INTRODUCCIÓN A LA TEORÍA DE SUPERFICIES MINIMALES EN $\mathbb{R}^3$

CARLOS JAVIER ACHIPÍZ CHAVEZ

UNIVERSIDAD DEL CAUCA
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES, EXACTAS Y DE LA EDUCACIÓN
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
POPAYÁN

2007

INTRODUCCIÓN A LA TEORÍA DE SUPERFICIES MINIMALES EN $\mathbb{R}^3$

CARLOS JAVIER ACHIPÍZ CHAVEZ

PROPUESTA DE TRABAJO DE GRADO

En la modalidad de seminario presentado como requisito parcial para optar al título de matemático

Director

ELKIN DARÍO CÁRDENAS DÍAZ

UNIVERSIDAD DEL CAUCA

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES, EXACTAS Y DE LA EDUCACIÓN

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

POPAYÁN

2007

INTRODUCCIÓN A LA TEORÍA DE SUPERFICIES MINIMALES EN $\mathbb{R}^3$

CARLOS JAVIER ACHIPÍZ CHAVEZ

DOCUMENTO DEL SEMINARIO DE GRADO, REALIZADO EN EL GRUPO DE SEMINARIO DE FUNDAMENTOS EN MATEMÁTICA

UNIVERSIDAD DEL CAUCA
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES, EXACTAS Y DE LA EDUCACIÓN
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
POPAYÁN
2007

Nota de aceptación

Director

Profesor Elkin Dario Cardenas Díaz

Comité evaluador

Magister Gerardo Loaiza

Magister Hector Efrén Guerrero .

Popayán, fecha de sustentación: Diciembre 3 de 2007

CONTENIDO

Agradecimientos

Doy gracias a Dios por permitirme tener el privilegio de culminar esta etapa de mi vida y los mas sinceros agradecimientos al profesor Elkín Cárdenas, director de mi trabajo de grado, quien con sus enseñanzas, dedicación y paciencia me ha motivado a ser una gran persona diligente y esforzada.

A mi madre Evangelina Chávez, mis hermanos Hector, Wilmar y Yolima, mi tía Ninfa y demás familiares quienes con su esfuerzo hicieron que esta meta sea toda una realidad.

A cada uno de los profesores del departamento de matemáticas, a nuestros compañeros y amigos.

Introducción

El estudio de las superficies minimales en $\mathbb{R}^3$ se remonta a los orígenes del Cálculo Variacional y de la Geometría Diferencial Clásica, en los tiempos de Euler y Lagrange (s.XVIII). Cuando L. Lagrange, en sus memorias *Essai d'une nouvelle methode pour déterminer les maxima des formules integrales indefinies* (**Ensayo de un nuevo método para determinar los máximos de las fórmulas integrales indefinidas**) (1762) desarrollo un algoritmo para el cálculo de variaciones que dio lugar a lo que hoy conocemos como la ecuación diferencial de Euler-Lagrange. En este trabajo trató entre otros el problema de encontrar una superficie con contorno prefijado y área mínima, esto es, **entre todas las superficies en el espacio $\mathbb{R}^3$ con un borde dado, encontrar aquellas que tengan área mínima** y como consecuencia estableció la ecuación que satisfacen los grafos minimales $z = f(u, v)$:

$$(1 + f_v^2)f_{uu} - 2f_u f_v f_{uv} + (1 + f_u^2)f_{vv} = 0, \tag{1}$$

donde los subíndices u y v denotan las correspondientes derivadas parciales. Además la Catenoide, el Helicoide y el plano fueron las únicas superficies minimales conocidas hasta el año de 1832.

Posteriormente Meusnier en 1776 presentó una interpretación geométrica de la ecuación de los grafos minimales, (1), él notó que la ecuación (1) nos expresaba el hecho de que en dichas superficies su curvatura media, es cero para todo punto perteneciente a la superficie.

En 1861 Karl Weierstrass expuso una nueva forma de ver y obtebner superficies minimales, en el seminario matemático de la Universidad de Berlin y las comunico a la academia de Berlin en 1866. Esta mismas fórmulas fueron obtenidas por Enneper independientemente.

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Elementos de Geometría díferencial

A continuación se presentan algunos conceptos básicos de la geometría diferencial y el análisis los cuales nos serán de gran utilidad en el desarrollo de los siguientes capítulos.

En primer lugar definimos lo que es una *superficie regular*, lo cual nos permitirá contar con un objeto matemático que capture la idea intuitiva de una superficie suave.

Definición 1.1 (Superficie regular). *Un subconjunto $M \subset \mathbb{R}^3$ es una superficie regular si, para cada $p \in M$, existe una vecindad V en $\mathbb{R}^3$ y una función $X : U \to V \cap M$ de un conjunto abierto $U \subseteq \mathbb{R}^2$ sobre $V \cap M \subset \mathbb{R}^3$ tal que (fig.1.1):*

1. *X es diferenciable, (es decir X es de clase C^∞).*
2. *X es un homeomorfismo, es decir una función biyectiva continua con inversa $X^{-1} : V \cap M \to U$ continua.*
3. *Para cada $q \in U$, la diferencial $dx_q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ es inyectiva.*

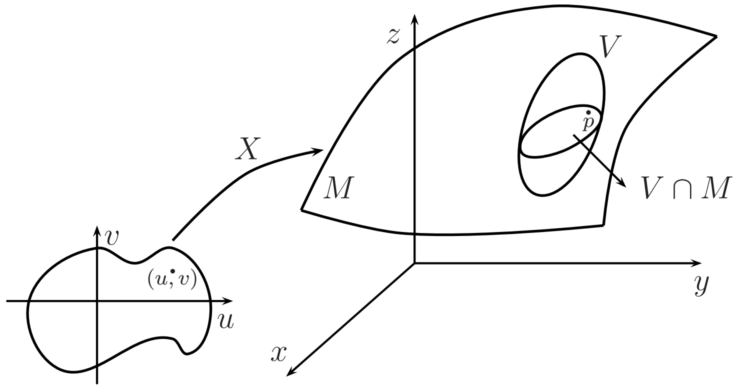


Figura 1.1: Interpretación geométrica de la definición (1.1)

A la función X se le llama parametrización de M en p o un sistema de coordenadas (locales) de M en p. Existe otro tipo de superficie, las *superficies parametrizadas* que definiremos a continuación.

Definición 1.2 (Superficie parametrizada). *Una superficie parametrizada es una función diferenciable $X : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ de un subconjunto abierto $U \subset \mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^3$. El conjunto $X(U) \subset \mathbb{R}^3$ se llama la traza de X. La superficie parametrizada X es regular si la diferencial $dx_q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ es inyectiva para todo $q \in U$ (es decir los vectores $\partial X/\partial u$, $\partial X/\partial v$ son linealmente independientes para todo $q \in U$). Un punto $q \in U$ donde dx_q no es inyectiva se llama punto singular de X.*

Es posible probar ([7], p.79) que dada una superficie parametrizada regular X, la traza $X(U)$ es localmente una superficie regular, independientemente para cada $p \in X(U)$ existe un entorno V tal que $V \cap X(U)$ es una superficie regular. En los párrafos siguientes M denotará una superficie regular, p un punto en M y $q = X^{-1}(p)$. Hay varias estructuras geométricas asociadas a una superficie regular, una de ellas es la *primera forma fundamental*, que relaciona el producto interno en la superficie con el producto interno de $\mathbb{R}^3$ y que definiremos en los párrafos siguientes.

Definición 1.3. *Dado $p \in M$ por un vector tangente a M en p, se entiende el vector tangente $\alpha'(0)$ de una curva parametrizada diferenciable $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to M$ tal que $\alpha(0) = p$.*

Observación 1. Si $w \in \mathbb{R}^3$, es un vector tangente a M en p, entonces existe una curva diferenciable $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to M$ tal que $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) = w$.

Con éstas condiciones $\alpha(t)$ puede ser vista como $\alpha(t) = X\big(\gamma(t)\big)$, siendo γ una función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^2$ tal que $\gamma(0) = q$. Teniendo en cuenta que

$$X(u, v) = \big(x(u, v), y(u, v), z(u, v)\big) \quad y \quad \gamma(t) = \big(u(t), v(t)\big),$$

tenemos que $\alpha(t) = X\big(\gamma(t)\big) = \big(x(\gamma(t)), y(\gamma(t)), z(\gamma(t))\big)$, calculando su derivada obtenemos

$$\alpha'(t) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u}\big(\gamma(t)\big) & \dfrac{\partial x}{\partial v}\big(\gamma(t)\big) \\ \dfrac{\partial y}{\partial u}\big(\gamma(t)\big) & \dfrac{\partial x}{\partial v}\big(\gamma(t)\big) \\ \dfrac{\partial z}{\partial u}\big(\gamma(t)\big) & \dfrac{\partial z}{\partial v}\big(\gamma(t)\big) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_1'(t) \\ \\ \gamma_2'(t) \end{pmatrix},$$

para $t = 0$, tenemos

$$\alpha'(0) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u}(q) & \dfrac{\partial x}{\partial v}(q) \\ \dfrac{\partial y}{\partial u}(q) & \dfrac{\partial y}{\partial v}(q) \\ \dfrac{\partial z}{\partial u}(q) & \dfrac{\partial z}{\partial v}(q) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u' \\ \\ v' \end{pmatrix}.$$

Luego

$$\begin{aligned} \alpha'(0) &= \left(\frac{\partial x}{\partial u}u' + \frac{\partial x}{\partial v}v', \frac{\partial y}{\partial u}u' + \frac{\partial y}{\partial v}v', \frac{\partial z}{\partial u}u' + \frac{\partial z}{\partial v}v'\right) \\ &= u'\left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u}\right) + v'\left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v}\right). \end{aligned}$$

Por consiguiente el vector tangente a M en p sería

$$w = \alpha'(0) = u'\frac{\partial X}{\partial u}(q) + v'\frac{\partial X}{\partial v}(q),$$

siendo

$$\frac{\partial X}{\partial u}(q) = \frac{\partial X}{\partial u} = \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u}\right)$$

$$\frac{\partial X}{\partial v}(q) = \frac{\partial X}{\partial v} = \left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v}\right).$$

En adelante usaremos la siguiente notación para identificar las derivadas parciales de X

$$\frac{\partial X}{\partial u} = X_u \qquad\qquad \frac{\partial X}{\partial v} = X_v,$$

así

$$w = \alpha'(0) = u'X_u + v'X_v. \tag{1.1}$$

Lema 1.1. *Dada una superficie M y $X : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to M$ una parametrización de M en p. El subespacio vectorial de dimensión 2, $dX_q(\mathbb{R}^2) \subset \mathbb{R}^3$ coincide con el conjunto de vectores tangentes a M en $X(q) = p$.*

Demostración. Ver ([7], p.75). $\square$

Definición 1.4. *Al subespacio vectorial definido en el lema 1.1, se le llamará plano tangente a M en p y se denotará por T_pM.*

Observación 2. De la definicion (1.4) tenemos que

$$T_pM = \{\alpha'(0) : \alpha : I \to M, \text{es una curva diferenciable tal que } \alpha(0) = p\}.$$

De la ecuación (1.1), T_pM se puede ver como

$$T_pM = \{u'X_u + v'X_v : u', v' \in \mathbb{R}\},$$

de ahí que la parametrización X determina una base $\{X_u, X_v\}$ para T_pM, pues los vectores X_u, X_v son linealmente independientes por ser M una superficie regular.

Consideremos una superficie regular $M \subset \mathbb{R}^3$, el producto interno usual en $\mathbb{R}^3$ induce en cada plano tangente T_pM un producto interno, que denotaremos por $\langle\ ,\ \rangle_p$, es decir, si $w_1, w_2 \in T_pM \subset \mathbb{R}^3$, entonces $\langle w_1, w_2\rangle_p$ es igual al producto interno de w_1 y w_2 como vectores en $\mathbb{R}^3$. A este producto interno, que es una forma bilineal (i.e., $\langle w_1, w_2\rangle_p = \langle w_2, w_1\rangle_p$ y $\langle w_1, w_2\rangle_p$ es lineal en w_1, w_2) corresponde a una forma cuadrática $I_p : T_pM \to \mathbb{R}$ dada por

$$I_p(w) = \langle w, w\rangle_p = \|w\|^2 \geq 0.$$

Definición 1.5 (Primera forma fundamental). *La forma cuadrática $I_p : T_pM \to \mathbb{R}$, que hemos definido en el párrafo anterior es la primera forma fundamental de la superficie M en p.*

La primera forma fundamental es la expresión de cómo la superficie M hereda el producto interno usual de $\mathbb{R}^3$, geométricamente nos permite hacer mediciones en la superficie (longitudes de curvas, ángulos entre vectores tangentes, áreas de regiones) sin necesidad de referirnos al espacio $\mathbb{R}^3$ que contiene a la superficie.

Podemos expresar la primera forma fundamental en términos de la base $\{X_u, X_v\}$ de T_pM asociada a la parametrización $X(u, v)$ en p. Como el vector tangente $w \in T_pM$ es el vector tangente a una curva parametrizada $\alpha(t) = X\big(u(t), v(t)\big)$, $t \in (-\epsilon, \epsilon)$, tal que $p = \alpha(0) = X(u_0, v_0)$, donde $q = (u_0, v_0)$,tenemos que

$$\begin{aligned} I_p\big(\alpha'(0)\big) &= \langle \alpha'(0), \alpha'(0)\rangle_p \\ &= \langle X_u u' + X_v v', X_u u' + X_v v'\rangle_p \\ &= \langle X_u, X_u\rangle_p (u')^2 + 2\langle X_u, X_v\rangle_p u'v' + \langle X_v, X_v\rangle_p (v')^2, \end{aligned}$$

donde los valores de las funciones que aparecen están evaluados en $t = 0$, los valores

$$E = \langle X_u, X_u\rangle_p, \qquad F = \langle X_u, X_v\rangle_p, \qquad G = \langle X_v, X_v\rangle_p, \tag{1.2}$$

son los coeficientes de la primera forma fundamental en la base $\{X_u, X_v\}$ de T_pM. Al hacer variar p en la vecindad correspondiente a $X(u, v)$ obtenemos funciones $E(u, v)$, $F(u, v)$,

$G(u,v)$ que son diferenciables en esa vecindad, tenemos entonces que

$$\begin{aligned} I_p\big(\alpha'(0)\big) &= \langle \alpha'(0), \alpha'(0)\rangle_p \\ &= E(u')^2 + 2Fu'v' + G(v')^2. \end{aligned}$$

En lo que resta de este trabajo omitiremos el subíndice p en el producto interno, salvo cuando haya riesgo de confusión. Recordemos que como $M \subset \mathbb{R}^3$, entonces un abierto Ω en M está dado por $\Omega = V \cap M$, siendo V un abierto en $\mathbb{R}^3$.

Otra estructura geométrica importante es la *segunda forma fundamental* de M. Para definir este objeto, consideremos $\Omega \subset M$ abierto y una función diferenciable $N : \Omega \subset M \to \mathbb{R}^3$ que asocia a cada $p \in \Omega$ un vector normal unitario en p, es decir un vector perpendicular al plano tangente que pasa por $X(q) = p$. La función N es un campo diferenciable de vectores normales unitarios en Ω, diremos que una superficie regular es *orientable* si admite un campo diferenciable de vectores normales unitarios definidos en toda la superficie; un campo con tales características es una *orientación* de M. Observemos que, una vez escogida una orientación de M, la función $N : M \to \mathbb{R}^3$ toma sus valores en la esfera unitaria $S^2 \subset \mathbb{R}^3$, a la función $N : M \to S^2$ se le conoce como la *aplicación de Gauss* de M. Es posible probar ([7], p.140), que la diferencial $dN_p : T_pM \to T_pM$ de la función de Gauss es una función lineal auto adjunta, definimos ahora la *segunda forma fundamental* de una superficie regular.

Definición 1.6 (Segunda forma fundamental). *La forma cuadrática $II_p : T_pM \to \mathbb{R}$, definida por*

$$II_p(v) = -\langle dN_p(v), v\rangle,$$

es la segunda forma fundamental de M en p.

Procediendo de manera semejante a como lo hicimos en la primera forma fundamental, podemos calcular los coeficientes asociados a la expresión de la segunda forma fundamental en la base $\{X_u, X_v\}$ de T_pM. Estos coeficientes, que denotaremos por e, f, g pueden calcularse en términos de la derivada de X y de N y sus expresiones son:

$$
\begin{aligned}
e &= -\langle N_u, X_u \rangle = \langle N, X_{uu} \rangle, \\
f &= -\langle N_v, X_u \rangle = \langle N, X_{uv} \rangle, \\
&= \langle N, X_{vu} \rangle = -\langle N_u, X_v \rangle, \\
g &= -\langle N_v, X_v \rangle = \langle N, X_{vv} \rangle.
\end{aligned}
$$

Definición 1.7 (Curvatura media). *La curvatura media H de una superficie M en el punto p es*

$$
H = \frac{1}{2}\left(\frac{Eg - 2Ff + Ge}{EG - F^2}\right) \tag{1.3}
$$

Los coeficientes de la primera y segunda forma fundamental nos permitirán expresar, en términos de la parametrización de una superficie, varios conceptos geométricos como el área y la curvatura.

Definición 1.8. *Sea $X(u,v) = \big(u, v, f(u,v)\big)$ la parametrización de una superficie M en un punto $p \in M$, entonces una superficie definida con ésta parametrización se dice que viene dada en la forma de Monge, en otras palabras son aquellas superficies que se pueden ver como la gráfica de una función diferenciable $f(u,v)$.*

Definición 1.9. *Sea M una superficie regular y $R \subset M$ una región, consideremos la parametrización $X : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to M$ en la forma de Monge, tal que $R \subset X(U)$, entonces se define el área de R como*

$$
A(R) = \iint_Q \sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}\, du\, dv; \quad \textit{donde} \quad Q = X^{-1}(R).
$$

Ahora que contamos con las definiciones anteriores estamos listos para estudiar la geometría de la superficies con curvatura media cero.

Teorema 1.1 (Teorema de la función inversa). *Sea* $E \subseteq \mathbb{R}^n$ *abierto y* f *una función de* $E \subseteq \mathbb{R}^n$ *en* $\mathbb{R}^n$, $f \in C^1$ *y si* $f'(a)$ *es invertible para algún* $a \in E$ *y* $b = f(a)$*, entonces;*

a) *Existen conjuntos abiertos* U *y* V *en* $\mathbb{R}^n$ *tales que* $a \in U$, $b \in V$, f *es uno a uno en* U *y* $f(U) = V$.

b) *Si* g *es la inversa de* f *en* V*, definida por* $g(f(x)) = x, \forall x \in U$*, entonces* $g \in C^1(V)$.

Demostración. Ver ([10], p.221). □

Teorema 1.2 (Teorema de la función implícita). *Sea* $f = (f_1, f_2, ..., f_n)$ *una función vectorial definida en una conjunto abierto* E *de* $\mathbb{R}^{n+k}$ *con valores en* $\mathbb{R}^n$*. Supongamos que* $f \in C^1$ *en* E*. Sea* (x_0, t_0) *un punto en* E *en el que* $f(x_0, t_0) = 0$ *y el determinante jacobiano* $det J_{t_0}$ *es distinto de cero,* $(det J_{t_0} \neq 0)$ *entonces existe un conjunto abierto k-dimencional* T_0 *que contiene a* t_0 *y una función vectorial* g*, y sólo una, definida en* T_0 *con valores en* $\mathbb{R}^n$*, tal que:*

a) $g \in C^1$ *en* T_0.

b) $g(t_0) = x_0$.

c) $f\big(g(t), t\big) = 0$*, para todo* $t \in T_0$.

