En principio se define el concepto de medida sobre un conjunto cualquiera.

Definición 1.44 *Sean S un conjunto y $\mathfrak{S}$ una $\sigma-$álgebra de subconjuntos de S. Una **medida $\sigma-$aditiva** sobre $\mathfrak{S}$ es una función $\mu : \mathfrak{S} \longrightarrow [0, +\infty]$ que satisface las siguientes condiciones:*

i) $\mu(\emptyset) = 0$.

ii) *Si $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una colección de elementos de S, mutuamente disjuntos, entonces*

$$\mu\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} X_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu(X_n)\,. \text{ (Propiedad de } \sigma - \text{aditividad)}$$

Observación 1.45 *La siguiente propiedad se deduce de la anterior definición: Para cada $X, Y \in \mathfrak{S}$, si $X \subseteq Y$ entonces $\mu(X) \leq \mu(Y)$.*

Una *medida sobre S* es una medida sobre la $\sigma-$álgebra $\wp(S)$.

A continuación se presenta la definición de medida de Lebesgue. Esta presentación se basa fundamentalmente en [**S**, pp. 6-8]. Sin embargo, el lector también puede consultar [**R**], [**N**] y [**U**].

La medida de Lebesgue se define sobre una $\sigma-$álgebra de subconjuntos de $\mathbb{R}$. En principio, los conjuntos más simples para los que se desea que exista una medida son los intervalos. También es deseable que la medida asignada a ellos, sea la más natural, su longitud. En este sentido, la medida de Lebesgue μ_L será tal que si A es un intervalo, $\mu_L(A)$ es su longitud.

Por otra parte, si A es un abierto, entonces $A = \bigcup_{n=0}^{\infty} I_n$ donde $\{I_n\}$ es la familia de los intervalos componentes[7] de A [**A**, p. 62]. Se define $\mu_L(A) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu_L(I_n)$. Además, si A es un conjunto cerrado, entonces $\mu_L(A) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} (1 - \mu_L((n, n+1) - A))$ Finalmente, si A es un subconjunto arbitrario de $\mathbb{R}$ se definen las siguientes medidas sobre A.

Definición 1.46 *La **medida externa** μ^* de A es*

$$\mu^*(A) = \text{ínf}\{\mu_L(U) : U \text{ es abierto y } A \subseteq U\}$$

Definición 1.47 *La **medida interna** μ_* de A es*

$$\mu_*(A) = \sup\{\mu_L(F) : F \text{ es cerrado y } F \subseteq A\}$$

Definición 1.48 *Un subconjunto A de $\mathbb{R}$ es **Lebesgue medible** (o simplemente **medible**) si $\mu^*(A) = \mu_*(A)$. En este caso se escribe $\mu_L(A) = \mu^*(A) = \mu_*(A)$.*

Observación 1.49 *Un subconjunto propio no vacío de $\mathbb{R}$ no puede ser a la vez abierto y cerrado.*

[7] Sea S un conjunto abierto de $\mathbb{R}$. Un intervalo abierto I es un **intervalo componente** de S si $I \subseteq S$ y no existe otro intervalo abierto $J \neq I$ tal que $I \subseteq J \subseteq S$.

Se puede demostrar [**R**, pp. 122-123] que la medida de Lebesgue, μ_L, sobre la $\sigma-$álgebra $\mathfrak{S}$ de los conjuntos medibles según Lebesgue, satisface:

i) $[a,b] \in \mathfrak{S}$ y $\mu_L [a,b] = b - a$, para todo $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

ii) Si $A \in \mathfrak{S}$ entonces $A + a \in \mathfrak{S}$ y $\mu_L (A + a) = \mu (A)$, para todo $a \in \mathbb{R}$.

La medida de Lebesgue resulta ser óptima en $\mathbb{R}$ en el sentido de que la medida de cada intervalo es exactamente su longitud y, además, la medida de un conjunto se preserva bajo traslaciones. Sin embargo, se puede demostrar en ZFC que hay subconjuntos de números reales para los cuales no es posible asignar una medida en el sentido de la Definición 1.48. Es decir, hay subconjuntos de números reales que no son Lebesgue medibles. En 1905 Giuseppe Vitali construyó un conjunto no medible; en esta contrucción, Vitali, hizo un uso explícito del axioma de elección y de las dos propiedades mencionadas de la medida de Lebesgue [**S**, p. 7].

Definición 1.50 *Sea $S \neq \varnothing$. Una **medida probabilística** $\sigma-$**aditiva no trivial** sobre S es una función $\mu : \wp (S) \longrightarrow [0,1]$ tal que*

a) $\mu (\varnothing) = 0$, $\mu (S) = 1$.

b) Para cada $a \in S$ se tiene que $\mu (\{a\}) = 0$ (Propiedad de no trivialidad).

c) Si $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una colección de subconjuntos de S mutuamente disjuntos, entonces

$$\mu\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} X_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu\left(X_n\right) \quad \text{(Propiedad de } \sigma\text{-aditividad)}$$

Observación 1.51 *En adelante, cuando se haga referencia a una medida sobre un conjunto S se entenderá, si no se dice otra cosa, que es una medida probabilística $\sigma-$aditiva no trivial sobre S.*

El lema que sigue muestra que la existencia de una medida se preserva para conjuntos de la misma cardinalidad. Así que para estudiar la existencia de una medida sobre $\mathbb{R}$, basta hacerlo sobre $[0,1]$. En este sentido, la pregunta ahora es: ¿Existe una medida sobre $[0,1]$? O en forma más general: ¿Existe una medida sobre algún conjunto S? Más adelante se abordará este problema con herramientas conjuntistas.

Lema 1.52 *Si hay una medida sobre un conjunto S, y M es un conjunto tal que $|S| = |M|$, entonces hay una medida sobre M.*

Demostración. Supóngase que hay una medida μ sobre S. Como $|M| = |S|$, entonces existe una función $g : M \to S$ biyectiva. Luego $G : \wp(M) \to \wp(S)$ definida por $G(X) = g[X]$ es biyectiva. Se probará que $\nu = \mu \circ G : \wp(M) \to [0,1]$ es una medida sobre M.

a. $\nu(\varnothing) = (\mu \circ G)(\varnothing) = \mu(G(\varnothing)) = \mu(g[\varnothing]) = \mu(\varnothing) = 0.$

$\nu(M) = (\mu \circ G)(M) = \mu(G(M)) = \mu(g[M]) = \mu(S) = 1.$

b. Sea $a \in M$, obsérvese que $\nu(\{a\}) = (\mu \circ G)(\{a\}) = \mu(G(\{a\})) = \mu(g[\{a\}])$. Pero, $g[\{a\}] = \{b\}$ para algún $b \in S$, y así, $\mu(g[\{a\}]) = \mu(\{b\}) = 0$. Por lo tanto $\nu(\{a\}) = 0$.

c. Si $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una colección de subconjuntos mutuamente disjuntos de M entonces

$$\nu\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} X_n\right) = (\mu \circ G)\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} X_n\right) = \mu\left(G\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} X_n\right)\right)$$

Luego, por definición de G se tiene que

$$\mu\left(G\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} X_n\right)\right) = \mu\left(g\left[\bigcup_{n=0}^{\infty} X_n\right]\right)$$

Pero, como g es biyectiva,

$$\mu\left(g\left[\bigcup_{n=0}^{\infty} X_n\right]\right) = \mu\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} g[X_n]\right) = \mu\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} G(X_n)\right)$$

Además, puesto que la colección $\{G(X_n) : n \in \mathbb{N}\}$ es mutuamente disjunta,

$$\mu\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} G(X_n)\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu(G(X_n)) = \sum_{n=0}^{\infty} \nu(X_n)$$

Por lo tanto, $\nu\left(\bigcup\limits_{n=0}^{\infty}X_n\right)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\nu\left(X_n\right)$. ■

El siguiente lema muestra que la existencia de una medida sobre un conjunto S implica la existencia de un ideal $\sigma-$saturado sobre S. En particular, la colección de todos los conjuntos de medida cero forman un ideal $\sigma-$saturado.

Lema 1.53 *Sea μ una medida sobre S. Entonces $I=\{X\subseteq S:\mu\left(X\right)=0\}$ es un ideal $\sigma-$saturado sobre S.*

Demostración.

En primer lugar, se verá que I es un ideal no principal sobre S.

i) Por definición de medida, $\mu\left(\varnothing\right)=0$ y $\mu\left(S\right)=1$. Luego $\varnothing\in I$ y $S\notin I$.

ii) Sean $X\in I$ y $Y\in I$. Se tiene que $\mu\left(Y-X\right)\leq\mu\left(Y\right)$, pues $Y-X\subseteq Y$. Luego $\mu\left(Y-X\right)=0$. Además, $X\cup Y=X\cup\left(Y-X\right)$ y entonces $\mu\left(X\cup Y\right)=\mu\left(X\cup\left(Y-X\right)\right)=\mu\left(X\right)+\mu\left(Y-X\right)=0$, esto es $X\cup Y\in I$.

iii) Si $Y\in I$ y $X\subseteq Y$ entonces por la propiedad de la monotonía de μ se tiene que $\mu\left(X\right)\leq\mu\left(Y\right)$. Pero por hipótesis $\mu\left(Y\right)=0$. Luego, $\mu\left(X\right)=0$. Así $X\in I$.

