APLICACIÓN DE LOS ESPACIOS DE LORENTZ $L_{P,\delta}$, EN LA ACOTACIÓN DE OPERADORES SUBADITIVOS

YENY SMID MARTÍNEZ FLOR

UNIVERSIDAD DEL CAUCA
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES,EXACTAS Y DE LA EDUCACIÒN
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
POPAYÀN

MARZO 2013

APLICACIÓN DE LOS ESPACIOS DE LORENTZ $L_{P,\delta}$, EN LA ACOTACIÓN DE OPERADORES SUBADITIVOS

YENY SMID MARTÍNEZ FLOR

TRABAJO DE GRADO PRESENTADO COMO REQUISITO PARCIAL
PARA OPTAR AL TÍTULO EN MATEMATICAS OTORGADO POR LA UNIVERSIDAD DEL CAUCA

Director
Dr.FRANCISCO ENRÍQUEZ

UNIVERSIDAD DEL CAUCA
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES,EXACTAS Y DE LA EDUCACIÒN
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
POPAYÀN
MARZO 2013

Nota de Aceptación

____

____

____

____

Ph.Dr. Francisco Enríquez
Director

____

Dr. Jairo Roa
Comité seguimiento

____

Mg. Jhon Jairo Pérez
Comité de seguimiento

Popayán, 18 de marzo de 2013

Dedicado a todos los que hicieron que mi sueño fuera una realidad.

Agradecimientos

Doy gracias a Dios por darme la oportunidad de conocer este mundo maravilloso que son las matemáticas. A mi madre por su cariño, paciencia y dedicación, a mis hermanos por su apoyo y entusiasmo.

A mi director el profesor Francisco Enríquez, que gracias a su paciencia y enseñanzas ayudo a culminar este logro en mi vida. Además a los profesor Jhon Jairo Pérez y Jairo Roa, quienes contribuyeron al mejoramiento del trabajo.

Popayán, Colombia
Marzo, 2013

Yeny Smid Martínez

Tabla de Contenido

Introducción

Aunque los espacios de Lebesgue L_p , $(0 < p \leq \infty)$, juegan un papel primordial en muchas áreas del análisis matemático, existen otros espacios de funciones medibles que también son de interés teórico, como es el caso de los espacios de Marcinkiewicz, de Orlicz y de Lorentz, entre otros. Estos últimos resultan cómodos en particular, para la obtención de resultados mas fuertes, referentes a teoremas clásicos de la teoría de interpolación de espacios funcionales, como por ejemplo el teorema de Marcinkiewicz.

Los espacios $L_{p,\sigma}$ fueron introducidos por G.G. Lorentz en 1950 y surgieron en relación con la teoría de interpolación, una rama desarrollada en la segunda mitad del siglo XX pero que tuvo sus antecedentes en los trabajos de M.Riesz, G.O.Thorin, J.Marcinkiewicz, entre otros.

En el primer capitulo del presente Seminario de Grado se estudiarán ciertas propiedades de la función de distribución λ_f y de los reordenamientos descendentes f^* de la función $f : E \to \mathbb{C}$, las cuales son fundamentales para el estudio de los espacios de Lorentz $L_{p,\sigma}(E)$, $0 < p, \sigma < \infty$, donde $E \subset \mathbb{R}^N$ es un conjunto Lebesgue medible. Es de señalar que algunas de estas propiedades se estudiaron en detalle en el Seminario de Grado [5], como una herramienta para el estudio de los espacios de Marcinkiewicz M_p, cuyas cuasinormas se definen en términos de f^* y de λ_f. Y dado que para f^* no se verifica "la desigualdad triangular", esto hace que en efecto la expresión $\|.\|_{M_p(E)}$ no sea seminorma, sino únicamente semicuasinorma. Los resultados fundamentales expuestos en este capítulo muestran que en buena medida los espacios M_p poseen propiedades similares a las de L_p; en particular son válidas las desigualdades de Hölder y multiplicativa, y ciertas inclusiones tipo $M_q(E) \subset M_p(E)$ para conjuntos de medida finita.

Además, la clase $M_p(E)$ es mas “amplia”(en el sentido de la inclusión)que $L_p(E)$, lo que permite generalizar mediante el teorema de Marcinkiewicz, el teorema clásico de Riesz-Thorin para operadores lineales.

Si $f : E \to \mathbb{C}$, entonces para todo $t \geq 0$, la función de reordenamiento esta dada por $f^*(t) := \text{ínf}\{s \in [0, \infty) : \lambda_f(s) \leq t\}$, donde $\lambda_f(s)$ es la función de distribución de la función $f : \lambda_f(s) := \mu_N\{x \in E : |f(x)| > s\}$; μ_N es la medida N-dimensional de Lebesgue.