Demostración. Ver ([10], p.223). □

Lema 1.2. *Sea* $M \subset \mathbb{R}^3$ *una superficie regular y* $p \in M$*, entonces existe un entorno* V *de* p *en* M *tal que* V *es la gráfica de una función diferenciable que tiene una de las tres formas siguientes*

$$z = f(x, y), \qquad y = g(x, z), \qquad x = h(y, z).$$

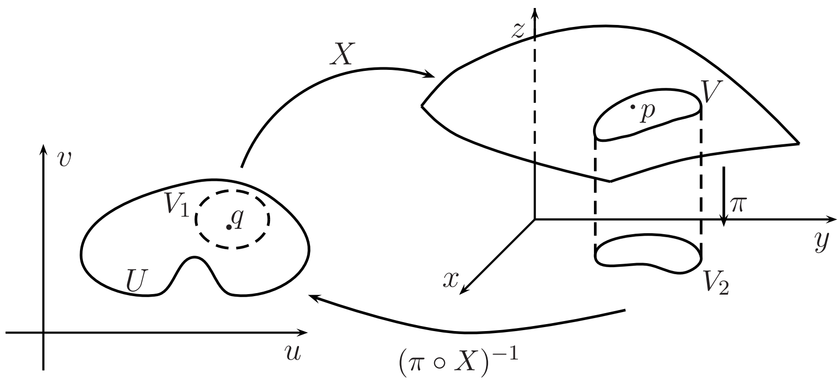


Figura 1.2: Interpretación geométrica del lema 1.2

Demostración. Sea $X : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to M$ una parametrización de M en p siendo $X(u,v) = \big(x(u,v), y(u,v), z(u,v)\big)$, $(u,v) \in U$.

Como M es una superficie regular, por la definición 1.1 parte (iii) alguno de los determinantes jacobianos

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}, \qquad \frac{\partial(x,z)}{\partial(u,v)}, \qquad \frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)},$$

no es cero en $X^{-1}(p) = q$.

Sin pérdida de generalidad supongamos que $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \neq 0$ y consideremos la función $\pi \circ X : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, donde π es la proyección $\pi(x,y,z) = (x,y)$.

Entonces $\big(\pi \circ X\big)(u,v) = \big(x(u,v), y(u,v)\big)$, y, como $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \neq 0$, podemos aplicar el teorema de la función inversa para garantizar la existencia de entornos V_1 de q y V_2 de $\big(\pi \circ X\big)(q)$ tal que la función $\pi \circ X$, es una función que admite inversa y la inversa es diferenciable, es decir $\big(\pi \circ X\big)^{-1}(x,y) = \big(u(x,y), v(x,y)\big)$, (fig. 1.2). Si componemos ahora $\big(\pi \circ X\big)^{-1}$ con

X tenemos

$$
\begin{aligned}
X \circ \big(\pi \circ X\big)^{-1}(x,y) &= X\Big(\big(\pi \circ X\big)^{-1}(x,y)\Big)\\
&= X\big(u(x,y), v(x,y)\big)\\
&= \Big(x\big(u(x,y), v(x,y)\big), y\big(u(x,y), v(x,y)\big), z\big(u(x,y), v(x,y)\big)\Big) \qquad (1.4)
\end{aligned}
$$

Sea $h = \pi \circ X$, entonces

$$
\begin{aligned}
h \circ h^{-1}(x,y) &= h\big(h^{-1}(x,y)\big) = h\big(\pi \circ X)^{-1}(x,y)\big)\\
&= h\big(u(x,y), v(x,y)\big) = \big(\pi \circ X\big)\big(u(x,y), v(x,y)\big)\\
&= \pi\Big(x\big(u(x,y), v(x,y)\big), y\big(u(x,y), v(x,y)\big), z\big(u(x,y), v(x,y)\big)\Big)\\
&= \Big(x\big(u(x,y), v(x,y)\big), y\big(u(x,y), v(x,y)\big)\Big) = (x,y),
\end{aligned}
$$

de ahí que

$$
x\big(u(x,y), v(x,y)\big) = x, \qquad\qquad y\big(u(x,y), v(x,y)\big) = y. \qquad (1.5)
$$

Luego reemplazando (1.5) en (1.4), tenemos:

$$
X \circ (\pi \circ X)^{-1}(x,y) = \Big(x, y, z\big(u(x,y), v(x,y)\big)\Big).
$$

Definamos ahora $f : V_1 \to \mathbb{R}$ tal que $f(x,y) = z\big(u(x,y), v(x,y)\big)$, entonces

$$
V = X(V_1) = \{(x, y, f(x,y)) : x, y \in V_1\}.
$$

Por lo tanto M en un entorno de un punto p, se puede ver como la gráfica de una función diferenciable. $\square$

Si $X(u,v) = \big(x(u,v), y(u,v), z(u,v)\big)$ es una parametrización de una superficie M en un punto P, entonces podemos definir la siguiente matriz $\mathcal{G}$ como

$$
\mathcal{G} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}, \qquad (1.6)
$$

donde E, G y F son los coeficientes de la primera forma fundamental, luego

$$det\,\mathcal{G} = EG - F^2.$$

Se puede ver, usando la identidad de Lagrange que

$$det\,\mathcal{G} = EG - F^2 = \left|\frac{\partial X}{\partial u_1} \wedge \frac{\partial X}{\partial u_2}\right|^2, \tag{1.7}$$

donde el símbolo $\wedge$ está denotando el producto cruz entre vectores.

Observación 3. Sea $X(u,v) = \big(u, v, f(u,v)\big)$ una parametrización en la forma de Monge de una superficie M en un punto p. Entonces de la ecuación (1.2), los coeficientes de la primera forma fundamental son

$$E = 1 + f_u^2 \qquad G = 1 + f_v^2 \qquad F = f_u f_v. \tag{1.8}$$

Al reemplazar E, F, G dados por la ecuación (1.8) en (1.7), tenemos que

$$det\,\mathcal{G} = EG - F^2 = 1 + f_u^2 + f_v^2. \tag{1.9}$$

1.2. Elementos del análisis complejo

Definición 1.10. *Sea D un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^2$, el laplaciano Δf de una función de de clase C^2, $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ esta definido por*

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}, \quad (u,v) \in D.$$

Decimos que f es armónica en D si $\Delta f = 0$.

Sea $\mathbb{C}$ el plano complejo e identifiquemos $\mathbb{C}$ con $\mathbb{R}^2$ por medio del isomorfismo

$$\zeta = u + iv \in \mathbb{C} \to (u,v) \in \mathbb{R}^2.$$

Recordemos que una función $f : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es analítica (u holomorfa) en $\zeta_0 \in D$, si al escribir

$$f(\zeta) = f_1(u, v) + i\, f_2(u, v),$$

las funciones reales f_1 y f_2 tienen derivadas parciales continuas de primer orden que satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann.

$$\frac{\partial f_1}{\partial u} = \frac{\partial f_2}{\partial v}, \qquad\qquad \frac{\partial f_1}{\partial v} = -\frac{\partial f_2}{\partial u}.$$

Definición 1.11. *Sea D un abierto en $\mathbb{C}$. Sea $f : D \to \mathbb{C}$, diremos que f es holomorfa en $\zeta_0 \in D$ si es diferenciable en todos los puntos de un entorno de ζ_0. Diremos que f es holomorfa en D si lo es todos sus puntos*

Nota: Aquí en lo sucesivo llamaremos dominio a un cunjunto abierto y conexo.

Si $f(\zeta)$ es una función analítica, dada por $f(\zeta) = f_1(u, v) + i\, f_2(u, v)$, entonces se puede mostrar que ([2], p.24) la derivada de f se puede ver como

$$\frac{\partial f}{\partial \zeta} = f'(\zeta) = \frac{\partial f_1}{\partial u} + i\frac{\partial f_2}{\partial u} = \frac{\partial f_2}{\partial v} - i\frac{\partial f_1}{\partial v} \tag{1.10}$$

Definición 1.12. *Sea $R(\zeta) = \dfrac{P(\zeta)}{Q(\zeta)}$ una función compleja, se dice que $\zeta_0 \in \mathbb{C}$ es un polo de $R(\zeta)$, si $Q(\zeta_0) = 0$ y $P(\zeta_0) \neq 0$, donde el orden de un polo es igual al orden del correspondiente cero.*

Definición 1.13. *Una función f es meromorfa en un dominio $D \subseteq \mathbb{C}$, si los únicos puntos de D en los que f no es analítica son polos.*

Capítulo 2

Superficies que minimizan área

2.1. Ecuación de los grafos minimales

El estudio de las superficies minimales en $\mathbb{R}^3$ se remonta a los orígenes del Cálculo Variacional y de la Geometría Diferencial Clásica, en los tiempos de Euler y Lagrange (s.XVIII). Cuando L. Lagrange, en sus memorias *Essai d'une nouvelle methode pour déterminer les maxima des formules integrales indefinies* (1762) desarrolló un algoritmo para el cálculo de variaciones que dio lugar a lo que hoy conocemos como la ecuación diferencial de Euler-Lagrange. En este trabajo se trató entre otros el problema de encontrar una superficie con contorno prefijado y área mínima, esto es, **entre todas las superficies en el espacio $\mathbb{R}^3$ con un borde dado, encontrar aquellas que tengan área mínima** y como consecuencia estableció la ecuación que satisfacen los grafos minimales $z = f(u, v)$:

$$(1 + f_v^2)f_{uu} - 2f_u f_v f_{uv} + (1 + f_u^2)f_{vv} = 0, \tag{2.1}$$

donde los subíndices u y v denotan las correspondientes derivadas parciales. Esta ecuación cuasilineal elíptica de segundo orden no fue escrita explícitamente por Lagrange[1], quien se

[1] La ecuación (2.1) fue dada a conocer por Euler.

preocupó también por estudiar el mismo problema anterior para variaciones de volumen constante.

A continuación mostraremos como se obtiene la ecuación (2.1). Sabemos que el área de la porción de la superficie que corresponde a una región U del plano $u\,v$ es:

$$A = \iint_U \sqrt{1 + (f_u)^2 + (f_v)^2}\,du\,dv = \iint_U \sqrt{EG - F^2}\,du\,dv.$$

Consideremos una curva Γ dada en el espacio $\mathbb{R}^3$. Esta curva se supondrá cerrada, sin autointersecciones y suficientemente regular, la proyección de Γ sobre el plano $u\,v$ es una curva plana, que llamaremos γ, que también supondremos cerrada, sin autointersecciones y suficientemente regular. La propia curva Γ puede escribirse como el conjunto de puntos $(u, v, z_\gamma(u, v))$ en donde se supone que $(u, v) \in \gamma$ y donde $z_\gamma(u, v)$ es la función fija, definida solamente en γ y que describe la altura de la curva Γ. Denotemos U la región de plano cuyo borde es γ. (ver figura 2.1)

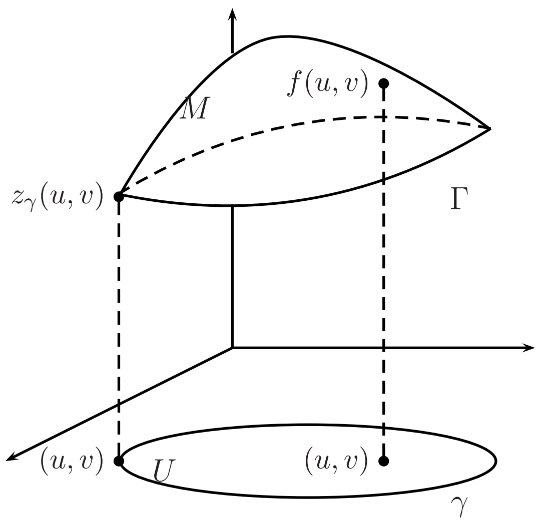


Figura 2.1.

De acuerdo con el lema 1.2, a toda superficie regular se le puede hallar una parametrización en la forma de Monge en un entorno de un punto $p \in M$, de ahí que la descripción general en la forma de Monge de una superficie que tenga a Γ como borde tiene la siguiente parametrización

$$X(u,v) = (u,v,f(u,v));\ (u,v) \in U \quad \text{donde} \quad f(u,v) = z_\gamma(u,v) \quad \text{para} \quad (u,v) \in \gamma.$$

La idea esencial de la derivación de la fórmula de Lagrange es la siguiente. Supongamos que la función $f(u,v)$ (aún desconocida) corresponde a la superficie M con borde Γ y de área mínima entre todas las que satisfagan las condiciones anteriores. Sea $h(u,v)$ una función fija, (de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$) suficientemente regular, definida en la región U, y a la que exigimos satisfacer la condición

$$h(u,v) = 0 \quad \text{para} \quad (u,v) \in \gamma.$$

En estas condiciones, tenemos una familia de superficies, que podemos denotar mediante $M(h,\epsilon)$ cuya descripción es:

$$(u,v) \in U \longrightarrow (u,v,f(u,v) + \epsilon\, h(u,v)).$$

Que se construyen a partir de la superficie M (aún desconocida), tomando como dato de deformación la función $h(u,v)$; aquí ϵ juega el papel de un parámetro, de manera que esta familia es una familia *uniparamétrica* de superficies, todas las cuales tienen a la curva Γ como borde, ya que para cualquier valor del parámetro ϵ se verifica la condición

$$f(u,v) + \epsilon\, h(u,v) = z_\gamma(u,v) \;\; \text{para} \;\; (u,v) \in \gamma.$$

El área, $A_{h,\epsilon}$, de la superficie $M(h,\epsilon)$ está dada por:

$$A_{h,\epsilon} = \iint_U \sqrt{1 + (f_u + \epsilon\, h_u)^2 + (f_v + \epsilon\, h_v)^2}\, du\, dv. \tag{2.2}$$

Si la superficie M (descrita por $f(u,v)$) tiene realmente área mínima entre todas las superficies con el mismo borde, también debe tener área mínima entre las de la familia uniparamétrica anterior $M(h,\epsilon)$. Esto significa que la función $A_{h,\epsilon}$ debe tener un mínimo en $\epsilon = 0$, es decir

$$0 = \left.\frac{dA_{h,\epsilon}}{d\,\epsilon}\right|_{\epsilon=0}. \tag{2.3}$$

Derivando con respecto a ϵ en $A_{h,\epsilon}$ en la ecuación (2.2) tenemos que;

$$\frac{dA_{h,\epsilon}}{d\,\epsilon} = \frac{d}{d\,\epsilon}\iint_U \sqrt{1+(f_u+\epsilon\,h_u)^2+(f_v+\epsilon\,h_v)^2}\,du\,dv$$

como el integrando no depende de ϵ, entonces la derivada la puedo incluir dentro de la integral de manera que;

$$\frac{dA_{h,\epsilon}}{d\,\epsilon} = \iint_U \frac{(f_u+\epsilon h_u)h_u+f_v+\epsilon h_v)h_v}{\sqrt{1+(f_u+\epsilon\,h_u)^2+(f_v+\epsilon\,h_v)^2}}\,du\,dv, \tag{2.4}$$

evaluando en $\epsilon = 0$ y teniendo en cuenta (2.3) y (1.9), la ecuación (2.4) se transforma en:

$$\iint_U \frac{f_u\,h_u+f_v\,h_v}{\sqrt{1+(f_u)^2+(f_v)^2}}\,du\,dv = \iint_U \frac{f_u\,h_u+f_v\,h_v}{\sqrt{EG-F^2}}\,du\,dv = 0. \tag{2.5}$$

Así pues, si la superficie M es mínima, la condición (2.5) debe satisfacerse para cualquier elección de la función auxiliar h que satisfaga la condición de la anulación sobre γ. Por la linealidad de la integral, de (2.5) tenemos que:

$$\iint_U \frac{f_u\,h_u+f_v\,h_v}{\sqrt{EG-F^2}}\,du\,dv = \iint_U \frac{f_u\,h_u}{\sqrt{EG-F^2}}\,du\,dv + \iint_U \frac{f_v\,h_v}{\sqrt{EG-F^2}}\,du\,dv \tag{2.6}$$

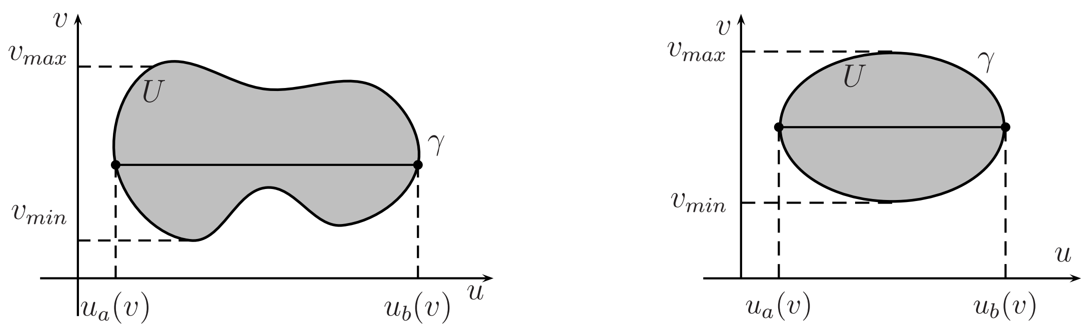
Transformemos las anteriores integrales de manera que no aparezcan las derivadas de h. Comencemos con

$$\iint_U \frac{f_u\,h_u}{\sqrt{EG-F^2}}\,du\,dv, \tag{2.7}$$

sin perdida de generalidad supondremos que la región U es convexa y que la intersección de γ con las rectas paralelas a los ejes tiene sólo dos puntos, por consiguiente U puede escribirse como

$$U = \{(u,v)\in\mathbb{R}^2 : v_{min} \le v \le v_{max}, u_a(v) \le u \le u_b(v)\}. \tag{2.8}$$

Esta restricción simplifica mucho los cálculos, pero no es esencial en el resultado, pues de no ser así, la región U se podría dividir en subregiones expresadas por (2.8) y la integral se



Región no convexa   Región convexa

Figura 2.2: Límites de integración

calcularía en cada una de esas subregiones, (ver figura 2.2), de tal forma que la ecuación (2.7) se puede ver como

$$\iint_U \frac{f_u\, h_u}{\sqrt{EG-F^2}}\, du\, dv = \int_{v\,\mathrm{min}}^{v\,\mathrm{max}} dv \int_{u_a(v)}^{u_b(v)} \frac{f_u}{\sqrt{EG-F^2}}\, h_u\, du. \tag{2.9}$$

Ahora integrando por partes respecto a u en (2.9) obtenemos

$$\int_{u_a(v)}^{u_b(v)} \frac{f_u}{\sqrt{EG-F^2}}\, h_u\, du = \frac{f_u}{\sqrt{EG-F^2}}\, h\,\Big|_{u_a(v)}^{u_b(v)}$$

$$- \int_{u_a(v)}^{u_b(v)} (\frac{\partial}{\partial u}\frac{f_u}{\sqrt{EG-F^2}})\, h\, du. \tag{2.10}$$

El término de borde no contribuye debido a que los dos puntos $(u_a(v), v)$, $(u_b(v), v)$ están por construcción sobre el borde γ y la función $h(u, v)$ se anula sobre γ, es decir

$$h(u_a(v), v) = 0 \ \text{ y } \ h(u_b(v), v) = 0,$$

de ahí que

$$\frac{f_u}{\sqrt{EG-F^2}}\, h\,\Big|_{u_a(v)}^{u_b(v)} = 0.$$

Por tanto la ecuación (2.10) se convierte en

$$\int_{u_a(v)}^{u_b(v)} \frac{f_u}{\sqrt{EG-F^2}}\, h_u\, du = -\int_{u_a(v)}^{u_b(v)} \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{f_u}{\sqrt{EG-F^2}}\right) h\, du.$$

Integrando respecto a v tenemos que:

$$\int_{v_{min}}^{v_{max}} \int_{u_a(v)}^{u_b(v)} \frac{f_u\, h_u}{\sqrt{EG-F^2}} du\, dv = -\int_{v_{min}}^{v_{max}} \int_{u_a(v)}^{u_b(v)} \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{f_u}{\sqrt{EG-F^2}}\right) du\, dv. \tag{2.11}$$

La importancia de (2.11) radica en que la derivada parcial que aparece ahora en el integrando se puede calcular fácilmente (conviene recordar que tanto f_u como f_v son funciones de u, v).

