TRANSFORMACIÓN INTEGRAL DE FOURIER PARA FUNCIONES DE LOS ESPACIOS $L_1(\mathbb{R}^n)$ y $L_2(\mathbb{R}^n)$

JESÚS EDER DÍAZ TRUJILLO
OSCAR EMILIO MOLINA DÍAZ

UNIVERSIDAD DEL CAUCA, FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES, EXACTAS Y DE LA EDUCACIÓN
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
POPAYÁN, CAUCA
2008

TRANSFORMACIÓN INTEGRAL DE FOURIER PARA FUNCIONES DE LOS ESPACIOS $L_1(\mathbb{R}^n)$ y $L_2(\mathbb{R}^n)$

JESÚS EDER DÍAZ TRUJILLO
OSCAR EMILIO MOLINA DÍAZ

TRABAJO DE GRADO
En la modalidad de seminario presentado como requisito parcial para optar al título de Matemático

Director
Ph.D FRANCISCO ENRÍQUEZ

UNIVERSIDAD DEL CAUCA, FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES, EXACTAS Y DE LA EDUCACIÓN
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
POPAYÁN, CAUCA
2008

TRANSFORMACIÓN INTEGRAL DE FOURIER PARA FUNCIONES DE LOS ESPACIOS $L_1(\mathbb{R}^n)$ y $L_2(\mathbb{R}^n)$

JESÚS EDER DÍAZ TRUJILLO
OSCAR EMILIO MOLINA DÍAZ

Documento del Trabajo de Grado realizado en el Seminario de Fundamentos línea de Análisis

UNIVERSIDAD DEL CAUCA, FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES, EXACTAS Y DE LA EDUCACIÓN
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
POPAYÁN, CAUCA
2008

Índice general

Capítulo 1

Introducción

El análisis de Fourier juega un papel importante en distintas disciplinas matemáticas, en particular en la física matemática y la teoría de las distribuciones. Son igualmente conocidas numerosas aplicaciones de dicha rama a otras ciencias exactas y naturales, como también a la tecnología: basta citar, por ejemplo, el teorema del muestreo y las consecuentes aplicaciones de la transformación rápida de Fourier al estudio de las señales.

Para ciertas ecuaciones diferenciales en derivadas parciales (que describen fenómenos físicos y económicos), su solución con frecuencia se encuentra bajo ciertas condiciones, con la ayuda de la transformación de Fourier. De otra parte, mediante esta transformación integral pueden describirse de manera satisfactoria (en determinado sentido) propiedades fundamentales de las funciones.

No obstante lo arriba expuesto, en el Programa de Matemáticas no se cuenta con un curso formal sobre estos tópicos. Estas razones han motivado a los autores del trabajo propuesto, a profundizar en los elementos de la teoría de la transformación de Fourier para funciones de varias variables y algunas de sus aplicaciones. Es de notar que una presentación satisfactoria del análisis de Fourier es posible con la ayuda de la teoría de ciertos espacios funcionales, algunos de los cuales se consideran clásicos y cuyo estudio previo debió ser abordado por los autores.

El trabajo tendrá como eje principal el análisis de Fourier, haciendo especial énfasis en la transformación integral de Fourier para funciones de varias variables reales, la representación integral de Fourier y algunas aplicaciones, tales como los teoremas de convolución y Plancherel.

Para el desarrollo del trabajo, se hacen necesarios ciertos conceptos específicos del análisis matemático, tales como las integrales dependientes de parámetro, teorema de Fubini, la convolución, teoría de la medida e integral de Lebesgue y aspectos fundamentales de la teoría de los espacios de Lebesgue y de Schwartz.

El objetivo general de este trabajo es estudiar la transformación integral de Fourier para funciones de varias variables reales, pertenecientes a los espacios de funciones sumables $L_1(\mathbb{R}^n)$ y $L_2(\mathbb{R}^n)$, y algunos de los objetivos específicos son:

- Comparar la transformación de Fourier para funciones de $L_1(\mathbb{R}^n)$ y $L_2(\mathbb{R}^n)$.
- Estudiar las propiedades fundamentales de la transformación integral de Fourier.
- Estudiar algunas de las aplicaciones de la transformación integral de Fourier.

Capítulo 2

Preliminares

En 1807 Jean Joseph Fourier (1768-1830), matemático y físico francés nacido en Auxerre, sorprendió a algunos de sus contemporáneos al afirmar que una función "arbitraria" se podía expresar como combinación lineal de armónicos. Estas combinaciones lineales llamadas hoy en día *series de Fourier*, se han convertido en un instrumento indispensable en el análisis de ciertos fenómenos periódicos (tales como vibraciones, movimientos ondulatorios y planetarios) que son estudiados en física e ingeniería. Muchos problemas importantes de naturaleza puramente matemática han surgido en relación con la teoría del análisis de Fourier, y es un hecho histórico notable que gran parte del desarrollo del análisis matemático moderno ha sido profundamente influenciado por la búsqueda de respuestas a tales problemas.

2.1. Series de Fourier

Definición 1. *Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función de periodo 2ℓ, $\ell > 0$. Entonces su representación en serie de Fourier es:*

$$f(x) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right), \tag{2.1}$$

donde $\forall n \in \mathbb{N}_0$[1], a_n, b_n *son llamados coeficientes de Fourier y se calculan de la siguiente manera:*

$$a_n = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) dx, \quad b_n = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) dx.$$

En (2.1) decimos que a $f(x)$ se le asigna la serie del miembro derecho; el símbolo de igualdad no lo usaremos, en tanto no se tenga establecida la convergencia de dicha serie. El siguiente teorema que citamos sin demostración[2] nos ayuda a identificar el tipo de funciones que admiten representación en serie convergente de Fourier.

Teorema 1. *Sea $f(x)$ una función de periodo 2ℓ, monótona a trozos y acotada en el intervalo $(-\ell, \ell)$. Entonces su serie de Fourier converge en todo punto del eje real. La suma de la serie obtenida converge al valor de la función $f(x)$ en los puntos de continuidad. En los puntos de discontinuidad de la función, la suma de la serie converge al semisalto de esta (Ver [12] tomo 2 Pág. 327).*

Series de Fourier para las funciones pares e impares

De la definición de funciones pares e impares se deduce, que si f es una función par integrable, entonces:

$$\int_{-\ell}^{\ell} f(x)dx = 2 \int_{0}^{\ell} f(x)dx.$$

De manera similar tenemos, que si f es una función impar integrable, entonces:

$$\int_{-\ell}^{\ell} f(x)dx = 0.$$

Supongamos que $f(x)$ es una función impar que se desarrolla en serie de Fourier.

[1] $\mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$.

[2] En adelante, los teoremas que están sin demostración son considerados auxiliares. Estos serán citados sin demostración, pero con la respectiva referencia bibliográfica.

El producto $f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right)$ es también una función impar, y $f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right)$ es una función par. Por consiguiente,

$$a_n = 0, \;\; b_n = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right)dx, \;\; \forall n \in \mathbb{N}_0.$$

Es decir, la serie de Fourier de una función impar contiene solamente senos de ángulos múltiples. Análogamente, si una función par se desarrolla en serie de Fourier, el producto $f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right)$ es una función impar y $f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right)$ es una función par, luego:

$$a_0 = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x)dx, \;\; a_n = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right)dx, \;\; b_n = 0, \;\; \forall n \in \mathbb{N}.$$

Es decir, la serie de Fourier de una función par contiene solamente cosenos de ángulos múltiples.

Nota 1. *Podemos observar que una condición necesaria para que una función admita representación en serie de Fourier, es que tenga periodo finito. Es conveniente estudiar el análogo de la serie de Fourier para funciones no periódicas. Para ello, dicha función será considerada de periodo infinito.*

2.2. Representación Integral de Fourier

Teorema 2. *Supongamos que:*

1. *f es una función continua a trozos en cada segmento finito y absolutamente integrable en todo $\mathbb{R}$,*

2. *para cada $x \in \mathbb{R}$ existen las derivadas laterales.*

Entonces, para el punto x se verifica la fórmula:

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} = \int_0^{+\infty}[a(y)\cos(xy) + b(y)\sin(xy)]dy. \tag{2.2}$$

Aquí $f(x+0)$ es el límite por la derecha de la función f en x (Ver [10] Pág. 394).

Donde $a(y)$, $b(y)$ se denominan coeficientes de Fourier y se calculan de la siguiente manera:

$$a(y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos(yt)\,dt, \quad b(y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin(yt)\,dt.$$

Observación 1. *Las propiedades de las funciones pares e impares, se cumplen en la representación integral de Fourier de manera análoga que en las series de Fourier.*

Ejemplo 1. *Con la ayuda de la integral de Euler-Poisson:* $\int_{0}^{+\infty} e^{-t^2}dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$*, representar mediante la integral de Fourier la función* $f(x) = e^{-x^2}$.

Solución. *Esta función es continua a trozos en cada segmento finito y además es absolutamente integrable en todo la recta real. También existen las derivadas laterales* $\forall x \in \mathbb{R}$*; luego podemos aplicar el Teorema 2.*
Como la función $f(x) = e^{-x^2}$ *es par, se anula b(y) y tenemos:*

$$a(y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\cos(yt)dt = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty} e^{-t^2}\cos(yt)dt = \frac{2}{\pi}I(b). \tag{2.3}$$

Donde $I(b) = \int_{0}^{+\infty} e^{-t^2}\cos(bt)dt$. *De acuerdo al teorema de diferenciación de la integral respecto al parámetro (Ver [10] Pág. 319) tenemos:*

$$I'(b) = -\int_{0}^{+\infty} te^{-t^2}\sin(bt)\ dt;$$

integrando por partes: $I'(b) = -\frac{b}{2}I(b)$.
Resolviendo esta ecuación diferencial, tenemos: $I(b) = ce^{-\frac{b^2}{4}}$.
Con la ayuda de la integral de Euler-Poisson:

$c = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$*, es decir:* $I(b) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-\frac{b^2}{4}}$.

Reemplazando en (2.3),

$$a(y) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\cos(yt)dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-\frac{t^2}{4}}.$$

Por lo tanto:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{4}}\cos(xy)dy.$$

Ejemplo 2. *Con la ayuda de la representación integral de Fourier, resolvamos la siguiente ecuación integral:* $\int\limits_0^{+\infty}\varphi(y)\cos(xy)dy = e^{-x^2}$.

Solución. *Con la ayuda del ejemplo anterior tenemos:*

$$\varphi(y) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-\frac{y^2}{4}}.$$

Observación 2. *El cálculo de los coeficientes de Fourier está ligado a la convergencia de las integrales impropias mediante las cuales se definen.*

En adelante nos interesará un tipo de convergencia más general de integrales impropias que se define de la siguiente manera.

Definición 2. *Sea* φ *una función integrable en cualquier segmento finito. Si existe el límite:*

$$\lim_{\eta\to+\infty}\int_{-\eta}^{\eta}\varphi(x)dx, \qquad \eta > 0,$$

entonces éste se llama valor principal en el sentido de Cauchy de la integral $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)dx$ *y se denota v.p.:*

$$v.p.\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)dx := \lim_{\eta\to+\infty}\int_{-\eta}^{\eta}\varphi(x)dx.$$

Esta convergencia es distinta de la usual, por ejemplo la para la función $f(x) = x$, $v.p\int\limits_{-\infty}^{+\infty} xdx = 0$, mientras que $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} xdx$ no converge.

Observación 3. *(Forma compleja de la representación integral de Fourier)*
Bajo las condiciones del Teorema 2, supongamos que una función se puede representar mediante la integral de Fourier. Con la ayuda del valor principal y reemplazando los coeficientes de Fourier en (2.2), tenemos:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \int_0^{+\infty} \left[\left(\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos(yt)dt \right) \cos(xy) \;+\; \left(\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin(yt)dt \right) \sin(xy) \right] dy \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\left(\cos(yt)\cos(xy) + \sin(yt)\sin(xy)\right) dt \right] dy \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos(yx - yt)dt \right] dy.
\end{aligned}$$

Como la función subintegral es par respecto de la variable y, entonces:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos(yx - yt)dt \right] dy. \tag{2.4}$$

Ahora:

$$v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin(yx - yt)dt \right] dy = 0, \tag{2.5}$$

puesto que la función subintegral es impar respecto de la variable y. Multiplicamos en (2.5) por $\frac{i}{2\pi}$ y sumamos (2.4) y (2.5):

$$\begin{aligned}
f(x) &= v.p. \; \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin(yx - yt)dt \right] dy \;+\; \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos(yx - yt)dt \right] dy \\
&= v.p. \; \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\left(\cos(yx - yt) \;+\; i\sin(yx - yt)\right) dt \right] dy \\
&= v.p. \; \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{i(yx - yt)} dt \right] dy.
\end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$f(x) = v.p.\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iyx} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-iyt}dt \right] dy, \tag{2.6}$$

esta última es la escritura en la forma compleja de la integral de Fourier.

2.3. Transformación Integral de Fourier y algunas de sus propiedades

En adelante prestaremos interés a la integral interna de la parte derecha de (2.6), denominada transformación integral de Fourier y la cual tiene distintas aplicaciones: en el análisis de señales, en la solución de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales (EDDP), entre otras.

Definición 3. *Sea $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, se define la transformación integral directa e inversa de Fourier mediante las fórmulas:*

$$F_{x\to\xi}[\varphi(x)](\xi) := v.p.\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi x}\varphi(x)dx \overset{not}{=} \widehat{\varphi}(\xi). \tag{2.7}$$

$$F^{-1}_{x\to\xi}[\varphi(x)](\xi) := v.p.\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi x}\varphi(x)dx \overset{not}{=} \check{\varphi}(\xi). \tag{2.8}$$

Siempre que las integrales existan.

Nota 2. *A partir de este momento, llevaremos a cabo nuestro estudio solamente para la transformación integral directa de Fourier. Para la transformación inversa los resultados son similares, por lo cual no los enunciaremos a menos que sea necesario. Además acordaremos, para las integrales (2.7), (2.8) no escribir "v.p.", pero ellas se entenderán en el sentido del valor principal.*

El siguiente teorema indica condiciones suficientes para la existencia de las transformaciones directa e inversa.

