UNA INTRODUCCIÓN AL GRADIENTE, LA DIVERGENCIA Y EL OPERADOR LAPLACIANO SOBRE VARIEDADES RIEMANNIANAS

FERNANDO ARNULFO ZUÑIGA ARGOTE

UNIVERSIDAD DEL CAUCA
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES, EXACTAS Y DE LA EDUCACIÓN
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
POPAYÁN
2011

UNA INTRODUCCIÓN AL GRADIENTE, LA DIVERGENCIA Y EL OPERADOR LAPLACIANO SOBRE VARIEDADES RIEMANNIANAS

FERNANDO ARNULFO ZUÑIGA ARGOTE

PROPUESTA DE TRABAJO DE GRADO
En la modalidad de seminario presentado como requisito parcial para optar al título de matemático

Director
Mg. Héctor Efrén Guerrero Mora

UNIVERSIDAD DEL CAUCA
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES, EXACTAS Y DE LA EDUCACIÓN
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
POPAYÁN
2011

Nota de aceptación

Director

Mg. Héctor Efrén Guerrero Mora

Comité evaluador

Dr. Servio Tulio Pérez

Mg. Elkin Dário Cárdenas

Fecha de sustentación: Popayán, 11 de marzo de 2011

Dedico este trabajo de grado a mis padres Arnulfo Zúñiga Ortiz y Luz Marina Argote por su amor y apoyo incondicional.

AGRADECIMIENTOS

Doy gracias a Dios por darme el privilegio de terminar esta etapa de mi vida, porque siempre me ofrece los mejores caminos y me permite estar rodeado de tantas personas maravillosas; a mis padres por su sustento incondicional, porque siempre me brindan su mano amiga y me han orientado cada vez que lo he necesitado; a mi hermano Cristian René por brindarme siempre su compañia en cada momento de mi vida; a mi esposa Diana Velasco, por todos los momentos compartidos, por los ánimos y cariño que me da desde el primer momento y siempre; a mi hija Isabella quien es la luz de mis ojos, que significa lo mejor que me ha pasado y que tengo en la vida.

Agradecer hoy y siempre a mi familia porque a pesar de no estar presentes físicamente, se que procuran mi bienestar desde mi pueblo, Bolivar Cauca, y esta claro que si no fuese por el esfuerzo realizado por ellos, mis estudios de pregrado no hubiesen sido posibles. A mi tia Imelda, mi hermano Camilo y mis sobrinitos Juan Camilo y Cristian David, porque a pesar de la distancia, el ánimo, apoyo y alegría que me brindan son la fortaleza necesaria para seguir adelante.

Los más sinceros agradecimientos al Mg. Héctor Efrén Guerrero Mora, director de mi trabajo de grado, maestro ejemplo para cada uno de los estudiantes de nuestro programa, quien con sus enseñanzas, dedicación, paciencia me ha motivado a ser un verdadero profesional. Agradezco a cada uno de los profesores del departamento de física y matemáticas; especialmente al profesor Servio Tulio Pérez, por la colaboración brindada durante todo el trabajo, además de sus enseñanzas de vida que me fortalecieron como persona; al profesor Elkin Cárdenas, por brindareme su tiempo y colaboración.

En general quisiera agradecer a todas y cada una de las personas que han vivido conmigo la realización de este trabajo de grado, con sus altos y bajos y que no necesito nombrar porque tanto ellas como yo sabemos que desde los más profundo de mi corazón les agradezco el haberme brindado todo el apoyo, ánimo y sobre todo cariño y amistad.

Tabla de contenido

Introducción **VIII**

Notaciones **XI**

1. Preliminares **1**

1.1. Variedades diferenciables 1

1.2. Vector tangente y espacio tangente 9

1.3. Inmersiones e inmersiones más profundas 20

1.4. Otros ejemplos de variedades. 24

1.5. Acción discontinua de un grupo sobre una variedad 30

1.6. Campo de vectores; corchetes 34

2. Topología y métricas Riemannianas **41**

2.1. Particiones de la unidad 42

2.2. Métricas Riemannianas 48

3. Cálculo en variedades Riemannianas **58**

3.1. Conexiones afines 58

3.2. Conexión Riemanniana 64

3.3. Geodésicas y aplicación exponencial 68

3.4. Gradiente de una función sobre una variedad Riemanniana 80

3.5. Divergencia de un campo sobre una variedad Riemanniana 84

3.6. Laplaciano de una función sobre una variedad Riemanniana 87

Bibliografía **89**

Introducción

La geometría Riemanniana es un desenvolvimiento natural de la geometría diferencial, pues uno de los axiomas de la definición de variedad diferenciable es un resultado importante de la teoría de superficies regulares, el cual dice que el cambio de coordenadas es un difeomorfismo. Gracias a este axioma se puede introducir el concepto de diferenciabilidad, es decir hablar de funciones diferenciables en variedades y aplicar ahí los métodos del cálculo diferencial. El trabajo una introducción al gradiente, la divergencia y el operador laplaciano sobre variedades Riemannianas tiene como eje principal la geometría Riemanniana, así como algunos conceptos de análisis y topología, que son de gran importancia para el desarrollo de esta monografía. En particular, se pretende con estas herramientas redefinir los operadores gradiente, divergencia y laplaciano en espacios más abstractos que $\mathbb{R}^n$, más concretamente las variedades Riemannianas. Es de notar que éstos operadores son de gran importancia, dado que con base a estos se han desarrollado diversas aplicaciones en el campo de la física, por ejemplo en las áreas; mecánica clásica, teoría electromagnética, ondas, termodinámica, Cosmología [1], entre otras. La relación de la geometría Riemenniana con el campo de la física, han hecho de ella un instrumento indispensable en la solución de problemas, por ejemplo el laplaciano aparece en múltiples contextos como la teoría del potencial, la propagación de ondas, la conducción del calor, la distribución de tensiones en un sólido deformable, etc. De todas estas situaciones ocupa un lugar destacado en la electrostática y en la mecánica cuántica.

El ejemplo mas trivial que se tiene de variedad diferenciable es precisamente el espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$, Por esta razón, en el primer capítulo se da una motivación a las variedades diferenciables con las superficies k-dimensionales de $\mathbb{R}^n$. En el transcurso de la monografía se toma como ejemplo no trivial de variedad diferenciable el espacio de las direcciones de $\mathbb{R}^{n+1}$ (espacio proyectivo real $P^n(\mathbb{R})$), se prueba que este espacio es una variedad Riemanniana y en particular se introduce una forma de medir longitudes de vectores tangentes sobre $P^2(\mathbb{R})$.

Existen diversas formas de dar la noción de variedad diferenciable, muchas de las cuales parten de la idea de espacio topológico o variedad topológica. Se prefiere introducir las estructuras diferenciables sobre un conjunto sin ninguna otra estructura adicional, tal y como se hace en los textos de R. Brickell y R.S. Clark y M. Do Carmo. Al introducir una estructura diferenciable en un conjunto M, ella induce de manera natural una topología en M. En el segundo capítulo Se estudia las propiedades más importantes de esta topología, sobre todo en lo referente a la separabilidad y numerabilidad de la variedad. En general, y puesto que una variedad diferenciable es localmente homeomorfa a un espacio euclídeo, todas las propiedades locales de $\mathbb{R}^n$ que involucren a conjuntos abiertos también se verifican en variedades. Por ejemplo, toda variedad es localmente conexa y localmente Hausdorff. Los resultados anteriores no pueden mejorarse, ya que es posible encontrar variedades diferenciables que no son Hausdorff. Sin embargo, para poder desarrollar un cálculo diferencial sobre variedades se necesita introducir el concepto de límite, y el axioma de Hausdorff es precisamente el que nos asegura la unicidad de dicho límite. Por esta razón, en muchas ocasiones se parte de un espacio topológico Hausdorff para dotarlo de una estructura diferenciable. Exigir esta propiedad es natural, ya que $\mathbb{R}^n$ la satisface y, en consecuencia, cualquier variedad $M \subset \mathbb{R}^n$, que esté dotada de la topología relativa, también la satisface.

En el segundo capítulo se justifica también la conveniencia de imponer ciertas restricciones topológicas a la variedad, más concretamente el axioma de separación T_2 (Hausdorff) y el segundo axioma de numerabilidad; entre las razones para aceptar estas restricciones, es fundamental garantizar la existencia de familias especiales de funciones diferenciables definidas en la variedad y con valores en $\mathbb{R}$, denominadas particiones diferenciables de la unidad, que resulta ser útil para construir objetos globales a partir de otros definidos localmente, más concretamente el concepto de métrica Riemanniana, entre otros.

En el tercer capítulo, se da una noción de paralelismo, introducida por Levi-Civita en 1927; posteriormente se define una derivación de campos de vectores a lo largo de curvas con ciertas propiedades (lo que se conoce como conexión afín). Esto permite construir una aplicación entre espacios tangentes denominada el transporte paralelo, que constituye una herramienta útil en Geometría Riemanniana. Nuestro interés en conexiones afines reside en el hecho de poder enunciar uno de los teoremas fundamentales de este capítulo, el cual afirma que la escogencia de una métrica Riemanniana en una variedad M determina univocamente una cierta conexión afín en M, llamada conexión de Levi-Civita (o Riemanniana) de M.

Fijada la terminología básica, se estudia dos de los conceptos fundamentales de geometría Riemanniana, a saber, geodésicas y aplicación exponencial. El hecho de que, para cada punto, la aplicación exponencial sea un difeomorfismo local permite crear una parametrización en un entorno del punto de la variedad, este sistema de coordenadas me garantiza la existencia de un referencial (local) geodésico, que es ventajoso a la hora de hacer cálculos sobre una variedad Riemanniana. Finalmente una forma de encarar el estudio de una variedad Riemanniana es por medio de los espacios de funciones, campos o formas que soporta. Sobre los espacios de funciones y campos actúan ciertos operadores diferenciales, a saber; el gradiente, la divergencia y el operador laplaciano, que permiten formular ecuaciones diferenciales que a su vez dan información sobre la variedad.

Notaciones

$\mathbb{R}$	campo ordenado de los números reales.
$\mathbb{R}^n$	$\{(x_1, x_2, ..., x_n) : x_i \in \mathbb{R},\ i = 1, ..., n\}$.
$\forall$	para todo.
$Int\ A$	interior del conjunto A.
R^c	complemento del conjunto R.
$\equiv$	Equivalencia en conjuntos.
$\sim$	Relación de equivalencia de conjuntos.
$\langle\ ,\ \rangle$	Métrica Riemanniana.
$\square$	indica el fin de una demostración.
$\chi(M)$	Conjunto de campos de vectores diferenciables sobre M.
$D(M)$	Conjunto de funciones diferenciables de valores reales definidas en M.

Capítulo 1

Preliminares

La noción de variedad diferenciable es necesaria para extender los métodos del cálculo diferencial a espacios más generales que $\mathbb{R}^n$ (especialmente se tiene en cuenta en esta monografia el espacio abstracto $P^n(\mathbb{R})$); en esta sección se veran los conceptos fundamentales de geometría Riemanniana que se desprenden de dicha definición, además de los ejemplos más importantes de variedades diferenciables, que sirven para ilustrar los conceptos. Las definiciones y algunas proposiciones se presentan de forma que estén autocontenidas, de tal manera que el lector pueda apreciar mejor el desarrollo del segundo y tercer capítulo donde se probarán los resultados centrales de este trabajo. La definición explicita de variedad diferenciable será presentada a continuación, esta será dada para una dimensión n cualquiera. Diferenciable significa siempre de clase C^∞.

1.1. Variedades diferenciables

Definición 1.1. *Una variedad diferenciable de dimensión n es un conjunto M con una familia de aplicaciones biunívocas $\mathbf{x}_\alpha : U_\alpha \subset \mathbb{R}^n \to M$ de abiertos U_α de $\mathbb{R}^n$ en M tales que:*

1. $\bigcup\limits_{\alpha} \mathbf{x}_\alpha(U_\alpha) = M$, $\alpha \in \Omega -$ *familia indizada*
2. *Para todo par de índices α y β, con $\mathbf{x}_\alpha(U_\alpha) \cap \mathbf{x}_\beta(U_\beta) = W \neq \phi$ los conjuntos ${\mathbf{x}_\alpha}^{-1}(W)$ y ${\mathbf{x}_\beta}^{-1}(W)$ son abiertos en $\mathbb{R}^n$ y las aplicaciones $\mathbf{x}_\beta^{-1} \circ \mathbf{x}_\alpha$ son difeomorfismos. (Ver*

figura 1.1)

3. *La familia $\{(U_\alpha, \mathbf{x}_\alpha)\}$ es maximal con respecto a las condiciones (1) y (2).*

El par $(U_\alpha, \mathbf{x}_\alpha)$, con $p \in \mathbf{x}_\alpha(U_\alpha)$ es llamado una parametrización o un sistema de coordenadas de M en p.
Una familia $\{(U_\alpha, \mathbf{x}_\alpha) \mid \alpha \in \Omega\}$ que satisface (1) y (2) es llamada una estructura diferenciable en M.

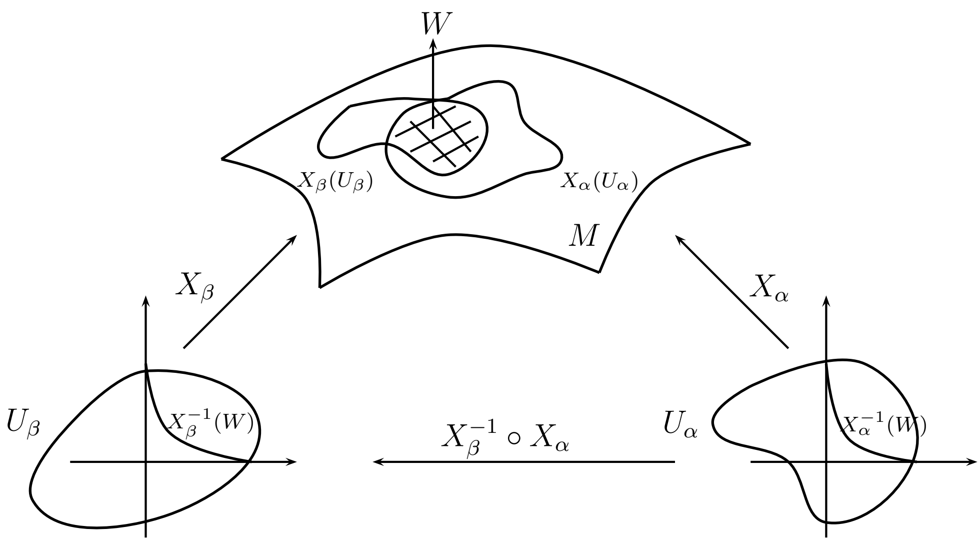

Figura 1.1: Interpretación geométrica de la parte (2), donde M es la variedad; $(U_\alpha, \mathbf{x}_\alpha)$, $(U_\beta, \mathbf{x}_\beta)$ son dos sistemas de coordenadas cuyos dominios tienen intersección W y las aplicaciones $\mathbf{x}_\beta^{-1} \circ \mathbf{x}_\alpha$ son difeomorfismos entre abiertos ${\mathbf{x}_\alpha}^{-1}(W)$ y ${\mathbf{x}_\beta}^{-1}(W)$ de $\mathbb{R}^n$ para todo α y β.

Observación 1.1. Una estructura diferenciable induce de manera natural una topología en M. En efecto, se define la topólogia $\Im$ en M de la forma más natural, así:

$$\Im = \left\{A \subset M \mid \mathbf{x}_\alpha^{-1}(A \cap \mathbf{x}_\alpha(U_\alpha)) \textit{ es un abierto de } \mathbb{R}^n, \textit{ para todo } \alpha\right\}.$$

Para demostrar que en verdad es una topología, es necesario probar:

1. $\Phi \in \Im$, puesto que $\mathbf{x}_\alpha^{-1}(\Phi \cap \mathbf{x}_\alpha(U_\alpha)) = \mathbf{x}_\alpha^{-1}(\Phi) = \Phi$ para todo α.
   $M \in \Im$, puesto que $\mathbf{x}_\alpha^{-1}(M \cap \mathbf{x}_\alpha(U_\alpha)) = \mathbf{x}_\alpha^{-1}(\mathbf{x}_\alpha(U_\alpha)) = U_\alpha$, por ser $\mathbf{x}_\alpha$ inyectiva y U_α es un abierto de $\mathbb{R}^n$ para todo α por definicion.

2. Sea $G = \{G_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\} \subset \Im$, donde Γ es un subconjunto de indices. Se debe probar que la $\bigcup G_\gamma$ con $\gamma \in \Gamma$ está en $\Im$. En efecto; $\mathbf{x}_\alpha^{-1}(\bigcup G_\gamma \cap \mathbf{x}_\alpha(U_\alpha)) = \mathbf{x}_\alpha^{-1}(\bigcup (G_\gamma \cap \mathbf{x}_\alpha(U_\alpha))) = \bigcup \mathbf{x}_\alpha^{-1}(G_\gamma \cap \mathbf{x}_\alpha(U_\alpha)) \in \Im$, puesto que $G_\gamma \in \Im$ para todo $\gamma \in \Gamma$ y la unión arbitraria de abiertos es un abierto.

3. Sea $\{A_i \mid i \in I\} \subset \Im$, I finito. Se prueba que la $\bigcap A_i$ con $i \in I$ esta en $\Im$. En efecto; $\mathbf{x}_\alpha^{-1}(\bigcap A_i \cap \mathbf{x}_\alpha(U_\alpha)) = \mathbf{x}_\alpha^{-1}(\bigcap (A_i \cap \mathbf{x}_\alpha(U_\alpha))) = \bigcap \mathbf{x}_\alpha^{-1}(A_i \cap \mathbf{x}_\alpha(U_\alpha)) \in \Im$, puesto que $A_i \in \Im$ para todo $i \in I$ y la intersección finita de abiertos es un abierto.

De (1), (2) y (3) se tiene que $\Im$ es una topología en M.

Observe que la topología está definida de tal modo que los conjuntos $\mathbf{x}_\alpha(U_\alpha)$ son abiertos y las aplicaciones $\mathbf{x}_\alpha$ son continuas. En el capítulo dos, es en realidad donde se hace uso de dicha topología. Por ahora se muestran algunos ejemplos de variedades diferenciables. El espacio euclidiano $\mathbb{R}^n$, con la estructura diferenciable dada por la identidad es un ejemplo trivial de variedad diferenciable. El siguiente es un ejemplo no trivial de variedad diferenciable, que se tiene en cuenta a lo largo de la monografía.

Ejemplo 1.1 (El espacio proyectivo real $P^n(\mathbb{R})$). Se indica por $P^n(\mathbb{R})$ el conjunto de las rectas de $\mathbb{R}^{n+1}$ que pasan por el origen $\mathbf{0} = (\mathbf{0}, ..., \mathbf{0}) \in \mathbb{R}^{\mathbf{n+1}}$; esto es, $P^n(\mathbb{R})$ es el conjunto de las direcciones de $\mathbb{R}^{n+1}$. (Ver figura 1.2) Se introduce una estructura diferenciable en $P^n(\mathbb{R})$, para ello se observa inicialmente que

$$P^n(\mathbb{R}) \equiv \frac{\mathbb{R}^{n+1} - \{\mathbf{0}\}}{\sim},$$

(ver figura 1.3) donde $\mathbf{0} = (\mathbf{0}, .., \mathbf{0}) \in \mathbb{R}^{\mathbf{n+1}}$ y $\sim$ es la siguiente relación de equivalencia: Sean $(x_1, ..., x_{n+1})$ y $(y_1, ..., y_{n+1})$ en $\mathbb{R}^{n+1}$;

$$(x_1, ..., x_{n+1}) \sim (y_1, ..., y_{n+1}) \ \textit{si, solo si, existe} \ \lambda \in \mathbb{R}, \ \lambda \neq 0$$

tal que

$$(x_1, ..., x_{n+1}) = \lambda(y_1, ..., y_{n+1}).$$

Los puntos de $P^n(\mathbb{R})$ son indicados por $[(x_1, ..., x_{n+1})]$. Por ejemplo, para $n = 1$:

$$\frac{\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}}{\sim} = \left\{[(x_1, x_2)] \mid (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}\right\},$$

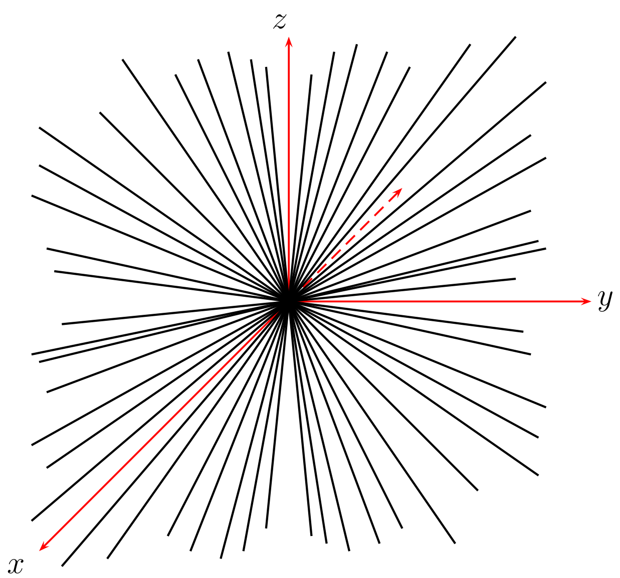

Figura 1.2: Interpretación geométrica para el caso $n = 2$; $P^2(\mathbb{R})$ es conjunto de las rectas de $\mathbb{R}^3$ que pasan por el origen $\mathbf{0} = (\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}) \in \mathbb{R}^\mathbf{3}$.

dado que para algún $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$ se tiene que
$[(x_1, x_2)] = \{(z_1, z_2) \mid (z_1, z_2) = \lambda(x_1, x_2)\} = \{\lambda(x_1, x_2) \mid \lambda \in \mathbb{R}, \ \lambda \neq 0\}$, lo cual es una recta que pasa por el origen, entonces

$$\frac{\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}}{\sim} \equiv P^1(\mathbb{R}).$$

Como $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$, sí se supone que $x_1 \neq 0$, se tiene

$$\begin{aligned} [(x_1, x_2)] &= \left[\left(1, \frac{x_2}{x_1}\right)\right], \ x_1 \neq 0 \\ &= [(1, y)]. \end{aligned}$$

Análogamente sí se escoge $x_2 \neq 0$, se tiene

$$\begin{aligned} [(x_1, x_2)] &= \left[\left(\frac{x_1}{x_2}, 1\right)\right], \ x_2 \neq 0 \\ &= [(z, 1)]. \end{aligned}$$

Sean:

$$\varphi_1 : \mathbb{R} \to P^1(\mathbb{R}); \ \textit{dada por} \ \varphi_1(y) = [(1, y)]$$

y

$$\varphi_2 : \mathbb{R} \to P^1(\mathbb{R}); \ \textit{dada por} \ \varphi_2(z) = [(z, 1)].$$

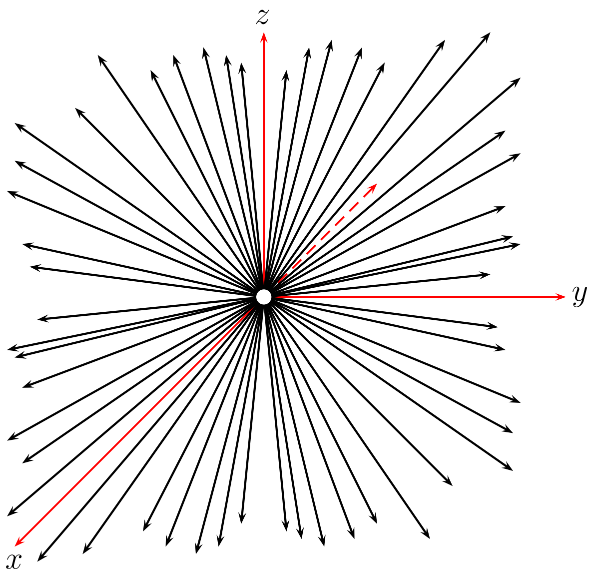

Figura 1.3: Interpretación geométrica para el caso $n = 2$; $P^2(\mathbb{R}) \equiv \frac{\mathbb{R}^3 - \{(\mathbf{0},\mathbf{0},\mathbf{0})\}}{\sim}$.

Se muestra que la familia $\{(\mathbb{R}, \varphi_1), (\mathbb{R}, \varphi_2)\}$ es una estructura diferenciable en $P^1(\mathbb{R})$. En efecto:

1. $\varphi_1(\mathbb{R}) \cup \varphi_2(\mathbb{R}) = \{[(1, y)] \mid y \in \mathbb{R}\} \cup \{[(z, 1)] \mid z \in \mathbb{R}\} = P^1(\mathbb{R})$.

2. Sea $W = \varphi_1(\mathbb{R}) \cap \varphi_2(\mathbb{R}) \neq \Phi$.
   Como $\varphi_1(\mathbb{R}) = \{[(1, y)] \mid y \in \mathbb{R}\}$ y $\varphi_2(\mathbb{R}) = \{[(z, 1)] \mid z \in \mathbb{R}\}$ entonces,

$$\begin{aligned} \varphi_1^{-1}(W) &= \{w \in \mathbb{R} \mid w \neq 0\} \\ &= \mathbb{R} - \{0\}, \end{aligned}$$

   lo cual es un abierto de $\mathbb{R}$. Análogamente $\varphi_2^{-1}(W)$ es un abierto de $\mathbb{R}$.

3. Sea $y \in \varphi_1^{-1}(W)$. Así

$$\begin{aligned} (\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1)(y) &= \varphi_2^{-1}(\varphi_1(y)) \\ &= \varphi_2^{-1}([(1, y)]) \\ &= \varphi_2^{-1}\left(\left[\left(\frac{1}{y}, 1\right)\right]\right) \\ &= \frac{1}{y};\ y \neq 0, \end{aligned}$$

que es evidentemente diferenciable. Similarmente $(\varphi_1^{-1} \circ \varphi_2)$ es diferenciable en $\varphi_2^{-1}(W)$.

De (1),(2) y (3) se sigue que la familia $\{(\mathbb{R}, \varphi_1), (\mathbb{R}, \varphi_2)\}$ es una estructura diferenciable en $P^1(\mathbb{R})$.

Consideremos ahora $P^n(\mathbb{R})$, $n > 1$. Entonces se supone sin perdida de generalidad, que $x_i \neq 0$, pues $(x_1, ..., x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} - \{(0, 0, ..., 0)\}$. Así

$$[(x_1, x_2, ..., x_{n+1})] = \left[\left(\frac{x_1}{x_i}, \frac{x_2}{x_i}, ..., \frac{x_{i-1}}{x_i}, 1, \frac{x_{i+1}}{x_i}, ..., \frac{x_{n+1}}{x_i}\right)\right].$$

Se define en $P^n(\mathbb{R})$ subconjuntos $V_1, V_2, ..., V_{n+1}$ dados por:

$$V_i = \{[(x_1, x_2, ..., x_{n+1})] \mid x_i \neq 0\}, \ i = 1, 2, ..., n+1.$$

Geométricamente V_i es el conjunto de las rectas de $\mathbb{R}^{n+1}$ que pasan por el origen y no pertenecen al hiperplano $x_i = 0$. Se muestra que se puede tomar los V_i como vecindades coordenadas, donde las coordenadas en V_i son:

$$y_1 = \frac{x_1}{x_i}, ..., y_{i-1} = \frac{x_{i-1}}{x_i}, y_i = \frac{x_{i+1}}{x_i}, ..., y_n = \frac{x_{n+1}}{x_i}.$$

Para esto se definen aplicaciones $x_i : \mathbb{R}^n \to V_i$ por:

$$x_i(y_1, y_2, ..., y_n) = [(y_1, ..., y_{i-1}, 1, y_i, ..., y_n)], \ (y_1, y_2, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$$

y se muestra que la familia $\{(\mathbb{R}^n, x_i)\}$ es una estructura diferenciable en $P^n(\mathbb{R})$. En efecto: $x_i : \mathbb{R}^n \to V_i$ es inyectiva para $i = 1, 2, ..., n+1$. Para $i = 1$;

$$V_1 = \{[(x_1, ..., x_{n+1})] \mid x_1 \neq 0\} = \{[(1, y_1, ..., y_n)] \mid (y_1, y_2, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n\},$$

así:

$$x_1(y_1, y_2, ..., y_n) = [(1, y_1, ..., y_n)].$$

Ahora se supone que $x_1(y_1, y_2, ..., y_n) = x_1(z_1, z_2, ..., z_n)$, entonces $[(1, y_1, ..., y_n)] = [(1, z_1, ..., z_n)]$, esto es; $(1, y_1, ..., y_n) = \lambda(1, z_1, ..., z_n)$ para algún $0 \neq \lambda \in \mathbb{R}$, lo que indica que $y_1 = z_1, ..., y_n = z_n$. Por lo tanto $x_1 : \mathbb{R}^n \to V_1$ es inyectiva.
Seguidamente se prueban las condiciones (1) y (2) de la definición (1.1):

1. $\bigcup_{i=1}^{n+1} x_i(\mathbb{R}^n) = P^n(\mathbb{R})$.

2. Se prueba que $x_i^{-1}(V_i \cap V_j)$ es un abierto en $\mathbb{R}^n$ y $x_j^{-1} \circ x_i$ es diferenciable, para $i, j = 1, 2, ..., n+1$. En efecto:

$$x_i^{-1}(V_i \cap V_j) \;=\; \{(y_1, y_2, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n |\ y_j \neq 0\},$$

lo cual es abierto en $\mathbb{R}^n$ para $j = 1, 2, ..., n+1$.
Ahora se verifica que $x_j^{-1} \circ x_i$ es diferenciable en $x_i^{-1}(V_i \cap V_j)$. Se puede suponer que $i > j$ (el caso $i < j$ es análogo),

$$\begin{aligned}(x_j^{-1} \circ x_i)(y_1, y_2, ..., y_n) &= x_j^{-1}\left(x_i(y_1, y_2, ..., y_n)\right)\\ &= x_j^{-1}\left([(y_1, ..., y_{i-1}, 1, y_i, ..., y_n)]\right)\\ &= x_j^{-1}\left(\left[\left(\frac{y_1}{y_j}, ..., \frac{y_{j-1}}{y_j}, 1, \frac{y_{j+1}}{y_j}, ..., \frac{1}{y_j}, \frac{y_i}{y_j}, ..., \frac{y_n}{y_j}\right)\right]\right)\\ &= \left(\frac{y_1}{y_j}, ..., \frac{y_{j-1}}{y_j}, \frac{y_{j+1}}{y_j}, ..., \frac{y_{i-1}}{y_j}, \frac{1}{y_j}, \frac{y_i}{y_j}, ..., \frac{y_n}{y_j}\right) \quad \textit{con } y_j \neq 0.\end{aligned}$$

Esto indica que $x_j^{-1} \circ x_i$ es diferenciable en $x_i^{-1}(V_i \cap V_j)$.

En resumen el espacio de direcciones de R^{n+1} (*espacio proyectivo* $P^n(\mathbb{R})$) esta cubierto por $n+1$ vecindades coordenadas V_i, donde V_i esta constituido por las direcciones de R^{n+1} que no estan en el hiperplano $x_i = 0$. Además en cada V_i se tienen coordenadas:

$$\left(\frac{x_1}{x_i}, ..., \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, ..., \frac{x_{n+1}}{x_i}\right), \ \textit{donde } (x_1, x_2, ..., x_{n+1}) \textit{ son las coordenadas de } \mathbb{R}^{n+1}.$$

Antes de presentar más ejemplos de variedades diferenciables, se explora un poco más las consecuencias de las definición (1.1). En adelante se denota una variedad diferenciable de dimensión n por M^n.

