

**ISOMETRÍAS Y TRANSFORMACIONES CONFORMES EN LA ESFERA
N-DIMENSIONAL**



FREDY ARMANDO GIRÓN URIBE

**UNIVERSIDAD DEL CAUCA
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES, EXACTAS Y DE LA
EDUCACIÓN
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
POPAYÁN
2009**

**ISOMETRÍAS Y TRANSFORMACIONES CONFORMES EN LA ESFERA
N-DIMENSIONAL**

Fredy Armando Girón Uribe

PROPUESTA DE TRABAJO DE GRADO

**En la modalidad de seminario presentado como requisito parcial para optar
al título de matemático**

Director

Mg. Héctor Efrén Guerrero Mora

**UNIVERSIDAD DEL CAUCA
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES, EXACTAS Y DE LA
EDUCACIÓN
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
POPAYÁN
2009**

Nota de aceptación

Director

Magister Hector Efrén Guerrero .

Comité evaluador

Magister Gerardo Loaiza.

Doctor Francisco Enríquez.

Fecha de sustentación: Popayán, Febrero de 2009

Dedico este trabajo de grado a mis padres Erasmo Girón, Angelica Oliva Uribe y mi hermano Henry Girón Uribe .

AGRADECIMIENTOS

Doy gracias a Dios por permitirme tener el privilegio de terminar esta etapa de mi vida y los más sinceros agradecimientos al Mg. Héctor Efrén Guerrero Mora, director de mi trabajo de grado, maestro ejemplo para cada uno de los estudiantes de nuestro programa, quien con sus enseñanzas, dedicación, paciencia me ha motivado a ser un verdadero profesional.

Agradezco la colaboración que tuve de parte de los profesores Dr. Eduardo Gallego, Dr. Agustí Reventos de la universidad autónoma de Barcelona España que estuvieron en el segundo encuentro nacional de matemáticas y su enseñanza en la universidad tecnológica de Pereira Colombia.

A cada uno de los profesores del departamento de matemáticas, especialmente al los profesores Francisco Enríquez, Gerardo Loaiza y al profesor Luis Eduardo Montoya, a nuestros compañeros y amigos.

A mis padres, familiares y al Padre Luis Arturo Garzón quienes con su esfuerzo hicieron que esta meta sea toda una realidad.

CONTENIDO

INTRODUCCIÓN	VII
1. Preliminares	1
1.1. Definición de superficie regular	1
1.2. Diferenciabilidad entre superficies regulares	10
1.3. Primera forma fundamental	13
1.4. Aplicación de Gauss	16
1.5. Curvatura gaussiana	17
1.6. Segunda forma fundamental	18
2. Isometrías y transformaciones conformes	20
2.1. Ecuaciones de compatibilidad	35
2.2. Teorema egregium de Gauss	39
2.3. Derivada covariante	42

2.4. Existencia y unicidad de las geodésicas	50
2.5. Isometrías en S^2	53
2.6. Isometrías en S^n	56
3. Construcción de la aplicación conforme F_g	66
3.1. Flujo de un campo	68
3.2. Flujos sobre S^2	69
3.3. La aplicación conforme F_g	78
3.4. Propiedades de la aplicación F_g	79
3.5. Generalizaciones de las aplicaciones conformes	82

INTRODUCCIÓN

Es conocido que el cilindro y el plano son superficies regulares distintas, pero en lo que concierne a cuestiones métricas intrínsecas como son longitud, ángulo, área ellas se comportan localmente de la misma manera. Este hecho es importante en geometría diferencial y su estudio se hace utilizando el concepto de isometría. También se conoce, gracias a la proyección estereográfica, que la esfera y el plano se comportan de la misma manera en lo concerniente a la preservación de la medida de los ángulos. Este hecho permite introducir el concepto de equivalencia conforme entre superficies regulares.

Ahora bien dado que la geometría diferencial es una herramienta importante en el estudio de las matemáticas; se pretende realizar una monografía de las isometrías y transformaciones conformes en la esfera n -dimensional ($n \geq 2$). Dicho estudio se hará tomando como punto de partida algunas definiciones y proposiciones en la teoría de superficies regulares, posteriormente se llevará a cabo un análisis detallado de la teoría de isometrías y transformaciones conformes para cualquier superficie regular, y se finalizará con el estudio de estas aplicaciones en S^n .

Este trabajo monográfico inicia en el primer capítulo con la presentación de los conceptos preliminares tales como el de superficie regular, diferenciabilidad entre superficies regulares y uno de los más importantes; la primera y la segunda forma fundamental, elementos geométricos claves en desarrollo de los resultados que aquí se presentarán.

En el segundo capítulo se hará un análisis detallado de las aplicaciones conformes e

isométricas, mostrando algunos ejemplos de superficies localmente isométricas y localmente conformes de forma que ilustren mejor las proposiciones que allí se presentan, entre otras cosas se probará también que la esfera es localmente conforme al plano. Posteriormente gracias a las ecuaciones de compatibilidad y los símbolos de Christoffel se demostrará el teorema egregium de Gauss. Es más gracias a derivada covariante y el teorema de existencia y unicidad de las geodésicas se logra probar cuándo una aplicación $\varphi : S^n \rightarrow S^n$ es una isometría.

En el tercer capítulo, consideraremos un campo vectorial sobre S^2 y a partir del teorema de existencia y unicidad de las curvas integrales sobre superficies regulares se hallará su grupo de transformaciones $\{\psi_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ denominado el grupo uniparamétrico de difeomorfismos y gracias a la teoría desarrollada en el capítulo dos se probará que dichas aplicaciones son conformes. Todo este análisis nos permite definir unas aplicaciones conformes de S^n en S^n denotadas como F_g donde $g \in B_1^{n+1}(0)$ estas aplicaciones son de interés dado que ellas generan el grupo conforme de S^n en el siguiente sentido: Cada transformación conforme de $\mathbf{G} = \{\phi : S^n \rightarrow S^n \mid \phi \text{ es una aplicación conforme}\}$ puede ser expresada por $\varphi \circ F_g$ donde φ es una transformación ortogonal de S^n y g algún elemento de $B_1^{n+1}(0)$.

Capítulo 1

Preliminares

En esta sección se darán algunas definiciones básicas tales como el superficie regular, diferenciabilidad entre superficies regulares, primera y segunda forma fundamental; entre otras. Es más las definiciones y algunas proposiciones se presentarán de forma que estén autocontenidas de tal manera que el lector pueda apreciar mejor el desarrollo del segundo y tercer capítulo en donde se probarán los resultados centrales de este trabajo.

1.1. Definición de superficie regular

Definición 1.1 (Superficie regular). *Un subconjunto $S \subset \mathbb{R}^3$, $S \neq \emptyset$ es una superficie regular si, para cada $p \in S$, existe una vecindad V de \mathbb{R}^3 y una función $X : U \rightarrow V \cap S$ de un conjunto abierto $U \subseteq \mathbb{R}^2$ sobre $V \cap S \subset \mathbb{R}^3$ tal que*

1. *X es diferenciable, (es decir cada función componente tiene derivadas parciales continuas de todos los órdenes).*
2. *X es un homeomorfismo, es decir una función biyectiva continua con inversa $X^{-1} : V \cap S \rightarrow U$ continua.*

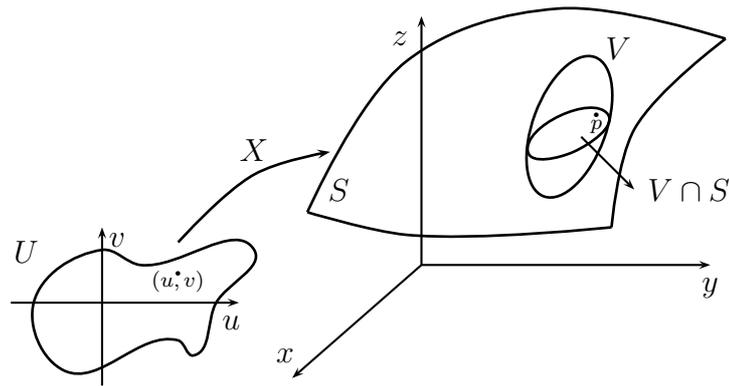


Figura 1.1: Interpretación geométrica de la definición (1.1)

3. Para cada $q \in U$, la diferencial $dX_q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ es inyectiva.

A la función X se le llama parametrización de S en p o un sistema de coordenadas (locales) de S en p . De ahora en adelante los abiertos se tomarán con la topología usual y S, \bar{S}, S_1, S_2 denotaran superficies regulares en \mathbb{R}^3 .

A continuación mostraremos un ejemplo que ilustre la definición (1.1).

Ejemplo 1. $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ es una superficie regular.

Una forma de obtener una parametrización de la esfera es considerar la denominada proyección estereográfica

$$\begin{aligned} \pi : S^2 - \{N\} &\rightarrow \mathbb{R}^2, \quad N = (0, 0, 1) \\ (x, y, z) &\mapsto \pi(x, y, z) = (u, v) \in xy; \end{aligned}$$

donde $xy = \{(u, v) \mid u, v \in \mathbb{R}\}$.

Consideremos una recta $\alpha(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ que pasa por $P = (x, y, z) \neq N$, donde $P \in S^2$ y tiene por vector director a $P - N$, luego la ecuación de la recta es:

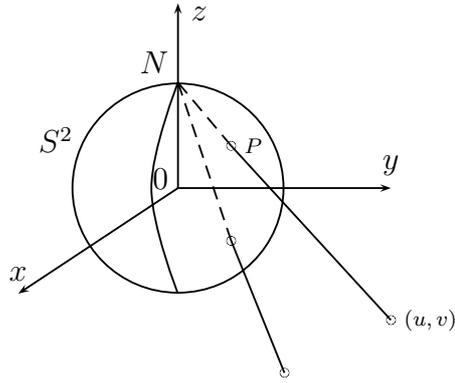


Figura 1.2: La proyección estereográfica.

$$\begin{aligned}
 \alpha(t) &= N + t(P - N) \quad , \quad t \in \mathbb{R} \\
 &= (0, 0, 1) + t(x, y, z - 1) \\
 &= (tx, ty, 1 + t(z - 1)) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t)).
 \end{aligned}$$

Ahora hallemos t_0 de tal forma que

$$\alpha(t_0) = (\alpha_1(t_0), \alpha_2(t_0), 0).$$

Luego,

$$1 + t_0(z - 1) = 0 \quad \text{así} \quad t_0 = \frac{1}{1 - z},$$

por lo tanto

$$\alpha(t_0) = \left(\frac{x}{1 - z}, \frac{y}{1 - z}, 0 \right), \quad z \neq 1 \quad (1.1)$$

Sea

$$\frac{x}{1 - z} = u, \quad \frac{y}{1 - z} = v.$$

Luego,

$$x = u(1 - z), \quad y = v(1 - z). \quad (1.2)$$

Como $P = (x, y, z) \in S^2$. Entonces al reemplazar en $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ y al hacer algunas transformaciones se llega a la siguiente ecuación cuadrática:

$$(u^2 + v^2 + 1)z^2 - 2(u^2 + v^2)z + (u^2 + v^2 - 1) = 0;$$

cuyas soluciones son:

$$z_1 = 1, \quad z_2 = \frac{(u^2 + v^2) - 1}{u^2 + v^2 + 1}.$$

El caso $z_1 = 1$ no es posible dado que en (1.1), $z \neq 1$.

Sustituyendo el valor de z_2 en (1.2) se obtiene que:

$$x = \frac{2u}{u^2 + v^2 + 1}, \quad y = \frac{2v}{u^2 + v^2 + 1}.$$

Estas ecuaciones nos establecen una relación entre un punto $P = (x, y, z) \in S^2$ y un punto (u, v) del plano xy .

Así una parametrización de la esfera sin el punto $N = (0, 0, 1)$ viene dada por

$$\begin{aligned} X(u, v) &= \pi^{-1}(u, v) = \left(\frac{2u}{u^2 + v^2 + 1}, \frac{2v}{u^2 + v^2 + 1}, \frac{u^2 + v^2 - 1}{u^2 + v^2 + 1} \right) \\ &= (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \end{aligned}$$

En primer lugar note que $x(u, v)^2 + y(u, v)^2 + z(u, v)^2 = 1$.

Ahora probemos que X satisface las condiciones para ser una parametrización de S^2 . Claramente para cada $P \in S^2$ existe $V = \mathbb{R}^3 - \{N\}$ y $X : \mathbb{R}^2 \rightarrow S^2 \cap V = S^2 - \{N\}$ donde $P \neq N$.

1. Note que $X(u, v)$ esta bien definida dado que el denominador no se anula, es mas $X(u, v)$ admite derivadas de todos los ordenes. Por lo tanto $X(u, v)$ es diferenciable.
2. Probemos que X es un homeomorfismo. Como

$$X^{-1}(x, y, z) = \left(\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z} \right)$$

es una función continua, pues por hipótesis $z \neq 1$. Además

$$X \circ X^{-1}(x, y, z) = (x, y, z) \text{ para todo } (x, y, z) \in S^2 - \{N\} \text{ y } X^{-1} \circ X(u, v) = (u, v)$$

para todo $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ por lo tanto X es biyectiva. Así X es un homeomorfismo.

3. Ahora probemos que la diferencial $dX_q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ es inyectiva. Dado que

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \frac{4(1 - v^2)}{(u^2 + v^2 + 1)^3},$$

$$\frac{\partial(x, z)}{\partial(u, v)} = \frac{8v}{(u^2 + v^2 + 1)^3},$$

$$\frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} = \frac{-8u}{(u^2 + v^2 + 1)^3}.$$

Entonces para que se anulen simultáneamente las expresiones anteriores debe suceder que la suma de sus cuadrados también se anule, así:

$$\left(\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(x, z)}{\partial(u, v)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}\right)^2 = \frac{16(1 + 4u^2 + v^2 + v^4)}{(u^2 + v^2 + 1)^6} \neq 0$$

En consecuencia $dX_q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ es inyectiva.

En el caso en que $P = N$ de forma análoga podemos encontrar otra parametrización $\bar{X} : \mathbb{R}^2 \rightarrow S^2 - \{S\}$, $S = (0, 0, -1)$ definida por

$$\bar{X}(u, v) = \left(\frac{2u}{u^2 + v^2 + 1}, \frac{2v}{u^2 + v^2 + 1}, \frac{1 - (u^2 + v^2)}{u^2 + v^2 + 1} \right)$$

y de manera similar se prueba que \bar{X} satisface las tres condiciones de la definición (1.1). A continuación se dará la definición de curva regular con el fin de mostrar que una superficie de revolución es regular.

Definición 1.2 (Curva regular). *Un subconjunto $C \subset \mathbb{R}^3$, se dice que es una curva regular, si para cada $p \in C$ existe un entorno V de p en \mathbb{R}^3 y una aplicación*

$\gamma : I \rightarrow V \cap C$; I intervalo abierto tal que:

1. γ es diferenciable.
2. γ es un homeomorfismo.
3. La diferencial $d\gamma_t : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ es inyectiva.

La definición anterior permite obtener superficies regulares a partir de rotar curvas regulares alrededor de un eje tal como lo muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2 (Superficie de revolución). Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ el conjunto que se obtiene al rotar una curva regular plana C , al rededor de un eje en el plano de la curva no incidente con esta. Tomaremos el plano xz como el plano de la curva y el eje z como el eje de rotación.

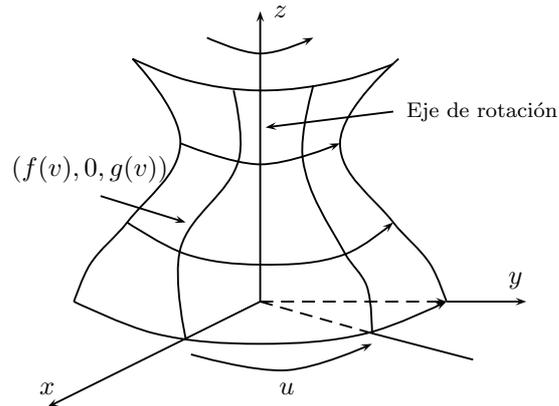


Figura 1.3: Una superficie de revolución

Sea $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una parametrización de C entonces γ la podemos escribir como $\gamma(v) = (f(v), 0, g(v))$, donde f, g son funciones diferenciables y $f(v) > 0$.

Probemos que S es una superficie regular.

Para ello definamos $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$; dada por:

$$X(u, v) = (f(v) \cos u, f(v) \sin u, g(v)), \text{ donde}$$

$$U = \{(u, v) \mid 0 < u < 2\pi, a < v < b\}, \quad f(v) > 0$$

Veamos que X satisface las condiciones de parametrización de una superficie regular.

1. $X(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) = (f(v) \cos u, f(v) \sin u, g(v))$ así las aplicaciones

$$x(u, v) = f(v) \cos u \quad y(u, v) = f(v) \sin u \quad y \quad z(u, v) = g(v)$$

admiten derivadas continuas de todos los órdenes. Por lo tanto X es diferenciable.

2. X es un homeomorfismo.

X es inyectiva, dado que si $X(u_1, v_1) = X(u_2, v_2)$ entonces

$$(f(v_1) \cos u_1, f(v_1) \operatorname{sen} u_1, g(v_1)) = (f(v_2) \cos u_2, f(v_2) \operatorname{sen} u_2, g(v_2));$$

luego,

$$f(v_1) \cos u_1 = f(v_2) \cos u_2,$$

$$f(v_1) \operatorname{sen} u_1 = f(v_2) \operatorname{sen} u_2,$$

$$g(v_1) = g(v_2).$$

Como $f(v) > 0$ entonces $\cos u_1 = \cos u_2$ y $\operatorname{sen} u_1 = \operatorname{sen} u_2$; pero $u_1, u_2 \in (0, 2\pi)$ entonces $u_1 = u_2$; análogamente se prueba que $v_1 = v_2$. Por lo tanto X es inyectiva.

Como $X(u, v) = (f(v) \cos u, f(v) \operatorname{sen} u, g(v)) = (x, y, z)$ si y sólo si,

$$X^{-1}(x, y, z) = (u(x, y, z), v(x, y, z)) = (u, v).$$

Probemos que tanto u como v son continuas en (x, y, z)

Caso I $u \neq \pi$

dado que

$$\begin{aligned} \tan \frac{u}{2} &= \frac{\operatorname{sen} \frac{u}{2}}{\cos \frac{u}{2}} = \frac{2 \cos \frac{u}{2} \operatorname{sen} \frac{u}{2}}{2 \cos^2 \frac{u}{2}} = \frac{\operatorname{sen} u}{1 + \cos u} = \frac{\frac{y}{f(v)}}{1 + \frac{x}{f(v)}} \\ &= \frac{y}{f(v) + x} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2} + x}; \end{aligned}$$

luego,

$$u = 2 \tan^{-1} \left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2} + x} \right);$$

es decir, u es continua en las variables x, y, z

Caso II $u \in (\pi - \epsilon, \pi + \epsilon)$; $\epsilon > 0$

$$\begin{aligned} \cot \frac{u}{2} &= \frac{\cos \frac{u}{2}}{\operatorname{sen} \frac{u}{2}} = \frac{2 \cos \frac{u}{2} \operatorname{sen} \frac{u}{2}}{\operatorname{sen}^2 \frac{u}{2}} = \frac{\operatorname{sen} u}{1 - \cos u} = \frac{\frac{y}{f(v)}}{1 - \frac{x}{f(v)}} \\ &= \frac{y}{f(v) - x} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2} - x}. \end{aligned}$$

Luego,

$$u = 2 \cot^{-1} \left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2} - x} \right);$$

en consecuencia u es continua en las variables x, y, z .

Note que v también es continua en las variables x, y, z pues $z = g(v)$ y $f(v) = \sqrt{x^2 + y^2}$. Por lo tanto X^{-1} es continua.

3. Ahora probemos que $dX_q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ es inyectiva.

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = -f(v)f'(v) \operatorname{sen}^2 u - f(v)f'(v) \operatorname{cos}^2 u = -f(v)f'(v),$$

$$\frac{\partial(x, z)}{\partial(u, v)} = -f(v)g'(v) \operatorname{sen} u,$$

$$\frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} = f(v)g'(v) \operatorname{cos} u.$$

Para que se anulen simultáneamente las expresiones anteriores debe suceder que la suma de sus cuadrados también se anule, así se tiene que:

$$[f(v)]^2[f'(v)]^2 + [f(v)]^2[g'(v)]^2 = [f(v)]^2([f'(v)]^2 + [g'(v)]^2) \neq 0$$

en consecuencia la aplicación dX_q es inyectiva.

Por lo tanto toda superficie de revolución que se obtenga de rotar una curva regular plana al rededor de un eje en el plano de la curva no incidente con esta es regular.

Esta definición de superficie de revolución presenta un ligero problema. Si $C \subset \mathbb{R}^2$ es una curva regular cerrada y plana que es simétrica respecto a un eje r de \mathbb{R}^3 , entonces, al rotar C alrededor de r , obtenemos una superficie que, según puede demostrarse, es regular y que también debería denominarse superficie de revolución. Para adaptarla a nuestra definición, tendríamos que excluir dos de sus puntos, a saber, los puntos donde r corta a C . Por razones técnicas, queremos mantener la terminología previa y llamaremos superficies de revolución ampliadas a las últimas superficies.

Cabe notar la importancia del ejemplo anterior dado que muchas superficies regulares que

se estudian en geometría diferencial se obtienen al rotar una curva regular alrededor de un eje: entre ellas están la esfera, el toro entre otras.

A continuación mostraremos otros subconjuntos de \mathbb{R}^3 que también son superficies regulares; su prueba es análoga a las hechas anteriormente.

Ejemplo 3. 1. El paraboloides elíptico $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z\}$, donde $a, b > 0$

2. El cilindro $\bar{S} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = r^2\}$, $r > 0$

3. El paraboloides hiperbólico definido por $S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = z\}$, donde $a, b > 0$.

4. El plano $S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0\}$.

Una interpretación geométrica de estas superficies la veremos en las páginas siguientes cuando definamos las nociones de puntos parabólicos, elípticos, hiperbólicos y planares sobre una superficie regular.

Existe otro tipo de superficie, las *superficies parametrizadas* que definiremos a continuación.

Definición 1.3 (Superficie parametrizada). Una superficie parametrizada es una función diferenciable $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ de un subconjunto abierto $U \subset \mathbb{R}^2$ en \mathbb{R}^3 . El conjunto $X(U) \subset \mathbb{R}^3$ se llama la traza de X . La superficie parametrizada X es regular si la diferencial $dX_q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ es inyectiva para todo $q \in U$. Un punto $q \in U$ donde dX_q no es inyectiva se llama punto singular de X .

Es posible probar (Ver Do Carmo [2], pp. 91) que dada una superficie parametrizada regular X , la traza $X(U)$ es localmente una superficie regular, pues para cada $p \in X(U)$ existe un entorno V tal que $V \cap X(U)$ es una superficie regular.

Miremos un ejemplo de superficie parametrizada.

Ejemplo 4. Sea $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva parametrizada regular. Definase

$$X(t, v) = \alpha(t) + v\alpha'(t), \quad (t, v) \in I \times \mathbb{R}$$

es una superficie parametrizada, denominada la superficie tangente de α .

Cabe notar que el ejemplo anterior nos sera útil en el capítulo dos, pues se probará que dadas dos superficies tangentes ellas son localmente isométricas.

Otras de las definiciones que jugarán un papel importante en esta sección preliminar es cuando una función definida sobre una superficie es diferenciable; dicha noción se podrá generalizar para cualquier par de superficies y más adelante con la ayuda de esta generalización definiremos la diferencial de una aplicación entre superficies regulares.