Teorema 3. *Si φ es absolutamente Riemann integrable en $\mathbb{R}$, entonces existen sus transformaciones de Fourier. Más aún, éstas son acotadas.*

Demostración.

$$|\widehat{\varphi}(\xi)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left|e^{-i\xi x}\varphi(x)\right| dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(x)|\, dx.$$

De esta desigualdad se sigue la acotación de $\widehat{\varphi}$. De manera similar se prueba para $\check{\varphi}$. $\square$

Citaremos un ejemplo para ilustrar este concepto.

Ejemplo 3. *Calcular la transformación de Fourier de la siguiente función:*

$$\varphi(x) = e^{-|x|}, \;\; x \in \mathbb{R}.$$

Es fácil ver que φ es absolutamente Riemann integrable en $\mathbb{R}$, y según el Teorema 3 existe su transformación de Fourier.

$$\begin{aligned} \widehat{\varphi}(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|} e^{-i\xi x} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|} \left[\cos(\xi x) - i \sin(\xi x)\right] dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|} \cos(\xi x) dx - i \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|} \sin(\xi x) dx \right]. \end{aligned}$$

Por las propiedades de las funciones pares e impares integrables en intervalos simétricos, concluimos:

$$\widehat{\varphi}(\xi) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{0}^{+\infty} e^{-x} \cos(\xi x) dx.$$

Luego integrando por partes llegamos a: $\widehat{\varphi}(\xi) = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}(1+\xi^2)}$.

Algunas propiedades de la transformación de Fourier

A continuación enunciaremos ciertas propiedades de la transformación de Fourier, que utilizamos en este trabajo; algunas de ellas con su respectiva demostración y en las demás mostraremos su respectiva referencia.
Daremos una definición previa que va a ser utilizada en una de las propiedades más adelante.

Definición 4. *Sean φ acotada en $\mathbb{R}$ y ψ absolutamente Riemann integrable en $\mathbb{R}$. Se llama convolución de φ con ψ a la función:*

$$(\varphi * \psi)(x) := \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\psi(x-t)dt.$$

Nota 3. *La operación de convolución es asociativa y conmutativa. También es importante resaltar que esta operación en pocas ocasiones se expresa mediante funciones elementales.*

Supongamos que todas las funciones involucradas en estas propiedades son absolutamente Riemann integrables y continuas en $\mathbb{R}$.

La transformación integral de Fourier satisface las siguientes propiedades:

1. Linealidad, es decir: $\forall\ \alpha,\ \beta\ \in \mathbb{R}$: $\quad F_{x\to\xi}\left[\alpha\varphi(x) + \beta\psi(x)\right](\xi) = \alpha\widehat{\varphi}(\xi) + \beta\widehat{\psi}(\xi)$.
2. $\widehat{\varphi}(\xi)$ es uniformemente continua en $\mathbb{R}$.
3. $\widehat{\varphi}(\xi)$ es acotada en toda la recta real (ver Teorema 3).
4. Transformación de la derivada: $[\widehat{\varphi^{(k)}(x)}](\xi) = (i\xi)^k\widehat{\varphi}(\xi),\ \ k \in \mathbb{N}_0$.
5. Derivada de la transformación: $i^k F^{(k)}_{x\to\xi}[\varphi(x)](\xi) = F_{x\to\xi}[x^k\varphi(x)](\xi),\ \ k \in \mathbb{N}_0$.
6. Transformación de la convolución: $(\widehat{\varphi * \psi})(\xi) = \widehat{\varphi}(\xi)\widehat{\psi}(\xi)$.

Demostración. 5. Procedemos por inducción matemática.

Probemos para $k = 0, 1$. Con $k = 0$ se obtiene la igualdad trivial:

$F_{x\to\xi}[f(x)](\xi) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi x} f(x)dx$. Para el caso $k = 1$, es posible aplicar el Teorema sobre la diferenciación de la integral respecto al parámetro (Ver [10] Para. 54.3 Teorema 8),

$$\begin{aligned} F'_{x\to\xi}[f(x)](\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\partial}{\partial\xi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi x} f(x)dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial e^{-i\xi x}}{\partial\xi} f(x)dx \\ &= \frac{-i}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi x} x f(x)dx. \end{aligned}$$

Luego: $iF'_{x\to\xi}[f(x)](\xi) = F_{x\to\xi}[xf(x)](\xi)$. Por lo tanto se cumple la propiedad 5 para $k = 1$.

Supongamos que se cumple para $k = n$, esto es :

$i^n F^{(n)}_{x\to\xi}[f(x)](\xi) = F_{x\to\xi}[x^n f(x)](\xi)$. (hipótesis inductiva)

Probemos que se cumple para $k = n + 1$.

$$\begin{aligned} F^{(n+1)}_{x\to\xi}[f(x)](\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\partial}{\partial\xi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi x} x^n f(x)dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial e^{-i\xi x}}{\partial\xi} x^n f(x)dx \\ &= \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi x} x^{n+1} f(x)dx. \end{aligned}$$

Luego $(i)^{n+1} F_{x\to\xi}[f(x)](\xi) = F_{x\to\xi}[x^{n+1} f(x)](\xi)$.

Es decir, la fórmula se cumple para $k = n + 1$.

Por el principio de inducción matemática, hemos probado la propiedad 5. $\square$

2.4. Espacios $Lp(E)$

Entre las diferentes clases de espacios normados que se emplean en el análisis, una de las más importantes es la de los espacios de funciones sumables, para las cuales la potencia $p-$ésima ($p > o$) de dichas funciones es integrable, conocidas como espacios L_p o de Lebesgue, y cuya definición presentamos luego de algunos conceptos previos.

Definición 5. *Un espacio lineal X sobre el campo de escalares $\mathbb{R}$, se denomina normado, si en él está definida una función $\|.\|_X : X \to [0, +\infty)$, que cumple los siguientes axiomas:*

1. $\|x\|_X \geq 0, \ \forall x \in X.$
2. $\|\lambda x\|_X = |\lambda| \, \|x\|_X \,, \ \forall \lambda \in \mathbb{R}, \ \forall x \in X.$
3. $\|x + y\|_X \leq \|x\|_X + \|y\|_X \ \ \forall x, y \in X.$
4. *Si $\|x\|_X = 0$, entonces $x = \theta$, donde θ es el elemento neutro de X.*

Nota 4. *El espacio lineal X se denomina* seminormado *si cumple los axiomas 1, 2, 3 y $\|.\|_X$ se llama* seminorma.
El espacio lineal X se denomina cuasinormado *si cumple los axiomas 1, 2, 4 y en vez de 3 cumple: $\forall \, x, y \in X, \ \exists C > 1 : \ \|x + y\|_X \leq C \left(\|x\|_X + \|y\|_X \right)$. En este caso $\|.\|_X$ se llama* cuasinorma.

Definición 6. *Todo espacio normado completo (en el sentido de la norma) se llama espacio de Banach. Todo espacio cuasinormado completo se denomina* cuasiBanach.

En adelante los términos: "medida", "medible" se refieren a la construcción de la teoría de la medida e integración según Lebesgue. Además si decimos que el conjunto E es de medida finita, acostumbraremos a notarlo de la siguiente manera: $mes(E) < +\infty$.

Definición 7. *Sea $f : E \to \mathbb{R}$, $E \subset \mathbb{R}^n$. Se define el conjunto de Lebesgue de la función f mediante:*

$$E_a := \{x \in E : f(x) > a\} \,, \ \ \forall a \in \mathbb{R}.$$

Diremos que una función $f : E \to \mathbb{R}$ con $E \subset \mathbb{R}^n$ es medible en $E \neq \phi$, si:

(1). *E es medible* $\quad (2)$. $\forall a \in \mathbb{R}$, E_a *es medible.*

Definición 8. *Sean $f : E \to \mathbb{R}$, $E \subset \mathbb{R}^n$, E medible, se llama supremo esencial notado como Supvrai a:*

$$\sup_{x\in E} vrai\,|f(x)| := \inf_{e\subset E:\ mes(e)=0}\ \sup_{x\in E-e} |f(x)|\,.$$

Definición 9. *Sean $E \subset \mathbb{R}^n$ E-medible, $f : E \to \mathbb{C}$, $0 < p \leq +\infty$. Se dice que $f \in Lp(E)$, si:*

f es medible en E, $\quad$ *y* $\quad \int\limits_E |f(x)|^p\, dx < +\infty.$

La expresión:

$$\|f\|_{L_p(E)} := \begin{cases} \left(\int\limits_E |f(x)|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}}, & si \quad 0 < p < +\infty \\ \\ \sup\limits_{x\in E} vrai\,|f(x)|\,, & si \qquad p = +\infty, \end{cases}$$

es norma para $1 \leq p \leq +\infty$, y cuasinorma para $0 < p < 1$.

Observaciones 1.

1. El concepto de supremo esencial (notado también como *essup*), difiere del supremo "habitual". Por ejemplo para la función de Dirichlet:

$$D(x) := \begin{cases} 1, si & x \in \mathbb{Q} \\ 0, si & x \notin \mathbb{Q}, \end{cases}$$

$\sup\limits_{\mathbb{R}} D(x) = 1$ pero $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}} vrai\ D(x) = 0$ ya que $mes(\mathbb{Q}) = 0$.

2. El supremo esencial de una función no excede el supremo de la misma.

3. Si f es una función continua en un abierto de $\mathbb{R}^n$, entonces el supremo esencial coincide con el supremo habitual (Ver [10] Teorema 3 Para. 19.6).

4. Los espacios L_p son de Banach para $1 \leq p \leq +\infty$ y cuasiBanach para $0 < p < 1$.

Ahora citaremos dos desigualdades integrales importantes, de las cuales demostraremos la primera.

2.4.1. Desigualdad de Hölder

Sean $E \subset \mathbb{R}^n$, $1 \leq p \leq +\infty$ y q tal que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ (si $p = 1$, $q := +\infty$; si $q = 1$, $p := +\infty$).

Sean $f \in Lp(E)$, $g \in Lq(E)$. Entonces $fg \in L_1(E)$ y es válida la desigualdad:

$$\int_E |f(x)g(x)|\ dx \leq \|f\|_{L_p(E)} \|g\|_{L_q(E)}\,. \tag{2.9}$$

Para la demostración de esta desigualdad, necesitamos del siguiente lema citado sin demostración.

Lema 1. *Sea $\varphi : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$, una función continua y estrictamente creciente. Además $\varphi(0) = 0$, $\varphi(+\infty) = +\infty$, entonces $\forall\ a, b \geq 0$:*

$$ab \ \leq \ \int_0^a \varphi(x)dx \ + \ \int_0^b \varphi^{-1}(y)dy.$$

Si en la desigualdad anterior hacemos $\varphi(x) = x^{p-1}$, como $\varphi'(x) = (p-1)x^{p-2} > 0$, luego φ satisface las condiciones del Lema 1.

Como $y = x^{p-1}$, entonces $x = y^{q-1}$. Luego de ciertos cálculos sencillos llegamos a:

$$ab \ \leq \ \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

En consecuencia, si $p > 1$, q conjugado de p, o sea $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, entonces $\forall\ a, b \geq 0$,

$$ab \ \leq \ \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Demostración. Demostremos ahora (2.9). Con $mes(E) = 0$, (2.9) se verifica trivialmente. Por ello consideremos $mes(E) > 0$.

1. Sea $1 < p < +\infty$.

   a) Si $\|f\|_{L_p(E)} = 0$, o $\|g\|_{L_q(E)} = 0$ (esto se cumple si y sólo si $f \approx 0$ [3] o $g \approx 0$), en ambos casos $f.g \approx 0$ en E. Por lo tanto $\displaystyle\int_E |f(x)g(x)|\, dx = 0$ y (2.9) se cumple trivialmente.

[3] La equivalencia se mira en el sentido de la teoría de la medida, es decir, decimos que dos funciones f y g son equivalentes, si la medida del conjunto de puntos donde las funciones difiere es cero y se denota $f \approx g$.

b) Si $0 < \|f\|_{L_p(E)} < +\infty$, $0 < \|g\|_{L_q(E)} < +\infty$.

Reemplazando en la Consecuencia: $a = \dfrac{|f|}{\|f\|_{L_p(E)}}$, $b = \dfrac{|g|}{\|g\|_{L_q(E)}}$, entonces:

$$\frac{|f|\,|g|}{\|f\|_{L_p(E)}\,\|g\|_{L_q(E)}} \leq \frac{1}{p}\,\frac{|f|^p}{\|f\|^p_{L_p(E)}} + \frac{1}{q}\,\frac{|g|^q}{\|g\|^q_{L_q(E)}}.$$

Integrando esta desigualdad en E tenemos:

$$\frac{\int\limits_E |f(x)g(x)|\;dx}{\|f\|_{L_p(E)}\,\|g\|_{L_q(E)}} \;\leq\; \frac{\int\limits_E |f(x)|\;dx}{p\,\|f\|^p_{L_p(E)}} \;+\; \frac{\int\limits_E |g(x)|\;dx}{q\,\|g\|^q_{L_q(E)}} \;=\; \frac{1}{p} \;+\; \frac{1}{q} \;=\; 1.$$

Por lo tanto: $\displaystyle\int\limits_E |f(x)g(x)|\;dx \;\leq\; \|f\|_{L_p(E)}\,\|g\|_{L_q(E)}\,.$

2. Si $p = 1$, entonces $q = +\infty$. Luego $\forall x \in E$,

$|f(x)g(x)| \leq \left(\sup\limits_E vrai\,|g(x)|\right)|f(x)|$, integrando esta desigualdad en E, tenemos:

$$\int\limits_E |f(x)g(x)|\;dx \;\leq\; \|g\|_{L_\infty(E)} \int\limits_E |f(x)dx| \;=\; \|f\|_{L_p(E)}\,\|g\|_{L_\infty(E)}\,.$$

3. Si $p = +\infty$, entonces $q = 1$. El proceso se hace análogamente que a 2.

De $1. - 3.$, hemos demostrado la desigualdad de Hölder.

$\square$

De esta desigualdad se tiene una consecuencia importante.

Consecuencia 1. *Sean $0 < p \leq q \leq +\infty$, $E \subset \mathbb{R}^n$, $mes(E) < +\infty$. Si $f \in L_q(E)$, entonces $f \in L_p(E)$, es decir $L_q(E) \subset L_p(E)$ y se verifica la desigualdad:*

$$\|f\|_{L_p(E)} \leq (mes(E))^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\,\|f\|_{L_q(E)}\,. \tag{2.10}$$

Observaciones 2.