Definición 1.2 (Aplicación diferenciable entre variedades). *Sean M_1^n y M_2^m variedades diferenciables. Una aplicación $\varphi : M_1^n \to M_2^m$ es diferenciable en $p \in M_1^n$, si dada una parametrización $\mathbf{y} : V \subset \mathbb{R}^m \to M_2$ en $\varphi(p)$ existe una parametrización $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^n \to M_1$ en p tal que $\varphi(\mathbf{x}(U)) \subset \mathbf{y}(V)$ y la aplicación*

$$\mathbf{y}^{-1} \circ \varphi \circ \mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

es diferenciable en $\mathbf{x}^{-1}(p)$. (Ver figura 1.4) φ es diferenciable en un abierto de M_1^n si es diferenciable en todos los puntos de este abierto.
La aplicación definida anteriormente es llamada la expresión de φ en las parametrizaciones $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}$.

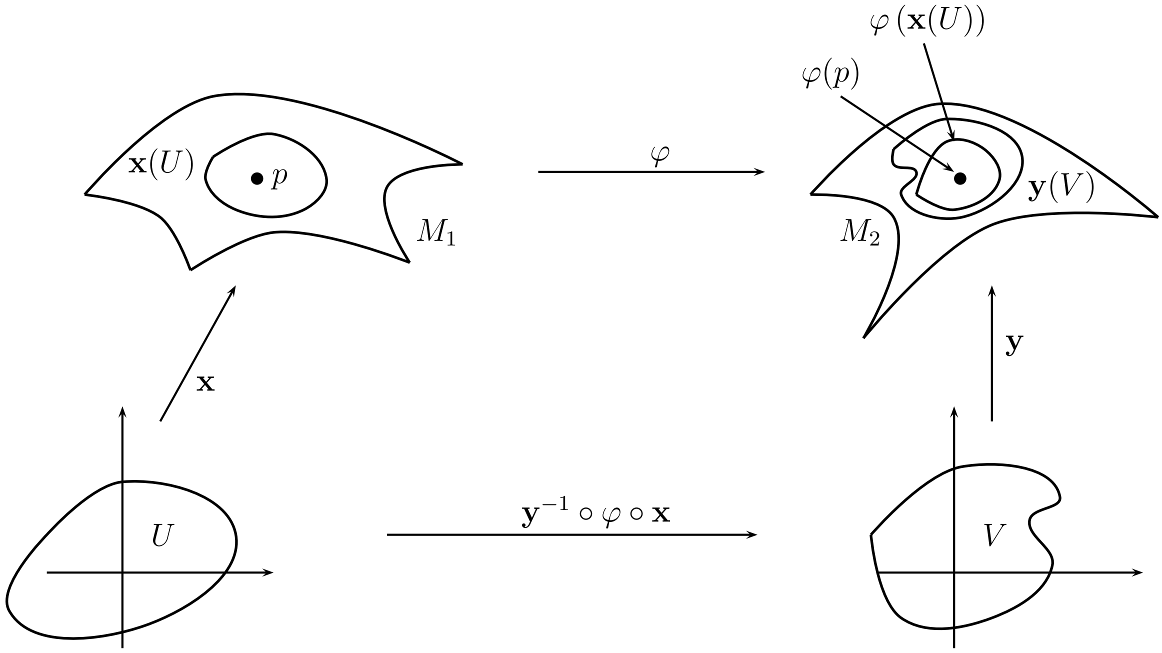

Figura 1.4: Interpretación geométrica de la definición(1.2); donde $(U, \mathbf{x})$, $(V, \mathbf{y})$ son sistemas de coordenadas en p y en $\varphi(p)$ respectivamente; $\varphi(\mathbf{x}(U)) \subset \mathbf{y}(V)$ y la aplicación $\mathbf{y}^{-1} \circ \varphi \circ \mathbf{x}$ entre los abiertos U y V de $\mathbb{R}^n$ es diferenciable en $\mathbf{x}^{-1}(p) \in U$.

Observación 1.2. La definición anterior no depende de la escogencia de las parametrizaciones $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}$. En efecto:
Si existen parametrizaciones $x_\alpha : U_\alpha \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow M_1$ y $x_\beta : U_\beta \subset \mathbb{R}^m \longrightarrow M_2$ tales que $p \in x_\alpha(U_\alpha)$ y $\varphi(x_\alpha(U_\alpha)) \subset x_\beta(U_\beta)$, entonces se debe probar que $x_\beta^{-1} \circ \varphi \circ x_\alpha : U_\alpha \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es diferenciable en $x_\alpha^{-1}(p)$. Pero como M_1^n y M_2^m son variedades diferenciables, entonces

$$h_1 = \mathbf{x}^{-1} \circ x_\alpha : x_\alpha^{-1}(A_1) \longrightarrow \mathbf{x}^{-1}(A_1),\ A_1 = \mathbf{x}(U) \cap x_\alpha(U_\alpha)$$

y

$$h_2 = \mathbf{y}^{-1} \circ x_\beta : x_\beta^{-1}(A_2) \longrightarrow \mathbf{y}^{-1}(A_2),\ A_2 = \mathbf{y}(V) \cap x_\beta(U_\beta)$$

son diferenciables por la parte (2) de la definición (1.1), luego:

$$\begin{aligned} x_\beta^{-1} \circ \varphi \circ x_\alpha &= (\mathbf{y} \circ h_2)^{-1} \circ \varphi \circ (\mathbf{x} \circ h_1) \\ &= h_2^{-1} \circ \mathbf{y}^{-1} \circ \varphi \circ \mathbf{x} \circ h_1 \\ &= h_2^{-1} \circ (\mathbf{y}^{-1} \circ \varphi \circ \mathbf{x}) \circ h_1 \end{aligned}$$

es diferenciable en $x_\alpha^{-1}(p)$.

Para poder hablar de la derivada de la aplicación diferenciable φ, es necesario dar la noción de vector tangente a una curva sobre una variedad diferenciable.

1.2. Vector tangente y espacio tangente

Se sabe que, un vector tangente en un punto p de una superficie regular S es definido como la "velocidad"en $\mathbb{R}^3$ de una curva de la superficie pasando por p. En el caso de una variedad no se dispone del soporte de un espacio ambiente, por tal motivo se utiliza una propiedad característica del vector tangente que sustituye la noción de velocidad.
Las consideraciones siguientes motivan a la definición de vector tangente a una curva sobre una variedad diferenciable. Sea $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to \mathbb{R}^n$ una curva diferenciable de $\mathbb{R}^n$, con $\alpha(0) = p$. Se expresa

$$\alpha(t) = (x_1(t), \cdots, x_n(t)), \ t \in (-\epsilon, \epsilon), \ (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Entonces $\alpha'(0) = \big(x_1'(0), \cdots, x_n'(0)\big) = v \in \mathbb{R}^n$.
Sea f una función diferenciable definida en una vecindad de p. Se restringe f a la curva α y se escribe la derivada direccional siguiendo al vector $v \in \mathbb{R}^n$ como

$$\left.\frac{d(f \circ \alpha)}{dt}\right|_{t=0} = \sum_{i=1}^{n} \left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_p \left.\frac{dx_i}{dt}\right|_{t=0} = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i'(0) \frac{\partial}{\partial x_i}\right) f.$$

Por lo tanto la derivada direccional siguiendo a v es un operador sobre funciones diferenciables que depende unicamente de v. Esta es la propiedad característica que se usa para dar la siguiente definición.

Definición 1.3 (Vector tangente). *Sea M una variedad diferenciable de dimensión n. Una aplicación diferenciable $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to M$ es llamada una Curva (diferenciable) en M. Se supone que $\alpha(0) = p \in M$ y sea D el conjunto de las funciones de M diferenciables en p. El vector tangente a la curva α en $t = 0$ es una función $\alpha'(0) : D \to \mathbb{R}$ dada por:*

$$\alpha'(0)(f) = \left.\frac{d(f \circ \alpha)}{dt}\right|_{t=0}; \ f \in D.$$

Un vector tangente en p, es el vector tangente en $t = 0$ de alguna curva $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to M$, con $\alpha(0) = p$.

El conjunto de los vectores tangentes a M en p será indicado por T_pM.

$$T_pM = \left\{ \alpha^{'}(0) \;\middle|\; \alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to M \text{ es una curva diferenciable en } M \text{ con } \alpha(0) = p \right\}.$$

Observación 1.3. Si se escoge una parametrización $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^n \to M$ en $p = \mathbf{x}(0)$ se puede expresar la función f y la curva α en esta parametrización por:

$$f \circ \mathbf{x}(q) = f(x_1, x_2, ..., x_n), \quad q = (x_1, x_2, ..., x_n) \in U$$

y

$$\mathbf{x}^{-1} \circ \alpha(t) = (x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t)).$$

Por lo tanto, al restringir f a la curva α, se tiene:

$$\begin{aligned}
\alpha^{'}(0)(f) &= \left.\frac{d(f \circ \alpha)}{dt}\right|_{t=0} = \left.\frac{d}{dt} f(x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t))\right|_{t=0} \\
&= \left.\left[\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t)) x_1^{'}(t) + ... + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t)) x_n^{'}(t) \right]\right|_{t=0} \\
&= \left.\sum_{i=1}^{n} x_i^{'}(t) \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t))\right|_{t=0} \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{'}(0) \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_0 \right) f,
\end{aligned}$$

donde $\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_0$ es el vector tangente en p a la curva coordenada $x_i \to \mathbf{x}(0, 0, ..., 0, x_i, 0, ..., 0)$. (Ver figura 1.5)
La expresión $\alpha^{'}(0) = \sum_{i=1}^{n} x_i^{'}(0) \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_0$ muestra que el vector tangente a la curva α en p depende apenas de las derivadas de α en un sistema de coordenadas.

Ejemplo 1.2. Con lo anterior se muestra como se calcula un vector tangente en $p \in P^n(\mathbb{R})$ a lo largo de una curva α sobre $P^n(\mathbb{R})$. Del ejemplo (1.1) se tiene:

$$P^n(\mathbb{R}) = \left\{ [(x_1, \cdots, x_{n+1})] \mid (x_1, \cdots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} - \{\mathbf{0}\} \right\}$$

y $\mathbf{x}_i : \mathbb{R}^n \longrightarrow V_i = \{[(x_1, \cdots, x_{n+1})] \mid x_i \neq 0\} \subset P^n(\mathbb{R})$, $i = 1, \cdots, n+1$ es una parametrización dada por

$$\mathbf{x}_i(y_1, \cdots, y_n) = [(y_1, \cdots, y_{i-1}, 1, y_i, \cdots, y_n)].$$

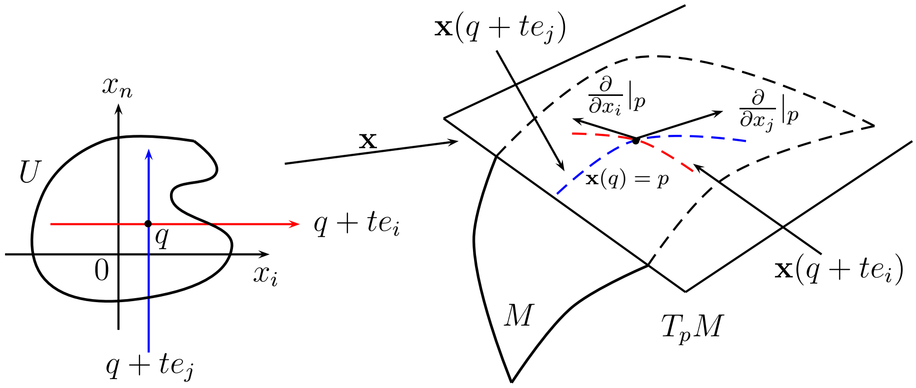

Figura 1.5: $(U, \mathbf{x})$ un sistema de coordenadas de M en p; $t \longrightarrow \mathbf{x}(q+te_i)$ y $t \longrightarrow \mathbf{x}(q+te_j)$ son las curvas coordenadas con sus respectivos vectores tangentes $\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p$ y $\left.\frac{\partial}{\partial x_j}\right|_p$ en T_pM.

Así $\mathbf{x}_i^{-1} : V_i \subset P^n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ esta definida por

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_i^{-1}\left([(z_1, \cdots, z_{n+1})]\right) &= \mathbf{x}_i^{-1}\left(\left[\left(\frac{z_1}{z_i}, \cdots, \frac{z_{i-1}}{z_i}, 1, \frac{z_{i+1}}{z_i}, \cdots, \frac{z_{n+1}}{z_i}\right)\right]\right), \ z_i \neq 0 \\
&= \left(\frac{z_1}{z_i}, \cdots, \frac{z_{i-1}}{z_i}, \frac{z_{i+1}}{z_i}, \cdots, \frac{z_{n+1}}{z_i}\right).
\end{aligned}$$

Sea $\gamma : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una curva tal que $\gamma(t) = \mathbf{x}_i^{-1}(p) + tv$, $v = (v_1, \cdots, v_n) \in \mathbb{R}^n$. Se define $\alpha = \mathbf{x}_i \circ \gamma : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow V_i \subset P^n(\mathbb{R})$ por

$$\alpha(t) = \mathbf{x}_i \circ \gamma(t) = \mathbf{x}_i\left(\mathbf{x}_i^{-1}(p) + tv\right).$$

Luego, α es tal que $\alpha(0) = \mathbf{x}_i\left(\mathbf{x}_i^{-1}\right)(p) = p$.
Ahora sea $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función diferenciable, dada por $g(x_1, \cdots, x_n) = x_j$, $j = 1, \cdots, n$ y se define $f = g \circ \mathbf{x}_i^{-1} : V_i \subset P^n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ por:
suponiendo que $i < j$(caso $i > j$ es análogo)

$$\begin{aligned}
f\left([(y_1, \cdots, y_{n+1})]\right) &= g\left(\mathbf{x}_i^{-1}\left([(y_1, \cdots, y_{n+1})]\right)\right), \ y_i \neq 0 \\
&= g\left(\mathbf{x}_i^{-1}\left([(y_1, \cdots, y_{i-1}, y_i, y_{i+1}, \cdots, y_j, \cdots, y_{n+1})]\right)\right) \\
&= g\left(\frac{y_1}{y_i}, \cdots, \frac{y_{i-1}}{y_i}, \frac{y_{i+1}}{y_i}, \cdots, \frac{y_j}{y_i}, \cdots, \frac{y_{n+1}}{y_i}\right) \\
&= \frac{y_j}{y_i}, \ y_i \neq 0.
\end{aligned}$$

Por lo tanto f es una función diferenciable de $P^n(\mathbb{R})$ en $\mathbb{R}$. Expresando la función f y la curva α en la parametrización $\mathbf{x}_i : \mathbb{R}^n \longrightarrow V_i \subset P^n(\mathbb{R})$ se tiene que en coordenadas la función f coincide con la función g, así:

$$\begin{aligned} f \circ \mathbf{x}_i(x_1, \cdots, x_n) &= \left(g \circ \mathbf{x}_i^{-1}\right) \circ \mathbf{x}_i(x_1, \cdots, x_n) \\ &= g(x_1, \cdots, x_n) \\ &= x_j, \ j = 1, \cdots, n \end{aligned}$$

y α en coordenadas esta dada:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_i^{-1} \circ \alpha(t) &= \mathbf{x}_i^{-1}\left(\mathbf{x}_i\left(\gamma(t)\right)\right) \\ &= \gamma(t) \\ &= \mathbf{x}_i^{-1}(p) + tv \\ &= \mathbf{x}_i^{-1}\left([(x_1, \cdots, x_{n+1})]\right) + tv \\ &= \mathbf{x}_i^{-1}\left(\left[\left(\frac{x_1}{x_i}, \cdots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, 1, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \cdots, \frac{x_{n+1}}{x_i}\right)\right]\right) + t(v_1, \cdots, v_n), \ x_i \neq 0 \\ &= \left(\frac{x_1}{x_i} + tv_1, \cdots, \frac{x_{i-1}}{x_i} + tv_{i-1}, \frac{x_{i+1}}{x_i} + tv_{i+1}, \cdots, \frac{x_{n+1}}{x_i} + tv_n\right) \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Si se restringe f a la curva α se tiene: (suponiendo $i < j$)

$$\begin{aligned} \alpha'(0)f &= \frac{d(f \circ \alpha)}{dt}|_{t=0} = \frac{d}{dt} f\left(\frac{x_1}{x_i} + tv_1, \cdots, \frac{x_{i-1}}{x_i} + tv_{i-1}, \frac{x_{i+1}}{x_i} + tv_{i+1}, \cdots, \frac{x_{n+1}}{x_i} + tv_n\right)|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt}\left(\frac{x_1}{x_i} + tv_1, \cdots, \frac{x_{i-1}}{x_i} + tv_{i-1}, \frac{x_{i+1}}{x_i} + tv_{i+1}, \cdots, \frac{x_j}{x_i} + tv_j, \cdots, \frac{x_{n+1}}{x_i} + tv_n\right)|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt}\left(\frac{x_j}{x_i} + tv_j\right)|_{t=0} \\ &= v_j \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

De la observación (1.3) se deduce el siguiente teorema.

Teorema 1.1. *Sea $(U, \mathbf{x})$ un sistema de coordenadas en $p \in M$. Entonces el conjunto T_pM, con las operaciones usuales de funciones, forma un espacio vectorial de dimensión n sobre $\mathbb{R}$, y la escogencia de una parametrización $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow M$ determina una base asociada*

$$\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_0, \left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)_0, ..., \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)_0\right\} \ en \ T_pM.$$

Demostración. Se define en T_pM una suma $''+''$ así: Sean $\alpha^{'}(0), \beta^{'}(0) \in T_pM$;

$$(\alpha^{'}(0) + \beta^{'}(0))(f) = \alpha^{'}(0)(f) + \beta^{'}(0)(f), \text{ } para \text{ } todo \text{ } f \in D.$$

Con D el conjunto de funciones diferenciables de M en p.
Se define en T_pM la multiplicación por escalar así: sean $c \in \mathbb{R}$ y $\alpha^{'}(0) \in T_pM$;

$$(c\alpha^{'}(0))(f) = c(\alpha^{'}(0)(f)), \text{ } para \text{ } todo \text{ } f \in D.$$

Con éstas operaciones T_pM es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$. En efecto:

1. $(T_pM, +)$ es un grupo abeliano;
   la operación suma $''+''$ es una operación binaria, es decir, para todo $\alpha^{'}(0), \beta^{'}(0)$ en T_pM se tiene que $\alpha^{'}(0) + \beta^{'}(0) \in T_pM$. En efecto:
   Como
   $$\alpha^{'}(0) = \sum_{i=1}^{n} x_i^{'}(0) \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_0 \text{ } y \text{ } \beta^{'}(0) = \sum_{i=1}^{n} y_i^{'}(0) \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_0,$$
   donde
   $$\mathbf{x}^{-1} \circ \alpha(t) = (x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t)) \text{ } y \text{ } \mathbf{x}^{-1} \circ \beta(t) = (y_1(t), y_2(t), ..., y_n(t)),$$
   tomando
   $$\mathbf{x}^{-1} \circ (\alpha(t) + \beta(t)) = \mathbf{x}^{-1} \circ \gamma(t) = (x_1(t) + y_1(t), ..., x_n(t) + y_n(t)) = (z_1(t), ..., z_n(t)),$$
   existe $\gamma : J \to M$ tal que $\gamma(0) = p$ y $\gamma^{'}(0) = \alpha^{'}(0) + \beta^{'}(0)$, luego
   $$\begin{aligned} \alpha^{'}(0) + \beta^{'}(0) &= \sum_{i=1}^{n}(x_i^{'}(0) + y_i^{'}(0)) \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_0 \\ &= \sum_{i=1}^{n} z_i^{'}(0) \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_0 . \end{aligned}$$
   Esto es, $\alpha^{'}(0) + \beta^{'}(0) \in T_pM$.
   Análogamente se tiene que para todo $c \in \mathbb{R}$; $c\alpha^{'}(0) \in T_pM$, tomando
   $$\mathbf{x}^{-1} \circ c\alpha(t) = (cx_1(t), cx_2(t), ..., cx_n(t)).$$

a. Conmutatividad de la suma.

$$\begin{aligned}\alpha^{'}(0)+\beta^{'}(0) &= \sum_{i=1}^{n}(x_i^{'}(0)+y_i^{'}(0))\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_0\\ &= \sum_{i=1}^{n}(y_i^{'}(0)+x_i^{'}(0))\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_0\\ &= \beta^{'}(0)+\alpha^{'}(0).\end{aligned}$$

b. Asociatividad de la suma.

$$\alpha^{'}(0)+\Big(\beta^{'}(0)+\gamma^{'}(0)\Big)=\Big(\alpha^{'}(0)+\beta^{'}(0)\Big)+\gamma^{'}(0).$$

c. Elemento neutro de la suma.
Existe un elemento $\oslash^{'}(0) \in T_pM$ tal que $\oslash^{'}(0) = \sum\limits_{i=1}^{n} o_i^{'}(0)\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_0$ donde $x^{-1}\circ 0(t)=(o_1(t),o_2(t),...,o_n(t))=(0,0,...,0)$. Así dado $\alpha^{'}(0)\in T_pM$, se tiene:

$$\begin{aligned}\alpha^{'}(0)+\oslash^{'}(0) &= \sum_{i=1}^{n}x_i^{'}(0)\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_0+\sum_{i=1}^{n}o_i^{'}(0)\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_0\\ &= \sum_{i=1}^{n}(x_i^{'}(0)+o_i^{'}(0))\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_0\\ &= \sum_{i=1}^{n}x_i^{'}(0)\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_0\\ &= \alpha^{'}(0).\end{aligned}$$

d. Elemento inverso de la suma.
Para todo $\alpha^{'}(0)\in T_pM$ existe $-\alpha^{'}(0)\in T_pM$ tal que $\alpha^{'}(0)+(-\alpha^{'}(0))=\oslash^{'}(0)$. En efecto:

$$\begin{aligned}\alpha^{'}(0)+(-\alpha^{'}(0)) &= \sum_{i=1}^{n}(x_i^{'}(0)-x_i^{'}(0))\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_0\\ &= \sum_{i=1}^{n}o_i^{'}(0)\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_0\\ &= \oslash^{'}(0).\end{aligned}$$

Así de (1); $(T_pM,+)$ es un grupo abeliano.

2. La multiplicación por escalar es asociativa. En efecto:
Sean $c, \widetilde{c} \in \mathbb{R}$ y $\alpha^{'}(0) \in T_pM$ entonces

$$\begin{aligned}
c(\widetilde{c}\alpha^{'}(0)) &= c\left(\widetilde{c}\sum_{i=1}^{n} x_i^{'}(0)\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_0\right) \\
&= c\left(\sum_{i=1}^{n} \widetilde{c}x_i^{'}(0)\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_0\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} c\left(\widetilde{c}x_i^{'}(0)\right)\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_0 \\
&= \sum_{i=1}^{n} (c\widetilde{c})\, x_i^{'}(0)\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_0 \\
&= (c\widetilde{c})\sum_{i=1}^{n} x_i^{'}(0)\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_0 \\
&= (c\widetilde{c})\,\alpha^{'}(0).
\end{aligned}$$

3. $1\alpha^{'}(0) = \alpha^{'}(0)$, $1 \in \mathbb{R}$, para todo $\alpha^{'}(0) \in T_pM$.

4. La multiplicación por escalares es distributiva respecto a la suma de vectores. En efecto:
Sean $c \in \mathbb{R}$ y $\alpha^{'}(0), \beta^{'}(0) \in T_pM$, entonces:

$$\begin{aligned}
c\left(\alpha^{'}(0) + \beta^{'}(0)\right) &= c\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i^{'}(0) + y_i^{'}(0))\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_0\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} c(x_i^{'}(0) + y_i^{'}(0))\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_0 \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(cx_i^{'}(0) + cy_i^{'}(0)\right)\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_0 \\
&= \sum_{i=1}^{n} cx_i^{'}(0)\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_0 + \sum_{i=1}^{n} cy_i^{'}(0)\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_0 \\
&= c\sum_{i=1}^{n} x_i^{'}(0)\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_0 + c\sum_{i=1}^{n} y_i^{'}(0)\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_0 \\
&= c\alpha^{'}(0) + c\beta^{'}(0).
\end{aligned}$$

5. La multiplicación por vectores es distributiva respecto a la suma de escalares. En efecto:

Sean $c, \widetilde{c} \in \mathbb{R}$ y $\alpha^{'}(0) \in T_pM$, entonces:

$$\begin{aligned}
(c+\widetilde{c})\alpha^{'}(0) &= (c+\widetilde{c})\sum_{i=1}^{n} x_i^{'}(0)\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_0 \\
&= \sum_{i=1}^{n}(c+\widetilde{c})x_i^{'}(0)\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_0 \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(cx_i^{'}(0)+\widetilde{c}x_i^{'}(0)\right)\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_0 \\
&= \sum_{i=1}^{n} cx_i^{'}(0)\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_0 + \sum_{i=1}^{n}\widetilde{c}x_i^{'}(0)\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_0 \\
&= c\sum_{i=1}^{n} x_i^{'}(0)\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_0 + \widetilde{c}\sum_{i=1}^{n} x_i^{'}(0)\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_0 \\
&= c\alpha^{'}(0)+\widetilde{c}\alpha^{'}(0).
\end{aligned}$$

Por lo tanto de (1), (2), (3), (4), (5); T_pM es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$.
Para la segunda parte de la demostración del teorema se prueba lo siguiente:

1. La expresión $\alpha^{'}(0) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^{'}(0)\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_0$ nos muestra que todo elemento de T_pM se puede ver como combinación lineal de los vectores $\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_0, \left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)_0, ..., \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)_0$.

2. Sean $c_1, c_2, ..., c_n \in \mathbb{R}$ y se toma que $c_1\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_0 + c_2\left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)_0 + ... + c_n\left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)_0 = 0$. Ahora se consideran

   $$\pi : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \ \textit{dada por} \ \pi(x_1, x_2, ..., x_n) = x_j$$

   y

   $$\mathbf{x}^{-1} : \mathbf{x}(U) \subset M \longrightarrow U \subset \mathbb{R}^n,$$

   Para definir la función $f = \pi \circ \mathbf{x}^{-1} : \mathbf{x}(U) \subset M \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciable. Esta función es tal que

   $$\frac{\partial f}{\partial x_k} = \begin{cases} 0 & si \quad k \neq j \\ \\ 1 & si \quad k = j \end{cases}.$$

   Luego $c_1\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)_0 + c_2\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)_0 + ... + c_j\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\right)_0 + ... + c_n\left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)_0 = 0$ implica que $c_j = 0$ para todo $j = 1, 2, ..., n$. Esto es, los vectores: $\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_0, \left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)_0, ..., \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)_0$ son linealmente independientes.

Por lo tanto el conjunto $\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_0, \left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)_0, ..., \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)_0\right\}$ forma una base en T_pM asociada a la parametrización $\mathbf{x}$. $\square$

En el caso particular cuando se tiene una aplicación diferenciable entre espacios euclídeos se sabe del análisis cómo se deriva o se diferencia una aplicación diferenciable. La diferencial de una aplicación diferenciable entre espacios euclídeos es una aplicación lineal, la más próxima de todas las lineales, cuya matriz asociada es la matriz jacobiana de la aplicación. Dada la noción de espacio tangente, la siguiente proposición pretende extender estas ideas a variedades diferenciables.

Proposición 1.1. *Sean M_1^n y M_2^m variedades diferenciables y sea $\varphi : M_1^n \to M_2^m$ una aplicación diferenciable. para cada $p \in M_1^n$ y cada $v \in T_pM_1^n$, se escoge una curva diferenciable $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to M_1^n$ con $\alpha(0) = p$ y $\alpha^{'}(0) = v$. Para $\beta = \varphi \circ \alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to M_2^m$ la aplicación $d\varphi_p : T_pM_1^n \to T_{\varphi(p)}M_2^m$ dada por $d\varphi_p(v) = \beta^{'}(0)$ es una aplicación lineal que no depende de la escogencia de α.*

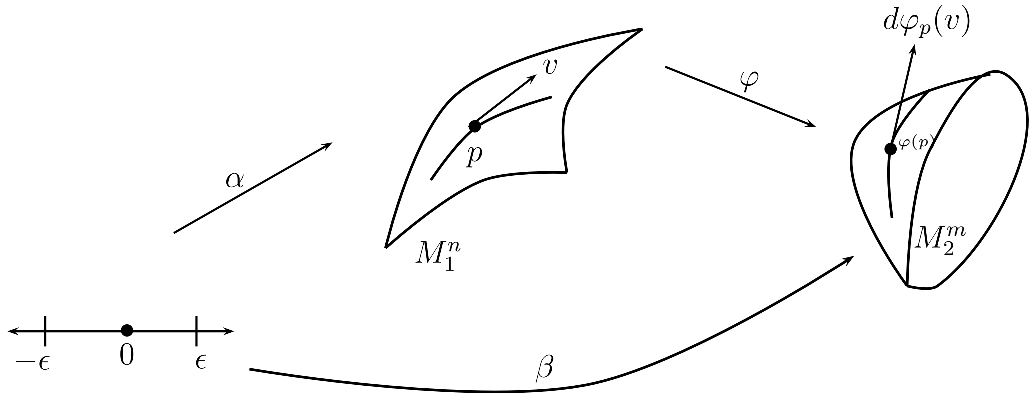

Figura 1.6: Interpretación geométrica de la proposición (1.1); $\varphi : M_1^n \to M_2^m$ es una aplicación diferenciable que determina de manera natural, una aplicación lineal entre los espacios tangentes $T_pM_1^n$ y $T_{\varphi(p)}M_2^m$, para cada punto p que se considere en el dominio de φ.