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{f_u}{\sqrt{EG-F^2}}\right) = \frac{\left(\frac{\partial}{\partial u} f_u\right)\sqrt{EG-F^2} - f_u\left(\frac{\partial}{\partial u}\sqrt{EG-F^2}\right)}{EG-F^2}. \tag{2.12}$$

Reemplazando la ecuación (1.9) en (2.12) y calculando la derivada tenemos que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{f_u}{\sqrt{EG-F^2}}\right) &= \frac{\left(\frac{\partial}{\partial u} f_u\right)\sqrt{1+f_u^2+f_v^2} - f_u\left(\frac{\partial}{\partial u}\sqrt{1+f_u^2+f_v^2}\right)}{1+f_u^2+f_v^2} \\
&= \frac{f_{uu}\sqrt{1+f_u^2+f_v^2} - f_u \frac{\left(f_u f_{uu} + f_v f_{uv}\right)}{\sqrt{1+f_u^2+f_v^2}}}{1+f_u^2+f_v^2} \\
&= \frac{f_{uu}(1+f_u^2+f_v^2) - f_u^2 f_{uu} - f_u f_v f_{uv}}{(1+f_u^2+f_v^2)^{3/2}} \\
&= \frac{f_{uu}(1+f_v^2) - f_u f_v f_{uv}}{(1+f_u^2+f_v^2)^{3/2}}.
\end{aligned} \tag{2.13}$$

Reemplazando nuevamente la ecuación (1.9) en (2.13) obtenemos

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{f_u}{\sqrt{EG-F^2}}\right) = \frac{f_{uu}\left(1+f_v^2\right) - f_u f_v f_{uv}}{\left(EG-F^2\right)^{3/2}}. \tag{2.14}$$

Finalmente, reemplazando (2.14) en (2.9) obtenemos:

$$\iint_U \frac{f_u\, h_u}{\sqrt{EG-F^2}}\, h\, du\, dv = -\iint_U \frac{f_{u\,u}(1+f_v^2) - f_u\, f_v\, f_{u\,v}}{(EG-F^2)^{3/2}}\, h(u,v).$$

Para el otro sumando que involucra h_v se produce de manera análoga. De ahí que tal procedimiento conduce a:

$$\iint_U \frac{f_v\, h_v}{\sqrt{EG-F^2}}\, h\, du\, dv = -\iint_U \frac{f_{v\,v}(1+f_u^2) - f_v\, f_u\, f_{u\,v}}{(EG-F^2)^{3/2}}\, h(u,v).$$

Así pues, la condición de que la superficie sea minimal, contenida en la ecuación (2.4), se convierte en:

$$\iint_U \frac{f_{u\,u}(1+f_v^2) - 2f_u\, f_v\, f_{u\,v} + f_{v\,v}(1+f_u^2)}{(EG - F^2)^{3/2}}\, h(u,v)\, du\, dv = 0,$$

y como esta ecuación debe satisfacerse para cualquier función $h(u,v)$ (con la sola exigencia de anularse sobre el borde γ), es claro que la única posibilidad de que tal cosa ocurra es que

$$f_{u\,u}\big(1+f_v^2\big) - 2f_u\, f_v\, f_{u\,v} + f_{v\,v}\big(1+f_u^2\big) = 0,$$

que se conoce como ecuación de Lagrange para las superficies minimales. A pesar de su aspecto superficialmente inocente, como ecuación diferencial es bastante complicada: es no lineal y se conocen muy pocas soluciones explícitas. La búsqueda efectiva de superficies minimales requiere el uso de técnicas mucho más avanzadas y elaboradas. La dificultad de esta ecuación hizo que durante muchos años no se conocieran muchos ejemplos, hasta la aparición de la representación de Weierstrass, que trataremos en el capítulo cuarto.

A continuación presentamos un ejemplo sencillo de una superficie minimal, usando la ecuación (2.1).

Ejemplo 1. *El plano es una superficie minimal.*

Supongamos que el plano M está descrito por la parametrización $X(u,v)$ en la forma de Monge, dada por $X(u,v) = \big(u, v, f(u,v)\big)$, siendo $f(u,v) = Au + Bv + C, \quad A, B, C \in \mathbb{R}$.

Derivando $f(u,v)$ con respecto a u, v tenemos que:

$$f_u = A, \qquad\qquad f_v = B,$$

de ahí que

$$f_{uu} = 0, \qquad\qquad f_{vv} = 0, \qquad\qquad f_{uv} = 0.$$

Al sustituir éstos valores en la ecuación (2.1), es claro que ésta ecuación se satisface, de ahí el plano es una superficie minimal.

A finales del S.XVIII se obtuvieron otras superficies minimales relativamente sencillas. Una es el catenoide, que es la única superficie minimal de revolución ([7], p.205). El otro ejemplo de superficie minimal es el helicoide recto, que es la única superficie minimal reglada ([7], p.207).

2.2. Interpretación geométrica de la ecuación de los grafos minimales

En esta sección enfocaremos nuestro trabajo en demostrar a partir de la ecuación (2.1), la siguiente proposición: si la curvatura media de una superficie se anula en toda la superficie, entonces diremos que la superficie es minimal, dicha afirmación es más práctica para determinar si una superficie en $\mathbb{R}^3$ es minimal, pues como hemos comentado anteriormente esta ecuación cuasilineal elíptica es difícil de resolver, de hecho se conocen pocas soluciones de ella.

Cabe mencionar que Meusnier, quien en 1776 presentó una interpretación geométrica de la ecuación de los grafos minimales, (2.1), él notó que la ecuación (2.1) nos expresaba el hecho de que en dichas superficies su curvatura media es cero, para todo punto perteneciente a la superficie. Hablando sin rigor, la curvatura media mide qué tanto se curva la superficie con respecto al plano tangente en un punto $p \in M$.

A partir de la definición 1.7 de curvatura media en una superficie tenemos que:

$$H = \frac{1}{2}\left(\frac{Eg - 2Ff + Ge}{EG - F^2}\right), \tag{2.15}$$

donde E, F, G son los coeficientes de la primera forma fundamental y e, f, g los de la segunda. Como se trata de hallar la superficie de menor área en un contorno dado el cual hemos definido anteriormente como Γ, podemos introducir la parametrización en la forma de Monge para la superficie M como $X(u,v) = \big(u, v, f(u,v)\big)$, entonces

$$X_u = (1, 0, f_u) \qquad\qquad X_v = (0, 1, f_v),$$

luego

$$X_{uu} = (0, 0, f_{uu}) \qquad X_v = (0, 0, f_{vv}), \qquad X_{uv} = (0, 0, f_{uv}). \tag{2.16}$$

De la ecuación (1.8) tenemos que

$$E = 1 + f_u^2 \qquad G = 1 + f_v^2 \qquad F = f_u f_v. \tag{2.17}$$

Ahora como e, f, g están en términos del vector normal N, es decir

$$e = \langle N, X_{uu}\rangle \qquad f = \langle N, X_{uv}\rangle \qquad g = \langle N, X_{vv}\rangle.$$

Debemos calcular el vector N el cual está dado por

$$N = \frac{X_u \wedge X_v}{\|X_u \wedge X_v\|} = \Big(-\frac{f_u}{\sqrt{EG - F^2}}, -\frac{f_v}{\sqrt{EG - F^2}}, \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}}\Big). \tag{2.18}$$

Por tanto de (2.17),(2.16), (2.18) tenemos:

$$e = \frac{f_{uu}}{\sqrt{EG - F^2}} \qquad f = \frac{f_{uv}}{\sqrt{EG - F^2}}. \qquad g = \frac{f_{vv}}{\sqrt{EG - F^2}} \tag{2.19}$$

Reemplazando (2.19) en (1.7), la fórmula de la curvatura media nos queda

$$\begin{aligned} H &= \frac{\big(1 + f_u^2\big)\frac{f_{vv}}{\sqrt{EG - F^2}} - \frac{2 f_u\, f_v\, f_{uv}}{\sqrt{EG - F^2}} + (1 + f_v^2)\frac{f_{uu}}{\sqrt{EG - F^2}}}{2(EG - F^2)} \\ &= \frac{\frac{1}{\sqrt{EG - F^2}}\big((1 + f_u^2) f_{vv} - 2 f_u f_v f_{uv} + (1 + f_u^2) f_{vv}\big)}{2\big(EG - F^2\big)} \\ &= \frac{(1 + f_u^2) f_{vv} - 2 f_u f_v f_{uv} + (1 + f_u^2) f_{vv}}{2(EG - F^2)^{3/2}}. \end{aligned}$$

Por tanto

$$2H\big(EG-F^2\big)^{3/2}=\big(1+f_v^2\big)\,f_{uu}-2f_uf_vf_{uv}+\big(1+f_u^2\big)f_{vv}. \tag{2.20}$$

Si la superficie M es minimal, entonces

$$(1+f_u^2)f_{vv}-2f_uf_vf_{uv}+(1+f_v^2)f_{uu}=0,$$

por lo tanto, de (2.20)

$$2H\big(EG-F^2\big)^{3/2}=0,$$

pero como

$$\big(EG-F^2\big)\neq 0,$$

entonces $H=0$.

Recíprocamente si $H=0$, entonces

$$(1+f_u^2)f_{vv}-2f_uf_vf_{uv}+(1+f_v^2)f_{uu}=0,$$

y por tanto la superficie es minimal.

Teorema 2.1. *Una superficie M es minimal si, y sólo, si su curvatura media es cero, en todo punto $p\in M$.*

Comentarios:

1. En la actualidad se ha tomado como definición de superficie minimal, las superficies en las cuales su curvatura media es cero. En adelante tomaremos ésto como definición.

2. Sea $X:U\subseteq\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$, una parametrización de una superficie minimal M, sea U_1 un subconjunto de U, entonces cualquier región acotada $X(\bar{U_1})$, $(\bar{U_1}=U_1\cup\partial U_1)$, es un punto crítico para el funcional de área. Este punto crítico puede ser o no un mínimo, lo cual hace que el uso de la palabra mínima parezca algo inapropiada.

Es, sin embargo, una terminología que ha sido usada a lo largo de la historia la cual fue introducida por Lagrange en 1760, quien usó por primera vez el término superficie minimal.

Ejemplo 2. *La Helicoide, superficie parametrizada por*

$$X(u,v) = (u\cos v, u\operatorname{sen} v, v) \qquad (u,v) \in \mathbb{R}^2$$

Es una superficie minimal.

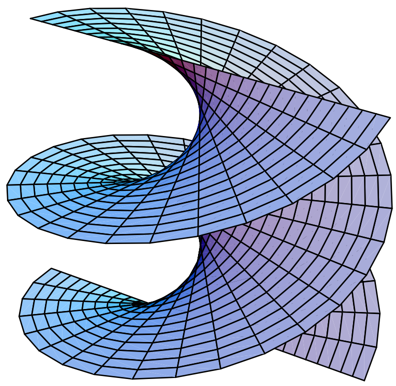


Figura 2.3: La Helicoide

Verifiquemos que la Helicoide tiene curvatura media cero, en efecto;

$$X_u = (\cos v, \operatorname{sen} v, 0) \qquad X_v = (-u\operatorname{sen} v, u\cos v, 1)$$

$$X_{uu} = (0,0,0) \qquad X_{vv} = (-u\cos v, -u\operatorname{sen} v, 0) \qquad X_{uv} = (-\operatorname{sen} v, \cos v, 0),$$

entonces

$$\begin{aligned} E &= \langle X_u, X_u\rangle = \cos^2 v + \operatorname{sen}^2 v = 1. \\ G &= \langle X_v, X_v\rangle = u^2 + 1. \\ F &= \langle X_u, X_v\rangle = u\cos v\operatorname{sen} v - u\cos v\operatorname{sen} v = 0. \end{aligned} \tag{2.21}$$

Además

$$N = \frac{X_u \wedge X_v}{\|X_u \wedge X_v\|} = \left(\frac{\operatorname{sen} v}{1+u^2}, -\frac{\cos v}{1+u^2}, \frac{u}{1+u^2}\right),$$

por consiguiente

$$\begin{aligned} e &= \langle N, X_{uu}\rangle = 0, & g &= \langle N, X_{vv}\rangle = u \operatorname{sen} v \frac{\cos v}{1+u^2} - u \operatorname{sen} v \frac{\cos v}{1+u^2} = 0, \\ f &= \langle N, X_{uv}\rangle = -\frac{1}{1+u^2}. \end{aligned} \tag{2.22}$$

Por tanto al sustituir (2.21), (2.22) en (2.15)

$$H = \frac{1}{2}\left(\frac{Eg - 2Ff + Ge}{EG - F^2}\right) = 0.$$

De ahí que el Helicoide es una superficie minimal.

Sea $X(u,v) = \big(u, v, f(u,v)\big)$ una parametrización en la forma de Monge de una superficie minimal M, denotemos por

$$c = f_u \qquad d = f_v \qquad r = f_{uu} \qquad t = f_{vv} \qquad s = f_{uv}, \tag{2.23}$$

entonces la ecuación (2.1) se puede escribir como

$$(1+d^2)c_u - (cd)(c_v - d_u) + (1+c^2)d_v = 0, \tag{2.24}$$

o

$$(1+d^2)r - 2(cd)s + (1+c^2)t = 0. \tag{2.25}$$

Como $X(u,v) = (u, v, f(u,v))$, entonces de la ecuación (1.8) tenemos que:

$$E = 1 + c^2 \qquad G = 1 + d^2 \qquad F = cd,$$

donde

$$det\, \mathcal{G} = 1 + c^2 + d^2 = EG - F^2,$$

y notemos

$$W = \sqrt{EG - F^2} = \sqrt{1 + c^2 + d^2}. \tag{2.26}$$

Teorema 2.2. *Dada una superficie minimal M, sea X una parametrización en la forma de Monge, entonces se tiene:*

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1+d^2}{W}\right) = \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{cd}{W}\right) \quad y \quad \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{cd}{W}\right) = \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1+c^2}{W}\right) \tag{2.27}$$

donde c, d, W, están dados por (2.23), (2.26).

Demostración. De (2.6) tenemos que

$$\iint_{\bar{U}} \frac{f_u h_u + f_v h_v}{\sqrt{EG - F^2}} = \iint_{\bar{U}} \frac{(1+d^2)c - (cd)d}{W}\frac{\partial h}{\partial u} dudv + \iint_{\bar{U}} \frac{(1+c^2)d - (cd)c}{W}\frac{\partial h}{\partial v} dudv = 0.$$

Luego integrando por partes tenemos que

$$\iint_{\bar{U}} \frac{(1+d^2)p - (cd)d}{W}\frac{\partial h}{\partial u}\, du\, dv + \iint_{\bar{U}} \frac{(1+c^2)d - (cd)c}{W}\frac{\partial h}{\partial v}\, du\, dv =$$
$$\iint_{\bar{U}} -\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{(1+d^2)c - (cd)d}{W}\right) h\, du\, dv + \iint_{\bar{U}} -\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{(1+c^2)d - (cd)c}{W}\right) h\, du\, dv.$$

Como la superficie M es minimal, entonces

$$\iint_{\bar{U}} \left[-\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{(1+d^2)c - (cd)d}{W}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{(1+c^2) - (cd)c}{W}\right)\right] h\, du\, dv = 0.$$

Y, como ésta ecuación debe satisfacerse para cualquier función $h(u, v)$, con la sola exigencia de anularse sobre el borde γ, es claro que la única posibilidad de que tal cosa ocurra es que

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{(1+d^2)c - (cd)d}{W}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{(1+c^2) + (cd)c}{W}\right) = 0. \tag{2.28}$$

Ahora (2.28) se puede escribir como la suma de tres términos

$$\left[\frac{1+d^2}{W}\frac{\partial c}{\partial u} - \frac{cd}{W}\left(\frac{\partial d}{\partial u} + \frac{\partial c}{\partial v}\right) + \frac{1+c^2}{W}\frac{\partial d}{\partial v}\right] + \left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1+d^2}{W}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{cd}{W}\right)\right] c$$
$$+ \left[\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1+c^2}{W}\right) - \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{cd}{W}\right)\right] d = 0.$$

donde el primer término es cero por (2.24), además si expandimos el coeficiente en c del segundo término obtenemos de (2.25) que

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1+d^2}{W}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{cd}{W}\right) \quad = \frac{1}{W^3}\big((cd)d - (1+d^2)c\big)\big((1+d^2)r - 2cds + (1+c^2)t\big) = 0.$$

De manera análoga se puede ver que el tercer término también es cero, por tanto

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1+d^2}{W}\right) = \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{cd}{W}\right) \quad y \quad \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{cd}{W}\right) = \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1+c^2}{W}\right). \tag{2.29}$$

Las cuales se satisfacen para toda solución de la ecuación (2.1). □

Capítulo 3

Superficie minimal de Scherk

En 1835 H F Scherk determinó las superficies minimales, representadas con la parametrización de la forma

$$X(u,v) = \big(u, v, h(u) + g(v)\big),$$

las cuales se expresan en el siguiente teorema.

Teorema 3.1. *Si $X : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ es una parametrización en la forma de Monge con $f(u,v) = h(u) + g(v)$, que define una superficie minimal M, entonces la superficie M, o bien es una porción de un plano o bien existe una constante no nula tal que*

$$h(u) = -\frac{1}{a}\ln(\cos au) \qquad y \qquad g(v) = \frac{1}{a}\ln(\cos av),$$

o equivalentemente

$$f(u,v) = \frac{1}{a}\ln\left(\frac{\cos av}{\cos au}\right).$$

Demostración. Como $f(u,v) = h(u) + g(v)$, entonces

$$f_u = h'(u), \qquad\qquad f_v = g'(v), \tag{3.1}$$

luego de (3.1)

$$f_{uv} = 0, \qquad f_{uu} = h''(u), \qquad f_{vv} = g''(v). \tag{3.2}$$

Reemplazando (3.1) y (3.2) en (2.1) tenemos

$$h''(u)\big(1+g'(v)^2\big)+g''(v)\big(1+h'(u)^2\big)=0, \tag{3.3}$$

de ahí que

$$\frac{h''(u)}{1+h'(u)^2}=-\frac{g''(v)}{1+g'(v)^2}. \tag{3.4}$$

Como en la ecuación (3.4), u y v son variables independientes, entonces cada lado de (3.4) debe ser una constante, que denominaremos a.

Si $a=0$, entonces ambas funciones h, g son lineales y por tanto la superficie M es una porción de un plano, en efecto supongamos que

$$\frac{h''(u)}{1+h'(u)^2}=a=0,$$

de ahí que $h'(u)=A$, siendo A una constante.

Integrando $h'(u)=A$ obtenemos

$$h(u)=Au+n. \tag{3.5}$$

Luego de la ecuación (3.5) tenemos que $h(u)$ es una función lineal. De manera análoga tenemos que $g(v)=Bv+m$. Ahora si sumamos $h(u)+g(v)$ tenemos

$$h(u)+g(v)=Au+n+Bv+m=Au+Bv+C,$$

de ahí que M es una porción de un plano.

Supongamos que $a\neq 0$, como

$$\frac{h''(u)}{1+\big(h'(u)\big)^2}=a,$$

entonces al integrar por sustitución respecto a u tenemos que

$$\arctan h'(u)=au.$$

De ahí que

$$h'(u) = \tan au,$$

así

$$\begin{aligned} h(u) &= \int \tan(au)\, du + C_0 \\ &= -\frac{1}{a} \ln(\cos au) + C_0. \end{aligned}$$

Ahora si tomamos, $C_0 = 0$ o $C_0 \neq 0$ esta escogencia no va a ser esencial al resultado, pues si consideramos $C_0 \neq 0$ la superficie estaría trasladada más no varía la superficie como tal, por tanto para efectos del cálculo tomaremos $C_0 = 0$.

De manera similar se obtiene

$$g(v) = \frac{1}{a} \ln(\operatorname{sen} av).$$

Por lo tanto

$$f(u, v) = h(u) + g(v) = \frac{1}{a} \ln \left(\frac{\cos av}{\cos au} \right)$$

$\square$

Del teorema 3.1 cuando $a = 1$ obtenemos la superficie minimal de Scherk, a la cual nos referiremos en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3 (Superficie minimal de Scherk). *La parametrización*

$$X(u, v) = \left(u, v, \ln \left(\frac{\cos v}{\cos u} \right) \right),$$

define una superficie minimal, la superficie minimal de Scherk.