La propiedad de $\sigma-$saturación de I resulta de las siguientes propiedades:

i) Por la no trivialidad de μ, cada $a\in S$ satisface que $\{a\}\in I$.

ii) Sea $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ una colección de elementos de I. Sean

$$Y_0 = X_0,\ Y_1 = X_1 - X_0,\ Y_2 = X_2 - (X_0 \cup X_1)\,,\ \ \ldots,\ Y_n = X_n - \bigcup_{k=0}^{n-1} X_k,\ \ \ldots$$

Cada Y_n está en I, la colección $\{Y_n : n \in \mathbb{N}\}$ es mutuamente disjunta y

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} X_n = \bigcup_{n=0}^{\infty} Y_n$$

Luego, $\mu\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} X_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} Y_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu(Y_n) = 0$; así, $\bigcup_{n=0}^{\infty} X_n \in I$.

iii) Sea $\mathbb{S} \subseteq \wp(S)$ una colección no numerable, mutuamente disjunta. Supóngase, por contradicción, que para todo $X \in \mathbb{S}$ se tiene que $X \notin I$. Luego, si $X \in \mathbb{S}$, $\mu(X) > 0$. Para cada $n \in \mathbb{N} - \{0\}$, sea

$$\mathbb{S}_n = \left\{ X \in \mathbb{S} : \mu(X) \geq \frac{1}{n} \right\}$$

Se probará que cada $\mathbb{S}_n$ es finito y que $\mathbb{S} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbb{S}_n$, con lo cual $\mathbb{S}$ será a lo más numerable, en contradicción con lo supuesto. En efecto,

- Si algún $\mathbb{S}_k$ es infinito entonces hay un subconjunto numerable $\{X_{kn} : n \in \mathbb{N}\}$ de $\mathbb{S}_k$. Como $\mathbb{S}_k \subseteq \mathbb{S}$ y $\mathbb{S}$ es una colección mutuamente disjunta de subconjuntos de S entonces $\mathbb{S}_k$ también lo es. En consecuencia, por la $\sigma-$aditividad de μ y por la propiedad que caracteriza los elementos de $\mathbb{S}_k$,

$$\mu\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} X_{kn}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu\left(X_{kn}\right) \geq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty$$

Pero $\bigcup_{n=0}^{\infty} X_{kn} \subseteq S$ y por tanto $\mu\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} X_n\right) \leq \mu(S) = 1$. Contradicción.

- La inclusión $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbb{S}_n \subseteq \mathbb{S}$ es inmediata ya que, por definición, cada $\mathbb{S}_n$ es un subconjunto de $\mathbb{S}$. Por otra parte, si $X \in \mathbb{S}$, entonces, se tiene que $X \notin I$ de donde $\mu(X) > 0$. Luego, existe $j \in \mathbb{N} - \{0\}$ tal que $\mu(X) \geq \dfrac{1}{j}$ de donde $X \in \mathbb{S}_j \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbb{S}_n$ y, por tanto, $\mathbb{S} \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbb{S}_n$. ■

Se requiere ahora definir un tipo de medida especial y estudiar algunas de sus propiedades que son necesarias para establecer resultados posteriores.

Definición 1.54 *Sea μ una medida sobre S. Un conjunto $A \subseteq S$ es un* ***átomo*** *si $\mu(A) > 0$ y si para cada $X \subseteq A$, se tiene que, $\mu(X) = 0$ o $\mu(X) = \mu(A)$.*

Definición 1.55 *Una medida μ sobre S es* ***desatomizada*** *si no existen átomos en S.*

El siguiente resultado muestra que siempre que exista una medida desatomizada sobre un conjunto S entonces cada subconjunto de S con medida positiva contiene subconjuntos con medida positiva tan pequeña como se requiera.

Lema 1.56 *Sea μ una medida desatomizada sobre S. Entonces*

a) *Para cada $\varepsilon > 0$ y cada $X \subseteq S$ con $\mu(X) > 0$ existe un $Y \subseteq X$ tal que $0 < \mu(Y) \leq \varepsilon$.*

b) *Para cada $X \subseteq S$ existe un $Y \subseteq X$ tal que $\mu(Y) = \frac{1}{2}\mu(X)$.*

Demostración.

a) Sean $\varepsilon > 0$ y $X \subseteq S$ con $\mu(X) > 0$. Primero se probará por inducción matemática que para todo $n \in \mathbb{N}$ existe un $Y \subseteq X$ tal que

$$0 < \mu(Y) \leq \frac{\mu(X)}{2^n}$$

i) Para $n = 0$, basta con tomar $Y = X$.

ii) Para $n = 1$. Por hipótesis se tiene que μ es desatomizada y, debido a que $\mu(X) > 0$, entonces existe un $X_1 \subseteq X$ tal que $\mu(X_1) > 0$ y $\mu(X_1) \neq \mu(X)$. Es claro que $X = X_1 \cup (X - X_1)$, luego $\mu(X) = \mu(X_1) + \mu(X - X_1)$. Se escoge $Y_1 = X_1$ o $Y_1 = X - X_1$, según sea el caso tal que $0 < \mu(Y_1) \leq \frac{1}{2}\mu(X)$. Por lo tanto existe Y_1 tal que $Y_1 \subseteq X$ y $\mu(Y_1) \leq \frac{1}{2^1}\mu(X)$.

iii) Caso inductivo. Supóngase que para $n = k$ existe $Y_k \subset X$ tal que $0 < \mu(Y_k) \leq \frac{\mu(X)}{2^k}$. Luego, como μ es desatomizada y $\mu(Y_k) > 0$, existe $X_{k+1} \subseteq Y_k$ tal que $\mu(X_{k+1}) > 0$ y $\mu(X_{k+1}) \neq \mu(Y_k)$. Como $Y_k = X_{k+1} \cup (Y_k - X_{k+1})$ entonces

$\mu(Y_k) = \mu(X_{k+1}) + \mu(Y_k - X_{k+1})$. Tomando apropiadamente $Y_{k+1} = X_{k+1}$ o $Y_{k+1} = Y_k - X_{k+1}$ se tiene que $0 < \mu(Y_{k+1}) \leq \dfrac{\mu(Y_k)}{2} \leq \dfrac{\mu(X)}{2^{k+1}}$. Ahora, por la transitividad, tanto de la desigualdad como de la inclusión, se concluye que $Y_{k+1} \subseteq X$ y $0 < \mu(Y_{k+1}) \leq \dfrac{1}{2^{k+1}}\mu(X)$.

Esto concluye la prueba, por inducción matemática, de que para todo $n \in \mathbb{N}$ existe un conjunto $Y_n \subseteq X$ tal que $0 < \mu(Y_n) \leq \dfrac{\mu(X)}{2^n}$.

Ahora bien, como $\mu(X) > 0$, entonces existe $\hat{n} \in \mathbb{N}$ tal que $\dfrac{\mu(X)}{\hat{n}} \leq \varepsilon$. Por tanto, $0 < \mu(Y_{\hat{n}}) \leq \dfrac{\mu(X)}{2^{\hat{n}}} \leq \dfrac{\mu(X)}{\hat{n}} \leq \varepsilon$ y, haciendo $Y = Y_{\hat{n}}$, se obtiene $0 < \mu(Y) \leq \varepsilon$. Así queda demostrado a).

b) Sea $X \subseteq S$. Se tienen dos casos para X.

i) Si $\mu(X) = 0$, entonces basta tomar $Y = X$.

ii) Si $\mu(X) = m > 0$. Supóngase que no existe $Y \subseteq X$ tal que $\mu(Y) = \dfrac{m}{2}$. Bajo este supuesto se demostrará, usando Recursión Transfinita, que es posible construir una colección $\mathbb{S}$ no numerable, mutuamente disjunta, de subconjuntos de X de medida positiva. Esto producirá una contradicción puesto que, por la propiedad de $\sigma-$saturación del ideal $I = \{X \subseteq S : \mu(X) = 0\}$, se tendrá que $\mathbb{S} \cap I \neq \varnothing$ lo cual no puede ser porque para cada $Y_\alpha \in \mathbb{S}$ se tiene que $Y_\alpha > 0$. De esta forma quedará probado b).

Sea $\varphi : (\wp(X))^{\leq\omega_1} \rightarrow \wp(X)$, donde $(\wp(X))^{\leq\omega_1}$ es el conjunto de todas las sucesiones, de elementos de $\wp(X)$, de longitud menor o igual que ω_1, definida como sigue:

- ★ Si $\langle Z_\nu : \nu < \beta \rangle \in (\wp(X))^{\leq \omega_1}$ es disjunta y satisface que $\mu\left(\bigcup_{\nu<\beta} Z_\nu\right) < \frac{m}{2}$, entonces

$$X = \left(\bigcup_{\nu<\beta} Z_\nu\right) \bigcup \left(X - \bigcup_{\nu<\beta} Z_\nu\right)$$

Luego,

$$\mu(X) = \mu\left(\bigcup_{\nu<\beta} Z_\nu\right) + \mu\left(X - \bigcup_{\nu<\beta} Z_\nu\right)$$

y por lo tanto

$$\mu\left(X - \bigcup_{\nu<\beta} Z_\nu\right) = m - \mu\left(\bigcup_{\nu<\beta} Z_\nu\right) > 0$$

Así que, por a), existe $Z_\beta \subseteq X - \bigcup_{\nu<\beta} Z_\nu$ tal que $0 < \mu(Z_\beta) \leq \frac{m}{2} - \mu\left(\bigcup_{\nu<\beta} Z_\nu\right)$, de donde $0 < \mu(Z_\beta) < \frac{m}{2}$.

En este caso, se define $\varphi(\langle Z_\nu : \nu < \beta \rangle) = Z_\beta$.

- ★ En otro caso, se define $\varphi(\langle Z_\nu : \nu < \beta \rangle) = \varnothing$.

De otro lado, por a), existe $W \subseteq X$ tal que $0 < \mu(W) \leq \frac{m}{3}$, de donde $0 < \mu(W) < \frac{m}{2}$.

Luego, por el Teorema de Recursión Transfinita, existe una sucesión $\langle Y_\eta : \eta < \omega_1 \rangle$, de elementos de $\wp(X)$, tal que:

- $Y_0 = W$.
- Para cada $\eta < \omega_1$, $Y_\eta = \varphi(\langle Y_\xi : \xi < \eta \rangle)$.

Ahora bien, para la colección $\mathbb{S} = \{Y_\eta : \eta < \omega_1\}$ es fácil probar, por Inducción Transfinita, las siguientes afirmaciones:

- Para cada $\eta < \omega_1$, se tiene que $\mu(Y_\eta) > 0$.
- Para cada $\eta < \omega_1$, se tiene que $Y_\eta \subseteq X - \bigcup_{\xi<\eta} Y_\xi$.

De lo cual se deduce que $\mathbb{S}$ es una colección no numerable y mutuamente disjunta. $\blacksquare$

Observación 1.57 *Una* ***extensión a*** $\mathbb{R}$ ***de la medida de Lebesgue*** *es una medida* $\mu : \wp(\mathbb{R}) \longrightarrow [0, +\infty]$ *tal que* $\mu(X) = \mu_L(X)$, *para todo subconjunto* X *de* $\mathbb{R}$ *medible según Lebesgue.*

El siguiente lema relaciona una extensión a $\mathbb{R}$ de la medida de Lebesgue con las medidas desatomizadas.