Demostración. Sean $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}$ dos parametrizaciones $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^n \to M_1$ y $\mathbf{y} : V \subset \mathbb{R}^m \to M_2$; $\mathbf{x}$ de p y $\mathbf{y}$ de $\varphi(p)$ respectivamente. Expresando φ en estas parametrizaciones, se obtiene;

$$\mathbf{y}^{-1} \circ \varphi \circ \mathbf{x}(q) = (y_1(x_1, x_2, ..., x_n), ..., y_m(x_1, x_2, ..., x_n)),$$

donde $q = (x_1, x_2, ..., x_n) \in U \subset \mathbb{R}^n$ y $(y_1, y_2, ..., y_m) \in V \subset \mathbb{R}^m$. Así se identifica φ como

$$\widetilde{\varphi}(q) = (y_1(x_1, x_2, ..., x_n), ..., y_m(x_1, x_2, ..., x_n)).$$

Por otro lado expresando α en la parametrización $\mathbf{x}$ se identifica α así:

$$\widetilde{\alpha}(t) = \mathbf{x}^{-1} \circ \alpha(t) = (x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t)).$$

Por lo tanto,

$$\beta(t) = \widetilde{\varphi}(\widetilde{\alpha}(t)) = (y_1(x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t)), ..., y_m(x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t)))$$

y

$$\beta^{'}(t) = \left(\frac{\partial y_1}{\partial x_1}(x_1(t), ..., x_n(t))x_1^{'}(t) + ... + \frac{\partial y_1}{\partial x_n}(x_1(t), ..., x_n(t))x_n^{'}(t)\ , ...\right.$$
$$\left. , \frac{\partial y_m}{\partial x_1}(x_1(t), ..., x_n(t))x_1^{'}(t) + ... + \frac{\partial y_m}{\partial x_n}(x_1(t), ..., x_n(t))x_n^{'}(t)\right).$$
$$\beta^{'}(0) = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial y_1}{\partial x_i}(q)x_i^{'}(0), \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial y_2}{\partial x_i}(q)x_i^{'}(0), ..., \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial y_m}{\partial x_i}(q)x_i^{'}(0)\right).$$

Luego $\beta^{'}(0)$ depende solamente de la aplicación φ y de las coordenadas $(x_1^{'}(0), ..., x_n^{'}(0))$ de v en la base $\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_0, \left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)_0, ..., \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)_0\right\}$ de T_pM asociada a la parametrización $\mathbf{x}$. Por esta razón $\beta^{'}(0) = d\varphi_p(v)$ es independiente de α.
$\beta^{'}(0)$ puede ser escrita:

$$\beta^{'}(0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1}(q) & \frac{\partial y_1}{\partial x_2}(q) & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n}(q) \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1}(q) & \frac{\partial y_2}{\partial x_2}(q) & \cdots & \frac{\partial y_2}{\partial x_n}(q) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial y_m}{\partial x_1}(q) & \frac{\partial y_m}{\partial x_2}(q) & \cdots & \frac{\partial y_m}{\partial x_n}(q) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{'}(0) \\ x_2^{'}(0) \\ \vdots \\ x_n^{'}(0) \end{pmatrix} = d\varphi_p(v).$$

Por lo tanto $d\varphi_p$ es una aplicación lineal de T_pM_1 en $T_{\varphi(p)}M_2$ cuya matriz en las bases asociadas a las parametrizaciones $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}$ es precisamente la matriz:

$$\left(\frac{\partial y_j}{\partial x_i}\right)_{m\times n}, \ con\ j = 1, 2, \ldots, m\ y\ i = 1, 2, \ldots, n$$

□

Definición 1.4. *La aplicación lineal $d\varphi_p$ dada por la proposición (1.1) es llamada diferencial de φ en p.*

La siguiente definición explica cuando dos variedades diferenciables M_1 y M_2 son equivalentes, es decir cuando hay una relación biunívoca entre las mismas. Esta definición permite cambiar la apariencia de los espacios sobre los que actua una aplicación φ de la variedad M_1 y M_2.

Definición 1.5. *Sean M_1 y M_2 variedades diferenciables. Una aplicación $\varphi : M_1 \to M_2$ es un difeomorfismo si φ es diferenciable, inyectiva, sobreyectiva y su inversa φ^{-1} es diferenciable.*
φ es difeomorfismo local en $p \in M_1$ si existen vecindades U de p y V de $\varphi(p)$ en M_2 tal que $\varphi : U \to V$ es un difeomorfismo.

Observación 1.4. La relación de difeomorfismo es una relación natural de equivalencia entre variedades diferenciables. En efecto:

1. Reflexividad:
   Es evidente, pues $i : M \to M$ es un difeomorfismo.

2. Simetria:
   Si M_1 es difeomorfo a M_2, entonces existe $\varphi : M_1 \to M_2$ un difeomorfismo, luego su inversa $\varphi^{-1} : M_2 \to M_1$ es diferenciable y como φ es biyectiva φ^{-1} también lo es y su inversa $(\varphi^{-1})^{-1} = \varphi$ es diferenciable, así que M_2 es difeomorfo a M_1.

3. Trancitividad:
   Si M_1 es difeomorfo a M_2 y M_2 es difeomorfo a M_3,entonces existen $\varphi_1 : M_1 \to M_2$ y $\varphi_2 : M_2 \to M_3$ difeomorfismos. Luego, $\varphi_2 \circ \varphi_1 : M_1 \to M_3$ es un difeomorfismo. Esto es, M_1 es difeomorfo a M_3.

Proposición 1.2. *Sean M^n, N^m, P^k variedades diferenciables. Sean $\varphi : M^n \to N^m$ y $\phi : N^m \to P^k$ dos aplicaciones diferenciables y sea p un punto del dominio de $\phi \circ \varphi$, entonces $\phi \circ \varphi$ es diferenciable en p y $d(\phi \circ \varphi)_p = d\phi_{\varphi(p)} d\varphi_p$.*

Una consecuencia inmediata de la proposición (1.2) es:

Proposición 1.3. *Sea $\varphi : M_1 \to M_2$ un difeomorfismo, entonces $d\varphi_p : T_pM_1 \to T_{\varphi(p)}M_2$ es un isomorfismo para todo $p \in M_1$; en particular las dimensiones de M_1 y M_2 son iguales.*

Demostración. Si $\varphi : M_1 \to M_2$ es un difeomorfismo, entonces φ es diferenciable, inyectiva, sobreyectiva y su inversa φ^{-1} es diferenciable. Así:
$\varphi \circ \varphi^{-1} = I$ es diferenciable, entonces por la proposición (1.2) se tiene:
$d\left(\varphi^{-1} \circ \varphi\right)_p = d\varphi^{-1}_{\varphi(p)} \circ d\varphi_p = I$, de donde $d\varphi^{-1}_{\varphi(p)} \circ d\varphi_p(v) = I(v)$ para todo $v \in T_pM_1$.
Luego $d\varphi_p$ es inyectiva para todo $p \in M_1$. puesto que si $d\varphi_p(v_1) = d\varphi_p(v_2)$ entonces $d\varphi^{-1}_{\varphi(p)} \circ d\varphi_p(v_1) = d\varphi^{-1}_{\varphi(p)} \circ d\varphi_p(v_2)$, de donde $v_1 = v_2$.
Para la sobreyectividad se tiene que $d\varphi_p \circ d\varphi^{-1}_{\varphi(p)}(v) = v$, esto es, existe $d\varphi^{-1}_{\varphi(p)}(w) \in T_pM_1$ tal que $d\varphi_p \circ d\varphi^{-1}_{\varphi(p)}(w) = w$ para todo $w \in T_{\varphi(p)}M_2$.
Por lo tanto $d\varphi_p$ es un isomorfismo. □

Un reciproco local de la proposición (1.3) es el siguiente teorema.

Teorema 1.2. *Sea $\varphi : M_1^n \to M_2^n$ una aplicación diferenciable y sea $p \in M_1$ tal que $d\varphi_p : T_pM_1^n \to T_{\varphi(p)}M_2^n$ es un isomorfismo, entonces φ es un difeomorfismo local en p.*

Demostración. La demostración es una aplicación inmediata del teorema de la función inversa en $\mathbb{R}^n$. □

1.3. Inmersiones e inmersiones más profundas

El objetivo principal de este tema es introducir los objetos geométricos que generalicen a las curvas y superficies del espacio euclídeo en cuanto a su relación con éste, es decir, como subvariedades. Para ello será esencial trabajar con aplicaciones diferenciables de rango máximo, y relativo a esto será el primer concepto que se introduce.

Definiciones 1.1. *Sean M^m y N^n variedades diferenciales.*

1. *Una aplicación diferenciable $\varphi : M \to N$ es una* **inmersión** *si $d\varphi_p : T_pM \to T_{\varphi(p)}N$ es inyectiva para todo $p \in M$.*
   En otras palabras, una inmersión φ de M en N es la aplicación diferenciable entre variedades tal que rango $(\varphi) = dimM = m$ para todo $p \in M$.

2. *Una inmersión $\varphi : M \to N$ es una* **inmersión más profunda** *si es un homeomorfismo sobre $\varphi(M) \subset N$, donde $\varphi(M)$ tiene la topología inducida por N.*

3. *Si $M \subset N$ y la inclusión $i : M \to N$ es una inmersión más profunda, se dice que M es una* **Subvariedad** *de N.*
(La imagen de una inmersión más profunda es una Subvariedad).

A continuación se da algunos ejemplos de inmersiones.

Ejemplo 1.3. La curva $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ dada por $\alpha(t) = (t^3, t^2)$ es una aplicación diferenciable más no es una inmersión. En efecto:
Sea $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una curva diferenciable, dada por $\gamma(t) = p + tv$, ésta curva es tal que $\gamma(0) = p$ y $\gamma^{'}(0) = v$ para $v \in T_p\mathbb{R} = \mathbb{R}$, así:

$$\beta(t) = \alpha\left(\gamma(t)\right) = \big((p+tv)^3, (p+tv)^2\big)$$

$$\beta^{'}(t) = \big(3v(p+tv)^2, 2v(p+tv)\big)$$

$$\beta^{'}(0) = (3vp^2, 2vp) = d\alpha_p(v)$$

Así la $d\alpha_p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ no es inyectiva, puesto que para $p = 0$ y $v_1 \neq v_2$ en $\mathbb{R}$ implicaría que $d\alpha_p(v_1) = d\alpha_p(v_2)$.

Del ejemplo (1.3) se deduce el siguiente resultado.

Observación 1.5. $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ es una inmersión si, solo si, $\alpha^{'}(p) \neq 0$ para todo $p \in \mathbb{R}$.
En efecto:
Si $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ es una inmersión, entonces $\alpha^{'}(p) \neq 0$ para todo $p \in \mathbb{R}$.
Sea $v \in T_p\mathbb{R}$, como $d\alpha_p(v) = \beta^{'}(0)$, donde $\beta(t) = \alpha\left(\gamma(t)\right)$ y $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es tal que $\gamma(0) = p$ y $\gamma^{'}(0) = v$, entonces $d\alpha_p(v) = \alpha^{'}\left(\gamma(0)\right)\gamma^{'}(0) = \alpha^{'}(p)v$. Pero como $d\alpha_p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ es inyectiva para todo $p \in \mathbb{R}$, por ser α una inmersión entonces $\alpha^{'}(p) \neq 0$ para todo $p \in \mathbb{R}$, pues de lo contrario para $v_1 \neq v_2$ se tiene que $d\alpha_p(v_1) = d\alpha_p(v_2)$, lo cual es una contradicción.
Ahora supongamos que $\alpha^{'}(p) \neq 0$ para todo $p \in \mathbb{R}$ y probemos que $d\alpha_p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ es inyectiva para todo $p \in \mathbb{R}$.
Como $d\alpha_p(v) = \alpha^{'}(p)v$, entonces se supone que $d\alpha_p(v_1) = d\alpha_p(v_2)$ para ciertos v_1 y v_2 en $\mathbb{R}$, entonces $\alpha^{'}(p)v_1 = \alpha^{'}(p)v_2$ y como por hipótesis $\alpha^{'}(p) \neq 0$ para todo $p \in \mathbb{R}$, entonces $v_1 = v_2$.

Ejemplo 1.4. la curva $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ dada por $\alpha(t) = (t^3 - 4t, t^2 - 4)$ es una inmersión que posee una autointersección para $t = 0$, por lo tanto no es una inmersión más profunda.

En efecto:
$d\alpha_p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ es inyectiva para todo $p \in \mathbb{R}$, puesto que $d\alpha_p(v) = \alpha^{'}(p)v = (3p^2 - 4, 2p)v$ y por la observación (1.5) se tiene el resultado.

El siguiente ejemplo permite ver que las parametrizaciones $\mathbf{x}_\alpha : U_\alpha \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbf{x}_\alpha(U_\alpha)$ de una superficie regular S son inmersiones más profundas.

Ejemplo 1.5. Toda superficie regular $S \subset \mathbb{R}^3$ posee una estructura diferenciable la cual esta dada por sus parametrizaciones $\mathbf{x}_\alpha : U_\alpha \subset \mathbb{R}^2 \to S$. Con esta estructura, las aplicaciones $\mathbf{x}_\alpha$ son diferenciables y en verdad, son inmersiones más profundas de U_α en S, puesto que $\mathbf{x}_\alpha : U_\alpha \subset \mathbb{R}^2 \to S$ es diferenciable por ser una parametrización, además $(d\mathbf{x}_\alpha)_q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ satisface la condición de regularidad, es decir $(d\mathbf{x}_\alpha)_q$ es inyectiva para todo $q \in U_\alpha$. Por otro lado $\mathbf{x}_\alpha : U_\alpha \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbf{x}_\alpha(U_\alpha) \subset S$ es un difeomorfismo para todo α, puesto que $h = \mathbf{x}_\alpha^{-1} \circ \mathbf{x}_\beta$ es un difeomorfismo, lo que indica que $\mathbf{x}_\alpha^{-1} : \mathbf{x}_\alpha(U_\alpha) \longrightarrow U_\alpha$ es diferenciable. Por lo tanto $\mathbf{x}_\alpha : U_\alpha \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbf{x}_\alpha(U_\alpha) \subset S$ es un homeomorfismo, es decir una inmersión más profunda.
Ahora se muestra que la inclusión $i : S \to \mathbb{R}^3$, es una inmersión más profunda, esto es, S es una subvariedad de $\mathbb{R}^3$. En efecto:
$i : S \to \mathbb{R}^3$ es diferenciable, ya que para todo $p \in S$ existe una parametrización $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \to S$ de S en p y una parametrización $j : V \subset \mathbb{R}^3 \to V$ de $\mathbb{R}^3$ en $i(p)$, donde V es una vecindad de p en $\mathbb{R}^3$ y j es la aplicación identidad. Así $j^{-1} \circ i \circ \mathbf{x} = \mathbf{x}$ la cual es diferenciable. Además; i es una inmersión, pues $i(S) = S \subset \mathbb{R}^3$, entonces $rango\ i = dim\ S$ y $i : S \to i(S) = S \subset \mathbb{R}^3$ es un homeomorfismo. Luego S es una subvariedad de $\mathbb{R}^3$.

En la mayor parte de las cuestiones puramente locales de geometría es indiferente tratar con inmersiones o inmersiones más profundas. Esto proviene de la siguiente proposición que muestra que toda inmersión es localmente (en cierto sentido) una inmersión más profunda.

Proposición 1.4. *Sea $\varphi : M_1^n \to M_2^m$, $n \leq m$, una inmersión de la variedad M_1^n en la variedad M_2^m. Para todo punto $p \in M_1^n$, existe una vecindad $V \subset M_1^n$ de p tal que la restricción $\varphi|_V : V \to M_2^m$ es una inmersión más profunda.*

Demostración. Sean $\mathbf{x}_1 : U_1 \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow M_1$ y $\mathbf{x}_2 : U_2 \subset \mathbb{R}^m \longrightarrow M_2$ sistemas de coordenadas en p y en $\varphi(p)$ respectivamente.

Se indica por $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ las coordenadas de $\mathbb{R}^n$ y por $(y_1, y_2, \cdots, y_m)$ las coordenadas de $\mathbb{R}^m$. En estas coordenadas, la expresión de φ, esto es, la aplicación $\widetilde{\varphi} = \mathbf{x}_2^{-1} \circ \varphi \circ \mathbf{x}_1$ puede ser escrita como:

$$\widetilde{\varphi}(x_1, x_2, \cdots, x_n) = (y_1(x_1, x_2, \cdots, x_n), y_2(x_1, x_2, \cdots, x_n), \cdots, y_m(x_1, x_2, \cdots, x_n)) .$$

Sea $q = \mathbf{x}_1^{-1}(p)$. Como por hipótesis φ es una inmersión entonces $d\varphi_p : T_pM_1^n \to T_{\varphi(p)}M_2^m$ es inyectiva. Luego se supone reenumerando las coordenadas de $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$ si es necesario, que:

$$\frac{\partial(y_1, y_2, \cdots, y_n)}{\partial(x_1, x_2, \cdots, x_n)}(q) \neq 0.$$

Para aplicar el teorema de la función inversa en $\mathbb{R}^n$, se introduce una aplicación:
$\phi : U_1 \times \mathbb{R}^{m-n=k} \to \mathbb{R}^m$ dada por:

$$\phi(x_1, \cdots, x_n, t_1, \cdots, t_k) = (y_1(x_1, \cdots, x_n), \cdots, y_n(x_1, \cdots, x_n), y_{n+1}(x_1, \cdots, x_n) + t_1,$$

$$, \cdots, y_{n+k}(x_1, x_2, \cdots, x_n) + t_k),$$

donde $(t_1, t_2, \cdots, t_k) \in \mathbb{R}^{m-n=k}$. Se verifica que ϕ restringido a U_1 coincide con $\widetilde{\varphi}$;

$$\phi|_{U_1} : U_1 \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \quad y \quad \widetilde{\varphi} = \mathbf{x}_2^{-1} \circ \varphi \circ \mathbf{x}_1 : \mathbf{x}_1^{-1}(W) \to \mathbf{x}_2^{-1}(W),$$

con $W = \mathbf{x}_1(U_1) \cap \mathbf{x}_2(U_2)$. Como $\mathbf{x}_1^{-1}(W) \subset U_1$ entonces $\phi|_{U_1} = \widetilde{\varphi}$, además;

$$det(d\phi_{\widetilde{q}}) = \frac{\partial(y_1, y_2, \cdots, y_n)}{\partial(x_1, x_2, \cdots, x_n)}(\widetilde{q}) \neq 0, con\ \widetilde{q} = (x_1, x_2, \cdots, x_n, \underbrace{0, 0, \cdots, 0}_{k-veces}).$$

Luego $d\phi_{\widetilde{q}} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ es un isomorfismo. Por el teorema de la función inversa en $\mathbb{R}^m$, existen vecindades $W_1 \subset U_1 \times \mathbb{R}^{m-n=k}$ de $\widetilde{q}$ y $W_2 \subset \mathbb{R}^m$ de $\phi(\widetilde{q})$ tal que $\phi : W_1 \to W_2$ es un difeomorfismo.
Sea $\widetilde{V} = W_1 \cap U_1$. Como $\phi|_{\widetilde{V}} = \widetilde{\varphi}|_{\widetilde{V}}$ y $\mathbf{x}_i$ es un difeomorfismo para $i = 1, 2$, entonces la restricción a $V = \mathbf{x}_1(\widetilde{V})$ de la aplicación:

$$\varphi = \mathbf{x}_2 \circ \widetilde{\varphi} \circ \mathbf{x}_1^{-1} : V \subset M_1^n \to \varphi(V) \subset M_2^m$$

es un difeomorfismo, de donde $\varphi : V \to \varphi(V) \subset M_2^m$ es un homeomorfismo, es decir $\varphi|_V$ es una inmersión más profunda. $\square$

En la siguiente sección se da un ejemplo muy importante de variedad diferenciable, el cual motiva a dar la definición de lo que es un campo de vectores sobre una variedad diferenciable, además se dará una introducción a las superficies k-dimensionales de $\mathbb{R}^n$, las cuales son la generalización de las superficies regulares de $\mathbb{R}^3$.

1.4. Otros ejemplos de variedades.

Ejemplo 1.6 (El fibrado tangente). Sea M^n una variedad diferenciable y sea:

$$TM = \{(p, v)|\ p \in M^n\ y\ v \in T_pM^n\}.$$

Se dota al conjunto TM de una estructura diferenciable de dimensión $2n$; con tal estructura TM será llamado fibrado tangente de M^n.
Sea $\{(U_\alpha, \mathbf{x}_\alpha)\}$ la estructura diferenciable maximal de M^n. Se indica por $(x_1^\alpha, x_2^\alpha, \cdots, x_n^\alpha)$ las coordenadas de U_α y por $\left\{\frac{\partial}{\partial x_1^\alpha}, \frac{\partial}{\partial x_2^\alpha}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_n^\alpha}\right\}$ las bases asociadas en los espacios tangentes de $\mathbf{x}_\alpha(U_\alpha)$. para cada α, se define

$$y_\alpha : U_\alpha \times \mathbb{R}^n \to TM,$$

por

$$y_\alpha(x_1^\alpha, \cdots, x_n^\alpha, u_1, \cdots, u_n) = \left(\mathbf{x}_\alpha(x_1^\alpha, \cdots, x_n^\alpha), \sum_{i=1}^n u_i \frac{\partial}{\partial x_i^\alpha}\right),\ (u_1, \cdots, u_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Geométricamente, esto significa que se toma como coordenadas de un punto $(p, v) \in TM$ las coordenadas $(x_1^\alpha, x_2^\alpha, \cdots, x_n^\alpha)$ de p, es decir $\mathbf{x}_\alpha^{-1}(p) = (x_1^\alpha, x_2^\alpha, \cdots, x_n^\alpha) = q_\alpha$; junto con las coordenadas de v en la base $\left\{\frac{\partial}{\partial x_1^\alpha}, \frac{\partial}{\partial x_2^\alpha}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_n^\alpha}\right\}$, es decir $\mathbf{x}_\alpha : U_\alpha \subset \mathbb{R}^n \to M$ implica que $(d\mathbf{x}_\alpha)_{q_\alpha} : \mathbb{R}^n \to T_{\mathbf{x}_\alpha(q_\alpha)}M^n$ esta dada por

$$(d\mathbf{x}_\alpha)_{q_\alpha}(v_\alpha) = \sum_{k=1}^n u_k \frac{\partial}{\partial x_k^\alpha} = v,\ donde\ v_\alpha = (u_1, u_2, \cdots, u_n).$$

Se muestra que $\{((U_\alpha \times \mathbb{R}^n), y_\alpha)\}$ es una estructura diferenciable en TM. Como $\bigcup_\alpha \mathbf{x}_\alpha(U_\alpha) = M$ y $(d\mathbf{x}_\alpha)_{q_\alpha}(\mathbb{R}^n) = T_{\mathbf{x}_\alpha(q_\alpha)}M^n,\ \ q_\alpha \in U_\alpha$, se tiene que

1.
$$\begin{aligned}\bigcup_\alpha y_\alpha(U_\alpha \times \mathbb{R}^n) &= \bigcup_\alpha \mathbf{x}_\alpha(U_\alpha) \times (d\mathbf{x}_\alpha)_{q_\alpha}(\mathbb{R}^n)\\ &= M \times T_{\mathbf{x}_\alpha(q_\alpha)}M^n\\ &= TM,\end{aligned}$$

   lo que verifica la condición (1) de la definición (1.1).

2. Sea $y_\alpha(U_\alpha \times \mathbb{R}^n) \cap y_\beta(U_\beta \times \mathbb{R}^n) = W \neq \Phi$

$$\begin{aligned}
y_\alpha^{-1}(W) &= y_\alpha^{-1}\left(y_\alpha(U_\alpha \times \mathbb{R}^n) \cap y_\beta(U_\beta \times \mathbb{R}^n)\right) \\
&= y_\alpha^{-1}\left(\mathbf{x}_\alpha(U_\alpha) \times d\mathbf{x}_\alpha(\mathbb{R}^n) \cap \mathbf{x}_\beta(U_\beta) \times d\mathbf{x}_\beta(\mathbb{R}^n)\right) \\
&= y_\alpha^{-1}\left(\mathbf{x}_\alpha(U_\alpha) \cap \mathbf{x}_\beta(U_\beta) \times d\mathbf{x}_\alpha(\mathbb{R}^n) \cap d\mathbf{x}_\beta(\mathbb{R}^n)\right) \\
&= \left(\mathbf{x}_\alpha^{-1}\left(\mathbf{x}_\alpha(U_\alpha) \cap \mathbf{x}_\beta(U_\beta)\right) \times (d\mathbf{x}_\alpha)^{-1}\left(d\mathbf{x}_\alpha(\mathbb{R}^n) \cap d\mathbf{x}_\beta(\mathbb{R}^n)\right)\right),
\end{aligned}$$

lo cual es abierto en $\mathbb{R}^n$. Esto verifica la condición (2) de la definición (1.1).

3. Ahora sea $(p, v) \in W$, entonces $(p, v) = (\mathbf{x}_\alpha(q_\alpha), d\mathbf{x}_\alpha(v_\alpha)) = (\mathbf{x}_\beta(q_\beta), d\mathbf{x}_\beta(v_\beta))$, donde $q_\alpha \in U_\alpha$, $q_\beta \in U_\beta$ y $v_\alpha, v_\beta \in \mathbb{R}^n$. Por lo tanto

$$\begin{aligned}
y_\beta^{-1} \circ y_\alpha(q_\alpha, v_\alpha) &= y_\beta^{-1}(\mathbf{x}_\alpha(q_\alpha), d\mathbf{x}_\alpha(v_\alpha)) \\
&= \left((\mathbf{x}_\beta^{-1} \circ \mathbf{x}_\alpha)(q_\alpha), d\mathbf{x}_\beta^{-1} \circ d\mathbf{x}_\alpha(v_\alpha)\right) \\
&= \left((\mathbf{x}_\beta^{-1} \circ \mathbf{x}_\alpha)(q_\alpha), d(\mathbf{x}_\beta^{-1} \circ \mathbf{x}_\alpha)(v_\alpha)\right) \\
&= (q_\beta, v_\beta).
\end{aligned}$$

Como $\mathbf{x}_\beta^{-1} \circ \mathbf{x}_\alpha$ es diferenciable y $d(\mathbf{x}_\beta^{-1} \circ \mathbf{x}_\alpha)$ también entonces $y_\beta^{-1} \circ y_\alpha$ es diferenciable. Luego TM es una variedad diferenciable de dimensión $2n$.

Ejemplo 1.7 (Superficies regulares de $\mathbb{R}^n$). Una generalización natural de la idea de superficie regular en $\mathbb{R}^3$ es la noción de superficie regular de dimensión k en $\mathbb{R}^n$, $k \leq n$. Un subconjunto $M^k \subset \mathbb{R}^n$ es una superficie regular de dimensión k si para cada $p \in M^k$ existe una vecindad V de p en $\mathbb{R}^n$ y una aplicación $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^k \to M \cap V$ de un abierto $U \subset \mathbb{R}^k$ sobre $V \cap M^k$ tales que:

1. $\mathbf{x}$ es un homeomorfismo diferenciable.

2. $d\mathbf{x}_q : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ es inyectiva para todo $q \in U$.

Un resultado que se extiende a las superficies regulares de $\mathbb{R}^n$; es el cambio de parametro, el cual es la consecuencia más importante de la definición del ejemplo (1.7). La siguiente proposición lo demuestra.

Proposición 1.5. *Sea p un punto de una superficie regular $M^k \subset \mathbb{R}^n$ y sean $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^k \to M$ y $\mathbf{y} : V \subset \mathbb{R}^k \to M$ dos parametrizaciones de M^k tal que $p \in \mathbf{x}(U) \cap \mathbf{y}(V) = W$, entonces la aplicación $h = \mathbf{x}^{-1} \circ \mathbf{y} : \mathbf{y}^{-1}(W) \longrightarrow \mathbf{x}^{-1}(W)$ es diferenciable.*

Demostración. Como $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}$ son homeomorfismos, entonces h también lo es como compuesta de homeomorfismos. Se prueba que h es diferenciable, en efecto:
Sea $r \in \mathbf{y}^{-1}(W)$, se supone que $q = h(r)$ y $\mathbf{x}(q) = p \in W$. Sean $(u_1, u_2, \cdots, u_k) \in U$ y $(v_1, v_2, \cdots, v_n) \in \mathbb{R}^n$, así $\mathbf{x}$ en estas coordenadas esta dada por:

$$\mathbf{x}(u_1, u_2, \cdots, u_k) = (v_1(u_1, u_2, \cdots, u_k), \cdots, v_n(u_1, u_2, \cdots, u_k)).$$

Como $\mathbf{x}$ es una parametrización se tiene que $d\mathbf{x}_q$ es inyectiva para todo $q \in U$ entonces se puede suponer que:

$$\frac{\partial(v_1, \cdots, v_k)}{\partial(u_1, \cdots, u_k)}(q) \neq 0$$

Se extiende $\mathbf{x}$ a una aplicación; $F : U \times \mathbb{R}^{n-k} \to \mathbb{R}^n$ dada por

$$F(u_1, \cdots, u_k, t_{k+1}, \cdots, t_n) = (v_1(u_1, \cdots, u_k), \cdots, v_k(u_1, \cdots, u_k), v_{k+1}(u_1, \cdots, u_k) + t_{k+1}\ ,$$

$$, \cdots, v_n(u_1, \cdots, u_k) + t_n).$$

Es claro que F es diferenciable y la restricción de F a $U \times \left\{\underbrace{(0, \cdots, 0)}_{n-k}\right\}$ coincide con $\mathbf{x}$.
Por otro lado:

$$dF_{\widetilde{q}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial u_1}(\widetilde{q}) & \frac{\partial v_1}{\partial u_2}(\widetilde{q}) & \cdots & \frac{\partial v_1}{\partial u_k}(\widetilde{q}) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial v_k}{\partial u_1}(\widetilde{q}) & \frac{\partial v_k}{\partial u_2}(\widetilde{q}) & \cdots & \frac{\partial v_k}{\partial u_k}(\widetilde{q}) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{\partial v_{k+1}}{\partial u_1}(\widetilde{q}) & \frac{\partial v_{k+1}}{\partial u_2}(\widetilde{q}) & \cdots & \frac{\partial v_{k+1}}{\partial u_k}(\widetilde{q}) & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial v_n}{\partial u_1}(\widetilde{q}) & \frac{\partial v_n}{\partial u_2}(\widetilde{q}) & \cdots & \frac{\partial v_n}{\partial u_k}(\widetilde{q}) & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

$\widetilde{q} = (u_1, \cdots, u_k, 0, \cdots, 0)$. Luego

$$det(dF\widetilde{q}) = \frac{\partial(v_1, \cdots, v_k)}{\partial(u_1, \cdots, u_k)}(\widetilde{q}) \neq 0$$

así que $dF_{\widetilde{q}} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es un isomorfismo y por el teorema de la función inversa existen vecindades T de $\widetilde{q}$ y Q de $F(\widetilde{q})$ tal que $F : T \to Q$ admite inversa diferenciable $F^{-1} : Q \to T$. Ahora por continuidad de $\mathbf{y} : V \subset \mathbb{R}^k \to M$ existe una vecindad $R \subset V$ de r tal que $\mathbf{y}(R) \subset Q$, luego

$$h|_R = \mathbf{x}^{-1} \circ \mathbf{y}|_R = F^{-1} \circ \mathbf{y}|_R$$

lo que indica que h es diferenciable en r, puesto que $\mathbf{y}$ es diferenciable en r y F^{-1} es diferenciable en $\mathbf{y}(r)$, dado que $\mathbf{y}(R) \subset Q$.

$$\left(h = \mathbf{x}^{-1} \circ \mathbf{y} \text{ } y \text{ } q = h(r) = \mathbf{x}^{-1} \circ \mathbf{y}(r) \Rightarrow \mathbf{x}(q) = \mathbf{y}(r)\right)$$

Como r es arbitrario, entonces h es diferenciable en $\mathbf{y}^{-1}(W)$. Análogamenmte se prueba que h^{-1} es diferenciable en $\mathbf{x}^{-1}(W)$. □

Observación 1.6. El resultado anterior deduce un argumento interesante: M^k es una variedad diferenciable de dimensión k y que la inclusión $i : M^k \to \mathbb{R}^n$, $k \leq n$ dada por $i(M^k) = M^k \subset \mathbb{R}^n$ es una inmersión mas profunda, esto es, M^k es una subvariedad de $\mathbb{R}^n$.