En efecto mostremos que la ecuación (2.1) se satisface para $f(u, v) = \ln \left(\dfrac{\cos v}{\cos u} \right)$; de ahí que

$$f_u = h'(u) = \tan u \qquad f_v = g'(v) = -\tan v,$$

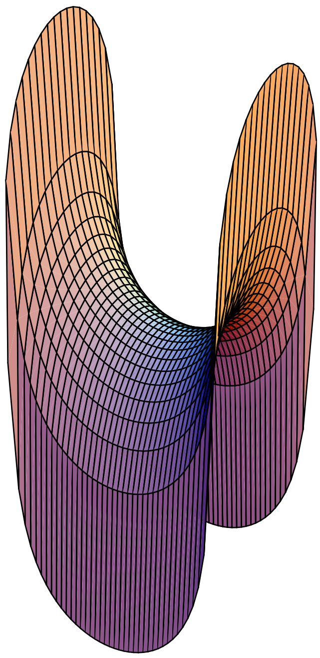


Figura 3.1: Superficie minimal de Scherk

por tanto

$$f_{uu} = \sec^2 u \qquad f_{vv} = -\sec^2 v, \qquad f_{uv} = 0. \tag{3.6}$$

Reemplazando (3.6) en (2.1) tenemos que

$$\begin{aligned}
(1+f_v^2)f_{uu} - 2f_uf_vf_{uv} + (1+f_u^2)f_{vv} &= (1+f_v^2)f_{uu} + (1+f_u^2)f_{vv} \\
&= (1+\tan^2 v)\sec^2 u - (1+\tan^2 u)\sec^2 v \\
&= \sec^2 u - \sec^2 v + \tan^2 v \ \sec^2 u + \sec^2 v + \tan^2 u \ \sec^2 v \\
&= \frac{(\cos^2 u + \operatorname{sen}^2 u) - (\cos^2 v + \operatorname{sen}^2 v)}{\cos^2 u \ \cos^2 v} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Capítulo 4

Parámetros Isotermos

Para obtener otras propiedades de las superficies minimales, será conveniente introducir, para cualquier superficie regular parametrizada, el *vector de curvatura media* $\mathbf{H}$, definido por $\mathbf{H} = H\,\mathbf{N}$, donde H es la curvatura media y $\mathbf{N}$ un vector normal al superficie en un punto $p \in M$. Podemos interpretar el vector de curvatura media, de manera que tenga implicaciones importantes para la teoría de superficies minimales, para esto nos será de utilidad la siguiente definición.

Definición 4.1 (Parametrización isoterma). *Dada una superficie regular M y una parametrización $X : U \subset \mathbb{R}^2 \to M \subset \mathbb{R}^3$ con $p \in X(U)$, entonces decimos que $X(u,v) = X$ es una parametrización isoterma si*

$$\langle X_u, X_u \rangle = \langle X_v, X_v \rangle \quad y \quad \langle X_u, X_v \rangle = 0,$$

esto es, $E = G$ y $F = 0$. (u y v se les llaman parámetros isotermos)

El significado intuitivo de una parametrización isoterma X se puede describir de la siguiente forma, como X es una función definida de un subconjunto abierto $U \subset \mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^3$ y dado que X_u, X_v tienen la misma longitud, es decir $\|X_u\| = \|X_v\|$ y además X_u, X_v son ortogonales, entonces lo que se realice en U se reflejará en la superficie M parametrizada por X, un ejemplo es considerar dos curvas en U las cuales forman un ángulo θ entre ellas, entonces este mismo ángulo se conservará cuando apliquemos la función X a dichas curvas. En otras palabras una parametrización isoterma no es más que una parametrización conforme de la superficie.

Teorema 4.1. *Sea M una superficie regular y $X = X(u, v)$ una parametrización isoterma de M, entonces*

$$X_{u\,u} + X_{v\,v} = 2\lambda^2 \boldsymbol{H} \tag{4.1}$$

donde $\lambda^2 = \langle X_u, X_u\rangle = \langle X_v, X_v\rangle$

Demostración. Como X es isoterma, entonces

$$\langle X_u, X_u\rangle = \langle X_v, X_v\rangle \quad y \quad \langle X_u, X_v\rangle = 0. \tag{4.2}$$

Derivando en (4.2) la primera ecuación respecto a u tenemos que

$$\langle X_{uu}, X_u\rangle = \langle X_{uv}, X_v\rangle.$$

Derivando en (4.2) la segunda expresión respecto a v obtenemos

$$\langle X_{vu}, X_v\rangle + \langle X_u, X_{vv}\rangle = 0,$$

pero $X_{vu} = X_{uv}$, luego

$$\langle X_{uv}, X_v\rangle = -\langle X_u, X_{vv}\rangle,$$

así

$$\langle X_{uu}, X_u\rangle = -\langle X_u, X_{vv}\rangle,$$

por lo tanto

$$\langle X_{uu} + X_{vv}, X_u\rangle = 0.$$

de manera similar, derivando $E = \langle X_u, X_u\rangle = \langle X_v, X_v\rangle$ respecto a v y $F = \langle X_u, X_v\rangle$ respecto a u, obtenemos

$$\langle X_{u\,u} + X_{v\,v}, X_v\rangle = 0.$$

Se sigue, entonces que $X_{uu} + X_{vv}$ es paralelo a $\mathbf{N}$. Como $\mathbf{H}$ es paralelo a $\mathbf{N}$, entonces $X_{uu} + X_{vv} = \rho\mathbf{H}$, para cierto $\rho \in \mathbb{R}$; determinemos ρ. Como

$$H = \frac{1}{2}\left(\frac{Eg - 2Ff + Ge}{EG - F^2}\right),$$

y dado que X es isoterma, entonces

$$E = G \quad y \quad F = 0,$$

luego

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2}\left(\frac{Eg + Ge}{EG}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{E(g + e)}{E^2}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{g + e}{E}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{g + e}{\lambda^2}\right). \end{aligned}$$

Así

$$\begin{aligned} 2\lambda^2 H = g + e &= \langle X_{uu}, \mathbf{N}\rangle + \langle X_{vv}, \mathbf{N}\rangle \\ &= \langle X_{uu} + X_{vv}, \mathbf{N}\rangle, \end{aligned}$$

pero

$$\begin{aligned} \langle X_{uu} + X_{vv}, \mathbf{N}\rangle &= \langle \rho\mathbf{H}, \mathbf{N}\rangle \\ &= \langle \rho H\mathbf{N}, \mathbf{N}\rangle \\ &= \rho H\langle \mathbf{N}, \mathbf{N}\rangle \\ &= \rho H. \end{aligned}$$

Por tanto $2\lambda^2 H = \rho H$, es decir $\rho = 2\lambda^2$, por lo tanto

$$X_{uu} + X_{vv} = 2\lambda^2\mathbf{H}.$$

$\square$

Para establecer la relación existente entre las parametrizaciones armónicas[1] y las superficies minimales, es necesario considerar parametrizaciones isotermas, por tanto consideremos el siguiente teorema.

Teorema 4.2. *Sea M una superficie regular, $X : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ una parametrización isoterma de M en un punto $p \in M$, con $X(u,v) = \big(x(u,v), y(u,v), z(u,v)\big)$, $(u,v) \in U$. Entonces M es minimal si, y sólo si sus funciones coordenadas x, y, z son armónicas.*

Demostración. Supongamos que la superficie regular M es minimal, entonces por el teorema (2.2) tenemos que $H = 0$. Por la ecuación (4.1) tenemos $X_{u\,u} + X_{v\,v} = 2\lambda^2 HN$, entonces

$$X_{u\,u} + X_{v\,v} = 0,$$

pero

$$X_{uu} = \left(\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}, \frac{\partial^2 y}{\partial u^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\right) \quad y \quad X_{v\,v} = \left(\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}, \frac{\partial^2 y}{\partial v^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\right).$$

Por tanto

$$X_{u\,u} + X_{v\,v} = \left(\left(\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 x}{\partial v^2}\right), \left(\frac{\partial^2 y}{\partial v^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial v^2}\right), \left(\frac{\partial^2 z}{\partial v^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\right)\right) = \mathbf{0},$$

de ahí que

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} = 0, \qquad \frac{\partial^2 y}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial v^2} = 0, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} = 0,$$

es decir x, y, z son armónicas.

Recíprocamente si $x(u,v)$, $y(u,v)$, $z(u,v)$ son funciones armónicas, entonces

$$X_{uu} + X_{vv} = 0,$$

y por el teorema 4.1

$$2\lambda^2 HN = 0,$$

de ahí que $H = 0$, es decir M es una superficie minimal. □

[1] Una parametrización $X(u,v) = \big(x(u,v), y(u,v), z(u,v)\big)$ es una parametrización armónica si sus componentes son funciones armónicas.

Queremos ahora establecer una relación entre las funciones analíticas y las superficies minimales en un punto p de M. Dado $p \in M$, sea $X : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to M$ una parametrización de M en p, con $X(u,v) = \big(x(u,v), y(u,v), z(u,v)\big)$, $(u,v) \in U$. Definamos las funciones

$$\phi_1, \phi_2, \phi_3 : D \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C},$$

con

$$D = \big\{\zeta \in \mathbb{C} : \zeta = u + iv, (u,v) \in U\big\},$$

como:

$$\begin{aligned} \phi_1(\zeta) &= \frac{\partial x}{\partial u}(u,v) - i\frac{\partial x}{\partial v}(u,v) \\ \phi_2(\zeta) &= \frac{\partial y}{\partial u}(u,v) - i\frac{\partial y}{\partial v}(u,v) \\ \phi_3(\zeta) &= \frac{\partial z}{\partial u}(u,v) - i\frac{\partial z}{\partial v}(u,v). \end{aligned} \tag{4.3}$$

Proposición 1. *Si ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 están definidas como en 4.3, entonces*

$$\sum_{k=1}^{3} \phi_k^2(\zeta) = E - G - 2iF \quad y \quad \sum_{k=1}^{3} |\phi_k(\zeta)|^2 = E + G.$$

Demostración. Sean ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 definidas como en 4.3, entonces

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{3} \phi_k^2(\zeta) &= \left(\frac{\partial x}{\partial u} - i\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u} - i\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u} - i\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2 \\ &= \left(\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2\right) - \left(\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2\right) \\ &\qquad - 2i\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}\right) \\ &= \big\langle X_u, X_u\big\rangle - \big\langle X_v, X_v\big\rangle - 2i\big\langle X_u, X_v\big\rangle \\ &= E - G - 2iF. \end{aligned}$$

Además

$$\sum_{k=1}^{3} |\phi_k(\zeta)|^2 = \left|\frac{\partial x}{\partial u} - i\frac{\partial x}{\partial v}\right|^2 + \left|\frac{\partial y}{\partial u} - i\frac{\partial y}{\partial v}\right|^2 + \left|\frac{\partial z}{\partial u} - i\frac{\partial z}{\partial v}\right|^2$$

$$= \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2$$

$$= \langle X_u, X_u \rangle + \langle X_v, X_v \rangle$$

$$= E + G.$$

□

Presentamos a continuación algunas de las propiedades de la función $\phi_k(\zeta)$, $k = 1, 2, 3$.

Propiedad 1.

Las funciones $\phi_k(\zeta)$, $k = 1, 2, 3$. son analíticas[2] en ζ si, y sólo si x, y, z son funciones armónicas en u y v.

Demostración. Supongamos que $\phi_1(\zeta)$ es analítica y mostremos que $x(u, v)$ es armónica, de manera análoga se prueba para $\phi_2(\zeta)$, $\phi_3(\zeta)$.

Sea $\phi_1(\zeta) = \dfrac{\partial x}{\partial u} - i\dfrac{\partial x}{\partial v}$, como $\phi_1(\zeta)$ es analítica, entonces se satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann, es decir

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right) = -\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right) \quad \text{y} \quad \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right) = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right).$$

De la primera ecuación se tiene

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} = 0.$$

por lo tanto $x(u, v)$ es armónica.

Recíprocamente si $x(u, v)$ es armónica, entonces

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} = 0,$$

[2]Una función $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, es analítica si satisface las ecuaciones de Cauchy-Riemann

luego

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} = -\frac{\partial^2 x}{\partial v^2},$$

es decir

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right) = -\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right). \tag{4.4}$$

De otro lado como $X \in C^\infty$, entonces

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} = \frac{\partial^2 x}{\partial v \partial u},$$

es decir

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right) = \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right). \tag{4.5}$$

Por tanto de (4.4), (4.5) y dado que $X \in C^\infty$, entonces $\phi_1(\zeta)$ es analítica. □

Propiedad 2.

u y v son parámetros isotermos si, y sólo si

$$\sum_{k=1}^{3} \phi_k^2(\zeta) = 0. \tag{4.6}$$

Demostración. Supongamos que $X(u,v)$ es una parametrización isoterma, entonces

$$E = G \quad \text{y} \quad F = 0,$$

luego

$$\sum_{k=1}^{3} \phi_k^2(\zeta) = E - G - 2iF = 0.$$

Recíprocamente si

$$\sum_{k=1}^{3} \phi_k^2(\zeta) = 0,$$

entonces

$$E - G - 2iF = 0,$$

luego $E - G = 0$ y $2iF = 0$, de ahí que

$$E = G \quad y \quad F = 0.$$

$\square$

Propiedad 3.

Sea u y v parámetros isotermos. Entonces M es una superficie regular si, y sólo si

$$\sum_{k=1}^{3} |\phi_k(\zeta)|^2 \neq 0. \tag{4.7}$$

Demostración. Mostremos que si M es regular, entonces

$$\sum_{k=1}^{3} \left|\phi_k(\zeta)\right|^2 \neq 0.$$

Como

$$\sum_{k=1}^{3} \left|\phi_k(\zeta)\right|^2 = \left\langle X_u, X_u \right\rangle + \left\langle X_v, X_v \right\rangle = E + G,$$

y $X(u, v)$ es una parametrización isoterma, entonces $E = G$, de ahí que

$$\sum_{k=1}^{3} \left|\phi_k(\zeta)\right|^2 = 2E = 2\left\langle X_u, X_u \right\rangle.$$

Ahora, como M es regular, entonces $X_u \wedge X_v \neq 0$, por tanto $X_u \neq 0$ y $X_v \neq 0$, así $\left\langle X_u, X_u \right\rangle \neq 0$, entonces

$$\sum_{k=1}^{3} \left|\phi_k(\zeta)\right|^2 \neq 0.$$

Recíprocamente, mostremos que si

$$\sum_{k=1}^{3} \left|\phi_k(\zeta)\right|^2 \neq 0,$$

entonces M es regular, esto equivale a mostrar que

$$\|X_u \wedge X_v\|^2 = EG - F^2 \neq 0.$$

Como los parámetros son isotermos es suficiente mostrar que $E \neq 0$. Dado que

$$\sum_{k=1}^{3} \left|\phi_k(\zeta)\right|^2 = E + G,$$

entonces $E + G \neq 0$, es decir $2E \neq 0$ por ser $E = G$. Por tanto $E \neq 0$. $\square$

Teorema 4.3. *Supongamos que la parametrización $X : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow M$, dada por $X(u, v) = \big(x(u, v), y(u, v), z(u, v)\big)$ define una superficie minimal regular M con u y v parámetros isotermos, entonces las funciones $\phi_k(\zeta)$ definidas en (4.3) son analíticas y satisfacen las ecuaciones (4.6) y (4.7). Recíprocamente, si $\phi_1(\zeta)$, $\phi_2(\zeta)$, $\phi_3(\zeta)$ son funciones analíticas de ζ cumpliendo (4.6) y (4.7) en un dominio simplemente conexo D, entonces existe una función $X : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, donde $X(U)$ es una superficie minimal definida sobre U, tal que las ecuaciones (4.3) se satisfacen, con $U = \big\{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u + iv \in D\big\}$.*

Demostración. La primera parte, se sigue inmediatamente de las propiedades **1**, **2**, **3** dadas anteriormente. Para el recíproco, si definimos

$$x(u, v) = Re \int \phi_1(\zeta) d\zeta, \tag{4.8}$$

donde $\zeta = u + iv$. Veamos que $x(u, v)$ es una función armónica cumpliendo (4.3). En efecto, si $\phi_1(\zeta) = f(u, v) + ig(u, v)$, entonces

$$\begin{aligned} Re\bigg(\int \phi_1(\zeta) d\zeta\bigg) &= Re\bigg(\int \big(f(u, v) + ig(u, v)\big) d\zeta\bigg) \\ &= Re\bigg(\int f(u, v) d\zeta + i \int g(u, v) d\zeta\bigg). \end{aligned} \tag{4.9}$$

Derivando (4.8) respecto a u, hallamos

$$\frac{\partial x}{\partial u}(u, v) = \frac{\partial}{\partial u} Re \int \phi_1(\zeta) d\zeta, \tag{4.10}$$

y reemplazando (4.9) en (4.10) obtenemos

$$\frac{\partial x}{\partial u}(u, v) = \frac{\partial}{\partial u} Re\bigg(\int f(u, v) d\zeta + i \int g(u, v) d\zeta\bigg). \tag{4.11}$$

De la ecuación (4.11), tenemos

$$\frac{\partial x}{\partial u} = Re\bigg(\frac{\partial}{\partial u}\int f(u,v)d\zeta + \frac{\partial}{\partial u}\int g(u,v)d\zeta\bigg),$$

por la regla de la cadena

$$\frac{\partial x}{\partial u}(u,v) = Re\bigg\{\frac{\partial \zeta}{\partial u}\bigg(\frac{\partial}{\partial \zeta}\int f(u,v)d\zeta\bigg) + i\frac{\partial \zeta}{\partial u}\bigg(\frac{\partial}{\partial \zeta}\int g(u,v)d\zeta\bigg)\bigg\},$$

Como $\zeta = u + iv$, entonces $\dfrac{\partial \zeta}{\partial u} = 1$, de ahí que

$$\frac{\partial x}{\partial u}(u,v) = Re\bigg(\frac{\partial}{\partial \zeta}\int f(u,v)d\zeta + i\frac{\partial}{\partial \zeta}\int g(u,v)d\zeta\bigg),$$

y por el teorema fundamental del cálculo

$$\begin{aligned}\frac{\partial x}{\partial u}(u,v) &= Re\big(f(u,v) + ig(u,v)\big) \\ &= f(u,v). \end{aligned} \tag{4.12}$$

De manera análoga si derivamos (4.8) con respecto a v tenemos que

$$\begin{aligned}\frac{\partial x}{\partial v}(u,v) &= \frac{\partial}{\partial v}Re\bigg(\int f(u,v)d\zeta + i\int g(u,v)d\zeta\bigg) \\ &= Re\bigg(if(u,v) - g(u,v)\bigg) \\ &= -g(u,v). \end{aligned} \tag{4.13}$$

Como $\phi_1 = f(u,v) + ig(u,v)$, entonces de (4.12) y (4.13) tenemos que

$$\phi_1(\zeta) = \frac{\partial x}{\partial u}(u,v) - i\frac{\partial x}{\partial v}(u,v).$$

Como $\phi_1(\zeta)$ es una función analítica, por la propiedad **1** la función $x(u,v)$ es una función armónica. De manera análoga se muestra que $y(u,v)$, $z(u,v)$ son analíticas. Pero por hipótesis tenemos que las funciones $\phi_k(\zeta)$ con $k = 1,2,3$, cumplen (4.6) y (4.7), luego aplicando el teorema 4.2 tenemos que la superficie $M = X(U)$ es minimal. □

Con base en éste teorema, si consideramos

$$\phi_1(\zeta) = \zeta - \zeta^3 \qquad \phi_2(\zeta) = i(\zeta + \zeta^3) \qquad \phi_3(\zeta) = 2\zeta^2,$$

tres funciones analíticas, obtenemos que

$$\phi_1^2(\zeta) + \phi_2^2(\zeta) + \phi_3^2(\zeta) = 0,$$

y

$$\left|\phi_1(\zeta)\right|^2 + \left|\phi_2(\zeta)\right|^2 + \left|\phi_3(\zeta)\right|^2 \neq 0,$$

para $(u, v) \neq (0, 0)$, es decir no es regular en éste punto.

Ahora si calculamos

$$x(u, v) = Re \int \phi_1(\zeta)d\zeta \qquad y(u, v) = Re \int \phi_2(\zeta)d\zeta \qquad z(u, v) = Re \int \phi_3(\zeta)d\zeta,$$

obtenemos que

$$X(u, v) = \left(\frac{u^2 - v^2}{2} - \frac{u^4 - 6u^2v^2 + v^4}{4}, uv^3 - uv - vu^3, \frac{2u^3}{3} - 2uv^2\right)$$

define una superficie minimal con parámetros isotermos u, v.

