Análisis de Fourier y Conjuntos $B_2[g]$

July Rocío Palechor Anacona

Universidad del Cauca
Facultad de Ciencias Naturales, Exactas y de la Educación
Departamento de Matemáticas

Popayán
2010

Análisis de Fourier y Conjuntos $B_2[g]$

July Rocío Palechor Anacona

Trabajo de grado en la modalidad “Trabajo de Investigación” presentado como requisito parcial para optar al título de *Matemática*

Director
Mg. Jhon Jairo Bravo Grijalba
Asesor
Dr. Carlos Alberto Trujillo Solarte

Universidad del Cauca
Facultad de Ciencias Naturales, Exactas y de la Educación
Departamento de Matemáticas

Popayán
2010

Análisis de Fourier y Conjuntos $B_2[g]$

July Rocío Palechor Anacona

Trabajo de grado realizado al interior del Grupo de Investigación:

Álgebra, Teoría de Números y Aplicaciones, ERM,

ALTENUA

Departamento de Matemáticas

Universidad del Cauca

Popayán

2010

Nota de aceptación

____
____
____

Director:

____
Mg. Jhon Jairo Bravo Grijalba

Asesor:

____
Dr. Carlos Alberto Trujillo Solarte

Jurados:

____
Dr. Aida Patricia González Nieva

____
Pr. Diego Fernando Ruiz Solarte

Lugar y fecha de sustentación: Popayán, 12 de Noviembre de 2010.

El álgebra es la oferta hecha por el diablo al matemático. El diablo dijo: 'Te daré esta potente máquina, que responderá cualquier cuestión. Todo lo que necesitas es darme tu alma: deja la geometría y te daré esta maravillosa máquina'.

Michael Atiyah

A la memoria de mi abuelo y mi madre:
Rubén Anacona y Vilma Anacona.
Enero 15/1916-Febrero 24/2000,
Febrero 10/1966-Mayo 7/2004.

Agradecimientos

En primera instancia, quiero dar gracias a la vida por permitirme aprender y superarme. En muchos instantes sentí desfallecer, pero me levanté y seguí adelante, es por eso que hoy me siento orgullosa de mis logros.

A mis directores Jhon Jairo Bravo Grijalba y Carlos Alberto Trujillo, por su calidad humana, por su esmerada dedicación en la orientación de este trabajo. Por su motivación, consejos y aportes tanto en el desarrollo de este documento como en mi vida personal.

Al grupo de investigación en Algebra, Teoría de Números y Aplicaciones (ALTENUA), por darme la oportunidad de realizar el presente trabajo de grado dentro de sus actividades académicas, por mostrarme el hermoso mundo del Álgebra y la Teoría de Números.

A mi familia, en especial a mi tío Dubois Anacona, por brindarme su cariño y apoyo incondicional, por enseñarme que la perseverancia y el esfuerzo son el camino para lograr mis objetivos. A mi primo Eduar Anacona, por estar siempre conmigo, animándome para no desfallecer y seguir en la lucha, por recordarme que 'Aun quiero ser matemático'.

A mis amigos y compañeros de carrera Oscar Molina y Eder Diaz, mi vida universitaria no habría sido la misma sin sus consejos y aportes.

A los profesores del Departamento de Matemáticas de la Universidad del Cauca, por sus múltiples enseñanzas.

A los profesores, Aida Patricia Gonzalez y Diego Fernando Ruiz de la Universidad del Cauca, por la revisión de este trabajo, por sus comentarios y sugerencias que contribuyeron a mejorar la escritura y presentación del mismo.

A todas aquellas personas que de una u otra forma colaboraron o participaron en la realización de esta trabajo, les doy mis más sinceros agradecimientos.

July Rocío.

El educador mediocre habla,
el buen educador explica,
el educador superior demuestra,
el gran educador inspira.

William Arthur Ward

A Jhon Jairo Bravo y Carlos Alberto Trujillo... gracias por inspirarme!

Resumen

Un conjunto $\mathcal{A}$ de enteros positivos se llama un *conjunto* $B_2[g]$, si todo entero se puede representar como suma de dos elementos de $\mathcal{A}$, no necesariamente distintos, en a lo sumo g formas, donde se consideran dos de tales representaciones como la misma si ellas difieren solamente en el orden de los sumandos. En este trabajo de grado se hace una revisión bibliográfica de resultados obtenidos por investigadores que trabajan en el tema de los conjuntos $B_2[g]$, en especial se hace un estudio, en forma detallada, de los trabajos desarrollados por Gang Yu ([1],[2]), quien utilizando algunas herramientas del análisis de Fourier, demuestra que:

$$\limsup_{N\to\infty} \frac{F(g,N)}{\sqrt{N}} \leq \sqrt{3{,}2g}$$

y

$$\limsup_{N\to\infty} \frac{F(g,N)}{\sqrt{N}} \leq \sqrt{1{,}74246\,(2g-1)},$$

donde $F(g,N)$ denota el máximo cardinal de un conjunto $B_2[g]$ contenido en los primeros N enteros positivos.

Introducción

Este documento contiene el informe final del trabajo de grado *"Análisis de Fourier y Conjuntos $B_2[g]$"* realizado en la modalidad "Trabajo de Investigación" por July Rocío Palechor Anacona, estudiante del programa de Matemáticas. Dicho trabajo se articuló al proyecto de investigación "Conjuntos B_3, B_4 y $B_2[2]$–Enteros y Modulares", código $VRI : 2551$, que recientemente desarrollaron los profesores Carlos Alberto Trujillo, Jhon Jairo Bravo y Diego Fernando Ruiz, docentes adscritos al Departamento de Matemáticas de la Universidad del Cauca.

Un aspecto importante en la Teoría de Números es el estudio de conjuntos de enteros, su construcción, su cardinalidad y las propiedades que éstos cumplen. Es de gran interés establecer propiedades generales relacionadas con la adición de conjuntos y, particularmente, propiedades relativas al número de representaciones de enteros como sumas de dos elementos de un conjunto dado, tema que es estudiado en la Teoría de Números Aditiva.

En el estudio de conjuntos y sus funciones de representación aditiva, predominan los resultados del profesor Paul Erdös (1913–1996), quien es considerado el fundador de la Teoría de Números Combinatoria y durante mucho tiempo fue la figura central de su desarrollo. El estudio de funciones de representación aditiva se relaciona estrechamente con otros tópicos de la matemática, por ejemplo: la Teoría de Grafos y la Teoría de Códigos.

Se conoce que el Análisis de Fourier tiene aplicaciones en diversas áreas como la física moderna y las ingenierías. Un caso puntual que cabe mencionar es la ayuda que ha prestado el Análisis de Fourier en las soluciones de problemas de Teoría de Números. En el desarrollo del presente Trabajo de Grado se muestran algunas herramientas del análisis utilizadas para demostrar los teoremas principales.

Éste documento se divide en cuatro capítulos y un apéndice. En el primer capítulo se definen los conjuntos $B_2[g]$ y se describe el problema fundamental que los rodea, además se hace un recuento de los principales resultados obtenidos por diferentes investigadores, especialmente los obtenidos por Gang Yu en [1] y [2]. El capítulo 2 contiene resultados básicos de la teoría del análisis de Fourier sobre $\mathbb{Z}_N$, donde $\mathbb{Z}_N$ representa el grupo aditivo de los enteros módulo N. Al final se dan a conocer algunas observaciones en las cuales se muestra la relación entre los conjuntos $B_2[g]$ y el análisis de Fourier discreto.

En el capítulo 3 se presentan, en forma detallada, las demostraciones de los teoremas principales de los artículos [1] y [2]. El cuarto capítulo contiene las conclusiones, donde se resumen resultados importantes del trabajo y de los artículos estudiados, como también interrogantes y trabajos futuros. En el apéndice se presentan los algoritmos implementados en el sistema computacional *Mupad*, utilizados dentro del tercer capítulo.

Es de anotar que los principales teoremas del Trabajo de Grado fueron expuestos por la autora en *"Una cota superior para conjuntos $B_2[g]$"*, poster presentado en el $XVII$ Congreso Colombiano de Matemáticas, del 3–6 de Agosto de 2009 en Cali–Colombia.

También es importante señalar que como producto del presente Trabajo de Grado se ofreció, con el Dr. Carlos Alberto Trujillo, un cursillo denominado 'Análisis de Fourier y Conjuntos $B_2[g]$', en la cuarta versión del evento de Álgebra, Teoría de Números, Combinatoria y Aplicaciones (ALTENCOA4-2010) que se llevó a cabo en Tunja del 31 de Mayo al 4 de Junio de 2010. El cursillo se dividió en 4 sesiones y básicamente se expuso un resumen de todo el desarrollo y contenido del presente documento.

Índice general

Capítulo 1

El problema fundamental

En este capítulo se presenta el problema general estudiado en este trabajo y se muestran algunos resultados recientes planteados por diferentes investigadores que han trabajado en los conjuntos $B_2[g]$. También se dan a conocer las notaciones y definiciones que se utilizan a lo largo del documento.

1.1. Conjuntos $B_2[g]$

Sean g y N enteros positivos. Un conjunto $\mathcal{A} \subset [1,N]$, donde $[1,N] := \{1,2,\ldots,N\}$, se llama un conjunto $B_2[g]$ o $\mathcal{A} \in B_2[g]$, si el número de soluciones de la ecuación

$$n = a + b, \quad \text{con} \quad a,b \in \mathcal{A} \quad \text{y} \quad a \leq b, \tag{1.1}$$

es acotado por g para todo entero n. Los conjuntos $B_2[1]$ también se llaman conjuntos B_2 o conjuntos de Sidon, en honor a Simon Sidon quien fue la primera persona en considerarlos cuando investigaba aspectos relacionados con el análisis de Fourier.

Ejemplo 1. *Considérese el conjunto* $\mathcal{A} = \{1,2,4,6,10\}$. *En la Tabla 1.1 se muestran todas las sumas asociadas al conjunto* $\mathcal{A}$ *de la forma (1.1). Nótese que las sumas se repiten a lo más* 2 *veces, por lo tanto* $\mathcal{A}$ *es un conjunto* $B_2[2]$.

Un problema general que es objeto de estudio es establecer propiedades sobre el cardinal de conjuntos $B_2[g]$ contenidos en los primeros N enteros positivos, en particular, intentar responder la pregunta

¿Cuál es el máximo cardinal de un conjunto $B_2[g]$ contenido en $[1,N]$?

+	1	2	4	6	10
	2	3	5	7	11
		4	6	8	**12**
			8	10	14
				12	16
					20

Tabla 1.1: Sumas

Si $F(g,N)$ denota el cardinal mas grande del conjunto $B_2[g]$ contenido en $[1,N]$, entonces es de interés determinar cotas superiores para $F(g,N)$. Por ejemplo, la función $F(2,10)$ denota el cardinal mas grande del conjunto $B_2[2]$ contenido en $[1,10]$. Hasta el momento no se puede decir mucho de esta función. Por ahora, el Ejemplo 1 nos permite afirmar que

$$F(2,10) \geq 5.$$

Mediante un sencillo argumento combinatorio es posible obtener una cota superior para $F(g,N)$. En efecto, si $\mathcal{A}$ es un subconjunto de $[1,N]$, entonces hay $\binom{|\mathcal{A}|+1}{2}$ sumas de la forma (1.1) contenidas en $[1,2N]$, y si $\mathcal{A}$ es un conjunto $B_2[g]$, cada una de ellas se representa a lo sumo g veces. Por tanto

$$\frac{|\mathcal{A}|^2}{2} \leq \binom{|\mathcal{A}|+1}{2} \leq g(2N),$$

de donde se obtiene la cota superior trivial:

$$F(g,N) \leq 2\sqrt{gN}.$$

La idea es estudiar la función $F(g,N)$, en especial su comportamiento asintótico. Mas aún, un problema abierto es decidir si el límite

$$\lim_{N\to\infty} \frac{F(g,N)}{\sqrt{N}},$$

existe, y si existe determinar su valor.

1.2. Algunos resultados conocidos

Para $g=1$ (conjuntos de Sidon), la pregunta ya tiene respuesta:

$$\lim_{N\to\infty} \frac{F(1,N)}{\sqrt{N}} = 1,$$

es decir, $F(1,N)$ se comporta asintóticamente como $\sqrt{N}$. De esta manera se espera que el conjunto de Sidon mas grande contenido en los primeros 100 enteros positivos tenga aproximadamente $\sqrt{100}=10$ elementos.

Para $g\geq 2$ la pregunta aún sigue sin respuesta, pero se cuenta con personas interesadas en resolver el problema.

De la cota trivial se ve que $F(g,N)$ tiene orden de magnitud $\sqrt{N}$, por esta razón tiene sentido definir $\sigma(g)$ como

$$\sigma(g)=\limsup_{N\to\infty}\frac{F(g,N)}{\sqrt{N}}. \tag{1.2}$$

Con esta notación, los resultados para conjuntos de Sidon muestran que $\sigma(1)=1$.

A continuación se listan algunos avances obtenidos en el estudio de $\sigma(g)$ para $g\geq 2$:

- En 2000, J. Cilleruelo, I. Ruzsa y C. Trujillo en [5] usan técnicas del análisis de Fourier para demostrar que
$$\sigma(g)\leq\sqrt{3{,}4745g}.$$
- En 2001, B. Green en [3] utiliza tópicos del análisis de Fourier discreto para demostrar que
$$\sigma(g)\leq\sqrt{3{,}4g}.$$
- En 2002, G. Martin y K. O'Bryant prueban
$$\sigma(g)\leq\sqrt{3{,}3819g}.$$

El caso de mayor interés en la actualidad es cuando $g=2$. Una justificación puede ser porque es el siguiente paso al de los conjuntos de Sidon, situación en la cual se han obtenido resultados satisfactorios. La otra razón podría ser porque, si se llegase a encontrar un resultado similar al que se encontró en el caso $g=1$, quizá puede buscarse una generalización, y así el problema quedaría resuelto para todo g.

Para $\sigma(2)$, se tienen los siguientes resultados:

- $\sigma(2)\leq 2\sqrt{2}$, (cota superior trivial).
- En 2000, J. Cilleruelo, I. Ruzsa y C. Trujillo en [5] demostraron que $\sigma(2)\leq\sqrt{6,85}$.
- En 2001, J. Cilleruelo en [4] demostró que $\sigma(2)\leq\sqrt{6}$.
- En 2001, A. Plagne redujo la constante $\sqrt{6}$ a $\sqrt{5{,}59}$.

- En 2002, A. Plagne y L. Habsleger mejoraron la constante a $\sqrt{5,39}$.
- En 2001, B. Green en [3] demostró que

$$\lim_{N\to\infty} \frac{F(g,N)}{\sqrt{N}} \leq \sqrt{1,75(2g-1)},$$

  de donde se obtiene $\sigma(2) \leq \sqrt{5,25}$.

Finalmente, Gan Yu en [1] y [2], usa herramientas del análisis de Fourier y mejora las cotas anteriores. Específicamente él prueba que:

$$\limsup_{N\to\infty} \frac{F(g,N)}{\sqrt{N}} \leq \sqrt{3{,}2g}$$

y

$$\limsup_{N\to\infty} \frac{F(g,N)}{\sqrt{N}} \leq \sqrt{1{,}74246\,(2g-1)},$$

de ésta última se obtiene $\sigma(2) \leq \sqrt{5{,}22738}$.

Capítulo 2

Análisis de Fourier

El objetivo de este capítulo es hacer una presentación de las definiciones y resultados básicos tanto del análisis de Fourier sobre $\mathbb{Z}_N$ como de las Series de Fourier, que fueron estudiados en el seminario[*] "Análisis de Fourier finito". Algunos de estos resultados se presentan sin demostración, ya que su prueba es la que normalmente se realiza en los cursos vistos durante el pregrado.

Para un entero positivo fijo N y enteros a y b, se dice que a es congruente con b módulo N, notado $a \equiv b \mod N$, si a y b tienen el mismo residuo al dividirlos entre N, esto es, si $N \mid a-b$. La anterior relación definida sobre el conjunto de los enteros es una relación de equivalencia, usualmente conocida como la relación de congruencia módulo N. Para un entero a, su clase de equivalencia es:

$$\begin{aligned}\overline{a} &= \{x \in \mathbb{Z} : x \equiv a \text{ mód } N\}\\ &= \{x \in \mathbb{Z} : x = a + kN, \text{ para algún } k \in \mathbb{Z}\}\\ &= \{x \in \mathbb{Z} : x \in a + N\mathbb{Z}\}.\end{aligned}$$

Estas clases se llaman también *clases residuales módulo* N y constituyen una partición de $\mathbb{Z}$.

El grupo cociente $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$, está formado precisamente por las clases $\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \ldots, \overline{N-1}$ las cuales se representan respectivamente por $0, 1, 2, \ldots, N-1$. Este grupo se llama el *grupo de los enteros módulo* N y se simboliza como $\mathbb{Z}_N$.

[*] Cabe anotar que dicho seminario de estudio se realizó durante los meses Marzo–Junio de 2009 y estuvo a cargo de la responsable del presente trabajo de grado. Se contó con la participación tanto de estudiantes como de los profesores Jhon Jairo Bravo y Carlos Alberto Trujillo. Dentro del currículo seguido se estudiaron principalmente: la transformada de Fourier discreta (algunas de sus propiedades, aplicaciones) y la relación entre el análisis de Fourier discreto con los conjuntos $B_2[g]$, como también algunos elementos básicos del análisis de Fourier continuo.

2.1. El espacio $L^2(\mathbb{Z}_N)$

Mediante $L^2(\mathbb{Z}_N)$ se representa al conjunto de todas las funciones de valor complejo definidas sobre $\mathbb{Z}_N$. $L^2(\mathbb{Z}_N)$ se puede identificar con el espacio euclidiano $N-$dimensional complejo $\mathbb{C}^N$, asignando a cada función $f \in L^2(\mathbb{Z}_N)$ el vector $\upsilon_f = (f(0), f(1), \ldots, f(N-1))$, con lo que, $L^2(\mathbb{Z}_N)$ y $\mathbb{C}^N$ son espacios vectoriales isomorfos.

$L^2(\mathbb{Z}_N)$ es dotado con el producto interno **(Hermitiano)**

$$\langle f, g \rangle = \sum_{x \in \mathbb{Z}_N} f(x)\overline{g(x)},$$

donde $\bar{z}$ representa el complejo conjugado de z. $L^2(\mathbb{Z}_N)$ junto con el producto interno definido es un espacio pre-Hilbert.