Definición 1.6. *Sea $F : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una aplicación diferenciable de un conjunto U de $\mathbb{R}^n$. Un punto $p \in U$ es un punto crítico de F si la diferencial $dF_p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es no sobreyectiva. La imagen $F(p)$ de un punto crítico es llamada un valor crítico de F. Un valor $F(p) \in \mathbb{R}^m$ que no sea un valor crítico es llamado un valor regular de F.*

Proposición 1.6. *Si $F : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $n \geq m$ es una función diferenciable y $a \in F(U)$ es un valor regular de F entonces la imagen inversa $F^{-1}(a) \subset \mathbb{R}^n$ es una superficie regular de dimensión $n - m = k$.*

Demostración.

$$F^{-1}(a) = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in U \mid F(x_1, x_2, \cdots, x_n) = a\}.$$

Sea $p \in F^{-1}(a)$. Se indica por $q = (y_1, y_2, \cdots, y_m, x_1, x_2, \cdots, x_k)$ un punto de $\mathbb{R}^{n=m+k}$ y por $F(q) = (f_1(q), f_2(q), \cdots, f_m(q))$ la aplicación F. Como $a \in F(U)$ es un valor regular de F entonces para todo $p \in F^{-1}(a)$ se tiene que $dF_p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es sobreyectiva, por lo tanto se puede suponer que:

$$\frac{\partial(f_1, \cdots, f_m)}{\partial(y_1, \cdots, y_m)}(p) \neq 0.$$

Así, se define una aplicación $\varphi : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n=m+k}$ por $\varphi(q) = (f_1(q), \cdots, f_m(q), x_1, \cdots, x_k)$, así:

$$d\varphi_p = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1}(p) & \frac{\partial f_1}{\partial y_2}(p) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial y_m}(p) & \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(p) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_k}(p) \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial y_1}(p) & \frac{\partial f_m}{\partial y_2}(p) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial y_m}(p) & \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(p) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_k}(p) \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Entonces
$$det(d\varphi_p) = \frac{\partial(f_1, \cdots, f_m)}{\partial(y_1, \cdots, y_m)}(p) \neq 0,$$
esto es, $d\varphi_p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n=m+k}$ es un isomorfismo. Por el teorema de la función inversa existe una vecindad Q de p y una vecindad W de $\varphi(p)$ tal que $\varphi : Q \to W$ admite inversa diferenciable $\varphi^{-1} : W \to Q$.
Sea $K^{m+k} \subset W \subset \mathbb{R}^{m+k}$ un cubo de centro $\varphi(p)$ y sea $V = \varphi^{-1}(K^{m+k}) \cap Q$, entonces φ aplica la vecindad V difeomorficamente sobre $K^{m+k} = K^m \times K^k$. Se define una aplicación $X : K^k \to V$ por

$$X(x_1, x_2, \cdots, x_k) = \varphi^{-1}(a_1, a_2, \cdots, a_m, x_1, x_2, \cdots, x_k),$$

donde $a = (a_1, a_2, \cdots, a_m)$. Así $\varphi : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n=m+k}$, dada por

$$\varphi\left(X(x_1, x_2, \cdots, x_k)\right) = (a_1, a_2, \cdots, a_m, x_1, x_2, \cdots, x_k)$$

satisface las condiciones (1) y (2) de la definición de superficie regular dada en el ejemplo (1.7). Como p es arbitrario, $F^{-1}(a)$ es una superficie regular de $\mathbb{R}^n$ y por lo visto en el ejemplo (1.7), $F^{-1}(a)$ es entonces una subvariedad de $\mathbb{R}^n$. $\square$

Ejemplo 1.8 (Otra representación del espacio proyectivo real). El conjunto $P^n(\mathbb{R})$ de las rectas de $\mathbb{R}^{n+1}$ que pasan por el origen puede ser representado como el espacio cociente de la esfera unitaria

$$S^n = \left\{p \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \; \| p \| = 1\right\}$$

por la relación de equivalencia que identifica cada $p \in S^n$ con el de su punto antípode $A(p) = -p$. En efecto:
Cada recta que pasa por el origen determina en la esfera dos puntos antípodes y la correspondencia así obtenida es inyectiva y sobreyectiva. Teniendo en cuenta este hecho se introduce otra estructura diferenciable en $P^n(\mathbb{R})$. Para esto, se dota inicialmente a S^n de una estructura de superficie regular, definiendo parametrizaciones:

$$\mathbf{x}_i^+ : U_i \longrightarrow S^n \ , \ \mathbf{x}_i^- : U_i \longrightarrow S^n \ , \ i = 1, \cdots, n+1$$

obtenidas del siguiente modo

$$U_i = \left\{(x_1, \cdots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_i = 0; \; x_1^2 + \cdots + x_{i-1}^2 + x_{i+1}^2 + \cdots + x_{n+1}^2 < 1\right\}$$

$$\mathbf{x}_i^+(x_1, \cdots, x_{i-1}, x_{i+1}, \cdots, x_{n+1}) = (x_1, \cdots, x_{i-1}, D_i, x_{i+1}, \cdots, x_{n+1})$$

$$\mathbf{x}_i^-(x_1, \cdots, x_{i-1}, x_{i+1}, \cdots, x_{n+1}) = (x_1, \cdots, x_{i-1}, -D_i, x_{i+1}, \cdots, x_{n+1}),$$

donde $D_i = \sqrt{1 - (x_1^2 + \cdots + x_{i-1}^2 + x_{i+1}^2 + \cdots + x_{n+1}^2)}$.

Así $\mathbf{x}_i^+$ y $\mathbf{x}_i^-$ son diferenciables, pues $x_1^2 + \cdots + x_{i-1}^2 + x_{i+1}^2 + \cdots + x_{n+1}^2 < 1$, además $\mathbf{x}_i^+$ y $\mathbf{x}_i^-$ son homeomorfismos y $d(\mathbf{x}_i^+)_q$ y $d(\mathbf{x}_i^-)_q$ son inyectivas para todo $q \in U_i$. Por lo tanto la familia $\{(U_i, \mathbf{x}_i^+), (U_i, \mathbf{x}_i^-)\}$, $i = 1, \cdots, n+1$ es una estructura diferenciable en S^n. Geométricamente, esto es equivalente a cubrir la esfera S^n con vecindades coordenadas que son semiesferas perpendiculares a los varios ejes x_i y tomar como coordenadas en ella, por ejemplo, $\mathbf{x}_i^+(U_i)$, las coordenadas de la proyección ortogonal de $\mathbf{x}_i^+(U_i)$ sobre el hiperplano $x_i = 0$.

Sea $\pi : S^n \longrightarrow P^n(\mathbb{R})$ la proyección canónica, esto es, $\pi(p) = \{p, -p\}$; observe que $\pi(\mathbf{x}_i^+(U_i)) = \pi(\mathbf{x}_i^-(U_i))$. Ahora se define una aplicación $\mathbf{y}_i : U_i \longrightarrow P^n(\mathbb{R})$ por

$$\mathbf{y}_i = \pi \circ \mathbf{x}_i^+ = \pi \circ \mathbf{x}_i^-,$$

$\mathbf{y}_i$ así definida es inyectiva, dado que π restringido a $\mathbf{x}_i^+(U_i)$ es inyectiva. Luego:

1. $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n+1} \mathbf{y}_i(U_i) = P^n(\mathbb{R})$
2. Sea $\mathbf{y}_i(U_i) \cap \mathbf{y}_j(U_j) = W \neq \Phi$, entonces $\mathbf{y}_i^{-1}(W)$ y $\mathbf{y}_j^{-1}(W)$ son abiertos de $\mathbb{R}^n$, puesto que:

$$\begin{aligned}
\mathbf{y}_i^{-1}(W) &= \mathbf{y}_i^{-1}(\mathbf{y}_i(U_i) \cap \mathbf{y}_j(U_j)) \\
&= \mathbf{y}_i^{-1}\left((\pi \circ \mathbf{x}_i^+)(U_i) \cap (\pi \circ \mathbf{x}_j^+)(U_j)\right) \\
&= \mathbf{y}_i^{-1}\left(\pi \circ (\mathbf{x}_i^+(U_i) \cap \mathbf{x}_j^+(U_j))\right) \\
&= (\mathbf{x}_i^+)^{-1}\left(\mathbf{x}_i^+(U_i) \cap \mathbf{x}_j^+(U_j)\right)
\end{aligned}$$

lo cual es abierto en $\mathbb{R}^n$. También $\mathbf{y}_i^{-1} \circ \mathbf{y}_j$ es diferenciable en $\mathbf{y}_j^{-1}(W)$ para todo $i, j = 1, \cdots, n+1$, puesto que

$$\mathbf{y}_i^{-1} \circ \mathbf{y}_j = (\pi \circ \mathbf{x}_i^+)^{-1} \circ (\pi \circ \mathbf{x}_j^+) = (\mathbf{x}_i^+)^{-1} \circ \mathbf{x}_j^+.$$

Por lo tanto la familia $\{(U_i, \mathbf{y}_i)\}$ es una estructura diferenciable en $P^n(\mathbb{R})$.

En verdad, esta estructura diferenciable y la del ejemplo (1.1) dan origen a una misma estructura máxima. En efecto; las vecindades coordenadas son las mismas y el cambio de coordenadas esta dado por

$$\left(\frac{x_1}{x_i}, \cdots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, 1, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \cdots, \frac{x_{n+1}}{x_i}\right) \Leftrightarrow (x_1, \cdots, x_{i-1}, D_i, x_{i+1}, \cdots, x_{n+1})$$

que como $x_i \neq 0$ y $D_i \neq 0$ es diferenciable.

Una manera de construir variedades diferenciables, que generaliza el proceso anterior, esta dada por las siguientes consideraciones:

1.5. Acción discontinua de un grupo sobre una variedad

Ejemplo 1.9. Se dice que un grupo G actúa sobre una variedad diferenciable M si existe una aplicación $\varphi : G \times M \longrightarrow M$ tal que:

I. Para cada $g \in G$, la aplicación $\varphi_g : M \longrightarrow M$ dada por $\varphi_g(p) = \varphi(g, p)$, $p \in M$ es un difeomorfismo y φ_e es la identidad.

II. Si g_1, $g_2 \in G$; $\varphi_{g_1 g_2} = \varphi_{g_1} \circ \varphi_{g_2}$.

Es frecuente, cuando se esta tratando de una única acción, indicar $\varphi(g, p) = gp$; con esto, la condición (II) se escribe como una especie de asociatividad:

$$\varphi_{g_1 g_2}(p) = \varphi_{g_1}(\varphi_{g_2}(p)) = \varphi_{g_1}(g_2 p) = g_1(g_2 p) = (g_1 g_2)(p).$$

Se dice que una acción es propiamente discontinua si todo $p \in M$ posee una vecindad $U \subset M$ tal que $U \cap \varphi_g(U) = \Phi$ para todo $g \neq e$.
Cuando G actúa sobre M, la acción determina una relación de equivalencia $\sim$ en M, donde $p_1 \sim p_2$ si, solo, si $p_2 = \varphi_g(p_1) = gp_1$, para algún $g \in G$. Se indica el espacio cociente de M por esta relación de equivalencia por M/G. La aplicación $\pi : M \longrightarrow M/G$, dada por

$$\pi(p) = \textit{clase de equivalencia de } p = G_p$$

se llama la proyección de M en M/G.
Sea ahora M una variedad diferenciable y sea $\varphi : G \times M \longrightarrow M$ una acción propiamente

discontinua de un grupo G en M.
Se muestra que M/G posee una estructura diferenciable de modo que la proyección $\pi : M \longrightarrow M/G$ es un difeomorfismo local. En efecto:
Para cada $p \in M$ se escoje una parametrización $\mathbf{x} : V \longrightarrow M$ en p de modo que $\mathbf{x}(V) \subset U$, donde $U \subset M$ es una vecindad de p tal que $U \cap \varphi_g(U) = \Phi$, $g \neq e$.
Así $\pi|_U : U \subset M \longrightarrow M/G$ es inyectiva , dado que si se supone que $\pi|_U(p_1) = \pi|_U(p_2)$ entonces $G_{p_1} = G_{p_2}$, esto es, $p_2 = \varphi_g(p_1) = gp_1$, para algún $g \in G$. Pero como para todo $g \neq e$ se tiene que $U \cap \varphi_g(U) = \Phi$, entonces $p_1 = p_2$.
Así $\mathbf{y} = \pi \circ \mathbf{x} : V \longrightarrow M/G$ es inyectiva. Se muestra que la familia $\{(V, \mathbf{y})\}$ es una estructura diferenciable en M/G. En efecto:

I. $\bigcup\limits_i \mathbf{y}_i(V_i) = M/G$. En efecto:
Sea $G_q \in \bigcup\limits_i \mathbf{y}_i(V_i)$ entonces $G_q \in \mathbf{y}_i(V_i)$ para algún i. Así existe $p \in V_i$ tal que $\mathbf{y}_i(p) = G_q$, esto es, $\pi(\mathbf{x}_i(p)) = G_q$, lo que indica que $G_q \in M/G$. Luego
$$\bigcup_i \mathbf{y}_i(V_i) \subseteq M/G.$$
Ahora sea $G_r \in M/G$ entonces para $r \in M$ existe $\mathbf{x}_i : V_i \to M$ de r tal que $\mathbf{x}_i(p) = r$, $p \in V_i$. Así $\pi(\mathbf{x}_i(p)) = \pi(r) = G_r$, así que $\mathbf{y}_i(p) = G_r$ para algún i, esto implica que $G_r \in \bigcup\limits_i \mathbf{y}_i(V_i)$, esto es,
$$M/G \subseteq \bigcup_i \mathbf{y}_i(V_i).$$

II. Sea $\mathbf{y}_1(V_1) \cap \mathbf{y}_2(V_2) = W \neq \Phi$, entonces
$$\begin{aligned}
\mathbf{y}_1^{-1}(W) &= \mathbf{y}_1^{-1}\left(\mathbf{y}_1(V_1) \cap \mathbf{y}_2(V_2)\right) \\
&= \mathbf{y}_1^{-1}\left(\pi \circ \mathbf{x}_1(V_1) \cap \pi \circ \mathbf{x}_2(V_2)\right) \\
&= \mathbf{y}_1^{-1}\left(\pi \circ \left(\mathbf{x}_1(V_1) \cap \mathbf{x}_2(V_2)\right)\right) \\
&= \mathbf{x}_1^{-1}\left(\mathbf{x}_1(V_1) \cap \mathbf{x}_2(V_2)\right).
\end{aligned}$$
Lo cual es abierto por ser $\{(V_i, \mathbf{x}_i)\}$ una estructura diferenciable en M.
Ahora se prueba que $\mathbf{y}_1^{-1} \circ \mathbf{y}_2 : \mathbf{y}_2^{-1}(W) \longrightarrow \mathbf{y}_1^{-1}(W)$ es diferenciable.
Para esto, sea π_i la restricción de π a $\mathbf{x}_i(V_i)$, $i = 1, 2$. Sea $q \in W$ y sea $r = \mathbf{x}_2^{-1} \circ \pi_2^{-1}(q) = \mathbf{y}_2^{-1}(q) \in V_2$ y sea $Z \subset V_2$ una vecindad de r tal que $(\pi_2 \circ \mathbf{x}_2)(Z) \subset W$, entonces
$$\mathbf{y}_1^{-1} \circ \mathbf{y}_2|_Z = \mathbf{x}_1^{-1} \circ \pi_1^{-1} \circ \pi_2 \circ \mathbf{x}_2,$$

así basta probar que $\pi_1^{-1} \circ \pi_2$ es diferenciable en $\pi_2^{-1}(q) = p_2$. Sea $p_1 = \pi_1^{-1} \circ \pi_2(p_2)$, entonces $p_1 \sim p_2$ en M, de donde existe $g \in G$ tal que $gp_2 = p_1$. Así

$$\pi_1^{-1} \circ \pi_2|_{\mathbf{x}_2(Z)} = \varphi_g|_{\mathbf{x}_2(Z)}.$$

Por lo tanto, la familia $\{(V_i, \mathbf{y}_i)\}$ es una estructura diferenciable en M/G.
Por la manera como fue construida esta estructura diferenciable es tal que $\pi : M \longrightarrow M/G$ es un difeomorfismo local.

Observación 1.7. Un caso particular del ejemplo (1.9), es el ejemplo (1.8), pues tomando $M = S^n$ y $G = \{A\ ,\ ident\}$ el grupo de difeomorfismos de S^n, constituido por la aplicación antípoda $A : S^n \longrightarrow S^n$, $A(p) = -p$ y la identidad de S^n. Entonces se tiene que (Ver figura 1.7)

$$S^n/G \equiv P^n(\mathbb{R}).$$

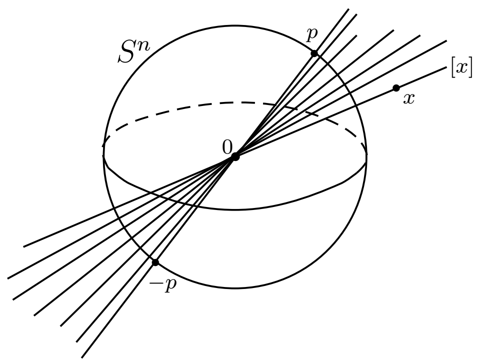

Figura 1.7: $P^n(\mathbb{R})$ visto como S^n/G; $[x]$ indica la clase de equivalencia de x, la cual determina dos puntos antípodas en la esfera S^n.

Ejemplo 1.10. Sea G el grupo de traslaciones iteradas de $\mathbb{R}^k$. Es decir, si $T_c : \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^k$ dada por $T_c(p) = p + c$, $c \in \mathbb{Z}^k$ entonces $G = \{T_c \mid c \in \mathbb{Z}^k\}$. Así la acción de G en $\mathbb{R}^k$ esta dada por:

$$\begin{aligned} \varphi : G \times \mathbb{R}^k &\longrightarrow \mathbb{R}^k \\ (T_c, p) &\longrightarrow \varphi(T_c, p) = \varphi_{T_c}(p) = T_c(p) = p + c. \end{aligned}$$

$\varphi_{T_c}(x_1, \cdots, x_k) = T_c(x_1, \cdots, x_k) = (x_1 + n_1, \cdots, x_k + n_k)$; $n_1, \cdots, n_k \in \mathbb{Z}$ y $p = (x_1, \cdots, x_k) \in \mathbb{R}^k$. Se prueba que $\varphi : G \times \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^k$ es una acción propiamente discontinua de G en $\mathbb{R}^k$. En efecto:

- Para $T_c \in G$, la aplicación $\varphi_{T_c} : \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^k$ dada por $\varphi_{T_c}(p) = T_c(p) = p + c$ es un difeomorfismo:
  Inyectividad
  Sean p_1 y $p_2 \in \mathbb{R}^k$
  $$\begin{aligned} \varphi_{T_c}(p_1) = \varphi_{T_c}(p_2) &\Rightarrow T_c(p_1) = T_c(p_2) \\ &\Rightarrow p_1 + c = p_2 + c \\ &\Rightarrow p_1 = p_2. \end{aligned}$$
  Sobreyectividad
  Para todo $q \in \mathbb{R}^k$ existe $q - c \in \mathbb{R}^k$ tal que $\varphi_{T_c}(q - c) = T_c(q - c) = q$.
  Por otro lado se tiene que $\varphi_{T_c}(x_1, \cdots, x_k) = (x_1 + n_1, \cdots, x_k + n_k)$ es diferenciable y su inversa $\varphi_{T_c}^{-1} : \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^k$ también lo es. Además existe $T_0 \in G$ tal que $\varphi_{T_0}(p) = T_0(p) = p$ para todo $p \in \mathbb{R}^k$, es decir φ_{T_0} es la identidad.

- Sean T_{c_1} y $T_{c_2} \in G$ entonces
  $$\begin{aligned} \varphi_{T_{c_1}T_{c_2}}(p) &= T_{c_1}(T_{c_2}(p)) \\ &= T_{c_1}(p + c_2) \\ &= \varphi_{T_{c_1}}(p + c_2) \\ &= \varphi_{T_{c_1}}(\varphi_{T_{c_2}}(p)) \\ &= \varphi_{T_{c_1}} \circ \varphi_{T_{c_2}}(p). \end{aligned}$$

- Para todo $p \in \mathbb{R}^k$ existe $B_\epsilon(p) \subset \mathbb{R}^k$ tal que $B_\epsilon(p) \cap \varphi_{T_c}(B_\epsilon(p)) = \Phi$ para todo $T_c \neq T_0$. En efecto:
  Se toma $\|c\| = 1$, $c \in \mathbb{Z}^k$ y se supone que existe $z \in B_\epsilon(p) \cap \varphi_{T_c}(B_\epsilon(p))$, entonces
  $$z \in B_\epsilon(p) = \left\{ w \in \mathbb{R}^k \mid \|w - p\| < \epsilon \right\}$$
  y
  $$z \in \varphi_{T_c}(B_\epsilon(p)) = \{ c + q \mid \|p - q\| < \epsilon \},$$
  así $z = c + q$, con $\|p - q\| < \epsilon$ y $\|z - p\| < \epsilon$, luego $c = z - q$ implica
  $$\begin{aligned} \|c\| = \|z - q\| &= \|z - p + p - q\| \\ &\leq \|z - p\| + \|p - q\| \\ &< \epsilon + \epsilon = 2\epsilon. \end{aligned}$$
  Tomando $\epsilon = \frac{1}{2}$, se tiene $1 = \|c\| < 1$; lo cual es una contradicción.

Por lo tanto $\varphi : G \times \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^k$ es una acción propiamente discontinua de G en $\mathbb{R}^k$.
El espacio cociente $\mathbb{R}^k/G$, con la estructura diferenciable, dada por $\{(V, \mathbf{y})\}$, donde

$$\mathbf{y} = \pi \circ \mathbf{x} : V \subset \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^k$$

y

$$\pi : \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^k/G$$

y $\mathbf{x}(V) \subset U \subset \mathbb{R}^k$, es tal que $U \cap \varphi_{T_c}(U) = \Phi$ para todo $T_c \neq T_0$; es llamado el k-toro T^k. Cuando $k = 2$, el 2-toro T^2 es difeomorfo al toro de revolución de $\mathbb{R}^3$ obtenido como imagen inversa de el cero de la función $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, dada por $f(x, y, z) = z^2 + (\sqrt{x^2 + y^2} - a)^2 - r^2$. Es decir

$$\begin{aligned}
\mathbb{R}^2/G \equiv T^2 &= f^{-1}(0) = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x, y, z) = 0\big\} \\
&= \Big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z^2 = r^2 - (\sqrt{x^2 + y^2} - a)^2\Big\}.
\end{aligned}$$

En la sección 1.2 se introdujo el concepto de vector tangente a una variedad diferenciable M en un punto p, esto es, un elemento X_p de T_pM. Ahora gracias al ejemplo 1.6 en la siguiente sección se extiende este concepto; el cual es quizá uno de los más importantes de esta monografía, dado que motiva a redefinir los operadores gradiente, divergencia y laplaciano sobre variedades Riemannianas.

1.6. Campo de vectores; corchetes

Definición 1.7. *Un campo de vectores X sobre una variedad diferenciable M es una correspondencia que a cada punto $p \in M$ asocia un vector $X(p) \in T_pM$. (Ver figura 1.8)*
En términos de aplicaciones, X es una aplicación de M en el fibrado tangente TM.
El campo es diferenciable si la aplicación $X : M \to TM$ es diferenciable.

Considerando una parametrización $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^n \to M$ es posible escribir:

$$X(p) = \sum_{i=1}^{n} a_i(p) \frac{\partial}{\partial x_i}, \tag{1.1}$$

donde cada $a_i : U \to \mathbb{R}$ es una función en U y $\left\{\frac{\partial}{\partial x_i}\right\}$ es la base asociada a $\mathbf{x}$, $i = 1, 2, \cdots, n$. X es diferenciable si, solo si, las funciones a_i son diferenciables para

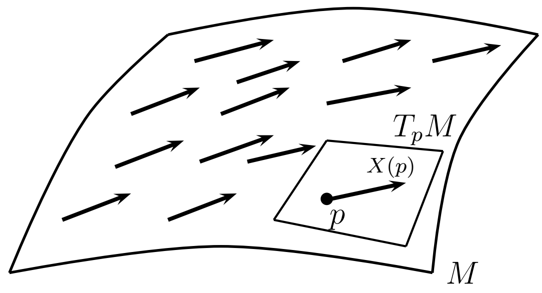

Figura 1.8: M una variedad diferenciable; X un campo de vectores que a cada punto $p \in M$ le asigna un vector tangente $X(p)$ en el espacio tangente T_pM

alguna (y por tanto para toda) parametrización.
A veces es conveniente utilizar la idea sugerida por (1,1) y pensar en un campo de vectores como una aplicación $X : D \to F$ del conjunto D de las funciones diferenciables en M en el conjunto F de las funciones en M, definida del siguiente modo:

$$(Xf)(p) = \sum_{i=1}^{n} a_i(p) \frac{\partial f}{\partial x_i}(p), \tag{1.2}$$

donde f indica, por un abuso de notación, la expresión de f en la parametrización $\mathbf{x}$. La función Xf obtenida en (1,2) no depende de la parametrización $\mathbf{x}$. En este contexto, es inmediato verificar que X es diferenciable si, solo si, $X : D \to D$, esto es, $Xf \in D$ para todo $f \in D$.
Sean $\varphi : M \longrightarrow M$ una aplicación diferenciable, $v \in T_pM$ y f una función diferenciable en una vecindad de $\varphi(p)$, entonces

$$(d\varphi(v)f)\varphi(p) = v(f \circ \varphi)(p).$$

En efecto; sea $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow M$ una curva diferenciable con $\alpha'(0) = v$, $\alpha(0) = p$. Entonces

$$(d\varphi(v)f)\varphi(p) = \frac{d}{dt}(f \circ \varphi \circ \alpha)|_{t=0} = v(f \circ \varphi)(p).$$

La interpretación de X como un operador en D permite considerar los iterados de X. Por ejemplo, si X y Y son campos diferenciables en M y $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función diferenciable, se puede considerar las funciones $X(Yf)$ y $Y(Xf)$. En general, tales operaciones no conducen a campos vectoriales, por envolver derivadas de orden superior en la primera. Pero, pordemos afirmar lo siguiente.

Lema 1.1. *Sean X y Y campos diferenciables de vectores en una variedad diferenciable M, entonces existe un único campo vectorial Z tal que, para todo $f \in D$, $Zf = (XY - YX)f$.*

Demostración. Primero se prueba que si Z existe, es único. Se admite por tanto, la existencia de un tal Z. Sea $p \in M$ y $\mathbf{x} : U \longrightarrow M$ una parametrización en p, y sean

$$X = \sum_i a_i \frac{\partial}{\partial x_i} \ y \ Y = \sum_j b_j \frac{\partial}{\partial x_j}$$

las expresiones de X y Y en esta parametrización. Entonces para todo $f \in D$,

$$XYf = X\left(\sum_j b_j \frac{\partial f}{\partial x_j}\right) = \sum_{ij} a_i \frac{\partial b_j}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j} + \sum_{ij} a_i b_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j},$$

$$YXf = Y\left(\sum_i a_i \frac{\partial f}{\partial x_i}\right) = \sum_{ij} b_j \frac{\partial a_i}{\partial x_j}\frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{ij} a_i b_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}.$$

Por lo tanto Z esta dado, en la parametrización $\mathbf{x}$, por:

$$Zf = XYf - YXf = \sum_{ij}\left(a_i \frac{\partial b_j}{\partial x_i} - b_i \frac{\partial a_j}{\partial x_i}\right)\frac{\partial f}{\partial x_j}$$

lo que muestra la unicidad de Z.
Para la demostración de la existencia, se define Z_α en cada vecindad coordenada $\mathbf{x}_\alpha(U_\alpha)$ de una estructura diferenciable $\{(U_\alpha, \mathbf{x}_\alpha)\}$ de M por la expresión anterior. Por unicidad, $Z_\alpha = Z_\beta$ en $\mathbf{x}_\alpha(U_\alpha) \cap \mathbf{x}_\beta(U_\beta) \neq \Phi$, lo que permite definir Z en toda la variedad M. $\square$

Definición 1.8. *El campo vectorial Z dado por el lema (1.1) es llamado el corchete $[X, Y] = XY - YX$ de X y Y; el cual es diferenciable.*

La operación corchete posee las siguientes propiedades.

Proposición 1.7. *Si X, Y y Z son campos diferenciables en M, a, b son números reales y f, g son funciones diferenciables en M, entonces*

1. $[X, Y] = -[Y, X]$ *(anticonmutatividad)*

2. $[aX+bY,Z]=a[X,Z]+b[Y,Z]$ *(linealidad)*

3. $[[X,Y],Z]+[[Y,Z],X]+[[Z,X],Y]=0$ *(identidad de de Jacobi)*

4. $[fX,gY]=fg[X,Y]+fX(g)Y-gY(f)X$.

Demostración. 1. $[X,Y]=XY-YX=-(YX-XY)=-[Y,X]$

2. $[aX+bY,Z]=(aX+bY)Z-Z(aX+bY)$, Ahora;

$$\begin{aligned}(aX+bY)Z(f) &= (aX+bY)\left(\sum_i c_i\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)\\ &= \left(a\sum_i a_i\frac{\partial}{\partial x_i}+b\sum_i b_i\frac{\partial}{\partial x_i}\right)\left(\sum_i c_i\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) \qquad (1.3)\\ &= a\sum_i a_i\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_i c_i\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)+b\sum_i b_i\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_i c_i\frac{\partial f}{\partial x_i}\right),\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}Z(aX+bY)(f) &= Z(aX(f)+bY(f))\\ &= Z\left(a\sum_i a_i\frac{\partial f}{\partial x_i}+b\sum_i b_i\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) \qquad (1.4)\\ &= \sum_i c_i\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a\sum_i a_i\frac{\partial f}{\partial x_i}+b\sum_i b_i\frac{\partial f}{\partial x_i}\right).\end{aligned}$$

por lo tanto de (1.3) y (1.4) se tiene:

$$\begin{aligned}[(aX+bY)Z-Z(aX+bY)](f) &= a\left[\sum_i a_i\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_i c_i\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)-\sum_i c_i\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_i a_i\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)\right]\\ &+ b\left[\sum_i b_i\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_i c_i\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)-\sum_i c_i\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_i b_i\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)\right]\\ &= a[XZ(f)-ZX(f)]+b[YZ(f)-ZY(f)]\\ &= a[X,Z](f)+b[Y,Z](f).\end{aligned}$$

3. Para la demostración de (3), se ve que:

$$\begin{aligned}[[X,Y],Z] &= [XY-YX,Z]\\ &= XYZ-YXZ-ZXY+ZYX, \qquad (1.5)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[X,[Y,Z]] &= [X, YZ - ZY] \\
&= XYZ - XZY - YZX + ZYX \\
&= -[[Y,Z],X],
\end{aligned} \tag{1.6}$$

y

$$\begin{aligned}
[Y,[Z,X]] &= [Y, ZX - XZ] \\
&= YZX - YXZ - ZXY + XZY \\
&= -[[Z,X],Y].
\end{aligned} \tag{1.7}$$

Luego, sumando (1.5), (1.6) y (1.7) se tiene

$$[[X,Y],Z] + [[Y,Z],X] + [[Z,X],Y] = 0.$$

4.

$$\begin{aligned}
[fX, gY] &= fX(gY) - gY(fX) \\
&= fgXY + fX(g)Y - gfYX - gY(f)X \\
&= fg[X,Y] + fX(g)Y - gY(f)X.
\end{aligned}$$

□

El corchete $[X,Y]$ puede ser interpretado como una derivación de Y a lo largo de las trayectorias de X. Para describir esta interpretación se precisa de algunos preliminares sobre ecuaciones diferenciales.

Como una variedad diferenciable es localmente difeomorfa a un subconjunto de $\mathbb{R}^n$, el teorema fundamental de existencia, unicidad y dependencia de las condiciones iniciales de las ecuaciones diferenciales ordinarias (que es un teorema local) se extiende naturalmente a las variedades diferenciables. Para un uso posterior conviene enunciarlo explícitamente.

Teorema 1.3. *Sea X un campo diferenciable de vectores en una variedad diferenciable M y sea $p \in M$. Entonces existen una variedad $U \subset M$ de p, un intervalo $(-\delta, \delta)$; $\delta > 0$ y una aplicación diferenciable $\varphi : (-\delta,\delta) \times U \longrightarrow M$ tal que la curva $t \longrightarrow \varphi(t,q)$; $t \in (-\delta,\delta)$, $q \in U$ es la única curva que satisface:*

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = X(\varphi(t,q))$$

y $\varphi(0,q) = q$.