Definición 1.4 (Función diferenciable sobre una superficie). Sea $f : V \subset S \rightarrow \mathbb{R}$ una función definida sobre un subconjunto abierto V de una superficie regular S . Se dice que f es diferenciable en $p \in V$ si para alguna parametrización $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ con $p \in X(U) \subset V$, la composición $f \circ X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable en $X^{-1}(p)$. f es diferenciable en V si es diferenciable en todos los puntos de V . Ver figura (1.4).

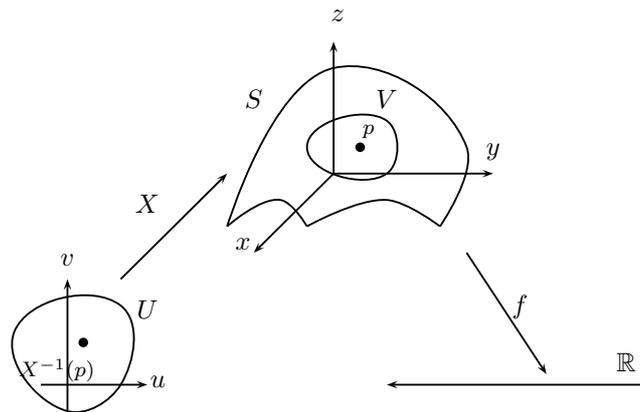


Figura 1.4: Interpretación geométrica de la definición (1.4)

1.2. Diferenciabilidad entre superficies regulares

La definición de diferenciabilidad se puede extender fácilmente al caso de aplicaciones entre superficies de la siguiente forma.

Definición 1.5. Sean S_1 y S_2 superficies regulares, una aplicación continua $\varphi : V_1 \subset S_1 \rightarrow S_2$ es diferenciable en $p \in V_1$ si dadas las parametrizaciones $X_1 : U_1 \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S_1$, $X_2 : U_2 \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S_2$ la aplicación $X_2^{-1} \circ \varphi \circ X_1 : U_1 \rightarrow U_2$ es diferenciable en $q = X_1^{-1}(p)$ con $p \in X_1(U_1)$ y $\varphi(X_1(U_1)) \subset X_2(U_2)$. Ver figura (1.5)

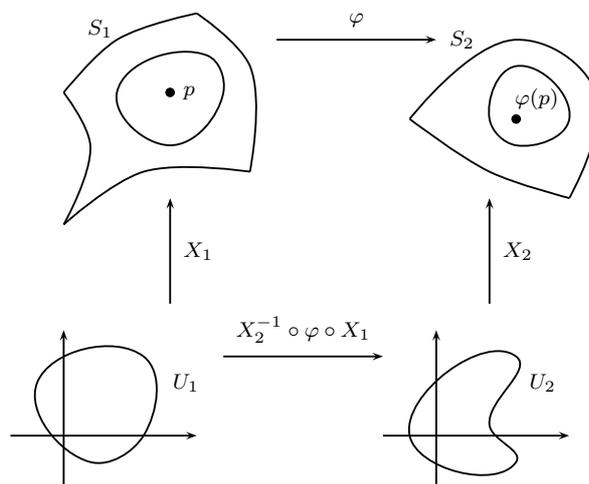


Figura 1.5: Interpretación geométrica de la definición (1.5)

Definición 1.6. Sea S una superficie regular y $p \in S$. Entonces se define por vector tangente a S en p como el vector $\alpha'(0)$, donde $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \subset \mathbb{R} \rightarrow S$ es una curva parametrizada diferenciable y $\alpha(0) = p$, para algún $\epsilon > 0$.

Si $w \in \mathbb{R}^3$, es un vector tangente a S en p , donde $p \in X(U)$ para alguna parametrización $X : U \rightarrow S$ entonces existe una curva diferenciable $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow S$ tal que $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) = w$. Con éstas condiciones $\alpha(t)$ puede ser expresada como $\alpha(t) = X(\gamma(t))$, siendo γ una función de un intervalo abierto $I \subset \mathbb{R}$ en \mathbb{R}^2 tal que $\gamma(0) = q$.

Teniendo en cuenta que

$$X(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \quad y \quad \gamma(t) = (u(t), v(t)),$$

tenemos que $\alpha(t) = X(\gamma(t)) = (x(u(t), v(t)), y(u(t), v(t)), z(u(t), v(t)))$, calculando su

derivada se obtiene:

$$\begin{aligned}
\alpha'(t) &= \left(\frac{\partial x}{\partial u}(u(t), v(t)) u'(t) + \frac{\partial x}{\partial v}(u(t), v(t)) v'(t), \right. \\
&\quad \left. \frac{\partial y}{\partial u}(u(t), v(t)) u'(t) + \frac{\partial y}{\partial v}(u(t), v(t)) v'(t), \right. \\
&\quad \left. \frac{\partial z}{\partial u}(u(t), v(t)) u'(t) + \frac{\partial z}{\partial v}(u(t), v(t)) v'(t) \right) \\
&= \left(\frac{\partial x}{\partial u}(u(t), v(t)), \frac{\partial y}{\partial u}(u(t), v(t)), \frac{\partial z}{\partial u}(u(t), v(t)) \right) u'(t) \\
&\quad + \left(\frac{\partial x}{\partial v}(u(t), v(t)), \frac{\partial y}{\partial v}(u(t), v(t)), \frac{\partial z}{\partial v}(u(t), v(t)) \right) v'(t).;
\end{aligned}$$

luego para $t = 0$, tenemos

$$\alpha'(0) = \left(\frac{\partial x}{\partial u}(q) + \frac{\partial y}{\partial u}(q) + \frac{\partial z}{\partial u}(q) \right) u'(0) + \left(\frac{\partial x}{\partial v}(q) + \frac{\partial y}{\partial v}(q) + \frac{\partial z}{\partial v}(q) \right) v'(0)$$

Por consiguiente el vector tangente a S en p es:

$$w = \alpha'(0) = u' \frac{\partial X}{\partial u}(q) + v' \frac{\partial X}{\partial v}(q), \text{ donde } u' = u'(0), v' = v'(0).$$

En adelante usaremos la siguiente notación para identificar las derivadas parciales de X

$$\frac{\partial X}{\partial u}(q) = X_u, \quad \frac{\partial X}{\partial v}(q) = X_v;$$

así

$$w = \alpha'(0) = u' X_u + v' X_v. \tag{1.3}$$

Lema 1.1. *Dada una superficie regular S y $X : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ una parametrización de S en p . El subespacio vectorial de dimensión 2, $dX_q(\mathbb{R}^2) \subset \mathbb{R}^3$ coincide con el conjunto de vectores tangentes a S en $X(q) = p$.*

Demostración. Ver (Do Carmo [3], pp.93). □

Definición 1.7. *Al subespacio vectorial definido en el lema (1.1), se le llamará plano tangente a S en p y se denotará por $T_p S$.*

De la definición (1.6) tenemos que

$$T_p S = \{\alpha'(0) : \alpha : I \rightarrow S, \text{ es una curva parametrizada diferenciable tal que } \alpha(0) = p\}.$$

Por otra parte la ecuación (1.1), garantiza que $T_p S$ se puede ver como

$$T_p S = \{u'X_u + v'X_v : u', v' \in \mathbb{R}\},$$

de ahí que la parametrización X determina una base $\{X_u, X_v\}$ para $T_p S$, pues los vectores X_u, X_v son linealmente independientes dado que S es una superficie regular.

Definición 1.8. Sea $\varphi : V \subset S_1 \rightarrow S_2$ una aplicación diferenciable entre superficies regulares. Se define la diferencial $d\varphi_p : T_p S_1 \rightarrow T_{\varphi(p)} S_2$ como $d\varphi_p(w) = \beta'(0)$ para todo $w \in T_p S_1$, donde $\beta = \varphi \circ \alpha$ y α es una curva parametrizada diferenciable, $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow V$ con $\alpha(0) = p$ y $\beta(0) = \varphi(p)$.

La definición anterior será de gran ayuda dado que gran parte de los resultados que aquí se presentan toman como punto de partida esta definición.

Hay varias estructuras geométricas asociadas a una superficie regular, una de ellas es la *primera forma fundamental*, que relaciona el producto interno en la superficie con el producto interno de \mathbb{R}^3 y que definiremos en los párrafos siguientes.

1.3. Primera forma fundamental

Consideremos una superficie regular $S \subset \mathbb{R}^3$, el producto interno usual en \mathbb{R}^3 induce en cada plano tangente $T_p S$ un producto interno, que denotaremos por $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$, es decir, si $w_1, w_2 \in T_p S \subset \mathbb{R}^3$, entonces $\langle w_1, w_2 \rangle_p$ es igual al producto interno de w_1 y w_2 como vectores en \mathbb{R}^3 . A este producto interno, el cual es una forma bilineal, le corresponde una forma cuadrática $I_p : T_p S \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$I_p(w) = \langle w, w \rangle_p = \|w\|^2 \geq 0.$$

Definición 1.9 (Primera forma fundamental). *La forma cuadrática $I_p : T_p S \rightarrow \mathbb{R}$, que hemos definido en el párrafo anterior, es la primera forma fundamental de la superficie S en p .*

La primera forma fundamental es la expresión de cómo la superficie S hereda el producto interno usual de \mathbb{R}^3 , geoméricamente nos permite hacer mediciones en la superficie (longitudes de curvas, ángulos entre vectores tangentes, áreas de regiones) sin necesidad de referirnos al espacio \mathbb{R}^3 que contiene a la superficie.

Podemos expresar la primera forma fundamental en términos de la base $\{X_u, X_v\}$ de $T_p S$ asociada a la parametrización $X(u, v)$ en p . Como el vector tangente $w \in T_p S$ es el vector tangente a una curva parametrizada $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$, $t \in (-\epsilon, \epsilon)$, tal que $p = \alpha(0) = X(u_0, v_0)$, donde $q = (u_0, v_0)$, entonces

$$\begin{aligned} I_p(\alpha'(0)) &= \langle \alpha'(0), \alpha'(0) \rangle_p \\ &= \langle X_u u' + X_v v', X_u u' + X_v v' \rangle_p \\ &= \langle X_u, X_u \rangle_p (u')^2 + 2\langle X_u, X_v \rangle_p u'v' + \langle X_v, X_v \rangle_p (v')^2, \end{aligned}$$

donde los valores de las funciones que aparecen están evaluados en $t = 0$. Las expresiones

$$E = \langle X_u, X_u \rangle_p, \quad F = \langle X_u, X_v \rangle_p, \quad G = \langle X_v, X_v \rangle_p, \quad (1.4)$$

son los coeficientes de la primera forma fundamental en la base $\{X_u, X_v\}$ de $T_p S$. Al hacer variar p en la vecindad correspondiente a $X(u, v)$ se obtiene funciones $E(u, v)$, $F(u, v)$, $G(u, v)$ que son diferenciables en esa vecindad. Luego

$$\begin{aligned} I_p(\alpha'(0)) &= \langle \alpha'(0), \alpha'(0) \rangle_p \\ &= E(u')^2 + 2Fu'v' + G(v')^2. \end{aligned}$$

Anteriormente se probó que una superficie de revolución es regular a continuación hallaremos los coeficientes de la primera forma fundamental asociada a la superficie.

Ejemplo 5. *Hallemos los coeficientes de la primera forma fundamental de una superficie de revolución parametrizada por:*

$$X(u, v) = (f(v) \cos u, f(v) \sin u, g(v)) \text{ donde}$$

$$U = \{(u, v) \mid 0 < u < 2\pi, a < v < b\}, \quad f(v) > 0.$$

Como

$$X_u = (-f(v) \sin u, f(v) \cos u, 0), \quad X_v = (f'(v) \cos u, f'(v) \sin u, g'(v)),$$

entonces

$$E = \langle X_u, X_u \rangle = [f(v)]^2, \quad F = \langle X_u, X_v \rangle = 0, \quad G = \langle X_v, X_v \rangle = [f'(v)]^2 + [g'(v)]^2.$$

La primera forma fundamental desempeñará en muchos aspectos de este trabajo un elemento geométrico importante pues muchos de los resultados que se mostrarán en el capítulo dos harán uso de esta forma cuadrática.

La siguiente definición dará el concepto central para poder definir mas adelante la aplicación de Gauss y por ende la segunda forma fundamental asociada a una superficie regular.

Definición 1.10. *Una superficie regular S es orientable si es posible cubrirla con una familia de entornos coordenados de forma que si un punto p pertenece a dos entornos de esta familia, entonces el cambio de coordenadas tiene Jacobiano positivo en p . A la elección de tal familia se denomina una orientación de S y en este caso S se denomina orientada. Si no es posible tal elección la superficie se denomina no orientable.*

Antes de continuar con esta parte preliminar precisemos un poco más la definición anterior. Si fijamos una parametrización $X(u, v)$ en el entorno de un punto p de una superficie regular S , determinemos una orientación del plano tangente $T_p S$, a saber, la orientación de base ordenada asociada $\{X_u, X_v\}$. Si p pertenece al entorno coordenado de otra parametrización $X(\bar{u}, \bar{v})$, la nueva base $\{\bar{X}_{\bar{u}}, \bar{X}_{\bar{v}}\}$ se expresa en términos de la primera mediante

las siguientes ecuaciones

$$\bar{X}_{\bar{u}} = X_u \frac{\partial u}{\partial \bar{u}} + X_v \frac{\partial v}{\partial \bar{u}}$$

$$\bar{X}_{\bar{v}} = X_u \frac{\partial u}{\partial \bar{v}} + X_v \frac{\partial v}{\partial \bar{v}}$$

donde $u = u(\bar{u}, \bar{v})$ y $v = v(\bar{u}, \bar{v})$ son las expresiones del cambio de coordenadas. Las bases $\{X_u, X_v\}$ y $\{\bar{X}_{\bar{u}}, \bar{X}_{\bar{v}}\}$ determinan, en consecuencia, la misma orientación de $T_p S$ sí y solamente si el jacobiano

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(\bar{u}, \bar{v})}$$

del cambio de coordenadas es positivo.

En el presente trabajo las superficies que se tomarán para dar algunos ejemplos serán orientables.

1.4. Aplicación de Gauss

Definición 1.11 (Aplicación de Gauss). *Dada una parametrización $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ de una superficie regular orientable S en un punto $p \in S$, podemos elegir un vector normal unitario en cada punto de $X(U)$ mediante la regla*

$$N(q) = \frac{X_u \wedge X_v}{\|X_u \wedge X_v\|}(q).$$

Así, tenemos una aplicación $N : X(U) \rightarrow \mathbb{R}^3$ que asocia a cada $q \in X(U)$ un vector normal unitario $N(q)$. Generalmente si $V \subset S$ es un conjunto abierto en S y $N : V \rightarrow \mathbb{R}^3$ es una aplicación diferenciable que asocia a cada $q \in V$ un vector normal unitario en q , decimos que N es un campo diferenciable de vectores normales unitarios en V .

Observación

Una vez escogida una orientación de S , la función $N : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ toma sus valores en la esfera unitaria $S^2 \subset \mathbb{R}^3$. Esto es $N : S \rightarrow S^2$, más aún se prueba que la diferencial dN_p toma sus valores en $T_p S$ y es una aplicación lineal autoadjunta.

1.5. Curvatura gaussiana

Definición 1.12. Sea $p \in S$ y sea $dN_p : T_pS \rightarrow T_pS$ la diferencial de la aplicación de Gauss. El determinante de la matriz asociada a la transformación dN_p es la curvatura Gaussiana K de S en p .

Mas adelante con el Teorema Egregium de Gauss se probará que la curvatura Gaussiana K es invariante bajo aplicaciones isométricas.

Definición 1.13. Un punto de una superficie S se denomina

1. *Elíptico* si $\det(dN_p) > 0$.
2. *Hiperbólico* si $\det(dN_p) < 0$.
3. *Parabólico* si $\det(dN_p) = 0$.
4. *Plano* si $dN_p = 0$.

Ahora bien si se observa el primer y segundo numeral de la definición anterior los puntos elípticos y hiperbólicos están definidos a partir de la curvatura Gaussiana y por ende el el capítulo dos se probara que dichas nociones también son invariantes bajo isometrías. Las siguientes superficies regulares definidas en el ejemplo (3) constituyen en su totalidad ejemplos de cada uno de los cuatro tipos de puntos.

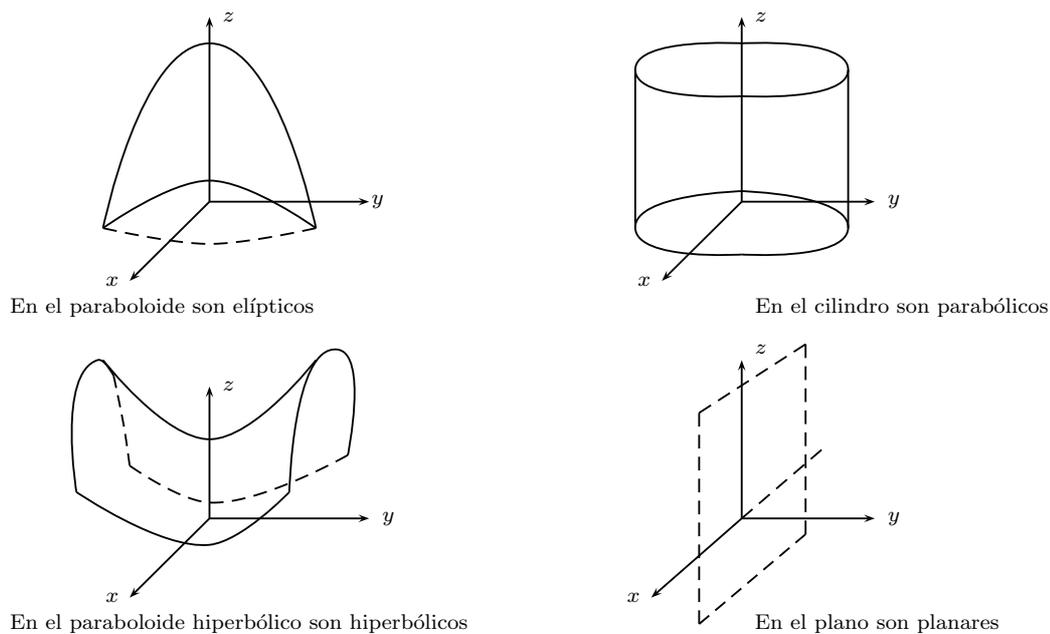


Figura 1.6: Interpretación geométrica de la definición (1.13)

1.6. Segunda forma fundamental

Con base a la aplicación de Gauss se puede definir a continuación una nueva estructura geométrica de una superficie regular.

Definición 1.14 (Segunda forma fundamental). *La forma cuadrática $II_p : T_p S \rightarrow \mathbb{R}$, definida por*

$$II_p(v) = -\langle dN_p(v), v \rangle,$$

es la segunda forma fundamental de S en p .

Procediendo de manera semejante a como lo hicimos en la primera forma fundamental, podemos calcular los coeficientes asociados a la expresión de la segunda forma fundamental en la base $\{X_u, X_v\}$ de $T_p S$. Estos coeficientes, que denotaremos por e , f , g pueden calcularse en términos de las derivadas parciales X_u , X_v , X_{uu} , X_{vv} , X_{uv} , N , N_u , N_v y sus

expresiones son:

$$e = -\langle N_u, X_u \rangle = \langle N, X_{uu} \rangle, \quad (1.5)$$

$$f = -\langle N_v, X_u \rangle = \langle N, X_{uv} \rangle, \quad (1.6)$$

$$= \langle N, X_{vu} \rangle = -\langle N_u, X_v \rangle, \quad (1.7)$$

$$g = -\langle N_v, X_v \rangle = \langle N, X_{vv} \rangle. \quad (1.8)$$

Ahora como $N_u, N_v \in T_p S$ y $\{X_u, X_v\}$ es una base para $T_p S$ entonces

$$N_u = a_{11}X_u + a_{21}X_v, \quad N_v = a_{12}X_u + a_{22}X_v; \quad (1.9)$$

luego aplicando los productos interiores adecuados obtenemos expresiones para a_{11}, a_{12}, a_{21} y a_{22} así:

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{fF - eG}{EG - F^2}, & a_{12} &= \frac{gF - fG}{EG - F^2}, \\ a_{21} &= \frac{eF - fG}{EG - F^2}, & a_{22} &= \frac{fF - gE}{EG - F^2}. \end{aligned}$$

Proposición 1.1. *Sea S una superficie regular. Entonces la curvatura gaussiana K de S esta dada por*

$$K = \det(a_{ij}) = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}. \quad (1.10)$$

Demostración. Ver (Do Carmo [3], pp.160). □

Cabe resaltar que las expresiones anteriores serán de gran ayuda para hallar una estructura explícita de los símbolos de Christoffel herramienta crucial en la demostración del teorema egregium de Gauss.

Capítulo 2

Isometrías y transformaciones conformes

En esta sección llevará acabo un análisis riguroso de la teoría de isomterías y de aplicaciones conformes entre superficies regulares. Mostrando ejemplos que permitan visualizar mejor las proposiciones que aquí se presentan. Uno de los interrogantes que se resolverán en este capítulo, es cuando una aplicación $\varphi : S \rightarrow \bar{S}$ es una isometría.

Definición 2.1. *Un difeomorfismo $\varphi : S \rightarrow \bar{S}$ es una isometría si para todo $p \in S$ y para todo $w_1, w_2 \in T_p(S)$ se tiene que,*

$$\langle w_1, w_2 \rangle_p = \langle d\varphi_p(w_1), d\varphi_p(w_2) \rangle_{\varphi(p)}.$$

Si existe al menos un difeomorfismo φ de S en \bar{S} que satisface lo anterior se dice entonces que las superficies S y \bar{S} son isométricas.

Proposición 2.1. *Un difeomorfismo $\varphi : S \rightarrow \bar{S}$ es una isometría si y sólo si para todo $p \in S$ y para todo $w \in T_p S$ se tiene,*

$$I_p(w) = I_{\varphi(p)}(d\varphi_p(w)). \tag{2.1}$$

Demostración. Supongamos que φ es un difeomorfismo y que además es una aplicación isométrica. Luego, para todo $p \in S$ y cualesquiera que sean $v_1, v_2 \in T_p(S)$, se tiene que

$$\langle d\varphi_p(v_1), d\varphi_p(v_2) \rangle_{\varphi(p)} = \langle v_1, v_2 \rangle_p,$$

Ahora tomando en particular $v_1 = v_2 = w$ se tiene que

$$\langle d\varphi_p(w), d\varphi_p(w) \rangle_{\varphi(p)} = \langle w, w \rangle_p.$$

Luego

$$I_p(w) = I_{\varphi(p)}(d\varphi_p(w)).$$

Recíprocamente, supongamos que la ecuación (2.1) se cumple para todo $p \in S$ y todo $w \in T_p S$ y probemos que φ es una isometría. Como

$$2\langle w_1, w_2 \rangle = \langle w_1 + w_2, w_1 + w_2 \rangle - \langle w_1, w_1 \rangle - \langle w_2, w_2 \rangle,$$

entonces

$$2\langle w_1, w_2 \rangle = I_p(w_1 + w_2) - I_p(w_1) - I_p(w_2).$$

Luego,

$$\begin{aligned} 2\langle w_1, w_2 \rangle &= I_{\varphi(p)}(d\varphi_p(w_1 + w_2)) - I_{\varphi(p)}(d\varphi_p(w_1)) - I_{\varphi(p)}(d\varphi_p(w_2)) \\ &= I_{\varphi(p)}(d\varphi_p(w_1)) + 2\langle d\varphi_p(w_1), d\varphi_p(w_2) \rangle_{\varphi(p)} + I_{\varphi(p)}(d\varphi_p(w_2)) \\ &\quad - I_{\varphi(p)}(d\varphi_p(w_1)) - I_{\varphi(p)}(d\varphi_p(w_2)) \\ &= 2\langle d\varphi_p(w_1), d\varphi_p(w_2) \rangle_{\varphi(p)}. \end{aligned}$$

En conclusión,

$$\langle w_1, w_2 \rangle_p = \langle d\varphi_p(w_1), d\varphi_p(w_2) \rangle_{\varphi(p)}.$$

Por lo tanto, si φ preserva la primera forma fundamental entonces φ es una isometría. \square

Definición 2.2. Una aplicación $\varphi : V \rightarrow \overline{S}$ de un entorno V de $p \in S$ es una isometría local en p si existe un entorno \overline{V} de $\varphi(p) \in \overline{S}$ tal que $\varphi : V \rightarrow \overline{V}$ es una isometría. Si en cada $p \in S$ existe una isometría local en \overline{S} se dice que la superficie S es localmente isométrica a \overline{S} .