Lema 1.58 *Si* μ *es una extensión a* $\mathbb{R}$ *de la medida de Lebesgue entonces* μ *es desatomizada.*

Demostración. Supóngase que μ no es desatomizada. Entonces existe un átomo A de $\mathbb{R}$. Luego, $\mu(A) > 0$ y existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{k} < \mu(A)$. Ahora bien, si se toma

$\varepsilon = \dfrac{1}{k}$ se tiene que la colección $\{(n + t\varepsilon, n + (t+1)\,\varepsilon] : n \in \mathbb{Z} \wedge 0 \leq t \leq k-1\}$ es una partición numerable de $\mathbb{R}$, además $\mu\left((n + t\varepsilon, n + (t+1)\,\varepsilon]\right) = \varepsilon < \mu(A)$. Luego

$$A = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \left(\bigcup_{t=0}^{k-1} (n + t\varepsilon, n + (t+1)\,\varepsilon] \cap A \right)$$

de donde

$$\begin{aligned} \mu(A) &= \mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \left(\bigcup_{t=0}^{k-1} (n + t\varepsilon, n + (t+1)\,\varepsilon] \cap A \right) \right) \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left(\sum_{t=0}^{k-1} \mu\left((n + t\varepsilon, n + (t+1)\,\varepsilon] \cap A\right) \right) \end{aligned}$$

Pero

$$\begin{aligned} \mu\left((n + t\varepsilon, n + (t+1)\,\varepsilon] \cap A\right) &\leq \mu\left((n + t\varepsilon, n + (t+1)\,\varepsilon]\right) \\ &= \varepsilon < \mu(A) \end{aligned}$$

y como A es un átomo, $\mu\left((n + t\varepsilon, n + (t+1)\,\varepsilon] \cap A\right) = 0$ para $t = 0, 1, \cdots, k-1$ y todo $n \in \mathbb{Z}$, por lo tanto $\mu(A) = 0$. Contradicción. Así que μ debe ser desatomizada.

■

Corolario 1.59 *Si existe una extensión a $\mathbb{R}$ de la medida de Lebesgue entonces su restricción a $\wp([0,1])$ es una medida probabilística $\sigma-$aditiva no trivial desatomizada* *sobre* $[0, 1]$.

Recíprocamente es posible probar, aunque ya no es tan fácil, que si existe una medida $\sigma-$aditiva probabílistica no trivial y desatomizada sobre $[0, 1]$ entonces existe una extensión a $\mathbb{R}$ de la medida de Lebesgue sin la propiedad de invariancia bajo traslación a todo el continuo. Esta prueba se llevará a cabo hacia el final del trabajo.

A lo largo de este capítulo se han establecido los resultados suficientes para abordar el problema de la medida desde el punto de vista que interesa en este trabajo. En lo que sigue se explicitará la relación que hay entre los Cardinales Inaccesibles, la Hipótesis del Continuo y el Problema de la Medida.

Capítulo 2

Una Aproximación Conjuntista al Problema de la Medida

En el Capítulo 1 se mencionó que a partir del sistema axiomático ZFC no es posible probar la existencia de un cardinal inaccesible. También se dijo que, bajo ZFC, tampoco es posible extender a $\mathbb{R}$ la medida de Lebesgue. Sin embargo, si se asume que existe una extensión a $\mathbb{R}$ de la medida de Lebesgue, esto implica, como ya se mencionó en el Capítulo 1, la existencia de una medida $\sigma-$aditiva probabilística no trivial y desatomizada sobre $[0,1]$. Luego, por el Lema 1.53 existe un ideal $\sigma-$saturado sobre $[0,1]$. En lo que sigue se considerará, entonces, el *mínimo* cardinal de aquellos conjuntos sobre los cuales hay un ideal $\sigma-$saturado.

Definición 2.1 *Sea κ el menor cardinal tal que $\kappa = |S|$ para algún conjunto S*

sobre el cual hay un ideal $\sigma-$saturado.

En las páginas siguientes, se va a probar que κ es un cardinal inaccesible. Nótese que por el Lema 1.31 existe un ideal I, $\sigma-$saturado, sobre κ. A continuación se enunciarán y demostrarán algunas propiedades de dicho ideal.

Lema 2.2 *I es $\kappa-$completo.*

Demostración. Supóngase que para algún cardinal $\lambda < \kappa$ existe una colección $\{X_\eta : \eta < \lambda\} \subseteq I$ tal que $\bigcup_{\eta<\lambda} X_\eta \notin I$. Supóngase que la aplicación $\eta \mapsto X_\eta$ es inyectiva. Basta suponer que la colección $\{X_\eta\}_{\eta<\lambda}$ es mutuamente disjunta pues, si no lo es, se considera la colección $\{X'_\eta\}_{\eta<\lambda}$ definida por $X'_\eta = X_\eta - \bigcup\{X_\nu : \nu < \eta\}$ para cada $\eta < \lambda$. Es claro que $\{X'_\eta\}_{\eta<\lambda}$ es mutuamente disjunta, cada $X'_\eta \in I$, y $\bigcup_{\eta<\lambda} X_\eta = \bigcup_{\eta<\lambda} X'_\eta$. Sea

$$J = \left\{ Y \subseteq \lambda : \bigcup_{\eta \in Y} X_\eta \in I \right\}$$

A continuación, se va a probar que J es un ideal $\sigma-$saturado sobre λ. Nótese que esto contradirá la definición de κ pues λ será un conjunto con cardinalidad menor que κ y que posee un ideal $\sigma-$saturado.

a) Para probar que J es un ideal sobre λ, obsérvese, en primer lugar, que $J \subseteq \wp(\lambda)$. Además, $\varnothing \subseteq \lambda$ y $\bigcup_{\eta\in\varnothing} X_\eta = \varnothing \in I$ por ser I un ideal sobre κ. Luego, $\varnothing \in J$. Por otra parte, como se ha supuesto que $\bigcup_{\eta<\lambda} X_\eta \notin I$ entonces $\lambda \notin J$. En segundo lugar, sean $X, Y \in J$. Por hipótesis $X \subseteq \lambda$ y $Y \subseteq \lambda$, luego $X \cup Y \subseteq \lambda$. Ahora, $\bigcup_{\eta \in X \cup Y} X_\eta = \left(\bigcup_{\eta \in X} X_\eta\right) \bigcup \left(\bigcup_{\eta \in Y} X_\eta\right)$. Pero, dado que $X, Y \in J$, entonces $\bigcup_{\eta \in X} X_\eta \in I$ y $\bigcup_{\eta \in Y} X_\eta \in I$, con lo cual $\bigcup_{\eta \in X \cup Y} X_\eta \in I$. Luego, $X \cup Y \in J$. En tercer lugar, sean $Y \in J$ y $X \subseteq Y$. Por transitividad de la inclusión se tiene que $X \subseteq \lambda$. Ahora bien, $\bigcup_{\eta \in Y} X_\eta \in I$ porque $Y \in J$. Además, como $X \subseteq Y$ entonces $\bigcup_{\eta \in X} X_\eta \subseteq \bigcup_{\eta \in Y} X_\eta$. Luego, $\bigcup_{\eta \in X} X_\eta \in I$, de donde $X \in J$.

b) Sea $\gamma < \lambda$. Así que $X_\gamma \in I$. Se tiene que $\{\gamma\} \subseteq \lambda$ y $\bigcup_{\eta \in \{\gamma\}} X_\eta = X_\gamma \in I$. Luego $\{\gamma\} \in J$.

c) Para probar que J es $\sigma-$completo, sea $\{Y_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq J$, entonces se tiene que $Y_n \subseteq \lambda$ y por tanto $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} Y_n \subseteq \lambda$. Sea $Y = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} Y_n$. Por la ley asociativa generalizada de la unión de conjuntos,

$$\bigcup_{\eta \in Y} X_\eta = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left(\bigcup_{\eta \in Y_n} X_\eta\right)$$

Pero, por hipótesis, se tiene que $\bigcup_{\eta \in Y_n} X_\eta \in I$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Luego, como I es $\sigma-$completo (por ser $\sigma-$saturado), $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left(\bigcup_{\eta \in Y_n} X_\eta\right) \in I$, es decir $\bigcup_{\eta \in Y} X_\eta \in I$ de donde $Y = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} Y_n \in J$.

d) Sólo resta probar que para cada colección no numerable mutuamente disjunta $\mathcal{N} \subseteq \wp(\lambda)$ se tiene que $\mathcal{N} \cap J \neq \varnothing$. Supóngase, por contradicción, que existe una colección no numerable mutuamente disjunta $\mathcal{M} \subseteq \wp(\lambda)$ tal que $\mathcal{M} \cap J = \varnothing$.

