UNA INTRODUCCIÓN A LOS ESPACIOS DE HARDY

FELIPE ALEXANDER PIPICANO GUZMÁN

LUZ KARIME TOSSE URBANO

Universidad del Cauca

Facultad de Ciencias Naturales, Exactas y de la Educación

Departamento de Matemáticas

Popayán

2009

UNA INTRODUCCIÓN A LOS ESPACIOS DE HARDY

FELIPE ALEXANDER PIPICANO GUZMÁN

LUZ KARIME TOSSE URBANO

Trabajo de grado presentado como requisito parcial para optar al título en Matemáticas otorgado por la Universidad del Cauca

Mag. ALEX MANUEL MONTES
Director

Universidad del Cauca
Facultad de Ciencias Naturales, Exactas y de la Educación
Departamento de Matemáticas
Popayán
2009

Nota de Aceptación

Mag. Alex Manuel Montes Padilla
Director

Ph.D. Francisco Eduardo Enríquez
Comité de seguimiento

Dra. Aida Patricia González Nieva
Comité de seguimiento

Fecha de sustentación: Popayán, 28 de septiembre de 2009.

Por su entrega y dedicación,
este trabajo es dedicado a nuestros padres.

Agradecimientos

Son muchas las personas que se deberían nombrar en estas líneas, pero nos quedaremos con las más trascendentales... con aquellas que siempre nos han apoyado, tanto a lo largo de este trabajo de grado como a lo largo de nuestras vidas.

Damos gracias a:
Dios por todo lo que nos ha dado. Nuestros padres porque nos han guiado y nos han acompañado en los momentos que más los hemos necesitado. Nuestros hermanos porque han jugado un rol importante en nuestras vidas.

Nuestro director el profesor Alex Manuel Montes por brindarnos su colaboración y paciencia en el desarrollo del trabajo. Los profesores de la Universidad del Cauca que durante todos estos años nos permitieron una verdadera formación integral, sin su ayuda no se habría hecho posible este trabajo.

Nuestros compañeros quienes nos ayudaron a desarrollar la amistad y empatía necesaria para trabajar en equipo.

Un agradecimiento especial a la Dra. María Eugenia Miño por todos estos años ayudando a mantener mi salud, para así hacer posible muchos de mis metas y a Alirio José Paruma por su ayuda, dedicación casi paternal que fomenta en mí todo el coraje para seguir adelante.

Felipe Pipicano
Karime Tosse.

Universidad del Cauca
septiembre de 2009

Tabla de Contenido

Introducción

La teoría de los espacios de Hardy (denotados por H^p), tiene sus orígenes a principios del siglo XX, en los trabajos de los matemáticos: G. H. Hardy, J. E. Littlewood, I. I. Priválov, F. y M. Riesz, V. Smirnóv y G. Szegö. Parte de la inspiración fue dada por el Teorema de P. Fatou sobre la existencia de límites radiales en casi toda parte para las funciones analíticas y acotadas (ver teorema 2.3.4). Hardy y Riesz quisieron expandir el espacio de funciones analíticas para el cual este resultado puede ser obtenido.

En los primeros años del desarrollo de esta teoría, el trabajo fue enfocado en el sentido clásico, es decir, a propiedades de funciones particulares en los espacios H^p. Años después, el desarrollo del análisis funcional estimuló un nuevo interés en donde los espacios de Hardy fueron estudiados como espacios vectoriales. Este punto de vista contribuyó naturalmente a una gran variedad de nuevos problemas y métodos para resolverlos. El resultado es una profunda y útil teoría que continúa, incluso hoy en día, expandiéndose y aportando nuevas ideas.

El presente trabajo es una introducción a la unión de ambos aspectos, el clásico y el moderno; en el que se brinda un preámbulo a los espacios de Hardy en el disco unidad del plano complejo. En este contexto el núcleo de Poisson es una herramienta familiar y juega un papel decisivo en el desarrollo de la teoría. Además, el conjunto de ideas aquí expuestas pueden ser transferidas naturalmente, con sus respectivas consideraciones, a discos con radios y centros arbitrarios, a la parte superior del plano complejo y a dominios de frontera suave.

El objetivo principal de este trabajo es mostrar en detalle las propiedades básicas de las funciones en H^p, es por ello que la primera parte, es un tratamiento de las funciones armónicas en términos del núcleo e integral de Poisson, además de preliminares en productos infinitos. En la segunda se estudia el comportamiento en la frontera de las funciones en algunos espacios H^p y se muestra una caracterización del espacio H^2. La tercera parte trata de otras propiedades que tienen dichos espacios en términos de productos de Blaschke y se extiende el límite radial en todo los espacios H^p.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo se presentan algunas definiciones y resultados que se usarán en el desarrollo de este trabajo. Específicamente se estudia una caracterización de las funciones armónicas positivas y algunos teoremas relacionados con la convergencia de productos infinitos.

1.1. Funciones armónicas positivas

En esta sección se presenta una característica (teorema 1.1.6) de las funciones armónicas positivas definidas en el disco unidad en términos de la integral de Poisson de medidas de Borel finitas definidas sobre la frontera del disco unidad; a su vez se proporciona la solución al problema de Dirichlet. Para todo esto es de básica importancia el núcleo de Poisson.

Definición 1.1.1 (Núcleo de Poisson) *La función*

$$P_r(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{in\theta} \quad (0 \leq r < 1,\ -\infty < \theta < \infty)$$

se denomina núcleo de Poisson.

Observación. Si $0 \leq r < 1$ entonces $|re^{i\theta}| = r < 1$, por lo tanto la convergencia de la serie $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{in\theta}$ es uniforme respecto a θ. Se puede considerar $P_r(\theta)$ como una función de dos variables r y θ, pero es más interesante si se considera como una familia de funciones de θ de índice r; lo que se nota en el siguiente teorema.

Teorema 1.1.1 *El núcleo de Poisson satisface las siguientes propiedades:*

1. $P_r(\theta) = \frac{1-r^2}{|1-re^{i\theta}|^2} = \frac{1-r^2}{1-2r\cos\theta+r^2} = Re\left(\frac{1+re^{i\theta}}{1-re^{i\theta}}\right)$,
2. $\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta)d\theta = 1$,
3. $P_r(\theta) > 0$,
4. $P_r(-\theta) = P_r(\theta)$,
5. $P_r(\theta) < P_r(\delta)$ *si* $0 < \delta < |\theta| \le \pi$,
6. *Si* $\delta > 0$, *entonces* $\lim\limits_{r\to 1^-} P_r(\theta) = 0$ *es uniforme respecto a* θ *para* $\delta \le |\theta| \le \pi$.

Demostración.

1. Si $z = re^{i\theta}$, $0 \le r < 1$, $\theta \in \mathbb{R}$, entonces

$$\begin{aligned}\frac{1+re^{i\theta}}{1-re^{i\theta}} &= (1+z)\frac{1}{1-z} = (1+z)(1+z+z^2+\cdots)\\ &= 1+2\sum_{n=1}^{\infty} r^n e^{in\theta} = 1+2\sum_{n=1}^{\infty} r^n(\cos n\theta + i\operatorname{sen} n\theta),\end{aligned}$$

por lo tanto

$$\begin{aligned}Re\left(\frac{1+re^{i\theta}}{1-re^{i\theta}}\right) &= 1+2\sum_{n=1}^{\infty} r^n\cos n\theta\\ &= 1+\sum_{n=1}^{\infty} r^n(e^{in\theta}+e^{-in\theta})\\ &= \sum_{n=1}^{\infty} r^n e^{-in\theta} + 1 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n e^{in\theta}\\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|}e^{in\theta}.\end{aligned}$$

Además,

$$\frac{(1+re^{i\theta})(1-re^{-i\theta})}{(1-re^{i\theta})(1-re^{-i\theta})} = \frac{1-re^{-i\theta}+re^{i\theta}-r^2}{|1-re^{i\theta}|^2} = \frac{1-r^2+2ir\operatorname{sen}\theta}{(1-r\cos\theta)^2+r^2\operatorname{sen}^2\theta}.$$

De donde

$$\mathrm{Re}\left(\frac{1+re^{i\theta}}{1-re^{i\theta}}\right) = \frac{1-r^2}{1-2r\cos\theta+r^2} = \frac{1-r^2}{|1-re^{i\theta}|^2}.$$

2. Para r fijo, $0 \leq r < 1$,
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{in\theta}$$
converge uniformemente respecto a θ. Entonces
$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|}e^{in\theta}\right)d\theta &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\sum_{-\infty}^{-1} r^{|n|}e^{in\theta}+1+\sum_{1}^{\infty} r^{n}e^{in\theta}\right)d\theta\\ &= \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{-1} r^{|n|}\int_{-\pi}^{\pi} e^{in\theta}d\theta+1+\frac{1}{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty} r^{n}\int_{-\pi}^{\pi} e^{in\theta}d\theta,\end{aligned}$$
pero
$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{-in\theta}d\theta+\int_{-\pi}^{\pi} e^{in\theta}d\theta=0.$$
Por tanto $\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta)d\theta = 1$.

3. Si $r \in [0,1)$ y $\theta \in \mathbb{R}$, entonces $P_r(\theta) = \frac{1-r^2}{|1-re^{i\theta}|^2} > 0$.

4. $P_r(-\theta) = \frac{1-r^2}{1-2r\cos(-\theta)+r^2} = \frac{1-r^2}{1-2r\cos\theta+r^2} = P_r(\theta)$.

5. Si $0 \leq r < 1$ y $0 < \delta < \theta \leq \pi$, defínase $f : [\delta, \theta] \to \mathbb{R}$ por $f(t) = P_r(t)$. Entonces
$$f'(t) = \frac{-2r(1-r^2)\operatorname{sen} t}{(1-2r\cos t+r^2)^2} < 0$$
si $t \in [\delta, \theta)$. Por lo tanto $P_r(\theta) < P_r(\delta)$.

   Análogamente se prueba el otro caso.

6. Sean $0 < \delta < \theta \leq \pi$, entonces
$$0 \leq \lim_{r\to 1^-} P_r(\theta) \leq \lim_{r\to 1^-} P_r(\delta) = \lim_{r\to 1^-} \frac{1-r^2}{1-2r\cos\delta+r^2} = 0.$$
■

Con ayuda del núcleo de Poisson, se define la integral de Poisson de una función f y de una medida de Borel [1] finita μ, pero para esto se tendrá la siguiente notación:

El disco unidad en posición canónica del plano complejo se notará con D y T su frontera, es decir, si $B(z_0, r) := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$ entonces $D = B(0, 1)$ y $T = \partial D$. A

[1] Una medida de Borel sobre $\mathbb{R}$ es una medida μ sobre la σ-álgebra de todos los conjuntos de Borel de $\mathbb{R}$. Recuérdese que un conjunto de Borel es cualquier conjunto obtenido mediante uniones e intersecciones numerables de conjuntos cerrados o abiertos.

cada función $f : T \to \mathbb{R}$ se le asocia una función $\widetilde{f} : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ dada por $\widetilde{f}(t) = f(e^{it})$, $L_p = L_p(T)$, $1 \leq p < \infty$, denotará el espacio de todas las funciones (clases de equivalencias) reales definidas sobre T para las que $\widetilde{f}$ es una función Lebesgue medible y la norma

$$\|f\|_{L_p} := \left[\tfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left|\widetilde{f}(t)\right|^p dt\right]^{1/p}$$

es finita. Así mismo, $L_\infty = L_\infty(T)$ denotará el espacio de funciones reales f definidas en T tales que $\tilde{f}$ es medible y

$$\|f\|_{L_\infty} := \operatorname*{ess\,sup}_{t\in[-\pi,\pi]}\left\{|\widetilde{f}(t)|\right\} < \infty.$$

De igual manera, si μ es una medida sobre T se define $\widetilde{\mu}$ sobre $[-\pi, \pi]$ por $\widetilde{\mu}(E) = \mu(\varphi(E))$ donde $\varphi(t) = e^{it}$ y $E \subseteq [-\pi, \pi]$. Aquí el término “medida” hace referencia a medidas σ-aditivas con valores en $[0, \infty]$, cuando se haga alusión a una medida finita μ, se debe entender que μ toma valores en $[0, \infty)$ y por medida real μ se entenderá que μ es σ-aditiva y toma valores reales.

El espacio lineal de funciones reales continuas sobre T se denotará $C = C(T)$, para estas funciones se usa la norma

$$\|f\|_{L_\infty} := \sup_{t\in[-\pi,\pi]}\left\{|\widetilde{f}(t)|\right\}.$$

En la mayoría de los casos y mientras no haya lugar a ambigüedad se usará indistintamente f y $\widetilde{f}$, lo mismo para μ y $\widetilde{\mu}$. Por último si $\Omega \subseteq \mathbb{C}$, $H(\Omega)$ denotará el conjunto de funciones analíticas definidas en Ω.

Definición 1.1.2 (Integral de Poisson) *Si $f \in L_1$, se define la integral de Poisson de f por*

$$F(re^{i\theta}) := \tfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t) f(e^{it})dt. \tag{1.1}$$

Análogamente se define la integral de Poisson de una medida de Borel real finita μ sobre T, mediante

$$F(re^{i\theta}) := \tfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t)d\mu(t). \tag{1.2}$$

Las integrales en (1.1) y (1.2) convergen ya que

$$|P_r(\theta)| \leq \frac{1+r}{1-r}.$$

En efecto, si $r \in [0, 1)$, $-2r \leq -2r\cos\theta$ implica que

$$0 < (r-1)^2 \leq -2r\cos\theta + 1 + r^2,$$

de lo cual se obtiene

$$\frac{1-r^2}{r^2-2r\cos\theta+1} \leq \frac{1-r^2}{(1-r)^2} = \frac{1+r}{1-r}.$$

Nótese que estas integrales definen funciones en D las cuales se denotan por $F = P[f]$ y $F = P[d\mu]$ respectivamente.

Observacion. Si a $f \in L_1$ se le asocia la función μ mediante:

$$\mu(E) := \int_E f(t)dt \quad \text{para todo Boreliano } E \subseteq T.$$

Entonces μ es una medida de Borel real finita sobre T. En efecto, sea $\{A_n\}_{n\in\mathbb{Z}^+}$ una colección numerable de Borelianos en T disjuntos dos a dos, entonces para todo $n \in \mathbb{Z}^+$ se tiene que

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \int_{\bigcup_{i=1}^{n} A_i} f(x)dx = \sum_{i=1}^{n}\left(\int_{A_i} f(x)dx\right) = \sum_{i=1}^{n}\mu(A_i),$$

luego

$$\lim_{n\to\infty}\mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\mu(A_i),$$

de donde,

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_i).$$

Es claro que $\mu\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_i\right) = \int\limits_{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_i} f(x)dx \leq \int\limits_{T} f(x)dx < \infty$. De esta forma, las funciones F definidas por (1.1) forman una subclase de las definidas por (1.2).