Sin embargo puede suceder que dos superficies sean localmente isométricas sin ser globalmente isométricas; un ejemplo que ilustra este hecho es el plano y el cilindro estas superficies son localmente isométricas sin ser globalmente isométricas, una propiedad que ilustra este hecho es que si considera una curva de Jordan en el plano, dicha curva se puede degenerar hasta llegar a un punto sin abandonar el plano, propiedad que no se cumple en el cilindro.

A continuación veremos una proposición que nos permite afirmar cuando dos superficies regulares son localmente isométricas.

Proposición 2.2. *Admitamos la existencia de parametrizaciones $X : U \rightarrow S$ y $\bar{X} : U \rightarrow \bar{S}$ tales que $E = \bar{E}$, $F = \bar{F}$, $G = \bar{G}$ en U , entonces la aplicación*

$$\varphi = \bar{X} \circ X^{-1} : X(U) \rightarrow \bar{S},$$

es una isometría local. Donde E, F, G y $\bar{E}, \bar{F}, \bar{G}$ son los coeficientes de la primera forma fundamental de X y \bar{X} respectivamente. Ver figura (2.1)

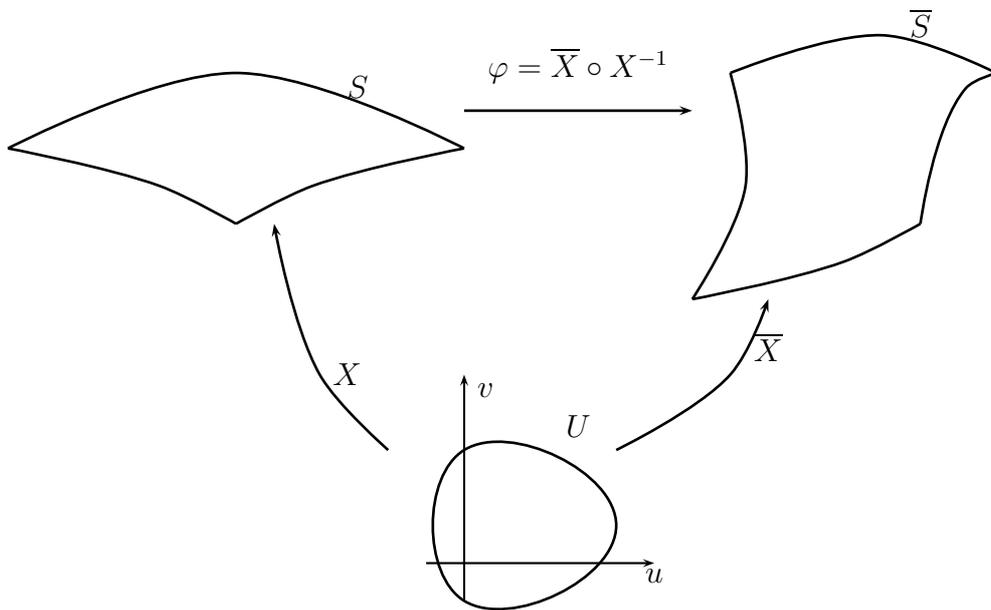


Figura 2.1: Interpretación geométrica de la proposición

Demostración. Sea $p \in X(U)$ y $w \in T_p(S)$. Entonces w es tangente a una curva $\beta(t) = X(\alpha(t))$ en $t = 0$ donde $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ y $\alpha(t) = (u(t), v(t))$ es una curva en U tal que

$\alpha(0) = q$, $\alpha'(0) = v$, $\beta(0) = p$ y $w = \beta'(0) = dX_q(v)$. Por tanto w se puede escribir en $t = 0$ de la siguiente forma:

$$w = X_u u' + X_v v'.$$

Ahora dado que $d\varphi_p(w)$ es tangente en $t = 0$ a $\varphi_p(X(\alpha(t))) = \bar{X}(\alpha(t))$ entonces

$$d\varphi_p(w) = X'_u u' + X'_v v'.$$

Como

$$I_p(w) = E(u')^2 + 2Fu'v' + G(v')^2, \quad d\varphi_p(w) = \bar{E}(u')^2 + 2\bar{F}u'v' + \bar{G}(v')^2 ;$$

dado que por hipótesis $E = \bar{E}$, $F = \bar{F}$, $G = \bar{G}$ entonces

$$I_p(w) = I_{\varphi(p)}(d\varphi_p(w))$$

Por lo tanto en virtud de la ecuación (2.1), φ es una isometría local. □

El recíproco de la anterior proposición es verdadero, se puede consultar su enunciado en (Do Carmo [2], pp.232). Una prueba de este resultado es inmediata teniendo en cuenta la ecuación (2.1).

A continuación se probará que el helicoides y el catenoide son superficies regulares localmente isométricas utilizando un cambio de parámetro en alguna de las parametrizaciones de tal forma que dicho cambio haga que los coeficientes de la primera forma fundamental del catenoide y el helicoides coincidan y así poder obtener el resultado.

Ejemplo 6. *El catenoide y el helicoides son superficies localmente isométricas.*

En efecto sean X y \bar{X} las parametrizaciones del catenoide y el helicoides respectivamente,

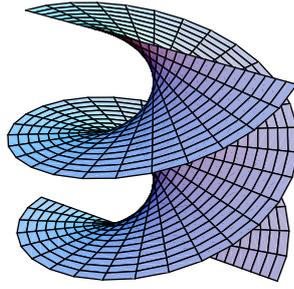


Figura 2.2: La Helicoide

luego

$$X(u, v) = (a \cosh v \cos u, a \cosh v \sin u, av), \quad 0 < u < 2\pi, \quad -\infty < v < +\infty.$$

$$\bar{X}(\bar{u}, \bar{v}) = (\bar{v} \cos \bar{u}, \bar{v} \sin \bar{v}, a\bar{u}), \quad 0 < \bar{u} < 2\pi, \quad -\infty < \bar{v} < +\infty.$$

Por la forma en que están las parametrizaciones no se puede concluir que los coeficientes de la primera forma fundamental de X y \bar{X} sean iguales; por lo tanto se hará un cambio de parámetro que nos ayude a obtener dicho resultado.

Sean

$$\bar{u} = u, \quad 0 < u < 2\pi.$$

$$\bar{v} = a \sinh v, \quad -\infty < v < +\infty.$$

Este cambio tiene sentido dado que \bar{X} es biyectiva y el jacobiano

$$\frac{\partial(\bar{u}, \bar{v})}{\partial(u, v)} = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \cosh v \end{pmatrix} = a \cosh v$$

nunca se anula, así la nueva parametrización del helicoide es

$$\bar{X}(u, v) = (a \sinh v \cos u, a \sinh v \sin u, av), \quad 0 < u < 2\pi, \quad -\infty < v < +\infty.$$

En consecuencia,

$$E = \bar{E} = a^2 \cosh^2 v, \quad F = \bar{F} = 0, \quad G = \bar{G} = a^2 \cosh^2 v;$$

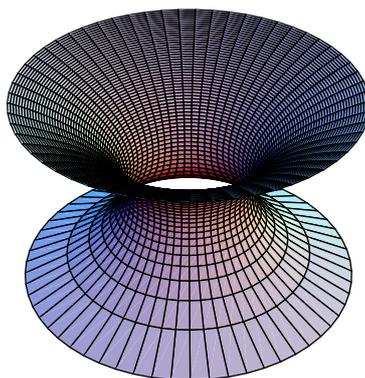


Figura 2.3: El Catenoide

Luego en virtud de la proposición (2.2), el catenoide y el helicoide son localmente isométricos.

En el primer capítulo se dio como ejemplo de superficies parametrizadas a la superficie tangente de una curva α , a continuación se probará que dadas dos superficies tangentes ellas son localmente isométricas.

Ejemplo 7. Sean $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\beta : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ dos curvas parametrizadas regulares siendo el parámetro la longitud de arco. Se admite que las curvaturas k_1 de α y k_2 de β satisfacen $k_1(s) = k_2(s) \neq 0$, $s \in I$. Sean

$$X(s, v) = \alpha(s) + v\alpha'(s),$$

$$\bar{X}(s, v) = \beta(s) + v\beta'(s),$$

sus correspondientes superficies regulares tangentes y sea V un entorno de (s_0, v_0) tal que $X(V) \subset \mathbb{R}^3$, $\bar{X}(V) \subset \mathbb{R}^3$ son superficies regulares. Probemos que $X \circ \bar{X}^{-1} : \bar{X}(V) \rightarrow X(V)$ es una isometría local.

Debemos probar que $E = \bar{E}$, $F = \bar{F}$, $G = \bar{G}$.

Dado que $\alpha(s)$, $\beta(s)$ están parametrizadas por longitud de arco entonces $\|\alpha'(s)\| = 1$, $\|\beta'(s)\| = 1$ así se tiene que $\langle \alpha'(s), \alpha''(s) \rangle = 0$, y $\langle \beta'(s), \beta''(s) \rangle = 0$.

Por otra parte

$$\begin{aligned} X_s &= \alpha'(s) + v\alpha''(s), & X_v &= \alpha'(s), \\ \overline{X}_s &= \beta'(s) + v\beta''(s), & \overline{X}_v &= \beta'(s), \end{aligned}$$

así se tiene que los coeficientes de la primera forma fundamental de X y \overline{X} son

$$\begin{aligned} E &= \langle X_s, X_s \rangle = 1 + \|v\|^2 k_1^2, & F &= \langle X_s, X_v \rangle = 1, & G &= \langle X_v, X_v \rangle = 1, \\ \overline{E} &= \langle \overline{X}_s, \overline{X}_s \rangle = 1 + \|v\|^2 k_2^2, & \overline{F} &= \langle \overline{X}_s, \overline{X}_v \rangle = 1, & \overline{G} &= \langle \overline{X}_v, \overline{X}_v \rangle = 1; \end{aligned}$$

como $k_1 = k_2$ entonces $E = \overline{E}$, $F = \overline{F}$, $G = \overline{G}$, por tan $\varphi : \overline{X}(V) \rightarrow X(V)$ es una isometría. A continuación se estudiarán las aplicaciones conformes dando proposiciones que permitan afirmar cuando dos superficies regulares son localmente conformes, objetivo clave en el desarrollo de este trabajo.

Definición 2.3. *Un difeomorfismo $\varphi : S \rightarrow \overline{S}$ se denomina una aplicación conforme si para todo $p \in S$ y cualesquiera que sean $v_1, v_2 \in T_p(S)$, se tiene que*

$$\langle d\varphi_p(v_1), d\varphi_p(v_2) \rangle_{\varphi(p)} = \lambda^2(p) \langle v_1, v_2 \rangle_p,$$

donde λ^2 es una función diferenciable no nula sobre S . En este caso diremos que las superficies S y \overline{S} son conformes.

Es de notar que la definición anterior desempeñará un papel muy importante dado que en el capítulo tres se hará uso de ella para probar que la aplicación $F_g : S^2 \rightarrow S^2$ es una aplicación conforme.

De la definición anterior se deduce que si φ es una isometría entonces φ es una aplicación conforme dado que en este caso $\lambda \equiv 1$.

Definición 2.4. *Una aplicación $\varphi : V \rightarrow \overline{S}$ de un entorno V de $p \in S$ es una aplicación conforme local en p si existe un entorno \overline{V} de $\varphi(p) \in \overline{S}$ tal que $\varphi : V \rightarrow \overline{V}$ es una aplicación conforme. Si en cada $p \in S$ existe una aplicación conforme local en \overline{S} se dice que la superficie S es localmente conforme a \overline{S} .*

Proposición 2.3. Sea φ un difeomorfismo, φ es una aplicación conforme si y sólo si para todo $p \in S$ y todo $w \in T_p S$ se tiene,

$$\lambda^2(p)I_p(w) = I_{\varphi(p)}(d\varphi_p(w)). \quad (2.2)$$

Demostración. Supongamos que φ es un difeomorfismo y que además es una aplicación conforme. Luego para todo $p \in S$ y cualesquiera que sean $v_1, v_2 \in T_p(S)$, se tiene que

$$\langle d\varphi_p(v_1), d\varphi_p(v_2) \rangle_{\varphi(p)} = \lambda^2(p) \langle v_1, v_2 \rangle_p.$$

Ahora tomando en particular $v_1 = v_2 = w$ se tiene que

$$\lambda^2(p)I_p(w) = I_{\varphi(p)}(d\varphi_p(w)).$$

Veamos que si (2.2) se cumple, φ es localmente conforme. Dado que

$$2\langle w_1, w_2 \rangle = \langle w_1 + w_2, w_1 + w_2 \rangle - \langle w_1, w_1 \rangle - \langle w_2, w_2 \rangle,$$

entonces

$$\begin{aligned} 2\langle d\varphi_p(v_1), d\varphi_p(v_2) \rangle_{\varphi(p)} &= \langle d\varphi_p(v_1 + v_2), d\varphi_p(v_1 + v_2) \rangle - \langle d\varphi_p(v_1), d\varphi_p(v_1) \rangle \\ &\quad - \langle d\varphi_p(v_2), d\varphi_p(v_2) \rangle \\ &= \lambda^2(p) \left(\langle v_1 + v_2, v_1 + v_2 \rangle - \langle v_1, v_1 \rangle - \langle v_2, v_2 \rangle \right) \\ &= 2\lambda^2(p) \langle d\varphi_p(v_1), d\varphi_p(v_2) \rangle \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\langle d\varphi_p(v_1), d\varphi_p(v_2) \rangle_{\varphi(p)} = \lambda^2(p) \langle v_1, v_2 \rangle_p.$$

□

Proposición 2.4. Sean $X : U \rightarrow S$ y $\bar{X} : U \rightarrow \bar{S}$ dos parametrizaciones tales que $E = \lambda^2 \bar{E}$, $F = \lambda^2 \bar{F}$, $G = \lambda^2 \bar{G}$ en U , donde λ^2 es una función diferenciable que nunca se anula en U . Entonces la aplicación $\varphi = \bar{X} \circ X^{-1} : X(U) \rightarrow \bar{S}$ es una aplicación conforme local.

Demostración. La demostración es inmediata utilizando la proposición anterior. \square

Ejemplo 8. Probemos que $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ y el plano xy son localmente conformes.

Por el ejemplo (1) podemos considerar la parametrización de la esfera dada por

$$X(u, v) = \pi^{-1}(u, v) = \left(\frac{2u}{u^2 + v^2 + 1}, \frac{2v}{u^2 + v^2 + 1}, \frac{u^2 + v^2 - 1}{u^2 + v^2 + 1} \right).$$

Ahora dado que la parametrización del plano es

$$\bar{X}(u, v) = (u, v, 0), \quad u, v \in \mathbb{R}$$

probemos que $E = \lambda^2 \bar{E}$, $F = \lambda^2 \bar{F}$, $G = \lambda^2 \bar{G}$ donde E , F , G y \bar{E} , \bar{F} , \bar{G} son los coeficientes de la primera forma fundamental de X y \bar{X} respectivamente y λ^2 es una función diferenciable no nula en \mathbb{R}^2 .

entonces es claro que

$$\bar{E} = \langle \bar{X}_u, \bar{X}_u \rangle = 1, \quad F = \langle \bar{X}_u, \bar{X}_v \rangle = 0, \quad \langle \bar{X}_v, \bar{X}_v \rangle = 1.$$

Por otra parte

$$X_u = \left(\frac{2(1 + v^2 - u^2)}{(u^2 + v^2 + 1)^2}, \frac{-4uv}{(u^2 + v^2 + 1)^2}, \frac{4u}{(u^2 + v^2 + 1)^2} \right),$$

$$X_v = \left(\frac{-4uv}{(u^2 + v^2 + 1)^2}, \frac{2(1 - v^2 + u^2)}{(u^2 + v^2 + 1)^2}, \frac{4v}{(u^2 + v^2 + 1)^2} \right).$$

Luego

$$E = \langle X_u, X_u \rangle = \left(\frac{2}{u^2 + v^2 + 1} \right)^2 = \lambda^2(p).$$

En efecto se tiene que

$$E = \lambda^2(p) \bar{E}.$$

Similarmente se prueba que

$$\langle X_v, X_v \rangle = G = \lambda^2(p) \bar{G}.$$

Note que

$$F = \langle X_u, X_v \rangle = 0$$

Luego en virtud de la proposición (2.4), S^2 es localmente conforme al plano xy .

Más adelante con la ayuda del Teorema Egregium de Gauss se podrá establecer que no existe isometría alguna entre la esfera y el plano.

Definición 2.5. Diremos que una aplicación diferenciable $\varphi : S \rightarrow \bar{S}$ preserva ángulos si para todo $p \in \bar{S}$ y para todo $v_1, v_2 \in T_p S$ se tiene que:

$$\cos(v_1, v_2) = \cos(d\varphi_p(v_1), d\varphi_p(v_2)).$$

Donde

$$\cos(v_1, v_2) = \frac{\langle v_1, v_2 \rangle}{\|v_1\| \|v_2\|}, \quad y \quad \cos(d\varphi_p(v_1), d\varphi_p(v_2)) = \frac{\langle d\varphi_p(v_1), d\varphi_p(v_2) \rangle}{\|d\varphi_p(v_1)\| \|d\varphi_p(v_2)\|}.$$

Proposición 2.5. $\varphi : S \rightarrow \bar{S}$ es una aplicación conforme local si y sólo si φ preserva ángulos.

Demostración. Supongamos que $\varphi : S \rightarrow \bar{S}$ es una aplicación conforme local y probemos que φ preserva ángulos.

En efecto, sean $\alpha : I \rightarrow S$ y $\beta : J \rightarrow S$ curvas en S que se cortan en $p \in S$; esto es existen $t_0 \in I, t_1 \in J$ tal que $\alpha(t_0) = \beta(t_1) = p$, y sea V un entorno de p . Como $\varphi : S \rightarrow \bar{S}$ es una aplicación conforme local. Entonces existe un entorno \bar{V} de $\varphi(p) \in \bar{S}$ tal que, $\varphi : V \rightarrow \bar{V}$ es una aplicación conforme local. El ángulo que se forma en p esta dado por

$$\cos \theta = \frac{\langle \alpha', \beta' \rangle}{\|\alpha'\| \|\beta'\|}, \quad 0 < \theta < \pi.$$

Ahora llevando acabo la composición de φ con α y β tenemos que:

$\varphi \circ \alpha : I \rightarrow \bar{S}$, $\varphi \circ \beta : J \rightarrow \bar{S}$, son curvas que están sobre \bar{S} y se cortan en $\varphi(p) \in \bar{S}$.

Como el ángulo en $\varphi(p)$ viene dado por,

$$\cos \omega = \frac{\langle d\varphi_{t_0}(\alpha'), d\varphi_{t_0}(\beta') \rangle}{\|d\varphi_{t_0}(\alpha')\| \|d\varphi_{t_0}(\beta')\|}, \quad 0 < \omega < \pi.$$

Mostremos que el ángulo formado en p coincide con el ángulo formado en $\varphi(p)$ en efecto;

$$\begin{aligned}\cos \omega &= \frac{\langle d\varphi_{t_0}(\alpha'), d\varphi_{t_0}(\beta') \rangle}{\|d\varphi_{t_0}(\alpha')\| \|d\varphi_{t_0}(\beta')\|} = \frac{\lambda^2 \langle \alpha', \beta' \rangle}{\sqrt{(d\varphi(\alpha'))^2} \sqrt{(d\varphi(\beta'))^2}} \\ &= \frac{\lambda^2 \langle \alpha', \beta' \rangle}{\sqrt{\langle d\varphi(\alpha'), d\varphi(\alpha') \rangle} \sqrt{\langle d\varphi(\beta'), d\varphi(\beta') \rangle}} \\ &= \frac{\lambda^2 \langle \alpha', \beta' \rangle}{|\lambda| \|\alpha'\| |\lambda| \|\beta'\|} = \frac{\langle \alpha', \beta' \rangle}{\|\alpha'\| \|\beta'\|} = \cos \theta.\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\cos \theta = \cos \omega.$$

Ahora supongamos que la aplicación $\varphi : S \rightarrow \bar{S}$ preserva ángulos y probemos que φ es una aplicación conforme local.

Sean X una parametrización de S , $p \in S$ y v, w dos direcciones ortogonales, la primera de ellas es cualquier vector v no nulo y la segunda dirección w se obtiene de:

$$Ev_1w_1 + Fv_1w_2 + Fv_2w_1 + Gv_2w_2 = 0. \quad (2.3)$$

Cabe notar que la escogencia de esta dirección ortogonal se puede hacer gracias al proceso de ortogonalización de Gram-Smith. Probemos la ecuación (2.3).

Sean $\alpha : I \rightarrow S$ y $\beta : J \rightarrow S$ dos curvas en S tales que:

$$\alpha(0) = \beta(0) = p \quad \alpha'(0) = v \quad \beta'(0) = w.$$

Luego el ángulo formado por α y β en p está dado por:

$$\cos \theta = \frac{\langle \alpha'(0), \beta'(0) \rangle}{\|\alpha'(0)\| \|\beta'(0)\|}, \quad 0 < \theta < \pi.$$

Como $\alpha'(0)$ y $\beta'(0)$ son ortogonales entonces:

$$\begin{aligned}0 &= \langle v_1X_u + v_2X_v, w_1X_u + w_2X_v \rangle \\ &= Ev_1w_1 + Fv_1w_2 + Fv_2w_1 + Gv_2w_2 \\ &= (Ew_1 + Fw_2)v_1 + (Fw_1 + Gw_2)v_2;\end{aligned}$$

y como φ preserva ángulos,

$$(\overline{E}w_1 + \overline{F}w_2)v_1 + (\overline{F}w_1 + \overline{G}w_2)v_2 = 0. \quad (2.4)$$

Luego:

1. Si $F \neq 0$. Elijamos $v_1 = 0$, $v_2 = 1$, luego de las ecuaciones (2.3) y (2.4) se tiene:

$$\begin{cases} Fw_1 + Gw_2 = 0 \\ \overline{F}w_1 + \overline{G}w_2 = 0, \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} F & G \\ \overline{F} & \overline{G} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = 0;$$

luego el sistema tiene soluciones no triviales si y sólo si

$$\det \begin{pmatrix} F & G \\ \overline{F} & \overline{G} \end{pmatrix} = 0,$$

luego $F\overline{G} = G\overline{F}$. Ahora si llamamos a

$$\lambda^2 = \frac{\overline{G}}{G} = \frac{\overline{F}}{F}.$$

En consecuencia,

$$\overline{F} = \lambda^2 F, \quad \overline{G} = \lambda^2 G \quad .$$

Cabe notar que λ^2 así definida es diferenciable pues X es diferenciable.