Entonces, para todo $Y \in \mathcal{M}$, se cumple que $\bigcup\limits_{\eta \in Y} X_\eta \notin I$. Sea

$$\mathcal{M}^\star = \left\{ \bigcup_{\eta \in Y} X_\eta : Y \in \mathcal{M} \right\}$$

Nótese que $\mathcal{M}^\star \cap I = \varnothing$. Se probará que $\mathcal{M}^\star$ es una colección no numerable mutuamente disjunta de elementos de $\wp(\kappa)$, lo cual contradirá que I sea $\sigma-$saturado. Sean $\bigcup\limits_{\eta \in Y_1} X_\eta$ y $\bigcup\limits_{\eta \in Y_2} X_\eta$ dos elementos de $\mathcal{M}^\star$ y supóngase que

$$\left(\bigcup_{\eta \in Y_1} X_\eta \right) \bigcap \left(\bigcup_{\eta \in Y_2} X_\eta \right) \neq \varnothing$$

Entonces existe un elemento ξ tal que $\xi \in \bigcup\limits_{\eta \in Y_1} X_\eta$ y $\xi \in \bigcup\limits_{\eta \in Y_2} X_\eta$. Esto implica que $\xi \in X_{\eta_1}$ para algún $\eta_1 \in Y_1$ y también $\xi \in X_{\eta_2}$ para algún $\eta_2 \in Y_2$, esto es $X_{\eta_1} \bigcap X_{\eta_2} \neq \varnothing$ de donde $X_{\eta_1} = X_{\eta_2}$ ya que se está suponiendo que la colección $\{X_\eta\}_{\eta < \lambda}$ es mutuamente disjunta. Por tanto, $\eta_1 = \eta_2$ y, en consecuencia, $Y_1 \cap Y_2 \neq \varnothing$. Dado que la colección $\mathcal{M}$ también es mutuamente disjunta, se concluye que $Y_1 = Y_2$ lo cual implica que $\bigcup\limits_{\eta \in Y_1} X_\eta = \bigcup\limits_{\eta \in Y_2} X_\eta$. Esto prueba que $\mathcal{M}^\star$ es mutuamente disjunta. Ahora se va a probar que para todo $Y_1, Y_2 \in \mathcal{M}$, si $Y_1 \neq Y_2$ entonces $\bigcup\limits_{\eta \in Y_1} X_\eta \neq \bigcup\limits_{\eta \in Y_2} X_\eta$. Esto comprobará que $\mathcal{M}^\star$ es no numerable. Supóngase que $\bigcup\limits_{\eta \in Y_1} X_\eta = \bigcup\limits_{\eta \in Y_2} X_\eta$. Sea $\xi \in Y_1$. Se tiene que $X_\xi \subseteq \bigcup\limits_{\eta \in Y_1} X_\eta$ y por tanto $X_\xi \subseteq \bigcup\limits_{\eta \in Y_2} X_\eta$. Así que $X_\xi = X_\eta$ para algún $\eta \in Y_2$ de donde $\xi = \eta$ y entonces

$\xi \in Y_2$. Esto muestra que $Y_1 \subseteq Y_2$. De igual forma se prueba que $Y_2 \subseteq Y_1$. Así que $Y_1 = Y_2$. En conclusión, J es un ideal $\sigma-$saturado sobre λ. Pero $\lambda < \kappa$. Esto contradice la definición de κ como el mínimo cardinal sobre el cual hay un ideal $\sigma-$saturado. Por lo tanto I es $\kappa-$completo. ■

Como una consecuencia del lema anterior se tiene que cualquier subconjunto de κ de cardinalidad menor que κ tiene que estar en el ideal I.

Corolario 2.3 *Si $X \subset \kappa$ y $|X| < \kappa$ entonces $X \in I$.*

Demostración. Sea $X = \{x_\eta : \eta < |X|\}$. Para cada $\eta < |X|$ se tiene que $\{x_\eta\} \in I$, pues I es $\sigma-$saturado. Y, como I es $\kappa-$completo, $X = \bigcup\{\{x_\eta\} : \eta < |X|\} \in I$.

■

El resultado que sigue también es consecuencia de la $\kappa-$completitud de I y es un preámbulo para verificar que κ es inaccesible.

Corolario 2.4 *κ es un cardinal regular no numerable.*

Demostración.

- κ es un cardinal no numerable, pues si κ fuera numerable, entonces $\kappa = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Luego, para todo $n \in \mathbb{N}$, $\{x_n\} \in I$ y, como I es $\sigma-$completo, $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{x_n\} \in I$. Pero $\kappa = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{x_n\}$, así que $\kappa \in I$. Esto contradice que I sea un ideal sobre κ.

- Para probar que κ es regular, supóngase, por contradicción, que κ es singular. Entonces existe una sucesión transfinita creciente $\langle \alpha_\nu : \nu < \vartheta \rangle$ de ordinales, donde ϑ es un ordinal límite menor que κ, $\alpha_\nu < \kappa$ para todo $\nu < \vartheta$ y $\sup \{\alpha_\nu : \nu < \vartheta\} = \bigcup \{\alpha_\nu : \nu < \vartheta\} = \kappa$. Como $\alpha_\nu < \kappa$ entonces $\alpha_\nu \in \kappa$ y $\{\alpha_\nu\} \in I$, para cada $\nu < \vartheta$, pero como I es $\kappa-$completo, se tiene que $\bigcup \{\alpha_\nu : \nu < \vartheta\} \in I$ esto es $\kappa \in I$. Contradicción. ■

Se tiene que κ es un cardinal no numerable y regular. Resta probar que κ es un cardinal límite. Para ello es necesario introducir el concepto de matriz de Ulam.

Definición 2.5 *Sea λ un cardinal. Una colección $\left\{A_{\alpha\eta} : \alpha < \lambda^+, \eta < \lambda\right\}$ de subconjuntos de λ^+ es una* ***matriz de Ulam*** $\left(\lambda^+, \lambda\right)$ *si*

i) *Para cada $\eta < \lambda$ y para cada $\alpha, \beta < \lambda^+$, si $\alpha \neq \beta$ entonces $A_{\alpha\eta} \cap A_{\beta\eta} = \varnothing$.*

ii) *Para cada $\alpha < \lambda^+$, el conjunto $\lambda^+ - \bigcup\limits_{\eta<\lambda} A_{\alpha\eta}$ tiene cardinalidad a lo más λ.*

En particular, una matriz de Ulam $(\aleph_1, \aleph_0)$ es un colección $\{A_{\alpha n} : \alpha < \omega_1, n < \omega\}$ de subconjuntos de ω_1 tal que

i) Para cada $n < \omega$, y cada $\alpha, \beta < \omega_1$, si $\alpha \neq \beta$ entonces $A_{\alpha n} \cap A_{\beta n} = \varnothing$;

ii) Para cada $\alpha < \omega_1$, se tiene que $\left|\omega_1 - \bigcup\limits_{n<\omega} A_{\alpha n}\right| \leq \aleph_0$.

Una matriz de este tipo se puede "ver" así

$$\begin{bmatrix}
A_{00} & A_{01} & A_{02} & A_{03} & A_{04} & A_{05} & A_{06} & \cdots & A_{0n} & \cdots \\
A_{10} & A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} & A_{15} & A_{16} & \ldots & A_{1n} & \cdots \\
A_{20} & A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} & A_{25} & A_{26} & \ldots & A_{2n} & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
A_{\omega 0} & A_{\omega 1} & A_{\omega 2} & A_{\omega 3} & A_{\omega 4} & A_{\omega 5} & A_{\omega 6} & \ldots & A_{\omega n} & \cdots \\
A_{\omega+1,0} & A_{\omega+1,1} & A_{\omega+1,2} & A_{\omega+1,3} & A_{\omega+1,4} & A_{\omega+1,5} & A_{\omega+1,6} & \ldots & A_{\omega+1,n} & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
A_{\omega 2,0} & A_{\omega 2,1} & A_{\omega 2,2} & A_{\omega 2,3} & A_{\omega 2,4} & A_{\omega 2,5} & A_{\omega 2,6} & \ldots & A_{\omega 2,n} & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
A_{\omega^\omega,0} & A_{\omega^\omega,1} & A_{\omega^\omega,2} & A_{\omega^\omega,3} & A_{\omega^\omega,4} & A_{\omega^\omega,5} & A_{\omega^\omega,6} & \ldots & A_{\omega^\omega,n} & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots
\end{bmatrix}$$

En la matriz anterior cada par de elementos distintos en una misma columna son disjuntos. Además, la unión de los elementos de cada fila, contiene a casi todos los elementos de ω_1, excepto una cantidad a lo más numerable.

En seguida se garantiza la existencia de matrices de Ulam para cualquier cardinal.

Lema 2.6 *Para cada cardinal* $\aleph_\nu$*, existe una matriz de Ulam* $(\aleph_{\nu+1}, \aleph_\nu)$*.*

Demostración. Sea $\zeta < \omega_{\nu+1}$. Sea f_ζ una función[1] con dominio ω_ν tal que

[1] Si $\zeta < \omega_\nu$, basta con tomar $f_\zeta : \omega_\nu \to \omega_\nu$ tal que $f_\zeta(\alpha) = \alpha$ para cada $\alpha < \omega_\nu$.
Si $\omega_\nu < \zeta < \omega_{\nu+1}$, basta con que f_ζ sea una biyección de ω_ν en ζ, pues $|\omega_\nu| = |\zeta|$.

$\zeta \subseteq \operatorname{ran} f_\zeta$. Sea

$$A_{\alpha\eta} = \{\zeta : f_\zeta(\eta) = \alpha\}$$

para cada $\alpha < \omega_{\nu+1}$ y cada $\eta < \omega_\nu$. La matriz denotada por $\langle A_{\alpha\eta}\rangle$ es una matriz de Ulam $(\aleph_{\nu+1}, \aleph_\nu)$, como se muestra a continuación.

- *Para cada* $\eta < \omega_\nu$ *y para cada* $\alpha, \beta < \omega_{\nu+1}$, *si* $\alpha \neq \beta$ *entonces* $A_{\alpha\eta} \cap A_{\beta\eta} = \varnothing$.

  En efecto, sean $\eta < \omega_\nu$ y $\alpha, \beta < \omega_{\nu+1}$ tal que $A_{\alpha\eta} \cap A_{\beta\eta} \neq \varnothing$. Entonces existe un $\zeta \in A_{\alpha\eta} \bigcap A_{\beta\eta}$, luego $\zeta \in A_{\alpha\eta}$ y $\zeta \in A_{\beta\eta}$. Así que $f_\zeta(\eta) = \alpha$ y $f_\zeta(\eta) = \beta$. Debido a que f_ζ es función se concluye que $\alpha = \beta$.

- *Para cada* $\alpha < \omega_\nu$, $\left|\omega_{\nu+1} - \bigcup\limits_{\eta<\omega_\nu} A_{\alpha\eta}\right| \leq \aleph_\nu$. En efecto, si $\zeta \in \omega_{\nu+1} - \bigcup\limits_{\eta<\omega_\nu} A_{\alpha\eta}$ entonces $\zeta \in \omega_{\nu+1}$ y $\zeta \notin \bigcup\limits_{\eta<\omega_\nu} A_{\alpha\eta}$. Luego, $f_\zeta(\eta) \neq \alpha$ para todo $\eta < \omega_\nu$, así que $\alpha \notin \operatorname{ran} f_\zeta$ y por tanto $\alpha \notin \zeta$. Esto implica que $\zeta \leq \alpha$. Luego $\omega_{\nu+1} - \bigcup\limits_{\eta<\omega_\nu} A_{\alpha\eta} \subseteq \alpha + 1$ y $\left|\omega_{\nu+1} - \bigcup\limits_{\eta<\omega_\nu} A_{\alpha\eta}\right| \leq |\alpha + 1| = |\alpha| \leq |\omega_\nu| = \aleph_\nu$. ■

En el teorema que sigue se utilizarán las matrices de Ulam para demostrar que el cardinal κ de la Definición 2.1 es débilmente inaccesible.