Mostrando que $P[d\mu]$ es la parte real de una función analítica se tiene que $P[d\mu]$ es armónica. Recuérdese que $u : \Omega \to \mathbb{R}$, donde Ω es un abierto en $\mathbb{C}$, se dice armónica si tiene derivadas parciales de primer y segundo orden continuas y satisface además la ecuación de Laplace:

$$u_{xx} + u_{yy} = 0.$$

Además usando la fórmula integral de Cauchy (ver Churchill [4], pág 157) se puede probar que si $\overline{B}(a,r) \subseteq \Omega$ entonces

$$u(a) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(a + re^{i\theta})d\theta.$$

En efecto si f es una función analítica tal que $Re\, f = u$,

$$f(a) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(a+re^{i\theta})d\theta,$$

de donde

$$Re\,(f\,(a)) = Re\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(a+re^{i\theta})d\theta\right);$$

por lo tanto

$$u(a) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(a+re^{i\theta})d\theta. \tag{1.3}$$

La igualdad (1.3) se denomina propiedad del valor medio para funciones armónicas.

Teorema 1.1.2 *Si μ es una medida de Borel finita sobre T entonces su integral de Poisson, $P[d\mu]$, es una función armónica en D.*

Demostración. Si $F = P[d\mu]$ entonces

$$\begin{aligned} F(re^{i\theta}) &= \tfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta-t)d\mu(t) = \tfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} Re\left[\frac{1+re^{i(\theta-t)}}{1-re^{i(\theta-t)}}\right]d\mu(t) \\ &= \tfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} Re\left[\frac{e^{it}+re^{i\theta}}{e^{it}-re^{i\theta}}\right]d\mu(t) = Re\left[\tfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{it}+re^{i\theta}}{e^{it}-re^{i\theta}}d\mu(t)\right]. \end{aligned}$$

O sea que $F = \mathrm{Re}\, g$, donde $g : D \to \mathbb{C}$ es la función analítica (ver Rudin [10] teorema 10.1.7, pág. 188):

$$g(z) = \tfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}d\mu(t).$$

Por lo tanto F es armónica. ∎

Con ayuda de la integral de Poisson se puede probar que el problema de Dirichlet en D tiene solución única.

Teorema 1.1.3 *Sea $f : T \to \mathbb{R}$ una función continua. Entonces existe una única función continua $u : \overline{D} \to \mathbb{R}$ tal que u es armónica en D y coincide con f en T. Mas aún, esta función está dada por*

$$u(re^{i\theta}) = \begin{cases} f(e^{i\theta}) & si\ r = 1, \\ P[f](re^{i\theta}) & si\ 0 \le r < 1. \end{cases} \tag{1.4}$$

Demostración. Sea $u : \overline{D} \to \mathbb{R}$, definida como en (1.4); claramente $u = f$ en T. Resta mostrar que u es continua en $\overline{D}$ y armónica en D.

Si $0 \leq r < 1$, entonces

$$\begin{aligned} u(re^{i\theta}) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} Re\left(\frac{1+re^{i(\theta-t)}}{1-re^{i(\theta-t)}}\right) f(e^{it})dt \\ &= Re\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{1+re^{i(\theta-t)}}{1-re^{i(\theta-t)}}\right) f(e^{it})dt\right\} \\ &= Re\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it})\left(\frac{e^{it}+re^{i\theta}}{e^{it}-re^{i\theta}}\right) dt\right\}. \end{aligned}$$

Si se define $g : D \to \mathbb{C}$ por

$$g(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it})\left(\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\right) dt,$$

entonces $u = Re(g)$, donde g es analítica por la regla de Leibniz (ver Conway [5] proposición 2.1 pág 68) por lo tanto u es armónica en D.

Se debe probar ahora que u es continua en $\overline{D}$. Dado que u es armónica en D sólo resta mostrar que u es continua en T.

Se pretende mostrar que dado $\alpha \in [-\pi, \pi]$ y $\epsilon > 0$ existen $0 < \rho < 1$ y un arco $A \subseteq T$ alrededor de $e^{i\alpha}$ tal que para $\rho < r < 1$ y $e^{i\theta} \in A$ se tiene que,

$$\left|u(re^{i\theta}) - f(e^{i\alpha})\right| < \epsilon.$$

Para evitar dificultades en la notación, la proposición sólo se demostrará para $\alpha = 0$, puesto que el caso general puede obtenerse de este a partir de una rotación de los ejes coordenados. Dado que f es continua en $z = 1$, existe $\delta > 0$, tal que si $|\theta| < \delta$ entonces

$$\left|f(e^{i\theta}) - f(1)\right| < \frac{1}{3}\epsilon. \tag{1.5}$$

Sea $M = \text{máx}\left\{\left|f(e^{i\theta})\right| : |\theta| \leq \pi\right\}$; por la propiedad (6) del teorema 1.1.1 existe un número ρ, con $0 < \rho < 1$ tal que

$$P_r(\theta) < \frac{\epsilon}{3M}, \tag{1.6}$$

para $\rho < r < 1$ y $|\theta| \geq \frac{1}{2}\delta$. Sea A el arco $\left\{e^{i\theta} : |\theta| < \frac{1}{2}\delta\right\}$. Entonces si $e^{i\theta} \in A$ y $\rho < r < 1$ se tiene que

$$\begin{aligned} u(re^{i\theta}) - f(1) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t) f(e^{i\theta})dt - f(1) \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{|t|<\delta} P_r(\theta - t)\left[f(e^{i\theta}) - f(1)\right] dt + \\ &\quad + \frac{1}{2\pi}\int_{|t|\geq\delta} P_r(\theta - t)\left[f(e^{i\theta}) - f(1)\right] dt. \end{aligned}$$

Si $|t| \geq \delta$ y $|\theta| \leq \frac{1}{2}\delta$ entonces $|t-\theta| \geq \frac{1}{2}\delta$; por las desigualdades (1.5) y (1.6) se obtiene que

$$\left|u(re^{i\theta}) - f(1)\right| \leq \frac{1}{3}\epsilon + 2M\left(\frac{\epsilon}{3M}\right) = \epsilon. \tag{1.7}$$

Para probar la unicidad de u, supóngase que v es una función continua en $\overline{D}$, armónica en D y que coincide con f en T. Entonces $u - v$ es armónica en D y $(u-v)(z) = 0$ para todo $z \in T$, por el Teorema del Módulo Máximo (ver Conway [5] teorema 1.6, pág 253) $(u-v)(z) = 0$ para todo $z \in D$. ■

Como consecuencia del resultado anterior se tiene el siguiente teorema, que indica que si u es continua en $\overline{D}$ y armónica en D entonces u es la integral de Poisson de su restricción a T.

Teorema 1.1.4 *Si $u : \overline{D} \to \mathbb{R}$ es una función continua que es armónica en D, entonces*

$$u(re^{i\theta}) = \tfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t)u(e^{it})dt$$

para $0 \leq r < 1$ y $\theta \in \mathbb{R}$.

Para demostrar la caracterización de las funciones armónicas positivas en el disco unidad (teorema 1.1.6) se utiliza el Teorema de Arzelá-Ascoli, pero para enunciarlo es necesaria la siguiente definición.

Definición 1.1.3 (Familia equicontinua y puntualmente acotada) *Sea $\mathfrak{F}$ una familia de funciones complejas definidas sobre un espacio métrico X con métrica d.*

1. *Se dice que $\mathfrak{F}$ es equicontinua si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $d(x,y) < \delta$ implica $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ para toda $f \in \mathfrak{F}$.*

2. *Se dice que $\mathfrak{F}$ es puntualmente acotada si a cada $x \in X$ le corresponde una $M_x < \infty$ tal que $|f(x)| \leq M_x$ para toda $f \in \mathfrak{F}$.*

Ejemplo.

- Toda familia finita de funciones continuas es una familia equicontinua. En efecto, sea $\mathfrak{F} = \{f_1, f_2, \ldots f_n\}$ una colección de funciones continuas en un conjunto abierto $\Omega \subseteq \mathbb{C}$. Dado $\epsilon > 0$, para cada f_k existe $\delta_k > 0$ tal que $|x-y| < \delta_k$ implica $|f_k(x) - f_k(y)| < \epsilon$. Sea $\delta = \text{mín}\{\delta_k : 1 \leq k \leq n\}$, entonces $|f_k(x) - f_k(y)| < \epsilon$ para toda f_k con $1 \leq k \leq n$ siempre que $|x-y| < \delta$.

- La colección $\mathfrak{F}$ de funciones de $\mathbb{C}$ en $\mathbb{C}$ que cumplen la condición Lipschitz de orden k [2] es equicontinua. En efecto, para $\epsilon > 0$ basta con tomar $\delta = \frac{\epsilon}{k}$.
- Si $\mathfrak{F}$ es la colección de funciones que satisfacen la condición Lipschitz tales que $f(0) = 0$ para toda $f \in \mathfrak{F}$, entonces para cada $z \in \mathbb{C}$, $|f(z)| \leq k|z|$ para toda $f \in \mathfrak{F}$, es decir, $\mathfrak{F}$ es puntualmente acotada.

Teorema 1.1.5 (Arzela-Ascoli) *Sea $\mathfrak{F}$ una familia equicontinua y puntualmente acotada de funciones complejas definidas en un espacio métrico X. Si X contiene un subconjunto denso contable entonces toda sucesión $\{f_n\}$ en $\mathfrak{F}$ tiene una subsucesión que converge uniformemente en cada subconjunto compacto de X.*

Demostración. Ver Conway [5], teorema 1.23, pág. 148. ■

Teorema 1.1.6 *La aplicación $\mu \to P[d\mu]$ determina una correspondencia uno a uno lineal, entre el espacio de todas las medidas de Borel finitas definidas en T y todas las funciones armónicas positivas en D.*

Demostración. Como $P_r(\theta) > 0$, entonces $P[d\mu] \geq 0$, y por el teorema 1.1.2 $P[d\mu]$ es una función armónica en D. Además es claro que la aplicación $\mu \to P[d\mu]$ es lineal, y para demostrar que es inyectiva se supone $P[d\mu] = 0$ y se muestra que $\mu = 0$. Nótese que

$$\mu(T) = \int_{-\pi}^{\pi} d\mu(\theta) = \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t)dt \right) d\mu(\theta).$$

(Recuérdese que $\mu(T) = \widetilde{\mu}([-\pi, \pi])$ y se usan indistintamente μ y $\widetilde{\mu}$). Entonces aplicando el Teorema de Fubini (ver Bartle [3] teorema 10.10, pág 119) con $F(\theta, t) = P_r(\theta - t)$. Es claro que F es continua y acotada obteniendose así

$$\begin{aligned} \mu(T) &= \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t) d\mu(\theta) \right) dt \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} P[d\mu](re^{it}) dt = 0, \end{aligned}$$

de donde $\mu = 0$. Ahora, siendo u una función armónica positiva en D, si se muestra que existe una medida de Borel finita μ tal que $u = P[d\mu]$ entonces culmina la demostración. Dado s, $0 < s < 1$, se define el funcional $\Lambda_s : C \to \mathbb{R}$ por

$$\Lambda_s(f) := \int_{-\pi}^{\pi} u(se^{it}) f(t) dt.$$

[2] Una función $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ se dice que satisface la condición Lipschitz de orden $k > 0$ si $|f(z) - f(w)| \leq k|z - w|$ para todo $z, w \in \mathbb{C}$.

Así, $\mathfrak{F} := \{\Lambda_s\}_{s\in(0,1)}$ es una familia equicontinua y puntualmente acotada de funcionales. En efecto,

$$|\Lambda_s(f) - \Lambda_s(g)| \leq \int_{-\pi}^{\pi} u(se^{it})|f(t) - g(t)|dt \leq \|f - g\|_{L_\infty} \int_{-\pi}^{\pi} u(se^{it})dt.$$

Pero, por la propiedad del valor medio para funciones armónicas para todo $s \in (0,1)$, se tiene que

$$\int_{-\pi}^{\pi} u(se^{it})dt = 2\pi u(0) = M > 0,$$

o sea que

$$|\Lambda_s(f) - \Lambda_s(g)| \leq M\|f - g\|_{L_\infty} \quad \text{para todo } s \in (0,1).$$

De donde se obtiene la equicontinuidad. Además $|\Lambda_s(f)| \leq M\|f\|_{L_\infty}$ implica que $\mathfrak{F}$ es puntualmente acotada. Como C tiene un subconjunto denso contable, considérese el conjunto de polinomios trigonométricos con coeficientes en $\mathbb{Q}$, (ver Apostol [2] Teorema de Aproximación de Weierstrass, pág. 392) si $s_n \to 1^-$ cuando $n \to \infty$, por el teorema de 1.1.5 existe una subsucesión de $\{\Lambda_{s_n}\}$, que también se denotará por $\{\Lambda_{s_n}\}$, que converge uniformemente en cada subconjunto compacto de C. Pero para cada $f \in C$; $\{f\}$ es un subconjunto compacto de C, lo que implica que $\{\Lambda_{s_n} f\}$ converge para toda $f \in C$. De esta manera es posible definir el funcional $\Lambda : C \to \mathbb{R}$ por

$$\Lambda f := \lim_{n\to\infty} \Lambda_{s_n} f.$$

Si $\|f\|_{L_\infty} = 1$ entonces $|\Lambda_{s_n} f| \leq M$, lo que implica que

$$\|\Lambda\| := \sup\left\{|\Lambda f| : f \in C \text{ y } \|f\|_{L_\infty} = 1\right\} \leq M.$$

De donde Λ es un funcional lineal acotado y positivo (en el sentido de que si $f \geq 0$, entonces $\Lambda f \geq 0$); por consiguiente, al usar el Teorema de Representación de Riesz para funcionales sobre C (ver Bartle [3] teorema 9.9, pág 106), se tiene que existe una medida de Borel sobre T tal que

$$\Lambda f = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)d\mu(t) \quad \text{para toda } f \in C.$$

Esta medida μ es finita ya que $\mu(T) = \int_{-\pi}^{\pi} d\mu(t) = \Lambda(1)$.

Por otro lado $u(s_n re^{i\theta})$ es una función armónica en $B(0, 1/s_n)$ y por lo tanto lo es en $\overline{D}$; por el teorema 1.1.4

$$u(s_n re^{i\theta}) = \tfrac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t)u(s_n e^{it})dt,$$

para $r \in (0,1)$ y $\theta \in \mathbb{R}$. De donde

$$\begin{aligned} u(re^{i\theta}) &= \lim_{n\to\infty} u(s_n re^{i\theta}) = \lim_{n\to\infty} \tfrac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t) u(s_n e^{it}) dt \\ &= \tfrac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t) d\mu(t) = P[d\mu](re^{i\theta}). \end{aligned}$$

En este caso para r fijo P_r se puede ver como una función continua $P_r : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$, si se define $P_r(e^{it}) = P_r(t)$. ■

1.2. Productos infinitos

En esta sección se estudian algunos criterios para la convergencia uniforme de productos infinitos.