Si ahora tomamos $v_1 = 1$, $v_2 = 0$ se concluye que el sistema obtenido mediante esta elección tiene soluciones no triviales si y sólo si

$$\det \begin{pmatrix} E & F \\ \overline{E} & \overline{F} \end{pmatrix} = 0;$$

en conclusión

$$\lambda^2 = \frac{\overline{F}}{F} = \frac{\overline{E}}{E}$$

por lo tanto,

$$\overline{E} = \lambda^2 E, \quad \overline{F} = \lambda^2 F.$$

2. Si $F = 0$ entonces $\overline{F} = 0$. En este caso las direcciones $v = v_1X_u + v_2X_v$ y $w = w_1X_u + w_2X_v$, donde;

$$v_1 = v_2 = 1, \quad w_1 = G, \quad w_2 = -E,$$

son ortogonales, pues $\langle v, w \rangle = 0$; Así,

$$\begin{cases} Ew_1 + Gw_2 = 0 \\ \overline{E}w_1 + \overline{G}w_2 = 0, \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} E & G \\ \overline{E} & \overline{G} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

el sistema tiene soluciones no triviales si y sólo si

$$\det \begin{pmatrix} E & G \\ \overline{E} & \overline{G} \end{pmatrix} = 0,$$

por lo tanto

$$\lambda^2 = \frac{G}{\overline{G}} = \frac{E}{\overline{E}}.$$

En efecto se tiene que φ es localmente conforme. □

Proposición 2.6. Sea $\varphi : S \rightarrow \overline{S}$ un difeomorfismo entre superficies.

φ es una isometría si y sólo si la longitud de cualquier curva parametrizada en S es igual a la longitud de arco de la curva de la imagen mediante φ .

Demostración. Sea $\alpha : I \rightarrow S$ una curva parametrizada en S , con $\alpha(t_0) = p \in S$ y $\alpha'(t_0) = w$. Luego $\beta = \varphi \circ \alpha$ es una curva parametrizada por φ en \overline{S} , donde $\beta(t_0) = \varphi(p)$ y $\beta'(t_0) = d\varphi_p(\alpha'(t_0))$.

Supongamos que $\varphi : S \rightarrow \overline{S}$ es una isometría. Probemos que

$$l_{\alpha(t)} = \int_0^t \|\alpha'(\tau)\| d\tau = \int_0^t \|\beta'(\tau)\| d\tau = l_{\beta(t)},$$

donde $l_{\alpha(t)}$, $l_{\beta(t)}$ son las longitudes de las curvas α y β respectivamente. Como

$$l_{\beta(t)} = \int_0^t \|\beta'(\tau)\| d\tau = \int_0^t \|(\varphi \circ \alpha)'(\tau)\| d\tau = \|(\varphi \circ \alpha)'(t)\|$$

luego teniendo en cuenta que φ es una isometría se obtiene

$$\begin{aligned} l_{\beta(t)}^2 &= \|(\varphi \circ \alpha)'(t)\|^2 = \langle (\varphi \circ \alpha)'(t), (\varphi \circ \alpha)'(t) \rangle = \langle d\varphi_{\alpha(t)}(\alpha'(t)), d\varphi_{\alpha(t)}(\alpha'(t)) \rangle \\ &= \langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle = \|\alpha'(t)\|^2 = \left(\int_0^t \|\alpha'(\tau)\| d\tau \right)^2 = l_{\alpha(t)}^2. \end{aligned}$$

En consecuencia la longitud de arco de cualquier curva parametrizada en S es igual a la longitud de arco de la curva imagen mediante φ .

Recíprocamente sea φ un difeomorfismo y supongamos que la longitud de arco de cualquier curva α parametrizada en S es igual a la longitud de arco mediante φ esto es:

$$\int_0^t \|\alpha'(\tau)\| d\tau = \int_0^t \|(\varphi \circ \alpha)'(\tau)\| d\tau \text{ para todo } t \in I.$$

Luego, como φ es un difeomorfismo y α es regular entonces, por el teorema fundamental del cálculo se tiene:

$$\|\alpha'(t)\| = \|d\varphi_{\alpha(t)}(\alpha'(t))\|, \text{ para todo } t \in I.$$

En particular la igualdad anterior se satisface para $t = t_0$, luego $\alpha'(t_0) \in T_p S$ y $d\varphi_p(\alpha'(t_0)) \in T_{\varphi(p)} \overline{S}$, en consecuencia

$$I_p(\alpha'(t_0)) = \|\alpha'(t_0)\|^2 = \|d\varphi_p(\alpha'(t_0))\|^2 = I_{\varphi(p)}\left(d\varphi_p(\alpha'(t_0))\right).$$

Lo anterior se puede hacer para todo $p \in S$ y todo $w \in T_p S$

Por lo tanto,

$$I_{\alpha(t)}(\alpha'(t)) = I_{\varphi(\alpha(t))}\left(d\varphi_{\alpha(t)}(\alpha'(t))\right),$$

y según la proposición (2.1) se concluye que φ es una isometría. □

En el primer capítulo se probó que las superficies de revolución son regulares. A continuación se probará que las rotaciones alrededor de su eje son isometrías.

Ejemplo 9. Sea S una superficie de revolución. Probemos que las rotaciones alrededor de su eje son isometrías de S .

Sea S una superficie de revolución alrededor del eje z parametrizada por

$$X(u, v) = (f(v) \cos u, f(v) \operatorname{sen} u, g(v)), \text{ donde}$$

$$U = \{(u, v) \mid 0 < u < 2\pi, a < v < b\} \text{ y } f(v) > 0.$$

Sea $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ una transformación ortogonal de tal forma que la matriz asociada a la transformación esta dada por,

$$A_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\operatorname{sen} \theta & 0 \\ \operatorname{sen} \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad 0 < \theta < 2\pi.$$

Así,

$$A_\theta \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \cos \theta - y \operatorname{sen} \theta \\ x \operatorname{sen} \theta + y \cos \theta \\ z \end{pmatrix}$$

Cabe notar que A_θ es ortogonal pues, $A_\theta A_\theta^T = I$.

Definamos $\varphi : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ de tal forma que $\varphi = A_\theta|_S$.

Mostremos que φ esta definida de S en S , es decir $A_\theta|_S \subset S$. Para ello consideremos $(f(v_1) \cos u_1, f(v_1) \operatorname{sen} u_1, g(v_1)) \in S$, luego;

$$A_\theta \begin{pmatrix} f(v_1) \cos u_1 \\ f(v_1) \operatorname{sen} u_1 \\ g(v_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(v_1) \cos(\bar{u}) \\ f(v_1) \operatorname{sen}(\bar{u}) \\ g(v_1) \end{pmatrix}, \text{ donde } \bar{u} = u_1 + \theta \text{ y } 0 < \bar{u} < 2\pi$$

Es decir $\varphi : S \rightarrow S$.

Probemos que para todo $v_1, v_2 \in T_p S$ se cumple que,

$$\langle w_1, w_2 \rangle_p = \langle d\varphi_p(w_1), d\varphi_p(w_2) \rangle_{\varphi(p)}.$$

Para ello calculemos $d\varphi_p(w_1)$, $d\varphi_p(w_2)$; en efecto dado que,

$$d\varphi_p(w_1) = \frac{d}{dt}\varphi \circ \gamma(t)|_{t=0},$$

donde $\gamma : I \rightarrow S$ con $\gamma(0) = p$ y $\gamma'(0) = w_1$ entonces $w_1 = X_u u' + X_v v'$.

Así,

$$\begin{aligned} d\varphi_p(w_1) &= \frac{d}{dt}A_\theta|_S \circ X(u(t), v(t))|_{t=0} \\ &= A_\theta(X_u u' + X_v v') \\ &= A_\theta w_1. \end{aligned}$$

Análogamente se prueba que $d\varphi_p(w_2) = A_\theta w_2$.

En consecuencia

$$\langle d\varphi_p(w_1), d\varphi_p(w_2) \rangle_{\varphi(p)} = \langle A_\theta w_1, A_\theta w_2 \rangle_p = \langle A_\theta A_\theta^T w_1, w_2 \rangle_p = \langle w_1, w_2 \rangle.$$

Es de notar que los cálculos anteriores se logran gracias a que $AA^T = I$.

Así se puede concluir que las rotaciones alrededor de su eje de una superficie de revolución son isometrías.

A continuación se estudiarán las ecuaciones de compatibilidad con el fin de hallar una forma explícita de los símbolos de Christoffel; elementos que utilizaremos con gran frecuencia de ahora en adelante.

2.1. Ecuaciones de compatibilidad

Sea S una superficie regular orientable y sea $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ una parametrización en la orientación de S . En cada punto de $X(U)$ asignamos un triedro $\{X_u, X_v, N\}$ análogo al triedro de Frenet. Al expresar las derivadas de los vectores X_u , X_v y N con respecto a la base $\{X_u, X_v, N\}$ obtenemos las siguientes ecuaciones:

$$\left\{ \begin{array}{l} X_{uu} = \Gamma_{11}^1 X_u + \Gamma_{11}^2 X_v + eN \\ X_{uv} = \Gamma_{12}^1 X_u + \Gamma_{12}^2 X_v + fN \\ X_{vu} = \Gamma_{21}^1 X_u + \Gamma_{21}^2 X_v + fN \\ X_{vv} = \Gamma_{22}^1 X_u + \Gamma_{22}^2 X_v + gN \\ N_u = a_{11} X_u + a_{21} X_v \\ N_v = a_{12} X_u + a_{22} X_v, \end{array} \right. \quad (2.5)$$

donde los a_{ij} ya fueron calculados anteriormente y están definidos en términos de los coeficientes e, f y g (ver capítulo 1, pp. 19). Cabe notar que a Γ_{ij}^k , $i, j, k = 1, 2$ se les conoce como los símbolos de Christoffel de S en la parametrización X . Como X es diferenciable entonces $X_{uv} = X_{vu}$. Luego $\Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1$, $\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2$.

Es de anotar que la afirmación anterior se obtiene por simetría en los índices inferiores.

Ahora tomando el producto interior en las dos primeras ecuaciones por X_u y X_v del sistema anterior se obtiene:

$$\begin{aligned} \langle X_{uu}, X_u \rangle &= \Gamma_{11}^1 \langle X_u, X_u \rangle + \Gamma_{11}^2 \langle X_v, X_u \rangle + e \langle N, X_u \rangle \\ &= \Gamma_{11}^1 E + \Gamma_{11}^2 F, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle X_{uu}, X_v \rangle &= \Gamma_{11}^1 \langle X_u, X_v \rangle + \Gamma_{11}^2 \langle X_v, X_v \rangle + e \langle N, X_v \rangle \\ &= \Gamma_{11}^1 F + \Gamma_{11}^2 G; \end{aligned}$$

por otro lado

$$\langle X_{uu}, X_u \rangle = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial u} \|X_u\|^2 = \frac{1}{2} E_u,$$

$$\langle X_{uu}, X_v \rangle = F_u - \frac{1}{2} E_v.$$

Así un primer sistema viene dado por:

$$\begin{cases} \Gamma_{11}^1 E + \Gamma_{11}^2 F &= \frac{1}{2} E_u = \langle X_{uu}, X_u \rangle \\ \Gamma_{11}^1 F + \Gamma_{11}^2 G &= F_u - \frac{1}{2} E_v = \langle X_{uu}, X_v \rangle. \end{cases}$$

Con cálculos análogos obtenemos:

$$\begin{cases} \Gamma_{12}^1 E + \Gamma_{12}^2 F &= \frac{1}{2} E_v = \langle X_{uv}, X_u \rangle \\ \Gamma_{12}^1 F + \Gamma_{12}^2 G &= \frac{1}{2} G_u = \langle X_{uv}, X_v \rangle, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Gamma_{22}^1 E + \Gamma_{22}^2 F &= F_v - \frac{1}{2} G_u = \langle X_{vv}, X_u \rangle \\ \Gamma_{22}^1 F + \Gamma_{22}^2 G &= \frac{1}{2} G_v = \langle X_{vv}, X_v \rangle. \end{cases}$$

En cada uno de los sistemas anteriores el determinante es $EG - F^2 \neq 0$. Esto quiere decir que cada uno de los sistemas se puede resolver en términos de los coeficientes de la primera forma fundamental y sus derivadas.

Tendremos a continuación que *Toda propiedad geométrica que sea expresada en términos de los símbolos de Christoffel es invariante bajo isometrías*. Resolviendo los sistemas anteriores obtenemos

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= \frac{E_u G - 2FF_u + FE_v}{2(EG - F^2)}, & \Gamma_{11}^2 &= \frac{2EF_u - EE_v - FE_u}{2(EG - F^2)}, \\ \Gamma_{12}^1 &= \frac{GE_v - FG_u}{2(EG - F^2)}, & \Gamma_{12}^2 &= \frac{EG_u - FE_v}{2(EG - F^2)}, \\ \Gamma_{22}^1 &= \frac{2GF_v - GG_u - FG_v}{2(EG - F^2)}, & \Gamma_{22}^2 &= \frac{EG_v - 2FF_v + FG_u}{2(EG - F^2)}. \end{aligned}$$

Observación

Los símbolos de Christoffel Γ_{ij}^k solo dependen de E , F y G y de sus derivadas parciales por lo tanto son invariantes bajo isometrías. (Ver proposición (2.2)).

Ahora miremos la relación que existe entre los símbolos de Christoffel al considerar las siguientes expresiones, las cuales se obtienen a partir de la diferenciabilidad de X

$$(X_{uu})_v = (X_{uv})_u, \quad (X_{vv})_u = (X_{vu})_v, \quad N_{uv} = N_{vu}.$$

Dado que

$$X_{uu} = \Gamma_{11}^1 X_u + \Gamma_{11}^2 X_v + eN$$

luego derivando con respecto a v se tiene:

$$\begin{aligned} X_{uvv} &= (\Gamma_{11}^1)_v X_u + \Gamma_{11}^1 X_{uv} + (\Gamma_{11}^2)_v X_v + \Gamma_{11}^2 X_{vv} + e_v N + eN_v \\ &= (\Gamma_{11}^1)_v X_u + (\Gamma_{11}^2)_v X_v + e_v N + \Gamma_{11}^1 \left(\Gamma_{12}^1 X_u + \Gamma_{12}^2 X_v + fN \right) \\ &\quad + \Gamma_{11}^2 \left(\Gamma_{22}^1 X_u + \Gamma_{22}^2 X_v + gN \right) + e \left(a_{12} X_u + a_{22} X_v \right) \\ &= \left((\Gamma_{11}^1)_v + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^1 + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^1 + ea_{12} \right) X_u + \left((\Gamma_{11}^2)_v + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 + ea_{22} \right) X_v \\ &\quad + \left(e_v + \Gamma_{11}^1 f + \Gamma_{11}^2 g \right) N. \end{aligned}$$

Análogamente se obtiene

$$\begin{aligned} X_{uvu} &= (\Gamma_{12}^1)_u X_u + \Gamma_{12}^1 X_{uu} + (\Gamma_{12}^2)_u X_v + \Gamma_{12}^2 X_{vu} + f_u N + fN_u \\ &= (\Gamma_{12}^1)_u X_u + (\Gamma_{12}^2)_u X_v + f_u N + \Gamma_{12}^1 \left(\Gamma_{11}^1 X_u + \Gamma_{11}^2 X_v + eN \right) \\ &\quad + \Gamma_{12}^2 \left(\Gamma_{21}^1 X_u + \Gamma_{21}^2 X_v + fN \right) + f \left(a_{11} X_u + a_{21} X_v \right) \\ &= \left((\Gamma_{12}^1)_u + \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{21}^1 + fa_{11} \right) X_u + \left((\Gamma_{12}^2)_u + \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{21}^2 + fa_{21} \right) X_v \\ &\quad + \left(f_u + \Gamma_{12}^1 e + \Gamma_{12}^2 f \right) N. \end{aligned}$$

Como $X_{uvv} = X_{uvu}$, X_u , X_v y N son linealmente independientes entonces:

$$(\Gamma_{11}^2)_v + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 + ea_{22} = (\Gamma_{12}^2)_u + \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{21}^2 + fa_{21},$$

$$\begin{aligned} (\Gamma_{11}^2)_v - (\Gamma_{12}^2)_u + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 - \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 - \Gamma_{12}^2 \Gamma_{21}^2 &= fa_{21} - ea_{22} \\ &= f \frac{eF - fE}{EG - F^2} - e \frac{fF - gE}{EG - F^2} \\ &= E \left(\frac{eg - f^2}{EG - F^2} \right) \\ &= EK. \end{aligned}$$

Por consiguiente,

$$(\Gamma_{11}^2)_v - (\Gamma_{12}^2)_u + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 - \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 - \Gamma_{11}^2 \Gamma_{21}^2 = EK. \quad (2.6)$$

Similarmente se encuentran expresiones para FK y GK dadas de la siguiente forma:

$$(\Gamma_{12}^1)_u - (\Gamma_{11}^1)_v + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^1 - \Gamma_{12}^2 \Gamma_{22}^1 = FK, \quad (2.7)$$

$$(\Gamma_{22}^1)_u - (\Gamma_{21}^1)_v + \Gamma_{22}^1 \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{22}^2 \Gamma_{21}^1 - \Gamma_{21}^1 \Gamma_{12}^1 - \Gamma_{21}^2 \Gamma_{22}^1 = GK. \quad (2.8)$$

2.2. Teorema egregium de Gauss

Las ecuaciones para la curvatura Gaussiana en términos de los símbolos de Christoffel y de sus derivadas parciales halladas anteriormente permiten probar de manera eficaz el siguiente teorema.

Teorema 2.1 (Egregium de Gauss). *La curvatura de Gauss K de una superficie regular S es invariante bajo isometrías locales.*

Demostración. Sea $X : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow S$ una parametrización en $p \in S$ y $\varphi : V \subset S \longrightarrow S$ una isometría local en p donde $V \subset X(U)$ es un entorno de p . Entonces $\phi = \varphi \circ X$ es una parametrización de S en $\varphi(p)$; como φ es una isometría entonces los coeficientes de la primera forma fundamental de X y ϕ , coinciden en q y $\varphi(q)$, de esta forma también coinciden los símbolos de Christoffel correspondientes. En virtud de la ecuaciones (2.6), (2.7) y (2.8), K se puede calcular en un punto en función de los símbolos de Christoffel de la parametrización en dicho punto. Como E , F y G no pueden anularse simultáneamente y los símbolos de Christoffel dependen de E , F y G y de sus derivadas parciales entonces dichos símbolos tampoco pueden anularse simultáneamente en dicho punto; por lo tanto

$$K(q) = K(\varphi(q)) \quad \text{para todo } q \in V.$$

□

La proposición anterior se puede generalizar para cualquier par de superficies regulares de la siguiente forma:

Teorema 2.2. Sean S, \bar{S} dos superficies regulares y $\phi : S \rightarrow \bar{S}$ una isometría local. Denotemos por K y \bar{K} las curvaturas de Gauss de S y \bar{S} . Entonces

$$K = \phi(\bar{K}).$$

Demostración. La demostración es análoga a la anterior y se puede consultar en (Cordero [2]). □

Unas de las consecuencias más importantes de este teorema son:

Corolario 2.1. Una isometría $\varphi : S \rightarrow \bar{S}$ transforma puntos elípticos en puntos elípticos y puntos hiperbólicos en puntos hiperbólicos.

Demostración. La prueba es inmediata dado que las definiciones de punto elíptico y punto hiperbólico sólo dependen de la curvatura de Gauss K . Ver definición (1.13) □

Corolario 2.2. Las nociones de punto planar y punto parabólico no son invariantes bajo isometrías debido a que las definiciones dependen de la primera y segunda forma fundamental de la superficie.

Un ejemplo que ilustra este hecho es el siguiente:

Ejemplo 10. Sean:

$$S = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / |x| < \frac{\pi}{2}, \quad y = 0 \right\},$$

$$\bar{S} = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 = 1, \quad y > 0 \right\},$$

y $\varphi : S \rightarrow \bar{S}$ definida por:

$$\varphi(x, 0, z) = (\sin x, \cos x, z).$$

Probemos que φ es una isometría global y que además transforma puntos planares en puntos parabólicos.

Tomando el abierto $U = \{(x, z) \in \mathbb{R}^2 / |x| < \frac{\pi}{2}\}$, una parametrización de S es:

$$X(u, v) = (u, 0, v),$$

y una parametrización global de \overline{S} es

$$\overline{X}(u, v) = (\varphi \circ X)(u, v) = (\text{sen } u, \cos u, v).$$

Entonces,

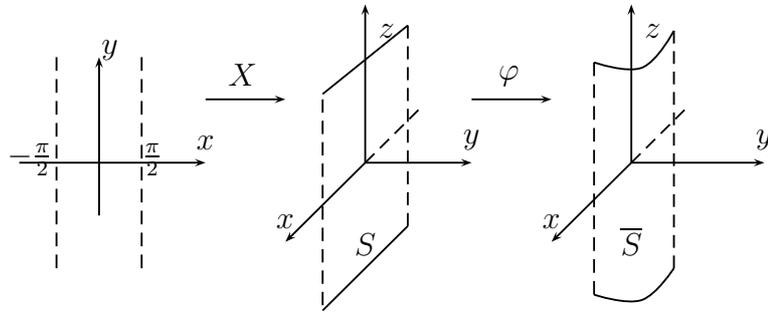


Figura 2.4: interpretación geométrica del ejemplo (10).

$$X_u = (1, 0, 0)$$

$$X_v = (0, 0, 1)$$

$$\overline{X}_u = (\cos u, -\text{sen } u, 0)$$

$$\overline{X}_v = (0, 0, 1)$$

luego,

$$E = 1,$$

$$F = 0,$$

$$G = 1,$$

$$\overline{E} = 1,$$

$$\overline{F} = 0,$$

$$\overline{G} = 1.$$

Por lo tanto φ es una isometría global. Resta probar que φ transforma puntos planares en puntos parabólicos. Sea $p \in S$, donde $p = X(q)$ para algún $q = (q_1, q_2) \in U$. Como S

es un plano entonces p es planar.

Probemos que $\varphi(p)$ es un punto parabólico; se debe probar $\det(d\bar{N}_{\varphi(p)}) = 0$.

Dado que

$$\bar{N} = \frac{\bar{X}_u \wedge \bar{X}_v}{\|\bar{X}_u \wedge \bar{X}_v\|} = (-\operatorname{sen} u, -\operatorname{cos} u, 0)$$

entonces $e = -\langle \bar{N}_u, \bar{X}_u \rangle = 1$, $f = \langle \bar{N}_u, \bar{X}_v \rangle = 0$ y $g = \langle \bar{N}_v, \bar{X}_v \rangle = 0$; por lo tanto

$$\det(d\bar{N}_{\varphi(p)}) = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0.$$

entonces $\det(d\bar{N}_{\varphi(p)}) = 0$. Luego $\varphi(p)$ es parabólico, y en consecuencia φ transforma puntos planares en puntos parabólicos.

Observación

De lo anterior podemos concluir que no existe una isometría entre la esfera y el plano.