El anterior producto interno, induce a su vez una norma

$$\|f\| = \langle f, f \rangle^{1/2}.$$

$L^2(\mathbb{Z}_N)$ es un espacio métrico, además completo,* lo que indica que $L^2(\mathbb{Z}_N)$ es un **espacio de Hilbert**.

El producto interno junto con su norma asociada, satisfacen las siguientes propiedades:

Proposición 1. *Para $f, g, h \in L^2(\mathbb{Z}_N)$ y $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, se tiene:*

(i) $\langle f, g \rangle = \overline{\langle g, f \rangle}$

(ii) $\langle f, f \rangle \geq 0$ *y* $\langle f, f \rangle = 0$ *sí, y sólo si,* $f(x) = 0$ *para todo* $x \in \mathbb{Z}_N$

(iii) $\langle \lambda f + \mu g, h \rangle = \lambda \langle f, h \rangle + \mu \langle g, h \rangle$

(iv) $\langle f, \lambda g + \mu h \rangle = \bar{\lambda} \langle f, g \rangle + \bar{\mu} \langle f, h \rangle$

(v) $\|\lambda f\| = |\lambda| \, \|f\|$

(vi) $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$ *(Desigualdad Triangular),*

donde la igualdad en (vi) se verifica si, y sólo si, f y g son linealmente dependientes.

Las demostraciones de todas las propiedades excepto la desigualdad triangular son inmediatas. Para demostrar la desigualdad triangular se necesita del siguiente resultado.

*En [12], se describe una Proposición, en la cual se basa este hecho.
Propiedad 2.1.4 Un espacio *pre-Hilbert* de dimensión finita, es completo, es decir, un espacio de *Hilbert*.

Proposición 2 (Desigualdad de Cauchy-Schwarz). *Si $f,g \in L^2(\mathbb{Z}_N)$, entonces*

$$|\langle f,g\rangle| \leq \|f\|\,\|g\|, \tag{2.1}$$

donde la igualdad se verifica si, y sólo si, f y g son linealmente dependientes.

Demostración. Si f y g son linealmente dependientes, es decir, si $f=\lambda g$, para algún $\lambda\in\mathbb{C}$, entonces, claramente se tiene la igualdad.

Suponga ahora que f y g son linealmente independientes. Para cualquier $\lambda\in\mathbb{C},\ f+\lambda g\neq 0$, luego

$$\begin{aligned}0<\langle f+\lambda g, f+\lambda g\rangle &= \langle f,f\rangle+\langle f,\lambda g\rangle+\langle \lambda g,f\rangle+\langle\lambda g,\lambda g\rangle\\ &= \|f\|^2+\overline{\lambda}\langle f,g\rangle+\lambda\overline{\langle f,g\rangle}+|\lambda|^2\,\|g\|^2\\ &= \|f\|^2+2Re\{\overline{\lambda}\langle f,g\rangle\}+|\lambda|^2\,\|g\|^2.\end{aligned}$$

Se escoge ahora un número u de módulo 1 tal que $\overline{u}\langle f,g\rangle=|\langle f,g\rangle|$. Sustituyendo $\lambda=tu$, con $t\in\mathbb{R}$, se deduce que

$$0<\|f\|^2+2t|\langle f,g\rangle|+t^2\,\|g\|^2.$$

Esto sólo puede pasar si la ecuación cuadrática real tiene discriminante negativo, es decir

$$4|\langle f,g\rangle|^2-4\,\|f\|^2\,\|g\|^2<0,$$

de donde se obtiene la conclusión deseada. ■

Demostración (Desigualdad Triangular).

$$\begin{aligned}\|f+g\|^2=\langle f+g,f+g\rangle=\langle f,f+g\rangle+\langle g,f+g\rangle &= \langle f,f\rangle+\langle f,g\rangle+\langle g,f\rangle+\langle g,g\rangle\\ &= ||f||^2+\langle f,g\rangle+\overline{\langle f,g\rangle}+||g||^2=||f||^2+2Re(\langle f,g\rangle)+||g||^2\\ &\leq ||f||^2+2\,|\langle f,g\rangle|+||g||^2,\end{aligned}$$

donde se utiliza el hecho que $a\leq\sqrt{a^2+b^2}=|z|$. Utilizando la desigualdad de Cauchy–Schwarz se obtiene:

$$\begin{aligned}\|f+g\|^2 &\leq ||f||^2+2||f||\,||g||+||g||^2\\ &= (||f||+||g||)^2,\end{aligned}$$

que es lo deseado. ■

2.1.1. Caracteres del grupo $\mathbb{Z}_N$

En esta sección se introduce una base especial para el espacio vectorial $L^2(\mathbb{Z}_N)$. En efecto, para $j = 1, \ldots, N$, se definen los llamados *caracteres del grupo* $\mathbb{Z}_N$, denotados e_j, por

$$e_j(x) = w^{jx},$$

donde $w = e^{2\pi i/N}$ y $x \in \mathbb{Z}_N$.

Proposición 3 (Propiedades de los caracteres)**.**

(i) $e_j(0) = 1$ *y* $|e_j(k)| = 1$.

(ii) $e_j(k+l) = e_j(k)\,e_j(l)$.

(iii) *Las funciones* e_j*, para* $1 \leq j \leq N$*, forman una base ortogonal del espacio* $L^2(\mathbb{Z}_N)$*. Específicamente se tiene*

$$\langle e_j, e_k \rangle = \begin{cases} N, & \text{si } j = k, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Demostración. (i) y (ii) se siguen de la definición de caracter. La parte (iii) es clara en el caso $j = k$. Si $j \neq k$, entonces $w^{(j-k)} \neq 1$, donde $w = e^{2\pi i/N}$. Así, el producto interno se transforma en la suma geométrica

$$\langle e_j, e_k \rangle = \sum_{l=0}^{N-1} w^{(j-k)\,l} = \frac{1 - w^{(j-k)N}}{1 - w^{(j-k)}} = 0,$$

ya que $w^{(j-k)N} = e^{2\pi i(j-k)} = 1$.

■

2.2. Análisis de Fourier sobre $\mathbb{Z}_N$

A continuación se presentan algunas propiedades y resultados básicos de la transformada de Fourier discreta. Es importante recordar que en ésta sección y la anterior w representa la raíz $N-$ésima primitiva de la unidad $e^{2\pi i/N}$.

Definición 1. *La* **transformada de Fourier discreta** $\hat{f}$*, de una función* f *en* $L^2(\mathbb{Z}_N)$*, se define por*

$$\hat{f}(k) = \langle f, e_k \rangle = \sum_{x \in \mathbb{Z}_N} f(x) w^{-xk}.$$

De la definición anterior se deduce la linealidad de la transformada de Fourier sobre $L^2(\mathbb{Z}_N)$. Esto es:

(i) $\widehat{f+g} = \hat{f} + \hat{g}$, para toda $f, g \in L^2(\mathbb{Z}_N)$.

(ii) $\widehat{\alpha f} = \alpha \hat{f}$, para todo $\alpha \in \mathbb{C}$ y $f \in L^2(\mathbb{Z}_N)$.

Ejemplo 2. *Considérese el caracter $e_j(x) \in L^2(\mathbb{Z}_N)$. De la definición de transformada de Fourier se deduce que*

$$\hat{e}_j(x) = \sum_y e_j(y) w^{-xy} = \sum_y w^{jy} w^{-xy} = \sum_y w^{(j-x)y},$$

donde las sumas se realizan sobre los elementos de $\mathbb{Z}_N$. Haciendo los cálculos correspondientes se obtiene

$$\sum_y w^{(j-x)y} = \begin{cases} N, & \textit{si } x \equiv j \pmod{N} \\ 0, & \textit{en otro caso,} \end{cases}$$

y en consecuencia

$$\hat{e}_j(x) = \begin{cases} N, & \text{si } x \equiv j \pmod{N}, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

En la Tabla 2.1 se muestran algunas funciones y su respectivas transformadas de Fourier discretas.

$f(x)$	$\hat{f}(x)$
1	$N\delta_0(x)$
$e_j(x)$	$N\delta_j(x)$
$\delta_j(x)$	$e_j(-x)$
$\frac{1}{2}(\delta_1 + \delta_{-1})(x)$	$\cos\left(\frac{2\pi x}{N}\right)$
$\frac{1}{3}(\delta_1 + \delta_0 + \delta_{-1})(x)$	$\frac{1}{3}\left(1 + 2\cos\left(\frac{2\pi x}{N}\right)\right)$

Tabla 2.1: Transformadas de Fourier

Es de anotar que las funciones delta en la Tabla 2.1, se definen por:

$$\delta_i(j) = \begin{cases} 1, & \text{si } i \equiv j \pmod{N}, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

El siguiente teorema presenta propiedades importantes de la transformada de Fourier discreta.

Teorema 1. *Para $f,g \in L^2(\mathbb{Z}_N)$, se tiene:*

(i) **Fórmula de inversión de Fourier**

$$f(x) = \frac{1}{N} \sum_{k \in \mathbb{Z}_N} \hat{f}(k) w^{xk}.$$

(ii) **Fórmula de Parseval**

$$\langle f,g \rangle = \sum_{x \in \mathbb{Z}_N} f(x)\overline{g(x)} = \frac{1}{N} \sum_{k \in \mathbb{Z}_N} \hat{f}(k)\overline{\hat{g}(k)} = \frac{1}{N} \langle \hat{f}, \hat{g} \rangle.$$

(iii) **Fórmula de Plancherel**

$$\langle f,f \rangle = \sum_{x \in \mathbb{Z}_N} |f(x)|^2 = \frac{1}{N} \sum_{k \in \mathbb{Z}_N} |\hat{f}(k)|^2 = \frac{1}{N} \langle \hat{f}, \hat{f} \rangle.$$

En las sumas presentadas dentro de las demostraciones del resto de esta sección, se entenderá que los índices recorren los elementos del grupo $\mathbb{Z}_N$.

Demostración. Claramente (iii) se sigue de (ii) tomando $f = g$, por tanto sólo se prueba (i) y (ii).

Para (i), se usa la definición de transformada de Fourier y se obtiene

$$\sum_k \hat{f}(k) w^{xk} = \sum_k \left(\sum_y f(k) w^{-yk} \right) w^{xk} = \sum_k \sum_y f(k) w^{(x-y)k}$$
$$= \sum_k f(k) \sum_y w^{(x-y)k}.^{*}$$

En la última suma, si $x \neq y$ entonces ésta expresión es una suma geométrica de razón $w^{x-y} \neq 1$, luego $\sum_y w^{(x-y)k} = 0$.

Si $x = y$, entonces $\sum_y w^{(x-y)k} = \sum_y 1 = N$, por tanto

$$\sum_k \hat{f}(k) w^{xk} = N f(x).$$

[*] Nótese que en el desarrollo de la expresión, las sumas se hacen sobre elementos de un conjunto finito, por tanto, no representa un problema el cambiarlas de orden. A lo largo del presente trabajo se encontrarán varias situaciones como ésta.

Para (ii), de la definición de transformada de Fourier se sigue

$$\sum_k \hat{f}(k)\overline{\hat{g}(k)} = \sum_k \left(\sum_t f(t)w^{-tk}\right)\left(\sum_u \overline{g(u)}w^{uk}\right) = \sum_t \sum_u f(t)\overline{g(u)} \sum_k w^{(u-t)k}.$$

Usando el mismo argumento que en (i) se tiene

$$\sum_k w^{(u-t)k} = \begin{cases} 0, & \text{si } u \neq t, \\ N, & \text{si } u = t, \end{cases}$$

y por tanto

$$\langle \hat{f}, \hat{g} \rangle = \sum_k \hat{f}(k)\overline{\hat{g}(k)} = N \sum_u f(u)\overline{g(u)} = N\langle f, g \rangle.$$

■

Definición 2. *Sean $f, g : G \longrightarrow \mathbb{C}$ funciones sobre un grupo abeliano G. La* **convolución** *de f y g, denotada $f * g$, está definida como*

$$(f * g)(x) = \sum_{y \in G} f(y)g(x-y),$$

siempre que la suma exista.

Las siguientes son algunas propiedades de la convolución definida sobre $\mathbb{Z}_N$.

Proposición 4. *Si $f, g, h \in L^2(\mathbb{Z}_N)$, entonces:*

(i) $f * g = g * f$. *(Conmutatividad)*

(ii) $f * (g * h) = (f * g) * h$. *(Asociatividad)*

Demostración. Para $x \in \mathbb{Z}_N$ se tiene

$$(f * g)(x) = \sum_y f(y)g(x-y) = \sum_t f(x-t)g(t) = \sum_t g(t)f(x-t) = (g * f)(x),$$

donde en la segunda suma se ha realizado la sustitución $t = x - y$, en la cual se ve que cuando y recorre $\mathbb{Z}_N$, t también.

Para (ii) nótese que

$$\begin{aligned}[(f * g) * h](x) &= \sum_y [(f * g)(y)]\, h(x-y) = \sum_y \left[\sum_z f(z)g(y-z)\right] h(x-y) \\ &= \sum_y \sum_z f(z)g(y-z)h(x-y).\end{aligned}$$

Por otro lado,

$$[f*(g*h)](x) = \sum_w f(w)\left[(g*h)(x-w)\right] = \sum_w f(w)\left[\sum_t g(t)h(x-w-t)\right].$$

Haciendo la sustitución $y = t + w$, la anterior expresión se transforma en

$$\sum_y \sum_w f(w)g(y-w)h(x-y),$$

de donde se deduce que

$$f*(g*h) = (f*g)*h.$$

■

Existe una relación entre la transformada de Fourier discreta y la convolución. Dicha propiedad se enuncia en la siguiente proposición.

Proposición 5. *Para $f, g \in L^2(\mathbb{Z}_N)$, se tiene*

$$\widehat{(f*g)}(x) = \hat{f}(x)\hat{g}(x), \quad \textit{para todo } x \in \mathbb{Z}_N.$$

Demostración. De la definición de transformada y convolución se sigue

$$\widehat{(f*g)}(x) = \sum_y (f*g)(y)w^{-xy} = \sum_y \left(\sum_z f(z)g(y-z)\right)w^{-xy} = \sum_z \sum_y f(z)g(y-z)w^{-xy}.$$

Haciendo la sustitución $y = t + z$ en la última suma, la anterior expresión se transforma en

$$\begin{aligned}\widehat{(f*g)}(x) &= \sum_z \sum_t f(z)g(t)w^{-x(t+z)} = \sum_z \sum_t f(z)g(t)w^{-xt}w^{-xz} \\ &= \left(\sum_z f(z)w^{-xz}\right)\left(\sum_t g(t)w^{-xt}\right) = \hat{f}(x)\hat{g}(x).\end{aligned}$$

■

Nota 1. *Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ conjuntos de enteros. En lo que resta de esta sección siempre se identificará un conjunto con su función característica. Por ejemplo, $\mathcal{A}(x)$, para $x \in \mathbb{Z}$, se define por*

$$\mathcal{A}(x) = \begin{cases} 1, & \textit{si } x \in \mathcal{A}, \\ 0, & \textit{si } x \notin \mathcal{A}. \end{cases}$$

Por otra parte, de la definición de convolución se sigue que

$$(\mathcal{A}*\mathcal{B})(x) = \sum_{y\in\mathbb{Z}} \mathcal{A}(y)\mathcal{B}(x-y).$$

Nótese que los sumandos de la última expresión toman valores diferentes de cero, solamente si $\mathcal{A}(y) = 1$ y $\mathcal{B}(x-y) = 1$, es decir, si existen elementos $a \in \mathcal{A}$ y $b \in \mathcal{B}$ tales que $y = a$ y $x - y = b$, esto es, si existe alguna pareja $(a,b) \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}$ que cumple $x = a + b$.

En otras palabras, $(\mathcal{A} * \mathcal{B})(x)$ está contando el número de parejas $(a,b) \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}$ tales que $x = a + b$.