Definición 1.2.1 (Producto infinito) *Sea* $\{u_n\}$ *una sucesión de números complejos. Si la sucesión* $p_n = \prod_{k=1}^{n}(1+u_k)$ *de productos converge al límite finito* $p \neq 0$*, entonces se escribe*

$$p = \prod_{n=1}^{\infty}(1+u_n).$$

En este caso se dice que $\prod_{n=1}^{\infty}(1+u_n)$ *converge y se denomina producto infinito.*
Si $p = 0$*, entonces se dice que el producto infinito diverge a* 0*.*

La sucesión $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es denominada sucesión de productos parciales.
Aquí se define el producto infinito de los términos $1+u_n$ para mantener una analogía con las series infinitas $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, cuya convergencia implica que los a_n se acercan a cero; en el caso del producto los factores deben hacerse próximos a 1, o sea que u_n está cerca de cero.

Lema 1.2.1 *Sean* $u_1, \cdots, u_N$ *números complejos y* p_N *y* p_N^* *definidas por*

$$p_N = \prod_{n=1}^{N}(1+u_n), \quad p_N^* = \prod_{n=1}^{N}(1+|u_n|),$$

entonces

$$p_N^* \leq e^{|u_1|+\cdots+|u_N|} \quad y \quad |p_N - 1| \leq p_N^* - 1.$$

Demostración. Por el desarrollo en series de potencias de e^x, para $x \geq 0$ se tiene que $1+x \leq e^x$, por lo tanto $1+|u_i| \leq e^{|u_i|}$, $i = 1, \cdots, N$, lo que implica que

$$p_N^* = (1+|u_1|)\cdots(1+|u_N|) \leq e^{|u_1|+\cdots+|u_N|}.$$

La otra desigualdad se prueba por inducción. En efecto,

$$|p_1 - 1| = |1+u_1-1| = (1+|u_1|) - 1 = p_1^* - 1.$$

Es claro entonces que se cumple para $N = 1$. Ahora supóngase que la desigualdad es válidad para un natural k y se prueba que es para $k+1$.

$$\begin{aligned}|p_{k+1}-1| = |p_k(1+u_{k+1})-1| &= |p_k + p_k u_{k+1} - 1 - u_{k+1} + u_{k+1}| \\ &= |(p_k-1)+(p_k-1)u_{k+1}+u_{k+1}| \leq |p_k-1||1+u_{k+1}|+|u_{k+1}| \\ &\leq (p_k^*-1)(1+|u_{k+1}|)+|u_{k+1}| = p_k^* + p_k^*|u_{k+1}| - 1 \\ &= p_k^*(1+|u_{k+1}|)-1 = p_{k+1}^*-1.\end{aligned}$$

Luego por el principio de inducción matemática se obtiene la segunda desigualdad. ■

Para funciones complejas $u_n(s)$, el siguiente teorema proporciona un criterio para determinar cuando el producto infinito $\prod\limits_{n=1}^{\infty}[1+u_n(s)]$ converge uniformemente en S, en el sentido de la convergencia uniforme de los productos parciales $p_k(s) = \prod\limits_{n=1}^{k}[1+u_n(s)]$.

Definición 1.2.2 (Convergencia uniforme en productos infinitos) *Sea $\{u_n(s)\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones complejas con dominio S. Se dice que el producto infinito $\prod\limits_{n=1}^{\infty}[1+u_n(s)]$ converge uniformemente en S a $u(s)$, si a todo $\epsilon > 0$ le corresponde un $N = N(\epsilon)$ tal que si $n > N$, $|u_n(s) - u(s)| < \epsilon$ para todo $s \in S$.*

Teorema 1.2.1 *Sea $\{u_n\}$, $u_n : S \to \mathbb{C}$, una sucesión de funciones acotadas en un conjunto $S \subseteq \mathbb{C}$, tal que $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n(s)|$ converge uniformemente. Entonces el producto infinito*

$$f(s) = \prod_{n=1}^{\infty}[1+u_n(s)]$$

converge uniformemente en S. Además si $s_0 \in S$, $f(s_0) = 0$ si y sólo si $u_n(s_0) = -1$ para algún n.

Demostración. Por hipótesis existe $c > 0$ tal que $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n(s)| < c$, para todo $s \in S$. Por lo tanto si

$$p_N(s) = \prod_{n=1}^{N}[1+u_n(s)],$$

se tiene por el lema 1.2.1 que

$$\begin{aligned}|p_N(s)| = \prod_{n=1}^{N}|1+u_n(s)| &\leq \prod_{n=1}^{N}[1+|u_n(s)|] \\ &\leq e^{|u_1(s)|+\cdots+|u_n(s)|} \leq e^c.\end{aligned}$$

Si $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$, por la convergencia uniforme de $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n(s)|$, existe N_0 tal que para todo $s \in S$ se tiene

$$\sum_{n=N_0}^{\infty} |u_n(s)| < \varepsilon.$$

De manera que si $p_M(s) = \prod_{n=1}^{M} [1 + u_n(s)]$ con $M > N \geq N_0$, se tiene entonces para todo $s \in S$ que

$$\big|p_M(s) - p_N(s)\big| = \left|p_N(s)\Big(\prod_{n=N+1}^{M} [1 + u_n(s)] - 1\Big)\right| = \big|p_N(s)\big|\left|\prod_{n=N+1}^{M} [1 + u_n(s)] - 1\right|.$$

Pero nuevamente el lema 1.2.1 (reenumerando los índices) implica que

$$\left|\prod_{n=N+1}^{M} [1 + u_n(s)] - 1\right| \leq \prod_{n=N+1}^{M} [1 + |u_n(s)|] - 1 \leq e^{|u_{N+1}(s)| + \cdots + |u_M(s)|} - 1,$$

por lo tanto para todo $s \in S$,

$$\begin{aligned} |p_M(s) - p_N(s)| &\leq |p_N(s)|\big(e^{\sum_{n=N+1}^{\infty} |u_n(s)|} - 1\big) \\ &\leq |p_N(s)|\big(e^{\varepsilon} - 1\big) \leq |p_N(s)|(2\varepsilon) \leq 2e^{c}\varepsilon, \end{aligned}$$

de donde se obtiene la convergencia uniforme de

$$\prod_{n=1}^{\infty} [1 + u_n(s)].$$

De lo anterior, también se concluye que si $M > N_0$, y para todo $s \in S$

$$|p_M(s) - p_{N_0}(s)| \leq 2\varepsilon |p_{N_0}(s)|,$$

o sea que

$$|p_{N_0}(s)| - |p_M(s)| \leq 2\varepsilon |p_{N_0}(s)|;$$

equivalentemente

$$|p_M(s)| \geq |p_{N_0}(s)|(1 - 2\varepsilon).$$

Pero $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$, luego

$$|f(s)| = \left|\prod_{n=1}^{\infty} [1 + u_n(s)]\right| \geq |p_{N_0}(s)|(1 - 2\varepsilon) \geq 0.$$

Así, si $s_0 \in S$ es tal que $f(s_0) = 0$, se tiene que

$$\prod_{n=1}^{N_0} [1 + u_n(s_0)] = p_{N_0}(s_0) = 0,$$

o sea que $u_n(s_0) = -1$ para algún n $(1 \leq n \leq N_0)$. Por último, si existe $s_0 \in S$ tal que $u_n(s_0) = -1$ para algún n, entonces $f(s_0) = \prod_{n=1}^{\infty} [1 + u_n(s_0)] = 0$. ∎

Teorema 1.2.2 *Sea u_n una sucesión en $\mathbb{R}$ tal que $0 \leq u_n < 1$. Entonces*

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1 - u_n) > 0 \text{ si y sólo si } \sum_{n=1}^{\infty} u_n < \infty.$$

Demostración. Como $0 \leq u_n < 1$,

$$1 - u_1 \geq (1 - u_1)(1 - u_2) \geq \cdots \geq (1 - u_1)(1 - u_2)\cdots(1 - u_k) > 0,$$

lo que implica que $p_k := (1 - u_1)(1 - u_2)\cdots(1 - u_k)$ es una sucesión decreciente y positiva, entonces existe $p \geq 0$ tal que

$$p = \lim_{k\to\infty} p_k.$$

Si $\sum_{n=1}^{\infty} u_n < \infty$, el teorema 1.2.1 implica que $p = \prod_{n=1}^{\infty}(1 - u_n) = 0$ si y sólo si $1 - u_n = 0$, para algún n, lo cual no es posible, o sea que $p > 0$.

Por otro lado

$$0 \leq p \leq p_k = \prod_{n=1}^{k}(1 - u_n) \leq e^{(-u_1 - \cdots - u_k)},$$

luego $p = 0$ si $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \infty$. ∎

Ejemplo.

- $\prod_{n=1}^{\infty} (1 - \frac{1}{n^2}) > 0$ por el teorema anterior, dado que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$.
- La función zeta de Riemann, $\zeta(s)$, está definida para valores reales s mayores que 1, por la serie:

  $$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

  Euler descubrió una interesante relación entre la función zeta de Riemman y la sucesión de números primos aprovechando la criba de Eratóstenes. A continuación se presenta un bosquejo del método utilizado por Euler.

  Considérese:

  $$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{5^s} + \ldots \tag{1.8}$$

$$\frac{1}{2^s}\zeta(s) = \frac{1}{2^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{6^s} + \frac{1}{8^s} + \frac{1}{10^s} + \dots \tag{1.9}$$

Restando 1.9 de 1.8 se obtiene:

$$\left(1 - \frac{1}{2^s}\right)\zeta(s) = 1 + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{5^s} + \frac{1}{7^s} + \frac{1}{9^s} + \frac{1}{11^s} + \dots \tag{1.10}$$

Usando 1.10 y el siguiente término:

$$\frac{1}{3^s}\left(1 - \frac{1}{2^s}\right)\zeta(s) = \frac{1}{3^s} + \frac{1}{9^s} + \frac{1}{15^s} + \frac{1}{21^s} + \frac{1}{27^s} + \frac{1}{33^s} + \dots \tag{1.11}$$

Restando de nuevo se obtiene:

$$\left(1 - \frac{1}{3^s}\right)\left(1 - \frac{1}{2^s}\right)\zeta(s) = 1 + \frac{1}{5^s} + \frac{1}{7^s} + \frac{1}{11^s} + \frac{1}{13^s} + \frac{1}{17^s} + \dots$$

Obsérvese que los elementos que tienen como factor a 2 o 3 (o ambos) han sido removidos. Si se repite infinitamente este procedimiento se obtiene:

$$\dots\left(1 - \frac{1}{11^s}\right)\left(1 - \frac{1}{7^s}\right)\left(1 - \frac{1}{5^s}\right)\left(1 - \frac{1}{3^s}\right)\left(1 - \frac{1}{2^s}\right)\zeta(s) = 1.$$

Lo que implica:

$$\zeta(s) = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2^s}\right)\left(1 - \frac{1}{3^s}\right)\left(1 - \frac{1}{5^s}\right)\left(1 - \frac{1}{7^s}\right)\left(1 - \frac{1}{11^s}\right)\dots} = \prod_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1 - p_n^s},$$

donde $\{p_n\}_{n\in\mathbb{Z}^+}$ es la sucesión de números primos.

Con el fin de presentar un teorema que establezca condiciones suficientes para que el producto infinito de funciones $f_n \in H(\Omega)$ converja a una función $f \in H(\Omega)$ (teorema 1.2.4) es necesario el siguiente concepto.

Definición 1.2.3 (Convergencia uniforme en subconjuntos compactos) *Sea $\{f_k\}_{k\in\mathbb{Z}^+}$ una sucesión de funciones complejas con dominio $\Omega \subseteq \mathbb{C}$, se dice que $\{f_k\}_{k\in\mathbb{Z}^+}$ converge a f uniformemente en subconjuntos compactos de Ω, si a todo $\epsilon > 0$ y $K \subseteq \Omega$ compacto, le corresponde un $N = N(K,\epsilon)$ tal que $|f_k(z) - f(z)| < \epsilon$ para todo $z \in K$, si $k > N$.*

Teorema 1.2.3 *Sea $\{f_k\}$ una sucesión de funciones en $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ tal que $f_k \in H(\Omega)$ para todo $k = 1, 2, \dots,$ y $f_k \to f$ uniformemente en subconjuntos compactos de Ω. Entonces $f \in H(\Omega)$ y $f_k' \to f'$ en subconjuntos campactos de Ω.*

Demostración. Ver Rudin [10], teorema 10.4.11, pág. 201. ■

Teorema 1.2.4 *Sean $f_n \in H(\Omega)$ tal que f_n no es idénticamente cero en Ω para $n = 1, 2, 3 \ldots$, y*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |1 - f_n(z)|$$

converge uniformemente en subconjuntos compactos de Ω. Entonces el producto

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} f_n(z)$$

converge uniformemente en subconjuntos compactos de Ω y por tanto $f \in H(\Omega)$. Además para $z_0 \in \Omega$, $f(z_0) = 0$ si y sólo si $f_n(z_0) = 0$ para algún n.

Demostración. Sea $K \subseteq \Omega$ un conjunto compacto, entonces las funciones $f_n - 1$ son acotadas en K y como $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |f_n(z) - 1|$ converge uniformemente en K, tenemos por el teorema 1.2.1 que

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty}(1 + f_n(z) - 1) = \prod_{n=1}^{\infty} f_n(z)$$

converge uniformemente en K, y por tanto $f \in H(\Omega)$. Además, por el mismo teorema 1.2.1, $f(z_0) = 0$ si y sólo si $f_n(z_0) = 0$ para algún n. ■

Capítulo 2

Espacios de Hardy

En este capítulo se presenta la definición de los espacios de Hardy, también conocidos como espacios H^p, así como algunas propiedades básicas que estos poseen. Se muestra que dichos espacios son de Banach y se dá una caracterización de uno de estos espacios.

2.1. Los espacios H^p

Los espacios de Hardy son subespacios de $H(D)$ definidos mediante ciertas condiciones de crecimiento. Se define inicialmente el siguiente concepto:

Definición 2.1.1 (Función subarmónica) *Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un conjunto abierto, la función $v : \Omega \to [-\infty, \infty)$ se dice subarmónica, si satisface las siguientes condiciones:*

1. *v es semicontinua superiormente en Ω.*
2. *Para todo $z_0 \in \Omega$, si $\overline{B}(z_0, r) \subseteq \Omega$, entonces*
$$v(z_0) \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} v(z_0 + re^{i\theta}) d\theta.$$

Recuérdese que una función v es semicontinua superiormente en Ω, si para todo $t \in \mathbb{R}$, el conjunto $\{z \in \Omega : v(z) < t\}$ es abierto. Además es claro que toda función continua es semicontinua superiormente y toda función armónica es subarmónica.

Ejemplo. Considérese $f(x) = [|x|]$ *la función parte entera.* f es tal que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y a cada $x \in \mathbb{R}$ le asigna el mayor entero menor que x.
Sea $t \in \mathbb{R}$, se tienen entonces dos casos: $t \in \mathbb{Z}$ o bien $t \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$.
Si $t \in \mathbb{Z}$, el conjunto
$$\{x \in \mathbb{R} : [|x|] < t\} = (-\infty, t).$$

Si $t \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$, se puede mostrar que

$$\{x \in \mathbb{R} : [|x|] < t\} = (-\infty, [|t|] + 1).$$

Los conjuntos $(-\infty, t)$ y $(-\infty, [|t|] + 1)$ son abiertos, lo que muestra que f es semicontinua superiormente y es claro que f no es una función continua.