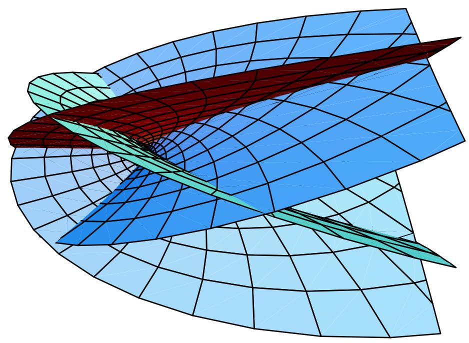


Figura 4.1.

Ejemplo 4. *La parametrización $X(u, v)$ dada por*

$$X(u, v) = \left(\frac{u^2 - v^2}{2} - \frac{u^4 - 6u^2v^2 + v^4}{4}, uv^3 - uv - vu^3, \frac{2u^3}{3} - 2uv^2\right)$$

define una superficie minimal, (figura 4.1).

Ejemplo 5. *Si consideramos*

$$\phi_1(\zeta) = \frac{1}{\zeta^2}(1-\zeta^2) \qquad \phi_2(\zeta) = -\frac{i}{\zeta^2}(1+\zeta^2) \qquad \phi_3(\zeta) = 2\frac{1}{\zeta},$$

obtenemos una parametrización,

$$X(u,v) = \big(1 - u(1 + \frac{1}{u^2+v^2}), -v(1+\frac{1}{u^2+v^2}), 2\ln(u^2+v^2)\big),$$

la cual define la Catenoide.

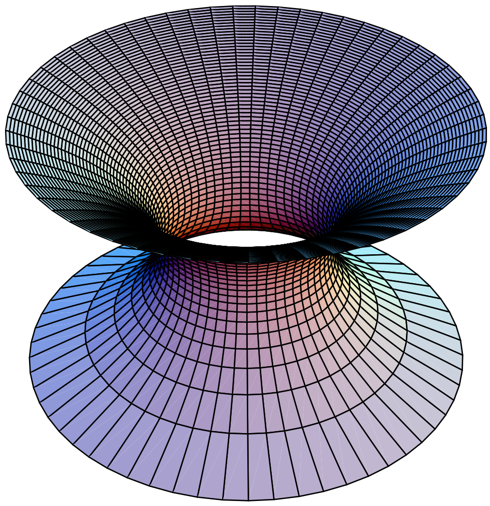


Figura 4.2: La Catenoide

Los anteriores resultados estuvieron basados en la suposición de que la superficie pudo ser representada localmente en términos de los parámetros isotermos. Sin embargo la existencia de tales parámetros no es del todo obvio, aunque para el caso de superficies minimales ya estamos en condiciones de dar una demostración.

Teorema 4.4. *Sea M una superficie minimal. si $p \in M$ es un punto regular, entonces existe una parametrización isoterma de M en p.*

Demostración. Sea M una superficie minimal y p un punto regular de M. Por el lema 1.2, existe una parametrización $X : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to M$, en la forma de Monge de M en p. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que

$$X(u,v) = \big(u, v, f(u,v)\big), \quad (u,v) \in U,$$

donde $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es diferenciable, (es decir $f \in C^\infty$).

Si $p = (p_1, p_2, p_3)$, entonces $p = X(p_1, p_2)$, donde $p_3 = f(p_1, p_2)$. Como $(p_1, p_2) \in U$ y U es abierto, entonces existe $R > 0$ tal que $D_R(p_1, p_2) \subset U$, es decir el disco abierto[3] $D_R(p_1, p_2) \subset U$.

Consideremos la ecuación diferencial

$$\frac{1+c^2}{W}du + \frac{cd}{W}dv = 0, \tag{4.14}$$

donde c, d, W son definidas como en (2.23) y (2.26) sobre el disco $D_R(p_1, p_2)$. De (2.29) se tiene que

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1+c^2}{W}\right) = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{cd}{W}\right),$$

luego la ecuación (4.14) es exacta, por lo tanto existe una función F dada por

$$F : D_R(p_1, p_2) \subset \mathbb{R}^2 \to F\big(D_R(p_1, p_2)\big) \subset \mathbb{R},$$

tal que

$$\frac{\partial F}{\partial u} = \frac{1+c^2}{W} \quad y \quad \frac{\partial F}{\partial v} = \frac{cd}{W} \quad (u,v) \in D_R(p_1, p_2). \tag{4.15}$$

De manera análoga se considera la ecuación diferencial

$$\frac{cd}{W}du + \frac{1+d^2}{W}dv,$$

entonces existe una función G dada por

$$G : D_R(p_1, p_2) \subset \mathbb{R}^2 \to G\big(D_R(p_1, p_2)\big) \subset \mathbb{R},$$

[3] El disco abierto y de centro (p_1, p_2) y radio R denotado por $D_R(p_1, p_2)$, se define como $D_R(p_1, p_2) = \big\{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : (u-p_1)^2 + (v-p_2)^2\big\} < R$.

tal que

$$\frac{\partial G}{\partial u} = \frac{cd}{W} \quad y \quad \frac{\partial G}{\partial v} = \frac{1+d^2}{W} \quad (u,v) \in D_R(p_1,p_2). \tag{4.16}$$

Definamos una función H como:

$$H(u,v) = \big(\xi_1(u,v), \xi_2(u,v)\big) = \big(u + F(u,v), v + G(u,v)\big), \quad (u,v) \in D_R(p_1,p_2), \tag{4.17}$$

de ahí que

$$\frac{\partial \xi_1}{\partial u} = 1 + \frac{1+c^2}{W} \qquad \frac{\partial \xi_1}{\partial v} = \frac{cd}{W},$$

y

$$\frac{\partial \xi_2}{\partial v} = \frac{cd}{W} \qquad \frac{\partial \xi_2}{\partial v} = 1 + \frac{1+d^2}{W}.$$

Por lo tanto el $\det(DH)$, donde

$$\det(DH) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \xi_1}{\partial u} & \frac{\partial \xi_2}{\partial u} \\ \frac{\partial \xi_1}{\partial v} & \frac{\partial \xi_2}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{1+c^2}{W} & \frac{cd}{W} \\ \frac{cd}{W} & 1 + \frac{1+d^2}{W} \end{pmatrix},$$

está dado por

$$\begin{aligned} \det(DH) &= \frac{\partial(\xi_1, \xi_2)}{\partial(u,v)} \\ &= \left(1 + \frac{1+c^2}{W}\right)\left(1 + \frac{1+d^2}{W}\right) - \left(\frac{cd}{W}\right)^2 \\ &= 1 + \frac{1+d^2}{W} + \frac{1+c^2}{W} + \frac{(1+d^2)(1+c^2)}{W^2} - \big(\frac{cd}{W}\big)^2 \\ &= 1 + \frac{1+d^2}{W} + \frac{1+c^2}{W} + \frac{1+c^2+d^2}{W^2} + \big(\frac{cd}{W}\big)^2 - \big(\frac{cd}{W}\big)^2. \end{aligned} \tag{4.18}$$

De la ecuación (2.26) tenemos

$$W^2 = 1 + c^2 + d^2, \tag{4.19}$$

luego reemplazando (4.19) en (4.18) obtenemos

$$\begin{aligned} \det(DH) &= 2 + \frac{1+c^2}{W} + \frac{1+d^2}{W} \\ &= 2 + \frac{2+c^2+d^2}{W} > 0, \end{aligned} \tag{4.20}$$

de ahí que

$$W\det(DH) = 2W + 2 + c^2 + d^2. \tag{4.21}$$

Luego la función $H(u,v)$ definida en (4.17) es inyectiva en $D_R(p_1,p_2)$ y como $\det(DH) \neq 0$ para todo $(u,v) \in D_R(p_1,p_2)$, entonces por el teorema de la función inversa, H admite una inversa diferenciable, $H^{-1} : V_1 \subset H\big(D_R(p_1,p_2)\big) \to V_2 \subset D_R(p_1,p_2)$, dada por

$$(u,v) = H^{-1}(\xi_1,\xi_2) = \big(u(\xi_1,\xi_2), v(\xi_1,\xi_2)\big).$$

Como $X(u,v) = \big(u, v, f(u,v)\big)$, es una parametrización de M en p, entonces

$$\widetilde{X}(\xi_1,\xi_2) = \big(X \circ H^{-1}\big)(\xi_1,\xi_2) = \big(u(\xi_1,\xi_2), v(\xi_1,\xi_2), h(\xi_1,\xi_2)\big)$$

donde

$$h(\xi_1,\xi_2) = \big(f \circ H^{-1}\big)(\xi_1,\xi_2),$$

parametriza la superficie M en p, en términos de los parámetros ξ_1 y ξ_2, (ver figura 4.3)

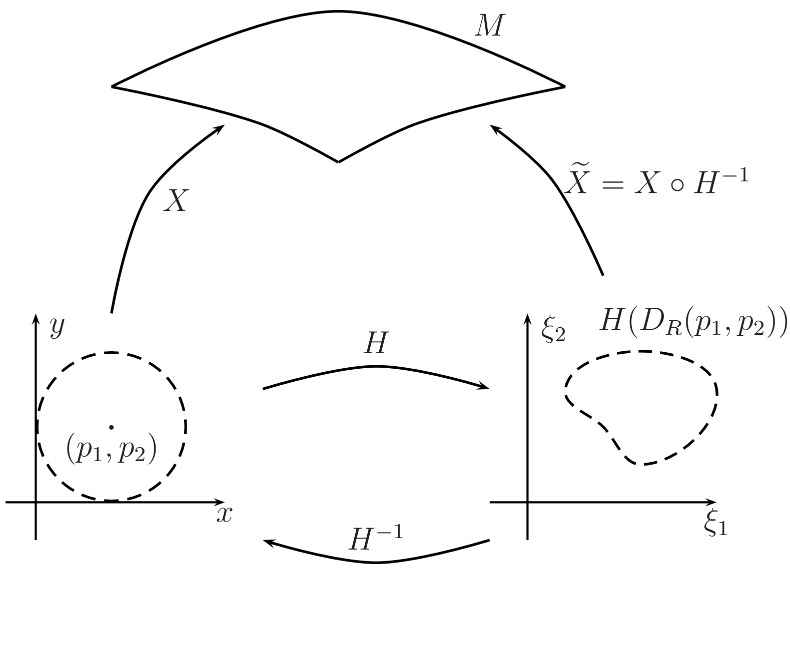


Figura 4.3.

Ahora usando el hecho de que $(DH^{-1}) = (DH)^{-1}$, sabiendo que

$$DH = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \xi_1}{\partial u} & \dfrac{\partial \xi_1}{\partial v} \\ \dfrac{\partial \xi_2}{\partial u} & \dfrac{\partial \xi_2}{\partial v} \end{pmatrix} \qquad y \qquad (DH)^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{\frac{\partial \xi_2}{\partial v}}{det(DH)} & -\dfrac{\frac{\partial \xi_1}{\partial v}}{det(DH)} \\ -\dfrac{\frac{\partial \xi_2}{\partial u}}{det(DH)} & \dfrac{\frac{\partial \xi_1}{\partial u}}{det(DH)} \end{pmatrix}$$

Tenemos que:

$$\frac{\partial u}{\partial \xi_1} = \frac{\frac{\partial \xi_2}{\partial v}}{det(DH)} = \frac{1 + \frac{1+d^2}{W}}{det\,(DH)} = \frac{W + 1 + d^2}{W det\,(DH)}$$

$$\frac{\partial v}{\partial \xi_1} = \frac{-\frac{\partial \xi_1}{\partial v}}{det(DH)} = -\frac{\frac{cd}{W}}{det\,(DH)} = -\frac{cd}{W det\,(DH)},$$

y

$$\frac{\partial u}{\partial \xi_2} = \frac{\frac{\partial \xi_2}{\partial u}}{det(DH)} = \frac{1 + \frac{1+c^2}{W}}{det\,(DH)} = \frac{W + 1 + c^2}{W det\,(DH)}$$

$$\frac{\partial v}{\partial \xi_2} = \frac{-\frac{\partial \xi_2}{\partial u}}{det(DH)} = -\frac{\frac{cd}{W}}{det\,(DH)} = -\frac{cd}{W det\,(DH)}.$$

Por la regla de la cadena tenemos

$$\frac{\partial f}{\partial \xi_1} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial \xi_1} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial \xi_1},$$

pero de la ecuación (2.23) sabemos que

$$c = \frac{\partial f}{\partial u}(u, v) \quad \text{y} \quad d = \frac{\partial f}{\partial v}(u, v),$$

de ahí que

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \xi_1} &= \frac{\partial u}{\partial \xi_1} c + \frac{\partial v}{\partial \xi_1} d \\ &= \frac{W + 1 + d^2}{W det\,(DH)}\, c - \frac{cd}{W det\,(DH)}\, d, \end{aligned}$$

de manera análoga tenemos que

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial \xi_2} &= \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial \xi_2} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial \xi_2}\\ &= \frac{W+1+c^2}{W det\,(DH)}\,d - \frac{cd}{W det\,(DH)}\,c.\end{aligned}$$

Veamos que los parámetros ξ_1, ξ_2 son parámetros isotermos para la superficie M en p, definida por la parametrización

$$\widetilde{X}(\xi_1,\xi_2) = \big(u(\xi_1,\xi_2), v(\xi_1,\xi_2), h(\xi_1,\xi_2)\big).$$

En efecto, mostremos que

$$\left\|\frac{\partial \widetilde{X}}{\partial \xi_1}\right\|^2 = E = G = \left\|\frac{\partial \widetilde{X}}{\partial \xi_2}\right\|^2 = \frac{W}{W det\,(DH)} = \frac{W^2}{2W+2+d^2+c^2}.$$

Como

$$\begin{aligned}\left\langle\frac{\partial \widetilde{X}}{\partial \xi_1}, \frac{\partial \widetilde{X}}{\partial \xi_1}\right\rangle = \left(\frac{W+1+d^2}{W det\,(DH)}\right)^2 + \left(\frac{cd}{W\det(DH)}\right)^2 + \\ \left(\frac{W+1+d^2}{W det\,(DH)}c - \frac{cd}{W\det(DH)}d\right)^2.\end{aligned} \tag{4.22}$$

Pero

$$\left(\frac{W+1+d^2}{W\det(DH)}\right) + \left(\frac{cd}{W\det(DH)}\right)^2 = \frac{W^2+2W+1+2Wd^2+2d^2+d^4+(cd)^2}{(W\det(DH))^2}, \tag{4.23}$$

reemplazando la ecuación (4.19) en (4.23) se tiene

$$\left(\frac{W+1+d^2}{W\det(DH)}\right) + \left(\frac{cd}{W\det(DH)}\right)^2 = \frac{2W+2+d^2+c^2+d^2(2W+2+d^2+c^2)}{\big(W\det(DH)\big)^2},$$

y de la ecuación (4.21) obtenemos

$$\begin{aligned}\left(\frac{W+1+d^2}{W\det(DH)}\right) + \left(\frac{cd}{W\det(DH)}\right)^2 &= \frac{W\det(DH) + d^2 W\det(DH)}{(W\det(DH))^2}\\ &= \frac{1+d^2}{W\det(DH)}.\end{aligned} \tag{4.24}$$

Además

$$\left(\frac{W+1+d^2}{W\det(DH)}\,c-\frac{cd}{W\det(DH)}\,d\right)^2=\frac{(W+1+d^2)}{(W\det(DH))^2}\,c^2-2\,\frac{(cd)^2}{(W\det(DH))^2}(W+1+d^2)+$$

$$\frac{(cd)^2}{(W\det(DH))^2}\,d^2$$

$$=\frac{(W+1+d^2)^2c^2-(cd)^2\big(2(W+2+d^2)-d^2\big)}{(W\det(DH))^2}$$

$$=\frac{(W+1+d^2)\,c^2-(cd)^2(2W+2+d^2)}{(W\det(DH))^2}. \tag{4.25}$$

Pero

$$(W+1+d^2)^2c^2=W^2c^2+2Wc^2+c^2+2Wc^2d^2+2c^2d^2+d^4c^2. \tag{4.26}$$

Reemplazando (4.19) en (4.26) se tiene que

$$(W+1+d^2)^2c^2=c^2(1+c^2+d^2)+2Wc^2+c^2+2Wc^2d^2+2c^2d^2+d^4c^2$$

$$=c^2+c^4+(cd)^2+2Wc^2+c^2+2Wc^2d^2+2c^2d^2+d^4c^2$$

$$=c^2(2W+2+c^2+d^2)+(cd)^2(2W+2+d^2). \tag{4.27}$$

Ahora si sumamos y restamos $c^2(cd)^2$ en (4.27)

$$(W+1+d^2)^2c^2=c^2(2W+2+c^2+d^2)+(cd)^2(2W+2+c^2+d^2)-c^2(cd)^2$$

$$=c^2(W\det(DH))+(cd)^2(W\det(DH))-c^2(cd)^2. \tag{4.28}$$

Y al reemplazar (4.28) en (4.25), entonces

$$\begin{aligned}
\left(\frac{W+1+d^2}{W\det(DH)}c - \frac{cd}{W\det(DH)}d\right)^2 &= \frac{c^2(W\det(DH)) + (cd)^2(W\det(DH)) - c^2(cd)^2}{\big(W\det(DH)\big)^2} - \\
&\qquad \frac{(cd)^2(2W+2+d^2)}{\big(W\det(DH)\big)^2} \\
&= \frac{c^2(W\det(DH)) + (cd)^2(W\det(DH))}{\big(W\det(DH)\big)^2} - \\
&\qquad \frac{(cd)^2(2W+2+c^2+d^2)}{\big(W\det(DH)\big)^2} \\
&= \frac{c^2}{W\det(DH)}. \qquad (4.29)
\end{aligned}$$

Finalmente reemplazando (4.24) y (4.29) en (4.22) y teniendo encuenta la ecuación (4.19) obtenemos

$$\begin{aligned}
E = \left\langle \frac{\partial\widetilde{X}}{\partial\xi_1}, \frac{\partial\widetilde{X}}{\partial\xi_1} \right\rangle &= \frac{1+d^2}{W\det(DH)} + \frac{c^2}{W\det(DH)} \\
&= \frac{1+c^2+d^2}{W\det(DH)} = \frac{W^2}{W\det(DH)} \\
&= \frac{W}{\det(DH)}. \qquad (4.30)
\end{aligned}$$

De manera análoga obtenemos que

$$G = \left\langle \frac{\partial\widetilde{X}}{\partial\xi_2}, \frac{\partial\widetilde{X}}{\partial\xi_2} \right\rangle = \frac{W^2}{W\det(DH)} = \frac{W}{\det(DH)}. \qquad (4.31)$$

Por tanto, de (4.30) y (4.31) tenemos que $E = G$.