Teorema 2.7 *κ es débilmente inaccesible.*

Demostración. Ya se probó que κ es no numerable y regular, basta probar que κ es un cardinal límite.

Supóngase que κ es un cardinal sucesor, esto es, $\kappa = \aleph_{\nu+1}$. Sea

$$\mathbb{M} = \{A_{\alpha\eta} : \alpha < \omega_{\nu+1}, \eta < \omega_{\nu}\}$$

una matriz de Ulam $(\aleph_{\nu+1}, \aleph_{\nu})$. Se garantiza que esta existe por el lema anterior. A continuación se prueban algunas propiedades de los elementos de $\mathbb{M}$ que, combinadas con las propiedades de κ, producen una contradicción.

i) *Para cada $\alpha < \omega_{\nu+1}$ existe un $\eta < \omega_{\nu}$ tal que $A_{\alpha\eta} \notin I$.* En efecto, debido a que $\langle A_{\alpha\eta}\rangle$ es una matriz de Ulam se tiene que, $\left|\kappa - \bigcup\limits_{\eta<\omega_{\nu}} A_{\alpha\eta}\right| < \aleph_{\nu+1} = \kappa$, así que, por el corolario 2.3, $\kappa - \bigcup\limits_{\eta<\omega_{\nu}} A_{\alpha\eta} \in I$ y, por tanto, $\bigcup\limits_{\eta<\omega_{\nu}} A_{\alpha\eta} \notin I$. Pero, como I es $\kappa-$completo, entonces existe algún $\eta < \omega_{\nu}$ tal que $A_{\alpha\eta} \notin I$.

ii) Sea $\mathbb{T}_{\eta} = \{\alpha : A_{\alpha\eta} \notin I\}$. Por i) es claro que $\bigcup\limits_{\eta<\omega_{\nu}} \mathbb{T}_{\eta} = \omega_{\nu+1}$.

iii) *Existe $\hat{\eta} < \omega_{\nu}$ tal que $|\mathbb{T}_{\hat{\eta}}| = \aleph_{\nu+1}$.* En efecto, si para cada $\eta < \omega_{\nu}$ se tiene que $|\mathbb{T}_{\eta}| \leq \aleph_{\nu}$ entonces

$$\aleph_{\nu+1} = \left|\bigcup_{\eta<\omega_{\nu}} \mathbb{T}_{\eta}\right| \leq \sum_{\eta<\omega_{\nu}} |\mathbb{T}_{\eta}| \leq \aleph_{\nu} \cdot \aleph_{\nu} = \aleph_{\nu}$$

Contradicción.

iv) Sea

$$\mathbb{S} = \{A_{\alpha\hat{\eta}} : \alpha \in \mathbb{T}_{\hat{\eta}}\}$$

Se probará que $\mathbb{S}$ *es una colección de subconjuntos de* κ *no numerable y mutuamente disjunta*. Es claro que $\mathbb{S}$ es no numerable, pues tiene cardinalidad κ, y por la propiedad i) de las matrices de Ulam se tiene que es mutuamente disjunta, pues todos los elementos de $\mathbb{S}$ están en una misma columna de $\mathbb{M}$.

De la condición de $\sigma-$saturación de I se tiene que $\mathbb{S} \cap I \neq \varnothing$, lo cual contradice la definición de $\mathbb{S}$. La contradicción se deriva de suponer que κ es una cardinal sucesor, así que κ es un cardinal límite. Esto concluye la demostración de que κ es un cardinal débilmente inaccesible. ■

El siguiente resultado, de gran importancia, es una consecuencia de los lemas anteriores. Si se acepta la existencia de una medida sobre un conjunto A, se tendrá que aceptar también la existencia de los primeros cardinales grandes.

Teorema 2.8 *Si hay una medida sobre un conjunto A, entonces existe algún cardinal λ débilmente inaccesible tal que $\lambda \leq |A|$.*

Demostración. Si hay una medida μ sobre un conjunto A, entonces por el lema 1.53 hay un ideal $\sigma-$ saturado sobre A y, por tanto, $\kappa \leq |A|$, donde κ es el cardinal de la Definición 2.1. Ya se ha probado que κ es débilmente inaccesible. ■

En particular, si existe una medida sobre $\mathbb{R}$, es decir, si existe una medida sobre $2^{\aleph_0}$, el tamaño del continuo tendría que ser sorprendentemente grande. En tal caso, $2^{\aleph_0}$ sería mayor o igual que el mínimo cardinal débilmente inaccesible. Así,

$2^{\aleph_0} > \aleph_1$ pues $\aleph_1$ no es débilmente inaccesible porque no es un cardinal límite debido a que es el sucesor de $\aleph_0$. Además, $2^{\aleph_0} \neq \aleph_n$ para todo $n < \omega$, pues se sabe que cada $\aleph_n$ es un cardinal que no tiene predecesores débilmente inaccesibles. Más aún, $2^{\aleph_0} \neq \aleph_\omega$, pues se sabe que $\aleph_\omega$ no es un cardinal regular ya que $\aleph_\omega = \sum_{n<\omega} \aleph_n$ [**HJ**, p. 161]. Luego, $2^{\aleph_0}$ también sería diferente de $\aleph_{\omega+1}$, $\aleph_{\omega+2}$, $\aleph_{\omega+3}$, $\cdots$, $\aleph_{\omega+n}$ con $n < \omega$. En particular, la Hipótesis del Continuo es falsa bajo el supuesto de la existencia de una extensión a $\mathbb{R}$ de la medida de Lebesgue; más aún, si se quiere que exista tal extensión, una posibilidad es trabajar en el sistema ZFC + ($\neg$HC).

Nota. Una medida μ es ***bivaluada*** si ran $\mu = \{0, 1\}$.

A continuación se presenta uno de los teoremas más importantes para la aproximación a la solución del problema de la medida, desde el punto de vista de la teoría de conjuntos. Este teorema se debe a Stanislaw Ulam:

Teorema 2.9 (Ulam) *Si existe una medida sobre un conjunto S entonces existe una medida bivaluada sobre un subconjunto de S o existe una medida sobre $2^{\aleph_0}$.*

Demostración. Supóngase que existe una medida μ sobre S. Se considerará el caso en el que μ tenga un átomo y después el caso en el que μ sea desatomizada.

1. Si μ tiene un átomo A en S, entonces $\mu(A) > 0$ y para cada $X \subseteq A$, $\mu(X) = 0$ ó $\mu(X) = \mu(A)$. Sea $\nu(X) = \dfrac{\mu(X)}{\mu(A)}$. La función ν es una medida sobre A. En efecto,

i) $\nu(\varnothing) = \dfrac{\mu(\varnothing)}{\mu(A)} = 0$, $\nu(A) = \dfrac{\mu(A)}{\mu(A)} = 1$.

ii) Sea $a \in A$, luego $\nu(\{a\}) = \dfrac{\mu(\{a\})}{\mu(A)} = 0$.

iii) Sea $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ una colección de subconjuntos de A disjuntos dos a dos.

Entonces

$$\nu\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} X_n\right) = \frac{\mu\left(\bigcup\limits_{n=0}^{\infty} X_n\right)}{\mu(A)} = \frac{\sum\limits_{n=0}^{\infty} \mu(X_n)}{\mu(A)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mu(X_n)}{\mu(A)} = \sum_{n=0}^{\infty} \nu(X_n)$$

Hasta aquí se ha probado que ν es una medida sobre A.

iv) ν *es bivaluada*. En efecto, para todo $X \subseteq A$, $\mu(X) = 0$ o $\mu(X) = \mu(A)$. Si $\mu(X) = 0$ entonces $\nu(X) = \dfrac{\mu(X)}{\mu(A)} = \dfrac{0}{\mu(A)} = 0$. Si $\mu(X) = \mu(A)$ entonces $\nu(X) = \dfrac{\mu(X)}{\mu(A)} = \dfrac{\mu(A)}{\mu(A)} = 1$.

2. Si μ es desatomizada, se define por recursión transfinita la siguiente colección de subconjuntos de S

$$\mathfrak{M} = \left\{X_\delta : \delta \in \bigcup_{n=0}^{\infty} \{0,1\}^n\right\}$$

así

$X_\varnothing = S$

X_0 es tal que $X_0 \subset S$ y $\mu(X_0) = \dfrac{\mu(S)}{2} = \dfrac{1}{2}$. La existencia de X_0 y de los demás X_δ se garantiza por el Lema 1.56.

$X_1 = S - X_0$. Nótese que $\mu(X_1) = \mu(X_0) = \dfrac{1}{2}$.

X_{00} es tal que $X_{00} \subset X_0$ y $\mu(X_{00}) = \dfrac{\mu(X_0)}{2} = \dfrac{1}{2^2}$.

$X_{01} = X_0 - X_{00}$. Nótese que $X_{01} \subset X_0$ y $\mu(X_{01}) = \mu(X_{00}) = \dfrac{1}{2^2}$.

X_{10} es tal que $X_{10} \subset X_1$ y $\mu(X_{10}) = \dfrac{\mu(X_1)}{2} = \dfrac{1}{2^2}$.

$X_{11} = X_1 - X_{10}$. Nótese que $\mu(X_{11}) = \mu(X_{10}) = \dfrac{1}{2^2}$.

X_{000} es tal que $X_{000} \subset X_{00}$ y $\mu(X_{000}) = \dfrac{\mu(X_{00})}{2} = \dfrac{1}{2^3}$.

$X_{001} = X_{00} - X_{000}$. Nótese que $\mu(X_{001}) = \dfrac{\mu(X_{00})}{2} = \dfrac{1}{2^3}$.