Definición 1.9. *Una curva* $\alpha : (-\delta, \delta) \longrightarrow M$ *que satisface las condiciones* $X(\alpha(t)) = \alpha^{'}(t)$ *y* $\alpha(0) = q$ *es llamada la trayectoria del campo* X *que pasa por* q *para* $t = 0$.

Observación 1.8. El teorema anterior garantiza que por cada punto de una cierta vecindad pasa una única trayectoria de X y que la aplicación así obtenida depende diferenciablemente de t y de la condición inicial q. Es común utilizar la notación $\varphi_t(q) = \varphi(t, q)$ y llamar $\varphi_t : U \longrightarrow M$ el *flujo local* de X.

La interpretación arriba mensionada del corchete $[X, Y]$ está contenida en la siguiente proposición.

Proposición 1.8. *Sean* X *y* Y *campos diferenciables de vectores en una variedad diferenciable* M, *sea* $p \in M$ *y sea* φ_t *el flujo local de* X *en una vecindad* U *de* p, *entonces*

$$[X, Y](p) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \{Y - d\varphi_t Y\} (\varphi_t(p)).$$

Para la demostración se precisa del siguiente lema del cálculo.

Lema 1.2. *Sea* $h : (-\delta, \delta) \times U \longrightarrow \mathbb{R}$ *una aplicación diferenciable con* $h(0, q) = 0$ *para todo* $q \in U$, *entonces existe una aplicación diferenciable* $g : (-\delta, \delta) \times U \longrightarrow \mathbb{R}$ *con* $h(t, q) = tg(t, q)$; *en particular*

$$g(0, q) = \frac{\partial h(t, q)}{\partial t}|_{t=0}.$$

Demostración. Se define

$$g(t, q) = \int_0^1 \frac{\partial h(ts, q)}{\partial (ts)} ds$$

Ahora sea $u = ts$ entonces $du = tds$, luego

$$\begin{aligned} g(t, q) &= \int_0^1 \frac{\partial h(ts, q)}{\partial (ts)} ds \\ &= \int_0^t \frac{\partial h(u, q)}{\partial u} \frac{du}{t} \\ &= \frac{1}{t} \int_0^t \frac{\partial h(u, q)}{\partial u} du \\ &= \frac{1}{t} h(t, q). \end{aligned}$$

Por lo tanto $h(t, q) = tg(t, q)$. $\square$

Demostración de la proposición 1.8. Sea f una función diferenciable en una vecindad de p. Se hace

$$h(t,q) = f(\varphi_t(q)) - f(q),$$

h es tal que $h(0,q) = f(\varphi_0(q)) - f(q) = f(q) - f(q) = 0$, para todo $q \in U$ (U una vecindad de p). Aplicando el lema (1.2) a la función h;

$$f \circ \varphi_t(q) = f(q) + tg(t,q),$$

donde $g(t,q)$ es una función diferenciable y además

$$\begin{aligned} g(0,q) &= \frac{\partial h(t,q)}{\partial t}|_{t=0} \\ &= \frac{\partial}{\partial t} f(\varphi(t,q))|_{t=0}, \ \textit{donde } \varphi(0,q) = q \ \ \textit{y} \ \ \frac{\partial \varphi}{\partial t}(0) = X(\varphi(0,q)) = X(q) = X_q \\ &= Xf(q). \end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned} ((d\varphi_t Y)f)(\varphi_t(p)) &= (Y(f \circ \varphi_t))(p) \\ &= (Y(f(p) + tg(t,p)))(p) \\ &= Yf(p) + t(Yg(t,p)). \end{aligned}$$

Se tiene que

$$\begin{aligned} \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \{Y - d\varphi_t Y\} (\varphi_t(p)) &= \lim_{t\to 0} \frac{(Yf)(\varphi_t(p)) - Yf(p)}{t} - Yg(0,p) \\ &= \frac{d}{dt} Y(f) \circ \varphi_t(p)|_{t=0} - Yg(o,p) \\ &= (X(Yf))(p) - (Y(Xf))(p) \\ &= ((XY - YX)f)(p) \\ &= ([X,Y]\, f)(p). \end{aligned}$$

□

En este capítulo se mostro que toda variedad diferenciable tiene una estructura topológica inducida, pero hasta ahora no se ha fijado restricción alguna en cuanto a dicha topología. En el siguiente capítulo se establecen condiciones necesarias y suficientes para que la topología de una variedad diferenciable admita la existencia de un familia de funciones con siertas propieades, instrumento indispensable en el estudio de ciertas cuestiones sobre variedades.

Capítulo 2

Topología y métricas Riemannianas

La topología natural de una variedad diferenciable puede ser bastante extraña, en particular puede acontecer que uno o ambos de los siguientes axiomas no son satisfechos:

1. *Axioma de Hausdorff*: Dados dos puntos distintos de M existen vecindades de estos dos puntos que no de intersectan.

2. *Axioma de base numerable*: M puede ser cubierta por una cantidad numerable de vecindades coordenadas (dícese entonces que M tiene una base numerable).

Pero, se puede afirmar que la topología de una variedad diferenciable satisface el axioma de separación T_1 y el primer axioma de numerabilidad. Esto es regularmente necesario para imponer futuras restricciones sobre esta topología.
Una variedad diferenciable en la cual su topología satisface el axioma (1) sera llamada una *variedad Hausdorff*. Una importante propiedad de las variedades Hausdorff es:
La topología de cualquier variedad Hausdorff es localmente compacta. Una variedad diferenciable se dice que es *compacta* si, con su topología inducida, esta es un espacio topológico compacto. Por otro lado también se requiere que la topología de una variedad diferenciable satisfaga el axioma (2), este hecho se sigue del siguiente resultado: *una variedad diferenciable compacta tiene una base numerable para su topología*. De nuevo, esta restricción es satisfecha por más de una variedad. También se puede afirmar que: *Con su topología inducida, toda variedad diferenciable es localmente conexa*. Una variedad diferenciable M se dice que es *localmente conexa* con su topología inducida si cada punto de M tiene una vecindad conexa.

Observación 2.1. Puesto que una variedad diferenciable M es localmente conexa, cualquier componente conexa de M es un subconjunto abierto de M y estos admiten la estructura de subvariedad abierta de M.

Una propiedad de las variedades conexas es:

Proposición 2.1. *Sea $\{U_\alpha\}$ una cobertura de una variedad conexa M por vecindades coordenadas. Si para cada índice α existe solo un número numerable de índices β para el cual $U_\alpha \cap U_\beta \neq \Phi$, entonces M tiene una base numerable para su topología.*

Una demostración de esta proposición y de todas las anteriores puede ser encontrada en F. Brickell y R.S. Clark, *differentiable manifold*, Van Nostrand Reinhold Co., London 1970, Chap. 3.
La introducción arriba mensionada, en relación a la topología de la variedad es justificada en la siguiente sección.

2.1. Particiones de la unidad

Una de las razones por la cual se restringió la topología de una variedad diferenciable M es asegurar la existencia de un particular sistema de funciones de valor real sobre M el cual se llama partición de la unidad. Antes de poder describir esto se necesita algunas definiciones preliminares.

Definiciones 2.1. I. *Sea M una variedad diferenciable. Una familia de abiertos $V_\alpha \subset M$ con $\bigcup\limits_\alpha V_\alpha = M$ es localmente finita si todo punto $p \in M$ posee una vecindad U tal que $U \cap V_\alpha \neq \Phi$ para a lo mas una cantidad finita de índices.*

II. *El soporte de una función $f : M \to \mathbb{R}$ es un conjunto cerrado $\{q \in M |\ f(q) \neq 0\}$.*

III. *Se dice que una familia $\{f_\alpha |\ \alpha \in \Omega\}$ de funciones diferenciables $f_\alpha : M \to \mathbb{R}$ es una partición diferenciable de la unidad sobre M si:*

- *Para todo α, $f_\alpha \geq 0$ y el soporte de f_α esta contenido en una vecindad coordenada $V_\alpha = \mathbf{x}_\alpha(U_\alpha)$ de una estructura diferenciable $\{(U_\beta, \mathbf{x}_\beta)\}$ de M.*
- *La familia $\{V_\alpha\}$ es localmente finita.*

- $\sum\limits_{\alpha} f_\alpha(p) = 1$, *para todo* $p \in M$ *(Esta suma esta bien definida porque cada punto* p *se encuentra en el soporte de a lo mas una cantidad finita de* f_α*, esto es,* $f_\alpha(p) \neq 0$ *para lo mas un número finito de índices).*

Definición 2.1. *Dado que* $\{V_\alpha\}$ *es una cobertura abierta de* M *y el soporte de cada* f_α *se encuentra en los correspondientes* V_α *entonces se dice que: La partición diferenciable de la unidad* $\{f_\alpha |\ \alpha \in \Omega\}$ *es subordinada a* $\{V_\alpha\}$*.*

Muchos de los conceptos que en la teoría de las variedades diferenciables son fáciles de resolver de manera local, esto es, sobre una vecindad coordenada de un punto de la variedad; una partición de la unidad puede muchas veces ser usada para construir soluciones globales partiendo de soluciones locales. Uno de los objetivos de ésta sección es establecer condiciones para que una variedad diferenciable admita una partición de la unidad y hacer uso de dicha propiedad para probar el teorema principal de éste capítulo (La existencia de métricas Riemannianas en una variedad diferenciable). Primero se da unas condiciones necesarias.

Lema 2.1. *Una variedad diferenciable* M *la cual admite una partición de la unidad es una variedad Hausdorff.*

Demostración. Sea $\{\phi_\alpha\}$ una partición de la unidad sobre M. Se escoge cualquier par de puntos m y m' en M. Para alguna función ϕ_α, $\phi_\alpha(m) \neq 0$ y m esta dentro de una vecindad coordenada $W = \mathbf{x}_\alpha(U_\alpha)$ la cual contiene el soporte de ϕ_α, donde $\mathbf{x}_\alpha$ es una parametrización de alguna estructura diferenciable $\{(U_\beta, \mathbf{x}_\beta)\}$.
Si m' esta en el mismo dominio coordenado entonces, se puede encontrar vecindades disjuntas V_1 y V_2 en $\mathbb{R}^n$ las cuales contienen a $\mathbf{x}_\alpha^{-1}(m)$ y $\mathbf{x}_\alpha^{-1}(m')$ respectivamente. Puesto que $\mathbf{x}_\alpha$ es continua, $\mathbf{x}_\alpha(V_1)$ y $\mathbf{x}_\alpha(V_2)$ son conjuntos abiertos disjuntos en M los cuales contienen a m y m' respectivamente.
Si m' no esta en W entonces $\phi_\alpha(m') = 0$ y como $\phi_\alpha(m) \neq 0$ y ϕ_α es continua entonces m y m' admiten vecindades disjuntas. $\square$

Proposición 2.2. *Si una variedad diferenciable* M *admite una partición de la unidad, cada componente conexa de* M *debe ser una variedad Hausdorff con una base numerable para su topología.*

Demostración. Puesto que cada componente conexa M' de M es un subconjunto abierto de M y estos admiten estructura de subvariedad abierta de M, entonces con la topología inducida por M, se sigue del lema (2.1) que M' debe ser una variedad Hausdorff.

Se supone que ϕ_α es una partición de la unidad sobre M y sea $V_\alpha = \mathbf{x}_\alpha(U_\alpha)$ una vecindad coordenada la cual contiene el soporte C_k de ϕ_α. Puesto que la colección $\{V_\alpha\}$ es localmente finita entonces $V_\alpha \cap V_\beta = \Phi$ para todo β, excepto para numero finito de índices.

El conjunto $W_\alpha \subset V_\alpha$ sobre el cual $\phi_\alpha > 0$ es abierto en M y por tanto W_α es una vecindad coordenada de M. De donde $K_\alpha = W_\alpha \cap M'$ es vacio o K_α es una vecindad coordenada de M'.

La colección $\{K_\alpha\}$ cubre a M' y puesto que $K_\alpha \subset W_\alpha \subset V_\alpha$, entonces $K_\alpha \cap K_\beta = \Phi$ para todo β excepto un número finito de índices. Así por la proposición (2.1) la variedad conexa M' admite una base numerable para su topología. $\square$

Ahora se va a probar que en verdad estas dos condiciones necesarias son también suficientes. Pero se inicia primro con:

Proposición 2.3. *Una Variedad Hausdorff con una base numerable para su topología admite una partición de la unidad.*

Para la demostración se necesita.

Lema 2.2. *Sea U una vecindad coordenada de un punto dado m de una variedad Hausdorff. Entonces existe una vecindad coordenada U_m de M cuya clausura $\overline{U}_m$ esta en U y es compacta, junto con una función diferenciable $h_m : M \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $h_m > 0$ sobre U_m y $h_m = 0$ sobre $M - U_m$.*

Demostración. Se escoge una parametrización $\mathbf{x}$ de M cuyo entorno coordenado sea U y tal que $\mathbf{x}^{-1}(m) = 0$ en $\mathbb{R}^n$. Sea V_m una bola abierta en $\mathbb{R}^n$ con centro en $0 \in \mathbb{R}^n$ y radio ρ cuya clausura esta contenida en $\mathbf{x}^{-1}(U)$, esto es $\overline{V}_m \subset \mathbf{x}^{-1}(U)$. Se prueba que $U_m = \mathbf{x}(V_m)$ es una vecindad de m cuya clausura $\overline{U}_m$ esta en U y es compacta.

Como $\mathbf{x}$ es un homeomorfismo entonces $U_m \subset \mathbf{x}(\overline{V}_m) \subset \overline{U}_m$. Ahora como $\overline{V}_m$ es compacta entonces $\mathbf{x}(\overline{V}_m)$ es un subconjunto compacto de la variedad Hausdorff M y cerrado. Pero $\overline{U}_m$ es la intersección de todos los subconjuntos cerrados de M la cual contiene a U_m y también $\mathbf{x}(\overline{V}_m) = \overline{U}_m$. Por lo tanto $\overline{U}_m \subset U$ es compacta.

Para la otra parte se usa la función diferenciable $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(s) = \begin{cases} \exp(\frac{-1}{s}) & \text{si} \quad s > 0 \\ \\ 0 & \text{si} \quad s \leq 0 \end{cases}$$

para construir una función $g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$g(z) = f\left(\rho^2 - \|z\|^2\right).$$

Puesto que $f(\rho^2 - \|z\|^2) > 0$ si $\rho^2 > \|z\|^2$ y $f(\rho^2 - \|z\|^2) = 0$ si $\rho^2 \leq \|z\|^2$, entonces g es una función diferenciable tal que $g > 0$ sobre V_m y $g = 0$ sobre $\mathbb{R}^n - V_m$. La función diferenciable $g \circ \mathbf{x}^{-1} : M \longrightarrow \mathbb{R}$ sobre U y la función nula sobre el conjunto abierto $M - \overline{U}_m$ coincide sobre la intersección de sus dominios y juntas definen una función diferenciable $h_m : M \longrightarrow \mathbb{R}$ sobre M. Esta tiene las propiedades deseadas. □

Lema 2.3. *Sea M una variedad Hausdorff con una base numerable para su topología, entonces existe una cobertura $\{A_i\}$ de M por subconjuntos compactos tal que A_i $(i = 1, 2, \cdots)$ esta contenida en el interior de A_{i+1}.*

Demostración. Como M es una variedad Hausdorff entonces M es localmente compacta. Por la compacidad local se puede escoger un recubrimiento de M por conjuntos abiertos con clausuras compactas. Por hipótesis M tiene una base numerable para su topología. Por el teorema de Lindelöf's de cualquier recubrimiento de M se puede extraer un subrecubrimiento numerable. Sea V_i dicho subrecubrimiento numerable.

Se define $A_1 = \overline{V}_1$. Ahora peguemos a V_1 los conjuntos abiertos $V_2, V_3, \cdots$ hasta que su unión W_2 cubra a A_1. Puesto que A_1 es compacto, solo necesitamos un número finito de éstos conjuntos. Sea $W_2 = V_1 \cup V_2 \cup \cdots \cup V_{r(2)}$ y se define $A_2 = \overline{W}_2$. Puesto que $A_2 = \overline{V}_1 \cup \overline{V}_2 \cup \cdots \cup \overline{V}_{r(2)}$; A_2 es la unión de un número finito de conjuntos compactos y ésta es compacta. Su interior contiene a A_1.

Repitiendo éste proceso, $A_i = \overline{W}_i (i > 2)$ donde $W_i = V_1 \cup V_2 \cup \cdots \cup V_{r(i)}$ y $r(i)$ es el primer índice tal que $W_i \supset A_{i-1}$. Como antes A_i es compacto y su interior contiene A_{i-1}. Así M es la unión de todos los subconjuntos A_i. □

Demostración proposición *(2.3).* Sea M una variedad Hausdorff con una base numerable para su topología, por el lema (2.3) existe una cobertura $\{A_i\}$ de

subconjuntos compactos de M tal que A_i esta contenido en el interior de A_{i+1}. Con nuestra notación tendrá sentido para todo valor integral positivo proporcionado por i que A_0 y A_{i-1} sean definidos como el conjunto vacio.
Se afirma que

$$B_i = A_i - IntA_i$$

es un subconjunto cerrado de un conjunto compacto y además Bi es compacto. Dado un punto $m \in B_i$, se puede escoger una vecindad coordenada U de m contenida en el complemento de A_{i-2}, pues éste es un conjunto abierto. Usando el lema (2.2) entonces se asocia con m una vecindad coordenada U_m cuya clausura $\overline{U}_m$ esta en U. Se puede cubrir el conjunto compacto B_i con un número finito de estas vecindades U_m y a cada una es asociada una función $h_m : U_m \subset M \longrightarrow \mathbb{R}$, tal que $h_m > 0$ sobre U_m y $h_m = 0$ sobre $M - \overline{U}_m$. Llevando a cavo éste procedimiento para cada valor de i se proporciona una colección numerable $\{U_j\}$ de vecindades con sus correspondientes funciones $\{h_j\}$. $\{U_j\}$ cubre a M, y se prueba que la colección $\{\overline{U}_j\}$ de conjuntos compactos es localmente finita. Sugiriendo que los conjuntos $\overline{U}_j$ de la cobertura de B_i estén en el complemento de A_{i-2} y que ellos no se intersecten con A_k si $i-2 \geq k$. El interior A_k^0 de A_k es por lo tanto un conjunto abierto, él cual esta entre solo un número finito de conjuntos $\overline{U}_j$. Puesto que cualquier punto $m \in M$ está en A_k para algún entero k, $\{\overline{U}_j\}$ es localmente finita.
Para cada entero j, se define ahora una función $\phi_j : M \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$\phi_j(m) = \frac{h_j(m)}{\sum h_i(m)}.$$

Por que $\{\overline{U}_j\}$ es localmente finita el denominador esta bien definido y porque $\{U_j\}$ cubre a M éste es diferente de cero. ϕ_j esta por lo tanto definida sobre M y ésta tiene como $\overline{U}_j$ su soporte. Sobre el interior de A_k (A_k^0), ϕ_j coincide con la función

$$\frac{h_j}{\sum\limits_i h_i}$$

donde la suma es restringida al conjunto finito de valores de I tal que $\overline{U_i}$ está contenido en A_k. En consecuencia ϕ_j es diferenciable en cada punto de M. Si $m \in M$

$$\phi_j(m) \geq 0, \quad \sum_j \phi_j(m) = 1$$

y así la colección $\{\phi_j\}$ es una partición de la unidad sobre M. $\square$

Proposición 2.4. *Si cada componente conexa de M es una variedad Hausdorff con una base numerable para su topología entonces la variedad M admite una partición de la unidad.*

Demostración. Sea M' una componente conexa de M y sea $j : M' \longrightarrow M$ la inyección natural. Se sigue de la proposición (2.3) que M' admite una partición de la unidad $\{\phi_j'\}$ donde $i \in I$. Como M' es una subvariedad abierta de M entonces dada la función $\phi_i' : M' \longrightarrow \mathbb{R}$ existe una única función $\phi_i : M \longrightarrow \mathbb{R}$ con dominio M' tal que $\phi_i' = \phi_i \circ j$. Porque M' es cerrada en M se puede extender este dominio a todo M definiendo $\phi_i(m) = 0$ si $m \in M - M'$.
Se supone que el soporte C_i' de ϕ_i' esta en un dominio coordenado U de M'. Sea $S \subset M'$ el conjunto de puntos para el cual $\phi_i = \phi_i' > 0$. Puesto que M' es un subespacio cerrado de M se puede probar que la clausura C_i' de S en M' es la misma clausura C_i de S en M. Como C_i' es compacto en M y como j es continua; $C_i = j(C_i')$ es compacto en M. Así cualquier dominio coordenado de M' es un dominio coordenado de M. En consecuencia el soporte C_i de ϕ_i es compacto y éste esta en el dominio coordenado U de M.
Cualquier punto $m \in M'$ tiene una vecindad V en M' la cual esta solo entre un numero finito de soportes C_i'.(por ser $\{\phi_i'\}$ una partición de la unidad). Puesto que M' es un subespacio abierto de M, V es una vecindad de m en M. En consecuencia cualquier punto $m \in M'$ tiene una vecindad en M la cual esta solo entre un numero finito de soportes C_i y no esta en $M - M'$.
Ahora si se considera todas las componentes M^β ($\beta \in B$) de M, donde el conjunto de índices B no necesariamente es numerable. Esto origina una colección de funciones diferenciables $\left\{\phi_i^\beta\right\}$ donde $\beta \in B,\ i \in I(\beta)$ cada una definida sobre M. El soporte C_i^β de $\phi_i^\beta : M \longrightarrow \mathbb{R}$ es compacto en M y éste esta en un dominio coordenado de M. Por lo anterior se puede ver que la colección de soportes $\left\{C_i^\beta\right\}$ de ϕ_i^β es localmente finita en M y que las funciones $\left\{\phi_i^\beta\right\}$ forman una partición de la unidad sobre M. $\square$

Con lo anterior el punto de partida será una variedad diferenciable en la cual se introduce en cada punto una manera de medir longitudes de vectores tangentes que varia diferenciablemente con el punto.

En la siguiente sección se da una de las definiciones más importantes de este trabajo, la cual es uno de los principales objetivos. Dado que con base a ella se redefine el gradiente, la divergencia y el operador laplaciano en conjuntos abstractos como las variedades y además, algo muy importante me garantizará la unicidad de estos operadores diferenciales.

Nota 1. *De ahora en adelante las variedades diferenciables consideradas, serán supuestas de Hausdorff y con base numerable, para asi poder garantizar la exsitencia de particiones de la unidad en dicha variedad.*

2.2. Métricas Riemannianas

Definición 2.2. *Una métrica Riemanniana en una variedad diferenciable M es una correspondencia que asocia a cada punto $p \in M$ un producto interno $\langle , \rangle_p$ (esto es, una forma bilineal simétrica, definida positiva) en el espacio tangente T_pM, que varia diferenciablemente en el siguiente sentido: Si $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow M$ es un sistema de coordenadas localizado en un entorno de p, con: $\mathbf{x}(x_1, \dots, x_n) = q \in \mathbf{x}(U)$ y $\frac{\partial}{\partial x_i}(q) = d\mathbf{x}(e_i)$, entonces $g_{ij} : M \to \mathbb{R}$ dada por $g_{ij}(x_1, \cdots, x_n) = \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}(q), \frac{\partial}{\partial x_j}(q) \right\rangle_q$, es una función diferenciable en U.*

Las funciones $g_{ij} = g_{ji}$ son llamadas *expresiones de la métrica Riemanniana* en el sistema de coordenadas $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^n \to M$.
Una variedad diferenciable con una métrica Riemanniana dada se llama *variedad Riemanniana.*

Proposición 2.5. *La definición anterior no depende de la escogencia del sistema de coordenadas.*

Demostración. Sea $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow M$ un sistema de coordenadas localizado en un entorno de p, con $\mathbf{x}(x_1, \cdots, x_n) = p$ y $g_{ij} : M \to \mathbb{R}$ dada por $g_{ij}(x_1, \cdots, x_n) = \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}(p), \frac{\partial}{\partial x_j}(p) \right\rangle_p$, diferenciable en U.
Sea $\mathbf{y} : V \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow M$ otra parametrización de M en un entorno de p, con $\mathbf{y}(y_1, \cdots, y_n) = p$, se prueba que $\ell_{ij}(y_1, \cdots, y_n) = \left\langle \frac{\partial}{\partial y_i}(p), \frac{\partial}{\partial y_j}(p) \right\rangle_p$ es diferenciable.
Como para $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow M$ existe una base $\left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_0 \mid i = 1, 2, \cdots, n \right\}$ de $T_p(M)$,

entonces

$$\left(\frac{\partial}{\partial y_i}\right)_p = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right)_0 \quad y \quad \left(\frac{\partial}{\partial y_j}\right)_p = \sum_{s=1}^{m} \mu_s \left(\frac{\partial}{\partial x_s}\right)_0 .$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
\ell_{ij}(y_1, \cdots, y_n) &= \left\langle \frac{\partial}{\partial y_i}(p), \frac{\partial}{\partial y_j}(p) \right\rangle_p \\
&= \left\langle \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right)_0, \sum_{s=1}^{n} \mu_s \left(\frac{\partial}{\partial x_s}\right)_0 \right\rangle \\
&= \sum_{k,s=1}^{n} \lambda_k \mu_s \left\langle \left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right)_0, \left(\frac{\partial}{\partial x_s}\right)_0 \right\rangle \\
&= \sum_{k,s=1}^{n} \lambda_k \mu_s g_{ks}(x_1, \cdots, x_n),
\end{aligned}$$

esto es diferenciable. □

Referente a la diferenciabilidad de la definición anterior se tiene una definición equivalente, la cual consiste en considerar dos campos vectoriales W, Z cualesquiera diferenciables en una vecindad V de M y verificar que la función $\langle W, Z \rangle_p$ es diferenciable en V.

Definición 2.3. *Sean M y N variedades Riemannianas. Un difeomorfismo $f : M \to N$ es llamado una isometría si, y sólo si, para todo $p \in M$ y todo $u, v \in T_pM$*

$$\langle u, v \rangle_p = \langle df_p(u), df_p(v) \rangle_{f(p)} \tag{2.1}$$

Definición 2.4. *Sean M y N variedades Riemannianas. Una aplicación diferenciable $f : M \to N$ es una isometría local en $p \in M$ si existe una vecindad $U \subset M$ de p tal que $f : U \to f(U)$ es un difeomorfismo que satisface (2.1).*

El siguiente es un ejemplo trivial de métrica en la variedad diferenciable $\mathbb{R}^n$.

Ejemplo 2.1. Sea $M = \mathbb{R}^n$ con $\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_0$ identificado con $e_i = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)$. La métrica esta dada por $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$. $\mathbb{R}^n$ es llamado espacio euclidiano de dimensión n y la geometría Riemanniana de este espacio es la geometría euclidiana.

Para el caso de las superficies regulares de $\mathbb{R}^3$ se tiene el siguiente ejemplo de métrica.

Ejemplo 2.2. Si se considera M como una superficie regular de $\mathbb{R}^3$ y la *primera forma fundamental* $I_p : T_pM \longrightarrow \mathbb{R}$ entonces I_p define una forma de medir longitudes de vectores en M. (ver figura 2.1) En efecto:

$$I_p(v) = \langle v\ ,\ v\rangle\ ,\ para\ todo\ v \in T_pM,$$

luego

$$\begin{aligned} I_p(u+v) &= \langle u+v\ ,\ u+v\rangle \\ &= \langle u+v\ ,\ u\rangle + \langle u+v\ ,\ v\rangle \\ &= \langle u\ ,\ u\rangle + 2\langle u\ ,\ v\rangle + \langle v\ ,\ v\rangle\,. \end{aligned}$$

Así para todo $u, v \in T_pM$ se tiene:

$$\langle u\ ,\ v\rangle = \frac{1}{2}\left\{I_p(u+v) - I_p(u) - I_p(v)\right\}.$$

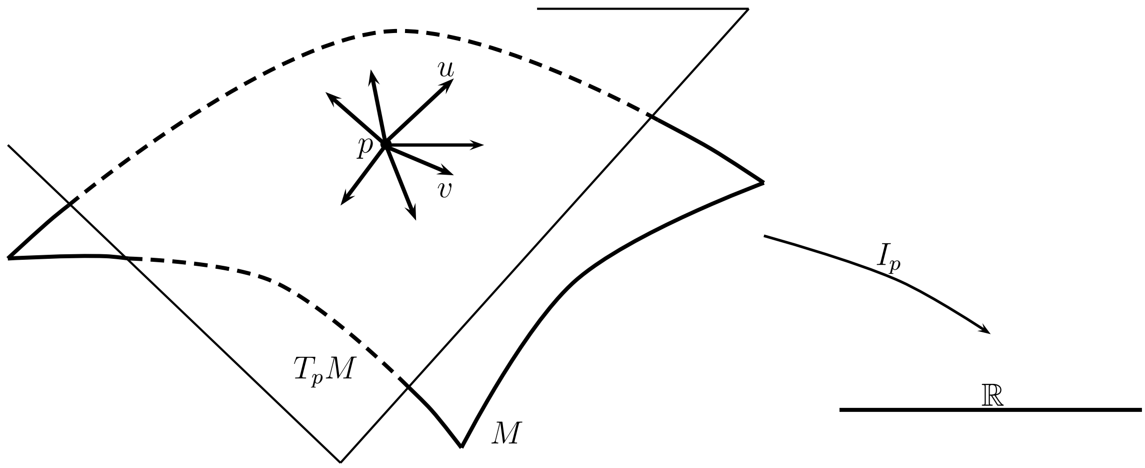

Figura 2.1: M una superficie regular de $\mathbb{R}^3$ y $I_p : T_pM \longrightarrow \mathbb{R}$ la primera forma fundamental, la cual define una forma de medir longitudes de vectores en M.

Ejemplo 2.3. Sea $f : M^n \rightarrow N^{n+k}$ una inmersión, esto es, f diferenciable y $df_p : T_pM \rightarrow T_{f(p)}N$ es inyectiva para todo $p \in M$. Si N tiene una estructura Riemanniana; f induce una estructura Riemanniana en M dada por:

$$\langle u, v\rangle_p = \langle df_p(u), df_p(v)\rangle_{f(p)} \text{ con } u, v \in T_pM$$

La métrica de M es llamada entonces la métrica inducida por f y f es una inmersión isométrica.
Un caso particular importante surge cuando se tiene una función diferenciable $h : M^{n+k} \to N^k$ y $q \in N$ es un valor regular de h. (Esto es $dh_p : T_pM \to T_{h(p)}N$ es sobreyectiva para todo $p \in h^{-1}(q)$). Como $h^{-1}(q) \subset M$ es una subvariedad de M de dimensión n entonces se da la métrica inducida por la inclusión.

Ejemplo 2.4. Sea M_1 y M_2 variedades Riemannianas y considere el producto cartesiano $M_1 \times M_2$ con la estructura diferenciable producto. Sean $\pi_1 : M_1 \times M_2 \longrightarrow M_1$ y $\pi_2 : M_1 \times M_2 \longrightarrow M_2$ las proyecciones naturales. Para introducir en $M_1 \times M_2$ una métrica Riemanniana se hace:

$$\langle u, v\rangle_{(p,q)} = \left\langle (d\pi_1)_{(p,q)}(u), (d\pi_1)_{(p,q)}(v)\right\rangle_p + \left\langle (d\pi_2)_{(p,q)}(u), (d\pi_2)_{(p,q)}(v)\right\rangle_q$$

para todo $(p, q) \in M_1 \times M_2$ y $u, v \in T_{(p,q)}M_1 \times M_2$.