Se considera la expresión $\|f\|_{L_{p,\sigma}(E)} := (\int_0^\infty (t^{\frac{1}{p}} f^*(t))^\sigma \frac{dt}{t})^{\frac{1}{\sigma}}$ para $0 < p, \sigma \leq \infty$. Entonces, los espacios de Lorentz se definen como el espacio lineal de todas las funciones medibles en $E \subset \mathbb{R}^N$ para las cuales $\|f\|_{L_{p,\sigma}(E)} < \infty$.

En el segundo capítulo se estudian las propiedades fundamentales de $L_{p,\sigma}(E)$ (con distintas semicuasinormas $\|.\|_{L_{p,\sigma}}$), similares a las expuestas para $M_p(E)$.Algunas interrelaciones importantes entre $L_{p,\sigma}$, M_p y L_p consisten en que $L_{p,\infty} \equiv M_p$, $L_{p,p} \equiv L_p$, $L_{\infty,\infty} \equiv M_\infty \equiv L_\infty$ (con igualdad de las respectivas cuasinormas y seminormas), las cuales se detallan en este capítulo.

Con ayuda de estos espacios se presentará finalmente y a manera de aplicación, una variante mas fuerte para el teorema de Marcinkiewicz, a saber el teorema de Stein-Weiss.

Índice de símbolos

$\mathbb{R}$ Campo ordenado de los números reales.

$\mathbb{R}^+$ Conjunto de los números reales positivos.

$\mathbb{N}_0$ Conjunto de enteros no negativos.

$\mathbb{R}^N := \{(x_1, x_2, ..., x_N) : x_i \in \mathbb{R},\ i = 1, ..., n\}$ Espacio euclídeo N-dimensional.

$B_r(x_0) := \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| < r\}$. Bola abierta con centro en x_0 y radio $r > 0$.

$\overline{B_r(x_0)} := \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| \leq r\}$. Bola cerrada centro en x_0 y radio $r > 0$.

$\approx$ Equivalencia de funciones.

$\equiv$ Equivalencia en conjuntos numéricos

$\forall$ Para todo.

$p.c.t$ Para casi todo.

$\mu(E)$ Medida de Lebesgue del conjunto $E \subset \mathbb{R}$.

$\mu_N(E)$ Medida de Lebesgue del conjunto $E \subset \mathbb{R}^N$.

$\bigsqcup_{k=1}^{m} E_k$ Unión de conjuntos disyuntos dos a dos.

$(S)\int dx$ Integral de Stilt'jes.

$\arg[g(x)]$ Argumento del número complejo $g(x)$.

χ_E Función característica del conjunto E

λ_f Función de distribución de la función f.

f^* Reordenamiento decreciente de la función f.

f^{**} Segundo reordenamiento de la función f.

M_p Espacio de Marcinkiewicz.

$L_{p,\infty}$ Espacio de Lorentz.

Capítulo 1

PRELIMINARES

Este capítulo pretende sentar las bases de la teoría de los espacios de Lorentz. Se presentarán algunos resultados referentes a los espacios L_p, la función de distribución, los reordenamientos y se culminará con la noción de los espacios de Marcinkiewicz. Será un capítulo esencialmente expositorio, incluyendo solamente aquellas demostraciones que se consideran relevantes para el posterior desarrollo del trabajo. No obstante, se proporcionarán las respectivas referencias bibliográficas.

Mas detalles de esta temática pueden encontrarse en [1], [2], [5].

1.1. Espacios $L_p(E)$

Entre las diferentes clases de espacios normados que se emplean en el análisis, una de las más importantes es la de los espacios de funciones sumables, para las cuales la potencia $p-$ésima $(p > 0)$ de dichas funciones es integrable. Estas clases son conocidas como espacios L_p o de Lebesgue.

Definición 1.1. *Sea $f : E \to \mathbb{R}$, $E \subset \mathbb{R}^N$. Se denomina **conjunto de Lebesgue** de la función f al conjunto, $E_a := \{x \in E : f(x) > a\} \quad a \in \mathbb{R}$.*
Se dice que una función $f : E \to \mathbb{R}$ con $E \subset \mathbb{R}^N$ es medible en $E \neq \emptyset$ si:

1. *E es medible.*

2. *Para todo $a \in \mathbb{R}$, E_a es medible.*

Definición 1.2. *Sean $f : E \to \mathbb{R}$, $E \subset \mathbb{R}^N$ con E medible. Se denomina supremo esencial de la función f en E y se denota como supvrai, a:*

$$\sup_{x\in E} vrai\, f(x) := \inf_{\substack{e\subset E\\ \mu(e)=0}} \sup_{x\in E\setminus e} f(x).$$