2.3. Derivada covariante

Para finalizar lo relacionado a isometrías se dará una caracterización de cuándo una aplicación $\varphi : S^n \rightarrow S^n$ es una isometría. Para ello es necesario introducir el concepto de *derivada covariante* y algunas proposiciones que se desarrollarán a continuación.

Definición 2.6. *Un campo vectorial en un conjunto abierto $U \subset \mathbb{R}^2$ es una aplicación $w : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ que asigna a cada $q \in U$ un vector $w(q)$. Se dice que el campo vectorial w es diferenciable si escribiendo $q = (x, y)$ y $w(q) = (a(x, y), b(x, y))$ las funciones a y b son funciones diferenciables en U .*

Definición 2.7. *Sea w un campo diferenciable en un conjunto abierto $U \subset S$ y $p \in U$. Sea $y \in T_p S$. Consideremos una curva parametrizada $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow U$, $\epsilon > 0$ con $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) = y$, y sea $w(t)$, $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ la restricción del campo vectorial w a la curva α . El campo vectorial que se obtiene proyectando ortogonalmente $(dw/dt)(0)$ sobre el plano $T_p S$*

se denomina la derivada covariante en p del campo vectorial w con respecto al vector y . La derivada covariante se denota por $(Dw/dt)(0)$. Ver figura (2.5).

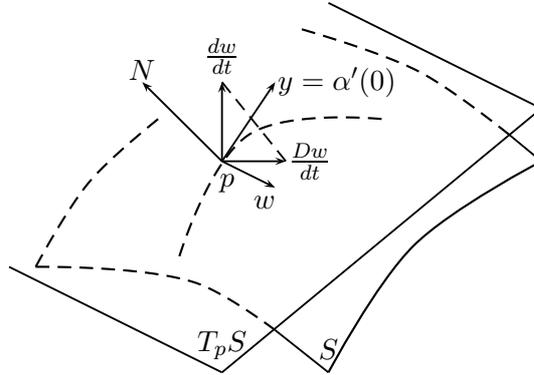


Figura 2.5: Interpretación geométrica de la definición 2.7.

Ahora si $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$ es una curva en S y

$$w(t) = a(u(t), v(t))X_u + b(u(t), v(t))X_v = a(t)X_u + b(t)X_v$$

es la expresión de $w(t)$ en la parametrización $X(u, v)$ entonces, haciendo uso de las ecuaciones (2.5) dadas al inicio de esta sección se tiene que:

$$\left. \frac{Dw(t)}{dt} \right|_{t=0} = (a' + \Gamma_{11}^1 au' + \Gamma_{12}^1 av' + \Gamma_{12}^1 bu' + \Gamma_{22}^1 bv')X_u + (b' + \Gamma_{11}^2 au' + \Gamma_{12}^2 av' + \Gamma_{12}^2 bu' + \Gamma_{22}^2 bv')X_v. \quad (2.9)$$

La derivada covariante está bien definida dado que la expresión (2.9) pone en manifiesto que $(Dw/dt)(0)$ sólo depende del vector $(u', v') = y$ y de los símbolos de Christoffel de la parametrización X de S y no de la curva α .

Otra consecuencia de la ecuación (2.9) es que la derivada covariante se puede extender a campos vectoriales que estén definidos únicamente sobre los puntos de una curva parametrizada. Para aclarar más este punto, precisaremos algunas definiciones.

Definición 2.8. Una curva parametrizada diferenciable $\alpha : [0, l] \rightarrow S$ es la restricción a $[0, l]$ de una aplicación diferenciable de $(0 - \epsilon, l + \epsilon)$ para algún $\epsilon > 0$, en S .

Es decir, si $\beta : (0 - \epsilon, l + \epsilon) \rightarrow S$ es una curva parametrizada diferenciable, entonces

$$\alpha = \beta|_{[0,l]}.$$

Si $\alpha(0) = p$ y $\alpha(l) = q$, decimos que α une a p con q . Se dice que α es regular si $\alpha'(t) \neq 0$ para todo $t \in [0, l]$.

Es de notar que la anterior definición garantiza la diferenciabilidad en los extremos de α .

Definición 2.9. Sea $\alpha : I \rightarrow S$ una curva parametrizada diferenciable en S . Un campo vectorial w a lo largo de α es una correspondencia que asigna a cada $t \in I$ un vector

$$w(t) \in T_{\alpha(t)}S.$$

Las definiciones anteriores permiten generalizar (2.7) para todo $t \in I$.

Definición 2.10. Sea w un campo vectorial diferenciable a lo largo de $\alpha : I \rightarrow S$. La expresión (2.9) de $(Dw/dt)(t)$, $t \in I$ está bien definida y se denomina la derivada covariante de w en t .

La siguiente proposición muestra algunas propiedades de la derivada covariante.

Proposición 2.7. Si w y v son dos campos vectoriales diferenciables a lo largo de una curva parametrizada diferenciable $\alpha : I \rightarrow S$. Entonces

1.
$$\frac{D(w+v)(t)}{dt} = \frac{Dw(t)}{dt} + \frac{Dv(t)}{dt}.$$
2.
$$\frac{D\lambda w(t)}{dt} = \lambda \frac{Dw(t)}{dt}.$$

Demostración. Su prueba se logra directamente de la definición. □

Estas expresiones serán de gran ayuda para mostrar que la aplicación transporte paralelo a lo largo de una curva α es una aplicación isométrica.

Definición 2.11. Se dice que un campo vectorial w , a lo largo de una curva $\alpha : I \rightarrow S$ es paralelo si $Dw/dt = 0$ para todo $t \in I$.

Ejemplo 11. *El campo vectorial tangente a un meridiano (parametrizado por la longitud de arco) de S^2 es un campo paralelo a S^2 . Ver figura (2.6)*

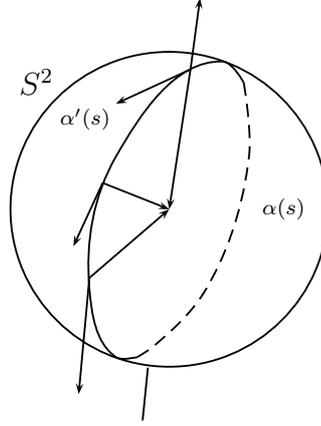


Figura 2.6: Campo paralelo sobre la esfera.

En efecto, sea

$$X(u, v) = (\cos u \sen v, \sen u \sen v, \cos v), \quad 0 < u < \pi, \quad 0 < v < 2\pi.$$

una parametrización de S^2 . Luego la parametrización del meridiano está dada por

$$\alpha(s) = X(u_0, s) = (\cos u_0 \sen s, \sen u_0 \sen s, \cos s), \quad 0 < s < 2\pi \text{ por lo tanto}$$

$\langle \alpha'(s), \alpha(s) \rangle = 0$. Así la proyección $(d\alpha'(s)/ds)$ sobre el plano $T_{\alpha(s)}S^2$ es el vector nulo, para todo $s \in (0, 2\pi)$. En conclusión la derivada covariante es cero.

Las definiciones anteriores serán de gran ayuda para la demostración de algunas proposiciones que a continuación se presentan. Con base en ellas se define en los párrafos siguientes el concepto de geodésica.

Proposición 2.8. *Sean v y w dos campos vectoriales paralelos a lo largo de $\alpha : I \rightarrow S$. Entonces $\langle v(t), w(t) \rangle$ es constante. En particular para todo $t \in I$, $\|v(t)\|$ y $\|w(t)\|$ son constantes y el ángulo entre ellos es constante.*

Demostración. Dado que el campo v es paralelo a lo largo de α entonces $Dw/dt = 0$ luego dw/dt es normal al plano tangente a la superficie en $\alpha(t)$; o sea

$$\langle v(t), w'(t) \rangle = 0, \quad \text{para todo } t \in I.$$

Análogamente se tiene que

$$\langle v'(t), w(t) \rangle = 0, \quad \text{para todo } t \in I.$$

Por lo tanto

$$\langle v(t), w(t) \rangle' = \langle v'(t), w(t) \rangle + \langle v(t), w'(t) \rangle = 0$$

Y en efecto $\langle v(t), w(t) \rangle = \text{constante}$.

Es más, cuando $v(t) = w(t)$ se obtiene que para todo $t \in I$, $\|v(t)\|$ y $\|w(t)\|$ son constantes. □

Proposición 2.9. Sea $\alpha : I \rightarrow S$ una curva parametrizada sobre S y sea $w_0 \in T_{\alpha(t_0)}S$, $t_0 \in I$. Entonces existe un único campo vectorial paralelo $w(t)$ a lo largo de $\alpha(t)$, con $w(t_0) = w_0$.

Demostración. Debemos probar que existe

$$w : I \rightarrow TS$$

$$t \rightarrow w(t) = a(t)X_u + b(t)X_v$$

tal que $Dw/dt = 0$ y $w(t_0) = w_0$.

Para que $Dw/dt = 0$ debe suceder,

$$(a' + \Gamma_{11}^1 au' + \Gamma_{12}^1 av' + \Gamma_{12}^1 bu' + \Gamma_{22}^1 bv')X_u = 0,$$

$$(b' + \Gamma_{11}^2 au' + \Gamma_{12}^2 av' + \Gamma_{12}^2 bu' + \Gamma_{22}^2 bv')X_v = 0;$$

de lo anterior se tiene:

$$a' = -a(\Gamma_{11}^1 u' + \Gamma_{12}^1 v') - b(\Gamma_{12}^1 u' + \Gamma_{22}^1 v'),$$

$$b' = -a(\Gamma_{11}^2 u' + \Gamma_{12}^2 v') - b(\Gamma_{12}^2 u' + \Gamma_{22}^2 v');$$

así

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}' = - \begin{pmatrix} \Gamma_{11}^1 u' + \Gamma_{12}^1 v' & \Gamma_{12}^1 u' + \Gamma_{22}^1 v' \\ \Gamma_{11}^2 u' + \Gamma_{12}^2 v' & \Gamma_{12}^2 u' + \Gamma_{22}^2 v' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a(t_0) \\ b(t_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix}$$

Tiene solución única. Dado que cada función componente de la matriz es diferenciable y $w_0 = a_0 X_u(\alpha(t_0)) + X_v(\alpha(t_0))$. Ver (Apostol [9], pp.269)

Por lo tanto existe $w(t) = a(t)X_u + b(t)X_v$ tal que $Dw/dt = 0$ y $w(t_0) = w_0$ □

A continuación se definirá el transporte paralelo a lo largo de una curva α contenida en una superficie S , y posteriormente a un ejemplo se demostrará que dicha aplicación es una isometría lineal.

Definición 2.12. Sea $\alpha : I \rightarrow S$ una curva parametrizada y $w_0 \in T_{\alpha(t_0)}S$, $t_0 \in I$. Sea w el campo vectorial paralelo a lo largo de α , con $w(t_0) = w_0$. El vector $w(t_1)$, $t_1 \in I$ se denomina transporte paralelo de w_0 a lo largo de α en el punto t_1 .

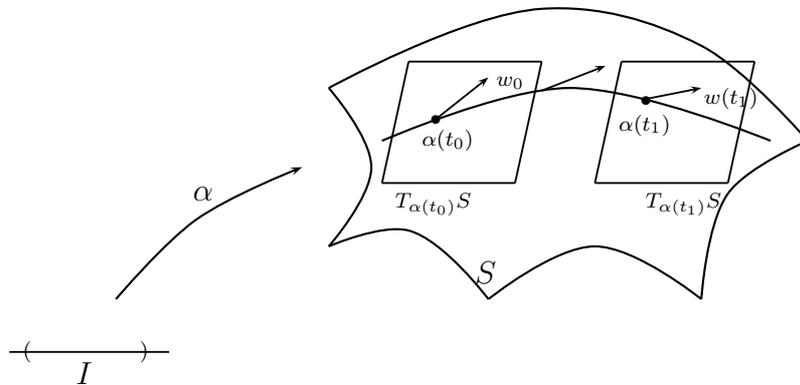


Figura 2.7: Interpretación geométrica de la definición (2.12)

Miremos un ejemplo que ilustre la definición anterior.

Ejemplo 12. Sean $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ y $\beta \subset S^2$ un paralelo sobre S^2 . Hallemos el transporte paralelo a lo largo de β .

Debemos encontrar un campo vectorial paralelo $w(t) = a(t)X_u + b(t)X_v$ a lo largo de β con $w(t_0) = w_0 \in T_{\beta(t_0)}S^2$; esto es,

$$\begin{cases} a' + \Gamma_{11}^1 aa' + \Gamma_{12}^1 av' + \Gamma_{12}^1 bu' + \Gamma_{22}^1 bv' = 0, \\ b' + \Gamma_{11}^2 aa' + \Gamma_{12}^2 av' + \Gamma_{12}^2 bu' + \Gamma_{22}^2 bv' = 0. \end{cases} \quad (2.10)$$

Consideremos una parametrización de la esfera dada por:

$$X(u, v) = (\cos u \sen v, \sen u \sen v, \cos v), \quad 0 < u < 2\pi, \quad 0 < v < \pi.$$

Entonces teniendo en cuenta el ejemplo 1 de ([2], pp. 236) se tiene que

$$\begin{array}{lll} \Gamma_{11}^1 = 0, & \Gamma_{12}^1 = \cot v, & \Gamma_{22}^1 = 0, \\ \Gamma_{11}^2 = -\sen v \cos v, & \Gamma_{12}^2 = 0, & \Gamma_{22}^2 = 0. \end{array}$$

Por otra parte, $\alpha(t) = X(t, v_0)$ es una curva cuya traza es el paralelo β donde $u(t) = t$, $v(t) = v_0$. Esto implica que $u'(t) = 1$ y $v'(t) = 0$. Así, reemplazando en las ecuaciones del sistema 2.10, se concluye que:

$$\begin{aligned} a'(t) + \cot v_0 b(t) &= 0, \\ b'(t) - \sen v_0 \cos v_0 a(t) &= 0. \end{aligned}$$

Después de hacer algunas transformaciones se llega a la siguiente solución:

$$\begin{aligned} a(t) &= A \cos(\cos v_0 t) + B \sen(\cos v_0 t), \\ b(t) &= -B \sen v_0 \cos(\cos v_0 t) + A \sen v_0 \sen(\cos v_0 t). \end{aligned}$$

Ahora si $t = 0$ entonces $a(0) = A = a_0$ y $b(0) = -B \sen v_0 = b_0$ por tanto

$$\begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\cos v_0 t) & -\frac{1}{\sen v_0} \sen(\cos v_0 t) \\ \sen v_0 \sen(\cos v_0 t) & \cos(\cos v_0 t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, el transporte paralelo a lo largo de β notado por P_β viene dado por

$$w(t) = a(t)X_u + b(t)X_v,$$

Observación

Cuando recorremos a lo largo de β todo el paralelo, es decir cuando $t = \frac{2\pi}{\cos v_0}$ la matriz que se obtiene en la igualdad anterior, es la matriz identidad.

Definición 2.13. Sean V y W dos espacios vectoriales (de dimensión finita) con la misma dimensión, cuyos productos interiores se denotan por \langle, \rangle y sea $F : V \rightarrow W$ una aplicación lineal, F es una isometría lineal si

$$\langle F(v_1), F(v_2) \rangle = \langle v_1, v_2 \rangle \text{ para todo } v_1, v_2 \in V$$

Proposición 2.10. Sean $p, q \in S$ y una curva parametrizada $\alpha : I \rightarrow S$ con $\alpha(0) = p$, $\alpha(l) = q$. Denotemos por $P_\alpha : T_p S \rightarrow T_q S$ la aplicación que asigna a cada $v \in T_p S$ su transporte paralelo a lo largo de α en q entonces P_α es una isometría lineal.

Demostración. Probemos que P_α es lineal.

Sean $w_0, v_0 \in T_p S$, demostremos que

$$P_\alpha(w_0 + v_0) = P_\alpha(w_0) + P_\alpha(v_0)$$

Note que para $w_0, v_0 \in T_p S$ existen únicos campos vectoriales paralelos $w(t)$, $v(t)$ a lo largo de α tales que $w(t_0) = w_0$, $v(t_0) = v_0$, como por definición de $P_\alpha : T_p S \rightarrow T_q S$ tenemos que $P_\alpha(w_0) = w(l)$ y $P_\alpha(v_0) = v(l)$.

Ahora si consideramos $w_0 + v_0$ tenemos que existe un único campo vectorial paralelo $z(t)$, a lo largo de α , tal que $z(t_0) = w_0 + v_0$ y por definición de $P_\alpha : T_p S \rightarrow T_q S$ tenemos que $P_\alpha(w_0 + v_0) = z(l)$.

Mostremos que $z(l) = (w+v)(l)$. En efecto, como $(w+v)(t)$ es también un campo vectorial paralelo a lo largo de α dado que,

$$\frac{D(w+v)(t)}{dt} = \frac{Dw(t)}{dt} + \frac{Dv(t)}{dt} = 0$$

y $(w+v)(t_0) = w(t_0) + v(t_0) = w_0 + v_0$, como $z(t)$ es un campo vectorial paralelo a lo largo de α y $z(t_0) = w_0 + v_0$ entonces por la unicidad tenemos que $z(t) = (w+v)(t)$ por lo tanto $z(l) = (w+v)(l)$ esto es,

$$P_\alpha(w_0 + v_0) = P_\alpha(w_0) + P_\alpha(v_0).$$

Sean $\alpha : I \rightarrow S$ y $\lambda w_0 \in T_{\alpha(t_0)}S$, $t_0 \in I$ y λ un escalar, probemos que

$$P_\alpha(\lambda w_0) = \lambda P_\alpha(w_0).$$

Como $\lambda w_0 \in T_{\alpha(t_0)}S$. Entonces existe un único campo vectorial paralelo $\bar{w}(t)$ a lo largo de α , tal que $\bar{w}(t_0) = \lambda w_0$ y por definición de $P_\alpha : T_pS \rightarrow T_qS$ se tiene que $P_\alpha(\lambda w_0) = \bar{w}(l)$. Por otro lado $w_0 \in T_{\alpha(t_0)}S$, entonces existe un único campo vectorial paralelo $w^*(t)$ a lo largo de α tal que $w^*(t_0) = w_0$ y $P_\alpha(w_0) = w^*(l)$, por otra parte $\lambda w^*(t)$ es un campo vectorial paralelo a lo largo de α , pues

$$\frac{D\lambda w^*(t)}{dt} = \lambda \frac{Dw^*(t)}{dt} = 0,$$

luego $\lambda P_\alpha(w_0) = \lambda w^*(l)$. Resta probar que $\lambda w^*(l) = \bar{w}(l)$. Dado que,

$$\lambda w^*(t_0) = \lambda w_0, \quad \bar{w}(t_0) = \lambda w_0,$$

entonces $\lambda w^*(t_0) = \bar{w}(t_0)$, luego en virtud de la proposición (2.9) que afirma la existencia y unicidad de un campo paralelo a lo largo de α se concluye que $\bar{w}(t) = \lambda w^*(t)$. Por lo tanto $P_\alpha(\lambda w_0) = \lambda P_\alpha(w_0)$. En consecuencia P_α es lineal.

Ahora en virtud de la proposición 2.8 se tiene que para cada $v_1, v_2 \in T_pS$,

$$\langle P_\alpha(v_1), P_\alpha(v_2) \rangle = \langle v_1, v_2 \rangle.$$

Por lo tanto P_α es una isometría lineal. □

2.4. Existencia y unicidad de las geodésicas

Definición 2.14. *Se dice que una curva parametrizada no constante $\gamma : I \rightarrow S$ es una geodésica en $t \in I$ si el campo de sus vectores tangentes $\gamma'(t)$ es paralelo a lo largo de γ en t es decir,*

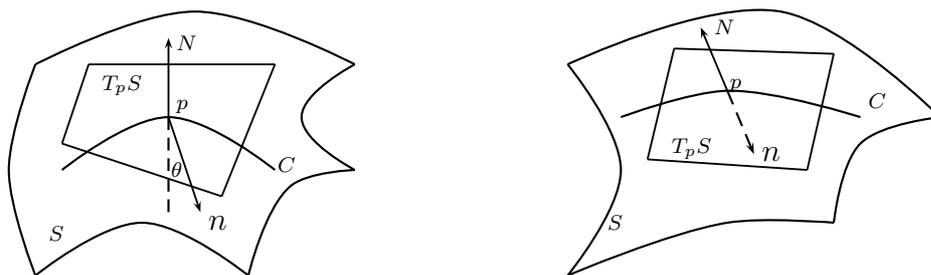
$$\frac{D\gamma'(t)}{dt} = 0, \quad \text{para todo } t \in I.$$

Se dice que γ es una geodésica parametrizada si es geodésica para todo $t \in I$

Por la proposición. 2.8 se tiene que $|\gamma'(t)| = c \neq 0$. Por lo tanto podemos introducir la longitud de arco $s = ct$ como parámetro y concluir que el parámetro t de una geodésica es proporcional a la longitud de arco de γ . La definición anterior se puede extender a subconjuntos de S que sean curvas regulares. Más adelante con la ayuda de las ecuaciones de las geodésicas se dará un ejemplo de esta definición.

Definición 2.15. Se dice que una curva regular conexa C en S es una geodésica si, para cada $p \in C$, la parametrización $\alpha(s)$ de un entorno coordenado de p por la longitud de arco s es una geodésica parametrizada, es decir $\alpha'(s)$ es un campo paralelo a lo largo de $\alpha(s)$.

En otras palabras, una curva regular $C \subset S$, ($k \neq 0$) es una geodésica si y sólo si su normal principal en cada punto $p \in C$ es paralela a la normal a S en p . Ver figura (2.8)



La curva C no es una geodésica

La curva C es una geodésica

Figura 2.8: Interpretación geométrica de la definición (2.15)

A continuación se darán las ecuaciones suficientes y necesarias para que una curva sea una geodésica.

Sean $\gamma : I \rightarrow S$ una curva parametrizada de S y $X(u(t), v(t))$, $t \in I$ la expresión de $\gamma : J \subset I \rightarrow S$ con respecto a la parametrización X . Entonces, el campo vectorial tangente $\gamma'(t)$, $t \in J$ viene dado por

$$\gamma'(t) = w(t) = u'(t)X_u + v'(t)X_v$$

Por lo tanto, para que w sea paralelo a lo largo de γ debe satisfacerse el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} u'' + \Gamma_{11}^1(u')^2 + 2\Gamma_{12}^1u'v' + \Gamma_{22}^1(v')^2 = 0 \\ v'' + \Gamma_{11}^2(u')^2 + 2\Gamma_{12}^2u'v' + \Gamma_{22}^2(v')^2 = 0. \end{cases} \quad (2.11)$$

El anterior sistema se obtiene a partir de la ecuación (2.9) haciendo $a = u'$ y $b = v'$ e igualando a cero los coeficientes de X_u y X_v .

Lema 2.1. *Si $\varphi : S \rightarrow S$ es una isometría y $\gamma : I \rightarrow S$ es una geodésica entonces $\varphi(\gamma)$ es una geodésica.*

Demostración. La prueba es inmediata, teniendo en cuenta que los símbolos de Christoffel son invariantes bajo isometrías. □

Ejemplo 13. *Hallemos las geodésicas de un plano*

$$\Pi = \{p + \lambda v_1 + \mu v_2 \mid v_1, v_2 \in \mathbb{R}^3 \text{ linealmente independientes y } \lambda, \mu \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3$$

Sea $X(u, v) = p + uv_1 + vv_2$ una parametrización de Π y $\gamma(t) = X(u(t), v(t))$ una geodésica del plano; hallemos una estructura explícita de $\gamma(t)$

Como en el plano $\Gamma_{ij}^k = 0$ entonces remplazando en (2.11) se concluye que,

$$u(t) = c_1t + c_3, \quad v(t) = c_2t + c_4.$$

Por lo tanto

$$\gamma(t) = (c_1v_1 + c_2v_2)t + (p + c_3v_1 + c_4v_2).$$

En consecuencia las geodésicas del plano Π son rectas.