Ahora se muestra como una métrica Riemanniana puede ser usada para calcular longitudes de curvas.

Definición 2.5. *Una aplicación diferenciable $c : I \longrightarrow M$ de un intervalo abierto $I \subset \mathbb{R}$ en una variedad diferenciable M se llama una curva parametrizada.*

Definición 2.6. *Un campo vectorial V a lo largo de una curva $c : I \longrightarrow M$ es una aplicación que a cada $t \in I$ asocia un vector tangente $V(t) \in T_{c(t)}M$. Se dice que V es diferenciable si para toda función diferenciable f en M, la función $t \to V(t)f$ es una función diferenciable en I.*
El campo vectorial $dc\left(\frac{d}{dt}\right)$, indicado por $\frac{dc}{dt}$, es llamado campo velocidad (o tangente) de c.

Definición 2.7. *La restricción de una curva c a un intervalo cerrado $[a, b] \subset I$ se llama un* **segmento**. *Si M es una variedad Riemanniana, se define la longitud de un segmento por*

$$\ell_a^b(c) = \int_a^b \left(\left\langle \frac{dc}{dt}, \frac{dc}{dt}\right\rangle\right)^{1/2} dt.$$

Acontinuación se prueba uno de los teoremas principales de este capítulo y de esta monografía.

Proposición 2.6 (Teorema de existencia para métricas Riemannianas). *Una variedad diferenciable M(de Hausdorff y con base numerable) posee una métrica Riemanniana.*

Demostración. Por la proposición (2.3) sea $\{f_\alpha\}$ una partición diferenciable de la unidad sobre M subordinada a una cobertura $\{V_\alpha\}$ de M por vecindades coordenadas. Como una variedad diferenciable es localmente euclidiana por el ejemplo (2.3) se puede definir una métrica Riemanniana $\langle,\rangle_p^\alpha$ en cada V_α; la inducida por el sistema de coordenadas y el producto usual de $\mathbb{R}^n$. En efecto:
$\mathbf{x}_\alpha^{-1} : \mathbf{x}_\alpha(U_\alpha) \subset M \longrightarrow U_\alpha \subset \mathbb{R}^n$ es un difeomorfismo, entonces por la proposición (1.3) se tiene que $d\left(\mathbf{x}_\alpha^{-1}\right)_p : T_p\mathbf{x}_\alpha(U_\alpha) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es un isomorfismo, esto es,
$\mathbf{x}_\alpha^{-1} : \mathbf{x}_\alpha(U_\alpha) \subset M \longrightarrow U_\alpha \subset \mathbb{R}^n$ es una inmersión y por el ejemplo (2.3) para todo $u, v \in T_p\mathbf{x}_\alpha(U_\alpha)$ se define

$$\langle u, v\rangle_p^\alpha = \left\langle d\left(\mathbf{x}_\alpha^{-1}\right)_p(u), d\left(\mathbf{x}_\alpha^{-1}\right)_p(v)\right\rangle_{\mathbf{x}_\alpha^{-1}(p)}.$$

Ahora gracias al concepto de partición de la unidad se puede generalizar para todo $x, y \in T_pM$. Así:

$$\langle x, y\rangle_p = \sum_\alpha f_\alpha(p)\,\langle x, y\rangle_p^\alpha \text{ para todo } p \in M.$$

Se verifica que la anterior definición es una métrica Riemanniana en M. □

Antes de presentar un ejemplo concreto de métrica Riemanniana, conviene garantizar la existencia de una métrica Riemanniana en todo el espacio proyectivo real $P^n(\mathbb{R})$. En el siguiente ejemplo se prueba que el espacio proyectivo real $P^n(\mathbb{R})$ es de Hausdorff y tiene una base numerable para su topología, para ello se necesita algunas definiciones y lemas.

Ejemplo 2.5 ($P^n(\mathbb{R})$ es una variedad Hausdorff con una base numerable para su topología). Sea X un espacio topológico y $\sim$ una relación de equivalencia sobre X. Se denota por $[x]$ la clase de equivalencia de x y para un subconjunto $A \subset X$ denotemos por $[A] = \bigcup_{a\in A} [a]$, esto es, todo x equivalente a algún elemento de A. Por otro lado $X/\sim$ será indicado como el conjunto de clases de equivalencia y $\pi : X \longrightarrow X/\sim$ la proyección natural que toma cada $x \in X$ y lo envia en su clase de equivalencia $\pi(x) = [x]$.
Con esta notación se define la topología cociente sobre $X/\sim$ así:
$U \subset X/\sim$ es un subconjunto abierto si $\pi^{-1}(U)$ es abierto en X; la proyección π es entonces continua.

Definición 2.8. *Una relación de equivalencia $\sim$ sobre un espacio X es llamada abierta, si cada vez que un subconjunto $A \subset X$ es abierto, entonces $[A]$ es también abierta.*

Lema 2.4. *Una relación de equivalencia $\sim$ sobre X es abierta si, solo si, $\pi : X \longrightarrow X/\sim$ es una función abierta. Cuando $\sim$ es abierta y X tiene una base numerable de conjuntos abiertos, entonces $X/\sim$ tiene una base numerable de conjuntos abiertos.*

Demostración. Para la primera parte se asume que $\pi : X \longrightarrow X/\sim$ es una función abierta, entonces para $A \subset X$ abierto se tiene que $\pi(A)$ es abierto y por definición de topología cociente se garantiza que $\pi^{-1}(\pi(A)) = [A]$ es abierto en X, esto es, $\sim$ es una relación de equivalencia abierta sobre X.
Para la segunda parte, sea $\sim$ una relación de equivalencia abierta sobre X. Sea $A \subset X$ un abierto, entonces por definición $[A]$ es abierta en X y como $[A] = \pi^{-1}(\pi(A))$ entonces se tiene que $\pi(A)$ es abierta por definición de topología cociente sobre $X/\sim$.
Ahora, si se supone que $\sim$ es abierta y X tiene una base numerable $\{U_i\}$ de conjuntos abiertos:
Sea W es un subconjunto abierto de $X/\sim$ entonces $\pi^{-1}(W) = \bigcup_{j\in J} U_j$ para alguna subfamilia de $\{U_i\}$, así:

$$W = \pi(\pi^{-1}(W)) = \bigcup_{j\in J} \pi(U_j),$$

de donde se tiene que $\{\pi(U_i)\}$ es una base numerable de conjuntos abiertos para $X/\sim$. $\square$

Lema 2.5. *Sea $\sim$ una relación de equivalencia abierta sobre un espacio topológico X, entonces $R = \{(x, y)|\ x \sim y\}$ es un subconjunto cerrado del espacio $X \times X$ si, solo si, el espacio cociente $X/\sim$ es Hausdorff.*

Demostración. Primero se supone que $X/\sim$ es Hausdorff y se prueba que R es cerrado. Sea $(x, y) \in R^c$ (R^c denota el complemento de $\mathbb{R}$), esto es, x no esta relacionado con y, así $\pi(x) \neq \pi(y)$ y como $X/\sim$ es Hausdorff, existen vecindades disjuntas U de $\pi(x)$ y V de $\pi(y)$. Sean $\widetilde{U} = \pi^{-1}(U)$ y $\widetilde{V} = \pi^{-1}(V)$ conjuntos abiertos que contienen a x y a y respectivamente.
Si el conjunto abierto $\widetilde{U} \times \widetilde{V}$ que contiene a (x, y) intersecta a R entonces $\widetilde{U} \times \widetilde{V}$ debe contener un punto (x', y') para el cual $x' \sim y'$, esto es, $\pi(x') = \pi(y')$ contradiciendo el hecho que $U \cap V = \Phi$. Por lo tanto $\widetilde{U} \times \widetilde{V}$ no intersecta a R, así que para $(x, y) \in R^c$, existe $\widetilde{U} \times \widetilde{V} \subset R^c$, esto es, el complemento de R es abierto, lo que implica que R es cerrado.

Para la otra parte se supone que R es cerrado y se prueba que $X/\sim$ es Hausdorff. Dados cualesquier par de puntos distintos $\pi(x)$,$\pi(x)$ en $X/\sim$, existe un conjunto abierto de la forma $\widetilde{U} \times \widetilde{V}$ conteniendo a (x, y) y el cual no tiene puntos en R, pues R es cerrado. Esto muestra que $U = \pi(\widetilde{U})$ y $V = \pi(\widetilde{V})$ son disjuntos y como $\sim$ es una relación abierta el lema (2.4) implica que U y V son abiertos. Así que para todo $\pi(x) \neq \pi(y)$ en $X/\sim$ existen vecindades U y V repectivamente tal que $U \cap V = \Phi$, esto es, $X/\sim$ es Hausdorff. $\square$

Con lo anterior se prueba lo afirmado para $P^n(\mathbb{R})$.

Demostración. Del ejemplo (1.1) se tiene que $P^n(\mathbb{R}) \equiv X/\sim$, donde $X = \mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ y para $x, y \in X$; $x \sim y$ si, solo si, $x = ty$, $t \neq 0$ en $\mathbb{R}$.
Primero se prueba que $\pi : X \longrightarrow P^n(\mathbb{R})$ es una función abierta. Si $t \neq 0$ es un número real, sea $\varphi_t : X \longrightarrow X$ una función dada por $\varphi_t(x) = tx$, esta función es un homeomorfismo, con $\varphi_t^{-1} = \varphi_{1/t}$.
Si $U \subset X$ es un conjunto abierto, entonces $[U] = \bigcup_{u \in U} [u] = \bigcup \varphi_t(U)$, siendo esta unión para todo real $t \neq 0$. Como φ_t es un homeomorfismo entonces φ_t es una función abierta, así que $\varphi_t(U)$ es abierto en X, lo que implica que $[U]$ es abierto en X, esto es, $\sim$ es una relación de equivalencia abierta y por el lema (2.4) π es una función abierta.
Como $\sim$ es abierta y $X = \mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ tiene una base numerable de conjuntos abiertos entonces por el lema (2.4), $P^n(\mathbb{R})$ tiene una base numerable de conjuntos abiertos.
Ahora se prueba que $P^n(\mathbb{R})$ es Hausdorff: Sobre la subvariedad abierta $X \times X \subset \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1}$ se define una función $f : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$f(x, y) = \sum_{i \neq j} (x_i y_j - x_j y_i)^2.$$

La función f es continua y $f(x, y) = 0$ si, solo si, $y = tx$, esto es, si, solo si, $x \sim y$. Así $f^{-1}(0) = \{(x, y) |\ x \sim y\} = R$ es un subconjunto cerrado, puesto que $\{0\} \subset \mathbb{R}$ es cerrado y f es continua. Por el lema (2.5) tenemos que $P^n(\mathbb{R})$ es Hausdorff. $\square$

Dado que $P^n(\mathbb{R})$ es una variedad Hausdorff con una base numerable para su topología el teorema (2.6) garantiza la existencia de un métrica Riemanniana en $P^n(\mathbb{R})$. El siguiente ejemplo es un caso particular de una métrica sobre $P^2(\mathbb{R})$.

Ejemplo 2.6 (Métrica inducida por $\mathbb{R}^4$ a $P^2(\mathbb{R})$). Sea $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ dada por $F(x, y, z) = (x^2 - y^2, xy, xz, yz)$; $(x, y, z) = p \in \mathbb{R}^3$.

Sea $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ la esfera unitaria con centro en el origen $0 \in \mathbb{R}^3$. Observe que la restricción $\varphi = F|_{S^2}$ es tal que $\varphi(p) = \varphi(-p)$, y considere la aplicación

$$\phi : P^2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^4$$

$$[p] \longmapsto \phi\left([p]\right) = \varphi(p)$$

Primero se prueba que ϕ es una inmersión:
$\phi : P^2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^4$ es diferenciable en $[p] \in P^2(\mathbb{R})$, puesto que para todo $[p] \in P^2(\mathbb{R})$ existe una parametrización $\mathbf{x}_i : \mathbb{R}^2 \longrightarrow P^2(\mathbb{R})$ de $P^2(\mathbb{R})$ en $[p]$ y una parametrización $j : V \subset \mathbb{R}^4 \longrightarrow V$ de $\mathbb{R}^4$ en $\phi([p])$ donde V es una vecindad de $\phi([p])$ en $\mathbb{R}^4$ y j es la aplicación identidad, tal que

$$j^{-1} \circ \phi \circ \mathbf{x}_i : \mathbb{R}^2 \longrightarrow V \subset \mathbb{R}^4,$$

es diferenciable en $\mathbf{x}_i^{-1}([p])$. En efecto:

$$\begin{aligned} j^{-1} \circ \phi \circ \mathbf{x}_i(\mathbf{x}_i^{-1}([p])) &= j^{-1} \circ \phi([p]) \\ &= j^{-1}(\varphi(p)) \\ &= j^{-1}(\varphi(x, y, z)) \\ &= (x^2 - y^2, xy, xz, yz). \end{aligned}$$

Por otro lado, la diferencial $d\phi_{[p]} : T_{[p]}P^2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^4$ es inyectiva para todo $[p] \in P^2(\mathbb{R})$. Como $d\phi_{[p]}$ es una transformación lineal se debe probar que $ker(d\phi_{[p]}) = \{0\}$, lo cual es equivalente a probar:
Si $d\phi_{[p]}(v) = (0, 0, 0, 0)$ entonces v es el elemento nulo de $T_{[p]}P^2(\mathbb{R})$. En efecto;
Sea $\alpha : \mathbb{R} \longrightarrow P^2(\mathbb{R})$ dada por $\alpha(t) = \mathbf{x}_1(\mathbf{x}_1^{-1}([p]) + tv)$, donde

$$\mathbf{x}_1 = \pi \circ \mathbf{y}_1 : U_1 \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow P^2(\mathbb{R})$$

esta dada por

$$\mathbf{x}_1(u, v) = \left[(u, v, \sqrt{1 - u^2 - v^2})\right],$$

$\pi : S^2 \longrightarrow P^2(\mathbb{R})$ es la proyección canónica, es decir $\pi(p) = [p] = \{p, -p\}$ y
$\mathbf{y}_1 : U_1 \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow S^2$ es la parametrización de la esfera S^2, dada por
$\mathbf{y}_1(u, v) = (u, v, \sqrt{1 - u^2 - v^2})$, donde

$$U_1 = \left\{(u, v) |\ u^2 + v^2 < 1\right\}.$$

Así,

$$\begin{aligned}\alpha(t) &= \mathbf{x}_1(u+tv_1, v+tv_2)\\ &= \left[\left(u+tv_1\ ,\ v+tv_2\ ,\ \sqrt{1-(u+tv_1)^2-(v+tv_2)^2}\right)\right].\end{aligned}$$

$$\beta(t)=\phi(\alpha(t))=\varphi\left(u+tv_1\ ,\ v+tv_2\ ,\ \sqrt{1-(u+tv_1)^2-(v+tv_2)^2}\right).$$

$$\begin{aligned}\beta(t) = &\ \big((u+tv_1)^2-(v+tv_2)^2\ ,\ (u+tv_1)(v+tv_2)\ ,\\ &,(u+tv_1)\sqrt{1-(u+tv_1)^2-(v+tv_2)^2}\ ,\ (v+tv_2)\sqrt{1-(u+tv_1)^2-(v+tv_2)^2}\Big).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\beta^{'}(0) = &\left(2v_1u-2v_2v\ ,\ uv_2+vv_1\ ,\ v_1\sqrt{1-u^2-v^2}-u\left(\frac{uv_1+vv_2}{\sqrt{1-u^2-v^2}}\right),\right.\\ &\left.,v_2\sqrt{1-u^2-v^2}-v\left(\frac{uv_1+vv_2}{\sqrt{1-u^2-v^2}}\right)\right)=d\phi_{[p]}(v).\end{aligned}$$

Ahora como,

$$d\phi_{[p]}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}([p])\right)=\left(2u, v, \sqrt{1-u^2-v^2}-\frac{u^2}{\sqrt{1-u^2-v^2}}, \frac{-uv}{\sqrt{1-u^2-v^2}}\right)$$

y

$$d\phi_{[p]}\left(\frac{\partial}{\partial x_2}([p])\right)=\left(-2v, u, \frac{-uv}{\sqrt{1-u^2-v^2}}, \sqrt{1-u^2-v^2}-\frac{v^2}{\sqrt{1-u^2-v^2}}\right).$$

Son dos vectores linealmente independientes y

$$d\phi_{[p]}\left(T_{[p]}P^2(\mathbb{R})\right)=T_{\phi([p])}\phi\left(P^2(\mathbb{R})\right),$$

entonces los vectores forman una base para $T_{\phi([p])}\phi\left(P^2(\mathbb{R})\right)$.
Luego, si $d\psi_{[p]}(v)=(0,0,0,0)$ entonces v es el elemento nulo de $T_{[p]}P^2(\mathbb{R})$. Por lo tanto ϕ induce una estructura riemanniana en $P^2(\mathbb{R})$ dada por

$$\langle x,y\rangle_{[p]}=\left\langle d\phi_{[p]}(x), d\phi_{[p]}(y)\right\rangle_{\phi([p])},\ \textit{para todo}\ x,y\in T_{[p]}P^2(\mathbb{R}).$$

En este caso los g_{ij} están dados por:

$$g_{12}\left([p]\right)=\frac{uv(6v^2+6u^2-5)}{1-u^2-v^2}=g_{21}\left([p]\right)$$

$$g_{11}\left([p]\right)=\frac{1-v^2}{1-u^2-v^2}$$

$$g_{22}\left([p]\right)=\frac{1-u^2}{1-u^2-v^2}.$$

Así la matriz de los g_{ij} es:

$$(g_{ij})([p]) = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{1-u^2-v^2} \begin{pmatrix} 1-v^2 & uv(6v^2+6u^2-5) \\ uv(6v^2+6u^2-5) & 1-u^2 \end{pmatrix}.$$

El siguiente capítulo es en verdad donde se hace cálculo diferencial en variedades Riemannianas. Se dedicará este tema a dar condiciones para garantizar la existencia y unicidad de operadores diferenciales como el gradiente, la divergencia y el operador laplaciano sobre variedades Riemannianas que son objeto de esta monografía.

Capítulo 3

Cálculo en variedades Riemannianas

La introducción por Levi-Civita del concepto de paralelismo supuso un extraordinario avance en la geometría diferencial. En el caso de superficies en $\mathbb{R}^3$ existe un concepto equivalente, llamado *derivada covariante*, que puede ser descrito como sigue:
Considere $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie regular, $c : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow S$ una curva parametrizada en S y $V : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ un campo de vectores tangente a S a lo largo de c. En general, el vector $\frac{dV}{dt}(t)$ no pertenece al plano tangente $T_{c(t)}S$, por lo que se considera el vector obtenido al proyectar ortogonalmente $\frac{dV}{dt}(t)$ sobre $T_{c(t)}S$, que se denota por $\frac{DV}{dt}(t)$ (ver figura 3.1). Dicho vector se denomina la derivada covariante de V en $c(t)$, y la importancia de esta elección radica en el hecho de que la derivada covariante es un concepto intrínseco de la superficie, pues sólo depende de la primera forma fundamental (ver Manfredo P. Do Carmo. *Differential Geometry of Curves and Surfaces*. Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA). Río de Janeiro, Brasil. Primera Edición. New Jersey, 1976. Capítulo II, pagina 102).
La siguiente definición da una noción de derivación de campos de vectores a lo largo de curvas sobre variedades diferenciables con ciertas propiedades.

3.1. Conexiones afines

Se indica por $\chi(M)$ el conjunto de los campos de vectores de clase C^∞ en M y por $D(M)$ el de las funciones reales de clase C^∞ definidas en M.

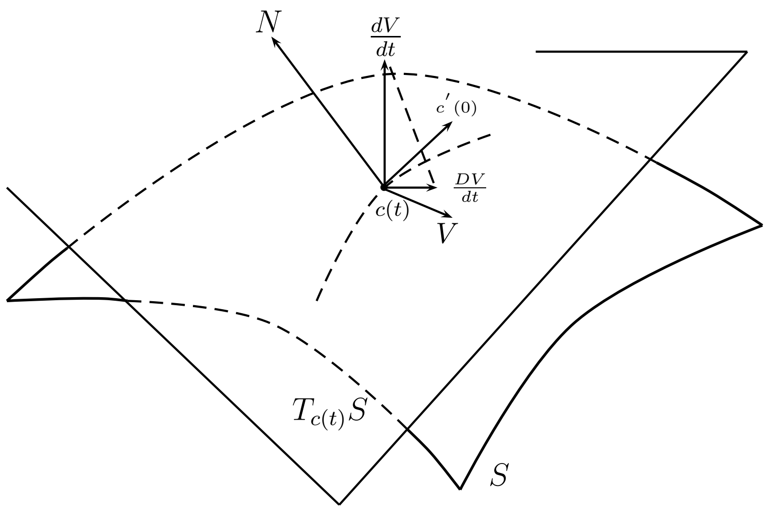

Figura 3.1: S una superficie regular de $\mathbb{R}^3$, $c : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow S$ una curva parametrizada en S, la proyección del vector $\frac{dV}{dt}(t)$ sobre el plano tangente $T_{c(t)}S$ denotado $\frac{DV}{dt}(t)$, se denomina *derivada covariante* en $c(t)$ del campo vectorial V con respecto al vector $c^{'}(0)$.

Definición 3.1. *Una conexión afín* ∇ *en una variedad diferenciable* M *es una aplicación:* $\nabla : \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow \chi(M)$ *dada por* $\nabla(X, Y) = \nabla_X Y$ *que satisface las siguientes propiedades:*

1. $\nabla_{fX+gY}Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z.$

2. $\nabla_X(Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z.$

3. $\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y,$ *donde* $X, Y, Z \in \chi(M)$ *y* $f, g \in D(M)$.

El propósito de introducir este concepto es el de desarrollar una teoría satisfactoria de diferenciación en variedades, teniendo propiedades similares a las que se satisfacen en $\mathbb{R}^n$. El término "conexión"no tiene un significado especial y hay que interpretarlo justamente como un operador, en un sentido similar a la derivada direccional.
Para interpretar esta definición se tiene el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.1. Sea $M = \mathbb{R}^n$ y sean X , $Y \in \chi(\mathbb{R}^n)$. Se indica por $Y = (y_1, y_2, ..., y_n)$, las componentes del campo Y en las coordenadas naturales de $\mathbb{R}^n$, así se obtiene

$$
\begin{aligned}
\nabla_X Y(p) &= (X(y_1)(p)\ ,\ X(y_2)(p)\ , ...,\ X(y_n)(p)) \\
&= \left(\frac{d}{dt}(y_1 \circ \alpha(t)) \Big|_{t=0}, \frac{d}{dt}(y_2 \circ \alpha(t)) \Big|_{t=0}, ..., \frac{d}{dt}(y_n \circ \alpha(t)) \Big|_{t=0} \right) \\
&= \frac{d}{dt}(y_1(\alpha(t))\ ,\ y_2(\alpha(t))\ , ...,\ y_n(\alpha(t))) \Big|_{t=0} \\
&= \frac{d}{dt} Y(\alpha(t)) \Big|_{t=0} \\
&= dY_p(X_p),\ donde\ \alpha(0) = p\ y\ \alpha'(0) = X_p.
\end{aligned}
$$

El siguiente ejemplo se deduce de manera natural del ejemplo 3.1.

Ejemplo 3.2. Dada $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow M$ se puede asociar una conexión afín en M con dominio $\mathbf{x}(U)$. Si X, $Y \in \chi(M)$ y si $Y = \sum_i y_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ se define:

$$\nabla_X Y = \sum_i X(y_i) \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Esta ecuación satisface las propiedades deseadas.
la definición 3.1 no es tan transparente en cuanto a lo de estructura Riemanniana. La siguiente Proposición, entre tanto, debe aclarar un poco la situación.

Proposición 3.1. *Sea M una variedad diferenciable con una conexión afín ∇. Entonces existe una única correspondencia que asocia a un campo vectorial V a lo largo de una curva diferenciable $c : I \longrightarrow M$ un otro campo vectorial $\frac{DV}{dt}$ a lo largo de c, denominado derivada covariante de V a lo largo de c, tal que:*

1. $\frac{D}{dt}(V + W) = \frac{DV}{dt} + \frac{DW}{dt}$.
2. $\frac{D}{dt}(fV) = \frac{df}{dt}V + f\frac{DV}{dt}$, *donde W es un campo de vectores a lo largo de c y f es una función diferenciable en I.*
3. *Sí V es inducido por un campo de vectores $Y \in \chi(M)$, $V(t) = Y(c(t))$, entonces* $\frac{DV}{dt} = \nabla_{\frac{dc}{dt}} Y$.

Observación 3.1. Antes de la prueba, resulta de particular interés la expresión local de la conexión, ya que asociada a ella aparecen los coeficientes de la conexión o *símbolos de*

Christoffel.

La ultima linea (3) tiene sentido, pues $\nabla_X Y(p)$ depende solo del valor de $X(p)$ y del valor de Y a lo largo de una curva tangente a X en p. En efecto, la parte (3) de la definición anterior permite mostrar que la noción de conexión afín es, de hecho, una noción local. Escogiendo un sistema de coordenadas $\mathbf{x}\,(x_1, \cdots, x_n)$ en torno de p y escribiendo:

$$X = \sum_i x_i X_i, \quad Y = \sum_j y_j Y_j$$

donde $X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$, se tiene

$$\begin{aligned} \nabla_X Y &= \sum_i x_i \nabla_{X_i} \left(\sum_j y_j X_j \right) \\ &= \sum_{ij} x_i y_j \nabla_{X_i} X_j + \sum_{ij} x_i X_i(y_j) X_j, \end{aligned}$$

haciendo $\nabla_{X_i} X_j = \sum\limits_k \Gamma_{ij}^k X_k$, se concluye que Γ_{ij}^k son funciones diferenciables y que

$$\nabla_X Y = \sum_k \left(\sum_{ij} x_i y_j \Gamma_{ij}^k + X(y_k) \right) X_k,$$

lo que muestra que $\nabla_X Y(p)$ solo depende de $x_i(p)$, $y_k(p)$ y de las derivadas de las funciones componentes de Y, esto es, de las derivadas $X(y_k)(p)$ de y_k en la dirección de X_p.

Definición 3.2. *Las funciones Γ_{ij}^k se denominan los coeficientes de la conexión o símbolos de Christoffel asociados a la parametrización $\mathbf{x}$.*

Observación 3.2. La proposición anterior muestra que la escogencia de una conexión afín en M da origen a una derivada bien definida (satisfaciendo (1) y (2)) de campos de vectores a lo largo de curvas. La noción de conexión proporciona, por lo tanto, una manera de derivar vectores a lo largo de curvas, en particular es posible hablar de aceleración de una curva en M.

Demostración de la proposición 3.1. Se supone inicialmente que existe una correspondencia satisfaciendo (1), (2) y (3). Sea $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow M$ un sistema de coordenadas con $c(I) \cap \mathbf{x}(U) \neq \Phi$ y sea $(x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t))$ la expresión local de $c(t)$, $t \in I$. Sea $X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$, entonces se puede expresar el campo V localmente como $V = \sum\limits_j v^j X_j$,

$j = 1, 2, \cdots, n$, donde $v^j = v^j(t)$ y $X_j = X_j(c(t))$.
Por (1) y (2), se tiene

$$\frac{DV}{dt} = \sum_j \frac{dv^j}{dt} X_j + \sum_j v^j \frac{DX_j}{dt}.$$

Por (3) y la definición de conexión afín,

$$\begin{aligned} \frac{DX_j}{dt} &= \nabla_{\frac{dc}{dt}} X_j = \nabla_{\left(\sum \frac{dx_i}{dt} X_i\right)} X_j \\ &= \sum_i \frac{dx_i}{dt} \nabla_{X_i} X_j, \quad i, j = 1, 2, ..., n. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\frac{DV}{dt} = \sum_j \frac{dv^j}{dt} X_j + \sum_{i,j} \frac{dx_i}{dt} v^j \nabla_{X_i} X_j.$$

Cambiando j por k en la primera suma y utilizando la expresión $\nabla_{X_i} X_j = \sum\limits_k \Gamma^k_{ij} X_k$ se obtiene

$$\frac{DV}{dt} = \sum_k \left\{ \frac{dv^k}{dt} + \sum_{i,j} \frac{dx_i}{dt} v^j \Gamma^k_{ij} \right\} X_k. \tag{3.1}$$

Lo que muestra que si existe una correspondencia satisfaciendo las condiciones de la proposición 3.1, entonces tal correspondencia es única. Para mostrar la existencia, se define $\frac{DV}{dt}$ en $\mathbf{x}(U)$ por (3.1). Verificando que (3.1) posee las propiedades deseadas.
Sí $\mathbf{y}(W)$ es otra vecindad coordenada, con $\mathbf{y}(W) \cap \mathbf{x}(U) \neq \Phi$ y se define $\frac{DV}{dt}$ en $\mathbf{y}(W)$ por (3.1), las definiciones coinciden en $\mathbf{y}(W) \cap \mathbf{x}(U)$, por la unicidad de $\frac{DV}{dt}$ en $\mathbf{x}(U)$, así que la definición puede ser extendida a todo M. $\square$

La noción de paralelismo surge ahora de manera natural.

Definición 3.3. *Sea M una variedad diferenciable con una conexión afín ∇. Un campo vectorial V a lo largo de una curva $c : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow M$ es paralelo cuando $\frac{DV}{dt} = 0$, para todo $t \in I$.*

Ejemplo 3.3. En el caso de las superficies un campo vectorial tangente a un meridiano (parametrizado por la longitud de arco) de la esfera S^2 es un campo paralelo en S^2. (Ver figura 3.2). En efecto, como un meridiano es un círculo máximo de S^2, la derivada covariante, que en este caso coincide con la derivada usual en $\mathbb{R}^n$ de dicho campo es normal a S^2. En consecuencia, su derivada covariante es cero.

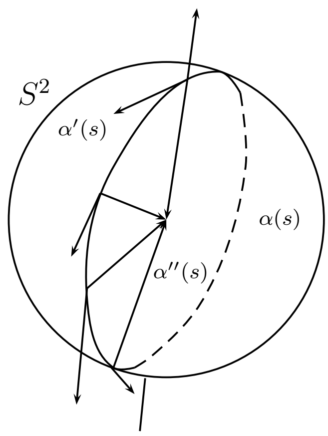

Figura 3.2: $\alpha^{'}$ campo paralelo sobre el meridiano parametrizado por longitud de arco, donde $\frac{D\alpha^{'}}{dt} = \alpha^{''}$, la cual es normal a S^2.

Proposición 3.2. *Sea M una variedad diferenciable con una conexión afín ∇. Sea $c : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow M$ una curva diferenciable en M y V_0 un vector tangente a M en $c(t_0)$, $t_0 \in I$ $(V_0 \in T_{c(t_0)}M)$. Entonces existe un único campo de vectores paralelo V a lo largo de c tal que $V(t_0) = V_0$, ($V(t)$ es llamado el transporte paralelo de $V(t_0)$ a lo largo de c). (Ver figura 3.3)*

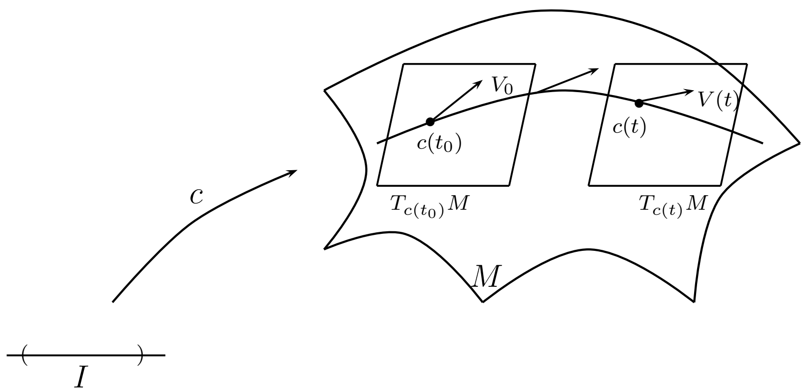

Figura 3.3: Interpretación geométrica de la proposición (3.2), donde V_0 es un vector fijo de $T_{c(t_0)}M$. $V(t)$ es el *transporte paralelo* del vector $V(t_0) = V_0$ a lo largo de c.