El siguiente teorema muestra el comportamiento de una clase especial de funciones.

Teorema 2.1.1 *Sea $f \in H(D)$. Las funciones:*

$$\begin{aligned} M_p(f,r) &:= \left(\tfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(re^{i\theta})|^p d\theta\right)^{1/p} \quad (1 \le p < \infty), \\ M_\infty(f,r) &:= \sup_\theta \left\{|f(re^{i\theta})|\right\} \quad p = \infty, \end{aligned}$$

son crecientes de r en $[0,1)$.

Demostración. Sean $p = \infty$ y $0 \le r_1 < r_2 < 1$, entonces $B(0,r_2) \subseteq D$ y por lo tanto $f \in H(B(0,r_2))$, luego por el Teorema del Módulo Máximo (ver Rudin [10] teorema 10.4.7, pág. 200), se tiene que para todo $z \in B(0,r_2)$

$$|f(z)| \le \sup_\theta \left\{|f(r_2 e^{i\theta})|\right\}.$$

En particular, como $r_1 < r_2$,

$$\sup_\alpha \left\{|f(r_1 e^{i\alpha})|\right\} \le \sup_\theta \left\{|f(r_2 e^{i\theta})|\right\}.$$

O sea que

$$M_\infty(f,r_1) \le M_\infty(f,r_2).$$

De esta forma $M_\infty(f,r)$ es creciente.

Si $1 \le p < \infty$. Primero se afirma que $|f|^p$ es subarmónica si $f \in H(D)$. En efecto, como f es analítica, lo es también f^p, entonces por la fórmula integral de Cauchy (ver Churchill [4], pág 157) se tiene que

$$[f(a)]^p = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B(a,r)} \frac{[f(z)]^p}{z-a} dz,$$

para $\overline{B}(a,r) \subseteq D$. Entonces,

$$\begin{aligned} [f(a)]^p &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\left[f\left(a + re^{i\theta}\right)\right]^p}{a + re^{i\theta} - a} re^{i\theta} d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left[f(a + re^{i\theta})\right]^p d\theta, \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} |f(a)|^p &= \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[f(a+re^{i\theta}) \right]^p d\theta \right|, \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| f(a+re^{i\theta}) \right|^p d\theta. \end{aligned}$$

Además, $|f|^p$ es semicontinua superiormente por ser continua. En consecuencia $|f|^p$ es subarmónica.

Sea h la función real continua en $\overline{B}(0, r_2)$, armónica en $B(0, r_2)$, tal que $h = |f|^p$ en $\partial B(0, r_2)$ (ver teorema 1.1.3). Se afirma que $|f|^p \leq h$ en $\overline{B}(0, r_2)$; en efecto, si $f_1 = |f|^p - h$ y supóngase que $f_1(z) > 0$ para algún $z \in B(0, r_2)$. Como $|f|^p$ es continua en el compacto $\overline{B}(0, r_2)$ entonces f_1 alcanza su valor máximo m en $\overline{B}(0, r_2)$, dado que $f_1 = 0$ en $\partial B(0, r_2)$, entonces el conjunto $E := \left\{ z \in \overline{B}(0, r_2) : f_1(z) = m \right\}$ es un conjunto no vacío y compacto de $B(0, r_2)$.

Sea $z_o \in \partial E$, luego existe $r > 0$ tal que $\overline{B}(z_o, r) \subseteq B(0, r_2)$, pero algún subarco de $\partial \overline{B}(z_o, r)$ está en el complemento de E. Por tanto se tiene

$$f_1(z_o) = m \geq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_1(z_o + re^{i\theta}) d\theta.$$

Esto significa que $|f_1|$ no es subarmónica en $\overline{B}(0, r_2)$. Pero $|f|^p$ es subarmónica, es decir:

$$|f(z_o)|^p \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| f(z_o + re^{i\theta}) \right|^p d\theta$$

y por la propiedad del valor medio de las funciones armónicas:

$$h(z_o) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h(z_o + re^{i\theta}) d\theta,$$

esto implica que

$$(|f|^p - h)(z_o) \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (|f|^p - h)(z_o + re^{i\theta}) d\theta$$

de donde f_1 es también subarmónica, lo cual es una contradicción. Así $|f|^p \leq h$ en $\overline{B}(0, r_2)$, de donde

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(r_1 e^{i\theta})|^p d\theta \leq \int_{-\pi}^{\pi} h(r_1 e^{i\theta}) d\theta;$$

por tanto

$$M_p(f, r_1) \leq \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h(r_1 e^{i\theta}) d\theta \right)^{1/p}.$$

Por la propiedad del valor medio de las funciones armónicas,

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} h(r_1e^{i\theta})d\theta\right)^{1/p} = [h(0)]^{1/p} &= \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} h(r_2e^{i\theta})d\theta\right)^{1/p}\\
&= \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(r_2e^{i\theta})|^p d\theta\right)^{1/p}\\
&= M_p(f,r_2).
\end{aligned}$$

De esta forma $M_p(f,r_1) \leq M_p(f,r_2)$, así $M_p(f,r)$ es creciente. ■

Definición 2.1.2 (Espacios de Hardy) *Para* $1 \leq p \leq \infty$ *fijo, se define el espacio* $H^p(D)$*, como el conjunto de todas las funciones* $f \in H(D)$ *para las cuales*

$$\|f\|_p = \|f\|_{H^p} := \sup_{r\in[0,1)} \{M_p(f;r)\} < \infty. \tag{2.1}$$

Ejemplo. Sean $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots a_n \in \mathbb{C}$ y $f(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + a_3z^3 + \ldots + a_nz^n$ un polinomio de grado n. Si $z = re^{i\theta}$, entonces:

$$\begin{aligned}
|f(re^{i\theta})| &= |a_0 + a_1(re^{i\theta}) + a_2(re^{i\theta})^2 + a_3(re^{i\theta})^3 + \ldots + a_n(re^{i\theta})^n|\\
&\leq |a_0| + |a_1(re^{i\theta})| + |a_2(re^{i\theta})^2| + \ldots + |a_n(re^{i\theta})^n|\\
&= |a_0| + |a_1|r + |a_2|r^2 + \ldots + |a_n|r^n.
\end{aligned}$$

Calculando supremo a ambos lados de la desigualdad se obtiene:

$$\sup_{r\in[0,1)} \sup_{\theta} \left\{|f(re^{i\theta})|\right\} \leq |a_0| + |a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n| < \infty.$$

Luego, $f \in H^\infty$.

Los espacios $H^p(D)$ son también conocidos como espacios de Hardy. En adelante se denotará por H^p y H^∞ a $H^p(D)$ y $H^\infty(D)$ respectivamente.

Una propiedad importante de los espacios de Hardy, muestra la contenencia que existe entre ellos, lo cual se resume en la siguiente proposición.

Proposición 2.1.1 *Si* $1 \leq s \leq p \leq \infty$ *entonces* $H^\infty \subseteq H^p \subseteq H^s$.

Demostración. Sean $p > 1$ y $f \in H^\infty$, entonces para todo $r \in [0,1)$, $M_\infty(f,r) < \infty$. Lo que implica que $\sup_\theta \left\{|f(re^{i\theta})|^p\right\} < \infty$, o equivalentemente

$$\frac{1}{2\pi}\sup_{\theta} \left\{2\pi|f(re^{i\theta})|^p\right\} < \infty \quad \text{para todo} \quad r \in [0,1).$$

Pero se sabe que

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(re^{i\theta})|^p d\theta \leq \frac{1}{2\pi}\sup_{\theta}\left\{2\pi|f(re^{i\theta})|^p\right\}.$$

Dado que $p > 1$,

$$\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(re^{i\theta})|^p d\theta\right)^{1/p} \leq \left(\frac{1}{2\pi}\sup_{\theta}\left\{2\pi|f(re^{i\theta})|^p\right\}\right)^{1/p},$$

se tiene entonces que

$$M_p(f,r) \leq \left(\sup_{\theta}\left\{|f(re^{i\theta})|^p\right\}\right)^{1/p},$$

lo que implica que

$$\|f\|_p \leq \sup_{r\in[0,1)}\left(\sup_{\theta}\left\{|f(re^{i\theta})|^p\right\}\right)^{1/p} < \infty.$$

Por lo tanto $f \in H^p$.

Ahora supóngase que $1 \leq s \leq p$ y $f \in H^p$. Aplicando la desigualdad de Hölder (ver Rudin [10] teorema 3.2.3, pág 58),

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(re^{i\theta})|^s d\theta &\leq \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi}\left(|f(re^{i\theta})|^s\right)^{p/s} d\theta\right)^{s/p}\left(\int_{-\pi}^{\pi} d\theta\right)^{1-s/p} \\
&= \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi}|f(re^{i\theta})|^p d\theta\right)^{s/p}(2\pi)^{1-s/p} \\
&= (2\pi)^{1-s/p-1}\left(\int_{-\pi}^{\pi}|f(re^{i\theta})|^p d\theta\right)^{s/p} \\
&\leq \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(re^{i\theta})|^p d\theta\right)^{s/p}.
\end{aligned}$$

De donde

$$\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(re^{i\theta})|^s d\theta\right)^{1/s} \leq \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(re^{i\theta})|^p d\theta\right)^{1/p},$$

osea que

$$M_s(f,r) \leq M_p(f,r),$$

lo que implica que

$$\|f\|_s \leq \|f\|_p < \infty.$$

En consecuencia $f \in H^s$, y por lo tanto $H^p \subseteq H^s$. ■

Como $M_p(f,r)$ es una función creciente de r entonces se obtiene fácilmente la demostración del siguiente resultado.

Corolario 2.1.1 *1. Si $f \in H^p$, $1 \leq p \leq \infty$ entonces $\|f\|_p = \lim_{r\to 1^-} M_p(f,r)$.*

2. Si $f \in H^\infty$ entonces $\|f\|_\infty = \sup_{z\in D} \big\{|f(z)|\big\}$.

2.2. Completitud de H^p

Es de particular importancia mostrar una propiedad fundamental de los espacios de Hardy: ellos pueden ser vistos como una familia de espacios normados sobre $\mathbb{C}$, lo que permite el estudio de sucesiones de funciones y la naturaleza de su convergencia en estos espacios.

Teorema 2.2.1 *Sea $1 \leq p \leq \infty$. Entonces H^p es un espacio de Banach.*

Demostración. Por ser subconjunto del espacio lineal de todas las funciones analíticas sobre D es fácil mostrar que H^p es un espacio lineal sobre $\mathbb{C}$ puesto que basta sólo con mostrar que la suma de funciones y multiplicación por escalar son operaciones cerradas en H^p.

Sean $f, g \in H^\infty$, entonces

$$\begin{aligned}
\|f+g\|_\infty &= \sup_{r\in[0,1)} \{M_\infty(f+g,r)\} \\
&= \sup_{r\in[0,1)} \left\{ \sup_\theta \left\{ |(f+g)(re^{i\theta})| \right\} \right\} \\
&\leq \sup_{r\in[0,1)} \left\{ \sup_\theta \left\{ |f(re^{i\theta})| \right\} + \sup_\theta \left\{ |g(re^{i\theta})| \right\} \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \sup_{r\in[0,1)} \left\{ \sup_\theta \left\{ |f(re^{i\theta})| \right\} \right\} + \sup_{r\in[0,1)} \left\{ \sup_\theta \left\{ |g(re^{i\theta})| \right\} \right\} \\
&\leq \sup_{r\in[0,1)} \{M_\infty(f,r)\} + \sup_{r\in[0,1)} \{M_\infty(g,r)\} \\
&\leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty < +\infty.
\end{aligned}$$

Entonces

$$\|f+g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty < +\infty, \tag{2.2}$$

luego $(f+g) \in H^\infty$.

Ahora sean $f, g \in H^p$, con $1 \leq p < \infty$. Entonces

$$\begin{aligned}
\|f+g\|_p &= \sup_{r\in[0,1)} \{M_p(f+g,r)\} \\
&= \sup_{r\in[0,1)} \left\{ \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |(f+g)(re^{i\theta})|^p d\theta \right)^{1/p} \right\}.
\end{aligned}$$

Puesto que $p > 1$, aplicando la desigualdad de Minkowski (ver Rudin [10] teorema 3.2.4, pág 58) se tiene que

$$\begin{aligned}
\|f+g\|_p &\leq \sup_{r\in[0,1)} \left\{ \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(re^{i\theta})|^p d\theta \right)^{1/p} + \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |g(re^{i\theta})|^p d\theta \right)^{1/p} \right\} \\
&\leq \sup_{r\in[0,1)} \left\{ \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(re^{i\theta})|^p d\theta \right)^{1/p} \right\} + \sup_{r\in[0,1)} \left\{ \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |g(re^{i\theta})|^p d\theta \right)^{1/p} \right\} \\
&= \sup_{r\in[0,1)} \{M_p(f,r)\} + \sup_{r\in[0,1)} \{M_p(g,r)\} \\
&= \|f\|_p + \|g\|_p < \infty.
\end{aligned}$$

Es decir,

$$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p < \infty. \tag{2.3}$$

Por lo tanto la función $(f+g)$ está en H^p.

Sean $\alpha \in \mathbb{C}$ y $f \in H^\infty$, entonces

$$\begin{aligned}
\|\alpha f\|_\infty &= \sup_{r\in[0,1)} \{M_\infty(\alpha f, r)\} = \sup_{r\in[0,1)} \left\{ \sup_{\theta} \left\{ |\alpha f(re^{i\theta})| \right\} \right\} \\
&= \sup_{r\in[0,1)} \left\{ |\alpha| \sup_{\theta} |f(re^{i\theta})| \right\} = |\alpha| \sup_{r\in[0,1)} \left\{ \sup_{\theta} \left\{ |f(re^{i\theta})| \right\} \right\} \\
&= |\alpha| \sup_{r\in[0,1)} \{M_\infty(f,r)\} \\
&= |\alpha| \, \|f\|_\infty < \infty.
\end{aligned}$$

Entonces

$$\|\alpha f\|_\infty = |\alpha| \, \|f\|_\infty < \infty. \tag{2.4}$$

Esto muestra que $(\alpha f) \in H^\infty$.

Sean $\alpha \in \mathbb{C}$, $1 \leq p < \infty$ y $f \in H^p$. Entonces

$$\begin{aligned}
\|\alpha f\|_p &= \sup_{r\in[0,1)} \{M_p(\alpha f, r)\} \\
&= \sup_{r\in[0,1)} \left\{ \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\alpha f(re^{i\theta})|^p d\theta \right)^{1/p} \right\} \\
&= |\alpha| \sup_{r\in[0,1)} \left\{ \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(re^{i\theta})|^p d\theta \right)^{1/p} \right\} \\
&= |\alpha| \sup_{r\in[0,1)} \{M_p(f, r)\} = |\alpha| \, \|f\|_p < \infty.
\end{aligned}$$

De donde

$$\|\alpha f\|_p = |\alpha| \, \|f\|_p < \infty. \tag{2.5}$$

Es decir, $\alpha f \in H^p$.