La siguiente proposición es una consecuencia importante del hecho de que las geodésicas estén caracterizadas por el sistema (2.11).

Proposición 2.11. *Dado un punto $p \in S$ y un vector $w \in T_pS$, $w \neq 0$, existe $\epsilon > 0$ y una única geodésica parametrizada $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow S$ tal que $\gamma(0) = p$, $\gamma'(0) = w$.*

Demostración. Ver (Do Carmo [3], pp.299-302). □

2.5. Isometrías en S^2

El resultado anterior es de gran ayuda dado que garantiza la existencia y unicidad de las geodésicas y este resultado permite formular la siguiente proposición.

Proposición 2.12. Sean $\varphi, \phi : S^2 \rightarrow S^2$, dos isometrías de S^2 , $p \in S^2$ y $v, w \in T_p S^2$ tal que $\{v, w\}$ sea una base ortonormal de $T_p S^2$ y además

$$\varphi(p) = \phi(p), \quad d\varphi_p(v) = d\phi_p(v), \quad d\varphi_p(w) = d\phi_p(w);$$

entonces $\varphi = \phi$.

Demostración. En primer lugar note que $d\varphi_p(z) = d\phi_p(z)$, para todo $z \in T_p S^2$.

En efecto como $\{v, w\}$ una base de $T_p S^2$ tenemos que $z = av + bw$; luego

$$\begin{aligned} d\varphi_p(z) &= d\varphi_p(av + bw) = ad\varphi_p(v) + bd\varphi_p(w) \\ &= ad\phi_p(v) + bd\phi_p(w) = d\phi_p(av + bw) \\ &= d\phi_p(z). \end{aligned}$$

En segundo lugar note que el intervalo de definición de la geodesica de la proposición (2.11) se puede extender a un intervalo mayor. Es decir podemos afirmar que dados $p, q \in S^2$ y $z \in T_p S^2$, $z \neq 0$ existe un intervalo I y una única geodésica parametrizada $\gamma : I \rightarrow S^2$ tal que $\gamma(0) = p$, $\gamma(s_1) = q$, $s_1 \in (-\delta, \delta) = I$ y $\gamma'(0) = z$.

Ahora como las isometrías transforman geodésicas en geodésicas, entonces

$$\alpha(s) = \varphi(\gamma(s)) : I \rightarrow S^2 \quad \text{y} \quad \beta(s) = \phi(\gamma(s)) : I \rightarrow S^2,$$

son geodésicas. Probemos que $\alpha(s) = \beta(s)$.

Como $\varphi(p) = \phi(p)$ entonces $\alpha(0) = \beta(0)$ resta mostrar que $\alpha'(0) = \beta'(0)$ en efecto,

$$\alpha'(0) = \frac{d}{ds} \varphi \circ \gamma(s)|_{t=0} = d\varphi_p(\gamma'(0)) = d\varphi_p(z) = d\phi_p(z) = \beta'(0)$$

Luego en virtud de la proposición (2.11) tenemos que $\alpha(s) = \beta(s)$.

En particular $\alpha(s_1) = \beta(s_1) = q$ esto es

$$\varphi(\gamma(s_1)) = \varphi(q) = \phi \circ \gamma(s_1) = \phi(q).$$

Dado que q se tomo de forma arbitraria en S^2 entonces $\phi(q) = \varphi(q)$ para todo $q \in S^2$. \square

Antes de probar uno de los objetivos de este trabajo mostremos un resultado que nos permitirá escoger una base ortogonal de \mathbb{R}^3 a partir de una base del plano tangente de S^2 ; este resultado nos permitirá simplificar la prueba del teorema (2.3).

Lema 2.2. *Si $v_1 \in S^2$, entonces existen $v_2, v_3 \in T_{v_1}S^2$ tales que $\{v_1, v_2, v_3\}$ es una base ortonormal de \mathbb{R}^3 .*

Demostración. Utilizando el proceso de ortogonalización de Gram-Smith se puede encontrar una base ortogonal $\{v_2, v_3\}$ de $T_{v_1}S^2$ y dado que $v_1 \in S^2$ entonces $\langle v_1, v_2 \rangle = 0$ y $\langle v_1, v_3 \rangle = 0$, además $\|v_1\| = 1$, por lo tanto $\{v_1, v_2, v_3\}$ es una base ortormal de \mathbb{R}^3 . \square

Teorema 2.3. *φ es una isometría de $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ si y sólo si existe una aplicación lineal ortogonal $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\varphi = T|_{S^2}$.*

Demostración. Sea $\varphi : S^2 \rightarrow S^2$ una isometría. Se debe probar que existe una transformación ortogonal $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\varphi = T|_{S^2}$.

Sean $v_1 \in S^2$; $v_2, v_3 \in T_{v_1}S^2$ de tal forma que $\{v_1, v_2, v_3\}$ sea una base ortonormal de \mathbb{R}^3 y definamos $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ una aplicación lineal que satisface

$$T(v_1) = \varphi(v_1), \quad T(v_2) = d\varphi_{v_1}(v_2), \quad T(v_3) = d\varphi_{v_1}(v_3).$$

Probemos que T así definida es ortogonal:

$$\langle T(v_2), T(v_3) \rangle = \langle d\varphi_{v_1}(v_2), d\varphi_{v_1}(v_3) \rangle = \langle v_2, v_3 \rangle = 0,$$

$$\langle T(v_1), T(v_1) \rangle = \langle \varphi(v_1), \varphi(v_1) \rangle = \langle v_1, v_1 \rangle = 1,$$

$$\langle T(v_2), T(v_2) \rangle = \langle d\varphi_{v_1}(v_2), d\varphi_{v_1}(v_2) \rangle = \langle v_2, v_2 \rangle = 1.$$

Resta probar que

$$\langle T(v_1), T(v_2) \rangle = 0, \quad \langle T(v_1), T(v_3) \rangle = 0.$$

Dado que $\varphi : S^2 \rightarrow S^2$ y $d\varphi_{v_1} : T_{v_1}S^2 \rightarrow T_{\varphi(v_1)}S^2$ entonces $d\varphi_{v_1}(v_2) \in T_{\varphi(v_1)}S^2$. Luego $d\varphi_{v_1}(v_2)$ y $\varphi(v_1)$ son ortogonales. Ver figura (2.9); por lo tanto,

$$\langle T(v_1), T(v_2) \rangle = \langle \varphi(v_1), d\varphi_{v_1}(v_2) \rangle = 0.$$

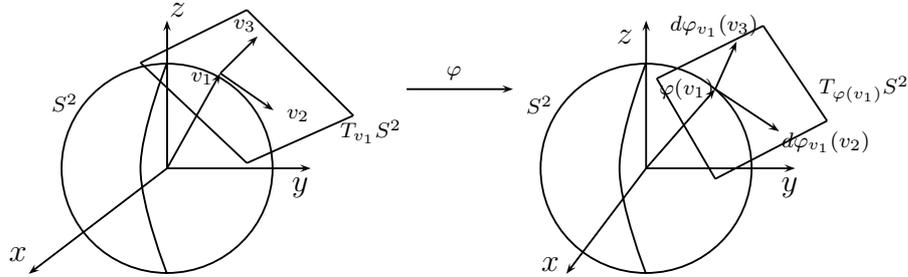


Figura 2.9: Interpretación geométrica del porque $d\varphi_{v_1}(v_2)$ y $\varphi(v_1)$ son ortogonales.

Análogamente se prueba que

$$\langle T(v_1), T(v_3) \rangle = 0.$$

En consecuencia T es ortogonal.

Por otra parte se tiene que $T|_{S^2} : S^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$. Probemos que $T|_{S^2} : S^2 \rightarrow S^2$, es decir que $T|_{S^2}(S^2) \subseteq S^2$; esto es, $\|T|_{S^2}\| = 1$ para todo $p \in S^2$.

Dado que $\{v_1, v_2, v_3\}$ es base, entonces $p = p_1v_1 + p_2v_2 + p_3v_3$; luego

$$\begin{aligned} \|T|_{S^2}(p)\|^2 &= \langle T|_{S^2}(p_1v_1 + p_2v_2 + p_3v_3), T|_{S^2}(p_1v_1 + p_2v_2 + p_3v_3) \rangle \\ &= \langle T(p_1v_1 + p_2v_2 + p_3v_3), T(p_1v_1 + p_2v_2 + p_3v_3) \rangle \\ &= \langle p, p \rangle = \|p\|^2 = 1; \end{aligned}$$

entonces $T|_{S^2} : S^2 \rightarrow S^2$.

Cabe notar $T|_{S^2}$ es una isometría.

De lo anterior se tiene que tanto φ como $T|_{S^2}$ van de S^2 en S^2 y además satisfacen

$$T(v_1) = \varphi(v_1), \quad T(v_2) = d\varphi_{v_1}(v_2), \quad T(v_3) = d\varphi_{v_1}(v_3).$$

En virtud de la proposición (2.12), se tiene que $T|_{S^2} = \varphi$.

Recíprocamente, sea $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $T(X) = AX$ una aplicación ortogonal luego la matriz A asociada a esta transformación es ortogonal. Como $dT_p = A$ entonces,

$$\langle d\varphi_p(v), d\varphi_p(w) \rangle = \langle dT_p(v), dT_p(w) \rangle = \langle A(v), A(w) \rangle = \langle v, w \rangle.$$

Luego $\varphi = T|_{S^2}$ es una isometría de S^2 . □

La proposición anterior permite concluir uno de los objetivos de esta monografía el cual era dar una caracterización de las isometrías de S^2 , es decir cuándo una aplicación $\varphi : S^2 \rightarrow S^2$ es una isometría. A continuación se ilustrará con un ejemplo este hecho para posteriormente dar una generalización de este resultado en \mathbb{R}^n tomando como punto de partida la definición de variedad diferenciable.

Ejemplo 14. Sea $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ una aplicación lineal cuya matriz asociada a la transformación esta definida por:

$$A = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & -\operatorname{sen} \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \operatorname{sen} \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Es claro que A es ortogonal dado que $AA^T = I$.

Como $A|_{S^2}$ es una aplicación de S^2 en S^2 entonces en virtud de la proposición anterior se tiene que $A|_{S^2}$ es una isometría.

2.6. Isometrías en S^n

La definición de superficie regular es importante en todo el estudio que se ha hecho hasta el momento, pero no es suficiente para el análisis de subconjuntos de \mathbb{R}^n dotados de propiedades análogas al de superficies regulares en \mathbb{R}^3 , ver ejemplo 15; debido a esto es

necesario definir el concepto de variedad diferenciable con el fin de generalizar el resultado anterior.

Definición 2.16. *Una variedad diferenciable de dimensión n es un conjunto M con una familia de aplicaciones biunívocas $X_\alpha : U_\alpha \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$ de abiertos U_α de \mathbb{R}^n en M tales que:*

1. $\bigcup_\alpha X_\alpha(U_\alpha) = M$, $\alpha \in \Omega$ – familia indizada
2. Para todo par de índices α y β , con $X_\alpha(U_\alpha) \cap X_\beta(U_\beta) = W \neq \emptyset$ los conjuntos $X_\alpha^{-1}(W)$ y $X_\beta^{-1}(W)$ son abiertos en \mathbb{R}^n y las aplicaciones $X_\beta \circ X_\alpha^{-1}$ son difeomorfismos.
3. La familia $\{(U_\alpha, X_\alpha)\}$ es máxima con respecto a las condiciones (1) y (2)

La condición de maximalidad que aparece en la definición anterior es puramente técnica y podría eliminarse, ya que se podría demostrar que cualquier familia de aplicaciones se puede completar de tal forma que sea maximal de manera única, es decir, dada una familia de aplicaciones diferenciable sobre un conjunto está contenido en exactamente una familia maximal diferenciable.

A continuación mostraremos un ejemplo de variedad diferenciable.

Ejemplo 15. *El conjunto de matrices*

$$M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \mid a_{ij} \in \mathbb{R}, \ i, j = 1, 2 \right\}$$

es una variedad de dimensión cuatro.

En efecto, consideremos X la aplicación

$$X : \mathbb{R}^4 \rightarrow M_{2 \times 2}(\mathbb{R}), \text{ definida así:}$$

$$X(v_1, v_2, v_3, v_4) = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \\ v_3 & v_4 \end{pmatrix}.$$

Probaremos que M es una variedad diferenciable.

Se debe probar que X es inyectiva, para ello supongamos que:

$X(u_1, u_2, u_3, u_4) = X(v_1, v_2, v_3, v_4)$ luego,

$$\begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ u_3 & u_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \\ v_3 & v_4 \end{pmatrix};$$

así que $u_i = v_i$ para todo $i = 1, \dots, 4$. Así X es inyectiva.

Por otro lado, dada

$$\begin{pmatrix} v_1 & v_2 \\ v_3 & v_4 \end{pmatrix} \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R}),$$

existe $(v_1, v_2, v_3, v_4) \in \mathbb{R}^4$ tal que:

$$X(v_1, v_2, v_3, v_4) = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \\ v_3 & v_4 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto $X(\mathbb{R}^4) = M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$.

Como $X(\mathbb{R}^4) \cap X(\mathbb{R}^4) = M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ y $X^{-1}(M_{2 \times 2}(\mathbb{R})) = \mathbb{R}^4$ entonces $X^{-1} \circ X : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ es un difeomorfismo. Dado que $X^{-1} \circ X$ es la aplicación identidad.

Es de notar que en la definición inmediatamente anterior el conjunto M no está dotado de una estructura topológica, es decir $X_\alpha(U_\alpha)$ no son abiertos de \mathbb{R}^n , por lo tanto se dará una definición formal de espacio topológico para después dotar a una variedad M de una estructura topológica.

Definición 2.17. Una topología sobre un conjunto B es una colección τ de subconjuntos de X que satisface las siguientes propiedades:

1. $\phi \in \tau$ y $B \in \tau$.
2. La unión de elementos de una subcolección de τ está en τ .
3. La intersección de los elementos de una subcolección finita de elementos de τ está en τ .

Esto es, τ es una familia de subconjuntos de B cerrada tanto para la unión arbitraria como para la intersección finita de sus elementos. Los elementos de τ se llaman abiertos y el par (B, τ) espacio topológico.

Proposición 2.13 (Topología sobre una variedad). *Sea M una variedad diferenciable de dimensión n . Entonces τ definida por:*

$$\tau = \left\{ A \subset M \mid X_\alpha^{-1}(X_\alpha(U_\alpha) \cap A) \text{ es un abierto en } \mathbb{R}^n \right\}$$

es una topología para M .

Demostración. Como $\phi \subset M$ y $\phi \cap X_\alpha(U_\alpha) = \phi$ entonces $X_\alpha^{-1}(\phi) = \phi$, luego $\phi \in \tau$. Por otra parte $M \cap (X_\alpha(U_\alpha)) = X_\alpha(U_\alpha)$. En efecto $X_\alpha^{-1}(X_\alpha(U_\alpha)) = U_\alpha$, como U_α es un abierto de \mathbb{R}^n entonces $M \in \tau$.

Sea $\{A_j\}_{j \in J}$ una familia arbitraria de τ ; luego para cada $j \in J$ y para cada α se tiene

$$X_\alpha^{-1}(X_\alpha(U_\alpha) \cap A_j);$$

es un abierto en \mathbb{R}^n . Por lo tanto

$$X_\alpha^{-1}\left(X_\alpha(U_\alpha) \cap \left(\bigcup_{j \in J} A_j\right)\right) = X_\alpha^{-1}\left(\bigcup_{j \in J} (X_\alpha(U_\alpha) \cap A_j)\right) = \bigcup_{j \in J} X_\alpha^{-1}(X_\alpha(U_\alpha) \cap A_j).$$

Como la unión arbitraria de abiertos de \mathbb{R}^n es un abierto de \mathbb{R}^n entonces

$$\bigcup_{j \in J} X_\alpha^{-1}(X_\alpha(U_\alpha) \cap A_j)$$

es un abierto de \mathbb{R}^n . Luego $\bigcup_{j \in J} A_j \in \tau$.

Finalmente consideremos $\{A_i\}_{i \in I}$, I -finito una familia finita de elementos de τ ; luego para cada $i \in I$ y para cada α se tiene

$$X_\alpha^{-1}(X_\alpha(U_\alpha) \cap A_i);$$

es un abierto en \mathbb{R}^n . Así

$$X_\alpha^{-1}\left(X_\alpha(U_\alpha) \cap \left(\bigcap_{i \in I} A_i\right)\right) = X_\alpha^{-1}\left(\bigcap_{i \in I} (X_\alpha(U_\alpha) \cap A_i)\right) = \bigcap_{i \in I} X_\alpha^{-1}(X_\alpha(U_\alpha) \cap A_i).$$

Como la intersección finita de abiertos de \mathbb{R}^n es un abierto de \mathbb{R}^n entonces

$$\bigcap_{i \in I} X_\alpha^{-1} \left(X_\alpha(U_\alpha) \cap A_i \right)$$

es un abierto de \mathbb{R}^n . De todo lo anterior se tiene que (M, τ) es un espacio topológico. \square

Ejemplo 16. $S^n = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 1\}$, es una variedad diferenciable.

La prueba de este ejemplo se puede consultar en (Do Carmo [3], pp. 20). A continuación se presenta la generalización del teorema (2.3) y con este resultado se da por terminado lo relacionado a isometrías en S^n .

Teorema 2.4. $\varphi : S^n \rightarrow S^n$ es una isometría si y sólo si existe una aplicación lineal ortogonal $A : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ tal que $\varphi = A|_{S^n}$.

Demostración. La prueba del teorema se puede consultar en (Do Carmo , [3]) y no se desarrolla dado que se sale de los propósitos del presente trabajo. Pero se logra gracias a la generalización de los resultados utilizados para la demostración del teorema (2.3). Entre ellos la ecuación de las geodésicas para \mathbb{R}^n . \square

De ahora en adelante se hará un análisis detallado de las aplicaciones conformes, análogo a lo que se hizo con las isometrías locales. Se inicia esta parte con la definición de parametrización isoterma posteriormente se demostrará que dadas cualquier par de superficies estas son localmente conformes. además se probará el conjunto de todas la aplicaciones conformes sobre S^2 tienen una estructura de grupo bajo la composición.

Definición 2.18. Sea S una superficie regular. Si $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ es una parametrización tal que los coeficientes de la primera forma fundamental E, F, G satisfacen $E = G$ y $F = 0$, entonces se dice que X es isoterma.

Un ejemplo de parametrización isoterma se verá en los párrafos siguientes al considerar $Z(u, v)$ como parametrización del plano.

El teorema que a continuación se probará es uno de los mas importantes en lo concerniente a transformaciones conformes no solo por lo que afirma sino que para su demostración se admite la existencia de parámetros isotermos; herramienta que ha sido de gran importancia en el desarrollo de muchas teorías en geometría diferencial. Una de las teorías que aplican dicho sistema coordenado isotermo es la teoría de superficies minimales.

Teorema 2.5. *Dadas dos superficies regulares S y \bar{S} cualesquiera entonces S y \bar{S} son localmente conformes.*

Demostración. Admitamos la existencia de parámetros isotermos (ver Chern. [1]), de tal forma que los coeficientes de la primera forma fundamental de $X : U \rightarrow S$ en un entorno de la superficie S sean

$$E = \lambda^2(u, v) > 0, \quad F = 0, \quad G = \lambda^2(u, v).$$

Admitiendo dicho entorno coordenado isotermo, S es localmente conforme a un plano. En consecuencia, si P es el plano parametrizado por

$$\begin{aligned} Z(u, v) &= \begin{pmatrix} u, v, 0 \end{pmatrix} & (u, v) \in U \subset \mathbb{R}^2, & \text{entonces} \\ E_z = \langle Z_u, Z_u \rangle &= 1, & F_z = \langle Z_u, Z_v \rangle &= 0, & G_z = \langle Z_v, Z_v \rangle &= 1. \end{aligned}$$

Así,

$$E = \lambda^2(u, v)E_z, \quad F = F_z = 0, \quad G = \lambda^2(u, v)G_z.$$

Por lo tanto en virtud de la proposición (2.4), $\varphi = Z \circ X^{-1} : X(U) \rightarrow Z(U) \subset P$ es una aplicación conforme local. Ver figura (2.10)

Análogamente se prueba que $\phi = \bar{X} \circ W^{-1} : W(\bar{U}) \rightarrow \bar{S}$ es conforme local. Ahora si se logra probar que $\varphi \circ \phi : X(U) \rightarrow \bar{S}$ es una aplicación conforme local entonces hemos acabado la prueba.

En efecto como $\varphi : X(U) \rightarrow Z(U)$ es una aplicación conforme local, dado $p \in X(U)$ y un entorno V de p , existe un entorno \bar{V} de $\varphi(p)$ en P tal que $\varphi : V \rightarrow \bar{V}$ es una aplicación conforme. Además $\phi : W(\bar{U}) \rightarrow \bar{S}$ es conforme local. Entonces dado $q = \varphi(p) \in W(\bar{U})$

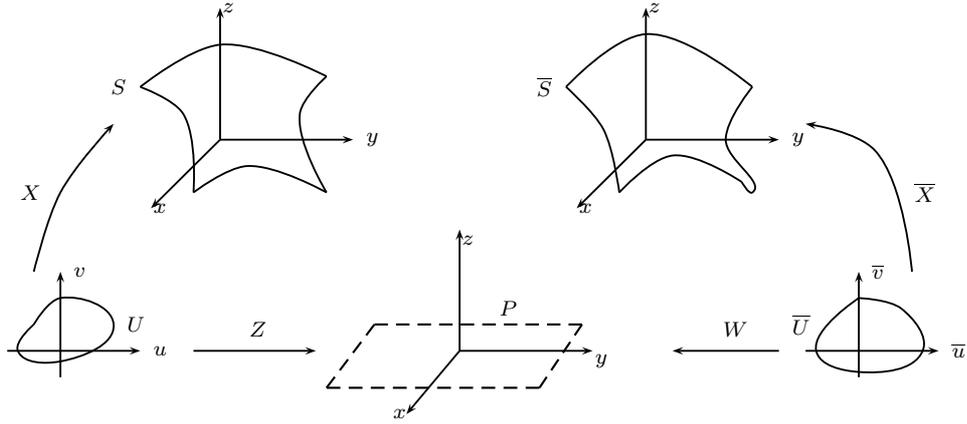


Figura 2.10: Interpretación geométrica de la demostración.

y un entorno F de q , existe un entorno \bar{F} de $\phi(q)$ tal que $\phi : F \rightarrow \bar{F}$ es una aplicación conforme; luego para todos los $v_1, v_2 \in T_p V$ y para todos $w_1, w_2 \in T_q F$ se tiene que

$$\begin{cases} \langle d\varphi_p(v_1), d\varphi_p(v_2) \rangle_{\varphi(p)} = \lambda^2(p) \langle v_1, v_2 \rangle_p, \\ \langle d\phi_q(w_1), d\phi_q(w_2) \rangle_{\phi(q)} = \mu^2(\varphi(p)) \langle w_1, w_2 \rangle_q, \end{cases} \quad (2.12)$$

donde λ^2 y μ^2 son funciones diferenciables no nulas sobre V y F respectivamente. Ahora si se define

$$\varphi : V \longrightarrow \bar{V} \cap F, \quad \phi : \bar{V} \cap F \longrightarrow \bar{F}$$

entonces

$$\begin{aligned} \phi \circ \varphi : V &\longrightarrow \bar{F} \\ p &\longmapsto \phi(\varphi(p)) \end{aligned}$$

es una aplicación de S en \bar{S} bien definida, pues el rango de φ es el dominio de ϕ . Debemos probar que para todo $v_1, v_2 \in T_p V$,

$$\langle d(\phi \circ \varphi)_p(v_1), d(\phi \circ \varphi)_p(v_2) \rangle = \gamma^2(p) \langle v_1, v_2 \rangle,$$

donde $\gamma^2(p)$ es una función diferenciable no nula sobre S .