1. Según lo anterior, a "mayor" índice p, menor es el espacio L_p (para $mes(E) < +\infty$). Por eso el espacio L_∞ es el más "pequeño"; o sea si $mes(E) < +\infty$, entonces $L_\infty(E) \subset L_p(E)$, $\forall p > 0$.

2. Si $mes(E) = 0$ o $p = q$, (2.10) se cumple trivialmente.

Por ello consideraremos $0 < mes(E) < +\infty$ y $0 < p < q \leq +\infty$.

Demostración. 1. Sea $0 < p < q < +\infty$. Si $f \in L_q(E)$, verificamos (2.10):

$$\|f\|^p_{L_p(E)} = \int\limits_E |f(x)|^p \, 1dx \leq \left[\int\limits_E (|f(x)|^p)^Q dx\right]^{\frac{1}{Q}} \left[\int\limits_E 1^{Q'} dx\right]^{\frac{1}{Q'}}.$$

Con $Q = \frac{q}{p} > 1$, entonces: $Q' = \frac{Q}{Q-1}$ y,

$$\|f\|^p_{L_p(E)} \leq \left[\int\limits_E |f(x)|^q \, dx\right]^{\frac{p}{q}} (mes(E))^{1-\frac{p}{q}}.$$

Elevando a la $\frac{1}{p}$, tenemos:

$$\|f\|_{L_p(E)} \leq \|f\|_{L_q(E)} (mes(E))^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} < +\infty.$$

Luego $f \in L_p(E)$ y se cumple (2.10).

2. Sean $q = +\infty$ y $f \in L_\infty(E)$. $\forall \, p > 0$,

$$|f(x)|^p = |f(x) \, 1|^p \leq 1 \, \left[\sup_{x\in\mathbb{R}^n} vrai \, |f(x)|\right]^p.$$

Integrando en $E \subset \mathbb{R}^n$, tenemos:

$$\int\limits_E |f(x)|^p \, dx \leq \left(\int\limits_E 1dx\right) \|f\|^p_{L_\infty(E)} = (mes(E)) \, \|f\|^p_{L_\infty(E)}.$$ Es decir,

$$\|f\|_{L_p(E)} \leq (mes(E))^{\frac{1}{p}} \, \|f\|_{L_\infty(E)} < +\infty.$$

Luego de 1. - 2., (2.10) queda demostrado.

□

2.4.2. Desigualdad de Minkowsky

Sean $f, g \in Lp(E)$, $\;1 \leq p \leq +\infty$. Entonces: $f+g \in Lp(E)$ y además:

$$\|f+g\|_{Lp(E)} \leq \|f\|_{Lp(E)} + \|g\|_{Lp(E)}.$$

2.5. Introducción a los espacios de Schwartz

Definamos ante todo, un espacio lineal de funciones (con la suma y producto por escalar estándar) denotado por S, que será uno de los conceptos principales en el desarrollo de este trabajo. Con este fin consideraremos funciones definidas en $\mathbb{R}^n$ que toman valores complejos.

Llamaremos multi-índice, a todo elemento $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$: $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$: $\alpha_k \in \mathbb{N}_0$; $k = 1, \ldots, n$. El número $|\alpha| := \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n$, se llama módulo del multi-índice.

Finalmente, el símbolo $D^\alpha f(x) := \dfrac{\partial^{|\alpha|} f(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}$, representa el conjunto de derivadas parciales mixtas de orden $|\alpha|$, en el sentido usual.

Por ejemplo, sea $f : E \to \mathbb{R}$, infinitamente diferenciable [4]. Si $n = 2$, $\;|\alpha| = 3$, esto es: $\alpha_1 + \alpha_2 = 3$. Las soluciones de esta ecuación diofántica son: $\{(0,3), (3,0), (2,1), (1,2)\}$ y:

$$D^\alpha f(x,y) = \left\{ \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}, \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}, \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}, \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} \right\}.$$

El espacio lineal S consta de todas las funciones de valores complejos infinitamente diferenciables en toda la recta real, las cuales junto con sus derivadas de cualquier orden tienden a cero cuando $|x| \to +\infty$, más rápido que cualquier potencia de $|x|^{-1}$.
O sea: si $\varphi \in S$ entonces, $\forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n$, $\forall \ell \in \mathbb{N}_0$, $|x|^\ell \, |D^\alpha \varphi(x)| \leq C_{\ell,\alpha}$, donde $C_{\ell,\alpha}$ es una constante positiva que depende de ℓ y α.

[4] Esto es, f posee derivadas continuas de todos los órdenes en E. El espacio lineal de funciones infinitamente diferenciables en E se simboliza $C^\infty(E)$.

Definición 10. *Sea* $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$. $\varphi \in S(\mathbb{R}^n) \overset{not}{=} S$, *si:*

1. $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$
2. $\forall \ell, m \in \mathbb{N}_0$, $P_{m,\ell}(\varphi) < +\infty$,

donde: $\quad P_{m,\ell}(\varphi) := \max\limits_{|\alpha| \le m} \sup\limits_{x \in \mathbb{R}^n} \left[(1 + |x|)^\ell \, |D^\alpha \varphi(x)|\right]$.

Ejemplo 4. *Sean* $n = 1$, $\varphi(x) = e^{-x^2}$. *Probemos por inducción, que* $\varphi^{(k)}(x) = P_k(x)e^{-x^2}$, *donde* P_k *es un polinomio de deg* $[P_k(x)] = k$.
Para $k = 1$*:* $\varphi'(x) = -2xe^{-x^2}$.
Caso $k = 2$*:* $\varphi''(x) = (4x^2 - 2)e^{-x^2}$.
Supongamos que el resultado es válido para $k = m$*:* $\varphi^{(m)}(x) = Q_m(x)e^{-x^2}$, *donde* $Q_m(x)$ *es un polinomio de grado* m. *Probemos que se cumple para* $k = m + 1$.
$\varphi^{(m+1)}(x) = (\varphi^{(m)}(x))' = Q_m(-2x)e^{-x^2} + Q'_m(x)e^{-x^2} = e^{-x^2}(Q_{m+1} + Q'_m) = e^{-x^2}P_{m+1}$, *donde* P_{m+1} *es un polinomio de grado* $m + 1$.

Por el principio de inducción matemática hemos probado, que $\forall k \in \mathbb{N}$, $\varphi^{(k)}(x) = P_k(x)e^{-x^2}$.

Ahora probemos que $P_{m,\ell}(\varphi) < +\infty$, para $\varphi(x) = e^{-x^2}$.

$$P_{m,\ell}(\varphi) := \max_{|k| \le m} \sup_{x \in \mathbb{R}} \left[(1 + |x|)^\ell \left|\varphi^{(k)}(x)\right|\right] = \max_{k \le m} \sup_{x \in \mathbb{R}} \left[(1 + |x|)^\ell \left|P_k(x)e^{-x^2}\right|\right].$$

Observemos que, para que se cumpla $P_{m,\ell}(\varphi) < +\infty$, es suficiente que:
$(1 + |x|)^\ell \left|P_k(x)e^{-x^2}\right| < +\infty$, y esto es claro puesto que e^{-x^2} decrece más rápido que cualquier polinomio. En efecto, $Q_{k+\ell}(x) = (1 + |x|)^\ell P_k(x)$ es un polinomio de grado $k + \ell$, y consideremos el siguiente límite: $\lim\limits_{x \to +\infty} Q_{k+\ell}(x)\ e^{-x^2}$, el cual es igual a cero. Este límite se calcula aplicando la regla de L'Höspital varias veces. Es posible hacer esto puesto que tanto $Q_{k+\ell}(x)$ como e^{-x^2} son diferenciables en toda la recta real, además $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^{-x^2} \neq 0$ y : $\lim\limits_{x \to +\infty} Q_{k+\ell}(x) = +\infty$ y $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{x^2} = +\infty$.

De aquí que $P_{m,\ell}(e^{-x^2}) < +\infty$. Por lo tanto $e^{-x^2} \in S(\mathbb{R})$.

En el espacio lineal S no puede definirse una norma acorde con las propiedades esenciales de sus elementos. Sin embargo, puede introducirse la convergencia de la siguiente manera.

Definición 11. *Sea* $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ *una sucesión de S. Decimos que* φ_k *converge a* φ *en* S *y se denota* $\varphi_k \to \varphi$ *en* S *, si* $\forall m, \ell \in \mathbb{N}_0$ $P_{m,\ell}(\varphi_k - \varphi) \to 0,\ k \to +\infty$.

El conjunto S dotado de esta convergencia, se denomina espacio de Schwartz. Este espacio está relacionado con los espacios L_p. Los siguientes resultados evidencian en cierta medida esta situación.

Proposición 1. *Sea* $1 \leq p \leq +\infty$. *Entonces* $S(\mathbb{R}^n) \subset Lp(\mathbb{R}^n)$.

Demostración. 1. Sean $1 \leq p < +\infty$, y además $\ell_0 > \frac{n}{p}$. Según la definición de $P_{m,\ell}$ tenemos:

$|D^{\alpha}\varphi(x)| \leq P_{m,\ell}(\varphi)\,(1+|x|)^{-\ell_0}$, usando coordenadas esféricas generalizadas en $\mathbb{R}^n$:

$x_n = \rho \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 \ldots \sin\varphi_{n-2} \sin\varphi_{n-1}$,

$x_{n-1} = \rho \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 \ldots \sin\varphi_{n-2} \cos\varphi_{n-1}$,

$\vdots$

$x_2 = \rho \sin\varphi_1 \cos\varphi_2$,

$x_1 = \rho \sin\varphi_1$,

donde $\rho > 0,\ 0 \leq \varphi_1 < 2\pi$, y $\forall k \geq 2,\ -\frac{\pi}{2} \leq \varphi_k \leq \frac{\pi}{2}$ (Ver [6] Cap. 8 Para. 10).

El módulo del jacobiano J es: $|J| = \rho^{n-1}(\sin^{n-2}\varphi_1)(\sin^{n-3}\varphi_2)\ldots(\sin\varphi_{n-1})$.

Luego:

$$\|D^{\alpha}\varphi(x)\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \leq \left[\int_{\mathbb{R}^n} \left|P_{m,\ell}(\varphi)\,(1+|x|)^{-\ell_0}\right|^p dx\right]^{\frac{1}{p}} = P_{m,\ell}\left[\int_{\mathbb{R}^n} (1+|x|)^{-\ell_0 p}\,dx\right]^{\frac{1}{p}}$$

$$= P_{m,\ell}\left\{\int_0^{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\ldots\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{+\infty}\left[(1+\rho)^{-\ell_0 p}\rho^{n-1}(\sin^{n-2}\varphi_1)\ldots(\sin\varphi_{n-1})\right]d\rho\, d\varphi_{n-1}\, d\varphi_{n-2}\ldots d\varphi_1\right\}^{\frac{1}{p}}$$

$$= P_{m,\ell}\left\{\int_0^{+\infty}(1+\rho)^{-\ell_0 p}\rho^{n-1}d\rho\int_0^{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\ldots\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left[(\sin^{n-2}\varphi_1)\ldots(\sin\varphi_{n-1})\right]d\varphi_{n-1}\, d\varphi_{n-2}\ldots d\varphi_1\right\}^{\frac{1}{p}}.$$

Luego la convergencia de estas integrales depende de la convergencia de:

$$\int_0^{+\infty} (1+\rho)^{-\ell_0 p}\rho^{n-1}d\rho.$$

Esta integral converge si: $-\ell_0 p + (n-1) < -1,$ es decir si $\ell_0 > \frac{n}{p}$.

Por lo tanto,

$$\|D^\alpha\varphi(x)\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} < +\infty.$$

2. Sean $p = +\infty$, $\varphi \in S$. Entonces:
   $|D^\alpha\varphi(x)| \leq P_{m,\ell}(\varphi)\,(1+|x|)^{-\ell_0}$, de donde:

$$\begin{aligned}\|D^\alpha\varphi(x)\|_{L_\infty} &\leq P_{m,\ell}(\varphi)\sup_{x\in\mathbb{R}^n} vrai\left|(1+|x|)^{-\ell_0}\right| = P_{m,\ell}(\varphi)\sup_{x\in\mathbb{R}^n}\left|(1+|x|)^{-\ell_0}\right| \\ &= P_{m,\ell}(\varphi) < +\infty.\end{aligned}$$

De 1. y 2. tenemos que $S(\mathbb{R}^n) \subset Lp(\mathbb{R}^n)$.

□

Observación 4. *Se probó que si una función esta en el espacio S, tanto ella como sus derivadas de todos los órdenes están en L_p.*

Proposición 2. *Sea $1 \leq p < +\infty$. Entonces $S(\mathbb{R}^n)$ es denso en $Lp(\mathbb{R}^n)$.*

A continuación presentamos ciertas herramientas necesarias para realizar la demostración de la proposición anterior. Definamos ante todo un espacio de funciones que será de importancia para la prueba de este resultado y de la propuesta de nuestro trabajo en general.

Definición 12. *(Espacio $D(\mathbb{R}^n) \equiv C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$). Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Se define el soporte de la función f y se denota Supp f mediante:*

$$Supp\ f(x) := \overline{\{x \in \mathbb{R}^n :\ f(x) \neq 0\}}.$$

Es decir, el soporte de la función f es el "mayor" conjunto cerrado donde la función no se anula.

El espacio $D(\mathbb{R}^n)$ *consta de las funciones infinitamente diferenciables y de soporte compacto. O sea:*

$$f \in D(\mathbb{R}^n) \Longleftrightarrow [f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \ \wedge \ Supp \ f - \ compacto] \,.$$

Nota 5. *Podemos observar, que* $D(\mathbb{R}^n) \subset S(\mathbb{R}^n) \subset L_p(\mathbb{R}^n),\ 1 \leq p < +\infty$.

Por otra parte, sean A, B conjuntos no vacíos contenidos en cierto espacio métrico $\mathcal{M}$, tales que $A \subset B$. Luego, si A es denso en $\mathcal{M}$, entonces B es denso en $\mathcal{M}$.
En efecto, si A es denso en $\mathcal{M}$, entonces $\overline{A} = \mathcal{M}$. Probemos ahora que $\overline{B} = \mathcal{M}$.
(i) Si $B \subset \mathcal{M}$, entonces $\overline{B} \subset \mathcal{M}$.
(ii) Como $A \subset B$, por propiedades de la adherencia tenemos $\overline{A} \subset \overline{B}$, pero $\mathcal{M} = \overline{A} \subset \overline{B}$, luego $\mathcal{M} \subset \overline{B}$.
De (i), (ii) $\overline{B} = \mathcal{M}$, es decir B es denso en $\mathcal{M}$.