Ejemplo 3. *Sean $\mathcal{A} = \{0,1,2,5,7\}$ y $\mathcal{B} = \{2,4,6,7\}$. En la Tabla 2.2 se representa $\mathcal{A} + \mathcal{B}$.* [*]

+	0	1	2	5	7
2	2	3	4	**7**	9
4	4	5	6	9	11
6	6	**7**	8	11	13
7	**7**	8	9	12	14

Tabla 2.2: $\mathcal{A} + \mathcal{B}$

Por otro lado:

$$
\begin{aligned}
(\mathcal{A} * \mathcal{B})(0) &= \sum_{y \in \mathbb{Z}} \mathcal{A}(y)\mathcal{B}(-y) = \sum_{y \in \mathcal{A}} \mathcal{A}(y)\mathcal{B}(-y) = 0.\\
(\mathcal{A} * \mathcal{B})(1) &= \sum_{y \in \mathcal{A}} \mathcal{A}(y)\mathcal{B}(1-y)\\
&= \mathcal{A}(0)\mathcal{B}(1) + \mathcal{A}(1)\mathcal{B}(0) + \mathcal{A}(2)\mathcal{B}(-1) + \mathcal{A}(5)\mathcal{B}(-4) + \mathcal{A}(7)\mathcal{B}(-6) = 0.\\
(\mathcal{A} * \mathcal{B})(2) &= \sum_{y \in \mathcal{A}} \mathcal{A}(y)\mathcal{B}(2-y)\\
&= \mathcal{A}(0)\mathcal{B}(2) + \mathcal{A}(1)\mathcal{B}(1) + \mathcal{A}(2)\mathcal{B}(0) + \mathcal{A}(5)\mathcal{B}(-3) + \mathcal{A}(7)\mathcal{B}(-4) = 1.\\
(\mathcal{A} * \mathcal{B})(3) &= \sum_{y \in \mathcal{A}} \mathcal{A}(y)\mathcal{B}(3-y)\\
&= \mathcal{A}(0)\mathcal{B}(3) + \mathcal{A}(1)\mathcal{B}(2) + \mathcal{A}(2)\mathcal{B}(1) + \mathcal{A}(5)\mathcal{B}(-2) + \mathcal{A}(7)\mathcal{B}(-5) = 1.\\
(\mathcal{A} * \mathcal{B})(4) &= \sum_{y \in \mathcal{A}} \mathcal{A}(y)\mathcal{B}(4-y)\\
&= \mathcal{A}(0)\mathcal{B}(4) + \mathcal{A}(1)\mathcal{B}(3) + \mathcal{A}(2)\mathcal{B}(2) + \mathcal{A}(5)\mathcal{B}(-1) + \mathcal{A}(7)\mathcal{B}(-3) = 2.
\end{aligned}
$$

[*] Si $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ conjuntos, entonces:

- $\mathcal{A} + \mathcal{B} = \{a + b | a \in \mathcal{A} \text{ y } b \in \mathcal{B}\}$.
- $\mathcal{A} - \mathcal{B} = \{a - b | a \in \mathcal{A} \text{ y } b \in \mathcal{B}\}$.

$$\begin{aligned}
(\mathcal{A}*\mathcal{B})(5) &= \sum_{y\in\mathcal{A}} \mathcal{A}(y)\mathcal{B}(5-y)\\
&= \mathcal{A}(0)\mathcal{B}(5)+\mathcal{A}(1)\mathcal{B}(4)+\mathcal{A}(2)\mathcal{B}(3)+\mathcal{A}(5)\mathcal{B}(0)+\mathcal{A}(7)\mathcal{B}(-2)=1.\\
(\mathcal{A}*\mathcal{B})(6) &= \sum_{y\in\mathcal{A}} \mathcal{A}(y)\mathcal{B}(6-y)\\
&= \mathcal{A}(0)\mathcal{B}(6)+\mathcal{A}(1)\mathcal{B}(5)+\mathcal{A}(2)\mathcal{B}(4)+\mathcal{A}(5)\mathcal{B}(1)+\mathcal{A}(7)\mathcal{B}(-1)=2.\\
(\mathcal{A}*\mathcal{B})(7) &= \sum_{y\in\mathcal{A}} \mathcal{A}(y)\mathcal{B}(7-y)\\
&= \mathcal{A}(0)\mathcal{B}(7)+\mathcal{A}(1)\mathcal{B}(6)+\mathcal{A}(2)\mathcal{B}(5)+\mathcal{A}(5)\mathcal{B}(2)+\mathcal{A}(7)\mathcal{B}(0)=3.\\
(\mathcal{A}*\mathcal{B})(8) &= \sum_{y\in\mathcal{A}} \mathcal{A}(y)\mathcal{B}(8-y)\\
&= \mathcal{A}(0)\mathcal{B}(8)+\mathcal{A}(1)\mathcal{B}(7)+\mathcal{A}(2)\mathcal{B}(6)+\mathcal{A}(5)\mathcal{B}(3)+\mathcal{A}(7)\mathcal{B}(1)=2.\\
(\mathcal{A}*\mathcal{B})(9) &= \sum_{y\in\mathcal{A}} \mathcal{A}(y)\mathcal{B}(9-y)\\
&= \mathcal{A}(0)\mathcal{B}(9)+\mathcal{A}(1)\mathcal{B}(8)+\mathcal{A}(2)\mathcal{B}(7)+\mathcal{A}(5)\mathcal{B}(4)+\mathcal{A}(7)\mathcal{B}(2)=3.\\
(\mathcal{A}*\mathcal{B})(10) &= \sum_{y\in\mathcal{A}} \mathcal{A}(y)\mathcal{B}(10-y)\\
&= \mathcal{A}(0)\mathcal{B}(10)+\mathcal{A}(1)\mathcal{B}(9)+\mathcal{A}(2)\mathcal{B}(8)+\mathcal{A}(5)\mathcal{B}(5)+\mathcal{A}(7)\mathcal{B}(3)=0.\\
(\mathcal{A}*\mathcal{B})(11) &= \sum_{y\in\mathcal{A}} \mathcal{A}(y)\mathcal{B}(11-y)\\
&= \mathcal{A}(0)\mathcal{B}(11)+\mathcal{A}(1)\mathcal{B}(10)+\mathcal{A}(2)\mathcal{B}(9)+\mathcal{A}(5)\mathcal{B}(6)+\mathcal{A}(7)\mathcal{B}(4)=2.\\
(\mathcal{A}*\mathcal{B})(12) &= \sum_{y\in\mathcal{A}} \mathcal{A}(y)\mathcal{B}(12-y)\\
&= \mathcal{A}(0)\mathcal{B}(12)+\mathcal{A}(1)\mathcal{B}(11)+\mathcal{A}(2)\mathcal{B}(10)+\mathcal{A}(5)\mathcal{B}(7)+\mathcal{A}(7)\mathcal{B}(5)=1.\\
(\mathcal{A}*\mathcal{B})(13) &= \sum_{y\in\mathcal{A}} \mathcal{A}(y)\mathcal{B}(13-y)\\
&= \mathcal{A}(0)\mathcal{B}(13)+\mathcal{A}(1)\mathcal{B}(12)+\mathcal{A}(2)\mathcal{B}(11)+\mathcal{A}(5)\mathcal{B}(8)+\mathcal{A}(7)\mathcal{B}(6)=1.\\
(\mathcal{A}*\mathcal{B})(14) &= \sum_{y\in\mathcal{A}} \mathcal{A}(y)\mathcal{B}(14-y)\\
&= \mathcal{A}(0)\mathcal{B}(14)+\mathcal{A}(1)\mathcal{B}(13)+\mathcal{A}(2)\mathcal{B}(12)+\mathcal{A}(5)\mathcal{B}(9)+\mathcal{A}(7)\mathcal{B}(7)=1.
\end{aligned}$$

Lo cual verifica los resultados de la Tabla 2.2.

Si $\mathcal{A}=\mathcal{B}$, entonces $(\mathcal{A}*\mathcal{A})(x)$ cuenta el número de soluciones de la ecuación $x=a_1+a_2$ con $a_1,a_2\in\mathcal{A}$. Nótese que si $x=a_1+a_2$ con $a_1\neq a_2$, entonces $(\mathcal{A}*\mathcal{A})(x)$ cuenta separadamente las parejas (a_1,a_2) y (a_2,a_1). De ésta manera: $\mathcal{A}$ es un conjunto de Sidon sí, y sólo si,

$(\mathcal{A}*\mathcal{A})(x) \leq 2$ *para todo entero* x*. En general:*

$$\mathcal{A} \in B_2[g] \quad \Longleftrightarrow \quad (\mathcal{A}*\mathcal{A})(x) \leq 2g, \quad \forall x \in \mathbb{Z}.$$

Ejemplo 4. *Si* $\mathcal{A} = \{1,2,4,9,18\}$*, en la Tabla 2.3 se representa* $\mathcal{A}+\mathcal{A}$*.*

+	1	2	4	9	18
1	2	3	5	10	19
2	3	4	6	11	20
4	5	6	8	13	22
9	10	11	13	18	27
18	19	20	22	27	36

Tabla 2.3: $\mathcal{A}+\mathcal{A}$

Por otra parte:

$$\begin{aligned}
(\mathcal{A}*\mathcal{A})(2) &= \sum_{y\in\mathcal{A}} \mathcal{A}(y)\mathcal{A}(2-y) = \mathcal{A}(1)\mathcal{A}(1)+\mathcal{A}(2)\mathcal{A}(0)+\mathcal{A}(4)\mathcal{A}(-2)\\
&\quad +\mathcal{A}(9)\mathcal{A}(-7)+\mathcal{A}(18)\mathcal{A}(-16) = 1.\\
(\mathcal{A}*\mathcal{A})(3) &= \sum_{y\in\mathcal{A}} \mathcal{A}(y)\mathcal{A}(3-y) = \mathcal{A}(1)\mathcal{A}(2)+\mathcal{A}(2)\mathcal{A}(1)+\mathcal{A}(4)\mathcal{A}(-1)\\
&\quad +\mathcal{A}(9)\mathcal{A}(-6)+\mathcal{A}(18)\mathcal{A}(-15) = 2.\\
(\mathcal{A}*\mathcal{A})(4) &= \sum_{y\in\mathcal{A}} \mathcal{A}(y)\mathcal{A}(4-y) = \mathcal{A}(1)\mathcal{A}(3)+\mathcal{A}(2)\mathcal{A}(2)+\mathcal{A}(4)\mathcal{A}(0)\\
&\quad +\mathcal{A}(9)\mathcal{A}(-5)+\mathcal{A}(18)\mathcal{A}(-14) = 1.\\
(\mathcal{A}*\mathcal{A})(5) &= \sum_{y\in\mathcal{A}} \mathcal{A}(y)\mathcal{A}(5-y) = \mathcal{A}(1)\mathcal{A}(4)+\mathcal{A}(2)\mathcal{A}(3)+\mathcal{A}(4)\mathcal{A}(1)\\
&\quad +\mathcal{A}(9)\mathcal{A}(-4)+\mathcal{A}(18)\mathcal{A}(-13) = 2.\\
(\mathcal{A}*\mathcal{A})(6) &= \sum_{y\in\mathcal{A}} \mathcal{A}(y)\mathcal{A}(6-y) = \mathcal{A}(1)\mathcal{A}(5)+\mathcal{A}(2)\mathcal{A}(4)+\mathcal{A}(4)\mathcal{A}(2)\\
&\quad +\mathcal{A}(9)\mathcal{A}(-3)+\mathcal{A}(18)\mathcal{A}(-12) = 2.\\
(\mathcal{A}*\mathcal{A})(8) &= \sum_{y\in\mathcal{A}} \mathcal{A}(y)\mathcal{A}(8-y) = \mathcal{A}(1)\mathcal{A}(7)+\mathcal{A}(2)\mathcal{A}(6)+\mathcal{A}(4)\mathcal{A}(4)\\
&\quad +\mathcal{A}(9)\mathcal{A}(-1)+\mathcal{A}(18)\mathcal{A}(-10) = 1.\\
(\mathcal{A}*\mathcal{A})(10) &= \sum_{y\in\mathcal{A}} \mathcal{A}(y)\mathcal{A}(10-y) = \mathcal{A}(1)\mathcal{A}(9)+\mathcal{A}(2)\mathcal{A}(8)+\mathcal{A}(4)\mathcal{A}(6)\\
&\quad +\mathcal{A}(9)\mathcal{A}(1)+\mathcal{A}(18)\mathcal{A}(-8) = 2.
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
(\mathcal{A}*\mathcal{A})(11) &= \sum_{y\in\mathcal{A}} \mathcal{A}(y)\mathcal{A}(11-y) = \mathcal{A}(1)\mathcal{A}(10)+\mathcal{A}(2)\mathcal{A}(9)+\mathcal{A}(4)\mathcal{A}(7)\\
&\quad +\mathcal{A}(9)\mathcal{A}(2)+\mathcal{A}(18)\mathcal{A}(-7)=2.\\
(\mathcal{A}*\mathcal{A})(13) &= \sum_{y\in\mathcal{A}} \mathcal{A}(y)\mathcal{A}(13-y) = \mathcal{A}(1)\mathcal{A}(12)+\mathcal{A}(2)\mathcal{A}(11)+\mathcal{A}(4)\mathcal{A}(9)\\
&\quad +\mathcal{A}(9)\mathcal{A}(4)+\mathcal{A}(18)\mathcal{A}(-5)=2.\\
(\mathcal{A}*\mathcal{A})(18) &= \sum_{y\in\mathcal{A}} \mathcal{A}(y)\mathcal{A}(18-y) = \mathcal{A}(1)\mathcal{A}(17)+\mathcal{A}(2)\mathcal{A}(16)+\mathcal{A}(4)\mathcal{A}(14)\\
&\quad +\mathcal{A}(9)\mathcal{A}(9)+\mathcal{A}(18)\mathcal{A}(0)=1.\\
(\mathcal{A}*\mathcal{A})(19) &= \sum_{y\in\mathcal{A}} \mathcal{A}(y)\mathcal{A}(19-y) = \mathcal{A}(1)\mathcal{A}(18)+\mathcal{A}(2)\mathcal{A}(17)+\mathcal{A}(4)\mathcal{A}(15)\\
&\quad +\mathcal{A}(9)\mathcal{A}(10)+\mathcal{A}(18)\mathcal{A}(1)=2.\\
(\mathcal{A}*\mathcal{A})(20) &= \sum_{y\in\mathcal{A}} \mathcal{A}(y)\mathcal{A}(20-y) = \mathcal{A}(1)\mathcal{A}(19)+\mathcal{A}(2)\mathcal{A}(18)+\mathcal{A}(4)\mathcal{A}(16)\\
&\quad +\mathcal{A}(9)\mathcal{A}(11)+\mathcal{A}(18)\mathcal{A}(2)=2.\\
(\mathcal{A}*\mathcal{A})(22) &= \sum_{y\in\mathcal{A}} \mathcal{A}(y)\mathcal{A}(22-y) = \mathcal{A}(1)\mathcal{A}(21)+\mathcal{A}(2)\mathcal{A}(20)+\mathcal{A}(4)\mathcal{A}(18)\\
&\quad +\mathcal{A}(9)\mathcal{A}(13)+\mathcal{A}(18)\mathcal{A}(4)=2.\\
(\mathcal{A}*\mathcal{A})(27) &= \sum_{y\in\mathcal{A}} \mathcal{A}(y)\mathcal{A}(27-y) = \mathcal{A}(1)\mathcal{A}(26)+\mathcal{A}(2)\mathcal{A}(25)+\mathcal{A}(4)\mathcal{A}(23)\\
&\quad +\mathcal{A}(9)\mathcal{A}(18)+\mathcal{A}(18)\mathcal{A}(9)=2.\\
(\mathcal{A}*\mathcal{A})(36) &= \sum_{y\in\mathcal{A}} \mathcal{A}(y)\mathcal{A}(36-y) = \mathcal{A}(1)\mathcal{A}(35)+\mathcal{A}(2)\mathcal{A}(34)+\mathcal{A}(4)\mathcal{A}(32)\\
&\quad +\mathcal{A}(9)\mathcal{A}(27)+\mathcal{A}(18)\mathcal{A}(18)=1.
\end{aligned}
$$

Lo anterior verifica los resultados de la Tabla 2.3. Nótese que $(\mathcal{A}*\mathcal{A})(x)\leq 2$ *para cualquier* $x\in\mathbb{Z}$*, por tanto* $\mathcal{A}$ *es un conjunto de Sidon.*

Finalmente, es de observar que al contar soluciones de la ecuación $x=a+b$*, donde* $(a,b)\in\mathcal{A}\times\mathcal{A}$*, se cuentan elementos del conjunto* $\mathcal{A}+\mathcal{A}$*, es decir* $(\mathcal{A}*\mathcal{A})(x)$ *se relaciona con* $\mathcal{A}+\mathcal{A}$*.*

Lo anterior muestra una relación entre los conjuntos $B_2[g]$ *y el análisis de Fourier Finito.*

Nota 2. *Para una función* f*, se define la función* $\check{f}$ *por:* $\check{f}(x)=f(-x)$*. En el mismo orden de ideas del análisis anterior, se tratará de determinar qué cuenta* $(\mathcal{A}*\check{\mathcal{B}})(x)$*, para conjuntos de enteros* $\mathcal{A}$ *y* $\mathcal{B}$*. Por la definición de convolución y de* $\check{f}$

$$(\mathcal{A}*\check{\mathcal{B}})(x)=\sum_{y\in\mathbb{Z}}\mathcal{A}(y)\check{\mathcal{B}}(x-y)=\sum_{y\in\mathbb{Z}}\mathcal{A}(y)\mathcal{B}(y-x).$$

Aplicando el procedimiento anterior se deduce que $(\mathcal{A} * \breve{\mathcal{B}})(x)$ cuenta el número de parejas $(a,b) \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}$ tales que $x = a - b$. En consecuencia, si $\mathcal{A} = \mathcal{B}$, entonces $(\mathcal{A} * \breve{\mathcal{A}})(x)$ cuenta el número de soluciones de la ecuación $x = a_1 - a_2$ con $a_1, a_2 \in \mathcal{A}$, así

$$(\mathcal{A} * \breve{\mathcal{A}})(x) = \sum_{y \in \mathbb{Z}} \mathcal{A}(y)\breve{\mathcal{A}}(x-y) = \sum_{y \in \mathcal{A}} \mathcal{A}(y)\mathcal{A}(y-x).$$

Ejemplo 5. *Considérese el conjunto $\mathcal{A} = \{1,2,4,9,18\}$ del Ejemplo 4. En la Tabla 2.4 se muestra $\mathcal{A} - \mathcal{A}$.*

-	1	2	4	9	18
1	0	1	3	8	17
2	-1	0	2	7	16
4	-3	-2	0	5	14
9	-8	-7	-5	0	9
18	-17	-16	-14	-9	0