Mostremos ahora que

$$F = \left\langle \frac{\partial\widetilde{X}}{\partial\xi_1}, \frac{\partial\widetilde{X}}{\partial\xi_2} \right\rangle = 0.$$

En efecto,

$$
\begin{aligned}
\left\langle \frac{\partial \widetilde{X}}{\partial \xi_1}, \frac{\partial \widetilde{X}}{\partial \xi_2} \right\rangle &= \frac{\partial u}{\partial \xi_1}\frac{\partial u}{\partial \xi_2} + \frac{\partial v}{\partial \xi_1}\frac{\partial v}{\partial \xi_2} + \frac{\partial x_3}{\partial \xi_1}\frac{\partial x_3}{\partial \xi_2} \\
&= -\left(\frac{W+1+d^2}{W\det(DH)}\right)\left(\frac{cd}{W\det(DH)}\right) - \left(\frac{W+1+c^2}{W\det(DH)}\right)\left(\frac{cd}{W\det(DH)}\right) + \\
&\qquad \left(\frac{W+1+d^2}{W\det(DH)}c - \frac{cd}{W\det(DH)}d\right)\left(\frac{W+1+c^2}{W\det(DH)}d - \frac{cd}{W\det(DH)}c\right) \\
&= \left(\frac{W+1+c^2}{W\det(DH)} + \frac{W+1+c^2}{W\det(DH)}\right)\left(-\frac{cd}{W\det(DH)}\right) + \\
&\qquad \left(\frac{W+1+d^2}{W\det(DH)}c - \frac{cd}{W\det(DH)}d\right)\left(\frac{W+1+c^2}{W\det(DH)}d - \frac{cd}{W\det(DH)}c\right) \\
&= \left(\frac{W^2+1+d^2}{W\det(DH)}\,c - \frac{cd}{W\det(DH)}\,d\right)\left(\frac{W^2+1+c^2}{W\det(DH)}\,d - \frac{cd}{W\det(DH)}\,c\right) + \\
&\qquad \left(\frac{2W+2+c^2+d^2}{W\det(DH)}\right)\left(-\frac{cd}{W\det(DH)}\right). \qquad (4.32)
\end{aligned}
$$

Reemplazando la ecuación (4.19) en (4.32), entonces

$$
\begin{aligned}
\left\langle \frac{\partial \widetilde{X}}{\partial \xi_1}, \frac{\partial \widetilde{X}}{\partial \xi_2} \right\rangle &= \left(\frac{W+1+d^2}{W\det(DH)}\,c - \frac{cd}{W\det(DH)}\,d\right)\left(\frac{W^2+1+c^2}{W\det(DH)}\,d - \frac{cd}{W\det(DH)}\,c\right) \\
&\qquad - \frac{cd}{W\det(DH)} \\
&= -\frac{cd}{W\det(DH)} + \frac{(W+1+c^2)(W+1+d^2)}{(W\det(DH))^2}\,cd - \frac{W+1+d^2}{(W\det(DH))^2}\,(cd)c^2 \\
&\qquad - \frac{W^2+1+c^2}{(W\det(DH))^2}\,(cd)d^2 + \left(\frac{cd}{W\det(DH)}\right)^2(cd) \qquad (4.33)
\end{aligned}
$$

Ahora

$$
\begin{aligned}
-\frac{W+1+d^2}{(W\det(DH))^2}\,(cd)c^2 - \frac{W^2+1+c^2}{(W\det(DH))^2}\,(cd)d^2 &= -\left(\frac{(W+1+d^2)c^2 + (W+1+c^2)d^2}{(W\det(DH))^2}\right)cd \\
&= \frac{Wc^2+c^2+Wd^2+d^2+2(cd)^2}{(W\det(DH))^2}\,cd, \qquad (4.34)
\end{aligned}
$$

reemplazando (4.33) en (4.34)

$$\left\langle \frac{\partial \widetilde{X}}{\partial \xi_1}, \frac{\partial \widetilde{X}}{\partial \xi_2} \right\rangle = -\frac{cd}{W\det(DH)} - \frac{Wc^2 + c^2 + Wd^2 + d^2 + (cd)^2}{(W\det(DH))^2} + \left(\frac{cd}{W\det(DH)}\right)^2 cd$$
$$+ \frac{(W+1+d^2)(W+1+c^2)}{(W\det(DH))^2} cd, \tag{4.35}$$

pero

$$\frac{(W+1+d^2)(W+1+c^2)}{(W\det(DH))} cd = \frac{Wc^2 + Wd^2 + c^2 + d^2 + d^2 + (cd)^2}{(W\det(DH))^2} cd +$$
$$\frac{W^2 + W + 1}{(W\det(DH))^2} cd, \tag{4.36}$$

de la ecuación (4.19), sumando y restando $\left(\frac{cd}{W\det(DH)}\right) cd$ y teniendo en cuenta la ecuación (4.21)

$$\frac{(W+1+d^2)(W+1+c^2)}{(W\det(DH))} cd = \frac{Wc^2 + Wd^2 + c^2 + d^2 + d^2 + 2(cd)^2}{(W\det(DH))^2} cd + \frac{cd}{W\det(DH)}$$
$$-\left(\frac{cd}{W\det(DH)}\right) cd. \tag{4.37}$$

Reemplazando (4.37) en (4.35) obtenemos

$$F = \left\langle \frac{\partial \widetilde{X}}{\partial \xi_1}, \frac{\partial \widetilde{X}}{\partial \xi_2} \right\rangle = -\frac{cd}{W\det(DH)} - \frac{Wc^2 + Wd^2 + c^2 + d^2 + 2(cd)^2}{(W\det(DH))^2} + \left(\frac{cd}{W\det(DH)}\right)^2 cd +$$
$$\frac{Wc^2 + Wd^2 + c^2 + d^2 + 2(cd)^2}{(W\det(DH))^2} - \left(\frac{cd}{W\det(DH)}\right)^2 cd$$
$$= 0.$$

Por tanto ξ_1, ξ_2 son parámetros isotermos. $\square$

Definición 4.2. *Una función $f(u,v)$ de valor real es analítica en un punto (u_0, v_0) si admite un desarrollo en serie de potencias en un entorno del punto (u_0, v_0).*

Corolario 4.1. *Supongamos que $X(u,v) = \big(u, v, f(u,v)\big)$, define una superficie minimal M, entonces $f(u,v)$ es una función real analítica.*

Demostración. Por el teorema (4.4), para cada punto $p \in M$ existe una vecindad en la cual podemos introducir la función (4.17) y de ésta podemos obtener parámetros isotermos $\xi_1,\ \xi_2$ para la superficie M en forma local. Luego por el teorema 4.2 obtenemos que $u(\xi_1,\ \xi_2)$, $v(\xi_1,\ \xi_2)$ son funciones armónicas.

Ahora como $u(\xi_1,\ \xi_2)$ es armónica, entonces podemos hallar su armónica conjugada $\bar{u}$ y de allí, la función $g(\xi) = u(\xi_1, \xi_2) + \bar{u}(\xi_1, \xi_2)$, siendo $\xi = \xi_1 + i\,\xi_2$ es una función analítica.

Como $g(\xi)$ es analítica, entonces $g(\xi)$ admite un desarrollo en serie de potencia, la cual converge a $g(\xi)$, ([3], p.154). Por tanto $u(\xi_1, \xi_2)$ admita un desarrollo en serie de potencia en un entorno del punto (ξ_1, ξ_2). De manera análoga se muestra que $v(\xi_1, \xi_2)$ es una función real analítica.

Pero $f\big(u(\xi_1, \xi_2), v(\xi_1, \xi_2)\big)$ también es una función armónica de ξ_2 y ξ_1, de ahí que $f(u, v)$ admita un desarrollo en serie de potencia en un entorno de un punto (u, v), luego $f(u, v)$ es una función real analítica. $\square$

Teorema 4.5. *Sea M una superficie definida por la parametrización $X(u, v) = \big(x(u, v), y(u, v), z(u, v)\big)$ con u, v son parámetros isotermos. Sea $\widetilde{X}(\bar{u}, \bar{v})$ una reparametrización de M definida por el difeomorfismo $\mathcal{F}$ dado entre $\bar{U}$ y U, entonces $\bar{u}$, $\bar{v}$ son también parámetros isotermos para M si, y sólo si la función $\mathcal{F}$ es conforme.*

Demostración. Sea $X(u, v) = \big(x(u, v), y(u, v), z(u, v)\big)$ una parametrización de la superficie M. Sea $\mathcal{F} : \bar{U} \to U$ un difeomorfismo, entonces se denotará por J la matriz jacobiana de $\mathcal{F}$, es decir

$$J = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial \bar{u}} & \dfrac{\partial u}{\partial \bar{v}} \\[2ex] \dfrac{\partial v}{\partial \bar{u}} & \dfrac{\partial v}{\partial \bar{v}} \end{pmatrix}.$$

Ahora definamos $\widetilde{X}(\bar{u}, \bar{v}) = X\big(u(\bar{u}, \bar{v}), v(\bar{u}, \bar{v})\big)$ una reparametrización de M en un punto p.

Como de (1.6) tenemos que

$$\mathcal{G} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}, \tag{4.38}$$

por tanto la matriz $\widetilde{\mathcal{G}}$ es semejante a la matriz $\mathcal{G}$, luego

$$\widetilde{\mathcal{G}} = J^T \mathcal{G} J. \tag{4.39}$$

Supongamos que u y v son parámetros isotermos para la superficie M dada por la parametrización $X(u, v)$, entonces $E = G$, $F = 0$ y por tanto la matriz $\mathcal{G}$ nos queda

$$\mathcal{G} = E\,\mathbb{I}, \tag{4.40}$$

siendo $\mathbb{I}$ la matriz identidad.

Al reemplazar (4.40) en (4.39) tenemos que

$$\widetilde{\mathcal{G}} = E\,J^T J. \tag{4.41}$$

Pero $\bar{u}$, $\bar{v}$ también son parámetros isotermos para M dada por la parametrización $\widetilde{X} = (\bar{u}, \bar{v})$, por tanto $\bar{E} = \bar{G}$, $\bar{F} = 0$, de ahí que

$$\widetilde{\mathcal{G}} = \widetilde{E}\,\mathbb{I}, \tag{4.42}$$

luego de (4.41) y (4.42)

$$E\,J^T J = \widetilde{E}\,\mathbb{I}, \tag{4.43}$$

es decir

$$J^T J = J J^T = \frac{\widetilde{E}}{E}\,\mathbb{I}.$$

Por tanto $\sqrt{\dfrac{E}{\widetilde{E}}}\,J$ es una matriz ortogonal.

Como $\sqrt{\dfrac{E}{\widetilde{E}}}\,J$ es una matriz ortogonal, esto equivale a decir que la función $\mathcal{F}$ es una transformación conforme, ([11], p.286). $\square$

Capítulo 5

Representación de Weierstrass

Dentro del desarrollo histórico de las superficie minimales en $\mathbb{R}^3$, la representación de Weierstrass tiene gran importancia, pues en los años sesenta Robert Osserman recuperó dicha representación y permitió un gran avance en la teoría de superficies minimales en $\mathbb{R}^3$, además la representación de Weierstrass permitió el descubrimiento de nuevas superficies minimales en $\mathbb{R}^3$.

A continuación presentamos la representación de Weierstrass, las cual nos brinda otra forma de ver, y de obtener, superficies minimales en $\mathbb{R}^3$, a partir de las funciones analíticas, para ello comencemos con el siguiente teorema.

Teorema 5.1. *Sea $D \subset \mathbb{C}$ un dominio, $g(\zeta)$ una función meromorfa*[1] *arbitraria en D y $f(\zeta)$ una función analítica en D. Si además tienen la propiedad de que para todo punto donde $g(\zeta)$ tenga un polo de orden m, $f(\zeta)$ tiene un cero de orden de al menos $2m$, entonces las funciones*

$$\phi_1(\zeta) = \frac{1}{2} f(1 - g^2), \qquad \phi_2(\zeta) = \frac{i}{2} f(1 + g^2), \qquad \phi_3(\zeta) = f\, g. \tag{5.1}$$

[1] Una función $g : D \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, es meromorfa si los únicos puntos en los que g no es analítica son polos.

Son analíticas y cumplen

$$\phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2 = 0. \tag{5.2}$$

Recíprocamente para cualesquiera tres funciones analíticas $\phi_i : D \to \mathbb{C}$ $(i = 1, 2, 3)$ *cumpliendo (5.2) se pueden escribir como en (5.1) excepto para* $\phi_1 = i\,\phi_2$, $\phi_3 = 0$.

Demostración. Como los polos de g son ceros de f de orden el doble, entonces las funciones ϕ_i definidas en (5.1) son analíticas, además

$$\begin{aligned}
\phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2 &= \left(\frac{f}{2}(1-g^2)\right)^2 + \left(\frac{i f}{2}(1+g^2)\right)^2 + (f\,g)^2 \\
&= \frac{f^2}{4}(1-2g^2+g^4) - \frac{f^2}{4}(1+2g^2+g^4) + f^2g^2 \\
&= f^2g^2 - f^2g^2 = 0.
\end{aligned}$$

Recíprocamente, sean $\phi_i : D \to \mathbb{C}$ $(i = 1, 2, 3)$ cumpliendo (5.2), tomemos

$$f = \phi_1 - i\phi_2, \qquad g = \frac{\phi_3}{f}. \tag{5.3}$$

Con estas condiciones de f, g se cumple que

$$\phi_3 = f\,g.$$

Veamos que también se cumplen las dos primeras igualdades de (5.1). Nótese que

$$\begin{aligned}
(\phi_1 - i\,\phi_2)(\phi_1 + i\,\phi_2) &= \phi_1^2 + i\,\phi_1\phi_2 - i\,\phi_1\phi_2 + \phi_2^2 \\
&= \phi_1^2 + \phi_2^2.
\end{aligned}\tag{5.4}$$

Como $\phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2 = 0$, entonces $\phi_1^2 + \phi_2^2 = -\phi_3^2$. Por tanto de (5.4)

$$-\phi_3^2 = (\phi_1 - i\,\phi_2)(\phi_1 + i\,\phi_2) = \phi_1^2 + \phi_2^2. \tag{5.5}$$

Ahora de las ecuaciones (5.3),

$$-f\,g^2 = -(\phi_1 - i\,\phi_2)\,\frac{\phi_3^2}{(\phi_1 - i\,\phi_2)^2}$$

$$= \frac{-\phi_3^2}{\phi_1 - i\,\phi_2}, \tag{5.6}$$

multiplicando y dividiendo por $\phi_1 + i\,\phi_2$,

$$-f\,g^2 = -\frac{\phi_3^2}{\phi_1 - i\,\phi_2}\,\frac{\phi_1 + i\,\phi_2}{\phi_1 + i\,\phi_2}$$

$$= -\phi_3^2\,\frac{\phi_1 + i\,\phi_2}{\phi_1^2 + \phi_2^2},$$

y de la ecuación (5.5), si $\phi_3^2 \neq 0$, entonces

$$-f\,g^2 = \phi_1 + i\,\phi_2. \tag{5.7}$$

Obteniendo las ecuaciones

$$\phi_1 - i\,\phi_2 = f, \qquad\qquad \phi_1 + i\,\phi_2 = -f\,g^2,$$

entonces, si sumamos las anteriores ecuaciones obtenemos

$$\phi_1 = \frac{1}{2}\,f(1 - g^2),$$

y si las restamos tenemos

$$\phi_2 = \frac{i}{2}\,f(1 + g^2).$$

□

La condición que me relaciona los ceros de f y los polos de g debe darse, pues de lo contrario de la ecuación (5.7)

$$\phi_1 + i\phi_2$$

no sería analítica.

Ésta representación falla sólo si el denominador de la expresión para g en (5.3) es cero, es decir si $\phi_1 - i\phi_2 = 0$; y en éste caso de (5.5) $\phi_3 = 0$, con lo cual

$$\phi_1 \neq i\phi_2 \;\text{ y }\; \phi_3 \neq 0.$$

Teorema 5.2. *Toda superficie minimal $M \subset \mathbb{R}^3$ se puede representar localmente en la forma*

$$x(u,v) = Re\left\{\int_{\zeta_0}^{\zeta} \phi_1(\epsilon)\, d\epsilon\right\} + c_1,$$

$$y(u,v) = Re\left\{\int_{\zeta_0}^{\zeta} \phi_2(\epsilon)\, d\epsilon\right\} + c_2, \tag{5.8}$$

$$z(u,v) = Re\left\{\int_{\zeta_0}^{\zeta} \phi_3(\epsilon)\, d\epsilon\right\} + c_3,$$

donde las ϕ_k están definidas en (5.1), $c_k \in \mathbb{C}$, k=1,2,3, para cierta g meromorfa y f analítica definidas en un dominio simplemente conexo $D \subseteq \mathbb{C}$.

Demostración. Sea $X : U \subseteq \mathbb{R} \to M \subset \mathbb{R}^3$ tal que $X(u,v) = \big(x(u,v), y(u,v), z(u,v)\big)$ es una parametrización isoterma de M, siendo u y v parámetros isotermos.

Como M es minimal y la parametrización $X(u,v)$ es isoterma, entonces por el teorema (4.2), $x(u,v)$, $y(u,v)$ y $z(u,v)$ son funciones armónicas, y por tanto de la propiedad **1** dada en la página 36 las funciones ϕ_k, $k = 1, 2, 3$ son analíticas y cumplen (5.8).

En efecto, mostremos que

$$x(u,v) = Re\left\{\int_{\zeta_0}^{\zeta} \phi_1(\epsilon)\, d\epsilon\right\} + c_1,$$

y de manera análoga se procede con $y(u,v)$ y $z(u,v)$, siendo $\zeta = u + iv$

Si consideramos $\epsilon = u + iv$, entonces

$$\begin{aligned} \phi_1(\epsilon)\, d\epsilon &= \Big(\frac{\partial x}{\partial u} - i\frac{\partial x}{\partial v}\Big)(du + idv) \\ &= \Big(\frac{\partial x}{\partial u}du + \frac{\partial x}{\partial v}dv\Big) + i\Big(\frac{\partial x}{\partial u}dv - \frac{\partial x}{\partial v}du\Big), \end{aligned}$$

donde

$$d\,x = \Big(\frac{\partial x}{\partial u}du + \frac{\partial x}{\partial v}dv\Big). \tag{5.9}$$

De ahí que

$$Re\left\{\int_{\zeta_0}^{\zeta}\phi_1(\epsilon)\,d\epsilon\right\} = Re\left\{\int_{\zeta_0}^{\zeta}\Big(\frac{\partial x}{\partial u}du + \frac{\partial x}{\partial v}dv\Big)+i\Big(\frac{\partial x}{\partial u}dv - \frac{\partial x}{\partial v}du\Big)\right\}$$

$$= \int_{\zeta_0}^{\zeta}\frac{\partial x}{\partial u}du + \frac{\partial x}{\partial v}dv,$$

y de la ecuación (5.9) tenemos

$$Re\left\{\int_{\zeta_0}^{\zeta}\phi_1(\epsilon)\,d\epsilon\right\} = \int_{\zeta_0}^{\zeta} d\,x$$

$$= x(u,v) - x(u_0,v_0).$$

Obteniendo finalmente

$$x(u,v) = Re\left\{\int_{\zeta_0}^{\zeta}\phi_1(\epsilon)\,d\epsilon\right\}+c_1,$$

con $c_1 = x(u_0, v_0)$. □

De acuerdo a éste teorema, podemos afirmar que el estudio de las superficies minimales en $\mathbb{R}^3$ es equivalente al estudio de triplas de funciones analíticas cumpliendo (5.2). Al par (f, g) se les llama de datos de Weierstrass. Los anteriores resultados fueron obtenidos por Karl Weierstrass. Weierstrass expuso las fórmulas (5.8) y (5.1) en el seminario matemático de la Universidad de Berlin en 1861 y las comunicó a la academia de Berlin en 1866. Esta mismas fórmulas fueron obtenidas por Enneper independientemente.

Tomemos dos funciones f y g las cuales sean analíticas en un dominio simplemente conexo $D \subseteq \mathbb{C}$, para así obtener una superficie minimal.

Sean $f = 2$ y $g = \zeta$ dos funciones las cuales son analíticas en todo $\mathbb{C}$, entonces de acuerdo al teorema (5.1) las ϕ_k, $k = 1, 2, 3$ están bien definidas y además por el teorema (5.1)

$$\phi_1(\zeta) = 1 - \zeta^2 \qquad \phi_2(\zeta) = i(1+\zeta^2) \qquad \phi_3(\zeta) = 2\zeta \tag{5.10}$$

son funciones analíticas.

Por tanto, de acuerdo al teorema 5.2 existe una superficie minimal tal que

$$x(u,v) = Re\left\{\int_0^{\zeta} \phi_1(\epsilon)\, d\epsilon\right\} + c_1,$$

$$y(u,v) = Re\left\{\int_0^{\zeta} \phi_2(\epsilon)\, d\epsilon\right\} + c_2,$$

$$z(u,v) = Re\left\{\int_0^{\zeta} \phi_3(\epsilon)\, d\epsilon\right\} + c_3.$$

Hallemos $x(u,v)$; de (5.10) tenemos

$$\begin{aligned} x(u,v) &= Re\left\{\int_0^{\zeta} \phi_1(\epsilon)\, d\epsilon\right\} + c_1 = Re\left\{\int_0^{\zeta} (1-\epsilon^2) d\epsilon\right\} + c_1 \\ &= Re\left\{(\epsilon - \frac{\epsilon^3}{3})\Big|_0^{\zeta}\right\} + c_1 \\ &= Re\left\{u + iv - \frac{u^3 + 3iu^2v - 3uv^2 - iv^3}{3}\right\} \\ &= u - \frac{u^3}{3} + uv^2. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$x(u,v) = u - \frac{u^3}{3} + uv^2.$$

De manera análoga se tiene que

$$y(u,v) = -v + \frac{v^3}{3} - vu^2 \qquad\qquad z(u,v) = u^2 - v^2,$$

con lo cual hemos obtenido la siguiente superficie minimal.