Ejemplo 1.1. *Considérese la función de Dirichlet:*

$$D(x) := \begin{cases} 1, si & x \in \mathbb{Q} \\ 0, si & x \notin \mathbb{Q}, \end{cases}$$

entonces

$$0 \leq \sup_{x\in\mathbb{R}} vrai\ D(x) = \inf_{\substack{\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}\\ \mu(\mathbb{Q})=0}} \sup_{x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}} D(x) \leq \sup_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}} D(x) = 0.$$

Así,

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} vrai\ D(x) = 0.$$

Nótese que el supremo esencial difiere del supremo "habitual" ya que $\sup\limits_{\mathbb{R}} D(x) = 1$. En lo sucesivo (si no se dice lo contrario) $\mathbb{R}^N \supset E$ representará un conjunto medible.

Definición 1.3. *Sea $E \subset \mathbb{R}^N$, $f : E \to \mathbb{C}$ y $0 < p \leq \infty$. Se dice que $f \in L_p(E)$, si:*

1. *f es medible en E,*
2. *Es finita la expresión $\|f\|_{L_p(E)}$, donde:*

$$\|f\|_{L_p(E)} := \begin{cases} \left(\int\limits_E |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}, & si\ 0 < p < +\infty \\ \\ \sup\limits_{x\in E} vrai|f(x)|, & si\ p = +\infty. \end{cases} \tag{1.1}$$

Observación 1.1.

1. Si f es una función continua en un abierto de $\mathbb{R}^N$, entonces el supremo esencial coincide con el supremo habitual.

2. Los espacios L_p para $1 \leq p \leq +\infty$ son de Banach y cuasiBanach para $0 < p < 1$ con la norma $\|\cdot\|_{L_p(E)}$ si $1 \leq p \leq +\infty$ y cuasinorma si $0 < p < 1$
(Ver [1] pag. 71-76).

Sea $1 \leq p \leq +\infty$. Se define el índice conjugado p' de p como sigue:

$$p' := \begin{cases} \frac{p}{p-1} & \text{para} \quad 1 < p < +\infty \\ \infty & \text{para} \quad p = 1 \\ 1 & \text{para} \quad p = +\infty. \end{cases}$$

Entonces siempre se tendrá que $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Los números p y p' se denominan conjugados.

1.1.1. Desigualdades de Hölder y de Minkowsky

Desigualdad de Hölder

Teorema 1.1. *Sean $E \subset \mathbb{R}^N$ y $1 \leq p \leq +\infty$. Si $f \in L_p(E)$ y $g \in L_{p'}(E)$. Entonces $fg \in L_1(E)$ y es válida la desigualdad:*

$$\left| \int_E f(x)g(x)\,dx \right| \leq \|f\|_{L_p(E)} \|g\|_{L_{p'}(E)}\,.$$

En el caso particular $p = p' = 2$ la desigualdad de Hölder se conoce como desigualdad de Cauchy-Buniakovsky (o Cauchy-Schwarz).

Consecuencia 1.1. *Sean $0 < p \leq q \leq +\infty$, $E \subset \mathbb{R}^N$ y $\mu(E) < +\infty$. Si $f \in L_q(E)$, entonces $f \in L_p(E)$, es decir $L_q(E) \subset L_p(E)$ y se verifica la desigualdad:*

$$\|f\|_{L_p(E)} \leq [\mu(E)]^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}} \|f\|_{L_q(E)}\,.$$

(Ver [5] Pág 12).

Observación 1.2.

1. Según lo anterior, a mayor índice p "menor" es el espacio L_p (para $\mu(E) < +\infty$). Por eso el espacio L_∞ es el más "pequeño"; o sea para todo $p > 0$
$L_\infty(E) \subset L_p(E)$.

Exactitud de la Desigualdad de Hölder

Teorema 1.2. *Sea $E \subset \mathbb{R}^N$ y $1 \leq p \leq \infty$. Si $g \in L_{p'}(E)$ entonces existe $f_g \in L_p(E)$ con $f_g \not\approx 0$ en E tal que*

$$\left| \int_E f_g(x) g(x) dx \right| = \|f_g\|_{L_p(E)} \|g\|_{L_{p'}(E)}. \tag{1.2}$$

Demostración.