Tabla 2.4: $\mathcal{A} - \mathcal{A}$

De otro lado:

$$\begin{aligned}
(\mathcal{A} * \breve{\mathcal{A}})(1) &= \sum_{y \in \mathcal{A}} \mathcal{A}(y)\mathcal{A}(y-1) = \mathcal{A}(1)\mathcal{A}(0) + \mathcal{A}(2)\mathcal{A}(1) + \mathcal{A}(4)\mathcal{A}(3) + \mathcal{A}(9)\mathcal{A}(8) \\
&\quad + \mathcal{A}(18)\mathcal{A}(17) = 1. \\
(\mathcal{A} * \breve{\mathcal{A}})(2) &= \sum_{y \in \mathcal{A}} \mathcal{A}(y)\mathcal{A}(y-2) = \mathcal{A}(1)\mathcal{A}(-1) + \mathcal{A}(2)\mathcal{A}(0) + \mathcal{A}(4)\mathcal{A}(2) + \mathcal{A}(9)\mathcal{A}(7) \\
&\quad + \mathcal{A}(18)\mathcal{A}(16) = 1. \\
(\mathcal{A} * \breve{\mathcal{A}})(3) &= \sum_{y \in \mathcal{A}} \mathcal{A}(y)\mathcal{A}(y-3) = \mathcal{A}(1)\mathcal{A}(-2) + \mathcal{A}(2)\mathcal{A}(-1) + \mathcal{A}(4)\mathcal{A}(1) + \mathcal{A}(9)\mathcal{A}(6) \\
&\quad + \mathcal{A}(18)\mathcal{A}(15) = 1. \\
(\mathcal{A} * \breve{\mathcal{A}})(5) &= \sum_{y \in \mathcal{A}} \mathcal{A}(y)\mathcal{A}(y-5) = \mathcal{A}(1)\mathcal{A}(-4) + \mathcal{A}(2)\mathcal{A}(-3) + \mathcal{A}(4)\mathcal{A}(-1) + \mathcal{A}(9)\mathcal{A}(4) \\
&\quad + \mathcal{A}(18)\mathcal{A}(13) = 1. \\
(\mathcal{A} * \breve{\mathcal{A}})(7) &= \sum_{y \in \mathcal{A}} \mathcal{A}(y)\mathcal{A}(y-7) = \mathcal{A}(1)\mathcal{A}(-6) + \mathcal{A}(2)\mathcal{A}(-5) + \mathcal{A}(4)\mathcal{A}(-3) + \mathcal{A}(9)\mathcal{A}(2) \\
&\quad + \mathcal{A}(18)\mathcal{A}(11) = 1.
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
(\mathcal{A} * \breve{\mathcal{A}})(8) &= \sum_{y \in \mathcal{A}} \mathcal{A}(y)\mathcal{A}(y-8) = \mathcal{A}(1)\mathcal{A}(-7) + \mathcal{A}(2)\mathcal{A}(-6) + \mathcal{A}(4)\mathcal{A}(-8) + \mathcal{A}(9)\mathcal{A}(1) \\
&\quad + \mathcal{A}(18)\mathcal{A}(10) = 1. \\
(\mathcal{A} * \breve{\mathcal{A}})(9) &= \sum_{y \in \mathcal{A}} \mathcal{A}(y)\mathcal{A}(y-9) = \mathcal{A}(1)\mathcal{A}(-8) + \mathcal{A}(2)\mathcal{A}(-7) + \mathcal{A}(4)\mathcal{A}(-5) + \mathcal{A}(9)\mathcal{A}(0) \\
&\quad + \mathcal{A}(18)\mathcal{A}(9) = 1. \\
(\mathcal{A} * \breve{\mathcal{A}})(14) &= \sum_{y \in \mathcal{A}} \mathcal{A}(y)\mathcal{A}(y-14) = \mathcal{A}(1)\mathcal{A}(-13) + \mathcal{A}(2)\mathcal{A}(-12) + \mathcal{A}(4)\mathcal{A}(-10) \\
&\quad + \mathcal{A}(9)\mathcal{A}(-5) + \mathcal{A}(18)\mathcal{A}(4) = 1. \\
(\mathcal{A} * \breve{\mathcal{A}})(16) &= \sum_{y \in \mathcal{A}} \mathcal{A}(y)\mathcal{A}(y-16) = \mathcal{A}(1)\mathcal{A}(-15) + \mathcal{A}(2)\mathcal{A}(-14) + \mathcal{A}(4)\mathcal{A}(-12) \\
&\quad + \mathcal{A}(9)\mathcal{A}(-7) + \mathcal{A}(18)\mathcal{A}(2) = 1. \\
(\mathcal{A} * \breve{\mathcal{A}})(17) &= \sum_{y \in \mathcal{A}} \mathcal{A}(y)\mathcal{A}(y-17) = \mathcal{A}(1)\mathcal{A}(-16) + \mathcal{A}(2)\mathcal{A}(-15) + \mathcal{A}(4)\mathcal{A}(-13) \\
&\quad + \mathcal{A}(9)\mathcal{A}(-8) + \mathcal{A}(18)\mathcal{A}(1) = 1. \\
(\mathcal{A} * \breve{\mathcal{A}})(-1) &= \sum_{y \in \mathcal{A}} \mathcal{A}(y)\mathcal{A}(y+1) = \mathcal{A}(1)\mathcal{A}(2) + \mathcal{A}(2)\mathcal{A}(3) + \mathcal{A}(4)\mathcal{A}(5) + \mathcal{A}(9)\mathcal{A}(10) \\
&\quad + \mathcal{A}(18)\mathcal{A}(19) = 1. \\
(\mathcal{A} * \breve{\mathcal{A}})(-2) &= \sum_{y \in \mathcal{A}} \mathcal{A}(y)\mathcal{A}(y+2) = \mathcal{A}(1)\mathcal{A}(3) + \mathcal{A}(2)\mathcal{A}(4) + \mathcal{A}(4)\mathcal{A}(6) + \mathcal{A}(9)\mathcal{A}(11) \\
&\quad + \mathcal{A}(18)\mathcal{A}(20) = 1. \\
(\mathcal{A} * \breve{\mathcal{A}})(-3) &= \sum_{y \in \mathcal{A}} \mathcal{A}(y)\mathcal{A}(y+3) = \mathcal{A}(1)\mathcal{A}(4) + \mathcal{A}(2)\mathcal{A}(5) + \mathcal{A}(4)\mathcal{A}(7) + \mathcal{A}(9)\mathcal{A}(12) \\
&\quad + \mathcal{A}(18)\mathcal{A}(21) = 1. \\
(\mathcal{A} * \breve{\mathcal{A}})(-5) &= \sum_{y \in \mathcal{A}} \mathcal{A}(y)\mathcal{A}(y+5) = \mathcal{A}(1)\mathcal{A}(6) + \mathcal{A}(2)\mathcal{A}(7) + \mathcal{A}(4)\mathcal{A}(9) + \mathcal{A}(9)\mathcal{A}(14) \\
&\quad + \mathcal{A}(18)\mathcal{A}(23) = 1. \\
(\mathcal{A} * \breve{\mathcal{A}})(-7) &= \sum_{y \in \mathcal{A}} \mathcal{A}(y)\mathcal{A}(y+7) = \mathcal{A}(1)\mathcal{A}(8) + \mathcal{A}(2)\mathcal{A}(9) + \mathcal{A}(4)\mathcal{A}(11) + \mathcal{A}(9)\mathcal{A}(16) \\
&\quad + \mathcal{A}(18)\mathcal{A}(25) = 1. \\
(\mathcal{A} * \breve{\mathcal{A}})(-8) &= \sum_{y \in \mathcal{A}} \mathcal{A}(y)\mathcal{A}(y+8) = \mathcal{A}(1)\mathcal{A}(9) + \mathcal{A}(2)\mathcal{A}(10) + \mathcal{A}(4)\mathcal{A}(12) + \mathcal{A}(9)\mathcal{A}(17) \\
&\quad + \mathcal{A}(18)\mathcal{A}(26) = 1. \\
(\mathcal{A} * \breve{\mathcal{A}})(-9) &= \sum_{y \in \mathcal{A}} \mathcal{A}(y)\mathcal{A}(y+9) = \mathcal{A}(1)\mathcal{A}(10) + \mathcal{A}(2)\mathcal{A}(11) + \mathcal{A}(4)\mathcal{A}(13) + \mathcal{A}(9)\mathcal{A}(18) \\
&\quad + \mathcal{A}(18)\mathcal{A}(27) = 1.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(\mathcal{A}*\breve{\mathcal{A}})(-14) &= \sum_{y\in\mathcal{A}} \mathcal{A}(y)\mathcal{A}(y+14) = \mathcal{A}(1)\mathcal{A}(15)+\mathcal{A}(2)\mathcal{A}(16)+\mathcal{A}(4)\mathcal{A}(18)\\
&\quad +\mathcal{A}(9)\mathcal{A}(23)+\mathcal{A}(18)\mathcal{A}(32) = 1.\\
(\mathcal{A}*\breve{\mathcal{A}})(-16) &= \sum_{y\in\mathcal{A}} \mathcal{A}(y)\mathcal{A}(y+16) = \mathcal{A}(1)\mathcal{A}(17)+\mathcal{A}(2)\mathcal{A}(18)+\mathcal{A}(4)\mathcal{A}(20)\\
&\quad +\mathcal{A}(9)\mathcal{A}(25)+\mathcal{A}(18)\mathcal{A}(34) = 1.\\
(\mathcal{A}*\breve{\mathcal{A}})(-17) &= \sum_{y\in\mathcal{A}} \mathcal{A}(y)\mathcal{A}(y+17) = \mathcal{A}(1)\mathcal{A}(18)+\mathcal{A}(2)\mathcal{A}(19)+\mathcal{A}(4)\mathcal{A}(21)\\
&\quad +\mathcal{A}(9)\mathcal{A}(26)+\mathcal{A}(18)\mathcal{A}(35) = 1,
\end{aligned}
$$

resultados que se pueden verificar en la Tabla 2.4. Como en el anterior caso, $(\mathcal{A}*\breve{\mathcal{A}})(x)$ *se relaciona con* $\mathcal{A}-\mathcal{A}$*.*

Observación 1. *Nótese que el conjunto* $\mathcal{A}$ *del ejemplo anterior, además de ser un conjunto de Sidon es un conjunto donde todas las diferencias de la forma* $a_1 - a_2$*, con* $a_1, a_2 \in \mathcal{A}$ *y* $a_1 \neq a_2$*, son distintas. Un conjunto con ésta última propiedad se le llama una* **regla Golomb***.*

En general, $\mathcal{A}$ *es un conjunto de Sidon si, y sólo si,* $\mathcal{A}$ *es una regla Golomb. Por tanto:*

$$\mathcal{A} \text{ es un conjunto de Sidon si, y sólo si, } (\mathcal{A}*\breve{\mathcal{A}})(x) \leq 1 \text{ para todo } x \neq 0.$$

Nota 3. *De los procesos anteriores surgen algunas preguntas, entre las cuales se encuentran: ¿qué cuentan* $(\mathcal{A}*\mathcal{A}*\mathcal{A})(x)$ *y* $(\mathcal{A}*\mathcal{A}*\breve{\mathcal{A}})(x)$*?.*

Para responder a estos interrogantes, se siguen procedimientos análogos a los casos anteriores con lo cuales se concluye que $(\mathcal{A}*\mathcal{A}*\mathcal{A})(x)$ *cuenta el número de soluciones de la ecuación:*

$$x = a_1 + a_2 + a_3, \quad \text{con} \quad a_1, a_2, a_3 \in \mathcal{A} \quad \text{y}$$

$(\mathcal{A}*\mathcal{A}*\breve{\mathcal{A}})(x)$ *cuenta el número de soluciones de*

$$x = a_1 + a_2 - a_3, \quad \text{donde} \quad a_1, a_2, a_3 \in \mathcal{A}.$$

En el Apéndice A, se hace un estudio más profundo a éstas respuestas y a otras preguntas.

2.3. Series de Fourier

Las series de Fourier constituyen la herramienta matemática básica del análisis de Fourier empleado para analizar funciones periódicas a través de la descomposición de dicha función en una suma infinita de funciones mucho más simples (como combinación de senos y cosenos con frecuencias enteras).

2.3.1. La serie de Fourier de una función

Sea f una función definida en el intervalo $[-L, L]$ y supóngase que $\int_{-L}^{L} f(x)dx$ existe. Se quiere explorar la posibilidad de elegir números $a_0, a_1, \ldots$ y $b_1, b_2, \ldots$ tales que:

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right), \quad \text{para} \quad -L \leq x \leq L. \tag{2.2}$$

En muchos casos la condición (2.2) es difícil de cumplir, pero se puede obtener bajo ciertas condiciones sobre f. Para empezar, se aceptará el mejor de los casos y se supondrá que la igualdad (2.2) es cierta. ¿Cómo elegimos los coeficientes?, para esto se necesita el siguiente lema:

Lema 1. *Sean m y n enteros no negativos, entonces:*

(i)

$$\int_{-L}^{L} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = 0.$$

(ii) *Si* $n \neq m$, *entonces:*

$$\int_{-L}^{L} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = \int_{-L}^{L} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = 0.$$

(iii) *Si* $n \neq 0$, *entonces:*

$$\int_{-L}^{L} \cos^2\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \int_{-L}^{L} \operatorname{sen}^2\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = L.$$

Demostración. El lema se prueba integrando directamente. ■

Ahora, para encontrar a_0, se integra (2.2) término a término (suponiendo que se pueda hacer) y se encuentra:

$$\begin{aligned}
\int_{-L}^{L} f(x)dx &= \frac{1}{2}a_0 \int_{-L}^{L} dx + \int_{-L}^{L} \left[\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right)\right] dx \\
&= a_0 L + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \int_{-L}^{L} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx + b_n \int_{-L}^{L} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx\right] \\
&= a_0 L + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2a_n L}{n\pi} \operatorname{sen}(n\pi)\right] = a_0 L,
\end{aligned}$$

de donde

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)dx.$$

Para determinar a_k, siendo k cualquier entero positivo, se multiplica (2.2) por $\cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right)$, se integra término a término con lo que:

$$\int_{-L}^{L} f(x)\cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right)dx = \frac{1}{2}a_0\int_{-L}^{L}\cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right)dx + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\int_{-L}^{L}\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right)dx$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty} b_n\int_{-L}^{L}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right)dx.$$

Por el Lema 1, todas las integrales de la derecha son cero; excepto $\int_{-L}^{L}\cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right)\cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right)dx$ que es igual a L, y así, el lado derecho de la anterior relación se reduce a

$$\int_{-L}^{L} f(x)\cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right)dx = a_k L,$$

de modo que

$$a_k = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right)dx.$$

Para encontrar b_k, se multiplica la ecuación (2.2) por $\operatorname{sen}\left(\frac{k\pi x}{L}\right)$, y análogo al caso anterior se obtiene:

$$\int_{-L}^{L} f(x)\operatorname{sen}\left(\frac{k\pi x}{L}\right)dx = b_k L,$$

y por tanto:

$$b_k = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\operatorname{sen}\left(\frac{k\pi x}{L}\right)dx.$$

Se han encontrado los coeficientes en el desarrollo de la serie trigonométrica. Éste análisis, a pesar de ser débil, dice mucho ya que, muestra cómo pueden elegirse las constantes, lo que se ilustra en la siguiente definición.

Definición 3 (Serie y coeficientes de Fourier)**.** *Sea f una función Riemann integrable en $[-L,L]$, entonces:*

(i) *Los números:*

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx, \quad \textit{para } n = 0,1,2\dots$$

y

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx, \quad \textit{para } n = 1,2,3\dots$$

son los coeficientes de Fourier de f en $[-L,L]$.

(ii) *La serie:*

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right),$$

es la serie de Fourier de f en $[-L,L]$, cuando las constantes son los coeficientes de Fourier de f en $[-L,L]$.

2.3.2. Series de Fourier en senos y cosenos

Algunas veces se puede ahorrar trabajo en el cálculo de los coeficientes de Fourier, observando propiedades especiales de f. Por ejemplo, si f es una función par en $[-L,L]$, entonces:

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\,dx = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x)\,dx \implies a_0 = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x)\,dx,$$

y para $n \geq 1$,

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx.$$

Mas aún,

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx = 0.$$

De modo que la serie de Fourier de f es:

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right).$$

Ahora bien, si g una función impar en $[-L,L]$, en forma análoga al caso anterior se obtiene:

$$a_n = 0, \quad \forall n \geq 0 \quad \text{y} \quad b_n = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} g(x)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx,$$

en consecuencia la serie de Fourier de g es:

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right).$$

En resumen:

- Si f es una función par en $[-L, L]$, entonces su serie de Fourier es:

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \tag{2.3}$$

  donde

$$a_0 = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)dx \qquad \text{y} \qquad a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx.$$

  En algunas ocasiones (2.3) también se llama la serie de Fourier de f en cosenos.

- Si f es una función impar en $[-L, L]$ entonces su serie de Fourier es:

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \tag{2.4}$$

  donde

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx.$$

  En algunas ocasiones (2.4) también se llama la serie de Fourier de f en senos.

Capítulo 3

Los artículos de Gang Yu

El objetivo de este capítulo es dar a conocer los resultados obtenidos por Gan Yu en [1] y [2], quien se interesó en encontrar cotas superiores para $\sigma(g) = \limsup_{N\to\infty} \frac{F(g,N)}{\sqrt{N}}$, logrando mejorar las encontradas por Been Green en [3] para *Conjuntos* $B_2[g]$. Se muestra en detalle las herramientas y técnicas utilizadas por Gang Yu para obtener dichos resultados.

3.1. Una cota superior para conjuntos $B_2[g]$

A lo largo de esta sección se presentan definiciones y lemas, en los que se basa la demostración del siguiente teorema.

Teorema 2 (**Teorema Principal–[1]).** *Sean $g \geq 2$ y $\sigma(g)$ definida como en (1.2), entonces*

$$\sigma(g) \leq \sqrt{3{,}2g}.$$

El resultado anterior mejora significativamente el encontrado por Been Green en [3], quien demuestra que $\sigma(g) \leq \sqrt{3{,}4g}$.

A continuación se presentan las herramientas previas necesarias para demostrar el Teorema 2, como también se acuerda alguna notación útil para tal fin.

Para $\mathcal{B} \subset [1,N]$, $\beta \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{Z}$, se definen:

- La **Función generatriz** de $\mathcal{B}$ por

$$f_{\mathcal{B}}(\beta) = \sum_{b\in\mathcal{B}} e(\beta b), \quad \text{donde } e(t) = e^{2\pi i t}.$$

- Las funciones $r_{\mathcal{B}}(n)$ y $d_{\mathcal{B}}(n)$ como:

$$r_{\mathcal{B}}(n) = |\{(a,b) \in \mathcal{B} \times \mathcal{B} : a+b = n\}|,$$
$$d_{\mathcal{B}}(n) = |\{(a,b) \in \mathcal{B} \times \mathcal{B} : a-b = n\}|.$$

De la definición anterior se deduce que un conjunto $B_2[g] \subset \mathcal{B}$ satisface la desigualdad $r_{\mathcal{B}}(n) \leq 2g$ para cualquier entero n.

Notación: Frecuentemente se utilizará la notación $A \lesssim B$, $A \gtrsim B$ y $A \backsim B$, donde se definen respectivamente por: $A \leq (1+o(1))B$, $A \geq (1+o(1))B$ y $A = (1+o(1))B$. *

3.1.1. Dos Lemas

Antes de enunciar los lemas, es necesario seleccionar una función u y definir una función ω, en términos de u, que satisfacen las siguientes propiedades:

P_1: Sea $u(x) \in C^2[0,1]$ una función de valor real tal que $u(x) \geq 0$, para todo $x \in [0,1]$ y

$$\int_0^1 u(x)dx = 1.$$

P_2: Se define $\omega(x)$ para $x \in [-1,1]$ como

$$\omega(x) = \int_0^{1-|x|} u(t)u(t+|x|)dt.$$

Nótese que $\omega(x)$ es una función par en $[-1,1]$, no negativa y dos veces diferenciable en $[0,1]$, además, $\omega(\pm 1) = 0$. De otro lado

$$\int_{-1}^{1} \omega(x)dx = 1, \tag{3.1}$$

resultado que se obtiene al cambiar el orden de integración en la integral doble que resulta al reemplazar ω en (3.1).

*Cuando se desconoce la forma exacta de un término o sólo se necesita tener una idea de su tamaño, se utilizan las siguientes notaciones de Landau:

- $f(x) = o(g(x))$ cuando $x \to a$ si $\lim\limits_{x\to a} \frac{|f(x)|}{|g(x)|} = 0$
- Si $g(x) > 0$ para todo $x \geq a$, se escribe $f(x) = O(g(x))$ para indicar que existe una constante $M > 0$ tal que $|f(x)| \leq Mg(x)$ para todo $x \geq a$.