Lo anterior significa que H^p es un espacio lineal sobre $\mathbb{C}$.

La aplicación $\|\cdot\| : H^p \to \mathbb{R}$ dada en la definición 2.1.2, es una norma sobre H^p. En efecto, si $p = \infty$ y $f \in H^\infty$, entonces

$$\|f\|_\infty = \sup_{r\in[0,1)} \{M_\infty(f, r)\} = \sup_{r\in[0,1)} \left\{ \sup_\theta \left\{ |f(re^{i\theta})| \right\} \right\}.$$

Pero para todo $r \in [0, 1)$ $\sup\limits_\theta \left\{ |f(re^{i\theta})| \right\} \geq 0$ y entonces $\|f\|_\infty \geq 0$.

Además, $\|f\|_\infty = 0$ si y sólo si $f(re^{i\theta}) = 0$ para todo $r \in [0, 1)$ y $\theta \in [-\pi, \pi]$, es decir que $f(z) = 0$ para todo $z \in D$.

Sean $\lambda \in \mathbb{C}$ y $f \in H^\infty$, entonces

$$\|\lambda f\|_\infty = |\lambda| \, \|f\|_\infty .$$

Sean $f, g \in H^\infty$, entonces

$$\|f + g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty .$$

Si $1 \leq p < \infty$ y $f \in H^p$, entonces.

$$\begin{aligned}
\|f\|_p &= \sup_{r\in[0,1)} \{M_p(f, r)\} \\
&= \sup_{r\in[0,1)} \left\{ \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(re^{i\theta})|^p d\theta \right)^{1/p} \right\}.
\end{aligned}$$

Como $|f(re^{i\theta})|^p \geq 0$, entonces $\int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(re^{i\theta})|^p d\theta \geq 0$, por tanto $\|f\|_p \geq 0$.

Además si $\|f\|_p = 0$, entonces $\sup\limits_{r\in[0,1)} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(re^{i\theta})|^p d\theta \right\}^{1/p} = 0$ de donde se obtiene que para cada $r \in [0,1)$, $\int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(re^{i\theta})|^p d\theta = 0$, esto implica que f es cero en casi todo punto de D, por la continuidad de f se tiene entonces que $f(z) = 0$ para todo $z \in D$.

Sea $\alpha \in \mathbb{C}$, $f \in H^p$, entonces

$$\|\alpha f\|_p = |\alpha| \, \|f\|_p \, .$$

Sean $f, g \in H^p$ entonces

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p \, .$$

Se ha probado que la expresión (2.1), es norma.

Ahora se muestra que H^p es un espacio completo. Sea $\{f_n\}$ una sucesión de Cauchy en H^p, es decir, dado $\epsilon > 0$ existe $N_0(\epsilon)$ tal que $\|f_n - f_m\|_p < \epsilon$ siempre que $n, m \geqslant N_0$. Sea $1 < p < \infty$, si $|z| \leq r < R < 1$, entonces por la fórmula integral de Cauchy (ver Churchill [4], pág 157),

$$f_n(z) - f_m(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=R} \frac{f_n(w) - f_m(w)}{w - z} dw;$$

por consiguiente,

$$\begin{aligned} |f_n(z) - f_m(z)| &= \frac{1}{2\pi} \left| \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f_n(Re^{i\theta}) - f_m(Re^{i\theta})}{Re^{i\theta} - z} Rie^{i\theta} d\theta \right| \\ &< \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{|f_n(Re^{i\theta}) - f_m(Re^{i\theta})|}{|Re^{i\theta} - z|} d\theta \\ &< \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{|f_n(Re^{i\theta}) - f_m(Re^{i\theta})|}{R - r} d\theta. \end{aligned}$$

De donde,

$$(R - r)|f_n(z) - f_m(z)| < \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f_n(Re^{i\theta}) - f_m(Re^{i\theta})| d\theta.$$

Usando la desigualdad de Hölder,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (1)|f_n(Re^{i\theta}) - f_m(Re^{i\theta})| d\theta &\leq \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f_n(Re^{i\theta}) - f_m(Re^{i\theta})|^p d\theta \right)^{1/p} \left(\int_{-\pi}^{\pi} d\theta \right)^{1/q} \\ &\leq \frac{1}{2\pi} (2\pi)^{\frac{1}{q}} \int_{-\pi}^{\pi} \left[|f_n(Re^{i\theta}) - f_m(Re^{i\theta})|^p d\theta \right]^{1/p} \\ &\leq \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f_n(Re^{i\theta}) - f_m(Re^{i\theta})|^p d\theta \right]^{1/p} . \\ &\leq M_p(f_n - f_m, R) \leq \|f_n - f_m\|_p \, . \end{aligned}$$

Lo que muestra que

$$|f_n(z) - f_m(z)| < \frac{\|f_n - f_m\|_p}{R-r} < \frac{\epsilon}{R-r} \quad \text{si } n, m \geq N_0(\epsilon),$$

de aquí se concluye que $\{f_n\}$ converge uniformemente en subconjuntos compactos de D a una función $f \in H(D)$ (ver teorema 1.2.3). Ahora si $\epsilon > 0$, existe un $m \in \mathbb{Z}^+$ tal que $\|f_n - f_m\|_p < \epsilon$ para todo $n > m$, y entonces, para todo $r < 1$,

$$M_p(f - f_m; r) = \lim_{n\to\infty} M_p(f_n - f_m; r) \leq \epsilon,$$

o sea que

$$\|f - f_m\|_p \leq \epsilon, \tag{2.6}$$

lo que indica que $\|f - f_m\|_p \to 0$ cuando $m \to \infty$.

Si $p = 1$ o $p = \infty$, igualmente se llega a una desigualdad de la forma

$$(R - r)|f_n(z) - f_m(z)| \leq \|f_n - f_m\|_p < \epsilon.$$

Por la desigualdad (2.6), $(f - f_m) \in H^p$. Como $f = (f - f_m) + f_m$, entonces $f \in H^p$, con lo que culmina la demostración. ■

2.3. Límite radial en H^∞

Una propiedad importante de las funciones de los espacios H^p es que poseen límites radiales, en el sentido de que $\lim_{r\to 1^-} f(re^{i\theta})$ existe en casi todos los puntos de T. En esta sección se muestra esta propiedad para funciones de H^∞.

Definición 2.3.1 *Sea u es una función armónica en D. Se define*

$$\begin{aligned} M_p^*(u, r) &:= \left\{\tfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |u(re^{i\theta})|^p d\theta\right\}^{1/p} \quad (1 \leq p < \infty), \\ M_\infty^*(u, r) &:= \sup_\theta \left\{|u(re^{i\theta})|\right\} \quad p = \infty. \end{aligned}$$

Entonces $\boldsymbol{h}^p(D) := \boldsymbol{h}^p$, $1 \leq p \leq \infty$, denotará la colección de todas las funciones armónicas u para las cuales $\sup_{r\in[0,1)} \left\{M_p^*(u, r)\right\} < \infty$.

Teorema 2.3.1 *Si $u \in \boldsymbol{h}^p$, $1 < p \leq \infty$, entonces existe $g \in L_p$ tal que*

$$u = P[g].$$

Demostración. Para demostrar este teorema se procede como en el teorema 1.1.6, definiéndose para $0 < s < 1$ el funcional $\Lambda_s : L_q \to \mathbb{R}$, por

$$\Lambda_s(f) = \int_{-\pi}^{\pi} u(se^{it})f(t)dt,$$

donde q es el exponente conjugado de $p > 1$, o sea $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$ o $q = 1$ si $p = \infty$, usando la desigualdad de Hölder se tiene que $\mathfrak{F} := \{\Lambda_s\}_{s\in(0,1)}$ es una familia equicontinua y puntualmente acotada, y como C es un subespacio de L_q y C contiene un subconjunto denso contable, si $s_n \to 1^-$ cuando $n \to \infty$, por el teorema de 1.1.5 existe una subsucesión de $\{\Lambda_{s_n}\}$, que también se denotará por $\{\Lambda_{s_n}\}$, que converge uniformemente en cada subconjunto compacto de C. Pero para cada $f \in C$, $\{f\}$ es un conjunto subcompacto de C, lo que implica que $\{\Lambda_{s_n} f\}$ converge para toda $f \in C$. De esta manera es posible definir el funcional $\Lambda : L_q \to \mathbb{R}$ por

$$\Lambda f := \lim_{n\to\infty} \Lambda_{s_n} f.$$

Entonces por el Teorema de Representación de Riesz para funcionales sobre L_q (ver [3], teorema 8.15 pag. 91 o teorema 8.14 si $p = \infty$) existe una $g \in L_p$ tal que

$$\Lambda f = \int_{-\pi}^{\pi} g(t)f(t)dt \quad \text{para toda } f \in L_q.$$

Recuérdese que se han identificado f y $\widetilde{f}$ y nótese que si $g \in L_p,\ p > 1$, entonces $g \in L_1$. Así procediendo como en la demostración del teorema 1.1.6 se tiene que

$$u(re^{i\theta}) = P[g](re^{i\theta}). \qquad \blacksquare$$

En el siguiente lema, $J(\theta, s)$ representa el arco circular de longitud $2s$ con centro $e^{i\theta}$, es decir,

$$J(\theta, s) := \left\{e^{it} : \theta - s < t < \theta + s\right\}.$$

Lema 2.3.1 *Sean μ una medida de Borel real finita sobre T y $F = P[d\mu]$. Si existen $\delta,\ 0 < \delta < \pi$, y un número real A tal que $\mu(J(\theta, s)) < 2sA$, con $0 < s < \delta$, entonces*

$$F(re^{i\theta}) < A + |A|P_r(\delta) + \frac{1}{2\pi}P_r(\delta)\mu(T)$$

para $0 \le r < 1$.

Demostración. Considérense el par de conjuntos:

$$\{t \in \mathbb{R} : \delta \le |\theta - t| \le \pi\} \quad \text{y} \quad \{t \in \mathbb{R} : |\theta - t| \le \delta\}.$$

El primer conjunto se puede ver como la unión de dos intervalos y se denota por I, esto es, $I = [\theta - \pi, \theta - \delta] \cup [\theta + \delta, \theta + \pi]$. El segundo conjunto se denota por $I(\delta)$ y se tiene que $I(\delta) = [\theta - \delta, \theta + \delta]$. Luego,

$$F(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t) d\mu(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\theta-\pi}^{\theta+\pi} P_r(\theta - t) d\mu(t),$$

de donde

$$F(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_I P_r(\theta - t) d\mu(t) + \frac{1}{2\pi} \int_{I(\delta)} P_r(\theta - t) d\mu(t). \tag{2.7}$$

Usando la propiedad (5) del teorema 1.1.1 se tiene:

$$\frac{1}{2\pi} \int_I P_r(\theta - t) d\mu(t) \leq \frac{1}{2\pi} P_r(\delta) \mu(T). \tag{2.8}$$

La última integral de (2.7) puede acotarse si se considera la integral de P_r' sobre el triángulo

$$\{(s,t) : \theta - s < t < \theta + s,\, 0 < s < \delta\}.$$

Entonces

$$\begin{aligned} \int_0^{\delta} \int_{\theta-s}^{\theta+s} P_r'(s) d\mu(t)\, ds &= \int_0^{\delta} P_r'(s) \int_{\theta-s}^{\theta+s} d\mu(t)\, ds \\ &= \int_0^{\delta} \mu(I(s)) P_r'(s) ds, \end{aligned}$$

cambiando el orden en la integración y con ayuda de la parte (4) del teorema 1.1.1

$$\int_{\theta-\delta}^{\theta} \int_{\theta-t}^{\delta} P_r'(s) ds\, d\mu(t) + \int_{\theta}^{\theta+\delta} \int_{t-\theta}^{\delta} P_r'(s) ds\, d\mu(t) = \int_{\theta}^{\theta+\delta} [P_r(\delta) - P_r(\theta - t)] d\mu(t).$$

Puesto que P_r' es una función continua y acotada se puede aplicar el Teorema de Fubini (ver Bartle [3] teorema 10.10, pág 119) obteniendose:

$$\int_0^{\delta} \mu(I(s)) P_r'(s) ds = \int_{I(s)} [P_r(s) - P_r(\theta - t)] d\mu(t).$$

Por hipótesis $\mu(I(s)) < 2sA$ y como $P_r'(s) < 0$ en $(0, \pi)$, entonces

$$\begin{aligned} \int_{I(\delta)} P_r(\theta - t) d\mu(t) &= \int_{I(\delta)} P_r(\delta) d\mu(t) - \int_0^{\delta} \mu(I(s)) P_r'(s) ds \\ &< 2A \left[\delta P_r(\delta) - \int_0^{\delta} s P_r'(s) ds \right]. \end{aligned}$$

Utilizando integración por partes se obtiene

$$\begin{aligned}
\int_{I(\delta)} P_r(\theta-t)d\mu(t) &< 2A\int_0^{\delta} P_r(s)ds\\
&= 2A\left[\int_0^{\pi} P_r(s)ds - \int_{\delta}^{\pi} P_r(s)ds\right]\\
&= 2A\left[\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(s)ds - \int_{\delta}^{\pi} P_r(s)ds\right]\\
&= 2\pi A - 2A\int_{\delta}^{\pi} Pr(s)ds \le 2\pi A + 2\pi|A|P_r(\delta).
\end{aligned}$$

Nótese que la última desigualdad se obtiene por la parte (5) del teorema 1.1.1. Usando (2.8) y esta última desigualdad se obtiene el resultado.

■

Definición 2.3.2 (Derivada de una medida μ) *Sean μ una medida de Borel real finita sobre T y $J(\theta,s)$ definido como en el lema 2.3.1. Se define la derivada superior de μ con respecto a θ como*

$$(\overline{D}_{\mu})(\theta) := \limsup_{s\to 0} \frac{\mu(J(\theta,s))}{2s}.$$

De igual manera se definen $(D_{\mu})(\theta)$ como derivada de μ, $(\underline{D}_{\mu})(\theta)$ derivada inferior de μ, con límite y límite inferior respectivamente.

Obsérvese que el concepto de *derivada de una medida* es análogo al de *derivada de una función*; este último es una comparación en límite de los valores que toma una función respecto a su dominio y la derivada de una medida compara los valores de una medida μ con respecto a la medida de Lebesgue.

Teorema 2.3.2 *Si μ es una medida de Borel real sobre T, entonces $(D_{\mu})(e^{it})$ existe en casi todo punto de T.*

Demostración. Ver teorema 8.1.6, Rudin [10], pg. 145. ■

El siguiente teorema garantiza la existencia del límite radial para la integral de Poisson de una medida real finita de Borel y con ayuda del teorema 2.3.1 se logra mostrar esta característica para las funciones de H^{∞}.

Teorema 2.3.3 *Sean μ una medida de Borel real finita sobre T y $J(\theta,s)$ como en el lema 2.3.1. Si $F = P[d\mu]$ entonces*

$$(\underline{D}_{\mu})(\theta) \le \liminf_{r\to 1^-} F(re^{i\theta}) \le \limsup_{r\to 1^-} F(re^{i\theta}) \le (\overline{D}_{\mu})(\theta)$$

para todo θ y

$$\lim_{r\to 1^-} F(re^{i\theta}) = (D_\mu)(\theta), \tag{2.9}$$

existe y es finito en casi todo $\theta \in [-\pi, \pi]$.