Ejemplo 6 (Superficie de Enneper). *La superficie de Enneper, es la superficie parametrizada por*

$$X(u,v) = (u - \frac{u^3}{3} + uv^2, -v + \frac{v^3}{3} - vu^2, u^2 - v^2), \qquad (u,v) \in \mathbb{R}^2.$$

Es una superficie minimal.

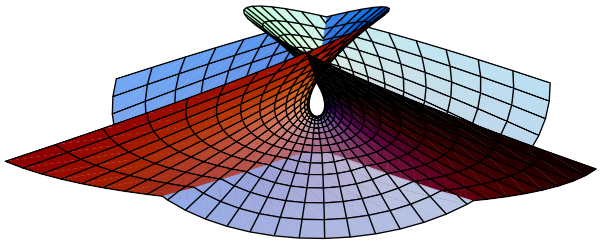


Figura 5.1: Superficie minimal de Enneper

Siguiendo los procedimientos anteriores puedo obtener las siguientes superficies minimales

Ejemplo 7. *Para* $f = 2\zeta$ *y* $g = \zeta$ *obtengo*

$$X(u,v) = \Big(\frac{u^2-v^2}{2} - \frac{u^4-6u^2v^2+v^4}{4}, uv^3 - uv - vu^3, \frac{2u^3}{3} - 2uv^2\Big).$$

la cual es la misma superficie minimal dada en la página 41 del capítulo 4, (figura 5.2).

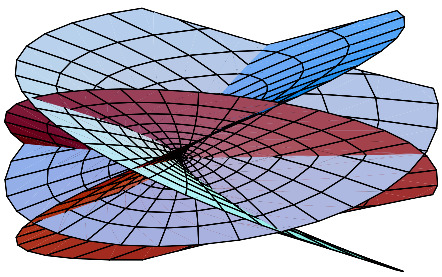


Figura 5.2.

Ejemplo 8. *para* $f = \cos^2\zeta$ *y* $g = \dfrac{\operatorname{sen}\zeta}{\cos\zeta}$ *obtengo*

$$X(u,v) = (\operatorname{sen} 2u \cosh 2v, -v, \operatorname{sen} 2u \cosh 2v).$$

Ejemplo 9. *Para* $f = \dfrac{2}{\zeta}$ *y* $g = \zeta$ *obtengo*

$$X(u,v) = \big(-\frac{u^2}{2} + \frac{v^2}{2} + \frac{1}{2}\ln(u^2+v^2), -uv - \arg(u+iv), 2u\big),$$

(figura 5.3).

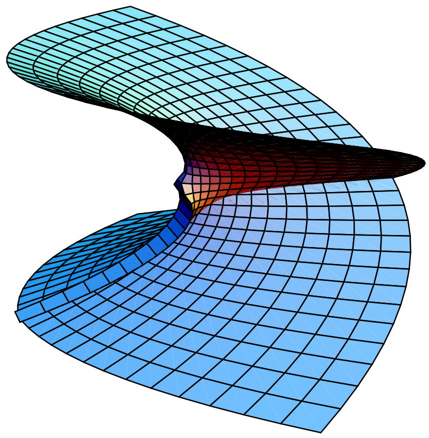


Figura 5.3.

Capítulo 6

Teorema de Bernstein

En el presente capítulo trataremos un importante resultado de las superficies minimales en $\mathbb{R}^3$, el cual es conocido como: el teorema de Bernstein, éste nos dice que las únicas superficies minimales completas en $\mathbb{R}^3$ (esto es, definidas en todo $\mathbb{R}^2$) son los planos.

Lema 6.1. *Sea $E : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, U un dominio convexo, $E \in C^2$. Supongamos que la matriz Hessiana*

$$\mathcal{H}(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 E}{\partial x^2}(x,y) & \dfrac{\partial^2 E}{\partial x \partial y}(x,y) \\ \dfrac{\partial^2 E}{\partial y \partial x}(x,y) & \dfrac{\partial^2 E}{\partial y^2}(x,y) \end{pmatrix}$$

está definida positivamente[1]*. Definamos la función $\mathcal{F} : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por*

$$\mathcal{F}(x,y) = \left(\frac{\partial E}{\partial x}(x,y), \frac{\partial E}{\partial y}(x,y) \right), \tag{6.1}$$

entonces si $\theta = (\theta_1, \theta_2)$ y $\mu = (\mu_1, \mu_2)$ son dos puntos distintos en U y si $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2)$ y $\eta = (\eta_1, \eta_2)$ son sus respectiva imágenes bajo la función $\mathcal{F}$, entonces

$$\langle \theta - \mu, \zeta - \eta \rangle > 0. \tag{6.2}$$

[1]Una matriz simétrica H esta definida positivamente si $X^T H X > 0$ para todo $X \in \mathbb{R}^2$, $X \neq 0$.

Demostración. Como U es un dominio convexo, entonces existe un $\delta > 0$ tal que

$$t\theta + (1-t)\mu \in U, \quad \text{con } t \in (-\delta, 1+\delta).$$

En efecto; como $\theta, \mu \in U$, y dado que U es abierto, (por ser U un dominio), entonces existen $B(\theta, \delta_1) \subseteq U$ y $B(\mu, \delta_2) \subseteq U$, sea $\delta^* = \text{mín}\{\delta_1, \delta_2\}$ y tomemos

$$\delta = \frac{\delta^*}{\|\theta - \mu\|}.$$

Si $-\delta < t < 0$, entonces

$$\begin{aligned} \|t\theta + (1-t)\mu - \mu\| &= \|t\theta - t\mu\| = |t|\|\theta - \mu\| \\ &< \delta\|\theta - \mu\| = \frac{\delta^*}{\|\theta - \mu\|}\|\theta - \mu\| = \delta^*, \end{aligned}$$

por tanto

$$t\theta + (1-t)\mu \in U, \quad \text{para} \quad -\delta < t < 0. \tag{6.3}$$

Ahora si $1 < t < 1+\delta$, entonces

$$\begin{aligned} \|\theta - t\theta - (1-t)\mu\| &= \|(\theta - \mu) - t(\theta - \mu)\| = \|(\theta - \mu)(1-t)\| \\ &= |t-1|\|\theta - \mu\| < \delta\,\|\theta - \mu\| = \delta^*, \end{aligned}$$

por tanto

$$t\theta + (1-t)\mu \in U, \quad \text{para} \quad 1 < t < 1+\delta. \tag{6.4}$$

Luego de (6.3) y (6.4)

$$t\theta + (1-t)\mu \in U, \qquad t \in (-\delta, 1+\delta).$$

Definamos

$$P(t) = E\big(t\theta + (1-t)\mu\big), \qquad t \in (-\delta, 1+\delta),$$

y dado que $E \in C^2$, entonces E es diferenciable y como la función

$$t \to t\theta + (1-t)\mu, \qquad t \in (-\delta, 1+\delta),$$

es diferenciable, entonces por la regla de la cadena, P es diferenciable y además

$$P'(t) = \frac{\partial E}{\partial x}(x,y)\frac{\partial x}{\partial t}(t) + \frac{\partial E}{\partial y}(x,y)\frac{\partial y}{\partial t}(t),$$

siendo $x(t) = t\theta_1 + (1-t)\mu_1$, $y(t) = t\theta_2 + (1-t)\mu_2$ con $t \in (-\delta, 1+\delta)$, por tanto

$$P'(t) = \frac{\partial E}{\partial x}(x,y)(\theta_1 - \mu_1) + \frac{\partial E}{\partial y}(x,y)(\theta_2 - \mu_2).$$

Luego

$$\begin{aligned}
P''(t) &= \frac{d}{dt}\big[P'(t)\big] = \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial E}{\partial x}(x,y)(\theta_1 - \mu_1) + \frac{\partial E}{\partial y}(x,y)(\theta_2 - \mu_2)\right] \\
&= \frac{\partial^2 E}{\partial x^2}\frac{\partial x}{\partial t}(\theta_1 - \mu_1) + \frac{\partial^2 E}{\partial x \partial y}\frac{\partial x}{\partial t}(\theta_2 - \mu_2) + \frac{\partial^2 E}{\partial y^2}\frac{\partial y}{\partial t}(\theta_1 - \mu_1) + \frac{\partial^2 E}{\partial y \partial x}\frac{\partial y}{\partial t}(\theta_2 - \mu_2) \\
&= \frac{\partial^2 E}{\partial x^2}(\theta_1 - \mu_1)^2 + \frac{\partial^2 E}{\partial x \partial y}(\theta_1 - \mu_1)(\theta_2 - \mu_2) + \frac{\partial^2 E}{\partial y \partial x}(\theta_1 - \mu_1)(\theta_2 - \mu_2) + \\
&\quad \frac{\partial^2 E}{\partial y^2}(\theta_2 - \mu_2)^2.
\end{aligned}$$

Ahora como $\mathcal{H}(x,y)$ es una matriz definida positivamente, entonces

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 E}{\partial x^2}(\theta_1 - \mu_1)^2 + \frac{\partial^2 E}{\partial x \partial y}(\theta_1 - \mu_1)(\theta_2 - \mu_2) + \frac{\partial^2 E}{\partial y \partial x}(\theta_1 - \mu_1)(\theta_2 - \mu_2) \\
&\qquad + \frac{\partial^2 E}{\partial y^2}(\theta_2 - \mu_2)^2 > 0 \quad \text{para} \quad -\delta < t < 1 + \delta.
\end{aligned}$$

Dado que $P'(t)$ continua en $[0,1]$ y $P''(t) > 0$ en $(0,1)$, entonces $P'(t)$ es escríctamente creciente en $[0,1]$, por tanto $P'(1) > P'(0)$, de ahí que

$$\frac{\partial E}{\partial x}(\theta)(\theta_1 - \mu_1) + \frac{\partial E}{\partial y}(\theta)(\theta_2 - \mu_2) > \frac{\partial E}{\partial x}(\mu)(\theta_1 - \mu_1) + \frac{\partial E}{\partial y}(\mu)(\theta_2 - \mu_2).$$

Como hemos definido $\zeta = \mathcal{F}(\theta) = (\zeta_1, \zeta_2)$ y $\eta = \mathcal{F}(\mu) = (\eta_1, \eta_2)$, siendo

$$\zeta_1 = \frac{\partial E}{\partial x}(\theta) \qquad \zeta_2 = \frac{\partial E}{\partial y}(\theta) \qquad \eta_1 = \frac{\partial E}{\partial x}(\mu) \qquad \eta_2 = \frac{\partial E}{\partial y}(\mu),$$

entonces

$$\zeta_1(\theta_1 - \mu_1) + \zeta_2(\theta_2 - \mu_2) > \eta_1(\theta_1 - \mu_1) + \eta_2(\theta_2 - \mu_2),$$

de ahí que

$$\begin{aligned}
(\zeta_1 - \eta_1)(\theta_1 - \mu_1) + (\zeta_2 - \eta_2)(\theta_2 - \mu_2) &> 0 \\
\big\langle (\zeta_1 - \eta_1, \zeta_2 - \eta_2), (\theta_1 - \mu_1, \theta_2 - \mu_2) \big\rangle &> 0 \\
\langle \zeta - \eta, \theta - \mu \rangle &> 0.
\end{aligned}$$

□

Lema 6.2. *Bajo las hipótesis del lema 6.1, si definimos la función*

$$Q(x,y) = \big(x + u(x,y), y + v(x,y)\big) \quad (x,y) \in U \tag{6.5}$$

donde $u(x,y)$, $v(x,y)$ están dados por

$$u(x,y) = \frac{\partial E}{\partial x}(x,y) \quad y \quad v(x,y) = \frac{\partial E}{\partial y}(x,y), \tag{6.6}$$

entonces para dos puntos distintos θ, μ en U, sus imágenes γ y ρ satisfacen

$$\langle \theta - \mu, \gamma - \rho \rangle > \|\theta - \mu\|^2. \tag{6.7}$$

Demostración. Calculemos $\gamma - \rho$. Como $\gamma = Q(\theta) = (\gamma_1, \gamma_2)$ y $\rho = Q(\mu) = (\rho_1, \rho_2)$, entonces

$$\begin{aligned}
\gamma - \rho &= (\gamma_1, \gamma_2) - (\rho_1, \rho_2) \\
&= \big(\theta_1 + u(\theta_1, \theta_2), \theta_2 + v(\theta_1, \theta_2)\big) - \big(\mu_1 + u(\mu_1, \mu_2), \mu_2 + v(\mu_1, \mu_2)\big) \\
&= (\theta_1, \theta_2) - (\mu_1, \mu_2) + \big(u(\theta_1, \theta_2), v(\theta_1, \theta_2)\big) - \big(u(\mu_1, \mu_2), v(\mu_1, \mu_2)\big) \\
&= (\theta - \mu) + (\zeta - \eta).
\end{aligned}$$

De ahí que

$$\begin{aligned}\langle \theta-\mu, \gamma-\rho\rangle &= \big\langle \theta-\mu, (\theta-\mu)+(\zeta-\eta)\big\rangle \\ &= \langle \theta-\mu, \theta-\mu\rangle + \langle \theta-\mu, \zeta-\eta\rangle \\ &= \|\theta-\mu\|^2 + \langle \theta-\mu, \zeta-\eta\rangle,\end{aligned}$$

y de (6.2) obtenemos

$$\langle \theta-\mu, \gamma-\rho\rangle > \|\theta-\mu\|^2.$$

□

Corolario 6.1. *Bajo las mismas hipótesis, tenemos*

$$\|\gamma-\rho\| > \|\theta-\mu\| \tag{6.8}$$

Demostración. Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz

$$\langle \gamma-\rho, \theta-\mu\rangle \leq \|\gamma-\rho\|\|\theta-\mu\|,$$

y por la ecuación (6.7)

$$\langle \gamma-\rho, \theta-\mu\rangle > \|\theta-\mu\|^2,$$

luego

$$\|\theta-\mu\|^2 < \|\gamma-\rho\|\|\theta-\mu\|,$$

de ahí que

$$\|\theta-\mu\| < \|\gamma-\rho\|.$$

□

Lema 6.3. *Con la notación del lema previo, si U es un disco con centro en el origen y radio R, entonces la función (6.5) es un difeomorfismo de U sobre un dominio Δ el cual incluye un disco de radio R con centro en $Q(0)$.*

Demostración. Como $E \in C^2$, entonces la función (6.5) es continuamente diferenciable. Sea $X(t)$ una curva diferenciable en U, y denotemos por $\xi(t)$ su imagen bajo (6.5), es decir

$$\xi(t) = Q\big(X(t)\big).$$

Dado que $X(t+h)$, $X(t)$ están en U , entonces por la ecuación (6.8)

$$\|\xi(t+h) - \xi(t)\| > \|X(t+h) - X(t)\|,$$

de ahí que

$$\frac{\|\xi(t+h) - \xi(t)\|}{|h|} > \frac{\|X(t+h) - X(t)\|}{|h|},$$

luego

$$\left\|\frac{\xi(t+h) - \xi(t)}{h}\right\| > \left\|\frac{X(t+h) - X(t)}{h}\right\|,$$

por tanto

$$\|\xi'(t)\| \geq \|X'(t)\|. \tag{6.9}$$

Veamos ahora que el jacobiano $\dfrac{\partial(Q_1, Q_2)}{\partial(x, y)}(x, y) \neq 0$ para todo $(x, y) \in U$.

Sea $\theta \in U$ y $v \in \mathbb{R}^2$ un vector cualquiera no nulo. Como U es abierto, entonces existe $\delta > 0$, tal que

$$X(t) = \theta + tv \in U, \quad t \in (-\delta, \delta),$$

con $X(0) = \theta$ y $X'(0) = v$.

Así por (6.9) tenemos que

$$\|\xi'(0)\| \geq \|X'(0)\| = \|v\| > 0, \tag{6.10}$$

pero

$$\xi'(0) = \frac{\partial(Q_1 Q_2)}{\partial(x, y)}(x, y) \cdot v \tag{6.11}$$

luego de (6.10)

$$\frac{\partial(Q_1, Q_2)}{\partial(x, y)}(x, y) \cdot v \neq 0, \tag{6.12}$$

para cualquier $v \in \mathbb{R}^2$, con $v \neq 0$. Por lo tanto

$$\frac{\partial(Q_1, Q_2)}{\partial(x, y)}(x, y) \neq 0, \tag{6.13}$$

para todo $(x, y) \in U$.

Ahora por (6.8) se tiene que Q es uno a uno en U, por lo tanto $\Delta = Q(U)$ es abierto, así Q es un difeomorfismo de U en el dominio $\Delta = Q(U)$.

Veamos ahora que Δ incluye todos los puntos ξ tales que $\|\xi - Q(0)\| < R$, para algún $R > 0$. Si Δ es todo el plano, entonces

$$\|\xi - Q(0)\| < R.$$

Supongamos que $\Delta \neq \mathbb{R}^2$. Como $\mathbb{R}^2 - \Delta$ es cerrado, por ser Δ abierto, entonces existe $\sigma \in \mathbb{R}^2 - \Delta$ tal que

$$\|\sigma - Q(0)\| = \text{mín}\Big\{\|\eta - Q(0)\| : \eta \in \mathbb{R}^2 - \Delta\Big\},$$

es decir σ minimiza la distancia de $\mathbb{R}^2 - \Delta$ a $Q(0)$, de ahí que $\sigma \in \partial\Delta$, (frontera de Δ), y por tanto existe una sucesión $\{\sigma_k\}$ con $\xi_k \in \Delta$ tal que $\sigma_k \to \xi$, cuando $k \to \infty$, y sea $\{x_k\}$ la correspondiente sucesión en U, (por ser Q uno a uno en U), es decir

$$\sigma_k = Q(x_k), \quad x_k \in U.$$

Luego $\big\{x_k\big\}$ no puede converger en U, pues de lo contrario por la continuidad de Q se tendría que σ sería la imagen de tal límite, lo cual contradice el hecho de que $\sigma \notin U$; luego se sigue que

$$\|x_k\| \to R \quad \text{cuando} \quad k \to \infty,$$

y como de (6.8)

$$\|\sigma_k - Q(0)\| > \|x_k\|,$$

entonces

$$\|\sigma - Q(0)\| \geq R.$$

Luego de la elección de σ, se sigue que si $\xi \in \mathbb{R}^2$ tal que $\|\xi - Q(0)\| < R$, entonces $\xi \in \Delta$. Es decir el disco abierto de centro $Q(0) = \xi(0)$ y radio R está contenido en Δ. $\square$

Teorema 6.1. *Sea $f(x, y)$ una solución de la ecuación (2.1) para $x^2 + y^2 < R^2$, entonces usando la notación (2.23), (4.16), (4.15) la función*

$$H(x, y) = \big(x + F(x, y), y + G(x, y)\big), \tag{6.14}$$

definida por (4.17), es un difeomorfismo sobre un dominio Δ el cual incluye un disco de radio R con centro en el punto $H(0)$.

Demostración. De la ecuaciones (4.16) y (4.15) existe una función $E(x, y)$ en $x^2 + y^2 < R^2$ cumpliendo

$$\frac{\partial E}{\partial x}(x, y) = F(x, y), \qquad\qquad \frac{\partial E}{\partial y}(x, y) = G(x, y), \tag{6.15}$$

y

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2}(x, y) = \frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = \frac{1 + c^2}{W} > 0.$$

de ahí que $E \in C^2$.