A lo largo de esta sección, cuando se refiera a las funciones u y ω, se entenderá también que ellas cumplen las propiedaes P_1 y P_2 listadas anteriormente.

Para $\mathcal{B} \subset [1,N]$, $L \in \mathbb{Z}$ se definen las funciones $D(L,\omega,\mathcal{B})$ y $R(L,\omega,\mathcal{B})$ por:

$$D(L,\omega,\mathcal{B}) = \sum_{-L\leq m\leq L} \omega\left(\frac{m}{L}\right) d_{\mathcal{B}}(m)$$

y

$$R(L,\omega,\mathcal{B}) = \sum_{-L\leq m\leq L} \omega\left(\frac{m}{L}\right) r_{\mathcal{B}}(N+m).$$

Lema 2. *Sean $\mathcal{B} \subset [1,N]$ y $L \leq N$ un entero positivo, entonces*

$$D(L,\omega,\mathcal{B}) + R(L,\omega,\mathcal{B}) \geq \frac{2|\mathcal{B}|^2 L}{N+L} + O\left(\frac{|\mathcal{B}|^2}{L}\right).$$

Demostración. Para $m \in [-L,L]$, se define $\phi\left(\frac{m}{L}\right)$ como

$$\phi\left(\frac{m}{L}\right) = \frac{1}{L}\sum_{k=1}^{L-|m|} u\left(\frac{k}{L}\right) u\left(\frac{k+|m|}{L}\right),$$

además, ya que $u(x)$ es diferenciable en $[0,1]$entonces para alguna constante positiva M

$$\left| \frac{1}{L}\sum_{k=1}^{L-|m|} u\left(\frac{k}{L}\right) u\left(\frac{k}{L}+\left|\frac{m}{L}\right|\right) - \int_0^{1-\left|\frac{m}{L}\right|} u(t)u\left(t+\left|\frac{m}{L}\right|\right) dt \right| < \frac{M}{L},$$

es decir,

$$\left|\omega\left(\frac{m}{L}\right) - \phi\left(\frac{m}{L}\right)\right| < \frac{M}{L},$$

de donde

$$\omega\left(\frac{m}{L}\right) = \phi\left(\frac{m}{L}\right) + O\left(\frac{1}{L}\right). \tag{3.2}$$

Teniendo en cuenta lo anterior y las definiciones de $D(L,\omega,\mathcal{B})$, $R(L,\omega,\mathcal{B})$, se sigue

$$\begin{aligned} D(L,\omega,\mathcal{B}) + R(L,\omega,\mathcal{B}) &= \sum_{-L\leq m\leq L} \omega\left(\frac{m}{L}\right)\left(d_{\mathcal{B}}(m) + r_{\mathcal{B}}(N+m)\right) \\ &= \sum_{-L\leq m\leq L} \left(\phi\left(\frac{m}{L}\right) + O\left(\frac{1}{L}\right)\right)\left(d_{\mathcal{B}}(m) + r_{\mathcal{B}}(N+m)\right) \\ &= \sum_{-L\leq m\leq L} \phi\left(\frac{m}{L}\right)\left(d_{\mathcal{B}}(m) + r_{\mathcal{B}}(N+m)\right) + O\left(\frac{|\mathcal{B}|^2}{L}\right). \end{aligned} \tag{3.3}$$

Sea $K = N+L$. Nótese que para $-L < m < L$

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{K}\sum_{h=0}^{K-1}\left(f_{\mathcal{B}}\left(\frac{h}{K}\right)\right)^2 e\left(-\frac{(N+m)h}{K}\right) &= \frac{1}{K}\sum_{h=0}^{K-1}\left(\sum_{a\in\mathcal{B}} e^{\left(\frac{2\pi iah}{K}\right)} \sum_{b\in\mathcal{B}} e^{\left(\frac{2\pi ibh}{K}\right)}\right) e^{\left(-\frac{2\pi ih(N+m)}{K}\right)} \\
&= \frac{1}{K}\sum_{h=0}^{K-1}\left(\sum_{a\in\mathcal{B}}\sum_{b\in\mathcal{B}} e^{\left(\frac{2\pi ih}{K}\right)(a+b)}\right) e^{\left(-\frac{2\pi ih(N+m)}{K}\right)} \\
&= \frac{1}{K}\sum_{h=0}^{K-1}\sum_{a\in\mathcal{B}}\sum_{b\in\mathcal{B}} e^{\left(\frac{2\pi ih}{K}\right)((a+b)-(N+m))}. \qquad (3.4)
\end{aligned}
$$

En el caso de que $a+b \neq N+m$, es fácil verificar que (3.4) es 0, ya que es la suma de las raíces K-ésimas de la unidad, mientras que si $a+b = N+m$, es decir , si $N+m$ se representa como la suma de dos elementos de $\mathcal{B}$, entonces en (3.4) se tiene la suma de $r_{\mathcal{B}}(N+m)$ veces 1, por tanto

$$
r_{\mathcal{B}}(N+m) = \frac{1}{K}\sum_{h=0}^{K-1}\left(f_{\mathcal{B}}\left(\frac{h}{K}\right)\right)^2 e\left(-\frac{(N+m)h}{K}\right). \qquad (3.5)
$$

Por otra parte

$$
\frac{1}{K}\sum_{h=0}^{K-1}\left|f_{\mathcal{B}}\left(\frac{h}{K}\right)\right|^2 e\left(-\frac{mh}{K}\right) = \frac{1}{K}\sum_{h=0}^{K-1}\sum_{a\in\mathcal{B}}\sum_{b\in\mathcal{B}} e^{\left(\frac{2\pi ih}{K}\right)(a-b-m)},
$$

con un análisis similar al caso anterior, se llega a que

$$
d_{\mathcal{B}}(m) = \frac{1}{K}\sum_{h=0}^{K-1}\left|f_{\mathcal{B}}\left(\frac{h}{K}\right)\right|^2 e\left(-\frac{mh}{K}\right). \qquad (3.6)
$$

Reemplazando (3.5) y (3.6) en (3.3), se obtiene

$$
\begin{aligned}
&\sum_{-L\leq m\leq L}\phi\left(\frac{m}{L}\right)\left[\frac{1}{K}\sum_{h=0}^{K-1}\left|f_{\mathcal{B}}\left(\frac{h}{K}\right)\right|^2 e\left(\frac{-mh}{K}\right) + \frac{1}{K}\sum_{h=0}^{K-1}\left(f_{\mathcal{B}}\left(\frac{h}{K}\right)\right)^2 e\left(\frac{-Nh-mh}{K}\right)\right] \\
&\qquad + O\left(\frac{|\mathcal{B}|^2}{L}\right) \\
&= \frac{1}{K}\sum_{-L\leq m\leq L}\phi\left(\frac{m}{L}\right)\sum_{h=0}^{K-1}\left[\left|f_{\mathcal{B}}\left(\frac{h}{K}\right)\right|^2 e\left(\frac{-mh}{K}\right) + \left(f_{\mathcal{B}}\left(\frac{h}{K}\right)\right)^2 e\left(\frac{-Nh}{K}+\frac{-mh}{K}\right)\right] \\
&\qquad + O\left(\frac{|\mathcal{B}|^2}{L}\right).
\end{aligned}
$$

*

$$
\sum_{-L\leq m\leq L} O\left(\frac{1}{L}\right)(d_{\mathcal{B}}(m)+r_{\mathcal{B}}(N+m)) = O\left(\frac{1}{L}\sum_{-L\leq m\leq L}(d_{\mathcal{B}}(m)+r_{\mathcal{B}}(N+m))\right) = O\left(\frac{|\mathcal{B}|^2}{L}\right).
$$

Reorganizando sumas y factorizando, la anterior expresión se transforma en

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{K}\sum_{h=0}^{K-1}\sum_{-L\leq m\leq L}\phi\left(\frac{m}{L}\right)e\left(\frac{-mh}{K}\right)\left[\left(\left|f_{\mathcal{B}}\left(\frac{h}{K}\right)\right|^2+\left(f_{\mathcal{B}}\left(\frac{h}{K}\right)\right)^2 e\left(-\frac{Nh}{K}\right)\right)\right]+O\left(\frac{|\mathcal{B}|^2}{L}\right)\\
&= \frac{1}{K}\sum_{h=0}^{K-1}\hat{\phi}_L\left(-\frac{h}{K}\right)\left[\left(\left|f_{\mathcal{B}}\left(\frac{h}{K}\right)\right|^2+\left(f_{\mathcal{B}}\left(\frac{h}{K}\right)\right)^2 e\left(-\frac{Nh}{K}\right)\right)\right]+O\left(\frac{|\mathcal{B}|^2}{L}\right), \qquad (3.7)
\end{aligned}
$$

donde

$$\hat{\phi}_L(\beta) = \sum_{-L\leq m\leq L}\phi\left(\frac{m}{L}\right)e(\beta m).$$

En otro caso, para cualquier $\beta\in\mathbb{R}$

$$
\begin{aligned}
0 &\leq \frac{1}{L}\left|\sum_{1\leq k\leq L}u\left(\frac{k}{L}\right)e(\beta k)\right|^2 = \frac{1}{L}\left(\sum_{1\leq k\leq L}u\left(\frac{k}{L}\right)e(\beta k)\right)\left(\sum_{1\leq t\leq L}u\left(\frac{t}{L}\right)e(-\beta t)\right)\\
&= \frac{1}{L}\left(\sum_{1\leq k\leq L}\sum_{1\leq t\leq L}u\left(\frac{k}{L}\right)u\left(\frac{t}{L}\right)e(\beta(k-t))\right) = \hat{\phi}_L(\beta)
\end{aligned}
$$

además,

$$\Re\left(\left|f_{\mathcal{B}}\left(\frac{h}{K}\right)\right|^2+\left(f_{\mathcal{B}}\left(\frac{h}{K}\right)\right)^2 e\left(-\frac{Nh}{K}\right)\right)\geq 0,$$

lo que indica que la parte real de cada término en (3.7) es no negativo. Como $D(L,\omega,\mathcal{B})+R(L,\omega,\mathcal{B})$ es real, entonces, es mas grande que cualquiera de sus elementos. En particular :

$$D(L,\omega,\mathcal{B})+R(L,\omega,\mathcal{B})\geq\frac{1}{K}\hat{\phi}_L(0)\left[|f_{\mathcal{B}}(0)|^2+(f_{\mathcal{B}}(0))^2e(0)\right]+O\left(\frac{|\mathcal{B}|^2}{L}\right),$$

y así

$$D(L,\omega,\mathcal{B})+R(L,\omega,\mathcal{B})\geq\frac{2|\mathcal{B}|^2\hat{\phi}_L(0)}{K}+O\left(\frac{|\mathcal{B}|^2}{L}\right). \qquad (3.8)$$

Por otra parte, de la definición de $\hat{\phi}_L$ se sigue

$$
\begin{aligned}
\hat{\phi}_L(0) &= \sum_{-L\leq m\leq L}\phi\left(\frac{m}{L}\right) \overset{*}{=} \sum_{-L\leq m\leq L}\omega\left(\frac{m}{L}\right)-\sum_{-L\leq m\leq L}O\left(\frac{1}{L}\right)\\
&= \sum_{-L\leq m\leq L}\omega\left(\frac{m}{L}\right)+O(1) = \int_{-1}^{1}L\,\omega(u)du+O(1) = L+O(1) \qquad (3.9)
\end{aligned}
$$

[*] Teniendo en cuenta 3.2 y reemplazando en esta expresión.

y sustituyendo en (3.8), se obtiene

$$D(L,\omega,\mathcal{B})+R(L,\omega,\mathcal{B}) \geq \frac{2|\mathcal{B}|^2 L}{N+L}+O\left(\frac{|\mathcal{B}|^2}{L}\right),$$

como se quería mostrar. ■

Lema 3. *Sea $\varepsilon \in \left(0,\frac{1}{2}\right)$ un número fijo. Para cualesquier conjunto $\mathcal{A} \in B_2[g]$, $\mathcal{A} \subset [1,N]$, se tiene*

$$\sum_{1\leq n\leq N^{\varepsilon}} \left| f_{\mathcal{A}}\left(\frac{n}{2N}\right)\right|^4 \lesssim (2g-1)N|\mathcal{A}|^2 - \frac{1}{2}|\mathcal{A}|^4.$$

Demostración. Sea $S(\mathcal{A})$ definida por:

$$S(\mathcal{A}) = \frac{1}{2N}\sum_{n=-N}^{N-1}\left(\left|f_{\mathcal{A}}\left(\frac{n}{2N}\right)\right|^2 - |\mathcal{A}|\right)^2.$$

Analizando esta suma se obtiene

$$\begin{aligned}
S(\mathcal{A}) &= \frac{1}{2N}\sum_{n=-N}^{N-1}\left(\sum_{a\in\mathcal{A}}\sum_{b\in\mathcal{A}} e^{\left(\frac{2\pi i n}{2N}\right)(a-b)} - |\mathcal{A}|\right)^2 \\
&= \frac{1}{2N}\sum_{n=-N}^{N-1}\left(\sum_{\substack{a,b\in\mathcal{A}\\ a\neq b}} e^{\left(\frac{2\pi i n}{2N}\right)(a-b)} + \sum_{\substack{a,b\in\mathcal{A}\\ a=b}} e^{\left(\frac{2\pi i n}{2N}\right)(a-b)} - |\mathcal{A}|\right)^2 \\
&= \frac{1}{2N}\sum_{n=-N}^{N-1}\left(\sum_{\substack{a,b\in\mathcal{A}\\ a\neq b}} e^{\left(\frac{2\pi i n}{2N}\right)(a-b)}\right)^2,
\end{aligned}$$

de donde

$$S(\mathcal{A}) = \frac{1}{2N}\sum_{n=-N}^{N-1}\left(\sum_{\substack{a,b\in\mathcal{A}\\ a\neq b}}\sum_{\substack{c,d\in\mathcal{A}\\ c\neq d}} e^{\left(\frac{2\pi i n}{2N}\right)[(a-b)-(c-d)]}\right).$$

Note que cuando $(a-b)-(c-d)=0$, es decir cuando la ecuación $a-b=c-d$, $a\neq b$, $c\neq d$ tiene solución entonces, en la última expresión encontrada para $S(\mathcal{A})$ aparece un 1. En los casos donde $(a-b)-(c-d)\neq 0$ dicha suma es cero. En consecuencia $S(\mathcal{A})$ representa el número de soluciones de la ecuación

$$a-b=c-d, \quad a,b,c,d\in\mathcal{A}, \quad a\neq b.$$

Ahora bien para cualquier entero $n \geq 1$, hay a lo sumo $2g$ parejas (b,c) con $b,c \in \mathcal{A}$ tales que $b+c=n$, luego la ecuación $a+d=b+c$ con $a,b,c,d \in \mathcal{A}$ tiene a lo más $2g|\mathcal{A}|^2$ soluciones. Esto implica que

$$S(\mathcal{A}) \leq (2g-1)|\mathcal{A}|^2.$$

Nótese que

$$\begin{aligned}
\left|f_{\mathcal{A}}\left(\frac{n}{2N}\right)\right|^4 &= \left(\left|f_{\mathcal{A}}\left(\frac{n}{2N}\right)\right|^2 - |\mathcal{A}| + |\mathcal{A}|\right)^2 \\
&= \left(\left|f_{\mathcal{A}}\left(\frac{n}{2N}\right)\right|^2 - |\mathcal{A}|\right)^2 + 2\left(\left|f_{\mathcal{A}}\left(\frac{n}{2N}\right)\right|^2 - |\mathcal{A}|\right)|\mathcal{A}| + |\mathcal{A}|^2 \\
&=^{*} \left(\left|f_{\mathcal{A}}\left(\frac{n}{2N}\right)\right|^2 - |\mathcal{A}|\right)^2 + O(|\mathcal{A}|^3).
\end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned}
\sum_{1\leq n\leq N^{\varepsilon}} \left|f_{\mathcal{A}}\left(\frac{n}{2N}\right)\right|^4 &\leq \sum_{1\leq n\leq N^{\varepsilon}} \left(\left|f_{\mathcal{A}}\left(\frac{n}{2N}\right)\right|^2 - |\mathcal{A}|\right)^2 + O\left(|\mathcal{A}|^3 \sum_{1\leq n\leq N^{\varepsilon}} 1\right) \\
&\leq \frac{1}{2}(2N\cdot S(\mathcal{A}) - (f_{\mathcal{A}}(0))^4) + O(N^{\varepsilon}|\mathcal{A}|^3) \\
&\leq \frac{1}{2}\left(2N(2g-1)|\mathcal{A}|^2 - |\mathcal{A}|^4\right) + O(N^{\varepsilon}|\mathcal{A}|^3),
\end{aligned}$$

y por la definición de $\lesssim$ se llega a

$$\sum_{1\leq n\leq N^{\varepsilon}} \left|f_{\mathcal{A}}\left(\frac{n}{2N}\right)\right|^4 \lesssim (2g-1)N|\mathcal{A}|^2 - \frac{1}{2}|\mathcal{A}|^4.$$

■

3.1.2. La función $u(x)$

Sean $\omega(x)$ y $u(x)$ funciones que cumplen las condiciones requeridas anteriormente. Se define $M(\omega)$ por

$$M(\omega) = \int_{-1}^{1} \omega^2(x)\, dx.$$

* Hay que tener en cuenta que para cualquier $\beta \in \mathbb{R}$

$$\left|f_{\mathcal{A}}(\beta)\right| \leq |\mathcal{A}|$$

Es de anotarse que $M(\omega)$ determina la cota superior para $\sigma(g)$, esto se ve en la demostración del Teorema 2. De manera informal se puede decir que el valor más pequeño de $M(\omega)$, es el que nos proporciona la mejor cota superior para $\sigma(g)$. Un problema interesante que se puede plantear afín de mejorar la cota superior $\sigma(g)$ encontrada por Gang Yu, es encontrar una nueva función $\omega(x)$ que disminuya la cota para $M(\omega)$ que se plantea en el siguiente Lema.