X_{010} es tal que $X_{010} \subset X_{01}$ y $\mu(X_{010}) = \dfrac{\mu(X_{01})}{2} = \dfrac{1}{2^3}$.

$X_{011} = X_{01} - X_{010}$. Nótese que $\mu(X_{011}) = \dfrac{\mu(X_{01})}{2} = \dfrac{1}{2^3}$.

X_{110} es tal que $X_{110} \subset X_{11}$ y $\mu(X_{110}) = \dfrac{\mu(X_{11})}{2} = \dfrac{1}{2^3}$.

$\vdots$

En general, para la sucesión $\delta \in \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} \{0,1\}^n$ se tiene que $\mu(X_\delta) = \dfrac{1}{2^m}$ donde m es la longitud de la sucesión δ. Así que, conocido X_δ, se tiene que $X_{\delta 0} \subseteq X_\delta$ y $X_{\delta 1} \subseteq X_\delta$. Además $X_{\delta 0} = X_\delta - X_{\delta 1}$. Ahora, para cada $f \in \{0,1\}^\omega$ sea $X_f = \bigcap\limits_{n=0}^{\infty} X_{f\restriction n}$. Nótese que, dado que $X_\varnothing = S$, entonces

$$\bigcup \{X_f : f \in \{0,1\}^\omega\} = S$$

Los conjuntos X_f satisfacen las siguientes propiedades:

a) Si $f \neq g$ entonces $X_f \cap X_g = \varnothing$. En efecto, sea $\mathfrak{A} = \{m \in \mathbb{N} : f(m) \neq g(m)\}$.

Como $f \neq g$ entonces $\mathfrak{A} \neq \varnothing$. Por el buen ordenamiento de $\mathbb{N}$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n = \min \mathfrak{A}$. Luego $X_{f \restriction n+1} \neq X_{g \restriction n+1}$ y, por la propiedad de minimalidad de n, $f \restriction n = g \restriction n$. Sea $\delta = f \restriction n = g \restriction n$. Entonces $X_{f \restriction n+1} = X_{\delta 0}$ o $X_{f \restriction n+1} = X_{\delta 1}$. Si $X_{f \restriction n+1} = X_{\delta 0}$ entonces $X_{g \restriction n+1} = X_{\delta 1}$. Luego $X_{f \restriction n+1} = X_{\delta} - X_{g \restriction n+1}$ y, por tanto, $(X_{f \restriction n+1}) \cap (X_{g \restriction n+1}) = \varnothing$, así $\left(\bigcap_{m=0}^{\infty} X_{f \restriction m}\right) \bigcap \left(\bigcap_{m=0}^{\infty} X_{g \restriction m}\right) = \varnothing$, esto es, $X_f \cap X_g = \varnothing$. Análogamente si $X_{f \restriction n+1} = X_{\delta 1}$.

b) *Para cada X_f se tiene que $\mu(X_f) = 0$.* Dado que $X_f = \bigcap_{n=0}^{\infty} X_{f \restriction n}$ entonces $X_f \subset X_{f \restriction n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Luego, por la monotonía de μ, se cumple que $0 \leq \mu(X_f) \leq \mu(X_{f \restriction n}) = \dfrac{1}{2^n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto $\mu(X_f) = 0$.

Sea ν la función con dominio $\wp(\{0,1\}^{\omega})$ definida por

$$\nu(Z) = \mu\left(\bigcup \{X_f : f \in Z\}\right), \text{ para cada } Z \subseteq \{0,1\}^{\omega}$$

Se va a probar que ν es una medida sobre $2^{\aleph_0}$.

i) $\nu(\varnothing) = 0$ pues,

$$\nu(\varnothing) = \mu\left(\bigcup \{X_f : f \in \varnothing\}\right) = \mu(\varnothing) = 0$$

Además, $\nu(\{0,1\}^\omega) = 1$ ya que

$$\nu(\{0,1\}^\omega) = \mu\left(\bigcup\{X_f : f \in \{0,1\}^\omega\}\right) = \mu(S) = 1$$

ii) Para cada $\hat{f} \in \{0,1\}^\omega$ se tiene que $\nu\left(\left\{X_{\hat{f}}\right\}\right) = \mu\left(\bigcup_{f\in\{\hat{f}\}} X_f\right) = \mu\left(X_{\hat{f}}\right) = 0$, por la propiedad b) de los conjuntos X_f.

iii) Sea $\{Z_n : n \in \mathbb{N}\}$ una colección a lo más numerable de subconjuntos mutuamente disjuntos de $\{0,1\}^\omega$. Entonces

$$\begin{aligned}\nu\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} Z_n\right) &= \mu\left(\bigcup\left\{X_f : f \in \bigcup_{n=0}^{\infty} Z_n\right\}\right) = \mu\left(\bigcup_{n=0}^{\infty}\left(\bigcup\{X_f : f \in Z_n\}\right)\right)\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\mu\left(\bigcup\{X_f : f \in Z_n\}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\nu(Z_n)\end{aligned}$$

Luego, $\nu\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} Z_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\nu(Z_n)$. ■

En la segunda parte de la demostración anterior se ha probado que si existe una medida desatomizada sobre algún conjunto S entonces existe una medida sobre $2^{\aleph_0}$ y por tanto sobre $\mathbb{R}$. Se va a probar ahora que esto a su vez implica la existencia de una extensión a $\mathbb{R}$ de la medida de Lebesgue. La presentación, que se hace a continuación, se basa fundamentalmente en [**I**, pp. 262-264].

De nuevo, sea ν la medida sobre $2^{\aleph_0}$ que se definió en la página 52. Sea

$$F : \{0,1\}^{\omega} \longrightarrow [0,1]$$

definida por

$$F(f) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(n)}{2^{n+1}}$$

La función F es sobreyectiva. En efecto, sean $x \in [0,1]$ y $\langle a_i : i \in \mathbb{N} \rangle$ una expansión binaria de x. Sea $g : \omega \longrightarrow \{0,1\}$ tal que $g(i) = a_i$. Entonces $F(g) = x$. Sea ahora la función $\mu_0 : \wp([0,1]) \longrightarrow [0,1]$ tal que $\mu_0(X) = \nu(F^{-1}[X])$. En seguida se va a probar que μ_0 también es una medida sobre $[0,1]$. En efecto,

i) $\mu_0(\varnothing) = \nu(F^{-1}[\varnothing]) = \nu(\varnothing) = 0$, $\mu_0([0,1]) = \nu(F^{-1}[[0,1]]) = \nu(\{0,1\}^{\omega}) = 1$.

ii) Sea $x \in [0,1]$. Como F es sobreyectiva, hay a lo más dos funciones $g, h \in \{0,1\}^{\omega}$ tales que $F(g) = F(h) = x$. Así, $\mu_0(\{x\}) = \nu(F^{-1}[\{x\}]) = \nu(\{g,h\}) = 0$.

iii) Si $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una subcolección de subconjuntos de $[0,1]$ mutuamente disjuntos, entonces

$$\mu_0\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} X_n\right) = \nu\left(F^{-1}\left[\bigcup_{n=0}^{\infty} X_n\right]\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \nu\left(F^{-1}[X_n]\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu_0(X_n).$$

Además, la medida μ_0 de cada intervalo de la forma $\left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right]$ o $\left(\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right)$ coincide con la medida μ_L (medida de Lebesgue) del mismo intervalo. Es decir, si

$n \geq 0$ y $0 \leq k < 2^n$ entonces $\mu_0\left(\left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right]\right) = \mu_0\left(\left(\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right)\right) = \frac{1}{2^n}$.

En efecto, sean $n \geq 0$ y $0 \leq k < 2^n$. Si $\langle a_i : i \in \mathbb{N}\rangle$ es la expansión binaria de k, entonces $k = \sum_{i=0}^{n-1} a_i 2^i$. Luego,

$$\begin{aligned}
\frac{k}{2^n} &= \frac{1}{2^n}\sum_{i=0}^{n-1} a_i 2^i = \sum_{i=0}^{n-1}\frac{a_i 2^i}{2^n} \\
&= \sum_{i=0}^{n-1}\frac{a_i}{2^{n-i}} = \sum_{i=0}^{n-1}\frac{f(i)}{2^{n-i}} = \sum_{r=0}^{n-1}\frac{g(r)}{2^{r+1}} = \sum_{r=0}^{\infty}\frac{g(r)}{2^{r+1}}
\end{aligned}$$

donde $f(i) = a_i$ y

$$g(i) = \begin{cases} f(n-i-1) \text{ para } 0 \leq i \leq n-1 \\ 0 \text{ para todo } i \geq n \end{cases}$$

Así

$$\frac{k+1}{2^n} = \frac{k}{2^n} + \frac{1}{2^n} = \sum_{r=0}^{n-1}\frac{g(r)}{2^{r+1}} + \sum_{r=n}^{\infty}\frac{1}{2^{r+1}} = \sum_{r=0}^{\infty}\frac{h(r)}{2^{r+1}}$$

donde $h \upharpoonright n = g \upharpoonright n$ y para todo $r \geq n$ se tiene que $h(r) = 1$. Sea

$$T = \{s \in \{0,1\}^{\omega} : s \upharpoonright n = g \upharpoonright n = h \upharpoonright n\}$$

Por la sobreyectividad de F y la definición de T se puede ver que

$$F^{-1}\left[\left(\frac{k}{2^n},\frac{k+1}{2^n}\right)\right] \subset T \subset F^{-1}\left[\left[\frac{k}{2^n},\frac{k+1}{2^n}\right]\right]$$

por lo que los tres conjuntos tienen igual medida ν. En efecto,

$$\begin{aligned}
\nu\left(F^{-1}\left[\left[\frac{k}{2^n},\frac{k+1}{2^n}\right]\right]\right) &= \nu\left(F^{-1}\left[\left(\frac{k}{2^n},\frac{k+1}{2^n}\right)\cup\left\{\frac{k}{2^n}\right\}\cup\left\{\frac{k+1}{2^n}\right\}\right]\right) \\
&= \nu\left(F^{-1}\left[\left(\frac{k}{2^n},\frac{k+1}{2^n}\right)\right]\right)+\nu\left(F^{-1}\left[\left\{\frac{k}{2^n}\right\}\right]\right) \\
&\quad +\nu\left(F^{-1}\left[\left\{\frac{k+1}{2^n}\right\}\right]\right) \\
&= \nu\left(F^{-1}\left[\left(\frac{k}{2^n},\frac{k+1}{2^n}\right)\right]\right)
\end{aligned}$$