Además

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(F, G)}{\partial(x, y)} &= \det \begin{pmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial x} & \dfrac{\partial F}{\partial y} \\ \dfrac{\partial G}{\partial x} & \dfrac{\partial G}{\partial y} \end{pmatrix} \\
&= \frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial G}{\partial y} - \frac{\partial G}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial x} \\
&= \frac{(1 + c^2)(1 + d^2) - (cd)^2}{(\det DH)^2} = 1.
\end{aligned}$$

Así la función $E(x, y)$ tiene una matrix Hessiana definida positivamente y podemos aplicar los lemas 6.1, 6.3. Pero por (6.15) la función

$$(x, y) \;\rightarrow\; (x + F(x, y), y + F(x, y)),$$

siendo $\dfrac{\partial E}{\partial x}(x,y) = F(x,y)$, $\dfrac{\partial E}{\partial y}(x,y) = G(x,y)$, es la función (6.6) y aplicando el lema 6.3 a ésta función, obtenemos el lema 6.1. $\square$

Teorema 6.2. *Sea $f \in C^1$, en un dominio U. Dada superficie M descrita paramétricamente por*

$$X(x,y) = \big(x, y, f(x,y)\big), \quad (x,y) \in U.$$

Entonces la superficie M está en un plano sí, y sólo, si existe una transformación lineal no singular

$$x = x(u,v), \quad y = y(u,v),$$

tal que u, v son parámetros isotermos sobre M.

Demostración. Supongamos que existe una transformación lineal no singular

$$\begin{aligned} x &= x(u,v) = a_0 u + b_0 v \\ y &= y(u,v) = a_1 u + b_1 v, \end{aligned} \tag{6.16}$$

tal que

$$X\big(x(u,v), y(u,v)\big) = \Big(x(u,v), y(u,v), f\big(x(u,v), y(u,v)\big)\Big)$$

es una parametrización isoterma de M.

Sea $\phi_k(\zeta)$, $k = 1,2,3$, las funciones introducidas en (4.3). Luego

$$\begin{aligned} \phi_1(\zeta) &= \frac{\partial x}{\partial u} - i\frac{\partial x}{\partial v} = a_0 - ib_0 \\ \phi_2(\zeta) &= \frac{\partial y}{\partial u} - i\frac{\partial y}{\partial v} = a_1 - ib_1, \end{aligned}$$

de ahí que ϕ_1, ϕ_2 son constantes.

Ahora como

$$\phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2 = 0,$$

se sigue también ϕ_3 es constante.

Pero

$$\phi_3(\zeta) = \frac{\partial f}{\partial u}(x,y) - i\frac{\partial f}{\partial v}(x,y), \qquad \zeta = u + iv, \qquad (x,y) \in D,$$

luego $\nabla f\big(x(u,v), y(u,v)\big)$ es constante, y como la transformación (6.16) es no singular, entonces podemos escribir

$$u = u(x,y) = c_0 x + d_0 y$$

$$v = v(x,y) = c_1 x + d_1 y,$$

luego

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = \text{constante},$$

y

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = \text{constante},$$

así $\nabla f(x,y)$ es constante, por lo tanto

$$f(x,y) = Ax + By + C.$$

Recíprocamente si $f(x,y) = Ax + By + C$, es fácil escribir una transformación lineal en coordenadas isotermas para M, por ejemplo si consideramos

$$x = \lambda A u + Bv \quad \text{y} \quad y = \lambda B u - Av, \quad \text{siendo} \quad \lambda^2 = \frac{1}{1 + A^2 + B^2},$$

entonces u, v son parámetros isotermos para M. En efecto,

$$\begin{aligned}\widetilde{X}(u,v) = X\big(x(u,v), y(u,v)\big) &= \Big(x(u,v), y(u,v), f\big(x(u,v), y(u,v)\big)\Big) \\ &= \big(\lambda A u + Bv, \lambda B u - Av, \lambda u(A^2 + B^2)\big),\end{aligned}$$

es decir

$$\widetilde{X}_u = \big(\lambda A, \lambda B, \lambda(A+B)\big) \quad \text{y} \quad \widetilde{X}_u = (-B, A, 0),$$

por tanto

$$\begin{aligned}
E = \langle \widetilde{X}_u, \widetilde{X}_u \rangle &= \lambda^2 A^2 + \lambda^2 B^2 \lambda^2 (A^2 + B^2) \\
&= \lambda^2 (A^2 + B^2)(1 + A^2 + B^2) \\
&= A^2 + B^2.
\end{aligned}$$

$$G = \langle \widetilde{X}_v, \widetilde{X}_v \rangle = A^2 + B^2 \quad \text{y} \quad F = \langle \widetilde{X}_u, \widetilde{X}_v \rangle = 0.$$

de ahí que u, v son parámetros isotermos para la superficie M. $\square$

A continuación presentaremos el teorema de Osserman, el cual nos es de gran utilidad en la obtención del teorema de Bernstein. Pero para demostrar el teorema el de Osserman consideremos previamente el siguiente lema.

Lema 6.4. *Sea $w : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ una función armónica. Si w es acotada superiormente, entonces w es constante.*

Demostración. Sea $w : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ una función armónica y sea $K \in \mathbb{R}$ tal que

$$w(u, v) < K \quad \text{para todo} \quad \zeta = u + iv \in \mathbb{C}.$$

Como w es armónica en todo el plano $\mathbb{C}$, entonces podemos hallar su armónica conjugada w^* tal que la función

$$f(\zeta) = w(u, v) + iw^*(u, v)$$

es analítica en todo el plano.

Definamos la función $g(\zeta) = \exp\big(f(\zeta)\big)$, la cual es analítica en todo el plano $\mathbb{C}$ y hallemos su módulo $|\exp\big(f(\zeta)\big)|$.

$$|\exp\big(f(\zeta)\big)| = \exp\big(w(u, v)\big),$$

pero como $w(u, v) < K$, entonces

$$\exp\big(w(u, v)\big) < K,$$

por tanto por el teorema de Liouville ([2], p.122) la función $\exp\big(f(\zeta)\big)$ es constante, de ahí que w también es constante. $\square$

Teorema 6.3 (Osserman). *Sea $f(x,y)$ una solución de la ecuación de los grafos minimales (2.1), definida en todo el plano $x\,y$. Entonces existe una transformación lineal no singular*

$$x = u$$
$$y = au + bv, \qquad b > 0.$$

tal que u y v son parámetros isotermos para la superficie M definida por

$$X(x,y) = \big(x, y, f(x,y)\big).$$

Demostración. Sea $H(x,y) = \big(x + F(x,y), y + G(x,y)\big)$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, donde F y G están definidas en (6.15), ($H(x,y)$ es la misma función definida en (4.17)). Entonces H está definida en todo el plano $x\,y$. Por el lema (6.1), se sigue que la función H es un difeomorfismo de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$, (ver figura 6.1), es decir la función H transforma el plano $x\,y$ en el plano $\xi_1\,\xi_2$, siendo $\xi_1 = \xi_1(x,y)$, $\xi_2 = \xi_2(x,y)$, pero por el teorema 4.4, ξ_1 y ξ_2 son parámetros isotermos para la superficie M definida por la parametrización

$$X\big(x(\xi_1,\xi_2), y(\xi_1,\xi_2)\big) = \Bigg(x(\xi_1,\xi_2), y(\xi_1,\xi_2), f\big(x(\xi_1,\xi_2), y(\xi_1,\xi_2)\big)\Bigg).$$

Ahora por la teorema 4.2, las funciones

$$\phi_1(\zeta) = \frac{\partial x}{\partial \xi_1} - i\frac{\partial x}{\partial \xi_2} \qquad \phi_2(\zeta) = \frac{\partial y}{\partial \xi_1} - i\frac{\partial y}{\partial \xi_2} \qquad \phi_3(\zeta) = \frac{\partial f}{\partial \xi_1} - i\frac{\partial f}{\partial \xi_2}, \tag{6.17}$$

son funciones analíticas, además

$$\operatorname{Im}\{\bar{\phi}_1\phi_2\} = -\frac{\partial(x,y)}{\partial(\xi_1,\xi_2)}.$$

En efecto, como

$$\begin{aligned}\bar{\phi}_1\phi_2 &= \left(\frac{\partial x}{\partial \xi_1} + i\frac{\partial x}{\partial \xi_2}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial \xi_1} - i\frac{\partial y}{\partial \xi_2}\right)\\ &= \frac{\partial x}{\partial \xi_1}\frac{\partial y}{\partial \xi_1} + \frac{\partial x}{\partial \xi_2}\frac{\partial y}{\partial \xi_2} - i\left(\frac{\partial x}{\partial \xi_1}\frac{\partial y}{\partial \xi_2} - \frac{\partial x}{\partial \xi_2}\frac{\partial y}{\partial \xi_1}\right),\end{aligned}$$

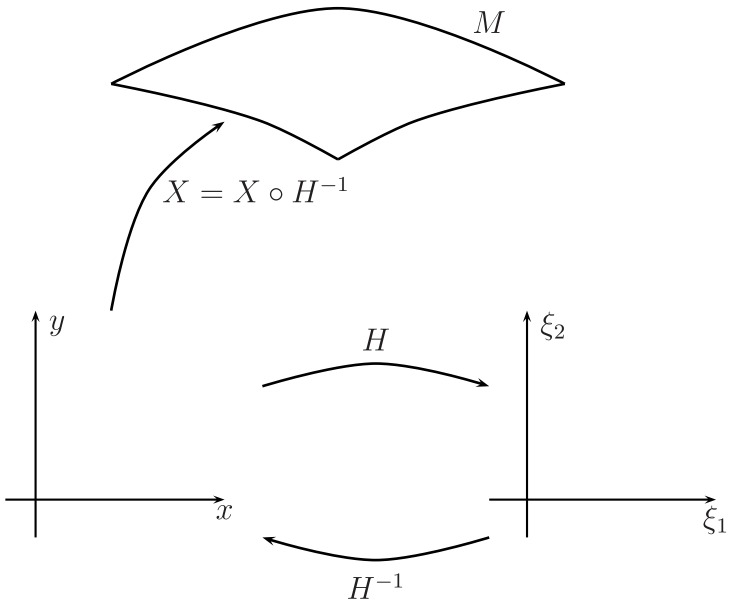


Figura 6.1.

por tanto

$$Im\{\bar{\phi_1}\phi_2\} = -\left(\frac{\partial x}{\partial \xi_1}\frac{\partial y}{\partial \xi_2} - \frac{\partial x}{\partial \xi_2}\frac{\partial y}{\partial \xi_1}\right) = -\frac{\partial(x,y)}{\partial(\xi_1,\xi_2)},$$

y

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(\xi_1,\xi_2)} > 0.$$

Como $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(\xi_1,\xi_2)}$, es el determinante de la matriz Hessiana de H^{-1}, por tanto

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(\xi_1,\xi_2)} = \frac{1}{\dfrac{\partial(\xi_1,\xi_2)}{\partial(x,y)}},$$

y por (4.20) tenemos que

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(\xi_1,\xi_2)} > 0.$$

Mostremos ahora que

$$\mathrm{Im}\left\{\frac{\phi_2}{\phi_1}\right\} = \frac{1}{|\phi_1|^2}\mathrm{Im}\{\bar{\phi_1}\phi_2\} < 0.$$

Dado que

$$\frac{\phi_2}{\phi_1} = \frac{\dfrac{\partial y}{\partial \xi_1} - i\dfrac{\partial y}{\partial \xi_2}}{\dfrac{\partial x}{\partial \xi_1} - i\dfrac{\partial x}{\partial \xi_2}} = \frac{\left(\dfrac{\partial x}{\partial \xi_1} + i\dfrac{\partial x}{\partial \xi_2}\right)\left(\dfrac{\partial y}{\partial \xi_1} - i\dfrac{\partial y}{\partial \xi_2}\right)}{\phi_1^2 + \phi_2^2}$$

$$= \frac{1}{|\phi_1|^2}\mathrm{Im}\{\bar{\phi}_1\phi_2\},$$

de ahí que

$$\mathrm{Im}\left\{\frac{\phi_2}{\phi_1}\right\} = \mathrm{Im}\left\{\frac{\bar{\phi}_1\phi_2}{|\phi_1|^2}\right\}$$

$$= \frac{1}{|\phi_1|^2}\mathrm{Im}\{\bar{\phi}_1\phi_2\} < 0,$$

pero como ϕ_1, ϕ_2 son funciones analíticas y $\phi_1 \neq 0$, para todo $\xi \in \mathbb{C}$, entonces la función

$$\frac{\phi_2}{\phi_1},$$

es analítica en todo $\mathbb{C}$ con $\mathrm{Im}\left\{\dfrac{\phi_2}{\phi_1}\right\} < 0$.

Ahora como $\dfrac{\phi_2}{\phi_1}$ es analítica en todo el plano, entonces su parte imaginaria es armónica, luego del lema 6.4 tenemos que su parte imaginaria es constante, pero como $\dfrac{\phi_2}{\phi_1}$ es analítica, entonces de las ecuaciones de Cauchy-Riemann su parte real también es constante, de ahí que $\dfrac{\phi_2}{\phi_1}$ es una función constante, es decir,

$$\frac{\phi_2}{\phi_1} = c = a - ib, \qquad b > 0,$$

luego

$$\phi_1 = c\phi_2. \tag{6.18}$$

Tomando la parte real e imaginaria de (6.18) tenemos

$$\mathrm{Re}\{\phi_2\} = \mathrm{Re}\{c\phi_1\} \quad \text{y} \quad \mathrm{Im}\{\phi_2\} = \mathrm{Im}\{c\phi_1\},$$

de ahí que

$$\frac{\partial y}{\partial \xi_1} = a\frac{\partial x}{\partial \xi_1} - b\frac{\partial x}{\partial \xi_2}, \tag{6.19}$$

y

$$-\frac{\partial y}{\partial \xi_2} = b\frac{\partial x}{\partial \xi_1} + a\frac{\partial x}{\partial \xi_2}. \tag{6.20}$$

Dfinamos la siguiente transformación lineal no singular

$$(x, y) \to (u, v),$$

tal que

$$x = u \quad \text{y} \quad y = au + bv, \quad b > 0.$$

Entonces

$$\begin{aligned}\frac{\partial y}{\partial \xi_1} &= \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial \xi_1} + \frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial \xi_1}, \\ &= a\frac{\partial u}{\partial \xi_1} + b\frac{\partial v}{\partial \xi_1}, \end{aligned} \tag{6.21}$$

y

$$\begin{aligned}\frac{\partial y}{\partial \xi_2} &= \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial \xi_2} + \frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial \xi_2}, \\ &= a\frac{\partial u}{\partial \xi_2} + b\frac{\partial v}{\partial \xi_2}, \end{aligned} \tag{6.22}$$

Teniendo en cuenta que $x = u$, (6.19) y (6.21)

$$\frac{\partial v}{\partial \xi_1} = -\frac{\partial u}{\partial \xi_2},$$

luego de (6.20) y (6.22)

$$\frac{\partial u}{\partial \xi_1} = \frac{\partial v}{\partial \xi_2},$$

es decir las ecuaciones de Cauchy-Riemann se satisfacen, esto implica

$$g(\xi_1, \xi_2) = u(\xi_1, \xi_2) + iv(\xi_1, \xi_2),$$

es una función analítica de (ξ_1, ξ_2) y

$$g'(\xi) \neq 0 \ \ \forall \xi \in \mathbb{C},$$

por tanto la función g es conforme, (ver [2], p.73) ahora por el lema 4.5 (u, v) son parámetros isotermos para la superficie M, lo cual concluye la demostración, (ver figura 6.2). $\square$

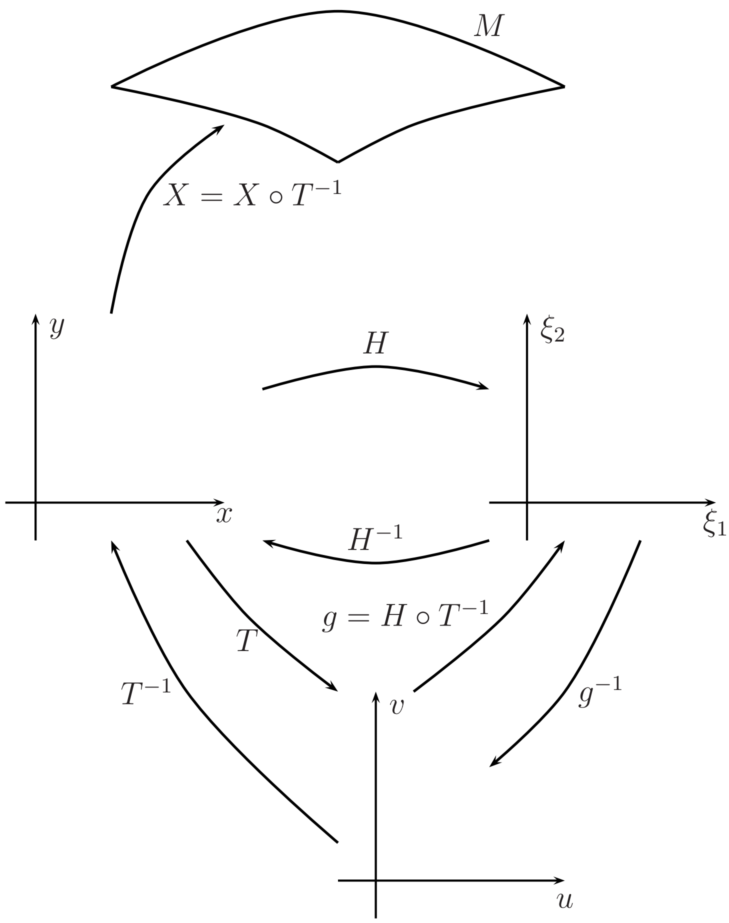


Figura 6.2.

Corolario 6.2 (Teorema de Bernstein). *Sea* $X : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$*, dada por* $X(x, y) = \big(x, y, f(x, y)\big)$*. Si* $f(x, y)$ *satisface la ecuación de los grafos minimales para todo* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$*, entonces* $f(x, y)$ *es una función lineal de* x *e* y*.*

Demostración. Por el teorema 6.3, como $f(x, y)$ es una solución de la ecuación (2.1) en todo el plano, entonces existe una transformación lineal no singular

$$\begin{aligned} x &= u \\ y &= au + bv, \qquad b > 0, \end{aligned}$$

donde u, v son parámetros isotermos para la superficie M definida por $X\big(x(u, v), y(u, v)\big)$.

Por el teorema (6.2) como u, v son parámetros isotermos, entonces $f(x,y) = f\big(x(u,v), y(u,v)\big)$ está definida sobre un plano, es decir $f(x,y) = Ax + By + C$. $\square$

Corolario 6.3. *Una solución acotada de (2.1) en todo el plano debe ser una constante*

Demostración. Sea $f(x,y)$ una solución acotada de (2.1) en todo el plano, entonces por el teorema 6.3 existe una transformación lineal no singular tal que x, y son parámetros isotermos para la superficie M definida por $X(x,y) = \big(x, y, f(x,y)\big)$, luego por el lema 4.2, $f(x,y)$ es una función armónica acotada en todo el plano $x\,y$, de ahí que $f(x,y)$ debe ser igual a una constante, dado que f está acotada para todo x, y. $\square$

BIBLIOGRAFÍA

[1] ALFRED GRAY. *Geometría Diferencial de Curvas y Superficies con Mathematica*. ADDISON - WESLEY, 1995.

[2] LARS V. AHLFORS. *Complex Analysis*. Third Edition. McGraw-Hill, 1973.

[3] A. MARKUSHEVICH. *Teoría de las Funciones Analíticas Tomo II*. Third Edition. Editorial Mir, 1978.

[4] EVANS LAWRENCE. *Partial Differential Equations*. American Mathematical Society. Volumen 19, 1991.

[5] JAMES R. MUNKRES. *Analysis on Manifolds*. Firts Edition. ADDISON-WESLEY, 1990.

[6] M. RODRIDUEZ. *Introducción a la teoría de superficies minimales. Representación de Weierstrass*. Texto Electrónico, www.ugr.es/ geometry/magda.pdf.

[7] MANFREDO P. DO CARMO. *Differential Geometry of Curves and Surfaces*. Firts Edition. New Jersey, 1976.

[8] MANFREDO P. DO CARMO. *Riemannian Geometry*. Second Edition. Birkhauser, 1976.

[9] ROBERT OSSERMAN. *A Survey of Minimal Surfaces*. Dover Publications, Inc. New York, 1969.

[10] Walter Rudin. *Principles of Mathematical Analysis*. Third Edition. McGraw-Hill, 1964.

[11] Seymour Lipschutz. *Teoría y Problemas de Álgebra Lineal*. McGRAW-HILL, 1970.