Lema 4. *Existe una función $\omega(x)$, tal que*

$$M(\omega) < 0,5771.$$

Demostración. Para

$$h(x) = 1 + 0{,}0000028\, e^{60(x-\frac{1}{2})^2} + 3{,}4\left(x - \frac{1}{2}\right)^2,$$

se define

$$u(x) = \frac{h(x)}{\int_0^1 h(x)\,dx}.$$

Claramente se ve que u satisface las condiciones planteadas al inicio de la sección. Con un sencillo algoritmo implementado en el paquete computacional MuPAD,[*](ver Apéndice B.1, Algoritmo 1) se verifica que

$$M(\omega) = 0{,}5770672591 < 0{,}5771.$$

■

3.1.3. Demostración del Teorema 2

Demostración. Sean $\mathcal{A} \subset [1,N]$ un conjunto $B_2[g]$ con $|\mathcal{A}| \gg \sqrt{N}$,[**] $c = \frac{|\mathcal{A}|^2}{gN}$ y $L = \delta N$, donde $\delta \in (0,1)$ es un parámetro independiente de N que se escogerá luego. Supóngase que $u(x)$ es la función de la demostración del Lema 4 y $\omega(x)$ la obtenida a partir de ella.

Reemplazando los valores de L y c en la expresión que nos da el Lema 2, se sigue:

$$\begin{aligned} D(L,\omega,\mathcal{A}) + R(L,\omega,\mathcal{A}) &\geq \frac{2\delta cgN}{1+\delta} + \frac{\alpha|\mathcal{A}|^2}{\delta N} \\ &= \left(1 + \frac{\alpha(1+\delta)|\mathcal{A}|^2}{2cg\delta^2N^2}\right)\frac{2\delta cgN}{1+\delta}, \end{aligned}$$

[*] En el apéndice se muestran en detalle los algoritmos utilizados para verificar los cálculos correspondientes

[**] La notación de Vinogradov $f(x) \gg g(x)$ es equivalente a decir que $O(f(x)) = g(x)$ cuando $x \to a$.

de donde

$$D(L,\omega,\mathcal{A})+R(L,\omega,\mathcal{A})\gtrsim\frac{2\delta cgN}{1+\delta}. \tag{3.10}$$

Como $\omega(x)$ es no negativa y diferenciable se tiene

$$\begin{aligned}R(L,\omega,\mathcal{A})&=2g\sum_{-L\le m\le L}\omega\left(\frac{m}{L}\right)\le 2gL\int_{-1}^{1}\omega(v)dv+O(1)=2g\delta N+O(1)\\&\sim 2g\delta N. \end{aligned}\tag{3.11}$$

Sea $W(x)$ una función de periodo 2 que toma el valor $\omega\left(\frac{x}{\delta}\right)$ en $[-\delta,\delta]$ y 0 en el resto del intervalo $[-1,1]$. Nótese que $W(x)$ es una función par, además diferenciable en $[-1,1]$, por (2.3) su expansión de Fourier es

$$\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(n\pi x).$$

Ahora

$$\begin{aligned}D(L,\omega,\mathcal{A})&=\sum_{-L\le m\le L}\omega\left(\frac{m}{\delta N}\right)d_{\mathcal{A}}(m)=\sum_{-L\le m\le L}W\left(\frac{m}{N}\right)d_{\mathcal{A}}(m)\\&=\sum_{-L\le m\le L}d_{\mathcal{A}}(m)\left(\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\left(\frac{n\pi m}{N}\right)\right)\\&=\frac{a_0}{2}|\mathcal{A}|^2+\sum_{-L\le m\le L}d_{\mathcal{A}}(m)\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\left(\frac{n\pi m}{N}\right).\end{aligned}$$

Por otra parte

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}a_n\left|f_{\mathcal{A}}\left(\frac{n}{2N}\right)\right|^2&=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sum_{a,b\in\mathcal{A}}e^{\left(\frac{\pi in}{N}\right)(a-b)}=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sum_{-N\le t\le N}d_{\mathcal{A}}(t)\,e^{\left(\frac{\pi in}{N}\right)t}\\&=\sum_{-N\le t\le N}d_{\mathcal{A}}(t)\sum_{n=1}^{\infty}a_n e^{\left(\frac{n\pi it}{N}\right)}=\sum_{-N\le t\le N}d_{\mathcal{A}}(t)\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\left(\frac{n\pi t}{N}\right),\end{aligned}$$

por tanto

$$D(L,\omega,\mathcal{A})=\frac{a_0}{2}|\mathcal{A}|^2+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\left|f_{\mathcal{A}}\left(\frac{n}{2N}\right)\right|^2. \tag{3.12}$$

De las condiciones que a_0 y $\omega(x)$ satisfacen, se deduce

$$a_0=\int_{-1}^{1}W(x)\,dx=\int_{-\delta}^{\delta}\omega\left(\frac{x}{\delta}\right)dx=\delta\int_{-1}^{1}\omega(t)\,dt=\delta,$$

así

$$\frac{1}{2}a_0=\frac{1}{2}\delta.$$

Ahora bien, de las condiciones que satisface $\omega(x)$ se tiene $a_n = O_\delta\left(\frac{1}{n^2}\right)$* para $n \geq 1$.

De otro lado, para cualquier ε positivo

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \left| f_{\mathcal{A}}\left(\frac{n}{2N}\right)\right|^2 = \sum_{1\leq n\leq N^\varepsilon} a_n \left| f_{\mathcal{A}}\left(\frac{n}{2N}\right)\right|^2 + \sum_{n>N^\varepsilon} a_n \left| f_{\mathcal{A}}\left(\frac{n}{2N}\right)\right|^2$$
$$= \sum_{1\leq n\leq N^\varepsilon} a_n \left| f_{\mathcal{A}}\left(\frac{n}{2N}\right)\right|^2 + O\left(\frac{|\mathcal{A}|^2}{N^\varepsilon}\right), \tag{3.13}$$

aplicando la desigualdad de Cauchy ** a la suma anterior, se llega a

$$\sum_{1\leq n\leq N^\varepsilon} a_n \left| f_{\mathcal{A}}\left(\frac{n}{2N}\right)\right|^2 \leq \sqrt{\sum_{1\leq n\leq N^\varepsilon} a_n^2 \sum_{1\leq n\leq N^\varepsilon} \left| f_{\mathcal{A}}\left(\frac{n}{2N}\right)\right|^4}. \tag{3.14}$$

Por la identidad de Parseval *** y el hecho de que $a_0 = \delta$ se sigue

$$\sum_{1\leq n\leq N^\varepsilon} a_n^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = \int_{-\delta}^{\delta} \omega^2\left(\frac{x}{\delta}\right) dx - \frac{a_0^2}{2} = \delta M(\omega) - \frac{\delta^2}{2}. \tag{3.15}$$

Por (3.13) y sustituyendo (3.14), (3.15) en (3.12) se obtiene

$$D(L,\omega,\mathcal{A}) \leq \frac{a_0^2}{2}|\mathcal{A}|^2 + \sqrt{\left(\delta M(\omega) - \frac{\delta^2}{2}\right) \sum_{1\leq n\leq N^\varepsilon} \left| f\left(\frac{n}{2N}\right)\right|^4} + O\left(\frac{|\mathcal{A}|^2}{N^\varepsilon}\right)$$
$$\leq (1+\mu^{****}) \left(\frac{a_0^2}{2}|\mathcal{A}|^2 + \sqrt{\left(\delta M(\omega) - \frac{\delta^2}{2}\right) \sum_{1\leq n\leq N^\varepsilon} \left| f\left(\frac{n}{2N}\right)\right|^4}\right),$$

*La notación $O_\delta\left(\frac{1}{n^2}\right)$ indica que se tiene una dependencia de δ.

** **Desigualdad de Cauchy:** Si $a_k, b_k \in \mathbb{R}$, entonces

$$\left(\sum_{k=1}^{N} a_k b_k\right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{N} a_k\right)^2 \left(\sum_{k=1}^{N} b_k\right)^2.$$

*** **Identidad de Parseval:** Dada una función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ periódica, con periodo $2L$ donde $f, |f|, |f|^2$ son integrables, esto es; se pueden calcular sus coeficientes de Fourier a_n y b_n, entonces

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} |f(x)|^2 dx.$$

en consecuencia

$$D(L,\omega,\mathcal{A}) \lesssim \frac{a_0^2}{2}|\mathcal{A}|^2 + \sqrt{\left(\delta M(\omega) - \frac{\delta^2}{2}\right) \sum_{1\le n\le N^{\varepsilon}} \left| f\left(\frac{n}{2N}\right)\right|^4}.$$

De (3.10), (3.11) y el Lema 3, tomando $\varepsilon \in (0,\frac{1}{2})$ se llega a

$$\frac{2\delta cgN}{1+\delta} - 2g\delta N \lesssim \frac{\delta|\mathcal{A}|^2}{2} + \sqrt{\left(\delta M(\omega) - \frac{\delta^2}{2}\right)\left((2g-1)N|\mathcal{A}|^2 - \frac{1}{2}|\mathcal{A}|^4\right)}.$$

Como $2g-1 \le 2g$, del Lema 3 y el valor de $M(\omega)$ en el Lema 4 se sigue que

$$\frac{2\delta cgN}{1+\delta} \lesssim 2g\delta N + \frac{\delta|\mathcal{A}|^2}{2} + \sqrt{(0,5771\delta - 0,5\delta^2)\left(2gN|\mathcal{A}|^2 - \frac{1}{2}|\mathcal{A}|^4\right)}.$$

Y sustituyendo el valor de c

$$\frac{2\delta cgN}{1+\delta} \lesssim 2\delta gN + \frac{\delta cgN}{2} + \sqrt{(0,5771\delta - 0,5\delta^2)\left(2(gN)^2c - (gN)^2\frac{c^2}{2}\right)},$$

luego

$$\frac{2\delta c}{1+\delta} \lesssim 2\delta + \frac{\delta c}{2} + \sqrt{(0,5771\delta - 0,5\delta^2)\,(2c - 0,5c^2)}.$$

Tomando $\delta = 0,237$ se deduce

$$0,12440262555c^2 - 0,46829789878c + 0,224676 \le 0,$$

de donde

$$c \le 3,199942699\ldots < 3,2; \quad \text{o} \quad c \le 0,564350029.$$

Para este caso, $\frac{|\mathcal{A}|}{\sqrt{gN}} = \sqrt{c} < \sqrt{3,2}$, en particular

$$\sigma(g) < \sqrt{3,2}.$$

■

**** Donde

$$\mu = \frac{\alpha|\mathcal{A}|^2}{N^{\varepsilon}\left(\frac{a_0^2}{2}|\mathcal{A}|^2 + \sqrt{\left(\delta M(\omega) - \frac{\delta^2}{2}\right)\sum_{1\le n\le N^{\varepsilon}}\left|f_{\mathcal{A}}\left(\frac{n}{2N}\right)\right|^4}\right)}, \quad \text{para algún } \alpha > 0$$

y el límite cuando $N \to \infty$ de esta expresión es cero. Luego $\mu = o(1)$

Nota 4. *Existen otras opciones para escoger la función $u(x)$ que también dan resultados satisfactorios. Gang Yu por ejemplo, propone la función*

$$u(x) = \frac{6}{11}\left(1+10\left(x-\frac{1}{2}\right)^2\right),$$

de donde se obtiene

$$M(\omega) = 0,599776\ldots,$$

y siguiendo el proceso anterior, se llega a que $\sigma(g) \leq \sqrt{3,2207}$. *

La función $u(x)$ del Lema 4 no es una buena opción a la hora de hacer cálculos, sin embargo, es útil para encontrar la función $M(\omega)$ con la que se hace la demostración del Teorema 2.

3.2. Una nota sobre conjuntos $B_2[g]$

En esta sección, se mostrará una pequeña mejora a uno de los resultados de Been Green en [3], donde muestra que $F(g,N) \leq \sqrt{1{,}75(2g-1)N}$. En términos matemáticos la mejora es poca, pero vale la pena estudiar la técnica utilizada para encontrarla. Se hace uso de la notación y de el Lema 3 de la sección anterior, la nueva herramienta es un Lema Auxiliar para llegar al resultado del Teorema Principal–[2].

Teorema 3. (Teorema Principal–[2]) *Para todo $g \geq 2$, se tiene*

$$F(g,N) \lesssim \sqrt{1{,}74246(2g-1)N},$$

en particular

$$F(2,N) \lesssim \sqrt{5{,}2274N}.$$

3.2.1. Lema auxiliar

Sean $\omega(t)$ una función par con segunda derivada continua definida en $[-1,1]$ y $\mathcal{A} \subset [1,N]$ un conjunto $B_2[g]$. Además suponga

$$\int_0^1 \omega(t)dt < 0 \quad \text{y} \quad \sum_{-N\leq n\leq N} d_{\mathcal{A}}(n)\omega\left(\frac{n}{N}\right) \geq 0. \tag{3.16}$$

*En el Apéndice B.1, Algoritmo 2, se muestran los cálculos.

Lema 5. *Sean N suficientemente grande, $\mathcal{A} \subset [1,N]$ un conjunto $B_2[g]$ y $\omega(t)$ una función par, con segunda derivada continua en $[-1,1]$ y que satisface las condiciones en (3.16), entonces*

$$F(g,N) \lesssim \sqrt{c_\omega N}, \quad \textit{donde} \quad c_\omega = \frac{4g-2}{1+\frac{\left(\int_0^1 \omega(t)dt\right)^2}{\int_0^1 (\omega(t))^2 dt - \left(\int_0^1 \omega(t)dt\right)^2}}.$$

Demostración. Sea $\omega(t)$ una función par en $[-1,1]$, su expansión de Fourier es $\frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos(m\pi t)$. Como $\omega(t) \in C^2[-1,1]$, entonces $a_m = O\left(\frac{1}{m^2}\right)$. Así, para cualquier ε positivo se tiene

$$\begin{aligned}\sum_{-N\le n\le N} d_{\mathcal{A}}(n)\omega\left(\frac{n}{N}\right) &= \frac{a_0}{2}|\mathcal{A}|^2 + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \left|f_{\mathcal{A}}\left(\frac{m}{2N}\right)\right|^2 {}^{*}\\ &= \frac{a_0}{2}|\mathcal{A}|^2 + \sum_{m\le N^\varepsilon} a_m \left|f_{\mathcal{A}}\left(\frac{m}{2N}\right)\right|^2 + O\left(\frac{|\mathcal{A}|^2}{N^\varepsilon}\right),\end{aligned}$$

y aplicando la desigualdad de Cauchy [**] al segundo término de la suma anterior se sigue que

$$\begin{aligned}\sum_{-N\le n\le N} d_{\mathcal{A}}(n)\omega\left(\frac{n}{N}\right) &\le \frac{a_0}{2}|\mathcal{A}|^2 + \sqrt{\left(\sum_{m\le N^\varepsilon} a_m^2\right)\left(\sum_{m\le N^\varepsilon}\left|f_{\mathcal{A}}\left(\frac{m}{2N}\right)\right|^4\right)} + O\left(\frac{|\mathcal{A}|^2}{N^\varepsilon}\right)\\ &\le \frac{a_0}{2}|\mathcal{A}|^2 + \sqrt{\left(\sum_{m=1}^{\infty} a_m^2\right)\left(\sum_{m\le N^\varepsilon}\left|f_{\mathcal{A}}\left(\frac{m}{2N}\right)\right|^4\right)} + O\left(\frac{|\mathcal{A}|^2}{N^\varepsilon}\right),\end{aligned}$$

tomando $\varepsilon \in (0,\frac{1}{2})$ para usar el Lema 3, la definición de $\lesssim$ y la condición (3.16) se tiene

$$0 \le \frac{a_0}{2}|\mathcal{A}|^2 + \sqrt{\left(\sum_{m=1}^{\infty} a_m^2\right)\left((2g-1)N|\mathcal{A}|^2 - \frac{1}{2}|\mathcal{A}|^4\right)(1+o(1))} + O\left(\frac{|\mathcal{A}|^2}{N^\varepsilon}\right),$$

de donde, para algún $\alpha > 0$

$$0 \le \frac{a_0}{2}|\mathcal{A}|^2 + \sqrt{\left(\sum_{m=1}^{\infty} a_m^2\right)\left((2g-1)N|\mathcal{A}|^2 - \frac{1}{2}|\mathcal{A}|^4\right)}\sqrt{1+o(1)} + \frac{\alpha|\mathcal{A}|^2}{N^\varepsilon},$$

de ahí que

$$-\frac{a_0}{2}|\mathcal{A}|^2 \le (\sqrt{1+o(1)} + \mu^{***})\sqrt{\left(\sum_{m=1}^{\infty} a_m^2\right)\left((2g-1)N|\mathcal{A}|^2 - \frac{1}{2}|\mathcal{A}|^4\right)},$$

[*] Para demostrar esta igualdad, se procede de igual manera que como en (3.12), en la anterior sección.

[**] Esta desigualdad se utilizó en la anterior sección, si es necesario recordarla, remitirse a la página 46

por tanto

$$-\frac{a_0}{2}|\mathcal{A}|^2 \leq \left(\sqrt{1+o(1)}^{*} + o(1)\right)\sqrt{\left(\sum_{m=1}^{\infty} a_m^2\right)\left((2g-1)N|\mathcal{A}|^2 - \frac{1}{2}|\mathcal{A}|^4\right)},$$

así

$$-\frac{a_0}{2}|\mathcal{A}|^2 \leq (1+o(1))\sqrt{\left(\sum_{m=1}^{\infty} a_m^2\right)\left((2g-1)N|\mathcal{A}|^2 - \frac{1}{2}|\mathcal{A}|^4\right)},$$

lo que implica que

$$-\frac{a_0}{2}|\mathcal{A}|^2 \lesssim \sqrt{\left(\sum_{m=1}^{\infty} a_m^2\right)\left((2g-1)N|\mathcal{A}|^2 - \frac{1}{2}|\mathcal{A}|^4\right)}.$$

Por las condiciones en (2.3) y (3.16):

$$\frac{a_0}{2} = \int_0^1 \omega(t)dt < 0, \quad \text{de ahí que} \quad -\frac{a_0}{2} > 0.$$

Considerando que la función $f(x) = x^2$ es creciente en el intervalo $(0,\infty)$, se tiene

$$\frac{a_0^2|\mathcal{A}|^4}{4} \lesssim \left(\sum_{m=1}^{\infty} a_m^2\right)\left((2g-1)N|\mathcal{A}|^2 - \frac{1}{2}|\mathcal{A}|^4\right),$$

de donde

$$\frac{a_0^2|\mathcal{A}|^4}{4} \lesssim \left(\sum_{m=1}^{\infty} a_m^2\right)\left((2g-1)N - \frac{1}{2}|\mathcal{A}|^2\right)|\mathcal{A}|^2,$$

luego

$$\frac{|\mathcal{A}|^2}{N} \lesssim \frac{(2g-1)}{\frac{1}{2} + \frac{a_0^2}{4\sum_{m=1}^{\infty} a_m^2}}. \tag{3.17}$$

*** Donde

$$\mu = \frac{\alpha|\mathcal{A}|^2}{N^{\varepsilon}\sqrt{\left(\sum_{m=1}^{\infty} a_m^2\right)\left((2g-1)N|\mathcal{A}|^2 - \frac{1}{2}|\mathcal{A}|^4\right)}} \quad \text{para algún} \quad \alpha > 0$$

y el límite de esta expresión cuando $N \to \infty$ es cero.