Como

$$\begin{aligned}d(\phi \circ \varphi)_p(v_1) &= d\phi_{\varphi(p)}d\varphi_p(v_1), \\d(\phi \circ \varphi)_p(v_2) &= d\phi_{\varphi(p)}d\varphi_p(v_2); \end{aligned}$$

entonces desarrollando este producto interior y aplicando las igualdades de (2.12) se tiene que

$$\begin{aligned}\langle d(\phi \circ \varphi)_p(v_1), d(\phi \circ \varphi)_p(v_2) \rangle &= \langle d\phi_{\varphi(p)}d\varphi_p(v_1), d\phi_{\varphi(p)}d\varphi_p(v_2) \rangle \\ &= \mu^2(\varphi(p))\langle d\varphi_p(v_1), d\varphi_p(v_2) \rangle \\ &= \mu^2(\varphi(p))\lambda^2(p)\langle v_1, v_2 \rangle \\ &= \gamma^2(p)\langle v_1, v_2 \rangle; \end{aligned}$$

En consecuencia S y \bar{S} son localmente conformes. □

Observación

Note que $Z(u, v)$ es una parametrización isoterma de plano P .

Proposición 2.14. *Sea $G(S^2) = \{\varphi : S^2 \rightarrow S^2 \mid \varphi \text{ es conforme}\}$ el conjunto de todas las aplicaciones conformes sobre S^2 . Entonces $\langle G(S^2); \circ \rangle$ es un grupo.*

Demostración. 1. Sean γ, ψ elementos de $G(S^2)$. Entonces $\gamma \circ \psi \in G(S^2)$ en efecto, como $\gamma \in G(S^2)$ entonces para todo $p \in S^2$ y cualesquiera que sean $v_1, v_2 \in T_p S^2$ se tiene que

$$\langle d\gamma_p(v_1), d\gamma_p(v_2) \rangle_{\gamma(p)} = \lambda^2(p)\langle v_1, v_2 \rangle_p, \quad (2.13)$$

donde λ^2 es una función diferenciable no nula sobre S^2 .

Es más ψ también es un elemento de $G(S^2)$ luego para todo $p \in S^2$ y cualesquiera que sean $w_1, w_2 \in T_p S^2$ se satisface que

$$\langle d\psi_p(w_1), d\psi_p(w_2) \rangle_{\psi(p)} = \mu^2(p)\langle w_1, w_2 \rangle_p, \quad (2.14)$$

donde μ^2 es una función diferenciable no nula sobre S^2 .

Por otra parte

$$\begin{aligned}d(\gamma \circ \psi)_p(v_1) &= d\gamma_{\psi(p)}d\psi_p(v_1), \\d(\phi \circ \varphi)_p(v_2) &= d\gamma_{\psi(p)}d\psi_p(v_2); \end{aligned}$$

Así aplicando las ecuaciones (2.13) y (2.14) en la siguiente igualdad se obtiene el resultado

$$\begin{aligned}\langle d(\gamma \circ \psi)_p(v_1), d(\gamma \circ \psi)_p(v_2) \rangle &= \langle d\gamma_{\psi(p)}d\psi_p(v_1), d\gamma_{\psi(p)}d\psi_p(v_2) \rangle \\ &= \lambda^2(p) \langle d\psi_p(v_1), d\psi_p(v_2) \rangle \\ &= \mu^2(p) \lambda^2(p) \langle v_1, v_2 \rangle \\ &= \rho^2(p) \langle v_1, v_2 \rangle; \end{aligned}$$

donde ρ^2 es una función diferenciable no nula sobre S^2 .

2. Claramente la aplicación identidad $id \in G(S^2)$ En efecto dado que:

$$did_p(v) = \frac{d}{dt} id \circ \alpha(t)|_{t=0} \text{ donde } \alpha : I \rightarrow S^2 \text{ y } \alpha(0) = p, \alpha'(0) = v;$$

entonces $did_p(v) = v$. Análogamente $did_p(w) = w$. Entonces,

$$\langle did_p(v), did_p(w) \rangle = \langle v, w \rangle;$$

en este caso $\lambda \equiv 1$.

3. Por otra parte si $\varphi \in G(S^2)$, entonces $\varphi^{-1} \in G(S^2)$. En efecto, como

$$d(\varphi \circ \varphi^{-1})_q(v) = d\varphi_{\varphi^{-1}(q)}(d\varphi_q^{-1}(v)),$$

y $\varphi \circ \varphi^{-1} = id$ entonces

$$\begin{aligned}\langle v, w \rangle &= \langle d(\varphi \circ \varphi^{-1})_q(v), d(\varphi \circ \varphi^{-1})_q(w) \rangle \\ &= \langle d\varphi_{\varphi^{-1}(q)}(d\varphi_q^{-1}(v)), d\varphi_{\varphi^{-1}(q)}(d\varphi_q^{-1}(w)) \rangle \\ &= \lambda^2(\varphi^{-1}(q)) \langle d\varphi_q^{-1}(v), d\varphi_q^{-1}(w) \rangle; \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\langle d\varphi_q^{-1}(v), d\varphi_q^{-1}(w) \rangle = \frac{1}{\lambda^2(\varphi^{-1}(q))} \langle v, w \rangle.$$

Luego φ^{-1} es una aplicación conforme.

4. Finalmente note que si $\varphi, \psi, \gamma \in G(S^2)$ entonces $(\psi \circ \varphi) \circ \gamma = \psi \circ (\varphi \circ \gamma)$.
Por lo tanto $\langle G(S^2); \circ \rangle$ es un grupo.

□

Observación

Este grupo no es abeliano dado que $\varphi \circ \psi \neq \psi \circ \varphi$.

Con los resultados anteriores se finaliza lo relacionado a aplicaciones conformes entre superficies regulares. A continuación el objetivo será construir una aplicación conforme en S^2 y mostrar algunas de sus propiedades.

Capítulo 3

Construcción de la aplicación conforme F_g

En el estudio del capítulo anterior se dio una caracterización de las isometrías $\varphi : S^n \rightarrow S^n$. Ahora el objetivo es construir una aplicación conforme $F_g : S^2 \rightarrow S^2$ al proyectar un campo vectorial constante de \mathbb{R}^3 sobre S^2 y hallar su flujo a partir del teorema de existencia y unicidad de las curvas integrales sobre superficies regulares. Una de las aplicaciones de este tipo de transformaciones es el estudio que **Peter Li and Shing-Tung Yau**, hacen en el campo de volúmenes conformes. Ver [7]

En esta sección las proposiciones (3.1), (3.2) no se demostrarán debido a que su prueba esta en el campo de las ecuaciones diferenciales. Dichos resultados se podrán consultar en la bibliografía de esta monografía.

Definición 3.1 (Campo vectorial sobre una superficie). *Un campo de vectores diferenciable sobre una superficie S de \mathbb{R}^3 , viene dado por una aplicación*

$$w : V \subset S \longrightarrow TS, \quad p \mapsto w(p), \quad w(p) = a(p)X_u + b(p)X_v;$$

donde V es un abierto de \mathbb{R}^3 contenido en S ,

$$TS = \bigcup_{p \in S} T_p S;$$

$$y \quad a : V \subset S \rightarrow \mathbb{R}, \quad b : V \subset S \rightarrow \mathbb{R};$$

son diferenciables en p .

En esta sección el conjunto de todos los campos de vectores diferenciables sobre S se denotará por $\chi(S)$.

Ejemplo 17 (Campos vectoriales en S^2). Sea $X(\theta, \varphi) = (\text{sen } \theta \cos \varphi, \text{sen } \theta \text{sen } \varphi, \cos \theta)$, $0 < \theta < \pi$, $0 < \varphi < 2\pi$ una parametrización de la esfera. Las aplicaciones $w : S^2 \rightarrow TS^2$ que se definirán a continuación son campos vectoriales sobre S^2 .

1. $w(p) = X_\theta(\theta, \varphi) = (\cos \theta \cos \varphi, \cos \theta \text{sen } \varphi, -\text{sen } \theta)$, $X(\theta, \varphi) = p$.
2. $w(p) = X_\varphi(\theta, \varphi) = (-\text{sen } \varphi \text{sen } \theta, \cos \varphi \text{sen } \theta, 0)$, $X(\theta, \varphi) = p$.
3. $w(p) = u - \langle u, p \rangle p$, $\|u\| = 1$, $u \in \mathbb{R}^3$

Observacion

En los párrafos siguientes se hallará el flujo de los anteriores campos vectoriales, mostrando gráficas que ilustren de manera clara dichas aplicaciones. Es más se hará especial énfasis en el tercer campo vectorial, pues a raíz de este surge la aplicación conforme F_g .

Definición 3.2 (Curva integral). Una curva diferenciable $\alpha : I \rightarrow S$ es una curva integral de un campo vectorial $w \in \chi(S)$ si $\alpha'(t) = w(\alpha(t))$ para todo $t \in I$.

El teorema de existencia y unicidad para las soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias en \mathbb{R}^n permite obtener el siguiente resultado, en términos de superficies regulares.

Proposición 3.1. *Para todo campo de vectores diferenciable w sobre S y para todo punto $p \in S$ existe un intervalo $(-\epsilon, \epsilon) \subset \mathbb{R}$ y una única curva integral del campo, definida en dicho intervalo y con punto inicial p .*

Es decir existe $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow S$ tal que: $\alpha'(t) = w(\alpha(t))$ y $\alpha(0) = p$

Demostración. Ver (Lafuente [6] , pp. 33)

□

Si consideramos todas las curvas integrales del campo vectorial w con punto inicial p , dado que dos cualesquiera de ellas coinciden en la intersección de sus dominios, podemos definir la curva integral maximal de w con punto inicial p , cuyo dominio de definición es el mayor posible. En esta sección dicho dominio se denotará por I_p , o I_q .

3.1. Flujo de un campo

Ligado al concepto de campo de vectores se encuentra el de flujo del campo, que determina el grupo local uniparamétrico de transformaciones $\{\psi^t\}_{t \in \mathbb{R}}$ asociado al campo de vectores w , donde ψ_t está definido en un cierto subconjunto dependiente de t , y tal que si p es un punto de S^2 , $\psi^t(p)$ es el valor en t de la curva integral maximal de w con punto inicial p . En otras palabras, t nos describe la posición de cada punto de su dominio en el instante t ; es como una fotografía de una parte de S^2 tomada justo en el instante t .

Definición 3.3. *Sea $D = \{(t, p) \in \mathbb{R} \times S^2 : t \in I_p\}$. Se define el flujo de w como la aplicación*

$$\psi : D \rightarrow S^2, \quad (t, p) \mapsto \psi(t, p) = \alpha_p(t),$$

donde $\alpha_p(t)$ denota la curva integral con punto inicial p en el instante t .

3.2. Flujos sobre S^2

En los párrafos anteriores se definieron campos vectoriales sobre S^2 a continuación hallaremos el flujo de dichas aplicaciones.

Ejemplo 18. Sea S^2 la esfera 2-dimensional, $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S^2$ la parametrización dada por $X(\theta, \varphi) = (\text{sen } \theta \cos \varphi, \text{sen } \theta \text{sen } \varphi, \cos \theta)$, $0 < \theta < \pi$, $0 < \varphi < 2\pi$ y consideremos el campo vectorial $w : S^2 \rightarrow TS^2$ definido por

$$w(p) = X_\theta(\theta, \varphi) = (\cos \theta \cos \varphi, \cos \theta \text{sen } \varphi, -\text{sen } \theta), \quad 0 < \theta < \pi, \quad 0 < \varphi < 2\pi \text{ donde } X(\theta, \varphi) = p.$$

Hallemos el flujo de dicho campo para ello consideremos la curva $\alpha : (0, \pi) \rightarrow S^2$ definido así: $\alpha(t) = (\frac{1}{\sqrt{2}} \text{sen } t, \frac{1}{\sqrt{2}} \text{sen } t, \cos t)$,

α así definida es una curva integral del campo vectorial w .

En efecto $\alpha'(t) = (\frac{1}{\sqrt{2}} \cos t, \frac{1}{\sqrt{2}} \cos t, -\text{sen } t)$ y claramente $\alpha'(t) = w(\alpha(t))$, para todo $t \in (0, \pi)$ pues $w(\alpha(t)) = X_\theta(t, \frac{\pi}{4}) = (\frac{1}{\sqrt{2}} \cos t, \frac{1}{\sqrt{2}} \cos t, -\text{sen } t)$.

Así el flujo del campo w definido anteriormente esta dado por $\psi(t, p) = \alpha_p(t)$. El lector puede observar en la figura (3.1) el flujo del campo w .

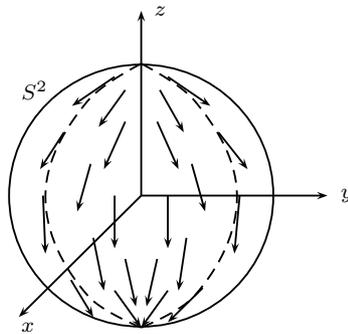


Figura 3.1: Interpretación geométrica del ejemplo (18).

Ejemplo 19. Tomemos a S^2 con la misma parametrización del ejemplo anterior y consideremos el campo vectorial $w : S^2 \rightarrow TS^2$ definido por,
 $w(p) = X_\varphi(\theta, \varphi)(-\sin \varphi \sin \theta, \cos \varphi \sin \theta, 0)$, $X(\theta, \varphi) = p$.

Encontremos el flujo, tomemos la curva $\beta : (0, 2\pi) \rightarrow S^2$ definida por $\beta(t) = (\cos t, \sin t, 0)$, β así definida es una curva integral del campo vectorial w .

Dado que $\beta'(t) = (-\sin t, \cos t, 0)$ y claramente $\beta'(t) = w(\beta(t))$ para todo $t \in (0, 2\pi)$ pues $w(\beta(t)) = X_\varphi(\frac{\pi}{2}, t) = (-\sin t, \cos t, 0) = \beta'(t)$.

Por lo tanto el flujo $\psi(t, p) = \beta_p(t)$. En la figura(3.2) se puede apreciar el flujo de w .

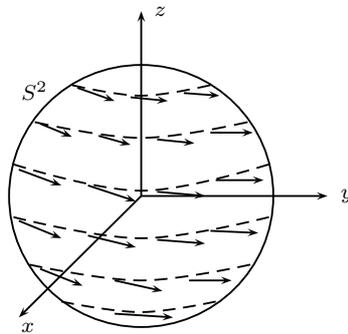


Figura 3.2: Interpretación geométrica del ejemplo (19).

Proposición 3.2. Si $\{\psi_t\}$ es el flujo de un campo w entonces:

1. $\psi_0 = I$.
2. $\psi_s \circ \psi_t = \psi_{s+t}$.
3. ψ_t es un difeomorfismo con $\psi_t^{-1} = \psi_{-t}$.

Demostración. Ver (Lafuente [6], pp. 34-35)

□

Observación

A las aplicaciones $\{\psi_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ se le denomina grupo uniparamétrico de difeomorfismos. A continuación mostraremos una gráfica que ilustre las dos primeras condiciones de la proposición (3.2)

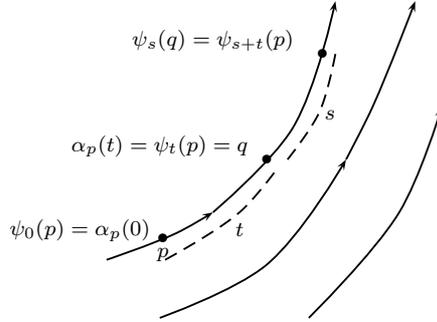


Figura 3.3: Interpretación geométrica de la proposición (3.2).

Definición 3.4. Sea S una superficie regular. Un campo vectorial w sobre S es conforme si las aplicaciones del grupo uniparamétrico de difeomorfismos generado por w son conformes.

Esta definición es de gran importancia dado que relaciona la teoría desarrollada en las aplicaciones conformes entre superficies regulares con los campos vectoriales sobre superficies y ello permite establecer el siguiente resultado.

Teorema 3.1. Si S^2 es la esfera unidad y u un vector unitario de \mathbb{R}^3 , entonces el campo vectorial

$$\begin{aligned} \mu^T : S^2 &\longrightarrow TS^2 \\ m &\longrightarrow \mu^T(m) = u - \langle u, m \rangle m \end{aligned}$$

es un campo vectorial conforme.

Una interpretación geométrica de la aplicación μ^T la muestra la figura (3.4).

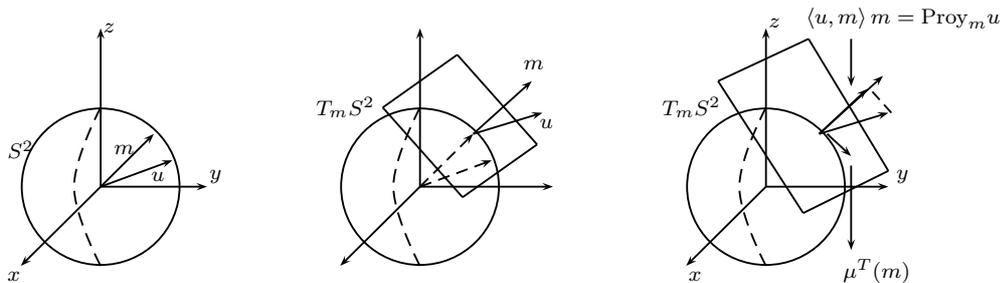


Figura 3.4: Interpretación geométrica de la aplicación $\mu^T(m)$.

Demostración. Se debe hallar $\beta : I \rightarrow S^2$ tal que para $q \in S^2$, $\beta'(t) = \mu^T(\beta(t))$ y $\beta(0) = q$.

Tratar de resolver este problema para cualquier vector de norma uno directamente probablemente encontremos ecuaciones diferenciales que no se puedan resolver de forma inmediata, por esta razón lo resolveremos el problema para el campo vectorial $e_1^T(m)$ y posteriormente con aplicaciones ortogonales se resolverá para cualquier vector de S^2 .

Por otra parte dado $u \in \mathbb{R}^3$ tal que $\|u\| = 1$ existe A ortogonal tal que $u = Ae_1$ y consideremos $p \in S^2$ tal que $q = Ap$.

Hallemos primero una solución $\alpha : I \rightarrow S^2$ tal que

$$\alpha'(t) = e_1^T(\alpha(t)) = e_1 - \langle e_1, \alpha(t) \rangle \alpha(t) \quad \text{y} \quad \alpha(0) = p \in S^2.$$

Si escribimos $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$ y $\alpha(0) = p = (a, b, c)$ donde $x^2(t) + y^2(t) + z^2(t) = 1$ y $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, entonces consideremos las ecuaciones;

$$\begin{cases} x'(t) &= 1 - x^2(t) \\ y'(t) &= -x(t)y(t) \\ z'(t) &= -x(t)z(t). \end{cases} \quad (3.1)$$

De la primera ecuación del sistema anterior se obtiene:

$$\int_0^t \frac{x'(s)ds}{1 - x^2(s)} = \int_0^t ds.$$

Sea $w = x(s)$ entonces $dw = x'(s)ds$ y

$$\int_0^t \frac{x'(s)ds}{1-x^2(s)} = \int_{x(0)}^{x(t)} \frac{dw}{1-w^2} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{w+1}{w-1} \right| \Big|_{x(0)}^{x(t)} = t,$$

por lo tanto,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x(t)+1}{x(t)-1} \right| - \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x(0)+1}{x(0)-1} \right| &= t \\ \frac{x(t)+1}{x(t)-1} &= e^{2t} \left(\frac{a+1}{a-1} \right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{(a+1)e^{2t} + (a-1)}{(a+1)e^{2t} - (a-1)} \\ &= \frac{a(e^{2t}+1) + e^{2t} - 1}{a(e^{2t}) - 1 + e^{2t} + 1} \\ &= \frac{a + \frac{e^{2t}-1}{e^{2t}+1}}{a \frac{e^{2t}-1}{e^{2t}+1} + 1} = \frac{a + \tanh t}{a \tanh t + 1}. \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta la identidad,

$$\tanh(u+v) = \frac{\tanh u + \tanh v}{1 + \tanh u \tanh v}.$$

tenemos que

$$\begin{aligned} \tanh(\tanh^{-1}(a) + t) &= \frac{\tanh(\tanh^{-1}(a)) + \tanh t}{1 + \tanh(\tanh^{-1}(a)) \tanh t} \\ &= \frac{a + \tanh t}{1 + a \tanh t}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, podemos escribir $x(t)$ así

$$x(t) = \tanh(\tanh^{-1}(a) + t).$$

Ahora resolvamos la segunda ecuación a partir del resultado anterior,

$$\begin{aligned} \int_0^t \frac{y'(s)}{y(s)} ds &= - \int_0^t x(s) ds \\ \ln |y(t)| - \ln |y(0)| &= - \int_0^t \tanh(\tanh^{-1}(a) + s) ds \\ &= - \ln \left| \cosh(\tanh(\tanh^{-1}(a) + s)) \right| \Big|_0^t \\ &= - \ln \left| \cosh(\tanh^{-1} a + t) \right| + \ln \left| \cosh(\tanh^{-1}(a)) \right|. \end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned} \ln \left| \frac{y(t)}{y(0)} \right| &= \ln \left(\frac{\cosh(\tanh^{-1}(a))}{\cosh(\tanh^{-1}(a) + t)} \right) \\ y(t) &= \frac{b \cosh(\tanh^{-1}(a))}{\cosh(\tanh^{-1}(a) + t)}. \end{aligned}$$

Análogamente se prueba que

$$z(t) = \frac{c \cosh(\tanh^{-1}(a))}{\cosh(\tanh^{-1}(a) + t)}.$$

Por consiguiente la curva integral que pasa por $p = (a, b, c) \in S^2$ del campo vectorial definido por $e_1^T(m) = e_1 - \langle e_1, m \rangle m$ está dada por:

$$\alpha(t) = \left(\tanh(\tanh^{-1}(a) + t), \frac{b \cosh(\tanh^{-1}(a))}{\cosh(\tanh^{-1}(a) + t)}, \frac{c \cosh(\tanh^{-1}(a))}{\cosh(\tanh^{-1}(a) + t)} \right)$$

y además toma sus valores en S^2 . Se debe probar que $\|\alpha(t)\|^2 = 1$:

$$\|\alpha(t)\|^2 = \tanh^2(\tanh^{-1}(a) + t) + \frac{b^2 \cosh^2(\tanh^{-1}(a))}{\cosh^2(\tanh^{-1}(a) + t)} + \frac{c^2 \cosh^2(\tanh^{-1}(a))}{\cosh^2(\tanh^{-1}(a) + t)},$$

como $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, entonces $b^2 + c^2 = 1 - a^2$ en consecuencia;

$$\|\alpha(t)\|^2 = \frac{\sinh^2(\tanh^{-1}(a) + t) + \cosh^2(\tanh^{-1}(a)) - a^2 \cosh^2(\tanh^{-1}(a))}{\cosh^2(\tanh^{-1}(a) + t)};$$

por otra parte $\sinh^2(\tanh^{-1}(a)) = a^2 \cosh^2(\tanh^{-1}(a))$ dado que,

$$\frac{\sinh^2(\tanh^{-1}(a))}{\cosh^2(\tanh^{-1}(a))} = \tanh^2(\tanh^{-1}(a)) = a^2;$$

en conclusión,

$$\begin{aligned} \|\alpha(t)\|^2 &= \frac{\sinh^2(\tanh^{-1}(a) + t) + \cosh^2(\tanh^{-1}(a)) - \sinh^2(\tanh^{-1}(a))}{\cosh^2(\tanh^{-1}(a) + t)} \\ &= \frac{\sinh^2(\tanh^{-1}(a) + t) + 1}{\cosh^2(\tanh^{-1}(a) + t)} = 1 \end{aligned}$$