Demostración. De la Proposición 2
Un resultado fundamental para esta demostración es el hecho de que $D(\mathbb{R}^n)$ es denso en $L_p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p < +\infty$ (Ver [8] Teorema 1.5.6).
Ahora si en calidad de $\mathcal{M}$ tomamos el espacio métrico $L_p(\mathbb{R}^n)$, $A = D(\mathbb{R}^n)$, $B = S(\mathbb{R}^n)$ y recordando que $D(\mathbb{R}^n) \subset S(\mathbb{R}^n) \subset L_p(\mathbb{R}^n)$, podemos concluir que $S(\mathbb{R}^n)$ es denso en $L_p(\mathbb{R}^n),\ 1 \leq p < +\infty$. □

2.6. Transformación de Fourier para funciones de S y algunas de sus propiedades

En el apartado anterior se introdujo el espacio lineal S, con la intención de definir la transformación integral de Fourier, en particular en L_2, donde las fórmulas (2.7) y (2.8) pueden carecer de sentido. Adelante mostramos que en S el comportamiento de $\widehat{\varphi}$ es bastante favorable para nuestros intereses, gracias a los resultados expresados en las proposiciones 1 y 2.

Definición 13. *Sea* $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$, *se definen la transformación directa e inversa de Fourier mediante las fórmulas:*

$$F_{x\to\xi}[\varphi(x)](\xi) := (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-i(\xi,x)}\varphi(x)dx \overset{not}{=} \widehat{\varphi}(\xi). \tag{2.11}$$

$$F^{-1}_{x\to\xi}[\varphi(x)](\xi) := (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{i(\xi,x)}\varphi(x)dx \overset{not}{=} \check{\varphi}(\xi). \tag{2.12}$$

Siempre que las integrales existan en el sentido del valor principal. Aquí (ξ, x) *representa el producto interno en el espacio euclídeo* $\mathbb{R}^n$*:* $(\xi, x) := \xi_1 x_1 \xi_2 x_2 \ldots \xi_n x_n$.

Algunas propiedades de la Transformación de Fourier para funciones de S

Propiedad 1. Supongamos que $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$, entonces:

$$|\widehat{\varphi}(\xi)| = \left|(2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-i(\xi,x)}\varphi(x)dx\right| \leq (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} |\varphi(x)|\, dx,$$

Es decir:

$$|\widehat{\varphi}(\xi)| \leq (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \|\varphi\|_{L_1(\mathbb{R}^n)}.$$

Observaciones 3.

1. Pasando al Sup en la fórmula anterior,

$$\sup_{\xi\in\mathbb{R}^n} |\widehat{\varphi}(\xi)| \leq (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \|\varphi\|_{L_1(\mathbb{R}^n)}. \tag{2.13}$$

2. Por el criterio de Weierstrass (*Ver [10] Teorema 1 Para. 54.1*) (2.11) y (2.12) convergen uniformemente en $\mathbb{R}$; en consecuencia $\widehat{\varphi}(\xi)$ es continua en $\mathbb{R}^n$ y por ser éste abierto, el supremo coincide con el supremo esencial. Por lo tanto:

$$\|\widehat{\varphi}(\xi)\|_{L_\infty(\mathbb{R}^n)} \leq (2\pi)^{\frac{-n}{2}} \|\varphi\|_{L_1(\mathbb{R}^n)}.$$

   Lo anterior nos indica que la transformación de Fourier es un operador integral lineal de $S(\mathbb{R}^n)$ en $L_\infty(\mathbb{R}^n)$.

Propiedad 2. (Transformación de la derivada) Sean $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$ y α multi-índice, entonces:

$$F_{x\to\xi}[D^\alpha\varphi(x)] = i^{|\alpha|}\xi^\alpha\widehat{\varphi}(\xi),$$

donde $\xi \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, $\xi^\alpha := \xi_1^{\alpha_1}.\xi_2^{\alpha_2}\dots\xi_n^{\alpha_n}$.

Demostración. Antes de proceder con la demostración, probemos que:

$$\left(\widehat{\frac{\partial^{\alpha_j}\varphi(x)}{\partial x_j^{\alpha_j}}}\right)(\xi) = (i\xi_j)^{\alpha_j}\,\widehat{\varphi}(\xi)\,; \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Observemos que en la anterior igualdad es suficiente probar el caso $j = n$; los demás se hacen de manera análoga. Introduzcamos la siguiente notación:
$\xi\,' \overset{not}{=} (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-1})$. Entonces $\xi = (\xi\,', \xi_n)$,
$x\,' \overset{not}{=} (x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$. Entonces $x = (x\,', x_n)$.
Ahora consideremos las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned}\left(\widehat{\frac{\partial^{\alpha_n}\varphi(x)}{\partial x_n^{\alpha_n}}}\right)(\xi) &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}}\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-i(\xi,x)}\frac{\partial^{\alpha_n}\varphi(x)}{\partial x_n^{\alpha_n}}dx\\ &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}}\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{-i(\xi\,',x\,')}\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi_n x_n}\frac{\partial^{\alpha_n}\varphi(x\,',x_n)}{\partial x_n^{\alpha_n}}dx_n\right)dx\,'.\end{aligned}$$

Vamos a centrar nuestra atención en la integral interna. Esta se puede calcular aplicando α_n veces integración por partes, si tenemos en cuenta que tanto $e^{-i\xi_n x_n}$ como $\frac{\partial^{\alpha_n}\varphi(x)}{\partial x_n^{\alpha_n}}$, para todo α_n, son continuamente diferenciables y que tienden a cero mas rápido que cualquier polinomio:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi_n x_n}\frac{\partial^{\alpha_n}\varphi(x\,',x_n)}{\partial x_n^{\alpha_n}}dx_n = (i\xi_n)^{\alpha_n}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi_n x_n}\varphi(x)dx_n,$$

remplazando tenemos que:

$$\begin{aligned}\left(\widehat{\frac{\partial^{\alpha_n}\varphi(x)}{\partial x_n^{\alpha_n}}}\right)(\xi) &= (i\xi_n)^{\alpha_n}(2\pi)^{-\frac{n}{2}}\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{-i(\xi\,',x\,')}\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi_n x_n}\varphi(x\,',x_n)dx_n\right)dx\,'\\ &= (i\xi_n)^{\alpha_n}(2\pi)^{-\frac{n}{2}}\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-i(\xi,x)}\widehat{\varphi}(x)dx\\ &= (i\xi_n)^{\alpha_n}\widehat{\varphi}(\xi).\end{aligned}$$

Ahora apliquemos reiteradamente lo demostrado:

$$\begin{aligned}
(\widehat{D^{\alpha}\varphi(x)})(\xi) &= F_{x\to\xi}\left[\frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}}\left(\frac{\partial^{\alpha_2}}{\partial x_2^{\alpha_2}}\left(\dots\frac{\partial^{\alpha_n}\varphi(x)}{\partial x_n^{\alpha_n}}dx_n\right)\right)\right](\xi)\\
&= (i\xi_1)^{\alpha_1}F_{x\to\xi}\left[\frac{\partial^{\alpha_2}}{\partial x_2^{\alpha_2}}\left(\dots\frac{\partial^{\alpha_n}\varphi(x)}{\partial x_n^{\alpha_n}}dx_n\right)\right](\xi)\\
&= (i\xi_1)^{\alpha_1}(i\xi_2)^{\alpha_2}\dots(i\xi_n)^{\alpha_n}\widehat{\varphi}(\xi)\\
&= i^{|\alpha|}\xi^{\alpha}\widehat{\varphi}(\xi).
\end{aligned}$$

Que era lo que se quería probar. □

Observación 5. *Aplicando (2.13) a la propiedad 2 tenemos:*

$$\sup_{\xi\in\mathbb{R}^n}|\xi^{\alpha}\widehat{\varphi}(\xi)| \leq (2\pi)^{\frac{-n}{2}}\left\|D^{\alpha}\varphi\right\|_{L_1(\mathbb{R}^n)} < +\infty.$$

Notemos que a mayor suavidad de φ, mayor es la rapidez con que $\widehat{\varphi}(\xi)\to 0$ cuando $|\xi|\to\infty$.

Propiedad 3. (Derivada de la transformación) Sean $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$ y α multi-índice. Entonces:

$$D^{\alpha}\widehat{\varphi}(\xi) = (-i)^{|\alpha|}[\widehat{x^{\alpha}\varphi(x)}](\xi).$$

Observación 6. *Aplicando (2.13) a la propiedad 3 tenemos:*

$$\sup_{\xi\in\mathbb{R}^n}|D^{\alpha}\widehat{\varphi}(\xi)| \leq (2\pi)^{\frac{-n}{2}}\left\|x^{\alpha}\varphi(x)\right\|_{L_1(\mathbb{R}^n)} < +\infty.$$

Lo anterior indica que a mayor velocidad con que $\varphi(x)\to 0$ cuando $|x|\to+\infty$ mayor es la suavidad de $\widehat{\varphi}(\xi)$.

Las propiedades 4 y 5 muestran la composición entre el operador de translación con paso $h\in\mathbb{R}^n$, $(T_hf)(x) := f(x+h)$ y el operador transformación de Fourier (Ver demostración en [11]).

Propiedad 4. $[\widehat{T_h\varphi(x)}] = e^{i(h,\xi)}\widehat{\varphi}(\xi)$.

Propiedad 5. $T_h\widehat{\varphi}(\xi) = [\widehat{e^{-i(h,x)}\varphi(x)}](\xi)$.

Observación 7. *De las observaciones 5 y 6 intuitivamente podemos inferir, que la transformación integral directa (inversa) de Fourier transforma (isométricamente) a S en sí mismo (Ver Pág. 49).*

Capítulo 3

Transformación de Fourier para funciones del espacio $S'(\mathbb{R}^n)$

3.1. Funciones generalizadas

En esta sección estudiaremos un concepto que extiende la noción clásica de función, a saber, el concepto de función generalizada. Este surgió de la necesidad de dar soporte matemático a ciertos pensamientos idealizados en física tales como: densidad de una carga puntual, densidad de un punto material, acción de una fuerza instantánea, etc. Además con la ayuda de las funciones generalizadas podemos extender la transformación de Fourier a una clase de funciones más amplia.

Ilustraremos esta situación mediante un ejemplo: la noción de densidad puntual en el espacio euclídeo tridimensional $\mathbb{R}^3$. Supongamos por comodidad, que una unidad de masa está uniformemente distribuida en la bola B_ϵ con centro en el origen y radio $\epsilon > 0$. Estudiemos ahora la densidad en esta bola, designada por $\rho_\epsilon(x)$ donde $x = (x_1, x_2, x_3)$:

$$\rho_\epsilon(x) := \begin{cases} \frac{3}{4\pi\epsilon^3}, & |x| \leq \epsilon \\ 0, & |x| > \epsilon, \end{cases} \tag{3.1}$$

donde $|x| := \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$.

Como es sabido la integral de la densidad es numéricamente igual a la masa, por ello:

$$\int_{\mathbb{R}^3} \rho_\epsilon(x)dx = \int_{B_\epsilon} \rho_\epsilon(x)dx = 1. \tag{3.2}$$

Teniendo en cuenta (3.2) es natural definir la densidad "puntual" $\rho(x)$ como:

$$\rho(x) := \lim_{\epsilon \to +0} \rho_\epsilon(x)\,; \tag{3.3}$$

es decir $\rho_\epsilon(x) \to \rho(x), \;\; \epsilon \to +0$. Por lo tanto:

$$\rho(x) := \begin{cases} +\infty, & x = 0 \\ 0, & x \neq 0. \end{cases} \tag{3.4}$$

Con frecuencia en física $\rho(x)$ definida de la anterior manera, es llamada función delta de Dirac y se simboliza $\delta(x)$.

Observemos que mediante (3.3) llegamos a (3.4), lo que no nos conduce a respuestas deseables puesto que $\int_{\mathbb{R}^3} \rho(x)dx = 0$ (ya que $\rho(x) = 0$ en c.t.p [1] de $\mathbb{R}^3$) lo que contradice (3.2). Esto quiere decir que $\rho(x)$ no restituye la masa, por lo cual tenemos que modificar el carácter de la convergencia de la familia $\{\rho_\epsilon(x)\}_{\epsilon>0}$, hacia su "limite" $\rho(x)$. Para ello procederemos de la siguiente manera:

Sea $\varphi(x) \in C(\mathbb{R}^3)$. Por definición tomemos:

$$\int_{\mathbb{R}^3} \rho(x)\varphi(x)dx := \lim_{\epsilon \to +0} \int_{\mathbb{R}^3} \rho_\epsilon(x)\varphi(x)dx.$$

Se puede demostrar que esta definición es correcta; más aún,

$$\lim_{\epsilon \to +0} \int_{\mathbb{R}^3} \rho_\epsilon(x)\varphi(x)dx = \varphi(0),$$

por eso tiene sentido la escritura:

$$\int_{\mathbb{R}^3} \rho(x)\varphi(x)dx \overset{not}{=} (\rho, \varphi) = \varphi(0), \tag{3.5}$$

[1]En casi todo punto (c.t.p) de $\mathbb{R}^3$ significa que el conjunto donde difieren las funciones es de medida cero.

que se lee "ρ actuando sobre φ es igual a $\varphi(0)$". Así, según (3.5) para $\varphi(x) = 1$ se tiene:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^3} \rho(x)dx = \int\limits_{\mathbb{R}^3} \rho(x) \cdot 1dx = (\rho, 1) = 1,$$

luego con la integral de $\rho(x)$ definida mediante (3.5), $\rho(x)$ restituye la masa y por ello puede ser considerada como densidad puntual en el origen. En este caso se dice que la masa está concentrada en dicho punto. Similarmente, si la masa está concentrada en $x = x_0$, la densidad en este punto será $\rho(x) = \rho(x_0)$.

Observaciones 4.

1. Hasta ahora no se ha discutido la naturaleza de $\rho(x)$. Sólo hemos definido su integral, esta nos permitirá conocer el carácter de $\rho(x)$.