* **Propiedad:**

$$(1+t)^{\alpha} - 1 \approx \alpha t, \quad \text{con } \alpha \text{ constante y } t \longrightarrow 0, \quad \text{luego:}$$

$$\sqrt{1+o(1)} - 1 = (1+o(1))^{1/2} - 1 \approx \frac{1}{2}o(1) = o(1) \quad \text{por tanto} \quad \sqrt{1+o(1)} \approx 1 + o(1).$$

Por la identidad de Parseval*

$$\sum_{m=1}^{\infty} a_m^2 = \int_{-1}^{1} |\omega(t)|^2 dt - \frac{1}{2}\left(2\int_0^1 \omega(t)dt\right)^2 \overset{**}{=} 2\left(\int_0^1 (\omega(t))^2 dt - \left(\int_0^1 \omega(t)dt\right)^2\right).$$

Ahora, reemplazando $\sum_{m=1}^{\infty} a_m^2$ y el coeficiente a_0 en (3.17) se obtiene

$$\frac{|\mathcal{A}|^2}{N} \lesssim \frac{4g-2}{1+\frac{\left(\int_0^1 \omega(t)dt\right)^2}{\int_0^1 (\omega(t))^2 dt - \left(\int_0^1 \omega(t)dt\right)^2}}.$$

De modo que,

$$|\mathcal{A}| \lesssim \sqrt{c_\omega N} \quad \text{donde} \quad c_\omega = \frac{4g-2}{1+\frac{\left(\int_0^1 (\omega(t)dt)\right)^2}{\int_0^1 (\omega(t))^2 dt - \left(\int_0^1 \omega(t)dt\right)^2}},$$

en particular

$$F(g,N) \lesssim \sqrt{c_\omega N} \quad \text{donde} \quad c_\omega = \frac{4g-2}{1+\frac{\left(\int_0^1 (\omega(t)dt)\right)^2}{\int_0^1 (\omega(t))^2 dt - \left(\int_0^1 \omega(t)dt\right)^2}}.$$

■

El Lema anterior muestra el procedimiento mediante el cual se obtiene c_ω, para cualquier función ω que cumple las condiciones requeridas en (3.16).

La demostración del Teorema 3 se basa en dar una función ω específica, probar que cumple las condiciones y calcular c_ω como lo determina el Lema 5.

3.2.2. Demostración del Teorema 3.

Demostración. Sea

$$\sum_{m=0}^{10^6} \frac{1}{4m+3} \cos\left(\frac{(4m+3)\pi t}{2}\right),$$

*Esta identidad ya se había utilizado en la anterior sección, donde se hace un pié de página con su definición. Si es necesario recordarla, remitirse a la página 46.

** Nótese que $|\omega(t)|^2 = (\omega(t))^2$ ya que $\omega(t)$ es una función de valor real.

la serie de Fourier de una función $\omega(t)$. Nótese que $\omega(t)$ es par, además con segunda derivada continua.

Ahora, para cualquier conjunto $\mathcal{A} \subset [1,N]$ se tiene

$$\sum_{-N\leq n\leq N} d_{\mathcal{A}}(n)\omega\left(\frac{n}{N}\right) = \sum_{m=0}^{10^6} \frac{1}{4m+3} \sum_{-N\leq n\leq N} d_{\mathcal{A}}(n)\cos\left(\frac{(4m+3)\pi n}{2N}\right)$$
$$= \sum_{m=0}^{10^6} \frac{\left|f_{\mathcal{A}}\left(\frac{4m+3}{4N}\right)\right|^2}{4m+3} \geq 0,$$

por otra parte

$$\int_0^1 \omega(t)dt = -0{,}10113813\ldots < 0 \quad \text{(ver Apéndice B.2, Algoritmo 3.).}$$

Lo que indica que $\omega(t)$ satisface las condiciones requeridas por el Lema 5. Sólo resta encontrar los demás valores necesarios. Por un lado

$$\int_0^1 (\omega(t))^2dt = 0{,}079433707\ldots \quad \text{(ver Apéndice B.2, Algoritmo 3.)}$$

y de otro

$$\frac{\left(\int_0^1(\omega(t)dt)\right)^2}{\int_0^1(\omega(t))^2dt - \left(\int_0^1\omega(t)dt\right)^2} \approx 0{,}1478065854 > 0{,}1478064.$$

En consecuencia

$$c_\omega < \frac{4g-2}{1{,}1478064} < 1{,}744246(2g-1).$$

Por el Lema 5 se sigue

$$F(g,N) \lesssim \sqrt{1{,}74246(2g-1)N},$$

en particular

$$F(2,N) \lesssim \sqrt{5{,}2274N},$$

como se quería demostrar. ■

Nótese que, la cota superior para $F(g,N)$ depende de la función que se escoja, un nuevo problema es encontrar la función adecuada. Gang Yu hace referencia a una pequeña mejora del resultado anterior.

Teorema 4. *Para todo $g \geq 2$, se tiene*

$$F(g,N) \lesssim \sqrt{1{,}74217(2g-1)N}.$$

Demostración. La demostración de este teorema es análoga a la del anterior, se debe establecer si la nueva función cumple con las condiciones requeridas. Sea

$$\sum_{m=0}^{1000} \frac{1}{4m+3,0126} \cos\left(\frac{(4m+3{,}0126)\pi t}{2}\right),$$

la serie de Fourier de una función $\omega(t)$.

Es sencillo ver que $\omega(x)$ es par, su segunda derivada es continua en $[-1,1]$ y $\sum_{-N\leq n\leq N} d_{\mathcal{A}}(n)\omega\left(\frac{n}{N}\right) \geq 0$. Haciendo los cálculos correspondientes, se obtiene el resultado deseado. ■

Es de apreciar que la función utilizada en esta demostración, es una modificación de la que se usó para demostrar el Teorema 3.

Capítulo 4

Conclusiones

En este capítulo se resumen los resultados más importantes descritos en el presente trabajo y obtenidos por diferentes investigadores que trabajan en el estudio de los *conjuntos* $B_2[g]$. También se hace una comparación entre las cotas encontradas, se plantean interrogantes y trabajos futuros.

4.1. Resultados importantes

1. Un problema abierto sobre los conjuntos $B_2[g]$ es decidir si $\lim_{N\to\infty} \frac{F(g,N)}{\sqrt{N}}$ existe, y si existe, determinar su valor. Hasta ahora, gracias a las investigaciones de Erdös–Turan, sólo se conoce que el valor de éste límite es 1 para los conjuntos de Sidon, suerte que no se ha tenido tenido para $g \geq 2$, pero en la actualidad, investigadores como Been Green, Gang Yu, Javier Cilleruelo y Carlos Trujillo, trabajan en encontrar una solución satisfactoria a este problema.

2. El esquema utilizado para tratar de encontrar el valor del límite anteriormente descrito es el mismo que se siguió para los conjuntos de Sidon, por esto hay varios investigadores trabajando en acotar $F(g,N)$ tanto superior como inferiormente. Para encontrar cotas inferiores se realizan buenas construcciones de conjuntos $B_2[g]$, en tanto que para las cotas superiores, actualmente se usan argumentos combinatorios. Cuando la cota inferior coincida con el valor de la cota superior, entonces se tendrá a la mano la solución.

3. Particularmente en éste trabajo de grado se estudia la función:

$$\sigma(g) = \limsup_{N\to\infty} \frac{F(g,N)}{\sqrt{N}},$$

donde $F(g,N)$ denota el cardinal más grande del conjunto $B_2[g]$ contenido en $[1,N]$. En otras palabras, se ha concentrado en estudiar la forma en que se obtienen cotas superiores para $F(g,N)$, especialmente las obtenidas por Gang Yu en [1] y [2]. Específicamente él prueba que:

$$\sigma(g) \leq \sqrt{3{,}2g} \quad (1)$$

y

$$\sigma(g) \leq \sqrt{1{,}74246\,(2g-1)}. \quad (2)$$

4. Los resultados anteriores mejoran los encontrados por Been Green en [3] para conjuntos $B_2[g]$, esto nos acerca más a la idea de encontrar la solución al problema. Al leer éste trabajo de grado pueden surgir varios interrogantes sobre las cotas encontradas, como por ejemplo: ¿Por qué Gang Yu encuentra dos cotas diferentes para $F(g,N)$?, ¿ Cuál es la diferencia entre éstas cotas?. Al parecer, ellas tienen algo en común, ambas determinan una buena cota para para $F(g,N)$, pero ¿Cuál de las dos es la mejor opción?, en busca de respuesta a las anteriores preguntas, en la Tabla 4.1 se analiza (1) y (2) para algunos valores de g,

g	(1)	(2)
2	$\sqrt{6,4}$	$\sqrt{5,2274}$
4	$\sqrt{12,8}$	$\sqrt{12,19}$
5	$\sqrt{16}$	$\sqrt{15,68}$
6	$\sqrt{19,2}$	$\sqrt{19,16}$
7	$\sqrt{22,4}$	$\sqrt{22,65}$
8	$\sqrt{25,6}$	$\sqrt{26,13}$

Tabla 4.1: Comparación de (1) y (2)

del cual se deduce que (2) es mejor opción que (1) para $g \leq 6$; esto es, (1) es buena cota para g grande, mientras que (2) es mejor cuando g es pequeño. Otra pregunta que surge al ver las mejoras obtenidas de $\sigma(g)$ es: ¿Hasta qué punto se puede mejorar?, no se tiene una respuesta inmediata, ni argumentos para suponerla, sólo se espera poder conocer el resultado mas adelante.

5. En las demostraciones de los resultados principales de los dos artículos, se puede apreciar que los programas de cálculo computacionales prestan una gran ayuda. Una pregunta que surge es ¿Utilizando un paradigma distinto de programación, se puede encontrar una función que mejore las cotas para $F(g,N)$?

6. Actualmente, para conjuntos $B_2[2]$ la mejor cota inferior es $\frac{4}{\sqrt{7}}$, es decir

$$1{,}5118 \approx \frac{4}{\sqrt{7}} \leq \liminf_{N\to\infty} \frac{F(2,N)}{\sqrt{N}},$$

resultado obtenido por C. Trujillo, G. Escobar y O. Zemanate en [7]. También demuestran que mediante construcciones similares a las suyas, no es posible mejorar ésta cota. Vale la pena mencionar que los autores en [7] recomiendan, en términos de mejorar su cota inferior, encontrar métodos para construir conjuntos $B_2[2]$ que no dependan de conjuntos de Sidon. Por el lado de las cotas superiores Gang Yu en [2] prueba que

$$\limsup_{N\to\infty} \frac{F(2,N)}{\sqrt{N}} \leq \sqrt{5,2274} \approx 2,28635,$$

lo que evidencia que aún estamos lejos de resolver el problema cuando $g = 2$.

7. Otra pregunta interesante es ¿De qué modo puede mejorarse (1) y aplicando que técnica?, Gang Yu comenta en [1], que una manera de mejorar el Teorema 2, podría ser, reemplazar $\sigma(g)$ por $\sqrt{3,2g} - k(g)$, donde $k(g)$ es algún positivo que tiende a 0 cuando $g \to \infty$. Un nuevo problema sería encontrar una buena opción que sirva como $k(g)$.

4.2. Trabajos futuros

1. Durante el desarrollo del trabajo de grado, se presentó el interés por las técnicas que utiliza por Gang Yu para demostrar sus resultados principales, lo que llevó a estudiar sin profundizar, la técnica de Been Green en [3], quien también estudia las funciones $u(x)$ y $\omega(x)$. A diferencia de Gang Yu, él acotó inferiormente $M(\omega)$, mas aún, demostró que

$$M(\omega) > \frac{4}{7} = 0,5714\ldots \quad \text{para una función } u(x),$$

mientras que Gang Yu en [1] muestra que

$$M(\omega) < 0,5771 \quad \text{para una función} \quad u(x).$$

Como se puede apreciar, la diferencia entre ambas cotas no es mucha, lo que indica que la función $u(x)$ dada en [1] no puede mejorarse demasiado.

Gang Yu en [2] hace referencia a un preprint escrito por G. Martin y O'Bryant donde mejoran la constante en (1) a $3,1698$, esto tomando una función $\omega(x)$ distinta, lo que despierta curiosidad por saber de qué función se trata y que procedimiento siguen.

2. En la última parte de [1], el autor hace algunos comentarios adicionales, dentro de los que se destacan la formulación de dos conjeturas, que nacen de preguntas hechas con base a los trabajos realizados por el autor sobre cotas superiores para $\sigma(g)$. En mi búsqueda de aprender y comprender, me gustaría estudiar la primera Conjetura.

   Conjetura 1. *Sea $\varepsilon \in (0,1)$ un número fijo. Para cualquier $\mathcal{B} \subset [1,N]$, existe un subintervalo $\mathcal{I} \subset [1,2N]$ con $|\mathcal{I}| = L \gg N^{\varepsilon}$ tal que*

$$\sum_{n \in \mathcal{I} \cap \mathbb{Z}} r(n) \geq (2+o(1)) \frac{|\mathcal{B}|^2 L}{2N}.$$

4.3. Experiencia

El realizar un trabajo de grado, implica tiempo, dedicación, estudio, etc, pero la recompensa es grata. Tal vez, no entendía tan a fondo las palabras de mis directores 'Se madura matemáticamente', hoy puedo decir con orgullo que las comprendo y además, las comparto.

Al empezar, sólo tenia una idea lejana de lo que sería trabajar en éste proyecto, sabía que el cronograma de actividades presentado me llevaría mas tiempo del propuesto, pero eso me invitaba a trabajar más. Puedo dividir este proceso en varias etapas. Iniciamos con una revisión bibliográfica, espacio donde tuve la oportunidad de recordar y aprender nuevos conceptos matemáticos que fueron necesarios para poder abordar el trabajo de grado. Es importante también destacar que fue precisamente en esta etapa donde aprendí a usar el LaTeX en su ambiente TeXnicCenter, el cual es un software libre y constituye hoy por hoy el estándar internacional en la escritura de textos matemáticos. Fue justamente con este paquete que elaboré el anteproyecto del trabajo de grado, las Notas borrador del cursillo que ofrecimos en ALTENCOA4-2010 y el documento final.

La segunda etapa del proyecto fue enriquecedora porque en ella se hicieron diversas cosas; desde compartir ideas con compañeros y profesores en un seminario de estudio de Análisis de Fourier, aprender a leer e interpretar lo que quiere transmitir un autor con su artículo o libro, hasta participar en dos congresos matemáticos nacionales. En el desarrollo siempre se encuentran tropiezos, algunos como no entender lo que el autor quiere dar a conocer, pero hay que llenarse de paciencia para seguir adelante y no desfallecer.

Las experiencias son muchas, de las cuales destaco la participación como ponente en dos eventos matemáticos y el seminario de estudio de Análisis de Fourier. Los primeros me dieron la oportunidad de ver nuevos horizontes matemáticos y lo más importante de todo, dar a conocer lo que se está estudiando en nuestro grupo. El segundo me permitió estudiar, preparar, exponer, preguntarme y equivocarme, porque soy consciente de que me equivoqué muchas veces, pero tuve la fortuna de contar con personas que supieron asesorarme, más que un seminario, fueron unos meses de constante aprendizaje en todo sentido.

Este documento es la culminación de todo un proceso, que junto con mis dos pilares Jhon Jairo Bravo y Carlos Alberto Trujillo trabajamos paso a paso, no fue sencillo, pero se lograron los objetivos propuestos y un poco más. Quiero terminar diciendo que ‘Maduré’, aprendí mucho y me siento capacitada para seguir.

Apéndice A

La función convolución

En ésta primera parte del apéndice, se profundiza el estudio de la función convolución siguiendo la misma idea que en las Notas del Capítulo 2, esto es, relacionar dicha función con los conjuntos $B_2[g]$.