Además,

$$\frac{1}{2^n} = \mu_0\left(\left(\frac{k}{2^n},\frac{k+1}{2^n}\right)\right) = \mu_0\left(\left[\frac{k}{2^n},\frac{k+1}{2^n}\right]\right) = \nu\left(F^{-1}\left[\left[\frac{k}{2^n},\frac{k+1}{2^n}\right]\right]\right)$$

De otro lado, nótese que si $x \in X_{g\restriction n}$ entonces $x \in \bigcup\{X_s : s \in T\}$; además, si $x \in \bigcup\{X_s : s \in T\}$ entonces $x \in X_s = \bigcap_{n=0}^{\infty} X_{s\restriction n}$ para algún $s \in T$ y, por tanto, $x \in X_{s\restriction n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. En particular, $x \in X_{g\restriction n}$. Se ha probado así que

$\bigcup \{X_s : s \in T\} = X_{g \restriction n}$ y, entonces

$$\nu(T) = \mu\left(\bigcup \{X_s : s \in T\}\right) = \mu\left(X_{g \restriction n}\right) = \frac{1}{2^n}$$

Ahora se va a extender μ_0 a una medida sobre $\mathbb{R}$. Para cada $m \in \mathbb{Z}$, sea

$$\mu_m : \wp([m, m+1]) \longrightarrow [0, 1]$$

la aplicación dada por $\mu_m(X) = \mu_0(X - m)$. Se tiene que μ_m es una medida sobre $[m, m+1]$. Sea $\tilde{\mu}_L : \wp(\mathbb{R}) \longrightarrow [0, +\infty]$ la aplicación dada por

$$\tilde{\mu}_L(X) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \mu_m(X \cap [m, m+1])$$

Es fácil ver que $\tilde{\mu}_L$ es una extensión a $\mathbb{R}$ de la medida de Lebesgue. En efecto, si $m \in \mathbb{Z}$, $n \geq 0$ y $0 \leq k < 2^n$, se cumple que

$$\begin{aligned} \tilde{\mu}_L\left(\left(m + \frac{k}{2^n}, m + \frac{k+1}{2^n}\right)\right) &= \mu_m\left(\left(m + \frac{k}{2^n}, m + \frac{k+1}{2^n}\right)\right) \\ &= \mu_0\left(\left(\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right)\right) = \frac{1}{2^n} \end{aligned}$$

de donde se sigue a su vez que si $n \geq 0$ y $k, l \in \mathbb{Z}$, $k < l$, entonces

$$\tilde{\mu}_L\left(\left(\frac{k}{2^n}, \frac{l}{2^n}\right)\right) = \frac{l-k}{2^n} = \mu_L\left(\left(\frac{k}{2^n}, \frac{l}{2^n}\right)\right)$$

Se tiene así que $\tilde{\mu}_L$ coincide con la medida de Lebesgue en todos los intervalos abiertos de la forma $\left(\frac{k}{2^n}, \frac{l}{2^n}\right)$. Todo intervalo abierto en $\mathbb{R}$ se puede expresar como unión creciente de intervalos de este tipo. Entonces $\tilde{\mu}_L$ coincide con la medida de Lebesgue sobre todos los intervalos abiertos. Luego $\tilde{\mu}_L$ coincide con la medida de Lebesgue sobre la $\sigma-$álgebra de Borel[2], de donde, por el Teorema de Extensión de Hahn[3], $\tilde{\mu}_L$ extiende la medida de Lebesgue [**B**, p. 103].

En este punto del trabajo, ya se ha probado que la existencia de una extensión a $\mathbb{R}$ de la medida de Lebesgue equivale a la existencia de alguna medida probabilística $\sigma-$aditiva no trivial desatomizada.

Pero ¿qué tan probable es que exista una medida sobre $2^{\aleph_0}$? En principio se considerarán algunos resultados equivalentes a la existencia de una medida bivaluada. De esta manera, si alguno de ellos es descartable entonces no existiría una medida bivaluada y por tanto, bajo las hipótesis del Teorema de Ulam, existiría una medida sobre $2^{\aleph_0}$.

[2]La $\sigma-$álgebra generada por todos los intervalos de la forma (a, b), o también por todos los intervalos de la forma $[a, b]$, en $\mathbb{R}$ se llama el **álgebra de Borel**.

[3]**Teorema de Extensión de Hahn**: Supóngase que μ es una medida $\sigma-$finita sobre una álgebra A. Entonces existe una única extensión de μ a una medida sobre una $\sigma-$álgebra A^* que contiene a A.

Lema 2.10 *Si μ es una medida bivaluada sobre S entonces*

$$U = \{X \subseteq S : \mu(X) = 1\}$$

es un ultrafiltro no principal $\sigma-$completo sobre S.

Demostración.

1. En primer lugar se probará que U es un ultrafiltro no principal.

   a) Por definición de medida $\mu(S) = 1$ y $\mu(\varnothing) = 0$ luego se tiene que $\varnothing \notin U$ y $S \in U$.

   b) Sean $X \in U$ y $Y \in U$. Si $X \cap Y \notin U$ entonces $\mu(X \cap Y) = 0$. Se sabe que $\mu(X) = 1 = \mu(Y)$. Como $X = (X - Y) \cup (X \cap Y)$ y $Y = (Y - X) \cup (X \cap Y)$, entonces $\mu(X - Y) = 1 = \mu(Y - X)$ y así $\mu(X \cup Y) = 2$, lo cual es imposible. Luego, $\mu(X \cap Y) = 1$ y por tanto $X \cap Y \in U$.

   c) Sean $X \in U$ y $X \subseteq Y \subseteq S$. Por ser μ monótona $\mu(X) \leq \mu(Y) \leq 1$ pero por hipótesis $\mu(X) = 1$ por lo cual $\mu(Y) = 1$ y entonces $Y \in U$.

   d) Sea $X \subseteq S$. Se tiene que $S = X \cup (S - X)$. Si $X \notin U$ se tiene que $\mu(X) = 0$. Pero $\mu(S) = \mu(X) + \mu(S - X)$, así que $\mu(S - X) = 1$, esto es $S - X \in U$. Se ha probado que U es un ultrafiltro.

   e) Para cada $a \in S$ se tiene que $\mu(\{a\}) = 0$, esto es, $\{a\} \notin U$, de donde, por el Lema 1.38, U es no principal.

2. Resta probar que U es $\sigma-$completo. Sea $\{X_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq U$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ se cumple que $\mu(X_n) = 1$ y además $S - X_n \notin U$ por lo cual $\mu(S - X_n) = 0$. Es claro que

$$S = \left(\bigcap_{n=0}^{\infty} X_n\right) \bigcup \left(S - \bigcap_{n=0}^{\infty} X_n\right) = \left(\bigcap_{n=0}^{\infty} X_n\right) \bigcup \left(\bigcup_{n=0}^{\infty} (S - X_n)\right)$$

luego

$$\begin{aligned} 1 &= \mu(S) = \mu\left(\bigcap_{n=0}^{\infty} X_n\right) + \mu\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} (S - X_n)\right) \\ &= \mu\left(\bigcap_{n=0}^{\infty} X_n\right) + \sum_{n=0}^{\infty} \mu(S - X_n) = \mu\left(\bigcap_{n=0}^{\infty} X_n\right) \end{aligned}$$

y así, $\bigcap\limits_{n=0}^{\infty} X_n \in U$. ■

Recíprocamente, si existe un ultrafiltro no principal U sobre S, entonces existe una medida bivaluada sobre S.

Lema 2.11 *Si U es un ultrafiltro no principal $\sigma-$completo sobre S, entonces la función $\mu : \wp(S) \longrightarrow \{0, 1\}$ definida por*

$$\mu(X) = \begin{cases} 1 \ \textit{si} \ X \in U \\ 0 \ \textit{si} \ X \notin U \end{cases}$$

es una medida bivaluada.

Demostración.

a) Por ser U un filtro, $\varnothing \notin U$ y $S \in U$. Luego, por definición de μ se tiene que $\mu(\varnothing) = 0$ y $\mu(S) = 1$.

b) Sea $a \in S$. Como U es un ultrafiltro no principal entonces por el Lema 1.38 $\{a\} \notin U$ luego $\mu(\{a\}) = 0$.

c) Sea $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ una colección mutuamente disjunta de subconjuntos de S. Sean $X_i, X_j \in U$ con $X_i \neq X_j$. Se tiene que $\varnothing = X_i \cap X_j$. Pero $\varnothing \notin U$; así que a lo más un elemento de esta colección está en U. Si existe un $i \in \mathbb{N}$ tal que $X_i \in U$ se tiene que $\mu(X_i) = 1$ y como $X_i \subseteq \bigcup_{n=0}^{\infty} X_n \subseteq S$ entonces $\bigcup_{n=0}^{\infty} X_n \in U$; por consiguiente $\mu\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} X_n\right) = 1$. Además,

$$\begin{aligned}
\mu\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} X_n\right) &= \mu(X_0) + \mu(X_1) + \cdots + \mu(X_{i-1}) + \mu(X_i) + \mu(X_{i+1}) + \cdots \\
&= 0 + 0 + \cdots + 0 + 1 + 0 + \cdots = 1
\end{aligned}$$

Luego, $\mu\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} X_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu(X_n)$.

Por otro lado, si para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $X_n \notin U$ entonces $\mu(X_n) = 0$ y $S - X_n \in U$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Como U es $\sigma-$completo, $\bigcap_{n=0}^{\infty} (S - X_n) \in U$ de donde $S - \bigcup_{n=0}^{\infty} X_n \in U$. Luego $\bigcup_{n=0}^{\infty} X_n \notin U$ y, de nuevo, se obtiene

$$\mu\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} X_n\right) = 0 = \sum_{n=0}^{\infty} \mu(X_n)$$

Se concluye así que μ es una medida bivaluada. ■

De los dos lemas anteriores se concluye que la existencia de una medida bivaluada es equivalente a la existencia de un ultrafiltro no principal $\sigma-$completo.