La curva $\alpha(t)$ se puede escribir así:

$$\begin{aligned} \alpha(t) &= \frac{p \cosh(\tanh^{-1}(a))}{\cosh(\tanh^{-1}(a) + t)} + \left(\frac{\sinh(\tanh^{-1}(a) + t)}{\cosh(\tanh^{-1}(a) + t)} - \frac{a \cosh(\tanh^{-1}(a))}{\cosh(\tanh^{-1}(a) + t)} \right) e_1 \\ &= \frac{p \cosh(\tanh^{-1}(a))}{\cosh(\tanh^{-1}(a)) \cosh t + \sinh(\tanh^{-1}(a)) \sinh t} \\ &\quad + \frac{(\sinh(\tanh^{-1}(a)) \cosh t + \cosh(\tanh^{-1}(a)) \sinh t - a \cosh(\tanh^{-1}(a))) e_1}{\cosh(\tanh^{-1}(a)) \cosh t + \sinh(\tanh^{-1}(a)) \sinh t} \\ &= \frac{p + (a \cosh t + \sinh t - a) e_1}{\cosh t + a \sinh t} \\ &= \frac{p + \langle p, e_1 \rangle (\cosh t - 1) + \sinh t e_1}{\langle p, e_1 \rangle \sinh t + \cosh t}. \end{aligned}$$

Como $\beta(t) = A\alpha(t)$ entonces

$$\begin{aligned} \beta(t) &= \frac{Ap + (\langle Ap, Ae_1 \rangle (\cosh t - 1) + \sinh t) Ae_1}{\langle Ap, Ae_1 \rangle \sinh t + \cosh t} \\ &= \frac{q + (\langle q, u \rangle (\cosh t - 1) + \sinh t) u}{\langle q, u \rangle \sinh t + \cosh t}. \end{aligned}$$

Claramente $\beta : I \rightarrow S^2$ satisface que $\beta(0) = q$ y $\beta'(t) = u - \langle u, \beta(t) \rangle \beta(t)$ pues,

$$\begin{aligned} \beta'(t) &= A\alpha'(t) = A(e_1^T(\alpha(t))) = A(e_1 - \langle e_1, \alpha(t) \rangle \alpha(t)) \\ &= Ae_1 - \langle Ae_1, A\alpha(t) \rangle A\alpha(t) \\ &= u - \langle u, \beta(t) \rangle \beta(t) = \mu^T(\beta(t)). \end{aligned}$$

Si consideramos a $D = \{(t, p) \in \mathbb{R} \times S^2 | t \in I_q\}$ entonces el flujo del campo vectorial μ^T está dado por:

$$\begin{aligned}\psi : D &\rightarrow S^2, \\ (t, q) &\rightarrow \psi(t, q) = \beta_q(t),\end{aligned}$$

donde $\beta_q(t)$ es la curva integral con punto inicial q en el instante t del campo vectorial definido por la aplicación μ^T .

Como $\{\psi^t\}_{t \in \mathbb{R}}$ es el grupo uniparamétrico de difeomorfismos. Se demostrará entonces que las transformaciones $\psi^t : S^2 \rightarrow S^2$ son aplicaciones conformes. Escribiendo $\psi(t, q) = \psi_q^t$, se debe probar que para un t fijo se cumple,

$$\langle d\psi_p^t(v), d\psi_p^t(w) \rangle = \lambda^2 \langle v, w \rangle$$

para todo $v, w \in T_p S^2$ y λ^2 una función diferenciable no nula sobre S^2 .

Calculemos $d\psi_p^t(v)$ para ello consideremos una curva $\gamma : J \rightarrow S^2$ diferenciable tal que $\gamma(0) = q$ y $\gamma'(0) = v$. Entonces

$$\begin{aligned}d\psi_q^t(v) &= \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} \psi^t(\gamma(s)) \\ &= \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} \frac{\gamma(s) + (\langle \gamma(s), u \rangle (\cosh t - 1) + \sinh t)u}{\langle \gamma(s), u \rangle \sinh t + \cosh t} \\ &= \frac{(\langle q, u \rangle \sinh t + \cosh t) \{v + (\langle v, u \rangle (\cosh t - 1))u\}}{(\langle q, u \rangle \sinh t + \cosh t)^2} \\ &\quad - \frac{(q + (\langle q, u \rangle (\cosh t - 1) + \sinh t)u) (\langle v, u \rangle \sinh t)}{(\langle q, u \rangle \sinh t + \cosh t)^2} \\ &= \frac{v}{(\langle q, u \rangle \sinh t + \cosh t)} + \frac{(\langle v, u \rangle (\cosh t - 1))u}{(\langle q, u \rangle \sinh t + \cosh t)} - \frac{\langle q, u \rangle (\cosh t - 1) \langle v, u \rangle u \sinh t}{(\langle q, u \rangle \sinh t + \cosh t)^2} \\ &\quad - \frac{q \langle v, u \rangle \sinh t}{(\langle q, u \rangle \sinh t + \cosh t)^2} - \frac{u \langle v, u \rangle \sinh^2 t}{(\langle q, u \rangle \sinh t + \cosh t)^2} \\ &= \frac{v}{(\langle q, u \rangle \sinh t + \cosh t)} + \frac{\cosh t \langle v, u \rangle (\cosh t - 1)u}{(\langle q, u \rangle \sinh t + \cosh t)^2} \\ &\quad - \frac{q \langle v, u \rangle \sinh t}{(\langle q, u \rangle \sinh t + \cosh t)^2} - \frac{u \langle v, u \rangle \sinh^2 t}{(\langle q, u \rangle \sinh t + \cosh t)^2}.\end{aligned}$$

Por consiguiente,

$$d\psi_q^t(v) = \frac{v}{(\langle q, u \rangle \sinh t + \cosh t)} + \frac{u \langle v, u \rangle (1 - \cosh t)}{(\langle q, u \rangle \sinh t + \cosh t)^2} - \frac{q \langle v, u \rangle \sinh t}{(\langle q, u \rangle \sinh t + \cosh t)^2};$$

luego,

$$\langle d\psi_q^t(v), d\psi_q^t(v) \rangle = \frac{\langle v, v \rangle}{(\langle q, u \rangle \sinh t + \cosh t)^2}.$$

Ahora si se tiene en cuenta que

$$\langle v, w \rangle = \frac{\langle v + w, v + w \rangle - \langle v, v \rangle - \langle w, w \rangle}{2},$$

entonces

$$\begin{aligned} \langle d\psi_q^t(v), d\psi_q^t(w) \rangle &= \frac{\langle d\psi_q^t(v + w), d\psi_q^t(w + w) \rangle}{2} - \frac{\langle d\psi_q^t(v), d\psi_q^t(v) \rangle}{2} \\ &\quad - \frac{\langle d\psi_q^t(w), d\psi_q^t(w) \rangle}{2} \\ &= \frac{\langle v + w, v + w \rangle - \langle v, v \rangle - \langle w, w \rangle}{2(\langle q, u \rangle \sinh t + \cosh t)^2} \\ &= \frac{\langle v, w \rangle}{(\langle q, u \rangle \sinh t + \cosh t)^2}. \end{aligned}$$

Resta mostrar que

$$\frac{1}{(\langle q, u \rangle \sinh t + \cosh t)^2} = \lambda^2(t, q)$$

es diferenciable y no nula.

Claramente $\lambda^2(t, q) \neq 0$, probemos que el denominador de $\lambda^2(t, q)$ no se anula para todo $q \in S^2$ y todo $t \in I_q$.

Si $\langle q, u \rangle = 0$ entonces como $\cosh t \neq 0$ para todo $t \in I_q$ entonces $\lambda^2(t, q)$ es diferenciable.

Si $\langle q, u \rangle \neq 0$, supongamos que $\langle q, u \rangle \sinh t + \cosh t = 0$. Luego existe $t_0 \in I_q$ tal que, $\langle q, u \rangle \sinh t_0 + \cosh t_0 = 0$, así $\tanh t_0 = \frac{-1}{\langle q, u \rangle}$; como $\|u\| = \|q\| = 1$ entonces

$-1 \leq \langle q, u \rangle \leq 1$. Por lo tanto si $-1 \leq \langle q, u \rangle < 0$ se tiene que $1 \geq \tanh t_0$ y esto no es posible, dado que $-1 < \tanh t < 1$, ver figura (3.5).

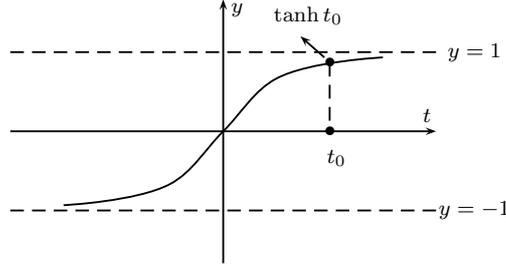


Figura 3.5: $y = \tanh t$.

De la misma forma se prueba cuando $0 < \langle q, u \rangle \leq 1$. En consecuencia

$$\frac{1}{(\langle q, u \rangle \sinh t + \cosh t)^2}$$

esta bien definida. Así, las aplicaciones $\psi^t : S^2 \rightarrow S^2$ son conformes. \square

3.3. La aplicación conforme F_g

Definición 3.5. *Teniendo en cuenta lo anterior surgen las aplicaciones conformes en la variable q*

$$\psi^{t^*}(q) = \frac{q + (\langle q, u \rangle (\cosh t^* - 1) + \sinh t^*)u}{\langle q, u \rangle \sinh t^* + \cosh t^*}.$$

$$F_g(q) = \frac{q + \left(\left\langle q, \frac{g}{\|g\|} \right\rangle (\cosh t^* - 1) + \sinh t^*\right) \frac{g}{\|g\|}}{\left\langle q, \frac{g}{\|g\|} \right\rangle \sinh t^* + \cosh t^*}.$$

Para todo $g \in B_1^3(0)$ donde

$$B_1^3(0) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 < 1\}$$

$$y \quad t^* = \ln \left(\frac{1 + \|g\|}{1 - \|g\|} \right)^{1/2}.$$

La elección particular de $t^* = \ln \left(\frac{1 + \|g\|}{1 - \|g\|} \right)^{1/2}$ se puede hacer debido a que,

$\|\beta(t)\|^2 = \langle A\alpha(t), A\alpha(t) \rangle = \|\alpha(t)\|^2 = 1$ para todo $t \in I$. Tal elección permite llegar a los siguientes resultados.

3.4. Propiedades de la aplicación F_g

Teorema 3.2. *La aplicación $F_g : S^2 \rightarrow S^2$ definida anteriormente satisface las siguientes propiedades:*

1. $F_g(q) = \frac{q + (\mu_g \langle q, g \rangle + \lambda_g)g}{\lambda_g (\langle q, g \rangle + 1)}$, donde $\lambda_g = (1 - \|g\|^2)^{-\frac{1}{2}}$; $\mu_g = (\lambda_g - 1)\|g\|^{-2}$
 $\forall g \in B^3 \subset \mathbb{R}^3$.
2. F_g es conforme e invertible.
3. La inversa de F_g es F_{-g} .
4. $\lim_{g \rightarrow 0} F_g = \text{id}$.
5. Para todo $v, w \in T_q S^2$ la diferencial dF_g satisface:

$$\langle dF_g(v), dF_g(w) \rangle = \frac{1 - \|g\|^2}{(\langle p, g \rangle + 1)^2} \langle v, w \rangle.$$

Demostración. 1. Si $t^* = \ln \left(\frac{1+\|g\|}{1-\|g\|} \right)^{1/2}$ entonces

$$\begin{aligned} \cosh t^* &= \frac{\left(\frac{1+\|g\|}{1-\|g\|} \right)^{1/2} + \left(\frac{1+\|g\|}{1-\|g\|} \right)^{-1/2}}{2} = \frac{\frac{(1+\|g\|)^{1/2}}{(1-\|g\|)^{1/2}} + \frac{(1-\|g\|)^{1/2}}{(1+\|g\|)^{1/2}}}{2} \\ &= \frac{2}{\frac{(1-\|g\|)^{1/2}(1+\|g\|)^{1/2}}{2}} = \frac{1}{(1 - \|g\|^2)^{1/2}}. \end{aligned}$$

En consecuencia

$$\cosh t^* = \frac{1}{(1 - \|g\|^2)^{1/2}};$$

similarmente se prueba que

$$\sinh t^* = \frac{\|g\|}{(1 - \|g\|^2)^{1/2}}.$$

Remplazando en la definición (3.5) tenemos que,

$$\begin{aligned}
F_g(q) &= \frac{q \left(\left\langle q, \frac{g}{\|g\|} \right\rangle \left(\frac{1}{(1-\|g\|^2)^{1/2}} - 1 \right) + \frac{\|g\|}{(1-\|g\|^2)^{1/2}} \right) \frac{g}{\|g\|}}{\left\langle q, \frac{g}{\|g\|} \right\rangle \frac{\|g\|}{(1-\|g\|^2)^{1/2}} + \frac{1}{(1-\|g\|^2)^{1/2}}} \\
&= \frac{q + \left(\left(\frac{(1-(1-\|g\|^2)^{1/2})}{\|g\|^2(1-\|g\|^2)^{1/2}} \right) \langle q, g \rangle + (1-\|g\|^2)^{-1/2} \right) g}{(\langle q, g \rangle + 1) (1-\|g\|^2)^{-1/2}} \\
&= \frac{q + \left((\|g\|^{-2} ((1-\|g\|^2)^{-1/2} - 1)) \langle q, g \rangle + (1-\|g\|^2)^{-1/2} \right) g}{(\langle q, g \rangle + 1) (1-\|g\|^2)^{-1/2}} \\
&= \frac{q + ((\|g\|^{-2} (\lambda_g - 1)) \langle q, g \rangle + \lambda_g) g}{(\langle q, g \rangle + 1) \lambda_g}.
\end{aligned}$$

En consecuencia se tiene que,

$$F_g(q) = \frac{q + (\mu_g \langle q, g \rangle + \lambda_g) g}{\lambda_g (\langle q, g \rangle + 1)},$$

donde $\lambda_g = (1 - \|g\|^2)^{-\frac{1}{2}}$; $\mu_g = (\lambda_g - 1) \|g\|^{-2}$.

2. La aplicación F_g se construyó a partir de las aplicaciones ψ_q^t y dichas aplicaciones son invertibles entonces F_g es invertible, además en el teorema (3.1) se probó que las aplicaciones ψ_q^t son conformes así se puede concluir que $F_g : S^2 \rightarrow S^2$ es conforme e invertible.
3. Dado que la inversa de $\psi^{\ln(\frac{1+\|g\|}{1-\|g\|})^{1/2}}$ es $\psi^{-\ln(\frac{1+\|g\|}{1-\|g\|})^{1/2}}$, basta probar que $F_{-g} = \psi^{-\ln(\frac{1+\|g\|}{1-\|g\|})^{1/2}}$.

Sea $t^* = \psi^{-\ln(\frac{1+\|g\|}{1-\|g\|})^{1/2}}$, luego

$$\begin{aligned}
\psi^{-t^*} &= \frac{q + \left(\left\langle q, \frac{g}{\|g\|} \right\rangle (\cosh(-t^*) - 1) + \sinh(-t^*) \right) \frac{g}{\|g\|}}{\left\langle q, \frac{g}{\|g\|} \right\rangle \sinh(-t^*) + \cosh(-t^*)} \\
&= \frac{q + \left(\left\langle q, \frac{g}{\|g\|} \right\rangle (\cosh t^* - 1) - \sinh t^* \right) \frac{g}{\|g\|}}{\left\langle q, \frac{g}{\|g\|} \right\rangle (-\sinh t^*) + \cosh t^*} \\
&= \frac{q + \left(\left\langle q, -\frac{g}{\|g\|} \right\rangle (\cosh t^* - 1) + \sinh t^* \right) \left(-\frac{g}{\|g\|} \right)}{\left\langle q, -\frac{g}{\|g\|} \right\rangle (\sinh t^*) + \cosh t^*} \\
&= F_{-g},
\end{aligned}$$

y esta igualdad se da gracias a que $\ln(\frac{1+\|g\|}{1-\|g\|})^{1/2} = \ln(\frac{1+\|-g\|}{1-\|-g\|})^{1/2}$.

4. Como $\lim_{g \rightarrow 0} \lambda_g = 1$ entonces para hallar $\lim_{g \rightarrow 0} \mu_g$ se puede aplicar L'Hópital pues al evaluar el limite tanto en el numerador como en el denominador se obtiene una indeterminación de la forma $\frac{0}{0}$ y en consecuencia $\lim_{g \rightarrow 0} \mu_g = \frac{1}{2}$; por lo tanto

$$\lim_{g \rightarrow 0} F_g(q) = \lim_{g \rightarrow 0} \frac{q + (\mu_g \langle q, g \rangle + \lambda_g)g}{\lambda_g (\langle q, g \rangle + 1)} = q;$$

Así $\lim_{g \rightarrow 0} F_g(q) = I$, para todo $q \in S^2$.

5. Debido a que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\left(\left\langle q, \frac{g}{\|g\|} \right\rangle \sinh t^* + \cosh t^* \right)^2} &= \frac{1}{\left(\left\langle q, \frac{g}{\|g\|} \right\rangle \frac{\|g\|}{(1-\|g\|^2)^{1/2}} + \frac{1}{(1-\|g\|^2)^{1/2}} \right)} \\
&= \frac{1 - \|g\|^2}{(\langle q, g \rangle + 1)^2},
\end{aligned}$$

Como la segunda propiedad nos garantiza que la aplicación $F_g : S^2 \rightarrow S^2$ es conforme entonces,

$$\langle dF_g(v), dF_g(w) \rangle = \frac{1 - \|g\|^2}{(\langle q, g \rangle + 1)^2} \langle v, w \rangle.$$

□

Es de notar que el teorema (3.1) es valido para S^n y las propiedades anteriormente probadas se siguen cumpliendo, ello permite establecer las siguientes aplicaciones.

3.5. Generalizaciones de las aplicaciones conformes

La transformación F_g es uno de los aspectos mas destacados de este trabajo, pues a partir de resultados muy generales como el de existencia y unicidad de las curvas integrales para superficies regulares se encuentra el flujo de un campo vectorial definido en S^2 y con la herramienta desarrollada en los anteriores capítulos tales como aplicaciones conformes se logra probar que las aplicaciones ψ_q^t son conformes; posteriormente haciendo una elección apropiada de t se logran establecer propiedades que también son validas para S^n y ello permite formular el siguiente resultado.

Teorema 3.3. *Sea S^n la esfera n -dimensional y \mathbf{G} el grupo conforme de S^n entonces cada transformación de \mathbf{G} puede ser expresada por $\varphi \circ F_g$ donde φ es una transformación ortogonal de S^n y F_g esta dado por (3.2) para algun $g \in B_1^{n+1}(0)$, donde*

$$B_1^{n+1}(0) = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2 < 1\}$$

Demostración. Ver (Montiel, Ros [6])

□

Observación

Si $\varphi \in \mathbf{G}$ es una isometría entonces por el teorema (2.4), sabemos que existe una aplicación lineal ortogonal $T : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ tal que $\varphi = T|_{S^n}$ y en caso $\varphi = \varphi \circ F_0 = \varphi \circ I$.

Un resultado análogo se establece para espacio hiperbólico H^n .

Teorema 3.4. *Las isometrías del espacio hiperbólico $H^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n | x_n > 0\}$ son las restricciones a $H^n \subset \mathbb{R}^n$ de las aplicaciones conformes de \mathbb{R}^n que llevan a H^n sobre si mismo.*

Demostración. Ver (Do Carmo [3], pp. 194)

□

CONCLUSIONES

1. Este trabajo se ha hecho tomando como punto de partida conceptos básicos de geometría diferencial, ecuaciones diferenciales tales como el teorema de existencia y unicidad de las curvas integrales para superficies regulares de tal manera que el lector pueda apreciar como se construye a la aplicación conforme F_g .
2. En virtud del teorema Egregium de Gauss se logró establecer que no existe una isometría entre la esfera y el plano.
3. La aplicación conforme F_g es de gran importancia dado que ellas generan a cualquier aplicación conforme de S^n en el siguiente sentido. Si $\phi : S^n \rightarrow S^n$ es una transformación conforme entonces existe $A : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ ortogonal tal que $\phi = A|_{S^n} \circ F_g$.
4. La teoría de isometrías y transformaciones conformes ha llevado a que mucha gente de la comunidad matemática estudie invariantes conformes de volúmenes tales como lo hacen **Peter Li and Shing-Tung Yau** en [8] .
5. Para cálculos explícitos es importante tener la aplicación F_g tal como lo muestra [7]
6. Debido a la aplicabilidad que tiene este trabajo espero en un futuro trabajar en este campo de investigación.

BIBLIOGRAFÍA

- [1] CHERN. S.S. *On the Existence of Isothermal Parameters*. Proceedings of A.M.S 1957.
- [2] LUIS A. CORDERO, MARISA FENANDEZ, ALFRED GRAY. *Geometría diferencial de curvas y superficies con matemática* ADDISON-WESLEY IBEROAMERICANA.
- [3] MANFREDO P. DO CARMO. *Differential Geometry of Curves and Surfaces*. Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA). Río de Janeiro, Brasil. Primera Edición. New Jersey, 1976.
- [4] MANFREDO P. DO CARMO. *Geometría Riemanniana*. Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA). Río de Janeiro, Brasil, 2005. ISBN85-244-0036-6. Projeto Euclides.
- [5] HÉCTOR EFRÉN GUERRERO MORA. *Inmersiomes Mínimas de Hipervariedades en la Esfera por Primeras Funciones Propias* .Tesis de Maestría Universidad del Valle. Santiago de Cali 2006; e-mail:heguerrero@unicauca.edu.co
- [6] JAVIER LAFUENTE LÓPEZ. *Cálculo en Variedades Euclideanas con Aplicaciones a la Teoría Global de Superficies*. 1 de febrero de 2005
- [7] SEBASTÍAN MONTIEL AND ANTONIO ROS. *Minimal Immersions of Surfaces by the Firts Eigenfunctions and Conformal Area*. Departamento de Geometría, Universidad de Granada, E-18071 Ganada, Spain.

- [8] PETER LI AND SHING-TUNG YAU. *A New conformal Invariant and Its Applications to the Willmore Conjecture and the First Eigenvalue of Compact Surfaces*. Springer-Verlag, 1982.
Stanford USA.
- [9] TOM M. APOSTOL. *CALCULUS VOLUMEN II*. Segunda Edición. EDITORIAL REVERTE Combianana S.A, 1998.