A.1. Ejemplos y otros casos

Ejemplo 6. *Sea* $\mathcal{A} = \{0,1,3,4,6\}$*, entonces*

$$(\mathcal{A}*\mathcal{A}*\mathcal{A})(x) = (\mathcal{A}*(\mathcal{A}*\mathcal{A}))(x) = \sum_{y\in\mathcal{A}} \mathcal{A}(y)(\mathcal{A}*\mathcal{A})(x-y) = \sum_{y\in\mathcal{A}} \mathcal{A}(y) \sum_{z\in\mathcal{A}} \mathcal{A}(z)\mathcal{A}(x-y-z),$$

luego:

$$(\mathcal{A}*\mathcal{A}*\mathcal{A})(0) = \sum_{y\in\mathcal{A}} \mathcal{A}(y) \sum_{z\in\mathcal{A}} \mathcal{A}(z)\mathcal{A}(0-y-z)$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{y\in\mathcal{A}} \mathcal{A}(y)\left[\mathcal{A}(0)\mathcal{A}(-y)+\mathcal{A}(1)\mathcal{A}(-y-1)+\mathcal{A}(3)\mathcal{A}(-y-3)\right]\\
&+ \sum_{y\in\mathcal{A}} \mathcal{A}(y)\left[\mathcal{A}(4)\mathcal{A}(-y-4)+\mathcal{A}(6)\mathcal{A}(-y-6)\right]\\
&= \mathcal{A}(0)\mathcal{A}(0)\mathcal{A}(0)+\mathcal{A}(0)\mathcal{A}(1)\mathcal{A}(-1)+\mathcal{A}(0)\mathcal{A}(3)\mathcal{A}(-3)+\mathcal{A}(0)\mathcal{A}(4)\mathcal{A}(-4)\\
&+\mathcal{A}(0)\mathcal{A}(6)\mathcal{A}(-6)+\mathcal{A}(1)\mathcal{A}(0)\mathcal{A}(-1)+\mathcal{A}(1)\mathcal{A}(1)\mathcal{A}(-2)+\mathcal{A}(1)\mathcal{A}(3)\mathcal{A}(-4)\\
&+\mathcal{A}(1)\mathcal{A}(4)\mathcal{A}(-5)+\mathcal{A}(1)\mathcal{A}(6)\mathcal{A}(-7)+\mathcal{A}(3)\mathcal{A}(0)\mathcal{A}(-3)+\mathcal{A}(3)\mathcal{A}(1)\mathcal{A}(-4)\\
&+\mathcal{A}(3)\mathcal{A}(3)\mathcal{A}(-6)+\mathcal{A}(3)\mathcal{A}(4)\mathcal{A}(-7)+\mathcal{A}(3)\mathcal{A}(6)\mathcal{A}(-9)+\mathcal{A}(4)\mathcal{A}(0)\mathcal{A}(-4)\\
&+\mathcal{A}(4)\mathcal{A}(1)\mathcal{A}(-5)+\mathcal{A}(4)\mathcal{A}(3)\mathcal{A}(-7)+\mathcal{A}(4)\mathcal{A}(4)\mathcal{A}(-8)+\mathcal{A}(4)\mathcal{A}(6)\mathcal{A}(-10)\\
&+\mathcal{A}(6)\mathcal{A}(0)\mathcal{A}(-6)+\mathcal{A}(6)\mathcal{A}(1)\mathcal{A}(-7)+\mathcal{A}(6)\mathcal{A}(3)\mathcal{A}(-9)+\mathcal{A}(6)\mathcal{A}(4)\mathcal{A}(-10)\\
&+\mathcal{A}(6)\mathcal{A}(6)\mathcal{A}(-12) = 1.
\end{aligned}$$

$$(\mathcal{A}*\mathcal{A}*\mathcal{A})(4) = \sum_{y\in\mathcal{A}} \mathcal{A}(y) \sum_{z\in\mathcal{A}} \mathcal{A}(z)\mathcal{A}(4-y-z)$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{y\in\mathcal{A}} \mathcal{A}(y)\left[\mathcal{A}(0)\mathcal{A}(4-y)+\mathcal{A}(1)\mathcal{A}(3-y)+\mathcal{A}(3)\mathcal{A}(1-y)\right]\\
&+ \sum_{y\in\mathcal{A}} \mathcal{A}(y)\left[\mathcal{A}(4)\mathcal{A}(-y)+\mathcal{A}(6)\mathcal{A}(-2-y)\right]\\
&= \mathcal{A}(0)\mathcal{A}(0)\mathcal{A}(4)+\mathcal{A}(0)\mathcal{A}(1)\mathcal{A}(3)+\mathcal{A}(0)\mathcal{A}(3)\mathcal{A}(1)+\mathcal{A}(0)\mathcal{A}(4)\mathcal{A}(0)\\
&+\mathcal{A}(0)\mathcal{A}(16)\mathcal{A}(-2)+\mathcal{A}(1)\mathcal{A}(0)\mathcal{A}(3)+\mathcal{A}(1)\mathcal{A}(1)\mathcal{A}(2)+\mathcal{A}(1)\mathcal{A}(3)\mathcal{A}(0)\\
&+\mathcal{A}(1)\mathcal{A}(4)\mathcal{A}(-1)+\mathcal{A}(1)\mathcal{A}(6)\mathcal{A}(-3)+\mathcal{A}(3)\mathcal{A}(0)\mathcal{A}(1)+\mathcal{A}(3)\mathcal{A}(1)\mathcal{A}(0)\\
&+\mathcal{A}(3)\mathcal{A}(3)\mathcal{A}(-2)+\mathcal{A}(3)\mathcal{A}(4)\mathcal{A}(-3)+\mathcal{A}(3)\mathcal{A}(6)\mathcal{A}(-5)+\mathcal{A}(4)\mathcal{A}(0)\mathcal{A}(0)\\
&+\mathcal{A}(4)\mathcal{A}(1)\mathcal{A}(-1)+\mathcal{A}(4)\mathcal{A}(3)\mathcal{A}(-3)+\mathcal{A}(4)\mathcal{A}(4)\mathcal{A}(-4)+\mathcal{A}(4)\mathcal{A}(6)\mathcal{A}(-6)\\
&+\mathcal{A}(6)\mathcal{A}(0)\mathcal{A}(-2)+\mathcal{A}(6)\mathcal{A}(1)\mathcal{A}(-3)+\mathcal{A}(6)\mathcal{A}(3)\mathcal{A}(-5)+\mathcal{A}(6)\mathcal{A}(4)\mathcal{A}(-6)\\
&+\mathcal{A}(6)\mathcal{A}(6)\mathcal{A}(-8) = 9.
\end{aligned}$$

Esto es, hay 9 *triplas* $(a,b,c)\in\mathcal{A}\times\mathcal{A}\times\mathcal{A}$ *tales que* $4=a+b+c$*, mas aún, en el procedimiento pueden verse cuáles son*

$$(\mathcal{A}*\mathcal{A}*\mathcal{A})(19) = \sum_{y\in\mathcal{A}} \mathcal{A}(y) \sum_{z\in\mathcal{A}} \mathcal{A}(z)\mathcal{A}(19-y-z)$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{y\in\mathcal{A}} \mathcal{A}(y)\left[\mathcal{A}(0)\mathcal{A}(19-y)+\mathcal{A}(1)\mathcal{A}(18-y)+\mathcal{A}(3)\mathcal{A}(16-y)\right]\\
&+ \sum_{y\in\mathcal{A}} \mathcal{A}(y)\left[\mathcal{A}(4)\mathcal{A}(15-y)+\mathcal{A}(6)\mathcal{A}(13-y)\right]\\
&= \mathcal{A}(0)\mathcal{A}(0)\mathcal{A}(19)+\mathcal{A}(0)\mathcal{A}(1)\mathcal{A}(18)+\mathcal{A}(0)\mathcal{A}(3)\mathcal{A}(16)+\mathcal{A}(0)\mathcal{A}(4)\mathcal{A}(15)\\
&+\mathcal{A}(0)\mathcal{A}(6)\mathcal{A}(13)+\mathcal{A}(1)\mathcal{A}(0)\mathcal{A}(18)+\mathcal{A}(1)\mathcal{A}(1)\mathcal{A}(17)+\mathcal{A}(1)\mathcal{A}(3)\mathcal{A}(15)\\
&+\mathcal{A}(1)\mathcal{A}(4)\mathcal{A}(14)+\mathcal{A}(1)\mathcal{A}(6)\mathcal{A}(12)+\mathcal{A}(3)\mathcal{A}(0)\mathcal{A}(16)+\mathcal{A}(3)\mathcal{A}(1)\mathcal{A}(15)\\
&+\mathcal{A}(3)\mathcal{A}(3)\mathcal{A}(13)+\mathcal{A}(3)\mathcal{A}(4)\mathcal{A}(12)+\mathcal{A}(3)\mathcal{A}(6)\mathcal{A}(10)+\mathcal{A}(4)\mathcal{A}(0)\mathcal{A}(15)\\
&+\mathcal{A}(4)\mathcal{A}(1)\mathcal{A}(4)+\mathcal{A}(4)\mathcal{A}(3)\mathcal{A}(12)+\mathcal{A}(4)\mathcal{A}(4)\mathcal{A}(11)+\mathcal{A}(4)\mathcal{A}(6)\mathcal{A}(9)\\
&+\mathcal{A}(6)\mathcal{A}(0)\mathcal{A}(13)+\mathcal{A}(6)\mathcal{A}(1)\mathcal{A}(12)+\mathcal{A}(6)\mathcal{A}(3)\mathcal{A}(10)+\mathcal{A}(6)\mathcal{A}(4)\mathcal{A}(9)\\
&+\mathcal{A}(6)\mathcal{A}(6)\mathcal{A}(7) = 0.
\end{aligned}$$

Así, no existe ninguna tripla $(a,b,c)\in\mathcal{A}\times\mathcal{A}\times\mathcal{A}$ *tal que* $19=a+b+c$*.*

Al igual que con $(\mathcal{A}*\mathcal{A})(x)$*,* $|\mathcal{A}+\mathcal{A}+\mathcal{A}|$ *se relaciona con* $(\mathcal{A}*\mathcal{A}*\mathcal{A})(x)$*.*

Siguiendo las ideas anteriores, se trata de establecer que cuentan otros casos.

$$
\begin{aligned}
(\mathcal{A}*\mathcal{A}*\breve{\mathcal{A}}) &= \sum_{y\in\mathbb{Z}} \mathcal{A}(y)\left[(\mathcal{A}*\breve{\mathcal{A}})(x-y)\right] = \sum_{y\in\mathbb{Z}} \mathcal{A}(y)\left[\sum_{z\in\mathbb{Z}} \mathcal{A}(z)\breve{\mathcal{A}}(x-y-z)\right] \\
&= \sum_{y\in\mathbb{Z}} \mathcal{A}(y) \sum_{z\in\mathbb{Z}} \mathcal{A}(z)\mathcal{A}(-x+y+z).
\end{aligned}
$$

Éstas sumas tienen sentido si existen elementos $a,b,c\in\mathcal{A}$ tales que:

$$
a=y,\ b=z \text{ y } c=-x+y+z, \quad \text{de donde} \quad x=a+b-c,
$$

esto es, $(\mathcal{A}*\mathcal{A}*\breve{\mathcal{A}})(x)$ cuenta soluciones de la ecuación $x=a+b-c$, donde $(a,b,c)\in\mathcal{A}\times\mathcal{A}\times\mathcal{A}$. Luego, $(\mathcal{A}+\mathcal{A}-\mathcal{A})(x)$ se relaciona con $\mathcal{A}+\mathcal{A}-\mathcal{A}$.

Así mismo, se relacionan:

- $(\mathcal{A}*\breve{\mathcal{A}}*\mathcal{A})(x)$ con $\mathcal{A}-\mathcal{A}+\mathcal{A}$.
- $(\breve{\mathcal{A}}*\mathcal{A}*\mathcal{A})(x)$ con $-\mathcal{A}+\mathcal{A}+\mathcal{A}$.
- $(\breve{\mathcal{A}}*\breve{\mathcal{A}}*\mathcal{A})(x)$ con $-\mathcal{A}-\mathcal{A}+\mathcal{A}$.
- $(\breve{\mathcal{A}}*\mathcal{A}*\breve{\mathcal{A}})(x)$ con $-\mathcal{A}+\mathcal{A}-\mathcal{A}$.
- $(\mathcal{A}*\breve{\mathcal{A}}*\breve{\mathcal{A}})(x)$ con $\mathcal{A}-\mathcal{A}-\mathcal{A}$.
- $(\breve{\mathcal{A}}*\breve{\mathcal{A}}*\breve{\mathcal{A}})(x)$ con $-\mathcal{A}-\mathcal{A}-\mathcal{A}$.

Nótese que la función $\breve{}$ antepone el signo $-$ al conjunto $\mathcal{A}$, lo que permite no sólo estudiar conjuntos suma, sino también conjuntos diferencia.

Apéndice B

Algoritmos en MuPAD

En ésta parte se describen en detalle los algoritmos, implementados en MuPAD, que utilizamos para verificar varios cálculos(Integrales definidas, sumas) que presenta Gang Yu en algunas demostraciones del Capítulo 3. Como puede notarse dichos cálculos son tediosos a la hora de hacerlos manualmente, pero con la ayuda de programas como MuPAD, los resultados se obtienen de manera eficiente.

B.1. Una cota superior para conjuntos $B_2[g]$

Se presentan los cálculos auxiliares utilizados en la demostración del Lema 4.

Algoritmo 1 (Valor $M(\omega)$).

```
valorM(w)1:=proc(h):
 local aux,u,w,M(w);
  begin
    aux:=numeric::int(h(x),x=0..1);          (1)
    u:=h/aux;                                (2)
    w:=int(u(t)*u(t+abs(x)),t=0..1-abs(x)):  (3)
    M(w):=numeric::int((w)ˆ2,x=-1..1);       (4)
  end_proc;
```

Entrada: La función h.

```
h:=x->(1+0.0000028*exp(60*(x-0.5)ˆ2)+3.4*(x-0.5)ˆ2):
```

Descripción: El Algoritmo 1 hace los siguientes operaciones:

(1) Calcula el valor de $\int_0^1 h(x)dx$.

(2) Evalúa la función u.

(3) Evalúa la función ω.

(4) Calcula el valor de $M(\omega)$.

Salida:

$$\begin{cases} 1,599858625 \quad (a) \\ 0{,}6250552295 \cdot (x \to 1 + 0{,}0000028 \cdot e^{60*(x-0{,}5)^2} + 3{,}4 \cdot (x-0{,}5)^2) \quad (b) \\ 0{,}5770672591 \quad (c). \end{cases}$$

Los valores relacionados anteriormente corresponden a:

(a) El valor de $\int_0^1 h(x)dx$, el cual muestra que la integral es diferente de 0.

(b) La función $u(x)$, para verificar observaciones planteadas en P_1.

(c) El valor $M(\omega)$, que permite demostrar el Lema 4.

Se puede apreciar que $u(x) \geq 0$ para todo $x \in [0,1]$, de valor real y de clase C^2 en $[0,1]$.

En la Nota 4 de la página 48, Gang Yu propone otra función $u(x)$ definida por

$$u(x) = \frac{6}{11}\left(1 + 10\left(x - \frac{1}{2}\right)^2\right).$$

Con un código parecido al anterior, se puede verificar los cálculos que el autor del artículo no presenta.

Algoritmo 2. (Otro valor $M(\omega)$)

```
valorM(w)2:=proc(u):
 local aux,u,w,M(u);
  begin
    aux:=int(u(x),x=0..1);                  (1)
    w:=int(u(t)*u(t+abs(x)),t=0..1-abs(x)): (2)
    M(w):=numeric::int((%)^2,x=-1..1);      (3)
  end_proc;
```

Entrada: La función u.

```
u:=x->((6/11)*(1+10*(x-0.5)^2)):
```

Descripción: El Algoritmo 2 realiza las siguientes operaciones:

(1) Calcula el valor $\int_0^1 u(x)dx$.

(2) Evalúa la función ω.

(3) Calcula $M(\omega)$.

Salida:

$$\begin{cases} 1{,}0 & (a) \\ 0{,}5997762909. & (b) \end{cases}$$

Los anteriores valores corresponden a :

(a) El valor $\int_0^1 u(x)dx$, mostrando que es 1.

(b) El valor $M(\omega)$.

$M(\omega) = 0{,}5997762909 < 0{,}5998$, reemplazando éste valor en la demostración del Teorema 2 se llega a que $c \leq 3{,}2207$.

B.2. Una nota sobre conjuntos $B_2[g]$

En la demostración del Teorema 3 en la página 48, se necesita calcular algunos valores. El siguiente algoritmo permite calcularlos

Algoritmo 3 (Demostración teorema principal–[2])

```
teoprinc:=proc(w):
 local w,aux,aux1,aux2,aux3;
  begin
   aux:=int(cos((4*m+3)*PI*t/2),t= 0..1):                (1)
   aux1:=numeric::sum(1/(4*m+3)*aux,m=0..1000000);      (2)
   aux2:=int((sum(cos((4*m+3)*PI*t/2)/(4*m+3),m=0..10^6))^2,t=0..1); (3)
   aux3:=aux1^2/(aux2-aux1^2);                           (4)
  end_proc;
```

Entrada: La función ω.

```
w:=t->sum(cos((4*m+3)*PI*t/2)/(4*m+3),m=0..10ˆ6):
```

Descripción: El Algoritmo 3 calcula

(1) El valor de la integral $\int_0^1 \cos\left(\frac{(4m+3)\pi t}{2}\right) dt$.

(2) El valor de la integral $\int_0^1 \omega(t)dt$.

(3) El valor de la suma $\sum_{-N\leq n\leq N} d_{\mathcal{A}}(n)\omega(t)$.

(4) El valor $\dfrac{\left(\int_0^1(\omega(t)dt)\right)^2}{\int_0^1(\omega(t))^2dt-\left(\int_0^1\omega(t)dt\right)^2}$.

Salida:

$$\begin{cases} -0{,}1011381379 & (a) \\ 0{,}07943370774 & (b) \\ 0{,}1478065854. & (c) \end{cases}$$

Los anteriores valores corresponden a:

(a) El valor de $\int_0^1 \omega(t)dt$, verificando que es menor que 0.

(b) El valor de $\sum_{-N\leq n\leq N} d_{\mathcal{A}}(n)\omega(t)$, corroborando que es mayor o igual a 0.

(c) El valor $\dfrac{\left(\int_0^1(\omega(t)dt)\right)^2}{\int_0^1(\omega(t))^2dt-\left(\int_0^1\omega(t)dt\right)^2}$.

Bibliografía

[1] G. Yu. *An upper bound for $B_2[g]$ sets*. Journal of Number Theory, Vol 122(211–220), 2007. 1.2, 3, 2, 3, 7, 1, 2

[2] G. Yu. *A note on $B_2[g]$ sets*. Integers: Electronic journal combinatorial number theory, Vol 8(No.1, A58), 2008. 1.2, 3, 3.2, 3, 3, 6, 1, B.2

[3] B. Green. *The number of squares and $B_2[g]$ sets*. Acta Arith, Vol 100(No.4, 365–390), 2001. 1.2, 3, 3.1, 3.2, 4, 1

[4] J. Cilleruelo. *An upper bound for $B_2[2]$ sequences*. Journal of Combinatorial Theory, Series A, Vol 89(141–144), 2000. 1.2

[5] J. Cilleruelo, I. Ruzsa and C. Trujillo. *Upper and lower bounds for finite $B_h[g]$ sequences*. Journal Number Theory, Vol 97(26–34), 2002. 1.2

[6] J. Bravo. *Transformada de Fourier sobre $\mathbb{Z}_N$ y conjuntos $B_2^-[g]$*. Matemáticas: Enseñanza Universitaria, Vol XVI(No.2, 103–106), 2008.

[7] C. Trujillo, G. Escobar y O. Zemanate. *Construcción de conjuntos $B_2[2]$*. Matemáticas: Enseñanza Universitaria, Vol XII(No.1, 43–50), 2004. 6

[8] J. Bravo y C. Trujillo. *Análisis de Fourier sobre $\mathbb{Z}_N$ y conjuntos B_h*. Preprint.

[9] J. Bravo. *Análisis de Fourier finito y conjuntos $B_h[g]$*. Tesis de Maestría, 2006.

[10] A. Terras. *Fourier analysis on finite groups and aplications*. Cambridge University Press, second edition, 1999.

[11] P. O'Neil. *Matemáticas avanzadas para ingeniería*. International Thomson Editores S.A., quinta edición, 2004.

[12] A. Deitmar. *A first course in harmonic analysis*. Springer, second edition, 2002. *

[13] J. Palechor. *Una cota superior para conjuntos* $B_2[g]$. Poster presentado en el XVII Congreso Colombiano de Matemáticas, 2009.