1. Sea $1 < p < +\infty$. Se puede que $g \not\approx 0$ ya que en caso contrario (1.2) se cumple trivialmente.

   Si $0 < \|g\|_{L_{p'}(E)} < +\infty$, entonces

   $$g(x) = |g(x)| e^{i\varphi(x)} \text{ donde } \varphi(x) = \arg[g(x)].$$

   Luego existe $f_g(x) = |g(x)|^{\frac{p'}{p}} e^{-i\varphi(x)}$ tal que:

   $f_g \not\approx 0$ en E y

   $$\|f_g\|_{L_p(E)} = \left(\int_E |f_g(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} = \left[\int_E (|g(x)|^{\frac{p'}{p}})^p dx \right]^{\frac{1}{p}} = \left(\int_E |g(x)|^{p'} dx \right)^{\frac{1}{p}},$$

   $\|f_g\|_{L_p(E)} = \|g\|_{L_{p'}(E)}^{\frac{p'}{p}} < +\infty.$

   Luego $f_g \in L_p(E)$. Por otra parte,

   $$\left| \int_E f_g(x) g(x) dx \right| = \int_E |g(x)|^{\frac{p'}{p}+1} dx = \|g\|_{L_{p'}(E)}^{p'} = \|g\|_{L_{p'}(E)}^{\frac{p'}{p}} \|g\|_{L_{p'}(E)},$$

   y como $\|f_g\|_{L_p(E)} = \|g\|_{L_{p'}(E)}^{\frac{p'}{p}}$, entonces

   $$\left| \int_E f_g(x) g(x) dx \right| = \|f_g\|_{L_p(E)} \|g\|_{L_{p'}(E)}.$$

2. si $p = \infty$ entonces $p' = 1$.

   Como $g(x) = |g(x)|e^{i\varphi(x)}$, donde $\varphi(x) = \arg[g(x)]$, entonces existe $f_g(x) = e^{-i\varphi(x)}$ tal que $f_g \not\approx 0$ y

$$\|f_g\|_{L_\infty(E)} = \sup_{x\in E} vrai|f_g(x)| = \sup_{x\in E} vrai|e^{-i\varphi(x)}| = 1.$$

   Por lo tanto,

$$\left|\int\limits_E f_g(x)g(x)dx\right| = 1.\int\limits_E |g(x)|dx = \|f_g\|_{L_\infty(E)}\|g\|_{L_{p'}(E)}.$$

□

Desigualdad de Minkówsky

Teorema 1.3. *Sean $f, g \in Lp(E)$ y $1 \leq p \leq +\infty$. Entonces: $f + g \in Lp(E)$ y además:*

$$\|f + g\|_{Lp(E)} \leq \|f\|_{Lp(E)} + \|g\|_{Lp(E)}\,.$$

Teorema 1.4. *Si $\mu_{_N}(E) < \infty$ entonces $\lim\limits_{p\to\infty} \|f\|_{L_p(E)} = \|f\|_{L_\infty(E)}$.*

Demostración.(Ver [5]).

Observación 1.3. *El resultado anterior puede no cumplirse si $\mu_{_N}(E) = \infty$; considérese por ejemplo la función constante $f(x) = c$, $c \neq 0$ en $(0, \infty)$. Claramente $\|f\|_{L_\infty(E)} < \infty$ pero $\lim\limits_{p\to\infty} \|f\|_{L_p(E)} = \infty$ para $0 < p < \infty$.*

Desigualdad de Hardy

Definición 1.4. *Sea $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ medible, los operadores:*

$$\left(H_1 f\right)(x) := \frac{1}{x}\int_0^x f(y)dy,$$

$$\left(H_2 f\right)(x) := \frac{1}{x}\int_x^\infty f(y)dy$$

son llamados operadores de Hardy.

Teorema 1.5. *Sea* $1 \leq p \leq +\infty$. *Si* $\alpha < \frac{1}{p'}$ *entonces*

$$\|x^{\alpha} H_1 f(x)\|_p \leq \left(\frac{1}{p'} - \alpha\right)^{-1} \|x^{\alpha} f(x)\|_p . \tag{1.3}$$

Además en el caso de que $\alpha > \frac{1}{p'}$, *se tiene que*

$$\|x^{\alpha} H_2 f(x)\|_p \leq \left(-\frac{1}{p'} + \alpha\right)^{-1} \|x^{\alpha} f(x)\|_p . \tag{1.4}$$

1.2. Función de distribución y reordenamiento en orden descendente

Los conceptos de distribución y de reordenamiento de una función son la base para el estudio de los espacios de Lorentz. Es de anotar que la función de reordenamiento f^* está relacionada con la función de distribución λ_f mediante el hecho de que f^* es "aproximadamente igual" a λ_f^{-1}, como lo veremos más adelante.