Demostración. Sea θ fijo y supóngase que $A > (\overline{D_\mu})(\theta)$. Entonces existe un $\delta > 0$ tal que si $0 < s < \delta$,

$$\frac{\mu(J(\theta, s))}{2s} < A.$$

Cuando $r \to 1^-$, $\quad P_r(\delta) \to 0$, y por el lema 2.3.1 se concluye que

$$\limsup_{r\to 1^-} F(re^{i\theta}) \leq (\overline{D}_\mu)(\theta).$$

La primera desigualdad se obtiene si se aplica lo anterior a $-\mu$ en lugar de μ y se usa el hecho de que $\overline{D}_{-\mu}(\theta) = -\underline{D}_\mu(\theta)$. Por último $\lim\limits_{r\to 1^-} F(re^{i\theta}) = D_\mu(\theta)$ es un consecuencia del teorema 2.3.2. ■

Corolario 2.3.1 *Si $f \in L^1$ y $F = P[f]$, entonces*

$$\lim_{r\to 1^-} F(re^{i\theta}) = f(e^{i\theta}) \quad \textit{en casi todo punto de} T.$$

El resultado anterior es una consecuencia de la observación de la pgina (5), la igualdad $(D_\mu)(\theta) = f(e^{i\theta})$ en casi todo $\theta \in [-\pi, \pi]$ (ver Rudin [10], pág 145) y (2.9).

Teorema 2.3.4 *Si $f \in H^\infty$, entonces para casi todo $\theta \in [-\pi, \pi]$ existe $\lim\limits_{r\to 1^-} f(re^{i\theta})$, de manera que a toda $f \in H^\infty$ le corresponde una función f^* definida en casi todo punto de T por*

$$f^*(e^{i\theta}) = \lim_{r\to 1^-} f(re^{i\theta}).$$

La función f^* es tal que $f^* \in L_\infty$ y $\|f\|_\infty = \|f^*\|_{L_\infty}$.

Demostración. Sean $f \in H^\infty$, $f_1 = Ref$ y $f_2 = Imf$. Entonces f_1 y f_2 son funciones armónicas en D tales que $f_1, f_2 \in h^\infty(D)$. Por el teorema 2.3.1 existen $g_1, g_2 \in L_\infty$ tales que $f_1 = P[g_1]$ y $f_2 = P[g_2]$. Por el corolario 2.3.1 se tiene que para casi todo $\theta \in [-\pi, \pi]$,

$$\begin{aligned}
\lim_{r\to 1^-} f(re^{i\theta}) &= \lim_{r\to 1^-} [f_1(re^{i\theta}) + i f_2(re^{i\theta})] \\
&= \lim_{r\to 1^-} P[g_1](re^{i\theta}) + i \lim_{r\to 1^-} P[g_2](re^{i\theta}) \\
&= g(e^{i\theta}),
\end{aligned}$$

donde $g = g_1 + ig_2$, lo que implica la existencia del límite. De lo anterior también se tiene que si $f^* = g$, entonces

$$|f^*(e^{i\theta})| = \lim_{r\to 1^-} |f(re^{i\theta})| \leq \|f\|_\infty \quad \text{para casi todo} \;\; \theta \in [-\pi, \pi];$$

o sea que

$$\|f^*\|_{L_\infty} \leq \|f\|_\infty. \tag{2.10}$$

Si $z \in D$ y $|z| < r < 1$, entonces

$$f(z) = \frac{r}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(re^{i\theta})}{re^{i\theta} - z} e^{i\theta} d\theta,$$

Si $\{r_n\}$ es una sucesión tal que $r_n \to 1^-$, aplicando el Teorema de la Convergencia Dominada de Lebesgue (ver Rudin [10], teorema 1.9.5, pág.21) se obtiene que

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f^*(e^{i\theta})}{1 - ze^{-i\theta}} d\theta. \tag{2.11}$$

Por otra parte, por el Teorema de Cauchy-Goursat (ver Churchill [4], pág 144) se tiene que $\int_{|z|=r} f(z) z^n dz = 0$ para $n = 0, 1, 2, ...$ Un paso al límite similar al anterior muestra que

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^*(e^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta = 0, \quad n = -1, -2, ... \,. \tag{2.12}$$

La igualdad (2.11) se puede escribir como una integral de Poisson. Si $z = re^{i\alpha}$,

$$1 + re^{i(\alpha-\theta)} + ... + r^{n-1} e^{i(n-1)(\alpha-\theta)} = \frac{1 - r^n e^{in(\alpha-\theta)}}{1 - re^{i(\alpha-\theta)}},$$

de donde

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n e^{in(\alpha-\theta)} = \frac{1}{1 - re^{i(\alpha-\theta)}}.$$

Luego,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^*(e^{i\theta}) \sum_{n=0}^{\infty} r^n e^{in(\alpha-\theta)} d\theta.$$

Usando (2.12) se obtiene:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^*(e^{i\theta}) \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{in(\alpha-\theta)} d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^*(e^{i\theta}) P_r(\alpha - \theta) d\theta; \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned}|f(z)| &= \left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^*(e^{i\theta})P_r(\alpha-\theta)d\theta\right| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f^*(e^{i\theta})|P_r(\alpha-\theta)d\theta \\ &\leq \sup_\theta\{|f^*(e^{i\theta})|\}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}P_r(\alpha-\theta)d\theta \\ &\leq \sup_\theta\{|f^*(e^{i\theta})|\}.\end{aligned}$$

De donde

$$\|f\|_\infty \leq \|f^*\|_{L_\infty}. \tag{2.13}$$

Por lo tanto, de las ecuaciones (2.10) y (2.13), se sigue que $\|f\|_\infty = \|f^*\|_{L_\infty}$. ∎

2.4. El espacio H^2

El espacio H^2 tiene una particular importancia ya que además de ser un espacio de Banach es de Hilbert y posee algunas propiedades interesantes. Para probarlas es necesario enunciar los siguientes teoremas.

Teorema 2.4.1 (Parseval) *Para cualquier $f \in L_2$ la serie de Fourier de f* [1] *converge en L_2 y se tiene la identidad*

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)|^2dt = \sum_{n\in\mathbb{Z}}|\hat{f}(n)|^2.$$

Donde $\hat{f}(n)$ se conoce como el n-ésimo coeficiente de Fourier y está dado por

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}dt. \tag{2.14}$$

Demostración. Ver Pinsky [9] teorema 1.3.2, pág 36. ∎

[1] *Para cada $f \in L_2$, la serie de Fourier de f es*

$$\sum_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(n)e^{int},$$

donde $\hat{f}(n)$ son como en 2.14.

Teorema 2.4.2 (Riesz-Fisher) *Sea $\{c_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ una sucesión de números complejos tal que*

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n|^2 < \infty.$$

Entonces existe una única función $f \in L_2$ con $\hat{f}(n) = c_n$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Demostración. Ver Pinsky [9] teorema 1.3.5, pg 37. ∎

Teorema 2.4.3 *H^2 es un espacio de Hilbert.*

Demostración. Por el teorema 2.2.1 es suficiente mostrar que la norma en H^2 es inducida por un producto interno. Se define

$$\langle f, g\rangle := \lim_{r\to 1^-} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(re^{i\theta})\overline{g(re^{i\theta})}d\theta \right\}, \quad f, g \in H^2,$$

entonces se tiene que

$$\begin{aligned} \langle f, f\rangle &= \lim_{r\to 1^-} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(re^{i\theta})\overline{f(re^{i\theta})}d\theta \right\} \\ &= \lim_{r\to 1^-} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta \right\} \\ &= \|f\|_2^2 . \end{aligned}$$

Como $\|f\|_2 \geq 0$,

$$\langle f, f\rangle \geq 0.$$

Además si $f, g \in H^2$, entonces:

$$\begin{aligned} \overline{\langle f, g\rangle} &= \lim_{r\to 1^-} \overline{\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(re^{i\theta})\overline{g(re^{i\theta})}d\theta} \\ &= \lim_{r\to 1^-} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \overline{\left[f(re^{i\theta})\overline{g(re^{i\theta})}\right]}d\theta \\ &= \lim_{r\to 1^-} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(re^{i\theta})\overline{f(re^{i\theta})}d\theta \\ &= \langle g, f\rangle . \end{aligned}$$

Por último, para $f, g, h \in H^2$ y $\alpha \in \mathbb{C}$, se tiene que

$$\begin{aligned}
\langle \alpha f + g, h\rangle &= \lim_{r\to 1^-}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\alpha f(re^{i\theta}) + g(re^{i\theta})\right)\overline{h(re^{i\theta})}d\theta\right\}\\
&= \lim_{r\to 1^-}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\alpha f(re^{i\theta})\overline{h(re^{i\theta})} + g(re^{i\theta})\overline{h(re^{i\theta})}\right)d\theta\right\}\\
&= \lim_{r\to 1^-}\left\{\alpha\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(re^{i\theta})\overline{h(re^{i\theta})}d\theta\right) + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(re^{i\theta})\overline{h(re^{i\theta})}d\theta\right\}\\
&= \alpha\lim_{r\to 1^-}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(re^{i\theta})\overline{h(re^{i\theta})}d\theta\right\} + \lim_{r\to 1^-}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(re^{i\theta})\overline{h(re^{i\theta})}d\theta\right\}\\
&= \alpha\langle f, h\rangle + \langle g, h\rangle .
\end{aligned}$$

Por tanto $\langle\, ,\rangle$ es producto interno y H^2 es un espacio de Hilbert. ■

Ejemplo. Considérese el conjunto $\{1, z, z^2, z^3 \ldots\}$, entonces:

$$\begin{aligned}
\langle z^n, z^n\rangle &= \lim_{r\to 1^-}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(re^{i\theta})^n\overline{(re^{i\theta})^n}d\theta\right\}\\
&= \lim_{r\to 1^-}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|r|^{2n}d\theta\right\}\\
&= \lim_{r\to 1^-}|r|^{2n}\\
&= 1.
\end{aligned}$$

Por otro lado, si $n \neq m$ entonces:

$$\begin{aligned}
\langle z^n, z^m\rangle &= \lim_{r\to 1^-}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(re^{i\theta})^n\overline{(re^{i\theta})^m}d\theta\right\}\\
&= \lim_{r\to 1^-}\left\{\frac{r^{n+m}}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{i(n-m)\theta}d\theta\right\}\\
&= 0.
\end{aligned}$$

Luego $\{1, z, z^2, z^3 \ldots\}$ es un conjunto ortonormal de H^2.

Además de ser H^2 un espacio de Hilbert, las funciones en este espacio poseen propiedades interesantes descritas en los siguientes teoremas.

Teorema 2.4.4 *Sea $f \in H(D)$ una función de la forma $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. $f \in H^2$ si y sólo si $\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|^2 < \infty$. En este caso,*

$$\|f\|_2 = \left[\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|^2\right]^{1/2}.$$

Demostración. Dado que $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ entonces

$$f(re^{i\theta}) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n e^{in\theta}. \tag{2.15}$$

Para $0 < r < 1$ la serie (2.15) converge uniformemente en $\theta \in [-\pi, \pi]$, por tanto $a_n r^n$ es el n-ésimo coeficiente de Fourier de f, esto es

$$a_n r^n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(re^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{2.16}$$

Por el Teorema de Parseval, se tiene que

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| f(re^{i\theta}) \right|^2 d\theta = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n r^n|^2$$

lo que equivale a

$$M_2(f, r) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} |a_n r^n|^2 \right)^{1/2}$$

entonces,

$$\|f\|_2 = \left(\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 \right)^{1/2},$$

lo que demuestra el teorema.

■

Ejemplo. Si $z \in D$ entonces

$$\frac{1}{1 - z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n. \tag{2.17}$$

En este caso, $g(z) = \dfrac{1}{1 - z}$ escrito en serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ se tiene que $a_n = 1$ y $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 = \infty$, por tanto $g(z) = \dfrac{1}{1 - z}$ no pertenece a H^2. Integrando (2.17) (lo cual es posible por la convergencia uniforme de la serie) se obtiene:

$$f(z) = -\log(1 - z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n+1}}{n + 1},$$

en este caso $a_n = \dfrac{1}{n + 1}$ y la serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2}$ converge y por tanto está en H^2. En resumen, se tiene una función en H^2 cuya derivada no lo está.

Teorema 2.4.5 *Si $f \in H^2$ entonces f posee límites radiales $f^*(e^{i\theta})$ en casi todo punto de T en el sentido de la sección (2.3), $f^* \in L_2$, además*

$$\lim_{r \to 1^-} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f^*(e^{i\theta}) - f(re^{i\theta})|^2 d\theta = 0 \tag{2.18}$$

y f es la integral de Poisson de f^*.

Demostración. Supóngase que $f \in H^2$. Para $0 < r < 1$ defínase la función f_r mediante

$$f_r(e^{i\theta}) := f(re^{i\theta}) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n e^{in\theta}.$$

Por el teorema anterior, $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 < \infty$. El Teorema de Riesz-Fischer asegura la existencia de una función $g \in L_2$ tal que $\hat{g}(n) = a_n$ para todo $n \geq 0$ y $\hat{g}(n) = 0$ para $n < 0$.

Si $h := g - f_r$ entonces $h \in L_2$ y sus coeficientes de Fourier están dados por

$$\begin{aligned}
\hat{h}(n) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h(e^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta \quad (n = 0, 1, 2, \ldots) \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (g(e^{i\theta}) - f_r(e^{i\theta})) e^{-in\theta} d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(e^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_r(e^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta \\
&= a_n - r^n a_n \\
&= (1 - r^n) a_n.
\end{aligned}$$

Aplicando el Teorema de Parseval se obtiene que $\|g - f_r\|_{L_2}^2 = \sum_{n=0}^{\infty} (1 - r^n)^2 |a_n|^2$, entonces

$$\lim_{r \to 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} (1 - r^n)^2 |a_n|^2 = 0,$$

de donde

$$\lim_{r \to 1^-} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |g(e^{i\theta}) - f(re^{i\theta})|^2 d\theta = 0,$$

o sea que

$$\lim_{r \to 1^-} \|g - f_r\|_{L_2} = 0. \tag{2.19}$$

Para $s \in (0, 1)$ fijo, $f_s(z) = f(sz)$ es analítica en $B(0, 1/s)$. Si $z \in D$ con $z = re^{i\theta}$ entonces

$$f(sz) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t) f_s(e^{it}) dt.$$

considédese el producto interno

$$\begin{aligned} \langle f_s - g, P_r \rangle &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t)(f_s(e^{it}) - g(e^{it}))dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t) f_s(e^{it})dt - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t) g(e^{it})dt \end{aligned}$$

Aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz (ver Rudin [10], teorema 4.1.2, pág 68) se tiene que

$$|\langle f_s - g, P_r \rangle| \leq \|f_s - g\|_{L_2}$$

Si $s \to 1^-$, la ecuación (2.19) implica que

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t) f_s(e^{it})dt - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t) g(e^{it})dt = 0,$$

esto implica a su vez que

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t) g(e^{it})dt$$

con g en lugar de f^*. Por tanto, f es la integral de Poisson de f^*.
Como $g \in L_1$, el corolario 2.3.1 muestra que existen los límites radiales de f y son iguales a g en casi todo punto de T. ■

Capítulo 3

Propiedades Adicionales de los espacios H^p

Para este capítulo se presentan otras propiedades en las funciones de los espacios de Hardy. Se estudiarán los denominados productos de Blaschke y se muestra que las funciones en los espacios H^p poseen límite radial para todo $p \geq 1$.