A continuación se mostrará cómo la existencia de una medida bivaluada implica, además, la existencia de un ultrafiltro no principal $\kappa-$completo sobre un cardinal no numerable κ.

Lema 2.12 *Si existe un ultrafiltro no principal $\sigma-$completo entonces existe un cardinal no numerable κ sobre el cual hay un ultrafiltro no principal $\kappa-$completo.*

Demostración. Sea κ el menor cardinal tal que existe un ultrafiltro no principal $\sigma-$completo sobre un conjunto S de cardinalidad κ. Por el Lema 1.41, existe un ultrafiltro U no principal $\sigma-$completo sobre κ. Sea I el ideal dual de U. Se tiene entonces que I es primo no principal $\sigma-$completo sobre κ.

1. κ es no numerable. Pues si κ es numerable, entonces $\kappa = \{x_n : n < \omega\} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \{x_n\}$.

   Por el Lema 1.28, para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $\{x_n\} \in I$. Además como I es $\sigma-$completo se tiene que $\bigcup_{n=0}^{\infty} \{x_n\} \in I$, esto es, $\kappa \in I$. Contradicción.

2. Para probar que U es $\kappa-$completo, supóngase que no lo es. Entonces I tampoco lo es y, por tanto, existen $\lambda < \kappa$ y $\{X_\eta : \eta < \lambda\} \subseteq I$ tales que $\bigcup_{\eta<\lambda} X_\eta \notin I$. Sea $J = \left\{ Y \subseteq \lambda : \bigcup_{\eta \in Y} X_\eta \in I \right\}$. Siguiendo pasos similares a los de la demostración del Lema 2.2 se tiene que J es un ideal primo no principal $\sigma-$completo sobre λ. Así que el filtro dual V del ideal J es un ultrafiltro no principal $\sigma-$completo sobre λ. Lo cual contradice la definición de κ. ■

Es el momento de definir un tipo especial de cardinal grande.

Definición 2.13 *Un cardinal no numerable κ es un* ***cardinal medible*** *si sobre él existe un ultrafiltro no principal $\kappa-$completo.*

Teorema 2.14 *Cada cardinal medible es fuertemente inaccesible.*

Demostración. Sea κ un cardinal medible. Se tiene que existe un ultrafiltro U no principal $\kappa-$completo sobre κ. Sea I el dual del ultrafiltro U sobre κ.

1. κ es no numerable, por la definición de cardinal medible.

2. κ es regular, pues si se supone κ singular, existe una sucesión transfinita creciente $\langle \alpha_\nu : \nu < \vartheta \rangle$ de ordinales $\alpha_\nu < \kappa$, con $\vartheta < \kappa$, tal que

$$\kappa = \lim_{\nu \to \vartheta} \alpha_\nu = \sup\{\alpha_\nu : \nu < \vartheta\} = \bigcup_{\nu < \vartheta} \alpha_\nu$$

y como $|\alpha_\nu| < \kappa$ entonces $\alpha_\nu \in I$, para cada $\nu < \vartheta$. Luego, $\kappa \in I$ por ser I un ideal $\kappa-$completo. Contradicción.

3. κ es un cardinal límite fuerte. De lo contrario, existiría $\lambda < \kappa$ tal que $\kappa \leq 2^\lambda$. Así existe un conjunto $S \subseteq \{0,1\}^\lambda$ con $|S| = \kappa$. Por Lema 1.41 existe un ultrafiltro V no principal $\kappa-$completo sobre S. Para cada $\alpha < \lambda$, se puede ver a S así: $S = \{f \in S : f(\alpha) = 0\} \cup \{f \in S : f(\alpha) = 1\}$. Por definición de filtro, $S \in V$ de donde $\{f \in S : f(\alpha) = 0\} \cup \{f \in S : f(\alpha) = 1\} \in V$. Nótese que cada uno de los conjuntos $\{f \in S : f(\alpha) = 0\}$ y $\{f \in S : f(\alpha) = 1\}$ es el complemento en S del otro. Como además V es un ultrafiltro sobre S entonces ocurre que al menos uno de dichos dos conjuntos pertenece a V. (Si ninguno de los dos perteneciera a V entonces sus complementos en S, es decir los mismos dos conjuntos, pertenecerían a V y se obtendría una contradicción.) Aún más, sólo uno de los dos conjuntos puede pertenecer a V. (Si los dos fueran elementos de V entonces la intersección de ambos, esto es $\varnothing$, sería elemento de V y de nuevo se obtendría una contradicción). Sea $X_\alpha = \{f \in S : f(\alpha) = 0\}$ si $\{f \in S : f(\alpha) = 0\} \in V$ ó $X_\alpha = \{f \in S : f(\alpha) = 1\}$ si $\{f \in S : f(\alpha) = 1\} \in V$. Por ser V un ultrafiltro $\kappa-$completo el conjunto $X = \bigcap\limits_{\alpha<\lambda} X_\alpha \in V$. Pero, por la definición de X, para cada función $f \in X$, se tiene que $f(\alpha) = 0$ si $X_\alpha = \{g \in S : g(\alpha) = 0\}$ o $f(\alpha) = 1$ si $X_\alpha = \{g \in S : g(\alpha) = 1\}$. En otras palabras, el valor de f en α no depende de f. Esto significa que X es un con-

junto unitario. Pero $X \in V$, lo cual contradice el hecho de que V es un ultrafiltro no principal.

Por 1, 2, y 3 se tiene que κ es fuertemente inaccesible. ■

Supóngase que existe una medida sobre $\mathbb{R}$ y que tal medida posee un átomo A. Entonces, por el teorema anterior, $|A| \geq \kappa$ donde κ es el mínimo cardinal fuertemente inaccesible; esto significa que $\kappa \leq |\mathbb{R}| = 2^{\aleph_0}$, lo cual no puede ser. En efecto, como κ es fuertemente inaccesible, $2 < \kappa$ y $\aleph_0 < \kappa$, luego, $2^{\aleph_0} < \kappa$. Así que, por el teorema de Ulam, lo que resulta es que debe existir una medida sobre $2^{\aleph_0}$ en cuyo caso, $2^{\aleph_0}$ es más grande que un cardinal débilmente inaccesible.

Así, la búsqueda por extender la medida de Lebesgue, abre paso al estudio de los cardinales grandes, y en particular al estudio de los cardinales medibles. Sin embargo, existen otros cardinales de tamaños más grandes como por ejemplo los cardinales de Mahlo, los compactos, los supercompactos, cardinales de Woodin, entre otros. Esto muestra que hay todo un universo por encima de los cardinales que se abordan en este trabajo, y que incluso respecto a los cardinales medibles, queda mucho por decir. Estos resultados no se mencionan en este trabajo por cuanto superan las expectativas y los objetivos del mismo.

Comentarios Finales

1. Una de las cuestiones que se abordan en este trabajo consiste en explorar la posibilidad de extender la medida de Lebesgue a todo $\mathbb{R}$. Se sabe que bajo el axioma de elección y exigiendo la propiedad de invariancia bajo traslación, no es posible que exista una medida μ sobre $\mathbb{R}$ que sea extensión de la de Lebesgue. Si se conserva AC pero no se exige invariancia bajo traslaciones, se tiene que es posible la existencia de una medida sobre $\mathbb{R}$. Sin embargo, la hipótesis del continuo debe ser falsa. Más aún, el cardinal del continuo, $2^{\aleph_0}$, debe ser como mínimo del tamaño de un débilmente inaccesible.

2. Si existe una medida sobre algún conjunto A, el teorema de Ulam garantiza que existe una medida bivaluada sobre algún conjunto X o existe una medida sobre $2^{\aleph_0}$. La existencia de medidas bivaluadas son el punto de partida del estudio de ciertos cardinales grandes, los medibles. De otro lado, la posibilidad de una medida sobre $2^{\aleph_0}$ hace pensar también en los cardinales débilmente inaccesibles que es el tipo más básico de cardinal grande. El estudio del problema de la

medida, desde el punto de vista conjuntista, expande el universo del infinito a tamaños inimaginables.

Bibliografía

[**A**] Tom M. **Apostol**, *Análisis Matemático*, Segunda Edición, Editorial Reverté, S. A., Barcelona, 1991.

[**B**] Robert G. **Bartle**, *The Elements of Integration*, Jhon Wiley y Sons, Inc., New York, 1966.

[**E**] Herbert B. **Enderton,** *A Mathematical Introduction to Logic*, Academic Press, New York, 1972.

[**HJ**] Karel **Hrbacek** y Thomas **Jech**, *Introduction to Set Theory*, Third edition. Marcel Dekker, Inc., New York, 1999.

[**I**] Carlos **Ivorra** Castillo, *Pruebas de Consistencia*, http://www.uv.es/ivorra/Libros/CONJUNTOS.pdf, (libro gratuito).

[**J**] Thomas **Jech**, *Set Theory*, Third Edition. Springer, 2003.

[**Ji**] Miguel Antonio **Jiménez**, *Medida, Integración y Funcionales*, Pueblo y Educación La Habana,1989.

[**K**] Akihiro **Kanamori**, *The Higher Infinite*, Springer-Verlag, Heidelberg, 1994.

[**Ku**] Kenneth **Kunen**, *Set Theory–An Introduction to Independence Proofs*, Elsevier Science Publishers B. V., Amsterdam, 1980.

[**N**] Isidor Pavlovich **Natanson**, *Theory of Functions of a Real Variable*, Vol. I, Frederick Ungar Publishing Co., New York, 1955.

[**R**] Guillermo **Restrepo** Sierra, *Teoría de la Integración*, Universidad del Valle, Cali, 2004.

[**S**] John R. **Steel**, *Set Theory*, http://math.berkeley.edu/∼steel/papers/Publications.html. Notas sobre teoría de Conjuntos, Octubre 20 de 2003.

[**U**] Piotr Lavréntievich **Ulyánov** y Mijail Ivánovich **Dyachenko**, *Análisis Real – Medida e Integración*, Addison-Wesley, Madrid, 2000.

[**V**] Andrés **Villaveces**, *La medida de Lebesgue: ¿Por qué no es total? ¿Cómo lograr su totalidad?*, Lecturas Matemáticas, Vol. X, No. 1-2-3, Sociedad Colombiana de Matemáticas, Bogotá, 1989.