2. La función $\varphi \in C(\mathbb{R}^3)$, se suele llamar función de prueba o función del espacio básico. Para nuestros intereses conviene tomar en calidad de espacio básico $S(\mathbb{R}^n)$; las razones serán claras en el trascurso de este capítulo.

Definición 14. *Sea X un espacio lineal arbitrario (real o complejo). Las aplicaciones del espacio lineal X en el conjunto de números reales o en el conjunto de números complejos, reciben el nombre de* ***funcionales*** *definidos sobre X. El valor del funcional f en $x \in X$ se designa mediante (f, x)* [2] *y se lee "f actuando sobre x".*

Los funcionales f,g son iguales (se nota $f = g$) si y sólo si $\forall\, x \in X$, $(f, x) = (g, x)$. Además f se llama lineal (o lineal homogéneo) si $\forall\, x, y \in X$, $\forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{C}$, se cumple la igualdad:

$$(f, \alpha x + \beta y) = \alpha\, (f, x) + \beta\, (f, y)\, .$$

Nota 6. *Es posible definir funcionales sobre los espacios lineales $S(\mathbb{R}^n)$ y $D(\mathbb{R}^n)$. En este capítulo centraremos nuestra atención sobre el espacio de Schwartz y definiremos los funcionales sobre dicho espacio.*

[2] Aclaremos que la notación $(\cdot,\cdot)$ en el presente trabajo tendrá doble significado y se interpretará según el contexto; por ejemplo (f, x) con $x \in X$ denota la acción del funcional f en x. Además (x, y) con $x, y \in \mathbb{R}^n$ simboliza el producto escalar estándar.

Definición 15. *El funcional f definido sobre el espacio de Schwartz se denomina continuo, si para cada sucesión* $\{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ *en* S *convergente a* $\varphi_0 \in S$*, se cumple:*

$$\lim_{k\to+\infty} (f, \varphi_k) \,=\, (f, \varphi_0).$$

Mostremos ahora un criterio de continuidad de funcionales lineales sobre S, a modo de teorema (Ver [2] Pág. 24 Lemas 1 y 2).

Teorema 4. *Sea f un funcional lineal sobre S. f es continuo si y sólo si existen* $m, \ell \in \mathbb{N}_0$ *y una constante positiva* C_f *tal que:*

$$\forall \varphi \in S, \;\; |(f, \varphi)| \,\leq\, C_f P_{m,\ell}\,(\varphi)\,.$$

Definición 16. *Todo funcional lineal y continuo definido sobre S, recibe el nombre de* ***función generalizada****. El espacio lineal dual (con las operaciones estándar de adición y multiplicación por escalar) de todos estos funcionales se denota por* $S'(\mathbb{R}^n) \overset{not}{=} S'$*.*

Observemos que según la definición anterior, los funcionales pueden sumarse entre sí y multiplicarse por un escalar. Por ejemplo si f, g son funcionales, entonces el valor del funcional $\alpha f + \beta g$ aplicado a $\varphi \in S$ se determina según la fórmula:

$$(\alpha f + \beta g, \varphi) \;:=\; \alpha\,(f, \varphi) \,+\, \beta\,(g, \varphi)\,.$$

Definición 17. *Una función f definida sobre* $\mathbb{R}^n$ *se denomina localmente integrable en* $\mathbb{R}^n$*, si es absolutamente integrable en cualquier compacto K de* $\mathbb{R}^n$*. Se simboliza* $f \in L_1^{loc}(\mathbb{R}^n)$*. Es decir* $f \in L_1^{loc}(\mathbb{R}^n)$ *si* $\forall K \subset \mathbb{R}^n$*, K compacto,* $f \in L_1(K)$*.*

Es claro que si $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$, entonces $f \in L_1^{loc}(\mathbb{R}^n)$; el recíproco es falso, por ejemplo la función $f(x) = \sin x \in L_1^{loc}(\mathbb{R})$, pero $f(x) \notin L_1(\mathbb{R})$.
Otro ejemplo sencillo es la función constante distinta de cero.

Lema 2. *Sea* $1 \leq p \leq +\infty$*. Si* $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$*, entonces* $f \in L_1^{loc}(\mathbb{R}^n)$*.*

Demostración. Para demostrar este lema usaremos la consecuencia de la desigualdad de Hölder (Ver Consecuencia 1. Pág. 21). Es claro que si K es compacto, entonces

$mes(K) < +\infty$ y según dicho resultado $\forall K$ compacto, $\forall p \geq 1$, $L_p(K) \subset L_1(K)$ es decir , si $f \in L_p(K)$ entonces $f \in L_1(K)$ y:

$$\|f\|_{L_1(K)} \leq (mes(K))^{1-\frac{1}{p}} \|f\|_{L_p(K)} < (mes(K))^{1-\frac{1}{p}} \|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} < +\infty.$$

Por lo tanto para $1 \leq p \leq +\infty$, si $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$ entonces $f \in L_1^{loc}(\mathbb{R}^n)$. $\square$

Definición 18. *Decimos que la función f es de crecimiento polinomial, si existe $\ell_0 \in \mathbb{N}_0$ tal que:*

$$(1 + |x|)^{-\ell_0} f(x) \in L_1(\mathbb{R}^n).$$

Ejemplo 5. *Sea $n = 1$. $f(x) = e^{-x^2}$ es de crecimiento polinomial ya que:*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}.$$

Luego $f(x) = e^{-x^2} \in L_1(\mathbb{R}) \subset L_1^{loc}(\mathbb{R})$.

La siguiente proposición relaciona las definiciones anteriores con el espacio S'.

Proposición 3. *Toda función localmente integrable de crecimiento polinomial es un elemento de S'. O sea, tales funciones pueden considerarse como funciones generalizadas sobre S. Estos funcionales se llaman regulares, es decir pueden expresarse con la ayuda de una integral:*

$$\forall \varphi \in S, \quad (f, \varphi) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)dx.$$

Demostración. Sea $f \in L_1^{loc}(\mathbb{R}^n)$ y de crecimiento polinomial; ella genera el siguiente funcional:

$$\forall \varphi \in S, \quad (f, \varphi) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)dx.$$

Es claro que f es funcional ($f : S \to \mathbb{C}$) y es lineal. Probemos, que f satisface el criterio de continuidad. $\forall \varphi \in S$:

$$\begin{aligned} |(f, \varphi)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)dx \right| \leq \int_{\mathbb{R}^n} \left| f(x)(1 + |x|)^{-\ell_0} \right| \left| (1 + |x|)^{\ell_0} \varphi(x) \right| dx \\ &\leq P_{0,\ell_0}(\varphi) \int_{\mathbb{R}^n} \left| f(x)(1 + |x|)^{-\ell_0} \right| dx = P_{0,\ell_0}(\varphi) \left\| (1 + |x|)^{-\ell_0} f(x) \right\|_{L_1(\mathbb{R}^n)} < +\infty, \end{aligned}$$

por ser f de crecimiento polinomial.

Por lo tanto existen $m = 0$, $\ell = \ell_0 \in \mathbb{N}_0$, $C_f = \left\|(1+|x|)^{-\ell_0} f(x)\right\|_{L_1(\mathbb{R}^n)} > 0$, tales que:

$$\forall \varphi \in S, \quad |(f,\varphi)| \leq C_f P_{m,\ell}(\varphi).$$

Luego f es continuo. Esto demuestra además, que (f,φ) está bien definida.

En conclusión, $f \in S'$. $\square$

Ejemplos.

1. Como $f(x) = e^{-x^2} \in L_1^{loc}(\mathbb{R})$ y es de crecimiento polinomial, entonces por la proposición anterior $f(x) = e^{-x^2}$ es un funcional regular:

$$\forall \varphi \in S, \quad (f,\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\varphi(x)dx.$$

2. Sea $n = 1$. Consideremos la función de Heaviside:

$$\theta(x) := \begin{cases} 1, & si \quad x \geq 0 \\ 0, & si \quad x < 0, \end{cases}$$

   Demostremos que θ es un elemento de S'.

   Es evidente que $\theta \in L_1^{loc}(\mathbb{R}^n)$. Veamos que θ es de crecimiento polinomial.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (1+|x|)^{-\ell_0} |\theta(x)|\, dx \;=\; \int_{0}^{+\infty} (1+|x|)^{-\ell_0}\, dx \;<\; +\infty, \text{ para } \ell_0 > 1.$$

   Luego $\exists\, \ell_0 \in \mathbb{N}_0$, tal que $(1+|x|)^{-\ell_0}\,\theta(x) \in L_1(\mathbb{R})$, esto es, θ es de crecimiento polinomial. Por la proposición 3, $\theta \in S'$.

3. A manera de ejemplo de un funcional no regular, consideremos la función delta de Dirac, definida por la fórmula (ver (3.5)):

$$\forall \varphi \in S, \quad (\delta,\varphi) := \varphi(0).$$

   Es evidente que $\forall \varphi, \psi \in S$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$,

   $(\delta, \alpha\varphi + \beta\psi) = \alpha(\delta,\varphi) + \beta(\delta,\psi) = \alpha\varphi(0) + \beta\psi(0)$. Esto es δ es lineal.

Además, $\forall \varphi \in S$: $|(\delta, \varphi)| = |\varphi(0)| \leq \sup\limits_{x\in\mathbb{R}^n} |\varphi(x)| = P_{0,0}(\varphi)$.

Esto significa que $\exists\, m, \ell \in \mathbb{N}_0$ $(m = \ell = 0)$, $C_f = 1$ tal que $\forall \varphi \in S$: $|(\delta, \varphi)| \leq P_{0,\ell_0}(\varphi)$, es decir δ es continuo. En consecuencia, $\delta \in S'$.

Puede probarse (Ver [13] Pág. 99), que δ no puede escribirse con la ayuda de funciones $L_1^{loc}(\mathbb{R}^n)$ y de crecimiento polinomial. Las funciones generalizadas que no son regulares se llaman singulares. Así, δ es funcional singular.

Proposición 4. *Sea $1 \leq p \leq +\infty$. Si $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$ entonces f es localmente integrable y de crecimiento polinomial.*

Demostración. 1. Vamos a probar que f es de crecimiento polinomial.

Sea inicialmente $1 < p < +\infty$, $\ell_0 > \frac{n}{q}$ y $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$.

Demostremos con la ayuda de la desigualdad de Hölder, que $(1+|x|)^{-\ell_0} f(x) \in L_1(\mathbb{R}^n)$.

$$\left| \int\limits_{\mathbb{R}^n} (1+|x|)^{-\ell_0} f(x)dx \right| \leq \|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \left\|(1+|x|)^{-\ell_0}\right\|_{L_q(\mathbb{R}^n)} < +\infty,$$

puesto que $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$, y usando coordenadas esféricas generalizadas tenemos:

$$\left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} (1+|x|)^{-\ell_0 q} dx \right)^{\frac{1}{q}} = C_{n,q} \left(\int\limits_0^{+\infty} (1+r)^{-\ell_0 q} r^{n-1} dr \right)^{\frac{1}{q}}, \tag{3.6}$$

donde $C_{n,q}$ es una constante que depende de n y q.

Como $(1+r)^{-\ell_0 q} r^{n-1}$ es equivalente con $r^{-\ell_0 q + n - 1}$ cuando $r \to +\infty$, (3.6) converge si $-\ell_0 q + n - 1 < -1$; es decir converge para $\ell_0 > \frac{n}{q}$. Esto es, $(1+|x|)^{-\ell_0} f(x) \in L_1(\mathbb{R}^n)$. Luego, f es de crecimiento polinomial.

2. Para $p = 1$, $q = +\infty$, puede repetirse el razonamiento anterior con $\ell_0 > 0$.

   Similarmente para $p = +\infty$, $q = 1$, se toma $\ell_0 > n$.

3. De acuerdo al Lema 2, tenemos que si $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$, entonces $f \in L_1^{loc}(\mathbb{R}^n)$ para $1 \leq p \leq +\infty$.

Con 1.-3., queda demostrada la Proposición 4. □

Consecuencia 2. *De las proposiciones 3 y 4 podemos concluir, que si* $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$ *entonces* $f \in S'(\mathbb{R}^n)$*, para* $1 \leq p \leq +\infty$*. Luego se tienen las inclusiones:*

$$S(\mathbb{R}^n) \subset L_p(\mathbb{R}^n) \subset S'(\mathbb{R}^n), \;\; 1 \leq p \leq +\infty.$$

3.2. Operadores lineales y continuos sobre S'

Introduzcamos ante todo la convergencia en S' para luego describir ciertos operadores lineales y continuos que pueden definirse sobre este espacio.

Definición 19. *Sean* $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ *una sucesión en* S' *y* $f \in S'$*. Se dice que* $\{f_k\}$ *converge a* f *en* S' *y se nota* $f_k \to f$ *en* S'*,* $k \to +\infty$ *si:*

$$\forall\, \varphi \in S, \;\; \lim_{k\to+\infty} (f_k, \varphi) \;=\; (f, \varphi). \tag{3.7}$$

En esta parte del trabajo, A representa un operador lineal que aplica cierto espacio lineal en sí mismo. Es decir, A será una aplicación cuyo dominio y codominio es un mismo espacio lineal. Por ejemplo, si dicho espacio lineal es $\mathbb{R}^n$, entonces $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, donde A es una transformación lineal (que por lo general se describe mediante una matriz n x n), es un operador lineal.