3.1. Productos de Blaschke

Los productos de Blaschke son funciones en H^∞ definidas mediante productos infinitos, los cuales serán necesarios para generalizar la existencia del límite radial en los espacios de Hardy.

Definición 3.1.1 (Producto de Blaschke) *Sean k un entero no negativo y $\{z_n\}_{n\in\mathbb{Z}^+}$ una sucesión en D tal que para todo $n \in \mathbb{Z}^+$, $z_n \neq 0$ y*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(1-|z_n|) < \infty. \tag{3.1}$$

La función

$$B(z) = z^k \prod_{n=1}^{\infty} \frac{z_n - z}{1-\overline{z_n}z}\frac{|z_n|}{z_n} \quad (z \in D), \tag{3.2}$$

es denominada un producto de Blaschke.

El término producto de Blaschke también se usa si sólo hay un número finito de factores; es más, si no hay ninguno. Para el caso de no tener factores, $B(z) = 1$.
La condición (3.1) se denomina *condición de Blaschke.* Nótese además que cada factor

de (3.2) tiene módulo 1 en T. En efecto, sea $z = e^{i\theta}$, entonces

$$\begin{aligned} \left|\frac{z_n - e^{i\theta}}{1-\overline{z_n}e^{i\theta}}\frac{|z_n|}{z_n}\right| &= \left|\frac{z_n - e^{i\theta}}{1-\overline{z_n}e^{i\theta}}\right| \\ &= \left|\frac{1}{e^{i\theta}}\right|\left|\frac{z_n - e^{i\theta}}{e^{-i\theta}-\overline{z_n}}\right| \\ &= \left|\frac{z_n - e^{i\theta}}{\overline{e^{i\theta}-\overline{z_n}}}\right| \\ &= 1. \end{aligned}$$

El siguiente teorema muestra que la condición de Blaschke es suficiente para la convergencia del producto infinito en (3.2).

Teorema 3.1.1 *Sean $\{z_n\}_{n\in\mathbb{Z}^+}$ una sucesión en D y $B(z)$ como en la definición anterior. Entonces $B \in H^\infty$ y los únicos ceros de $B(z)$ son los puntos z_n y $z = 0$ si $k > 0$.*

Demostración. Defínanse las funciones f_n en D por

$$f_n(z) = \frac{z_n - z}{1-\overline{z_n}z}\frac{|z_n|}{z_n}$$

y nótese que $f_n \in H(D)$, ya que si $1-\overline{z_n}z = 0$ entonces $|z| = \frac{1}{|z_n|} > 1$.
Ahora bien,

$$\begin{aligned} |1 - f_n(z)| &= \left|\frac{(1-\overline{z_n}z)z_n - (z_n - z)|z_n|}{(1-\overline{z_n}z)z_n}\right| \\ &= \left|\frac{(z_n + z|z_n|)(1-|z_n|)}{(1-\overline{z_n}z)z_n}\right| \\ &\le \frac{\big(|z_n| + |z||z_n|\big)\big|1-|z_n|\big|}{|1-\overline{z_n}z||z_n|} = \frac{(1+|z|)}{|1-\overline{z_n}z|}(1-|z_n|), \end{aligned}$$

pero si $z \in \overline{B}(0,r)$, $0 \le r < 1$, entonces $1+|z| \le 1+r$ y $1-r \le 1-|z_n||z| \le |1-\overline{z_n}z|$, de donde

$$|1 - f_n(z)| \le \frac{1+r}{1-r}(1-|z_n|) \quad \text{para} \quad z \in \overline{B}(0,r).$$

Por lo tanto, de la convergencia de $\sum_{n=1}^{\infty}(1-|z_n|)$, se tiene la convergencia uniforme de $\sum_{n=1}^{\infty}(1-|f_n(z)|)$ en $\overline{B}(0,r)$, $0 \le r < 1$; entonces el teorema 1.2.4 implica que

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} f_n(z) = \prod_{n=1}^{\infty}\frac{z_n - z}{1-\overline{z_n}z}\frac{|z_n|}{z_n}$$

converge uniformemente en subconjuntos compactos de D y por tanto $f \in H(D)$.

Además $f(z_0) = 0$ si y sólo si $z_0 = z_n$ para algún n, lo que muestra que B sólo tiene ceros en los z_n o en $z = 0$ si $k > 0$. Falta probar que B es acotada en D, pero esto se tiene porque cada factor de (3.2) tiene módulo menor que 1 en D, o sea que

$$|B(z)| = |z|^k \lim_{m\to\infty} \prod_{n=1}^{m} \left| \frac{z_n - z}{1 - \overline{z_n} z} \frac{|z_n|}{z_n} \right| \leq 1.$$

■

El teorema anterior muestra la existencia de una función en H^∞, $B : D \to D$, que sólo tiene ceros en los puntos dados z_1, z_2, ... , bajo la condición de Blaschke.
También se puede probar que si $f \in H^\infty$ entonces los ceros de f deben satisfacer (3.1). Mas aún, si $f \in H^p$, $1 \leq p \leq \infty$, entonces se cumple la condición de Blaschke si z_1, z_2, ... son los ceros de f. Este resultado no trivial es conocido como el Teorema de Szegö. De manera que con los ceros de una función en H^p se puede construir un producto de Blaschke.

Ejemplo. Sea f la siguiente función:

$$f(z) = z^5 - \frac{\sqrt{2}}{2} i z^4 + \frac{13}{36} z^3 - \frac{13\sqrt{2}}{72} i z^2 + \frac{1}{36} z - \frac{\sqrt{2}}{72} i.$$

Anteriormente se probó que $f \in H^p$, para $1 \leq p \leq \infty$. Factorizando a f se tiene:

$$f(z) = \left(z + \frac{1}{2}i\right)\left(z - \frac{1}{2}i\right)\left(z + \frac{1}{3}i\right)\left(z - \frac{1}{3}i\right)\left(z - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right).$$

Entonces el conjunto de ceros de f en D es $\left\{ z_{1,2} = \pm\frac{1}{2}i\,,\ z_{3,4} = \pm\frac{1}{3}i\,,\ z_5 = \frac{\sqrt{2}}{2}i \right\}$. Se tiene que $z_j \neq 0$ para $j = 1, ..., 5$ y $\sum_{j=1}^{5} (1 - |z_j|) < \infty$, por tanto la función

$$B(z) = z^k \prod_{j=1}^{5} \frac{z_j - z}{1 - \overline{z_j} z} \frac{|z_j|}{z_j},$$

es un producto de Blaschke.

El siguiente teorema muestra una caracterización para conjunto de ceros de las funciones analíticas que no son idénticamente cero.

Teorema 3.1.2 *Si $f \in H(D)$ y no es idénticamente cero entonces el conjunto de ceros de f en D no tiene puntos límite y es a lo sumo numerable.*

Demostración. Sea $Z(f)$ el conjunto de ceros de f, es decir,

$$Z(f) := \{a \in D : f(a) = 0\},$$

y sea A el conjunto de puntos límite de $Z(f)$ en D, es claro que por ser f continua se tiene que $A \subseteq Z(f)$.

Sea $a \in A$ fijo arbitrario entonces existe $r > 0$ tal que $B(a,r) \subseteq D$ y considérese el desarrollo en serie de potencias de f con centro en a

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n. \tag{3.3}$$

Existen dos posibilidades: $c_n = 0$ para todo n ó existe un mínimo entero m necesariamente positivo (puesto que $f(a) = 0$, implica $c_0 = 0$) tal que $c_m \neq 0$.

Si existe $m \in \mathbb{Z}^+$ tal que $c_m \neq 0$ entonces la función

$$g(z) := \begin{cases} (z-a)^{-m} f(z) & \text{si} \quad z \in (D - \{a\}) \\ c_m & \text{si} \quad z = a \end{cases}$$

es tal que $g \in H(D - \{a\})$, pero la ecuación (3.3) muestra que

$$g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_{m+k} (z-a)^k \quad \text{para } z \in B(a,r).$$

En consecuencia $g \in H(B(a,r))$, así $g \in H(D)$ con $g(a) \neq 0$. La continuidad de g indica que existe un entorno de a en el cual g no tiene ceros, de donde a es un punto aislado de $Z(f)$, lo que contradice la escogencia de a. Por tanto para todo n, $c_n = 0$.

Como $c_n = 0$ para todo n, entonces $B(a,r) \subseteq A$ se tiene que a es un punto interior, luego A es un conjunto abierto. Sea $B := D - A$, puesto que A es el conjunto de puntos límite de $Z(f)$, entonces B es abierto, por lo tanto D es la unión de los conjuntos abiertos y disjuntos A y B. Dado que D es conexo, se tiene que $A = D$, en cuyo caso $Z(f) = D$, lo cual es imposible por no ser f idénticamente cero, de esta manera $A = \emptyset$, esto muestra que $Z(f)$ no tiene puntos límite. Si $A = \emptyset$ entonces $Z(f)$ tiene a lo sumo un número finito de ceros en cada subconjunto compacto de D y como D es unión numerable de subconjuntos compactos entonces $Z(f)$ es a lo sumo numerable. ∎

Con el fin de mostrar el Teorema de Szegö se debe probar la fórmula de Jensen, la cual establece una conexión entre el módulo de los ceros de una función f en el disco $|z| < r$ y los valores de $|f|$ en la circunferencia $|z| = r$. Pero antes se enunciará el siguiente lema.

Lema 3.1.1

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\ln|1-e^{i\theta}|d\theta = 0$$

Demostración. Ver Rudin [10], Lema 15.4.2, pág. 288. ■

Teorema 3.1.3 (Fórmula de Jensen) *Sea* $f \in H(D)$*, supóngase* $f(0) \neq 0$*,* $0 < r < 1$*, y que* $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_N$ *son los ceros de* f *en* $\overline{B}(0,r)$ *enumerados de acuerdo a sus multiplicidades. Entonces*

$$|f(0)|\prod_{n=1}^{N}\frac{r}{|\alpha_n|} = \exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\ln|f(re^{i\theta})|d\theta\right\}.$$

Demostración. Se pueden ordenar los α_j de tal manera que $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ pertenezcan a $B(0,r)$ y $\alpha_{m+1}, \ldots, \alpha_N$ estén en $\partial B(0,r)$.
Sea

$$g(z) = f(z)\prod_{n=1}^{m}\frac{r^2-\overline{\alpha_n}z}{r(\alpha_n - z)}\prod_{n=m+1}^{N}\frac{\alpha_n}{\alpha_n - z}.$$

Sin problema puede darse el caso $m = N$ o $m = 0$, en cuyo caso $g(z) = f(z)\prod\limits_{n=1}^{N}\frac{r^2-\overline{\alpha_n}z}{r(\alpha_n-z)}$ ó $g(z) = f(z)\prod\limits_{n=1}^{N}\frac{\alpha_n}{\alpha_n-z}$ respectivamente.
Puesto que el conjunto de ceros de f no posee puntos límite, entonces $g \in H(B)$, donde $D^* = B(0, r+\epsilon)$ para algún $\epsilon > 0$. Además g no tiene ceros en D^* por lo que $\ln|g|$ es armónica en D^* (ver Rudin [10], teorema 13.4.2, pág 257) y por lo tanto satisface la propiedad del valor medio para funciones armónicas, esto es

$$\ln|g(0)| = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\ln|g(re^{i\theta})|d\theta$$

y

$$|g(0)| = |f(0)|\prod_{n=1}^{m}\frac{r}{|\alpha_n|}.$$

Si $1 \leq n \leq m$ y $|z| = r$, los factores

$$\frac{r^2-\overline{\alpha_n}z}{r(\alpha_n - z)}$$

tienen módulo uno. Si $\alpha_n = re^{i\theta_n}$ para $m < n \leq N$, se tiene que

$$\begin{aligned}
\ln|g(re^{i\theta})| &= \ln\left| f(re^{i\theta}) \prod_{n=1}^{m} \frac{r^2 - \overline{\alpha_n} re^{i\theta}}{r(\alpha_n - re^{i\theta})} \prod_{n=m+1}^{N} \frac{re^{i\theta_n}}{re^{i\theta_n} - re^{i\theta}} \right| \\
&= \ln\left|f(re^{i\theta})\right| + \sum_{n=1}^{m} \ln\left| \frac{r^2 - \overline{\alpha_n} re^{i\theta}}{r(\alpha_n - re^{i\theta})} \right| + \sum_{n=m+1}^{N} \ln\left| \frac{re^{i\theta_n}}{re^{i\theta_n} - re^{i\theta}} \right| \\
&= \ln\left|f(re^{i\theta})\right| - \sum_{n=m+1}^{N} \ln|1 - e^{i(\theta-\theta_n)}|.
\end{aligned}$$

De donde

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \ln|g(re^{i\theta})|d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \ln|f(re^{i\theta})|d\theta - \sum_{n=m+1}^{N} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \ln|1 - e^{i(\theta-\theta_n)}|d\theta.$$

Aplicando el lema 3.1.1 se obtiene

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \ln|g(re^{i\theta})|d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \ln|f(re^{i\theta})|d\theta.$$

Por lo tanto

$$|f(0)| \prod_{n=1}^{m} \frac{r}{|\alpha_n|} = \exp\left\{ \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \ln|f(re^{i\theta})|d\theta \right\}. \qquad \blacksquare$$

Para el siguiente teorema se supone que f tiene infinitos ceros en D, porque si no fuera así, el resultado sería inmediato.