Demostración. Se admite primero que el teorema es aprobado para el caso en que $c(I)$ esta

contenido en una vecindad coordenada. Por compacidad, para todo $t_1 \in I$, el segmento $c([t_0, t_1]) \subset M$puede ser cubierto por un numero finito de vecindades coordenadas, en cada una de las cuales V puede ser definido, por hipótesis. Por la unicidad, las definiciones coinciden en las intersecciones no vacias, lo que permite definir V para todo $[t_0, t_1]$.
Por lo tanto se debe probar el teorema en el caso en que $c(I)$ esta contenido en una vecindad coordenada $\mathbf{x}(U)$ de un sistema de coordenadas $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow M$ en torno de $c(I)$. Sea

$$\mathbf{x}^{-1}(c(t)) = (x_1(t), ..., x_n(t))$$

la expresión local de $c(t)$ y sea

$$V_0 = \sum_j v_0^j X_j, \ donde \ X_j = \frac{\partial}{\partial x_j}(c(t_0)).$$

Se supone que existe un V en $\mathbf{x}(U)$ que es paralelo a lo largo de c con $V(t_0) = V_0$. Entonces $V = \sum\limits_j v^j X_j$ satisface

$$\frac{DV}{dt} = \sum_k \left\{ \frac{dv^k}{dt} + \sum_{i,j} \frac{dx_i}{dt} v^j \Gamma_{ij}^k \right\} X_k = 0.$$

El sistema de n ecuaciones diferenciales en v^k,

$$\frac{dv^k}{dt} + \sum_{i,j} \frac{dx_i}{dt} v^j \Gamma_{ij}^k = 0, \quad k = 1, 2, ..., n$$

posee una única solución satisfaciendo la condición inicial $v^k(t_0) = v_0^k$. Luego si V existe es único. Además, como el sistema es lineal, la solución esta definida para todo $t \in I$, lo que muestra la existencia de un único V con las propiedades deseadas. $\square$

La siguiente sección es una de las más importantes de este capítulo, pues motiva a presentar el teorema de Levi-Civita; el cual garantiza que la escogencia de una métrica Riemanniana en una variedad M determina univocamente una cierta conexión afín en M.

3.2. Conexión Riemanniana

Definición 3.4. *Sea M una variedad diferenciable con una conexión afín ∇ y una métrica Riemanniana $\langle , \rangle$. La conexión es dicha compatible con la métrica, cuando para toda curva* *diferenciable $c : I \in \mathbb{R} \longrightarrow M$ y cualquier campos de vectores paralelos P y P' a lo largo de c, se tiene que $\left\langle P, P' \right\rangle = constante$.*

La definición 3.4 es justificada por la siguiente proposición.

Proposición 3.3. *Sea M una variedad Riemanniana. Una conexión en M es compatible con la métrica si, solo si, para todo par V y W campos de vectores a lo largo de la curva diferenciable $c : I \in \mathbb{R} \longrightarrow M$ se tiene*

$$\frac{d}{dt}\langle V, W\rangle = \left\langle \frac{Dv}{dt}, W \right\rangle + \left\langle V, \frac{DW}{dt} \right\rangle, \ t \in I.$$

Demostración. Para la primera parte se escoge una base ortonormal $\{P_1(t_0), ..., P_n(t_0)\}$ de $T_{c(t_0)}M$, $t_0 \in I$. Utilizando la proposición 3.2, se extiende paralelamente cada uno de los vectores $P_i(t_0)$, $i = 1, ..., n$, a lo largo de c. Como ∇ es compatible con la métrica, $\{P_1(t), ..., P_n(t)\}$ es una base ortonormal de $T_{c(t)}M$, para todo $t \in I$. Luego se puede escribir

$$V = \sum_i v^i P_i, \quad W = \sum_i w^i P_i, \quad i = 1, 2, ..., n,$$

donde v^i y w^i son funciones diferenciables en I. Síguese de ahí que

$$\frac{DV}{dt} = \sum_i \frac{dv^i}{dt} P_i, \quad \frac{DW}{dt} = \sum_i \frac{dw^i}{dt} P_i.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{Dv}{dt}, W \right\rangle + \left\langle V, \frac{DW}{dt} \right\rangle &= \sum_i \left\{ \frac{dv^i}{dt} w^i + \frac{dw^i}{dt} v^i \right\} \\ &= \frac{d}{dt} \left\{ \sum_i v^i w^i \right\} \\ &= \frac{d}{dt} \langle V \ , \ W \rangle \end{aligned}$$

Para la reciproca basta tomar V y W como campos paralelos a lo largo de c, de donde se tiene que

$$\frac{d}{dt}\langle V \ , \ W\rangle = 0,$$

es decir que $\langle V \ , \ W \rangle = constante$. □

Corolario 3.1. *Una conexión ∇ en una variedad Riemanniana M es compatible con la métrica si, solo si,*

$$X\langle Y,Z\rangle = \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle\,, \quad X,Y,Z\in\chi(M)$$

Demostración. Para la primera parte se supone que ∇ es compatible con la métrica. Sea $p\in M$ y sea $c: I\subset\mathbb{R}\longrightarrow M$ una curva diferenciable con $c(t_0)=p$, $t_0\in I$ y con $\frac{dc}{dt}|_{t=t_0}=X(p)$. Entonces

$$\begin{aligned}
X(p)\langle Y\ ,\ Z\rangle &= \frac{d}{dt}\langle Y\ ,\ Z\rangle|_{t=t_0}\\
&= \left\langle \frac{DY}{dt}\ ,\ Z\right\rangle + \left\langle Y\ ,\ \frac{DZ}{dt}\right\rangle_p\\
&= \left\langle \nabla_{X(p)}Y\ ,\ Z\right\rangle_p + \left\langle Y\ ,\ \nabla_{X(p)}Z\right\rangle_p,
\end{aligned}$$

puesto que

$$\begin{aligned}
Y=Y(c(t)),\ \textit{implica}\ \frac{DY}{dt} &= \nabla_{\frac{dc}{dt}}Y=\nabla_{X(p)}Y\\
Z=Z(c(t)),\ \textit{implica}\ \frac{DZ}{dt} &= \nabla_{\frac{dc}{dt}}Z=\nabla_{X(p)}Z.
\end{aligned}$$

Como p es arbitrario, se tiene el resultado.
La parte reciproca es evidente por la proposición 3.3, pues

$$X(p)\langle Y\ ,\ Z\rangle = \left\langle \nabla_{X(p)}Y\ ,\ Z\right\rangle_p + \left\langle Y\ ,\ \nabla_{X(p)}Z\right\rangle_p$$

implica que la conexión ∇ es compatible con la métrica. $\square$

Definición 3.5. *Una conexión afín ∇ en una variedad diferenciable M es dicha simétrica cuando*

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X,Y]\,,\ \textit{para todo}\ X\ ,\ Y\in\chi(M).$$

Observación 3.3. En un sistema de coordenadas $(U,\mathbf{x})$, el hecho de que la conexión ∇ sea simétrica implica que para todo $i,j=1,2,...,n$;

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}}\frac{\partial}{\partial x_j} - \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}}\frac{\partial}{\partial x_i} = \left[\frac{\partial}{\partial x_i},\frac{\partial}{\partial x_j}\right]=0,$$

lo que es equivalente a

$$\sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k\frac{\partial}{\partial x_k} = \sum_{k=1}^n \Gamma_{ji}^k\frac{\partial}{\partial x_k},$$

esto es, $\Gamma_{ij}^k=\Gamma_{ji}^k$.

Se puede ahora enunciar el teorema fundamental de este capitulo.

Teorema 3.1 (Levi-Civita). *Dada una variedad Riemanniana M, existe una única conexión afín ∇ en M satisfaciendo las condiciones:*

1. *∇ es simétrica.*
2. *∇ es compatible con la métrica Riemanniana.*

Demostración. Como siempre, se supone inicialmente la existencia de una tal conexión ∇. Entonces

$$\begin{aligned} X\langle Y,Z\rangle &= \langle\nabla_X Y,Z\rangle+\langle Y,\nabla_X Z\rangle, & (3.2)\\ Y\langle Z,X\rangle &= \langle\nabla_Y Z,X\rangle+\langle Z,\nabla_Y X\rangle, & (3.3)\\ Z\langle X,Y\rangle &= \langle\nabla_Z X,Y\rangle+\langle X,\nabla_Z Y\rangle, & (3.4)\end{aligned}$$

Sumando (3.2) y (3.3) y restando (3.4), tenemos, usando la simétria de ∇, que

$$= X\langle Y,Z\rangle+Y\langle Z,X\rangle-Z\langle X,Y\rangle$$

$$\langle[X,Z],Y\rangle+\langle[Y,Z],X\rangle+\langle[X,Y],Z\rangle+2\langle Z,\nabla_Y X\rangle.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}\langle Z,\nabla_Y X\rangle = & \tfrac{1}{2}\quad \{X\langle Y,Z\rangle+Y\langle Z,X\rangle & (3.5)\\ - & \quad Z\langle X,Y\rangle-\langle[X,Z],Y\rangle-\langle[Y,Z],X\rangle-\langle[X,Y],Z\rangle\}.\end{aligned}$$

La expresión (3.5) muestra que ∇ esta univocamente determinada por la métrica $\langle,\rangle$. Por lo tanto si existe la conexión con las propiedades (1) y (2) del teorema (3.1) esta debe ser única.
Para mostrar la existencia, se define la conexión ∇ por (3.5). Se verifica que ∇ está bien definida y satisface las propiedades deseadas. □

Definición 3.6. *La conexión dada por el teorema anterior es llamada conexión de Levi-Civita (o Riemanniana) de M.*

Observación 3.4. En un sistema de coordenadas $(U,\mathbf{x})$, de la expresión (3.5) se tiene

$$\sum_{\ell}\Gamma^{\ell}_{ij}g_{\ell k}=\frac{1}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial x_i}g_{jk}+\frac{\partial}{\partial x_j}g_{ki}-\frac{\partial}{\partial x_k}g_{ij}\right\},$$

donde $g_{ij} = \langle X_i\ ,\ X_j \rangle = \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}\ ,\ \frac{\partial}{\partial x_i} \right\rangle$.
Como la matriz (g^{km}) admite inversa (g_{km}), se tiene que

$$\Gamma_{ij}^{m} = \frac{1}{2} \sum_{k} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} g_{jk} + \frac{\partial}{\partial x_j} g_{ki} - \frac{\partial}{\partial x_k} g_{ij} \right\} g^{km}. \tag{3.6}$$

La ecuación (3.6) es la expresión clásica de los *símbolos de Christoffel* de la conexión Riemanniana en términos de los g_{ij} (dados por la métrica).

3.3. Geodésicas y aplicación exponencial

En lo que sigue M será una variedad Riemanniana, es decir, dotada de una conexión Riemanniana.

Definición 3.7. *Una curva parametrizada $\gamma : I \longrightarrow M$ es una* **geodésica** *en $t_0 \in I$ si $\frac{D}{dt}\left(\frac{d\gamma}{dt}\right) = 0$ en el punto t_0. Si γ es una geodésica en t, para todo $t \in I$, se dice que γ es una geodésica.*
Si $[a,b] \subset I$ y $\gamma : I \longrightarrow M$ es una geodésica, la restricción de γ a $[a,b]$ es llamada (segmento de) **geodésica ligando** *$\gamma(a)$* **a** *$\gamma(b)$.*

A veces, por un abuso de lenguaje, se llama geodésica a la imagen $\gamma(I)$ de una geodésica γ. Sí $\gamma : I \longrightarrow M$ es una geodésica, entonces

$$\frac{d}{dt}\left\langle \frac{d\gamma}{dt}\ ,\ \frac{d\gamma}{dt} \right\rangle = 2\left\langle \frac{D}{dt}\frac{d\gamma}{dt}\ ,\ \frac{d\gamma}{dt} \right\rangle = 0,$$

esto es, la longitud del vector tangente $\frac{d\gamma}{dt}$ es constante, es decir la velocidad de una geodésica es siempre constante en norma. si se supone, de ahora en adelante, que $\|\frac{d\gamma}{dt}\| = c \neq 0$, esto es, se excluye las geodésicas que se reducen a puntos. La longitud de arco s de γ, a partir de un origen fijo, $t = t_0$, esta dado por

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} \|\frac{d\gamma}{dt}\| dt = c(t - t_0).$$

Por lo tanto, el parámetro de una geodésica es proporcional a la longitud de arco. Cuando el parámetro es la propia longitud de arco, esto es, $c = 1$ se dice que la geodésica γ está *normalizada*.

Ahora se determina las ecuaciones locales satisfechas por una geodésica γ en un sistema de coordenadas $(U, \mathbf{x})$ en torno de $\gamma(t_0)$. En U,

$$\gamma(t) = (x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t)) .$$

γ será geodésica si, solo si,

$$\frac{D}{dt}\left(\frac{d\gamma}{dt}\right) = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{d^2x_k}{dt^2} + \sum_{i,j}\Gamma_{ij}^{k}\frac{dx_i}{dt}\frac{dx_j}{dt}\right)\frac{\partial}{\partial x_k} = 0.$$

Si, solo si, satisface el sistema de ecuaciones diferenciales de segundo orden

$$\frac{d^2x_k}{dt^2} + \sum_{i,j}\Gamma_{ij}^{k}\frac{dx_i}{dt}\frac{dx_j}{dt} = 0, \;\; k = 1, 2, ..., n. \tag{3.7}$$

El cual tiene solución única para cada elección de $x_k(t_0)$, $x_k^{'}(t_0) \in \mathbb{R}$, $1 \leq k \leq n$ (siendo $t_0 \in I$).
En realidad este sistema de EDO de segundo orden sobre M puede convertirse en un sistema de EDO de primer orden sobre el fibrado tangente TM.

$$TM = \{(p, v)|\ p \in M^n \ y \ v \in T_pM^n\} .$$

Dado un sistema de coordenadas $(U, \mathbf{y})$ de TM, se puede ver el fibrado tangente localmente un producto ($TU = U \times \mathbb{R}^n$).
Cualquier curva diferenciable $t \longrightarrow \gamma(t)$ en M determina una curva $t \longrightarrow \left(\gamma(t), \frac{d\gamma}{dt}(t)\right)$ en TM. Sí γ es una geodésica entonces, en TU, la curva

$$t \longrightarrow \left(x_1(t), ..., x_n(t), \frac{dx_1}{dt}(t), ..., \frac{dx_n}{dt}(t)\right)$$

satisface el sisitema:

$$\begin{cases} \frac{dx_k}{dt} = y_k. \\ \\ \frac{dy_k}{dt} = -\sum\limits_{i,j}\Gamma_{ij}^{k}y_iy_j. \end{cases} \qquad k = 1, 2, ..., n \tag{3.8}$$

en términos de coordenadas $(x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_n)$ de TU. Por lo tanto el sistema de EDO de segundo orden (3.7) en U es equivalente al sistema de EDO de primer orden (3.8) en TU.
Para lo que sigue es necesario recordar el siguiente teorema de ecuaciones diferenciales.

Teorema 3.2. *Sea X un campo C^∞ en un abierto V de una variedad M y $p \in V$ entonces existe un abierto $V_0 \subset V$, $p \in V_0$, un número $\delta > 0$, y una aplicación C^∞, $\varphi : (-\delta, \delta) \times V_0 \longrightarrow V$ tales que la curva $t \longrightarrow \varphi(t, q)$; $t \in (-\delta, \delta)$, es la única trayectoria de X que en el instante $t = 0$ pasa por el punto q, para cada $q \in V_0$.*

La aplicación $\varphi_t : V_o \longrightarrow V$ dada por $\varphi_t(q) = \varphi_t(t, q)$ es llamada el *flujo* de X en V.

Lema 3.1. *Existe un único campo G en TM cuyas trayectorias son de la forma $t \longrightarrow (\gamma(t), \gamma^{'}(t))$, donde γ es una geodésica en M.*

Demostración. Se prueba primero la unicidad de G, suponiendo su existencia. Si se considera un sistema de coordenadas $(U, \mathbf{x})$ en M. Por hipótesis, las trayectorias de G en TU son dadas por $t \longrightarrow \big(\gamma(t), \gamma^{'}(t)\big)$ donde γ es una geodésica. De ahí que $t \longrightarrow \big(\gamma(t), \gamma^{'}(t)\big)$ es solución del sistema de EDO (3.8). Por la unicidad de las trayectorias de un tal sistema, se concluye que si G existe, entonces es único.
Para provar la existencia de G, se define localmente por el sistema (3.8). Usando la unicidad, se concluye que G está bien definido en TM. $\square$

Definiciones 3.1. *El campo G definido anteriormente es llamado el campo geodésico en TM y su flujo es el flujo geodésico de TM.*

Aplicando el teorema (3.2) al campo geodésico G en el punto $(p, 0) \in TM$, se obtiene el siguiente resultado:

Teorema 3.3. *Para cada $p \in M$ existen un abierto Ω en TU, donde $(U, \mathbf{x})$ es un sistema de coordenadas en p y $(p, 0) \in \Omega$, un número $\delta > 0$ y una aplicación C^∞, $\varphi : (-\delta, \delta) \times \Omega \longrightarrow TU$; tales que; $t \longrightarrow \varphi(t, q, v)$ es la única trayectoria de G que satisface la condición inicial $\varphi(0, q, v) = (q, v)$ para cada $(q, v) \in \Omega$.*
Es posible escoger Ω en la forma:

$$\Omega = \{(q, v) \in TU \mid q \in V \ y \ v \in T_qM \ con \ \|v\| < \epsilon_1\},$$

donde $V \subset U$ es una vecindad de $p \in M$.

Cuando $\gamma = \pi \circ \varphi$, donde $\pi : TM \longrightarrow M$ es la proyección canónica, se puede escribir el enunciado anterior del siguiente modo:

Proposición 3.4. *Dado $p \in M$ existen un abierto $V \subset M$, $p \in V$, números $\delta > 0$ y $\epsilon_1 > 0$ y una aplicación diferenciable*

$$\gamma : (-\delta, \delta) \times \Omega \longrightarrow M, \ \Omega = \{(q, v) \mid q \in V, \ v \in T_q M, \ \|v\| < \epsilon_1\},$$

tales que la curva $t \longrightarrow \gamma(t, q, v)$, $t \in (-\delta, \delta)$ es la única geodésica de M que en el instante $t = 0$ pasa por q con velocidad v, para cada $q \in V$ y cada $v \in T_q M$ con $\|v\| < \epsilon_1$.

Observación 3.5. La proposición 3.4 afirma que si $\|v\| < \epsilon_1$, la geodésica $\gamma(t, q, v)$ existe en un intervalo $(-\delta, \delta)$ y es única. En verdad, es posible aumentar la velocidad de una geodésica disminuyendo su intervalo de definición, o viceversa. Esto se deduce del siguiente lema de homogeneidad.

Lema 3.2 (Homogeneidad de una geodésica). *Si la geodésica $\gamma(t, q, v)$ esta definida en el intervalo $(-\delta, \delta)$, entonces la geodésica $\gamma(t, q, av)$, $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, esta definida en el intervalo; $(-\frac{\delta}{a}, \frac{\delta}{a})$ y*

$$\gamma(t, q, av) = \gamma(at, q, v).$$

Demostración. Sea $h : (-\frac{\delta}{a}, \frac{\delta}{a}) \longrightarrow M$ una curva dada por $h(t) = \gamma(at, q, v)$. Entonces $h(0) = q$ y $\frac{dh}{dt}(0) = av$. Además de esto, como $h^{'}(t) = a\gamma^{'}(at, q, v)$,

$$\frac{D}{dt}\left(\frac{dh}{dt}\right) = \nabla_{h^{'}(t)} h^{'}(t) = a^2 \nabla_{\gamma^{'}(at,q,v)} \gamma^{'}(at, q, v) = 0,$$

donde, en la primera igualdad, se extiende $h^{'}(t)$ a una vecindad de $h(t)$ en M. Por lo tanto, h es una geodésica que en el instante $t = 0$ pasa por q con velocidad av. Por unicidad,

$$h(t) = \gamma(at, q, v) = \gamma(t, q, av).$$

$\square$

Ejemplo 3.4 (Ecuación general de la geodésica en $P^2(\mathbb{R})$). En $P^2(\mathbb{R})$ se define una métrica Riemanniana dada por:

$$g_{11}([p]) = \frac{1 - v^2}{1 - u^2 - v^2}, \quad g_{12}([p]) = \frac{uv\,(6v^2 + 6u^2 - 5)}{1 - u^2 - v^2} = g_{21}([p]), \quad g_{22}\,([p]) = \frac{1 - u^2}{1 - u^2 - v^2}.$$

Así, $P^2(\mathbb{R})$ es una variedad Riemanniana con conexión Riemanniana dada por:

$$\langle Z, \nabla_Y X\rangle = \frac{1}{2}\left\{X\langle Y, Z\rangle + Y\langle Z, X\rangle - Z\langle X, Y\rangle - \langle [X, Z], Y\rangle - \langle [Y, Z], X\rangle - \langle [X, Y], Z\rangle\right\}.$$

De la ecuación 3.6 se tiene que los símbolos de christoffel en el espacio proyectivo real $P^2(\mathbb{R})$ están dados por:

$$\Gamma_{12}^1(p) = \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial x_2}(g_{11})(p)g^{11}(p) + \frac{\partial}{\partial x_1}(g_{22})(p)g^{21}(p)\right\}.$$

$$\Gamma_{12}^2(p) = \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial x_2}(g_{11})(p)g^{12}(p) + \frac{\partial}{\partial x_1}(g_{22})(p)g^{22}(p)\right\}.$$

$$\Gamma_{11}^1(p) = \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}(g_{11})(p)g^{11}(p) + \left(2\frac{\partial}{\partial x_1}(g_{12})(p) - \frac{\partial}{\partial x_2}(g_{11})(p)\right)g^{21}(p)\right\}.$$

$$\Gamma_{11}^2(p) = \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}(g_{11})(p)g^{12}(p) + \left(2\frac{\partial}{\partial x_1}(g_{12})(p) - \frac{\partial}{\partial x_2}(g_{11})(p)\right)g^{22}(p)\right\}.$$

$$\Gamma_{22}^1(p) = \frac{1}{2}\left\{\left(2\frac{\partial}{\partial x_2}(g_{12})(p) - \frac{\partial}{\partial x_1}(g_{22})(p)\right)g^{11}(p) + \frac{\partial}{\partial x_2}(g_{22})(p)g^{21}(p)\right\}.$$

$$\Gamma_{22}^2(p) = \frac{1}{2}\left\{\left(2\frac{\partial}{\partial x_2}(g_{12})(p) - \frac{\partial}{\partial x_1}(g_{22})(p)\right)g^{12}(p) + \frac{\partial}{\partial x_2}(g_{22})(p)g^{22}(p)\right\}.$$

Para hacer este cálculo se hace uso del ejemplo 2.6. Así

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x_1}(g_{11}(p)) &= \frac{d}{dt}(g_{11}\circ\alpha(t))\Big|_{t=0}, \ \alpha(0) = p \ \ y \ \ \alpha^{'}(0) = \frac{\partial}{\partial x_1}(p) \\
&= \frac{d}{dt}(\widetilde{g}_{11}\circ\widetilde{\alpha}(t))\Big|_{t=0} \\
&= \frac{d}{dt}(\widetilde{g}_{11}(u+t,v))\Big|_{t=0} \\
&= \frac{d}{dt}\left(\frac{1-v^2}{(1-(u+t)^2-v^2)^2}\right)\Bigg|_{t=0} \\
&= \frac{2u(1-u^2)}{(1-(u+t)^2-v^2)^2},
\end{aligned}$$

donde $\widetilde{g}_{11} = g_{11}\circ\mathbf{x}_1$ y $\widetilde{\alpha} = \mathbf{x}^{-1}\circ\alpha$ son las expresiones en coordenadas de la función g_{11} y de la curva α.

Análogamente se obtiene

$$\frac{\partial}{\partial x_2}(g_{11})(p) = \frac{2u^2v}{(1-u^2-v^2)^2}.$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1}(g_{12})(p) = \frac{uv\,(6u^2+6v^2+12uv^2+12u^3+2u-5)}{(1-u^2-v^2)^2}.$$

$$\frac{\partial}{\partial x_2}(g_{12})(p) = \frac{uv\,(6v^2+6u^2+12v^3+12u^2v+2v-5)}{(1-u^2-v^2)^2}.$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1}(g_{22})(p) = \frac{2uv^2}{(1-u^2-v^2)^2}.$$

$$\frac{\partial}{\partial x_2}(g_{22})(p) = \frac{2v\,(1-u^2)}{(1-u^2-v^2)^2}.$$

Por otro lado, para calcular las funciones inversas de los g_{ij}, $i, j = 1, 2$, las cuales se denotan como g^{ij}, se hace uso del álgebra lineal.

$$A = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} \implies A^{-1} = \frac{1}{detA}\begin{pmatrix} g_{22} & -g_{12} \\ -g_{21} & g_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g^{11} & g^{12} \\ g^{21} & g^{22} \end{pmatrix}.$$

Así

$$g^{11}(p) = \frac{(1-u^2)(1-u^2-v^2)}{(1-u^2)(1-v^2) - u^2v^2(6v^2+6u^2-5)^2}.$$

$$g^{12}(p) = \frac{-uv(1-u^2-v^2)(6u^2+6v^2-5)}{(1-u^2)(1-v^2) - u^2v^2(6v^2+6u^2-5)^2} = g^{21}(p).$$

$$g^{22}(p) = \frac{(1-v^2)(1-u^2-v^2)}{(1-u^2)(1-v^2) - u^2v^2(6v^2+6u^2-5)^2}.$$

Por lo tanto la ecuación de la geodésica en $P^2(\mathbb{R})$ estará dada por:

$$\begin{cases} \frac{d^2x_1}{dt^2} + \Gamma_{11}^1\left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2 + 2\Gamma_{12}^1\frac{dx_1}{dt}\frac{dx_2}{dt} + \Gamma_{22}^1\left(\frac{dx_2}{dt}\right)^2 = 0. \\ \\ \frac{d^2x_2}{dt^2} + \Gamma_{11}^2\left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2 + 2\Gamma_{12}^2\frac{dx_1}{dt}\frac{dx_2}{dt} + \Gamma_{22}^2\left(\frac{dx_2}{dt}\right)^2 = 0. \end{cases}$$

Como se ve, no es fácil hallar una solución a dicho sistema, pero dado que $u^2 + v^2 < 1$ se puede resolver el anterior sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden para el punto $p = \left[u, 0, \sqrt{1-u^2}\right]$. En este caso los símbolos de Christoffel en $P^2(\mathbb{R})$ están dados por:

$$\Gamma_{11}^1(p) = \frac{u}{1-u^2};\quad \Gamma_{11}^2(p) = 0;\quad \Gamma_{22}^1(p) = 0;$$

$$\Gamma_{22}^2(p) = 0;\quad \Gamma_{12}^1(p) = 0;\quad \Gamma_{12}^2(p) = 0.$$

Remplazando se obtiene el siguiente sistema:

$$\begin{cases} \frac{d^2x_1}{dt^2} + \frac{u}{1-u^2}\left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2 = 0. \\ \\ \frac{d^2x_2}{dt^2} = 0. \end{cases}$$

Así

$$\frac{d^2x_2}{dt^2} = 0 \implies \frac{dx_2}{dt} = c_1 \implies x_2(t) = c_1t + c_2.$$

Remplazando lo anterior y haciendo $\frac{dx_1}{dt} = y_1$ se tiene la siguiente ecuación:

$$\frac{dy_1}{dt} + ay_1^2 = 0, \quad con \quad a = \frac{u}{1-u^2}.$$

De donde

$$y_1 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{dx_1}{dt} = k_1 \quad \Longrightarrow \quad x_1(t) = k_1 t + k_2.$$

Haciendo uso de las condiciones iniciales $\gamma(0) = (x_1(0), x_2(0)) = p$ y $\gamma^{'}(0) = (1, 0)$.
γ en coordenadas esta dada por:

$$t \quad \longmapsto \quad (x_1(t), x_2(t)) = (t + u \quad , \quad 0)$$

y γ en el espacio proyectivo real $p^2(\mathbb{R})$ será:

$$\gamma(t) = \mathbf{x}_1\,(x_1(t), x_2(t)) = \left[\left(t + u\ ,\ 0\ ,\ \sqrt{1 - (t+u)^2}\right)\right].$$

Ejemplo 3.5 (Geodésicas en la esfera S^n). Dado $p \in S^n$ y $v \in T_pS^n$, $\|v\| = 1$. Sea $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow S^n$ el circulo máximo $\gamma(t) = p \cdot cost + v \cdot sent$.
La conexión de Levi-Civita de la esfera $\nabla_X Y(p) = dY_p(X_p) + \langle X_p, y_p\rangle_p$ implica que

$$\frac{D\gamma^{'}}{dt} = dX_\gamma(\gamma^{'}) + \left\langle \gamma^{'}, X_\gamma \right\rangle_\gamma,$$

donde $X \in \chi(S^n)$ cumple que $X_\gamma = \gamma^{'}$ localmente, puesto que $\nabla_{\gamma^{'}} X = \frac{D\gamma^{'}}{dt}$. Así

$$\frac{D\gamma^{'}}{dt} = \gamma^{''} + \|\gamma^{'}\|^2\gamma = -\gamma + \gamma = 0.$$

Luego γ es geodésica. Sí ahora se toma cuelquier $v \in T_pS^n - \{0\}$, entonces por el lema de homogeneidad implica que:

$$\gamma(t, p, v) = \gamma\left(\|v\|t, p, \frac{v}{\|v\|}\right) = p \cdot cos(\|v\|t) + \frac{v}{\|v\|} \cdot sen(\|v\|t).$$

Estas son todas la geodésicas en la esfera (además de las constantes).

Ejemplo 3.6 (Geodésicas en $P^n(\mathbb{R})$). Dado que las isometrias de una variedad Riemanniana llevan geodésicas en geodésicas y $\pi : S^n \longrightarrow P^n(\mathbb{R})$ es una isometría local, entonces π también conserva las conexiones de Levi-Civita. Por el ejemplo 3.5 se puede interpretar las geodésicas de $P^n(\mathbb{R})$ como las proyecciones a $P^n(\mathbb{R})$ de los círculos máximos de S^n, recorridos con velocidad constante en norma.

La proposición 3.4, junto con el lema de homogeneidad, permite tomar el intervalo de definición de una geodésica uniformemente grande en una vecindad de p. Precisamente, se tiene el siguiente resultado.

Proposición 3.5. *Dado $p \in M$, existen una vecindad V de p en M, un número $\epsilon > 0$ y una aplicación C^∞, $\gamma : (-2, 2) \times \Omega \longrightarrow M$,*

$$\Omega = \{(q, w) \in TM \mid q \in V, w \in T_qM, \|w\| < \epsilon\}$$

tal que $t \longrightarrow \gamma(t, q, w)$, $t \in (-2, 2)$ es la única geodésica de M que en el instante $t = 0$ pasa por q con velocidad w, para todo $q \in V$, para todo $w \in T_qM$.