Definición 20. *El operador* $A : S' \to S'$ *es lineal si:*

$$\forall\; f, g \;\in\; S';\; \forall\; \alpha, \beta \;\in\; \mathbb{C} : \;\; A(\alpha f + \beta g) \;=\; \alpha A f \;+\; \beta A g.$$

Definición 21. *Se dice que el operador* A *es continuo en* S'*, si* $f_k \to f$ *en* S'*, implica que* $Af_k \to Af$*,* $k \to +\infty$ *en* S'*. Es decir,*

$$[\forall\, \varphi \in S, \; (f_k, \varphi) \to (f, \varphi)] \Rightarrow [\forall\, \psi \in S, \; (Af_k, \psi) \to (Af, \psi)]\,, \; k \to \; +\infty.$$

Equivalentemente (Ver (3.7)) esto significa:

$$\left[\forall\, \varphi \in S, \; \lim_{k\to+\infty} (f_k, \varphi) = (f, \varphi)\right] \Rightarrow \left[\forall\, \psi \in S, \; \lim_{k\to+\infty} (Af_k, \psi) = (Af, \psi)\right].$$

3.2.1. Operador de diferenciación en S'

Sean $f \in S'$, β multi-índice. Se llama derivada de orden β del funcional f y se denota $D^\beta f$, al funcional definido mediante la fórmula:

$$\forall \varphi \in S, \quad \left(D^\beta f, \varphi\right) := (-1)^{|\beta|} \left(f, D^\beta \varphi\right).$$

Veamos que en verdad $D^\beta f \in S'$. Para esto se requiere probar:
(i) $\forall f \in S'$, $D^\beta f \in S'$. O sea $D^\beta f$ es un funcional lineal y continuo. Esto significa, de acuerdo a las definiciones 14 y 15 (Pág. 34-35) que debemos probar para $g = D^\beta f$: $(g, \alpha\varphi + \gamma\psi) = \alpha(g, \varphi) + \gamma(g, \psi)$ y además, si $\varphi_k \to \varphi$ entonces $(g, \varphi_k) \to (g, \varphi)$.
En efecto sean $f \in S'$; $\varphi, \psi \in S$; $\alpha, \gamma \in \mathbb{C}$. Entonces:

$$\begin{aligned} \left(D^\beta f, \alpha\varphi + \gamma\psi\right) &= (-1)^{|\beta|}(f, D^\beta(\alpha\varphi + \gamma\psi)) = (-1)^{|\beta|}[\alpha(f, D^\beta\varphi) + \gamma(f, D^\beta\psi)] \\ &= \alpha(D^\beta f, \varphi) + \gamma(D^\beta f, \psi). \end{aligned}$$

Además sean $\{\varphi_k\}_{k=1}^{+\infty}$, $\varphi \in S$, . Si $\varphi_k \to \varphi$ en S, entonces:

$$(D^\beta f, \varphi_k) = (-1)^{|\beta|}(f, D^\beta \varphi_k) \to (-1)^{|\beta|}(f, D^\beta \varphi) = (D^\beta f, \varphi), \ \ k \to +\infty.$$

Esto es, $(D^\beta f, \varphi_k) \to (D^\beta f, \varphi)$, $k \to +\infty$.
Hemos probado hasta aquí, que $D^\beta f \in S'$.

Probemos ahora que D^β es lineal y continuo.
(ii) Sean $f, g \in S'$; $\varphi \in S$; $\alpha, \gamma \in \mathbb{C}$ y β multi-índice. Luego:

$$\begin{aligned} \left(D^\beta(\alpha f + \gamma g), \varphi\right) &= (-1)^{|\beta|}(\alpha f + \gamma g, D^\beta\varphi) = (-1)^{|\beta|}[\alpha(f, D^\beta\varphi) + \gamma(g, D^\beta\varphi)] \\ &= \alpha(D^\beta f, \varphi) + \gamma(D^\beta g, \varphi). \end{aligned}$$

Es decir D^β es lineal.

(iii) Sean $f_k \in S'$ $\forall k \in \mathbb{N}$; $f \in S'$. Además supongamos que $f_k \to f$ en S', es decir $\forall \varphi \in S$, $(f_k, \varphi) \to (f, \varphi)$, $k \to +\infty$. Entonces:

$$(D^\beta f_k, \varphi) = (-1)^{|\beta|}(f_k, D^\beta\varphi) \to (-1)^{|\beta|}(f, D^\beta\varphi) = (D^\beta f, \varphi), \ \ k \to +\infty.$$

Por lo tanto $(D^\beta f_k, \varphi) \to (D^\beta f, \varphi), \;\; k \to +\infty$.

De $(i) - (iii)$, D^β es un operador lineal y continuo.

Ejemplos:

1. Sea $n = 1$. Calcular: $\delta\,'$, $\delta\,''$, $\ldots, \delta^{(k)}$, $k \in \mathbb{N}$.

   Solución. $\forall \varphi \in S$ tenemos:

   $(\delta', \varphi) = -(\delta, \varphi') = -\varphi'(0)$.

   $(\delta'', \varphi) = (-1)^2(\delta, \varphi'') = \varphi''(0)$.

   En general $\forall k \in \mathbb{N}_0$, $(\delta^k, \varphi) = (-1)^k(\delta, \varphi^{(k)}) = (-1)^k \varphi^{(k)}(0)$.

2. Calcular para la función de Heaviside: $\theta', \theta'', \ldots, \theta^{(k)}$, $k \in \mathbb{N}$.

   Solución. $\forall \varphi \in S$:

   $(\theta', \varphi) = -(\theta, \varphi') = -\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \theta(x)\varphi'(x)dx = -\int\limits_{0}^{+\infty} \varphi'(x)dx = -\left.\varphi(x)\right|_0^{+\infty} = \varphi(0)$.

   Se usó el hecho de que, si $\varphi \in S$ entonces $\varphi(x) \to 0, \;\; |x| \to +\infty$.

   Así pues $\forall \varphi \in S \quad (\theta', \varphi) = (\delta, \varphi)$, esto es $\theta' = \delta = \varphi(0)$

   $(\theta'', \varphi) = (-1)^2(\theta, \varphi'') = \int\limits_{0}^{+\infty} \varphi''(x)dx = \left.\varphi'(x)\right|_0^{+\infty} = -\varphi'(0)$.

   Luego $\theta'' = \delta' = -\varphi'(0)$.

   En general, $\forall k \in \mathbb{N}$ tenemos $\theta^{(k)} = \delta^{(k-1)} = (-1)^{(k-1)}\varphi(0)$.

3. Sobre S se define el funcional $\rho_{\frac{1}{x}}$ (se lee *"ro uno equis"*) mediante la fórmula:

   $$\forall \varphi \in S, \quad (\rho_{\frac{1}{x}}, \varphi) := v.p. \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x} dx.$$

   En general se define el funcional $\rho_{\frac{1}{x^m}}$, mediante:

   $$(\rho_{\frac{1}{x^m}}, \varphi) := v.p. \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x^m} dx, \quad m \in \mathbb{N}.$$

   Calcular $\rho'_{\frac{1}{x}}, \rho''_{\frac{1}{x}}, \ldots, \rho^{(k)}_{\frac{1}{x}}, \;\; k \in \mathbb{N}$.

Solución. $\forall \varphi \in S$ tenemos:

$$(\rho'_{\frac{1}{x}}, \varphi) = -(\rho_{\frac{1}{x}}, \varphi') = -v.p. \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi'(x)}{x} dx = -v.p. \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x} d\varphi(x).$$

Integrando por partes tenemos:

$$(\rho'_{\frac{1}{x}}, \varphi) = -v.p. \left(\frac{\varphi(x)}{x} \Big|_{-\infty}^{+\infty} + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x^2} dx \right).$$

Como $\frac{\varphi(x)}{x} \Big|_{-\infty}^{+\infty}$ es cero puesto que $\varphi \in S$; $(\rho'_{\frac{1}{x}}, \varphi) = -(\rho_{\frac{1}{x^2}}, \varphi)$, es decir $\rho'_{\frac{1}{x}} = -\rho_{\frac{1}{x^2}}$.

Similarmente $(\rho''_{\frac{1}{x}}, \varphi) = 2(\rho_{\frac{1}{x^3}}, \varphi)$. Esto es $\rho''_{\frac{1}{x}} = 2\rho_{\frac{1}{x^3}}$.

Por inducción matemática, obtenemos que $\forall k \in \mathbb{N}$, $\forall \varphi \in S$:

$(\rho^{(k)}_{\frac{1}{x}}, \varphi) = (-1)^k k! (\rho_{\frac{1}{x^{k+1}}}, \varphi)$, es decir $\rho^{(k)}_{\frac{1}{x}} = (-1)^k k! \rho_{\frac{1}{x^{k+1}}}$.

3.2.2. Operador de multiplicación de elementos de S' por funciones de crecimiento polinomial infinitamente diferenciables

Sea $h \in C^\infty$ y de crecimiento polinomial. Sea además $f \in S'$. Se llama producto de h por f al funcional "$h.f$" que actúa según la fórmula:

$$\forall \varphi \in S, \quad (h.f, \varphi) := (f, h.\varphi).$$

En adelante, $h.f \overset{not}{=} hf$.

La prueba de que el operador de multiplicación es lineal y continuo, se realiza similarmente a la prueba del operador de diferenciación.

Ejemplos:

1. Sea $n = 1$. Calculemos $x^k \delta,\ k \in \mathbb{N}_0$.

   Solución.

   Para $k = 0$, $x^0 \delta = \delta$.

   Para $k \in \mathbb{N}$, $x^k \delta = 0$, puesto que $\forall \varphi \in S \quad (x^k \delta, \varphi) = (\delta, x^k \varphi) = x^k \varphi(x)\big|_{x=0} = 0$.

De aquí es claro que $\forall m \in \mathbb{N}$:

$$(x^k\delta)^{(m)} := \begin{cases} \delta^m = (-1)^m \varphi^{(m)}(0), \ si & k = 0 \\ 0, \ si & k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

2. Probar, que $x\rho_{\frac{1}{x}} = 1$ y $\forall m \geq 1, \ \ x^m \rho_{\frac{1}{x}} = x^{m-1}$.

Solución. Sea $\varphi \in S$. Entonces:

$(x\rho_{\frac{1}{x}}, \varphi) = (\rho_{\frac{1}{x}}, x\varphi) = v.p. \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\varphi(x)}{x} dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} 1\varphi(x)dx = (1, \varphi),$

luego $(x\rho_{\frac{1}{x}}, \varphi) = (1, \varphi)$; esto es $x\rho_{\frac{1}{x}} = 1$. Similarmente para $m > 1$,

$(x^m\rho_{\frac{1}{x}}, \varphi) = (\rho_{\frac{1}{x}}, x^m\varphi) = v.p. \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^m\varphi(x)}{x} dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^{m-1}\varphi(x)dx = (x^{m-1}, \varphi).$

Así, $x^m\rho_{\frac{1}{x}} = x^{m-1}, \quad m \in \mathbb{N}.$

3.2.3. Operador de transformación de Fourier de las funciones generalizadas

Sea $f \in S'$. Se llama transformación de Fourier de f al funcional $\widehat{f}$ definido según la fórmula:

$$\forall \varphi \in S, \ \ (\widehat{f}, \varphi) := (f, \widehat{\varphi}).$$

Detalladamente: $(\widehat{f}(\xi), \varphi(\xi)) := (f(x), \widehat{\varphi}(x)),$ donde $\widehat{\varphi}(x) := (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-i(\xi,x)}\varphi(\xi)d\xi.$

Probemos, que en verdad $\widehat{f} \in S'$.

(i) $\forall f \in S'$, $\widehat{f} \in S'$. O sea $\widehat{f}$ es un funcional lineal y continuo.

En efecto, sean $f \in S', \ \ \varphi, \psi \in S, \ \ \alpha, \gamma \in \mathbb{C}$. Entonces:

$$\left(\widehat{f}, \alpha\varphi + \gamma\psi\right) = \alpha(\widehat{f}, \varphi) + \gamma(\widehat{f}, \psi).$$

Además sean $\{\varphi_k\}_{k=1}^{+\infty}, \ \varphi_0 \in S$. Si $\varphi_k \to \varphi_0$ en S, entonces:

$$(\widehat{f}, \varphi_k) = (f, \widehat{\varphi}_k) \to (f, \widehat{\varphi}_0) = (\widehat{f}, \varphi_0), \ \ k \to +\infty.$$

Esto es, $(\widehat{f}, \varphi_k) \to (\widehat{f}, \varphi_0), \;\; k \to +\infty$. Hemos probado hasta aquí, que $\widehat{f} \in S'$.

Probemos ahora que F (operador de transformación) es un operador lineal y continuo.
(ii) Sean $f, g \in S', \;\; \varphi \in S, \;\; \alpha, \gamma \in \mathbb{C}$ y β multi-índice. Luego:

$$\left(\widehat{\alpha f + \gamma g}, \varphi\right) = (\alpha f + \gamma g, \widehat{\varphi}) = \alpha(f, \widehat{\varphi}) + \gamma(g, \widehat{\varphi}) = \alpha(\widehat{f}, \varphi) + \gamma(\widehat{g}, \varphi).$$

Es decir F es lineal.

(iii) Sean $f_k \in S'$, $\forall k \in \mathbb{N}, \;\; f \in S'$. Además supongamos que $f_k \to f$ en S', es decir $\forall \varphi \in S, \;\; (f_k, \varphi) \to (f, \varphi), \;\; k \to +\infty$. Ahora:

$$(\widehat{f_k}, \varphi) = (f_k, \widehat{\varphi}) \to (f, \widehat{\varphi}) = (\widehat{f}, \varphi), \quad k \to +\infty.$$

Por lo tanto $(\widehat{f_k}, \varphi) \to (\widehat{f}, \varphi), \;\; k \to +\infty$.
De $(i) - (iii)$, F es un operador lineal y continuo.

Ejemplos:

1. Sea $n = 1$. Calcular $\widehat{\delta}$.

   Solución. $\forall \varphi \in S$ tenemos:
   $$(\widehat{\delta}, \varphi) = (\delta, \widehat{\varphi}) = \widehat{\varphi}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\,0\,x} \varphi(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(1, \varphi);$$

   de aquí que $\widehat{\delta} = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}$.
   Similarmente se prueba, que $\check{\delta} = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}$. Podemos concluir además, que $\widehat{1} = \sqrt{2\pi}\delta$, es decir, la transformación de Fourier de la función constante $f(x) \equiv 1$ existe, considerada como función generalizada, en tanto que su transformación habitual no existe. Este comentario también es válido para el siguiente ejemplo.

2. Calcular la transformación de Fourier de la función de Heaviside.

   Solución. $\forall \varphi \in S$:

   $$(\widehat{\theta}, \varphi) = (\theta, \widehat{\varphi}) = \int\limits_0^{+\infty} \widehat{\varphi}(\xi) d\xi.$$

3. Calcular $\widehat{\rho}_{1/x}$.

   Solución. Sea $\varphi \in S$. Luego:

   $$(\widehat{\rho}_{\frac{1}{x}}, \varphi) = (\rho_{\frac{1}{x}}, \widehat{\varphi}) = v.p. \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\widehat{\varphi}(x)}{x} dx.$$

Capítulo 4

Teorema de Plancherel

4.1. Transformación de Fourier para funciones de $L_1(\mathbb{R}^n)$

Sea $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$. Como $L_p(\mathbb{R}^n) \subset S'(\mathbb{R}^n)$ para $1 \leq p \leq +\infty$ (Ver capítulo 3 del presente trabajo), entonces existe la transformación de Fourier para las funciones de $L_1(\mathbb{R}^n)$ en el sentido de S' y además existe dicha transformación en el sentido habitual. En este momento es conveniente introducir una notación que nos permita distinguir una de la otra. Esto también se aplica a las transformaciones inversas.