Teorema 3.1.4 (Teorema de Szegö) *Si $f \in H^1$ no es una función idénticamente cero, entonces los ceros de f satisfacen la condición de Blaschke.*

Demostración. Sean $z_1, z_2, z_3, \ldots$ los ceros de f, supóngase además que $f(0) \neq 0$ y sea n_r el número de ceros de f en $\overline{B}(0, r)$. Si k es un entero positivo fijo y existe un $r < 1$ de modo que $n_r > k$, entonces por la Fórmula de Jensen se tiene que

$$|f(0)| \prod_{n=1}^{n_r} \frac{r}{|z_n|} = \exp\left\{ \tfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \ln|f(re^{i\theta})|d\theta \right\};$$

pero

$$\prod_{n=1}^{k} \frac{r}{|z_n|} \leq \prod_{n=1}^{n_r} \frac{r}{|z_n|},$$

de tal manera que

$$|f(0)| \prod_{n=1}^{k} \frac{r}{|z_n|} \leq \exp\left\{ \tfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \ln|f(re^{i\theta})|d\theta \right\} \leq \exp\left\{ \tfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(re^{i\theta})|d\theta \right\}.$$

Como $f \in H^1$, existe M_1 tal que $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(re^{i\theta})|d\theta < M_1$ para todo $r \in (0,1)$, de donde

$$|f(0)| \prod_{n=1}^{k} \frac{r}{|z_n|} \leq M,$$

para una $M > 0$. Entonces para todo $r \in (0,1)$ y todo k se tiene que

$$\frac{|f(0)|r^k}{\prod_{n=1}^{k} |z_n|} \leq M,$$

lo que implica para todo k

$$\frac{|f(0)|}{M} r^k \leq \prod_{n=1}^{k} |z_n|.$$

Tomando límite cuando $r \to 1$,

$$\prod_{n=1}^{k} |z_n| \geq \frac{|f(0)|}{M} \quad \text{para todo } k,$$

por consiguiente,

$$\prod_{n=1}^{\infty} |z_n| \geq \frac{|f(0)|}{M} > 0.$$

Así, aplicando el teorema 1.2.2 se tiene que

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1 - |z_n|) < \infty.$$

Si $f(0) = 0$ existe un entero positivo m y una $g \in H(D)$ tal que $f(z) = z^m g(z)$, entonces $g(z) = z^{-m} f(z)$ tiene los mismos ceros que f, excepto en $z = 0$ y además $g \in H^1$ ya que $\|g\|_1 = \lim\limits_{r \to 1^-} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left|\frac{f(re^{i\theta})}{r^m}\right| d\theta = \|f\|_1$. Por tanto se puede aplicar a g, el resultado ya mostrado. ■

El siguiente corolario es consecuencia inmediata del teorema 3.1.4.

Corolario 3.1.1 *Sean $f \in H^p$ (o aún si $f \in H^1$), $z_1, z_2, z_3, \ldots$ los ceros de f en D. Si $\sum_{n=1}^{\infty} (1 - |z_n|)$ no converge, entonces $f(z) = 0$ para todo $z \in D$.*

Como $B \in H^\infty$, entonces posee límite radial notado por B^*, en casi todo punto de T. El siguiente teorema explica el comportamiento de dicho límite.

Teorema 3.1.5 *Si B es un producto de Blaschke entonces $|B^*(e^{i\theta})| = 1$ para casi todo $\theta \in [-\pi, \pi]$.*

Demostración. Si $f \in H^\infty$ entonces $f \in H^1$ y $|f(z)| \leq \|f\|_\infty$ para todo $z \in D$, por lo tanto usando el Teorema de la Convergencia Dominada de Lebesgue

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(re^{i\theta})| d\theta \leq \lim_{r\to 1^-} \int_{-\pi}^{\pi} |f(re^{i\theta})| d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} |f^*(e^{i\theta})| d\theta.$$

Por lo tanto, si

$$B_n(z) = z^k \prod_{m=1}^{n} \frac{z_m - z}{1 - \overline{z_m} z} \frac{|z_m|}{z_m}$$

y $f = B/B_n$ se obtiene

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{B(re^{i\theta})}{B_n(re^{i\theta})} \right| d\theta \leq \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{B^*(e^{i\theta})}{B_n^*(e^{i\theta})} \right| d\theta;$$

pero

$$|B_n^*(e^{i\theta})| = \lim_{r\to 1} \prod_{m=1}^{n} \left| \frac{z_m - re^{i\theta}}{1 - \overline{z_k}(re^{i\theta})} \right| = 1,$$

entonces

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{B(re^{i\theta})}{B_n(re^{i\theta})} \right| d\theta \leq \int_{-\pi}^{\pi} |B^*(e^{i\theta})| d\theta,$$

y como $B_n(z)$ converge uniformemente a $B(z)$ en $|z| = r$ (ver la demostración del teorema 3.1.1) se tiene que

$$2\pi \leq \int_{-\pi}^{\pi} |B^*(e^{i\theta})| d\theta.$$

Pero además $|B^*(e^{i\theta})| \leq 1$, entonces $|B^*(e^{i\theta})| = 1$ para casi todo $\theta \in [-\pi, \pi]$. ■

Observación. La función $f = B/B_n$ está bien definida puesto que los puntos $z \in D$ para los que $B_n(z) = 0$ son tales que $B(z) = 0$ y en este caso es posible redefinir a f por continuidad.

3.2. Límite radial en H^p

En esta sección se extiende la propiedad de que $\lim_{r\to 1^-} f(re^{i\theta})$ existe para casi todo punto de T. Se muestra que toda función $f \in H^p$ se puede expresar como un producto de Blaschke y una función $g \in H^p$ que no tiene ceros en D.

Teorema 3.2.1 *Sea $f \in H^p$, $1 \leq p \leq \infty$, con f no idénticamente cero y B el producto de Blaschke formado con los ceros de f. Si $g = \frac{f}{B}$ entonces $g \in H^p$ y $\|g\|_p = \|f\|_p$.*

Demostración. Sea $g_n = f/B_n$, donde B_n es como en la demostración del teorema 3.1.5. Para cada n, $\lim\limits_{r\to 1^-} |B_n(re^{i\theta})| = 1$ uniforme respecto a θ, entonces dado n fijo y $\varepsilon > 0$, $|B_n(re^{i\theta})| > 1-\varepsilon$ para todo θ y r suficientemente cercano a 1. Así si $1 \leq p < \infty$,

$$\tfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |g_n(re^{i\theta})|^p d\theta \leq \tfrac{1}{2\pi(1-\varepsilon)^p}\int_{-\pi}^{\pi} |f(re^{i\theta})|^p d\theta \leq \tfrac{1}{(1-\varepsilon)^p}\|f\|_p^p$$

para r suficientemente cercano a 1, pero por la propiedad de monotonía de $M_p(g,r)$ (ver teorema 2.1.1) la desigualdad anterior se cumple para todo $r \in [0,1)$. Por lo tanto si $\varepsilon \to +0$,

$$\|g_n\|_p \leq \|f\|_p,$$

Ahora, como $0 \leq |g_n| \leq |g_{n+1}|$ y $\lim\limits_{n\to\infty} |g_n| = |g|$ entonces por el Teorema de la Convergencia Dominada de Lebesgue

$$\tfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |g(re^{i\theta})|^p d\theta = \lim_{n\to\infty}\left[\tfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |g_n(re^{i\theta})|^p d\theta\right] \leq \|f\|_p^p,$$

de manera que $\|g\|_p \leq \|f\|_p$, entonces $g \in H^p$. Como $|f(z)| \leq |g(z)|$ para todo $z \in D$, se obtiene que $\|f\|_p \leq \|g\|_p$. De esta forma se tiene que $\|g\|_p = \|f\|_p$. Si $p = \infty$, es válida la desigualdad

$$g_n(re^{i\theta}) \leq \frac{1}{(1-\varepsilon)}\|f\|_\infty$$

y se procede de manera análoga. ∎

El siguiente teorema muestra un par de características para las funciones analíticas y es importante para demostrar una factorización de las funciones en H^p.

Teorema 3.2.2 *Sea $f \in H(D)$ entonces:*

1. *Existe una función $F \in H(D)$ tal que $F' = f$.*
2. *Si f no tiene ceros en D, existe $g \in H(D)$ tal que $f = \exp(g)$.*

Demostración. Ver Rudin [10], teorema 13.4.1, pág 255. ∎

Con ayuda del teorema anterior se puede demostrar que cada función en H^p es factorizable como producto de funciones en H^2.

Teorema 3.2.3 *Si $f \in H^p$, $1 \leq p \leq \infty$, entonces existen $s, q \in H^2$ tales que*

$$f = sq.$$

Demostración. Sean $f \in H^p$ (por la proposición 2.1.1 $f \in H^1$) y B el producto de Blaschke formado por los ceros de f. Sea $g = \frac{f}{B}$; por el teorema 3.2.1 $g \in H^1$ y $\|g\|_1 = \|f\|_1$. Como g no tiene ceros en D, por el teorema 3.2.2 existe $\Phi \in H(D)$ tal que $\exp\{\Phi\} = g$ y sea $h := \exp(\frac{\Phi}{2})$. Entonces $h \in H(D)$ y $|h|^2 = |g|$ por lo que $h \in H^2$. Mas aún, $\|h\|_2^2 = \|g\|_1$. Por lo tanto, $f = Bh^2$ donde $h \in H^2$ y $B \in H^\infty$.
Sean $s = Bh$ y $q = h$. Entonces $s \in H^2$, $\|s\|_2 = \|q\|_2$ y $f = sq$. De donde se obtiene el resultado.

■

En el capítulo anterior se discutió la identificación de cada función f en H^2 o H^∞ con una función f^* en casi todo punto de T dada por

$$f^*(e^{i\theta}) = \lim_{r \to 1^-} f(re^{i\theta}).$$

Se concluye de manera positiva la validez de esta propiedad para todo p, en los espacios H^p y gracias a la contenencia que existe entre ellos, es suficiente con demostrarlo para las funciones en H^1, lo cual se muestra en el siguiente teorema.

Teorema 3.2.4 *Si $f \in H^p$, entonces para casi todo $\theta \in [-\pi, \pi]$ existe $\lim_{r \to 1^-} f(re^{i\theta})$. De esta forma, a cada $f \in H^p$ le corresponde una función f^* definida en casi todo punto de T por*

$$f^*(e^{i\theta}) = \lim_{r \to 1^-} f(re^{i\theta}).$$

La función f^* es tal que,

$$\lim_{r \to 1^-} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| f^*(e^{i\theta}) - f(re^{i\theta}) \right| d\theta = 0, \tag{3.4}$$

y f es la integral de Poisson de f^*.

Demostración. Sea $f \in H^p$, por la proposición 2.1.1 $f \in H^1$, entonces por por el teorema 3.2.3 $f = gh$ para algunas $g, h \in H^2$ y el teorema 2.4.5 garantiza la existencia de los límites radiales de g y h en casi todos los puntos de T, o sea,

$$\lim_{r \to 1^-} g(re^{i\theta}) = g^*(e^{i\theta}) \quad y \quad \lim_{r \to 1^-} h(re^{i\theta}) = h^*(e^{i\theta}).$$

Luego

$$\lim_{r \to 1^-} f(re^{i\theta}) = \lim_{r \to 1^-} \left[g(re^{i\theta}) h(re^{i\theta}) \right] = g^*(e^{i\theta}) h^*(e^{i\theta}) = f^*(e^{i\theta})$$

en casi todos los puntos de T.

Por otra parte, defínase f_r en T por $f_r(e^{i\theta}) = f(re^{i\theta})$, igualmente h_r y g_r. Como $f^* = g^* h^*$ en casi todo punto de T, entonces

$$f^* - f_r = g^* h^* - g_r h_r = g^*(h^* - h_r) + h_r(g^* - g_r), \tag{3.5}$$

de donde,

$$\begin{aligned} |f^* - f_r| &= |g^*(h^* - h_r) + h_r(g^* - g_r)| \\ &\leq |g^*(h^* - h_r)| + |h_r(g^* - g_r)|, \end{aligned}$$

por tanto

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f^* - f_r|\, d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} |g^*|\, |h^* - h_r|\, d\theta + \int_{-\pi}^{\pi} |h_r|\, |g^* - g_r|\, d\theta$$

por la desigualdad de Cauchy-Schwarz se tiene que,

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f^* - f_r|\, d\theta \leq \|g^*\|_{L_2} \|h^* - h_r\|_{L_2} + \|h_r\|_{L_2} \|g^* - g_r\|_{L_2}.$$

Esto implica que

$$\lim_{r\to 1^-} \|f^* - f_r\|_{L_1} \leq \lim_{r\to 1^-} \left[\|g^*\|_{L_2} \|h^* - h_r\|_{L_2}\right] + \lim_{r\to 1^-} \left[\|h_r\|_{L_2} \|g^* - g_r\|_{L_2}\right].$$

Pero $\|g^*\|_{L_2}^2 = \|g\|_2^2 = \|f\|_1 < \infty$ y $\|h_r\|_{L_2}^2 \leq \|h\|_2^2 = \|f\|_1 < \infty$. Además nuevamente por el teorema 2.4.5, $\lim_{r\to 1^-} \|g^* - g_r\|_{L_2} = \lim_{r\to 1^-} \|h^* - h_r\|_{L_2} = 0$; esto implica que

$$\lim_{r\to 1} \|f^* - f_r\|_{L_1} = 0,$$

lo que demuestra (3.4).

Sean $R < 1$ y $g(z) := f(Rz) = f_R(z)$, g es tal que $g \in H\left(B(0, \frac{1}{R})\right)$. Aplicando la Fórmula integral de Cauchy:

$$g(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{g(e^{it})}{e^{it} - z} e^{it} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(Re^{it})}{e^{it} - z} e^{it} dt.$$

Si $z = re^{i\theta}$, procediendo como en la demostración del teorema 2.3.4 se obtiene:

$$f(Rre^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(Re^{it}) P_r(\theta - t) dt,$$

utilizando (3.5):

$$\begin{aligned} f(Rre^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^*(e^{it}) P_r(\theta - t) dt &- \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g^*(e^{it}) \left(h^*(e^{it}) - h_R(e^{it})\right) P_r(\theta - t) dt - \\ &- \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h_R(e^{it}) \left(g^*(e^{it}) - g_R(e^{it})\right) P_r(\theta - t) dt. \end{aligned}$$

Puesto que $P_r(\theta - t) \leq \dfrac{1 + r}{1 - r}$ y aplicando desigualdad de Cauchy-Schwarz al último par de integrales se obtiene:

$$f(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^*(e^{it}) P_r(\theta - t) dt$$

Cuando $R \to 1$. De donde $f = P[f^*]$. Es decir, $f = P[f^*]$.

■

Bibliografía

[1] Ahlfors L. *Complex Analysis.* Third edition, MacGraw-Hill, New York, 1987.

[2] Apostol Tom M. *Análisis Matemático.* Segunda edición, Editorial Reverté, Barcelona, 1977.

[3] Bartle R. *The Elements of Integration.* John Wiley & Sons, New York, 1966.

[4] Churchill R. *Variable compleja y aplicaciones.* Séptima edición, McGraw-Hill, Madrid, 2004.

[5] Conway J. *Functions of One Complex Variable.* Second Edition, Springer-Verlag, New York, 1978.

[6] Duren P. L. *Theory of H^p spaces.* Academic Press, INC, London, 1970.

[7] Iorio V. *EDP, Un curso de Graduação.* Coleçao Matemática Universitria, Rio de Janeiro, 1989.

[8] Kudrivtsev L.V. *Curso de Análisis Matemático.* Editorial Mir, Mosc, 1984.

[9] Pinsky M.A. *Introducción al análisis de Fourier y las ondoletas.* International Thomsom Editores, México, D.F., 2003.

[10] Rudin W. *Análisis Real y Complejo.* Primera edición española, Editorial Alhambra, Madrid-1, 1979.

[11] Rudin W. *Real Analysis and Complex.* Third Edition, McGraw-Hill, New York, 1987.