1.2.1. Función de distribución

Definición 1.5. *Sea* $E \subset \mathbb{R}^N$, $f : E \to \mathbb{C}$ *una función medible. Se denomina función de distribución* λ_f *de la función* f *a:*

$$\lambda_f(t) := \mu_{N} \{x \in E : |f(x)| > t\}, \ t \geq 0. \tag{1.5}$$

Observación 1.4. *Denotemos por* $E_t = \{x \in E : |f(x)| > t\}$, *para todo* $t \geq 0$. *Si* $\mu_N(E) = 0$, *como para todo* $t \geq 0$, $E_t \subset E$, *entonces,* $\lambda_f(t) = \mu_N(E_t) = 0$ *para cualquier* f *medible en* E, *entonces el caso* $\mu_N(E) = 0$, *dado que para toda función* f *medible en* E, $\lambda_f(t) = 0$, *no reviste de interés.*
En adelante siempre que se haga referencia a $\lambda_f(t)$ *se supondrá* $\mu_N(E) > 0$.

Observación 1.5. *El índice* $N \in \mathbb{N}$ *en* μ_{N} *se escribe con el fín de resaltar que se trata de la medida de Lebesgue* N*-dimensional. Para* $N = 1$, $\mu_1 \equiv \mu$. *Lo anterior se hace necesario porque se observarán funciones tanto en* R^N *como en* R *cuyas distribuciones coinciden.*

Teorema 1.6. *Sea* $E \subset \mathbb{R}^N$, $f : E \to \mathbb{C}$ *una función medible. Entonces*

1. $\lambda_{|f|} = \lambda_f$ *; o sea, para todo* $t \in [0, +\infty)$, $\lambda_{|f|}(t) = \lambda_f(t)$.

2. Si $g \approx f$ en E, entonces $\lambda_g \equiv \lambda_f$ en $[0, +\infty)$.

3. Si para casi todo $x \in E$, $|g(x)| \geq |f(x)|$, entonces para todo $t \geq 0$, $\lambda_g(t) \geq \lambda_f(t)$.

4. Si $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, entonces para todo $t \geq 0$, $\lambda_{af}(t) = \lambda_f\left(\frac{t}{|a|}\right)$.

Demostración.

1. El resultado se sigue directamente de la definición de λ_f.

2. Considérese los conjuntos

$$E_t = \{x \in E : |f(x)| > t\} \text{ y } e = \{x \in E : f(x) \neq g(x)\}.$$

Entonces

$$\mu_N(E_t) = \lambda_f(t) \text{ y } \mu_N(e) = 0.$$

Así,

$$\begin{aligned}\{x \in E : |g(x)| > t\} &= \{x \in e : |g(x)| > t\} \cup \{x \in E \setminus e : |g(x)| > t\} \\ &= \{x \in e : |g(x)| > t\} \cup \{x \in E \setminus e : |f(x)| > t\}.\end{aligned}$$

Dado que los conjuntos $\{x \in e : |g(x)| > t\}$ y $\{x \in e : |f(x)| > t\}$ son de medida cero, se obtiene:

$$\begin{aligned}\lambda_g(t) &= \mu_N \{x \in E \setminus e : |f(x)| > t\} \\ &= \mu_N \{x \in e : |f(x)| > t\} + \mu_N \{x \in E \setminus e : |f(x)| > t\} \\ &= \mu_N \{x \in E : |f(x)| > t\} = \mu_N(E_t).\end{aligned}$$

Por consiguiente $\lambda_g(t) = \lambda_f(t)$.

3. Considérese el conjunto $e = \{x \in E : |g(x)| < |f(x)|\}$. Entonces por hipótesis $\mu_N(e) = 0$ y los conjuntos

$$E_t(f) = \{x \in E \setminus e : |f(x)| > t\} \quad y \quad E_t(g) = \{x \in E \setminus e : |g(x)| > t\},$$

satisfacen que $E_t(f) \subset E_t(g)$, entonces $\mu_N [E_t(f)] \leq \mu_N [E_t(g)]$.

Luego,

$$\mu_N(E_t(f)) + \mu_N(\{x \in e : |f(x)| > t\}) \leq \mu_N(E_t(g)) + \mu_N(\{x \in e : |g(x)| > t\}),$$

es decir,

$$\lambda_f(t) \leq \lambda_g(t).$$

4. De acuerdo a la definición de λ_f se tiene:

$$\lambda_{af}(t) = \mu_{_N}\{x \in E : |af(x)| > t\} = \mu_{_N}\left\{x \in E : |f(x)| > \frac{t}{|a|}\right\} = \lambda_f\left(\frac{t}{|a|}\right).$$

$\square$

Ejemplo 1.2. *Supóngase que para todo* $x \in \mathbb{R}^N$, $f(x) := g(|x|)$ *donde la función* $g : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ *, es medible y decrece monótonamente en* $[0, \infty)$*. Entonces para* $t \geq 0$, $\lambda_f(t) = \upsilon_{_N}[\lambda_g(t)]^N$*, donde* $\upsilon_{_N} = \frac{\pi^{\frac{N}{2}}}{\Gamma\left(\frac{N}{2}+1\right)}$.