Demostración. La geodésica $\gamma(t, q, v)$ de la proposición 3.4 está definida para $|t| < \delta$ y para $\|v\| < \epsilon_1$. Por el lema de homogeneidad, $\gamma(t, q, \frac{\delta v}{2})$ esta definida para $|t| < 2$. Tomando $\epsilon < \frac{\delta\epsilon_1}{2}$, la geodésica $\gamma(t, q, w)$ esta definida para $|t| < 2$ y $\|w\| < \epsilon$. □

Observación 3.6. Por un argumento análogo, se puede tomar la velocidad de una geodésica uniformemente grande en una vecindad de p.

La proposición 3.5 permite introducir el concepto de aplicación exponencial de la siguiente manera.

Definición 3.8. *Sea $p \in M$ y $\Omega \subset TM$ un abierto dado por la proposición anterior, entonces la aplicación $exp : \Omega \subset TM \longrightarrow M$ dada por*

$$exp(q, v) = \gamma(1, q, v) = \gamma\left(\|v\|, q, \frac{v}{\|v\|}\right), \quad (q, v) \in \Omega,$$

es llamada la aplicación exponencial en Ω, la cual es diferenciable.

En la mayor parte de las aplicaciones, utiliza la restricción de exp a un abierto del espacio tangente T_pM, esto es, se define

$$exp_q : T_\epsilon(0) \subset T_qM \longrightarrow M$$

$$v \longmapsto exp_q(v) = exp(q, v),$$

la cual es diferenciable y $exp_q(0) = q$.
Se indica por $B_\epsilon(0)$ una bola abierta de centro en el origen 0 de T_qM y de radio ϵ.

Proposición 3.6. *Dado $q \in M$, existe $\epsilon > 0$ tal que $exp_q : B_\epsilon(0) \subset T_qM \longrightarrow M$ es un difeomorfismo de $B_\epsilon(0)$ sobre un abierto de M.*

Demostración. Para la prueba se calcula $d(exp_q)_o : T_0B_\epsilon(o) \subset T_qM \longrightarrow T_{exp_q(0)}M = T_qM$. Dado $v \in T_qM$

$$\begin{aligned} d(exp_q)_o(v) &= \frac{d}{dt}(exp_q(tv))\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}(\gamma(1,q,tv))\Big|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt}(\gamma(t,q,v))|_{t=0} = \gamma^{'}(0,q,v) = v. \end{aligned}$$

Luego $d(exp_q)_o$ es la identidad de T_qM, donde por el teorema de la función inversa, exp_q es un difeomorfismo local en una vecindad de 0. $\square$

Ejemplo 3.7. Sea $M = \mathbb{R}^n$. Como la derivada covariante coincide con la usual, las geodésicas son las rectas parametrizadas proporcionalmente a la longitud de arco, así se tiene que $\gamma(t,p,v) = p + tv$, para todo $v \in \mathbb{R}^n$ y para todo $t \in \mathbb{R}$. Así, la *exp* esta definida en todo $T\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ y

$$exp(p,v) = \gamma(1,p,v) = p + v, \ \textit{para todo } p, v \in \mathbb{R}^n.$$

Esto dice que fijando $p \in \mathbb{R}^n$, la exponencial *exp* es la traslación del vector p en $\mathbb{R}^n$ y que $exp_p(v) = v$ es la identidad.

Ejemplo 3.8. Del ejemplo 3.5 se tiene que $\gamma(0,p,v) = p$ y
$\gamma(t,p,v) = p \cdot cos(\|v\|t) + \frac{v}{\|v\|} \cdot sen(\|v\|t)$, si $v \neq 0$. Como estas geodésicas están definidas para todo $t \in \mathbb{R}$, se tiene que *exp* está definida en TS^n y

$$exp(p,v) = p \cdot cos(\|v\|t) + \frac{v}{\|v\|} \cdot sen(\|v\|t), \quad \forall p \in S^n \ y \ \forall v \in T_pS^n.$$

Si se fija $p \in S^n$, exp_p esta definida en todo T_pS^n y puede ser descrita de la siguiente manera:
exp_p transforma $B_\pi(0)$ inyectivamente en $S^n - \{q\}$, donde q es el punto antipoda de p; la frontera de $B_\pi(0)$ es transformada en q; la corona circular abierta $B_{2\pi}(0) = \overline{B_\pi(0)}$ es transformada inyectivamente en $S^n - \{p\}$. La frontera de $B_{2\pi}(0)$ es transformada en p, etc. Observe que si se considera la variedad riemanniana $S^n - \{q\}$, exp_p estaría apenas definida en $B_\pi(0) \subset T_p\left(S^n - \{q\}\right)$. (Ver figura 3.4)

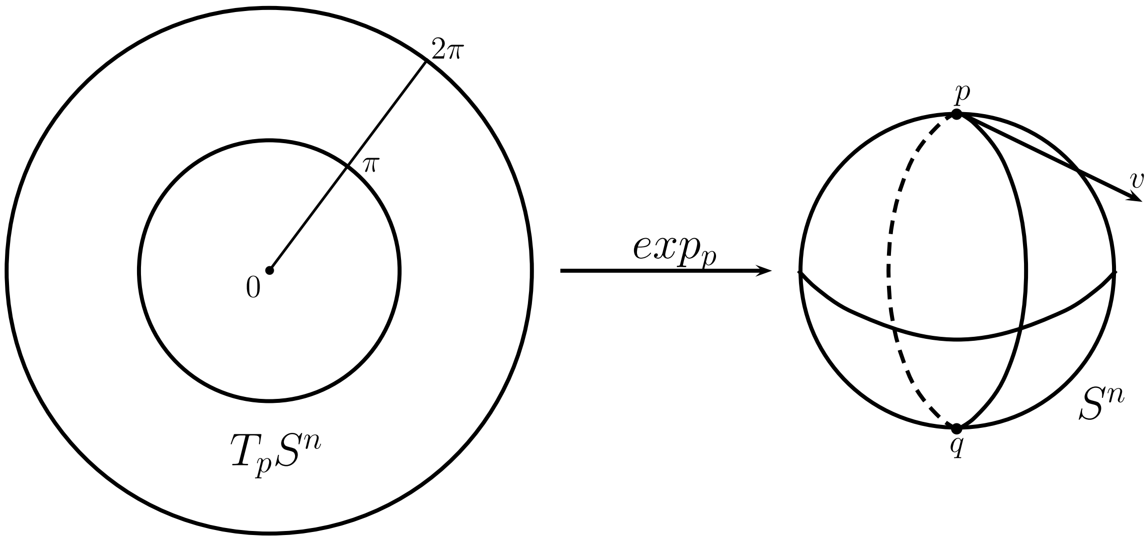

Figura 3.4: $B_{2\pi}(0)$, $B_\pi(0) \subset T_pS^n$; v vector tangente en p a la geodésica $\gamma(t,p,v)$; los puntos de la bola $B_\pi(0)$ son enviados en $S^n - \{q\}$, donde q es el punto antípoda de p y los puntos de la bola $B_{2\pi}(0)$ son enviados en $S^n - \{p\}$.

Observación 3.7. En general dado un punto $(p,v) \in TM$, el punto $exp_p(v) \in M$ es obtenido recorriendo sobre la geodésica $\gamma(t,p,\frac{v}{\|v\|})$ una longitud igual a $\|v\|$, a partir de p.

Definición 3.9. *Una* **curva diferenciable por partes** *es una aplicación continua $c : [a,b] \longrightarrow M$ de un intervalo cerrado $[a,b] \subset \mathbb{R}$ en M satisfaciendo la siguiente condición: Existe una partición $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{k-1} < t_k = b$ de $[a,b]$ tal que las restricciones $c|_{[t_i,t_{i+1}]}$, $k = 0,1,2,\cdots,k-1$ son diferenciables. Se dice que c une los puntos $c(a)$ con $c(b)$. $c(t_i)$ es llamado un vértice de c y el ángulo formado por*

$$\lim_{t\to t_i^+} c^{'}(t) \quad con \quad \lim_{t\to t_i^-} c^{'}(t)$$

es llamado el ángulo del vértice $c(t_i)$; aquí $\lim_{t\to t_i^+}$ $(\lim_{t\to t_i^-})$ significa que t se aproxima a t_i por valores mayores (menores) que t_i.

El transporte paralelo puede ser fácilmente extendido a las curvas diferenciables por partes: Dado $V_0 =\in T_{c(t)}M$, $t \in [t_i,t_{i+1}]$; tomando $V(t_i)$ y $V(t_{i+1})$ como nuevos valores iniciales, se puede extender $V(t)$ paralelamente al intervalo $[t_{i-1},t_{i+2}]$, y así sucesivamente.

Definición 3.10. *un segmento de geodésica* $\gamma : [a, b] \longrightarrow M$ *es llamado minimizante si* $\ell(\gamma) < \ell(c)$, *donde* $\ell()$ *indica la longitud de una curva y* c *es cualquier curva diferenciable por partes uniendo* $\gamma(a)$ *con* $\gamma(b)$.

Observación 3.8. Se puede mostrar que las geodésicas minimizan localmente la longitud de arco. Este hecho no es global pues si se considera un arco suficientemente grande de geodésica puede desistir de ser minimizante. Por ejemplo las geodésicas de una esfera que parten de un punto p no son minimizantes después que pasan por la antípoda de p.

El propósito de introducir el concepto de aplicación exponencial es el de garantizar la existencia de un *referencial geodésico*, que es muy útil a la hora de hacer cálculos sobre una variedad Riemanniana. La interpretación mencionada está contenida en el siguiente teorema.

Teorema 3.4 (Referencial geodésico). *Sea* M *una variedad Riemanniana de dimensión* n *y* $p \in M$. *Entonces existe una vecindad* $U \subset M$ *de* p *y* n *campos de vectores* $E_1, E_2, \cdots, E_n \in \chi(U)$, *ortonormales en cada punto de* U, *tales que, en* p,

$$\nabla_{E_i} E_j = 0.$$

Definición 3.11. *Una tal familia* $\{E_i\}$, $i = 1, 2, \cdots, n$, *de campos de vectores es llamada un referencial (local) geodésico en* p.

Para la demostración se necesita:
Dado $p \in M$, existe $V_0 = B_\epsilon(0)$ entorno abierto de 0 en T_pM y existe U_p entorno abierto de p en M, tales que $exp_p : V_0 \longrightarrow U_p$ es un difeomorfismo. Esto dice que siempre existe un entorno $U_p = exp_p(V_0)$ de cada punto $p \in M$.
Si se fija una base $B = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ de T_pM se puede construir el sistema de coordenadas $(U_p, \mathbf{x}_B)$;

$$\mathbf{x}_B = exp_p \circ \lambda_B^{-1} : \lambda_B(V_0) \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow U_p \subset M.$$

Donde $\lambda_B : T_pM \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es el isomorfismo de espacios vectoriales que lleva cada vector de T_pM en sus coordenadas respecto a la base B.

Proposición 3.7. *En la situación anterior, los símbolos de Christoffel de* M *respecto al sistema de coordenadas* $(U_p, \mathbf{x}_B)$ *se anulan en* p.

Demostración. Sea $v = \sum_i \lambda_i \frac{\partial}{\partial x_i}|_p \in T_pM$. La expresión local de la geodésica $\alpha(t) = \gamma(t, p, v)$ respecto a $\mathbf{x}_B$ es

$$\begin{aligned}
(\mathbf{x}_B^{-1} \circ \alpha)(t) &= \lambda_B \circ exp_p^{-1}(\alpha(t)) \\
&= \lambda_B \left(exp_p^{-1}(\gamma(t, p, v))\right) \\
&= \lambda_B \left(exp_p^{-1}(\gamma(1, p, tv))\right) \\
&= \lambda_B \left(exp_p^{-1}(exp_p(tv))\right) \\
&= \lambda_B(tv) \\
&= \lambda_B \left(\sum_i t\lambda_i \frac{\partial}{\partial x_i}|_p\right) \\
&= (t\lambda_1, ..., t\lambda_n),
\end{aligned}$$

Luego la ecuación de las geodésicas (3.7) se escribe ahora

$$\sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k \lambda_i \lambda_j(\alpha(t)) = 0 \text{ en sierto intervalo } (-\epsilon, \epsilon),\ k = 1, 2, ..., n.$$

Evaluando en $t = 0$ y como $(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ es un vector arbitrario de $\mathbb{R}^n$ se puede organizarlo y darle valores de tal forma que $\Gamma_{ij}^k(p) + \Gamma_{ji}^k(p) = 0$, para todo i, j, k. Como la conexión de Levi-Civita es simétrica, entonces $\Gamma_{ij}^k(p) = 0$ en p. □

Una consecuencia de la proposición 3.7 se sigue acontinuación.

Corolario 3.2. *Dado $p \in M$ y $w \in T_pM$, existe $W \in \chi(M)$ tal que $W_p = w$ y $\nabla_v W = 0$ para todo $v \in T_pM$.*

Demostración. Sean B una base de T_pM y $(a_1, a_2, ..., a_n) \in \mathbb{R}^n$ las coordenadas de w respecto B. Si se Considera una parametrización $(U_p, \mathbf{x}_B)$ definida sobre un entorno de p como en la proposición anterior y se define $X = \sum_j a_j \frac{\partial}{\partial x_j} \in \chi(U_p)$ por resultados de extensión de campos, existe $V_p \subset U_p$ abierto de M conteniendo a p y existe $W \in \chi(M)$ tales que

$$W|_{V_p} = X|_{V_p}.$$

Así, $W_p = X_p = w$. Ahora:

$$\nabla_v W = \left(\nabla|_{V_p}\right)_v \left(\sum_j a_j \frac{\partial}{\partial x_j}\right) = \sum_j a_j \nabla_v \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

Como $v = \sum_i b_i \frac{\partial}{\partial x_i}|_p$, entonces

$$
\begin{aligned}
\nabla_v W &= \sum_j a_j \nabla_{\sum_i b_i \frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} \\
&= \sum_{i,j} a_i b_j \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} \\
&= \sum_{i,j} a_i b_j \left(\sum_k \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x_k} \right) \\
&= \left(\sum_{i,j,k} a_i b_j \Gamma_{ij}^k \right) \frac{\partial}{\partial x_k} = 0.
\end{aligned}
$$

□

Demostración teorema (3.4). Por la demostración de corolario anterior, si se aplica el proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt a la base $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}|_p, ..., \frac{\partial}{\partial x_n}|_p \right\}$ se obtiene una base ortonormal de campos $\{E_1, E_2, ..., E_n\} \subset \chi(U_p)$, que cumplen la condición $\nabla_{E_i} E_j = 0$, $i, j = 1, 2, ..., n$. □

Ahora, ya está todo dado para definir los operadores diferenciales que son objeto de nuestra monografía.
$(M, \langle\ ,\ \rangle)$ denotará una variedad Riemanniana y $\langle\ ,\ \rangle$ será la métrica Riemanniana de la variedad M.

3.4. Gradiente de una función sobre una variedad Riemanniana

Definición 3.12. *Sea $(M, \langle\ ,\ \rangle)$ una variedad Riemanniana y $f \in D(M)$. Se define el* **gradiente** *de f como el campo vectorial grad f en M definido por:*

$$\langle grad\ f(p)\ ,\ v\rangle = df_p(v) = v(f),\ p \in M,\ v \in T_pM.$$

O equivalentemente,

$$\langle grad\ f\ ,\ X\rangle = X(f),\ para\ todo\ X \in \chi(M).$$

Por el teorema (3.4) dado E_i, $i = 1, 2, ..., n = dim\ M$, un referencial geodésico en $p \in M$ entonces

$$grad\ f(p) = \sum_{i=1}^{n} (E_i(f))E_i(p).$$

En efecto:

Como el $grad\ f$ es un campo vectorial entonces $grad\ f(p)$ se puede expresar como combinación lineal de manera única en la base de T_pM, $\{E_i \mid i = 1, 2, ..., n\}$. Así:

$$grad\ f(p) = \sum_{i=1}^{n} a_i E_i(p).$$

Luego

$$\begin{aligned} df_p(E_i) &= \langle grad\ f(p)\ ,\ E_i(p) \rangle \\ &= \left\langle \sum_{i=1}^{n} a_i E_i\ ,\ E_i \right\rangle_p \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} df_p(E_i) &= a_1 \langle E_1\ ,\ E_i \rangle_p + \cdots + a_i \langle E_i\ ,\ E_i \rangle_p + \cdots + a_n \langle E_n\ ,\ E_i \rangle_p \\ &= a_i(p) \\ &= E_i(f)(p). \end{aligned}$$

Remplazando se tiene el resultado.

Por un argumento análogo al anterior dado el sistema de coordenadas $(U, \mathbf{x})$ para M, se prueba que

$$\nabla f = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j} g^{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} \quad en \quad U, \tag{3.9}$$

donde $(g^{ij})_{i,j}$ es la matriz inversa de $(g_{ij})_{i,j}$. En efecto, dada la base $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_i}|_p, ..., \frac{\partial}{\partial x_n}|_p \right\}$ de T_pM, se tiene que $grad\ f(p) = \sum\limits_i b_i \frac{\partial}{\partial x_i}|_p$, así que

$$\begin{aligned} \left\langle \sum_i b_i \frac{\partial}{\partial x_i}\bigg|_p\ ,\ \frac{\partial}{\partial x_j}\bigg|_p \right\rangle &= \sum_i b_i g_{ij}(p) \\ &= \frac{\partial}{\partial x_j}(f)(p) \\ &= \frac{d}{dt} f \circ \alpha \bigg|_{t=0},\ \alpha(0) = p\ y\ \alpha'(0) = \frac{\partial}{\partial x_j}\bigg|_p \\ &= \frac{\partial f}{\partial x_j}. \end{aligned}$$

Luego, $\sum_i b_i = \frac{\partial f}{\partial x_j} g^{ij}$. Remplazando se sigue lo anunciado.

Nota 2. *En el caso particular $M = \mathbb{R}^n$ con la métrica euclidiana, se obtiene de (3.9) la fórmula clásica*

$$grad\ f(p) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial f}{\partial x_n} \right).$$

Proposición 3.8. *Sean $f, h \in C^\infty(M)$.*

1. $grad\ (f+g) = grad\ f + grad\ g.$

2. $grad\ (fh) = f grad\ h + h grad\ f.$

3. $grad\ (\frac{1}{f}) = -\frac{1}{f^2} grad\ f, \ \ f \neq o.$

Observación 3.9. Antes de la prueba es conveniente recordar:
Sea E_i, $i = 1, ..., n = dim\ M$, un referencial geodésico en $p \in M$. Como $E_i(p) \in T_pM$, entonces $E_i(p) : D(M) = C^\infty(p) \longrightarrow \mathbb{R}$ satisface:

- $E_i(p)(\alpha f + \beta h) = \alpha E_i(p) f + \beta E_i(p) h, \ para\ todo\ \alpha, \ \beta \in \mathbb{R}$

- $E_i(p)(fh) = (E_i(p)f)h(p) + f(p)(E_i(p)h).$

Además de una suma y una multiplicación por escalar para T_pM:

$$(\alpha E_i(p) + \beta E_j(p))f = \alpha(E_i(p)f) + \beta(E_j(p)f), \ para\ todo\ f \in D(M) = C^\infty(p).$$

Demostración proposición 3.8. 1.

$$\begin{aligned}
grad\ (f+h)(p) &= \sum_{i=1}^{n} \left(E_i(f+h)\right) E_i(p) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(E_i(f) + E_i(h)\right) E_i(p) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(E_i(f)\right) E_i(p) + \sum_{i=1}^{n} \left(E_i(h)\right) E_i(p) \\
&= grad\ f(p) + grad\ h(p).
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
grad\ (fh)(p) &= \sum_{i=1}^{n} \left(E_i(fh)\right) E_i(p) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(E_i(f)h(p) + f(p)E_i(h)\right) E_i(p) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(E_i(f)h(p)\right) E_i(p) + \sum_{i=1}^{n} \left(f(p)E_i(h)\right) E_i(p) \\
&= h(p)\sum_{i=1}^{n} \left(E_i(f)\right) E_i(p) + f(p)\sum_{i=1}^{n} \left(E_i(h)\right) E_i(p) \\
&= h(p)grad\ f(p) + f(p)grad\ h(p).
\end{aligned}$$

3. $grad\ \left(\frac{1}{f}\right)(p) = \sum\limits_{i=1}^{n} \left(E_i\left(\frac{1}{f}\right)\right) E_i(p)$. Pero;

$$\begin{aligned}
E_i\left(\frac{1}{f}\right)(p) &= \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{f}\circ\alpha(t)\right)\Big|_{t=0}, \ \alpha(o) = p \ y \ \alpha^{'}(0) = E_i(p). \\
&= \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{f(x_1(t), ..., x_n(t))}\right)\Big|_{t=0} \\
&= \frac{-\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} x_i^{'}(0)}{f^2} \\
&= -\frac{1}{f^2} E_i(f)(p).
\end{aligned}$$

luego,

$$\begin{aligned}
grad\ \left(\frac{1}{f}\right)(p) &= -\frac{1}{f^2}\sum_{i=1}^{n} \left(E_i(f)\right) E_i(p) \\
&= -\frac{1}{f^2} grad\ f(p).
\end{aligned}$$

□

3.5. Divergencia de un campo sobre una variedad Riemanniana

Definición 3.13. *Sea $(M, \langle\ ,\ \rangle)$ una variedad Riemanniana. Sean $X \in \chi(M)$ y $f \in D(M)$. Se define* **divergencia** *de X como la función div $X : M \to \mathbb{R}$ dada por div $X(p) =$ traza de la aplicación lineal $Y(p) \to \nabla_Y X(p)$, $p \in M$.*

por el teorema (3.4) se prueba que

$$div\ X(p) = \sum_{i=1}^{n} E_i(f_i)(p),\ donde\ X = \sum_{i=1}^{n} f_i E_i.$$

En efecto:

$$\begin{aligned}
\nabla_{E_j} X &= \nabla_{E_j} \sum_i f_i E_i \\
&= \sum_i f_i \nabla_{E_j} E_i + \sum_i E_j(f_i) E_i \\
&= \sum_i E_j(f_i) E_i \\
&= (E_j(f_1), E_j(f_2), ..., E_j(f_n)).
\end{aligned}$$

Por lo tanto la traza de la aplicación lineal $E_j(p) \longrightarrow \nabla_{E_j} X$ esta dada por:

$$\sum_i \frac{\partial f_i}{\partial x_i} = \sum_i E_i(f_i).$$

De donde se tiene el resultado.

Ahora dado el sistema de coordenadas $(U, \mathbf{x})$ de M y $X|_U = \sum_i f_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ con $f_i \in C^\infty(U)$, para todo i, entonces

$$(div\ X)|_U = \sum_{j=1}^{n} \left[\frac{\partial f_j}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} f_i \Gamma_{ij}^{j} \right] = \frac{1}{\sqrt{G}} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}(f_i \sqrt{G}), \tag{3.10}$$

donde $G = det(g_{ij})_{i,j}$. En efecto:

Para la primera igualdad se tiene

$$\nabla_{E_1} X = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

Así que

$$\begin{aligned}\langle \nabla_{E_1} X, E_1 \rangle &= \frac{\partial f_1}{\partial x_1}\\ \langle \nabla_{E_2} X, E_2 \rangle &= \frac{\partial f_2}{\partial x_2}\\ &\vdots\\ \langle \nabla_{E_n} X, E_n \rangle &= \frac{\partial f_n}{\partial x_n}.\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{E_i} X, E_i \rangle = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_i} = Traza\,(\nabla_Y X)\,.$$

Utilizando este hecho y la expresión

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} X = \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{i,j=1}^{n} f_i \Gamma_{ij}^{k} + \frac{\partial f_i}{\partial x_i} \right) \frac{\partial}{\partial x_k}.$$

Obtenemos

$$\left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} X \ , \ \frac{\partial}{\partial x_i} \right\rangle = (div\ X)\,|_U = \sum_{j=1}^{n} \left[\frac{\partial f_j}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} f_i \Gamma_{ij}^{j} \right].$$

Para la segunda igualdad: Primero,

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(f_i \sqrt{G}) = \frac{\partial f_i}{\partial x_i}\sqrt{G} + \frac{f_i}{2\sqrt{G}} \frac{\partial G}{\partial x_i}.$$

Para calcular $\frac{\partial G}{\partial x_i}$ se usa la derivada de un determinante. obteniendo $\frac{\partial G}{\partial x_i} = G \sum\limits_{j,k} \frac{\partial g_{jk}}{\partial x_i} g^{kj}$.

Así,

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(f_i \sqrt{G}) = \sqrt{G} \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_i} + \frac{f_i}{2} \sum_{j,k} \frac{\partial g_{jk}}{\partial x_i} g^{kj} \right]. \tag{3.11}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n} \left[\frac{\partial f_j}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} f_i \Gamma_{ij}^{j} \right] &= \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{n} f_j \Gamma_{ij}^{i} \right]\\ = \sum_{i} \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_i} + \sum_{j} \frac{f_j}{2} \sum_{h} \left(\frac{\partial g_{jh}}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{ih}}{\partial x_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_h} \right) g^{hi} \right]. &\end{aligned}$$

Desarrollando la última expresión las sumas segunda y cuarta se cancelan, quedando

$$\sum_{i} \frac{\partial f_i}{\partial x_i} + \sum_{i,j,h} \frac{f_j}{2} \frac{\partial g_{ih}}{\partial x_j} g^{hi} = \sum_{i} \frac{\partial f_i}{\partial x_i} + \sum_{i,j,h} \frac{f_i}{2} \frac{\partial g_{jh}}{\partial x_i} g^{hj}.$$

Comparando esta expresión con (3.11) se tiene la segunda igualdad.

Nota 3. *De (3.10) se deduce que para $M = \mathbb{R}^n$ con la métrica euclidiana, la divergencia de un campo $X = (f_1, ..., f_n) \in \chi(\mathbb{R}^n) = C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ es*

$$div\ X = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_i}.$$

Proposición 3.9. *1. $div\ (X+Y) = div\ X + div\ Y$, para todo $X, Y \in \chi(M)$.*

2. Si $f \in C^\infty(M)$ y $X \in \chi(M)$, entonces

$$div\ (fX) = \langle grad\ f\ ,\ X\rangle + f div\ X = X(f) + f div\ X.$$

Demostración. De la observación (3.9) se tiene:

1.

$$\begin{aligned} div\ (X+Y)(p) &= \sum_{i=1}^{n} E_i(f_i+g_i)(p),\ donde\ X+Y = \sum_{i=1}^{n}(f_i+g_i)E_i. \\ &= \sum_{i=1}^{n} E_i(f_i)(p) + \sum_{i=1}^{n} E_i(g_i)(p). \\ &= div\ X(p) + div\ Y(p),\ donde\ X = \sum_{i=1}^{n} f_iE_i\ y\ Y = \sum_{i=1}^{n} g_iE_i. \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} div\ (fX)(p) &= \sum_{i=1}^{n} E_i(fa_i)(p),\ donde\ X = \sum_{i=1}^{n} a_iE_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} (E_i(f)a_i(p) + f(p)E_i(a_i)(p)) \\ &= X(f)(p) + f(p)div\ X(p) \\ &= \langle grad\ f(p)\ ,\ X(p)\rangle + f(p)div\ X(p). \end{aligned}$$

□

3.6. Laplaciano de una función sobre una variedad Riemanniana

Definición 3.14. *Sea $(M, \langle\ ,\ \rangle)$ una variedad Riemanniana. Se define un operador $\Delta : D(M) \to D(M)$ (o* **laplaciano** *de M) por:*

$$\Delta f = div\ grad\ f,\ \ f \in D(M).$$

Sea E_i un referencial geodésico en $p \in M$, $i = 1, 2, ..., n = dimM$, entonces

$$\Delta f(p) = \sum_i E_i(E_i(f))(p).$$

Por otro lado, dado el sistema de coordenadas $(U, \mathbf{x})$ de M se tiene:

$$(\Delta f)|_U = \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} g^{jk} + \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k} \frac{\partial g^{jk}}{\partial x_j} + \sum_{i,j,k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k} g^{ik} \Gamma_{ij}^{j}, \tag{3.12}$$

donde Γ_{ij}^k son los **símbolos de Christoffel** respecto de la parametrización $(U, \mathbf{x})$.

Nota 4. *En el caso particular $M = \mathbb{R}^n$ con la métrica euclidiana, de (3.12) nos da la fórmula clásica del operador laplace,*

$$\Delta f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}.$$

Proposición 3.10. *Sean $f, h \in C^\infty(M)$.*

1. $\Delta(f + h) = \Delta f + \Delta h$
2. $\Delta(fh) = f\Delta h + h\Delta f + 2\langle grad\ f\ ,\ grad\ h\rangle$.

Demostración. De la observación (3.9) se tiene:

1.

$$\begin{aligned}
\Delta(f+h)(p) &= \sum_{i=1}^{n} E_i(E_i(f+h))(p). \\
&= \sum_{i=1}^{n} E_i\left(E_i(f)(p) + E_i(h)(p)\right). \\
&= \sum_{i=1}^{n} E_i(E_i(f))(p) + \sum_{i=1}^{n} E_i(E_i(h))(p). \\
&= \Delta f(p) + \Delta h(p).
\end{aligned}$$

2.

$$
\begin{aligned}
\Delta(fh) &= \sum_{i=1}^{n} E_i(E_i(fh))(p). \\
&= \sum_{i=1}^{n} E_i\left(E_i(f)h(p) + f(p)E_i(h)(p)\right). \\
&= \sum_{i=1}^{n} E_i(E_i(f))h(p) + \sum_{i=1}^{n} f(p)E_i(E_i(h))(p) + 2\sum_{i=1}^{n} E_i(f)E_i(h)(p). \\
&= h(p)\Delta f(p) + f(p)\Delta h(p) + 2\left\langle grad\ f(p)\ ,\ grad\ h(p)\right\rangle.
\end{aligned}
$$

$\square$

Conclusiones

1. Se demostró detalladamente el teorema de existencia para métricas Riemannianas, haciendo uso de la topología de la variedad.

2. Se probó que el espacio real proyectivo $P^n(\mathbb{R})$ es una variedad diferenciable de Hausdorff y con base numerable para su topología y en virtud de la proposición 2.6 garantizar la existencia de una métrica Riemanniana a éste espacio abstracto.

3. Para el caso $n = 2$; se vio a $P^2(\mathbb{R})$ inmerso en $\mathbb{R}^4$ y se definio una forma de medir longitudes de vectores tangentes a $P^2(\mathbb{R})$.

4. Se demostró el teorema de existencia de una única conexión afín simétrica y compatible con la métrica Riemanniana (Teorema de Levi-Civita).

5. Se mostró que existe una base ortonormal de campos $\{E_1, E_2, ..., E_n\} \subset U_p$, que cumplen $\nabla_{E_i} E_j = 0$, $1 \leq i, j \leq n$.

6. Se redefinen los operadores gradiente, divergencia y laplaciano sobre variedades Riemannianas y se demuestran sus propiedades básicas.

Bibliografía

[1] Besse, A., *Einstein Manifolds*, Springer Verlag, Berlin, 2007.

[2] F. Brickell y R.S. Clark., *Differentiable Manifolds*, van Nostrand Reinhold Co., London, England 1970.

[3] Boothby, W. M.., *Introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry*, ACADEMIC PRESS. INC.CO., (LONDON), 1986.

[4] Manfredo P. Do Carmo. *Differential Geometry of Curves and Surfaces*. Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA). Río de Janeiro, Brasil. Primera Edición. New Jersey, 1976.

[5] Manfredo P. Do Carmo. *Geometría Riemanniana*. Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA). Río de Janeiro, Brasil, 2005. ISBN85-244-0036-6. Projeto Euclides.