1. La transformacion habitual:

$$\widehat{f}(\xi) := (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-i(\xi,x)} f(x)dx \stackrel{not}{=} \widehat{f}_s(\xi) \in \overset{\bullet}{C} (\mathbb{R}^n)^1 ,$$

   donde la letra s hace referencia a la inicial del vocablo inglés strong que significa fuerte, por esto la llamaremos transformación fuerte de Fourier.

2. Puesto que $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$, entonces $f \in S'(\mathbb{R}^n)$. Luego la transformación en el sentido de $S'(\mathbb{R}^n)$ viene dada por:

$$\forall \varphi \in S, \;\; (\widehat{f}, \varphi) := (f, \widehat{\varphi}) \stackrel{not}{=} (\widehat{f}_w, \varphi),$$

   donde la letra w hace referencia a la inicial del vocablo inglés weak que significa débil, por esto la llamaremos transformación débil de Fourier.

[1] $\overset{\bullet}{C} (\mathbb{R}^n)$ es el espacio de funciones continuas que tienden a cero cuando $|x| \to +\infty$.

Veamos ahora qué relación hay entre las transformaciones fuerte y débil de Fourier, para funciones de la clase $L_1(\mathbb{R}^n)$.

Teorema 5. *Si* $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$ *entonces* $\widehat{f_s} = \widehat{f_w}$ *en el sentido de* S'.

Demostración. Como $\widehat{f_s} \in \overset{\bullet}{C}(\mathbb{R}^n)$, entonces $\widehat{f_s} \in L_1^{loc}(\mathbb{R}^n)$. Luego $\widehat{f_s}$ genera un funcional regular mediante la integral:

$$\forall \varphi \in S, \quad (\widehat{f_s}, \varphi) := \int\limits_{\mathbb{R}^n} \widehat{f_s}(x)\varphi(x)dx.$$

Basta probar entonces, que $\forall \varphi \in S, \quad (\widehat{f_s}, \varphi) = (\widehat{f_w}, \varphi) = (f, \widehat{\varphi})$.

En efecto, sea $g(\xi, x) = f(\xi)\varphi(x)$. Entonces $g(\xi, x) \in L_1(\mathbb{R}^{2n})$ puesto que $f(\xi), \varphi(x) \in L_1(\mathbb{R}^n)$,de aqui y recordando que $\left|e^{-i(\xi,x)}\right| = 1$ tenemos:

$$\begin{aligned} \left|(2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-i(\xi,x)} g(\xi,x) d\xi dx\right| &\leq (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} \left|e^{-i(\xi,x)} g(\xi,x)\right| d\xi dx \\ &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} |g(\xi,x)|\, d\xi dx < +\infty, \end{aligned}$$

luego es posible aplicar una consecuencia del Teorema de Fubini (Ver [1] Teorema 15.8) que nos permite cambiar el orden de integración:

$$\begin{aligned} (\widehat{f_s}, \varphi) &= \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left[(2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-i(\xi,x)} f(\xi) d\xi\right] \varphi(x) dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left[(2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-i(\xi,x)} \varphi(x) dx\right] f(\xi) d\xi \\ &= \int\limits_{\mathbb{R}^n} \widehat{\varphi}(\xi) f(\xi) d\xi = (f, \hat{\varphi}). \end{aligned}$$

Luego $\forall \varphi \in S, \quad (\widehat{f_s}, \varphi) = (f, \widehat{\varphi}) = (\widehat{f_w}, \varphi)$. Es decir $\widehat{f_s} = \widehat{f_w}$ en el sentido de S'. □

4.2. Transformación de Fourier para funciones de $L_2(\mathbb{R}^n)$

Sea $f \in L_2(\mathbb{R}^n) \subset S'(\mathbb{R}^n)$. Entonces existe $\widehat{f}_w$ en el sentido de S', definida de la siguiente manera:

$$\forall \varphi \in S, \ \ (\widehat{f}_w, \varphi) = (f, \widehat{\varphi}).$$

Surge entonces la siguiente pregunta: ¿Qué sucede con la transformación fuerte de Fourier?. Para responder esta pregunta, observemos que la definición:

$\widehat{f}_s(\xi) := (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-i(\xi,x)} f(x)dx,$ puede carecer de sentido, puesto que en general si $f \in L_2(\mathbb{R}^n)$, no necesariamente $\left|e^{-i(\xi,x)} f(x)\right| = |f(x)| \in L_1(\mathbb{R}^n)$. Por ejemplo la función:

$$f(x) := \begin{cases} \frac{1}{x}, & |x| > 1 \\ 0, & |x| \leq 1, \end{cases}$$

está en $L_2(\mathbb{R})$ pero no en $L_1(\mathbb{R})$. Esta situación hace necesario otro mecanismo para definir $\widehat{f}_s$, con $f \in L_2(\mathbb{R}^n)$.

Lema 3. $\forall \varphi, \psi \in S(\mathbb{R}^n)$ *es válida la fórmula:*

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\overline{\psi(x)}dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \widehat{\varphi}_s(\xi)\overline{\widehat{\psi}_s(\xi)}d\xi. \tag{4.1}$$

Aquí $\overline{\psi}(x)$ simboliza el conjugado del número complejo $\psi(x)$.

Demostración.

$$\begin{aligned} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \widehat{\varphi}_s(\xi)\overline{\widehat{\psi}_s(\xi)}d\xi &= \int\limits_{\mathbb{R}^n} \widehat{\varphi}_s(\xi) \overline{\left[(2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-i(\xi,x)}\psi(x)dx\right]} d\xi \\ &= \int\limits_{\mathbb{R}^n} \widehat{\varphi}_s(\xi) \left[(2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{i(\xi,x)}\overline{\psi(x)}dx\right] d\xi. \end{aligned}$$

Llevando a cabo un razonamiento análogo a la demostración del Teorema 5, podemos intercambiar de nuevo el orden de integración:

$$\begin{aligned} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \widehat{\varphi}_s(\xi)\overline{\widehat{\psi}_s(\xi)}d\xi &= \int\limits_{\mathbb{R}^n} \overline{\psi(x)} \left[(2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{i(\xi,x)}\widehat{\varphi}_s(\xi)d\xi\right] dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \overline{\psi(x)} F_s^{-1}\left[F_s\varphi(x)\right]dx \\ &= \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\overline{\psi(x)}dx. \end{aligned}$$

Por lo tanto se cumple (4.1). $\square$

Consecuencia 3. *Si en (4.1) hacemos $\varphi(x) = \psi(x)$, tenemos:*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\overline{\varphi(x)}dx = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{\varphi}_s(\xi)\overline{\widehat{\varphi}_s(\xi)}d\xi.$$

Como $\forall z \in \mathbb{C}$, $z\overline{z} = |z|^2$, entonces $\forall \varphi \in S(\mathbb{R}^n)$: $\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{\varphi}_s(\xi)|^2 d\xi\right)^{\frac{1}{2}}$: es decir,

$$\forall \varphi \in S, \quad \|\varphi\|_{L_2(\mathbb{R}^n)} = \|\widehat{\varphi}_s\|_{L_2(\mathbb{R}^n)}. \tag{4.2}$$

(4.2) es llamada Igualdad de Parseval. Además esta indica que F_s es una isometría en $S(\mathbb{R}^n)$, en el sentido de la métrica inducida por la norma de $L_2(\mathbb{R}^n)$. Recordemos también que F_s, F_s^{-1} son inversas en S, es decir,

$$\forall \varphi \in S, \;\; F_s[F_s^{-1}(\varphi)] = F_s^{-1}[F_s(\varphi)] = \varphi.$$

Conclusión. La transformación fuerte de Fourier es un operador lineal, continuo e isométrico en $S(\mathbb{R}^n) \subset L_2(\mathbb{R}^n)$, con $S(\mathbb{R}^n)$ denso en $L_2(\mathbb{R}^n)$. Luego teniendo en cuenta algunos tópicos del análisis funcional (Ver [9] Cap. 3, Teorema de Hahn-Banach) podemos prolongar a todo $L_2(\mathbb{R}^n)$ por continuidad la transformación fuerte de Fourier conservando la isometría.

4.3. Teorema de Plancherel

El siguiente teorema permite definir la transformación fuerte de Fourier en $L_2(\mathbb{R}^n)$ con la ayuda de la transformación de Fourier en S, dado que el espacio de Schwartz es denso en $L_2(\mathbb{R}^n)$. En particular esto indica, que para cada $f \in L_2(\mathbb{R}^n)$ es posible construir al menos una sucesión de elementos de S, convergente (en el sentido de $L_2(\mathbb{R}^n)$) hacia f.

Teorema 6. *(PLANCHEREL) Supongamos que $f \in L_2(\mathbb{R}^n)$.*

1. *Sea $\{\varphi_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ una sucesión en S. Si $\lim_{m\to+\infty} \varphi_m = f$ en L_2, entonces $\{\widehat{\varphi}_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ y $\{\check{\varphi}_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ convergen en L_2, $m \to +\infty$.*

2. *Hagamos $\widehat{f_s} = \lim_{m\to+\infty} \widehat{\varphi}_m$ en L_2 y $\check{f_s} = \lim_{m\to+\infty} \check{\varphi}_m$ en L_2. Estos límites no dependen de la escogencia de la sucesión $\{\varphi_m\}_{m\in\mathbb{N}}$.*

3. *Es válida la igualdad de Parseval:*
$$\forall f \in L_2(\mathbb{R}^n), \quad \left\|\widehat{f_s}\right\|_{L_2(\mathbb{R}^n)} = \|f\|_{L_2(\mathbb{R}^n)} = \left\|\check{f_s}\right\|_{L_2(\mathbb{R}^n)}.$$

4. *F_s y F_s^{-1} transforma $L_2(\mathbb{R}^n)$ sobre $L_2(\mathbb{R}^n)$ de manera biunívoca y son inversas entre sí en $L_2(\mathbb{R}^n)$; es decir $\forall f \in L_2(\mathbb{R}^n)$, $F_s[F_s^{-1}(f)] = F_s^{-1}[F_s(f)] = f$.*

5. *Las transformaciones débil de Fourier (en el sentido de S') y fuerte (en el sentido de L_2) coinciden en S'.*

Demostración. Haremos al demostración de este Teorema para la transformación directa de Fourier, para la transformación inversa se realiza de manera análoga.

1. Si $\varphi_m \to f$, $m \to +\infty$ en L_2, entonces $\{\varphi_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en L_2; o sea $\|\varphi_m - \varphi_k\|_{L_2(\mathbb{R}^n)} \to 0$ cuando $m, k \to +\infty$. Luego de (4.2) se sigue:
$$\|\widehat{\varphi}_m - \widehat{\varphi}_k\|_{L_2(\mathbb{R}^n)} = \left\|\widehat{(\varphi_m - \varphi_k)}\right\|_{L_2(\mathbb{R}^n)} = \|\varphi_m - \varphi_k\|_{L_2(\mathbb{R}^n)} \to 0, \quad m, k \to +\infty.$$
Esto significa que la sucesión $\{\widehat{\varphi}_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en L_2, entonces puesto que L_2 es completo, $\{\varphi_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ converge en L_2.

2. Tenemos las fórmulas:
$$\widehat{f_s} := \lim_{m\to+\infty} \widehat{\varphi}_m\,, \qquad \check{f_s} := \lim_{m\to+\infty} \check{\varphi}_m\,, \ \textit{en } L_2.$$
Supongamos que además de la sucesión $\{\varphi_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ se tiene otra sucesión, notémosla $\{\psi_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ que también converge a f en $L_2(\mathbb{R}^n)$. Entonces, $\varphi_m - \psi_m \to 0$, $m \to +\infty$ en L_2. En efecto usando nuevamente (4.2):
$$\begin{aligned} \left\|\widehat{\varphi}_m - \widehat{\psi}_m\right\|_{L_2(\mathbb{R}^n)} &= \|\varphi_m - \psi_m\|_{L_2(\mathbb{R}^n)} = \|\varphi_m - f + f - \psi_m\|_{L_2(\mathbb{R}^n)} \\ &\leq \|\varphi_m - f\|_{L_2(\mathbb{R}^n)} + \|\psi_m - f\|_{L_2(\mathbb{R}^n)} \to 0, \ m \to +\infty. \end{aligned}$$

Es decir, $\lim\limits_{m\to+\infty} \widehat{\varphi}_m = \lim\limits_{m\to+\infty} \widehat{\psi}_m = \widehat{f}_s$, en $L_2(\mathbb{R}^n)$.

3. Es posible ver que $\varphi_m \to f$ en L_2 implica que $\|\varphi_m\|_{L_2(\mathbb{R}^n)} \to \|f\|_{L_2(\mathbb{R}^n)},\ \ m \to +\infty$.
   En verdad, si $\varphi_m \to f$, entonces:
   $\left| \|\varphi_m\|_{L_2(\mathbb{R}^n)} - \|f\|_{L_2(\mathbb{R}^n)} \right| \leq \|\varphi_m - f\|_{L_2(\mathbb{R}^n)} \to 0, \quad m \to +\infty.$
   En consecuencia $\|f\|_{L_2(\mathbb{R}^n)} = \lim\limits_{m\to+\infty} \|\varphi_m\|_{L_2(\mathbb{R}^n)}$.
   De aquí, de la igualdad de Parseval y recordando de 2. que, $\widehat{\varphi}_m \to \widehat{f}_s$ en $L_2(\mathbb{R}^n)$, se sigue que:
   $$\left\|\widehat{f}_s\right\|_{L_2(\mathbb{R}^n)} = \lim_{m\to+\infty} \|\widehat{\varphi}_m\|_{L_2(\mathbb{R}^n)}.$$
   Por la consecuencia del Lema 3,
   $$\left\|\widehat{f}_s\right\|_{L_2(\mathbb{R}^n)} = \lim_{m\to+\infty} \|\widehat{\varphi}_m\|_{L_2(\mathbb{R}^n)} = \lim_{m\to+\infty} \|\varphi_m\|_{L_2(\mathbb{R}^n)} = \|f\|_{L_2(\mathbb{R}^n)}.$$
   Análogamente se demuestra la igualdad: $\|f\|_{L_2(\mathbb{R}^n)} = \left\|\check{f}_s\right\|_{L_2(\mathbb{R}^n)}$.