Considérese el conjunto $e_t = \{u \geq 0 : g(u) > t\}$, $t \geq 0$ y sea $r_t = sup\ e_t$ entonces, dado que g es una función decreciente se obtiene que $e_t = [0, r_t)$ *o* $e_t = [0, r_t]$. En cualquier caso $\mu(e_t) = r_t$; es decir $\lambda_g(t) = r_t$. Pero $f(x) = g(u)$ con $u = |x|$, así que

$$\begin{aligned} E_t &= \{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > t\} = \{x \in \mathbb{R}^n : g(|x|) > t\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^n : g(u) > t,\ \ u = |x|\} = [0, r_t) \vee [0, r_t]\,. \end{aligned}$$

O sea, se trata de $x \in \mathbb{R}^n$ tal que $|x| < r_t$ o $|x| \leq r_t$ es decir $E_t = B_{r_t}$ o $E_t = \overline{B_{r_t}}$. Entonces se tiene que $\mu_{_N}(E_t) = \mu_{_N}(B_{r_t}) = \mu_{_N}(\overline{B_{r_t}}) = \upsilon_{_N} r_t^N$. Esto indica que $\lambda_f = \upsilon_{_N}(\lambda_g)^N$.

Observación 1.6. *En el razonamiento anterior se supone* $e_t \neq \emptyset$ *y acotado superiormente. Si al menos una de estas condiciones se infringe, la igualdad* $\lambda_f(t) = \upsilon_{_N}[\lambda_g(t)]^N$ *se verifica trivialmente, como se detalla en el apéndice 2.3.*

Ejemplo 1.3. *Sea* $E = \mathbb{R}$ *y* $f(x) = e^{-\gamma|x|}$ *con* $\gamma > 0$*. Calcular* $\lambda_{e^{-\gamma|x|}}(t)$, $t \geq 0$.

1. *Si* $t \geq 1$, *entonces*

$$E_t = \left\{x \in E : e^{-\gamma|x|} > t\right\} = \left\{x \in E : |x| < \frac{1}{\gamma}\ln\left(\frac{1}{t}\right)\right\} = \emptyset.$$

Por consiguiente

$$\lambda_{e^{-\gamma|x|}}(t) = 0.$$

2. Si $0 < t < 1$ *entonces*

$$\mu(E_t) = \mu\left\{x \in E : e^{-\gamma|x|} > t\right\} = \mu\left\{x \in E : |x| < \frac{1}{\gamma}\ln\left(\frac{1}{t}\right)\right\} = \frac{2}{\gamma}\ln\left(\frac{1}{t}\right).$$

Así,

$$\lambda_{e^{-\gamma|x|}}(t) = \begin{cases} \frac{2}{\gamma}\ln(\frac{1}{t}), & si\ 0 < t < 1 \\ \\ 0, & si\ t \geq 1. \end{cases}$$

Teorema 1.7. *Sean* $N = 1$, $E = (0, +\infty)$, f *una función positiva, contínua y estrictamente decreciente en* $(0, +\infty)$*; además* $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$. *Entonces* $\lambda_f(0) = +\infty$ *y para* $t \in (0, +\infty)$, $\lambda_f(t) = f^{-1}(t)$ *lo que significa que* λ_f *también es contínua y decrece estrictamente en* $(0, +\infty)$.

Demostración.
f^{-1} es contínua y decrece estrictamente en $(0, +\infty)$. En efecto:

1. Sea $\{t_n\}_{n=1}^{+\infty}$ una sucesión que converge a t en $(0, +\infty)$. Sea además $f^{-1}(t_n) = a_n$, es decir $t_n = f(a_n)$. Como f es contínua entonces $f(a_n) \to f(a)$ siempre que $a_n \to a$, donde $a = f^{-1}(t)$. Esto es $f^{-1}(t_n) \to f^{-1}(t)$. Así f^{-1} es contínua.

2. Como f decrece se tiene que si $x < y$ entonces $f(x) > f(y)$. Ahora si t_1, t_2 son tales que $t_1 < t_2$ y $f^{-1}(t_1) = a$, $f^{-1}(t_2) = b$ entonces $t_1 = f(a)$, $t_2 = f(b)$ y $f(a) < f(b)$ implican que $a > b$. Por lo tanto, $f^{-1}(t_1) > f^{-1}(t_2)$ con $t_1 < t_2$ es decir f^{-1} decrece.

Ahora, si se considera el conjunto

$$E_t = \{x \in E : |f(x)| > t\} = \{x \in E : f(x) > t\} = \left\{x \in E : x < f^{-1}(t)\right\} = \left(0, f^{-1}(t)\right),$$

se tiene que

$$\lambda_f(t) = \mu(E(t)) = f^{-1}(t).$$

□

Lema 1.1. *Sean $m \in \mathbb{N}$, $a_0 := 0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_m$; $E_1, \ldots, E_m$ subconjuntos medibles de E no vacíos disyuntos dos a dos, tales que $E = \bigsqcup_{k=1}^{m} E_k$ y*

$$f(x) := \sum_{k=1}^{m} a_k \chi_{E_k}(x),$$

donde χ_{E_k} es la función característica del conjunto E_k. Entonces

$$\forall t \in [a_m, +\infty), \quad \lambda_f(t) = 0 \ \text{ y}$$

$$\forall t \in [a_{k-1}, a_k), \ \forall k \in \{1, \ldots, m\}, \text{se tiene que } \lambda_f(t) = \sum_{l=k}^{m} \mu_{N}(E_l).$$

La demostración de este lema y los dos resultados siguientes se encuentran en ([5]).

Lema 1.2. *Sea $E \subset \mathbb{R}^N$ con $\mu_N(E) < +\infty$, $f : E \to \mathbb{C}$ una función medible. Entonces:*

1. $\lambda_f(0) = \mu_N(E_1)$; *donde* $E_1 := \{x \in E : f(x) \neq 0\}$.
2. *La función λ_f decrece monótonamente en $[0, +\infty)$.*
3. $\lim\limits_{t \to +\infty} \lambda_f(t) = 0$.
4. *Para todo $t \in \left(0, \|f\|_{L_\infty(E)}\right)$, $\lambda_f(t) > 0$. Si $\|f\|_{L_\infty(E)} < \infty$ entonces para todo $t \in \left[\|f\|_{L_\infty(E)}, +\infty\right)$, $\lambda_f(t) = 0$.*
5. *La función λ_f es continua por la derecha sobre $[0, +\infty)$.*

Teorema 1.8. *Sea $E \subset \mathbb{R}^N$, f una función medible en E. Entonces para $0 < p < +\infty$,*

$$\|f\|_{L_p(E)} = \left(p \int_0^{+\infty} t^{p-1} \lambda_f(t) dt \right)^{1/p} = \left(-(S) \int_0^{+\infty} t^p d[\lambda_f(t)] \right)^{1/p},$$

y para $p = \infty$

$$\|f\|_{L_\infty(E)} = \sup\left(supp\, \lambda_f\right).$$

En particular para $p = 1$,

$$\|f\|_{L_1(E)} = \|\lambda_f\|_{L_1(0,+\infty)}.$$

1.2.2. Función de reordenamiento en orden descendente

Definición 1.6. *Sea $f : E \to \mathbb{C}$ una función medible. Se denomina función de reordenamiento decreciente de f a la función:*

$$f^*(t) := \text{ínf}\,\{s \in [0, +\infty) : \lambda_f(s) \leq t\}\,, \quad t \geq 0, \tag{1.6}$$

donde por convención $\text{ínf}\{\emptyset\} = \infty$.

De la definición se sigue directamente que:

1. Para $t \in [0, \infty),\ |f|^*(t) = f^*(t)$.
2. Si $g \approx f$ en E, entonces $\forall\ t \in [0, +\infty)\,,\ g^*(t) = f^*(t)$.
3. Si la función λ_f es positiva, continua y estrictamente decreciente en $[0, +\infty)$. Entonces $f^*(t) = \lambda_f^{-1}(t)$.
4. Si $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Entonces para todo $t \geq 0,\ (af)^*(t) = |a| f^*(t)$.