4. Verifiquemos que $\forall f \in L_2(\mathbb{R}^n),\ \ F_s[F_s^{-1}(f)] = F_s^{-1}[F_s(f)] = f$.
   Sean $f \in L_2,\ \varphi_m \in S;\ \varphi_m \to f$ en L_2. Entonces $\widehat{\varphi}_m \in S$.
   Por 1. y 2., $\widehat{\varphi}_m \to \widehat{f}_s$ en L_2.
   Supongamos que $\widehat{\varphi}_m = \psi_m \to \widehat{f}_s$ en L_2. Por 2., tenemos $\varphi_m = \check{\psi}_m \to F_s^{-1}[F_s(f)]$ en L_2. Pero por hipótesis $\varphi_m \to f$.
   En consecuencia $F_s^{-1}[F_s(f)] = f,\ \ \forall f \in L_2(\mathbb{R}^n)$.
   Análogamente se prueba que $F_s[F_s^{-1}(f)] = f$.

5. Debemos verificar que para cada función f de L_2 y para toda φ en S, es válida la fórmula:
   $$(\widehat{f}_s, \varphi) = (f, \widehat{\varphi}) = (\widehat{f}_w, \varphi).$$
   Esto dará la igualdad entre las transformaciones fuerte y débil de Fourier en S'.
   Supongamos que $\varphi_m \to f$ en L_2. Por 3. $\widehat{\varphi}_m \to \widehat{f}_s$ en L_2. Por lo tanto $\varphi_m \to f$ en S' y $\widehat{\varphi}_m \to \widehat{f}_s$ en S'.
   Entonces $\forall \varphi \in S,\ \ (\widehat{f}_s, \varphi) = \lim\limits_{m\to+\infty} (\widehat{\varphi}_m, \varphi) = \lim\limits_{m\to+\infty} (\varphi_m, \widehat{\varphi}) = (f, \widehat{\varphi})$.

Por lo tanto el Teorema de Plancherel queda demostrado. □

Observación 8. *El resultado anterior puede concretizarse si en lugar de funciones de S se toman funciones de $L_1(\mathbb{R}^n) \cap L_2(\mathbb{R}^n)$, ya que de la inclusión $S(\mathbb{R}^n) \subset [L_1(\mathbb{R}^n) \cap L_2(\mathbb{R}^n)]$, se sigue que $L_1(\mathbb{R}^n) \cap L_2(\mathbb{R}^n)$ es denso en $L_2(\mathbb{R}^n)$.*

Simbolicemos $\Delta_N = \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n; |x_j| < N,\ j = 1, 2, \ldots, n\}, \quad N \in \mathbb{N}$.
Sea $f \in L_2(\mathbb{R}^n)$. Consideremos la sucesión $\{f_N\}_{N\in\mathbb{N}}$ donde, $f_N(x) := f(x)\chi_{\Delta_N}(x)$ [2]; esto es,

$$f(x)\chi_{\Delta_N}(x) := \begin{cases} f(x), & x \in \Delta_N \\ 0, & x \in \mathbb{R}^n - \Delta_N. \end{cases}$$

Luego si $f \in L_2(\mathbb{R}^n)$, entonces $f_N(x) \in L_1(\mathbb{R}^n) \cap L_2(\mathbb{R}^n)$ y además para $x \in \Delta_N$, $f_N(x) = f(x)$.

Se tiene: $\|f(x) - f_N(x)\|_{L_2(\mathbb{R}^n)} = \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n - \Delta_N} |f(x)|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \to 0, \quad N \to +\infty.$

Esto se tiene debido a que $f \in L_2(\mathbb{R}^n)$.

Es decir, $f_N(x) \to f(x) \ \ (N \to +\infty)$ en L_2 y entonces $F_s(f_N) \to F_s(f)$, en L_2 puesto que:
$\|F_s(f_N) - F_s(f)\|_{L_2(\mathbb{R}^n)} = \|F_s(f_N - f)\|_{L_2(\mathbb{R}^n)} = \|f_N - f\|_{L_2} \to 0,\ N \to +\infty.$

Así, $F_s(f) = \lim\limits_{N\to+\infty} F_s(f_N)$ en L_2 y además:

$$F_s[f_N(\xi)] = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-i(\xi,x)} f_N(x)dx = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int\limits_{\Delta_N} e^{-i(\xi,x)} f(x)dx.$$

[2]Aquí χ_{Δ_N} es la función característica de Δ_N y se define mediante:

$$\chi_{\Delta_N}(x) := \begin{cases} 1, & x \in \Delta_N \\ 0, & x \notin \Delta_N. \end{cases}$$

En conclusión:

$$F_s(f) = \widehat{f}_s = \lim_{N\to+\infty} (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int\limits_{\Delta_N} e^{-i(\xi,x)} f(x)dx. \tag{4.3}$$

La parte derecha de (4.3) se llama *transformación truncada de Fourier.*

En particular, para $n = 1$,

$$F_s(f)(\xi) = \widehat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{N\to+\infty} \int\limits_{-N}^{N} e^{-i\xi x} f(x)dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, v.p. \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi x} f(x)dx.$$

4.4. Algunas aplicaciones de la transformación de Fourier para la resolución de problemas de contorno para las EDDP

Las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales son importantes en distintos campos de la ciencia y la tecnología. Estas modelan fenómenos de tipo económico, biológico y físico entre otros. En la física matemática este tipo de ecuaciones describe por ejemplo el movimiento de ondas, radiación o conducción de energía y la teoría del potencial. Uno de los modelos clásicos es la ecuación del calor. Resolveremos a continuación el problema de Cauchy para la ecuación de Laplace $\Delta u = 0$, donde $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ es el laplaciano de u.

Aplicación 1. Sean $u = u(x, y), \quad x \in \mathbb{R}, \quad y > 0$,

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \\ u(x, 0) = \varphi(x) \\ u(x, y) \to 0, y \to +\infty, \end{cases}$$

donde φ es una función conocida, la cual se supone lo suficientemente "suave" para que los cálculos realizados tengan sentido.

Aplicamos respecto a x la transformación de Fourier y obtenemos el siguiente problema de Cauchy:

$$\begin{cases} \widehat{u}_{yy} - \xi^2 \widehat{u} = 0 \\ \widehat{u}(\xi, 0) = \widehat{\varphi}(\xi) \\ \widehat{u}(\xi, y) \to 0, y \to +\infty. \end{cases} \tag{4.4}$$

La primera ecuación de (4.4), es una ecuación diferencial ordinaria [3] homogénea de segundo grado con coeficientes constantes cuyo polinomio característico y solución son respectivamente:

$$\lambda^2 - \xi^2 = 0,$$

$$\widehat{u}(\xi, y) = C_1(\xi)e^{-|\xi|y} + C_2(\xi)e^{|\xi|y}.$$

Donde $C_1(\xi)$ y $C_2(\xi)$ son "constantes" que dependen de ξ. Pero atendiendo a la última condición de (4.4) tenemos que $C_2(\xi) = 0$ y por la otra condición, $C_1(\xi) = \widehat{\varphi}(\xi)$. Luego,

$$\widehat{u}(\xi, y) = \widehat{\varphi}e^{-|\xi|y}.$$

Restituimos $u(x, y)$ aplicando la transformación inversa y el teorema de convolución, para obtener:

$$u(x, y) = F^{-1}[\widehat{\varphi}(\xi)e^{-|\xi|y}] = [\varphi * F^{-1}(e^{-|\xi|y})](x).$$

Ahora calculamos:

$$\begin{aligned} F^{-1}[e^{-|\xi|y}] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-|\xi|y} e^{i\xi x} d\xi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-|\xi|y} (\cos \xi x - i \sin \xi x) d\xi \\ &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} e^{\xi y} \cos \xi x d\xi. \end{aligned}$$

Por comodidad, llamemos a la última integral I_1 y calculémosla mediante integración por partes:

$$I_1 = \frac{y}{x} \int_0^{+\infty} e^{-\xi y} \sin \xi x d\xi.$$

Sea $I_2 = \int_0^{+\infty} e^{-\xi y} \sin \xi x d\xi$, y apliquemos nuevamente integración por partes:

$$I_2 = \frac{1}{x} - \frac{y}{x} I_1, \quad I_1 = \frac{y}{x} I_2,$$

[3] Debemos tener en cuenta que en este caso ξ se considera constante.

de aquí se concluye que:

$$F^{-1}[e^{-|\xi|y}] = \frac{y}{x^2+y^2}.$$

Por lo tanto:

$$u(x,y) = \left(\varphi * \frac{y}{x^2+y^2}\right)(x) = y\int\limits_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(\lambda)}{y^2+(\lambda-x)^2}d\lambda.$$

Aplicación 2. La ecuación del movimiento de un líquido bajo la acción de la fuerza de gravedad es $u_{xx}+u_{yy}=0$ donde $u=u(x,y,t)$. Nos interesa entonces resolver el siguiente problema de contorno. Sean $u=u(x,y,t), \quad x\in\mathbb{R}, \quad y<0, \quad t>o$,

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \\ u_y = -\frac{1}{g}u_{tt}, \quad si\ y=0 \\ u_t\mid_{y=t=0} = 0, \quad u\mid_{y=t=0} = \varphi(x) \\ u\to 0,\ y\to +\infty, \end{cases}$$

donde g es la constante gravitacional. Usemos el mismo mecanismo de la solución anterior aplicando transformación de Fourier a todo el problema respecto a la variable x, puesto que esta recorre todo el eje real, para obtener el siguiente problema:

$$\begin{cases} \widehat{u}_{yy} - \xi^2\widehat{u} = 0 \\ \widehat{u}_y + \frac{1}{g}\widehat{u}_{tt} = 0 \quad si\ y=0 \\ \widehat{u}_t\mid_{t=y=0} = 0, \quad \widehat{u}\mid_{t=y=0} = \widehat{\varphi}(\xi) \\ \widehat{u}\to 0, y\to +\infty, \end{cases} \tag{4.5}$$

cuya solución es:

$$\widehat{u}(\xi,y,t) = C_1(\xi,t)e^{|\xi|y} + C_2(\xi,t)e^{-|\xi|y}.$$

Puesto que $y<0$ y la función u debe ser acotada, entonces $C_2(\xi,t)=0$, de donde:

$$\widehat{u}(\xi,y,t) = C_1(\xi,t)e^{|\xi|y}.$$

Ahora encontremos $C_1(\xi,t)$ resolviendo el siguiente problema de Cauchy que resulta de aplicar las condiciones de (4.5):

$$\begin{cases} |\xi|\,C_1 + \frac{1}{g}\frac{\partial^2 C_1}{\partial t^2} = 0 \\ C_1(\xi,0) = \widehat{\varphi}(\xi), \quad \frac{\partial C_1(\xi,0)}{\partial t} = 0. \end{cases} \tag{4.6}$$

Este problema nos genera el polinomio característico $\lambda^2 + g\,|\xi| = 0$ donde ξ es un parámetro, y la solución a la ecuación diferencial ordinaria de (4.6) es:

$$C_1(\xi,t) = A(\xi)\cos\left(t\sqrt{|\xi|\,g}\right) + B(\xi)\sin\left(t\sqrt{|\xi|\,g}\right)\ ,$$

donde $A(\xi)$ y $B(\xi)$ son "constantes" que dependen de ξ. Ahora observamos que, de la segunda condición de (4.6) tenemos que $B(\xi) = 0$ y por la otra condición $A(\xi) = \widehat{\varphi}(\xi)$, por lo tanto:

$$C_1(\xi,t) = \widehat{\varphi}(\xi)\cos t\sqrt{|\xi|\,g}.$$

Por último restituimos u aplicando la transformación inversa:

$$\begin{aligned} u(x,y,t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{\mathbb{R}} e^{ix\xi}e^{|\xi|y}\widehat{\varphi}(\xi)\cos\left(t\sqrt{|\xi|\,g}\right)\,d\xi \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{\mathbb{R}} e^{i\xi x+|\xi|y}\widehat{\varphi}(\xi)\cos\left(t\sqrt{|\xi|\,g}\right)\,d\xi. \end{aligned}$$

Bibliografía

[1] APOSTOL, T. *Análisis Matemático.* Editorial Reverté, Colombia S.A. 1998.

[2] BREMERMANN, H. *Distributions, Complex Variables and Fourier Transformations.* Addison-Wesley, Massachusetts, 1965.

[3] BUCHELI, J. SOTELO, J. *Comparación de las derivadas de orden no entero según Louville y Marshout.* Trabajo de grado. Universidad del Cauca, 2006.

[4] BURENKOV, V.I. *Espacios Funcionales. Desigualdades Integrales Fundamentales, relacionadas con los Espacios Lp.* Editorial U.D.N. Moscú, 1989.

[5] BURENKOV, V.I. *Espacios Funcionales. Espacios Lp.* Editorial U.D.N. Moscú, 1987.

[6] DEMIDÓVICH, V.P. *Problemas y Ejercicios de Análisis Matemático.* Editorial Nauka, Moscú,1990.

[7] FRIEDLANDER, F.G. *Introduction to the theory of distributions.* Department of pure Mathematics and Mathematical statics. University of Cambridge, 1982, 1998.

[8] KESAVAN, S. *Topics in Functional Analysis and Applications.* School of Mathematics. Tata Institute of Fundamental Research. Bangalore, India, 1989.

[9] KOLMOGÓROV, A.N. FOMÍN,S.V. *Elementos de la Teoría de Funciones y del Análisis Funcional.* Editorial Nauka. Moscú, 1989.

[10] KUDRIÁVTSEV, L.D.*Curso de Análisis Matemático.* Tomos I y II. Editorial Mir, Moscú,1983.

[11] LÓPEZ TASCÓN, A. *Métodos de Análisis Aplicado*, 1999.

[12] N. PISKUNÓV. *Cálculo Diferencial e Integral*. Tomos I y II. Editorial Mir, Moscú, 1983.

[13] VLADIMÍROV V.S. *Ecuaciones de la física matemática*. Editorial Nauka, Moscú, 1988.

[14] VLADIMÍROV V.S. *Problemas y ejercicios de la física matemática*. Segunda edición. Editorial Nauka, Moscú, 1982.