Ejemplo 1.4. *Sea $E = \mathbb{R}$ y $f(x) = e^{-\gamma|x|}$ con $\gamma > 0$. Calcular $f^*(t),\ t \geq 0$.*

De acuerdo con el ejemplo 1.3 se tiene que:

$$\lambda_{e^{-\gamma|x|}}(s) = \begin{cases} \frac{2}{\gamma}\ln(\frac{1}{s})\,, & si\ 0 < s < 1 \\ \\ 0\,, & si\ s \geq 1. \end{cases}$$

Entonces:

1. si $t = 0$,

$$f^*(0) = \left(e^{-\gamma|x|}\right)^*(0) = \text{ínf}\,\{s \in [0, \infty) :\ \lambda_{e^{-\gamma|x|}}(s) \leq 0\} = 1.$$

2. si $t > 0$,

$$\begin{aligned}\left(e^{-\gamma|x|}\right)^*(t) &= \text{ínf}\,\{s \in [0, \infty) :\ \lambda_{e^{-\gamma|x|}}(s) \leq t\} = \text{ínf}\left\{s \in [0, \infty) :\ \frac{2}{\gamma}\ln\left(\frac{1}{s}\right) \leq t\right\} \\ &= \text{ínf}\left\{s \in [0, \infty) :\ e^{-\frac{\gamma t}{2}} \leq s\right\} = e^{-\frac{\gamma t}{2}}.\end{aligned}$$

Lema 1.3. *Sean* $m \in \mathbb{N}$, $a_0 := 0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_m$; $E_1, \ldots, E_m$ *subconjuntos medibles de* E *no vacíos disyuntos dos a dos, tales que* $E = \bigsqcup_{k=1}^{m} E_k$ *y* $f(x) := \sum_{k=1}^{m} a_k \chi_{E_k}(x)$, *donde* χ_{E_k} *es la función característica del conjunto* E_k. *Entonces*

$$\forall t \in [c_1, +\infty), \quad f^*(t) = 0, \quad y$$

$$\forall t \in [c_{k+1}, c_k), \quad con \;\; k \in \{1, \ldots, m\}\,, \; se \; tiene \; que \quad f^*(t) = a_k;$$

donde

$$c_k = \sum_{l=k}^{m} \mu_{N}(E_l), \quad con \;\; k \in \{1, \ldots, m\}\,, \; c_{m+1} := 0.$$

(ver [5] pág. 29)

Lema 1.4. *Sea* $f : E \to \mathbb{C}$ *una función medible. Entonces:*

1. $f^*(0) = \|f\|_{L_\infty(E)}$ *y para todo* $t \in (0, +\infty)$, $0 \leq f^*(t) < +\infty$.
2. *La función* f^* *decrece en* $[0, +\infty)$.
3. *Si* $\mu_{N}(E_1) < +\infty$, *donde* $E_1 := \{x \in E : f(x) \neq 0\}$, *entonces para* $t \in [0, \mu_{N}(E_1))$, $f^*(t) > 0$ *y para* $t \in [\mu_{N}(E_1), +\infty)$, $f^*(t) = 0$.
4. *Para* $t \in [0, +\infty)$, $\lambda_f(f^*(t)) \leq t$.
5. *La función* f^* *es continua por la derecha sobre* $[0, +\infty)$.

Demostración.

Se probarán las propiedades 3 y 5; las demostraciones de 1, 2 y 4 se encuentran en ([5]).

3. Puesto que la función λ_f es decreciente, entonces la condición $f^*(t) = 0$ es equivalente a que

$$\forall s > 0, \;\; \lambda_f(s) \leq t.$$

También de la condición $\lim_{s \to 0+} \lambda_f(s) \leq t$, y de la continuidad por la derecha de λ_f se tiene que

$$\lim_{s \to 0+} \lambda_f(s) = \lambda_f(0) = \mu_{N}(E_1).$$

Por consiguiente,

$$f^*(t) = 0 \quad \Leftrightarrow \; \mu_{_N}(E_1) \leq t.$$

por lo tanto, $\forall\, t \in [\mu_{_N}(E_1), +\infty)$, $f^*(t) = 0$. Ahora, de lo anterior y de acuerdo con (1) se sigue que $\forall\, t \in [0, \mu_{_N}(E_1))$, $f^*(t) > 0$.

5. Sea $t_0 \in [0, +\infty)$. Entonces de acuerdo con (1) se tiene que, $0 \leq f^*(t_0) < \infty$ y $f^*(0) = \|f\|_{L_\infty(E)}$. Por lo tanto,

(a) Si $f^*(t_0) = 0$ entonces para todo $t \geq t_0$, $f^*(t) = 0$ (puesto que f^* es no negativa y decreciente), por lo tanto f^* es contínua a la derecha del punto t_0.
Supóngase que $f^*(t_0) > 0$ y que no es contínua a la derecha del punto t_0. Como la función f^* decrece, significa que

$$\lim_{t \to t_0 + 0} f^*(t) \; = \; \sup_{t > t_0} f^*(t) \; =: a \; < \; f^*(t_0),$$

es decir, para todo $t > t_0$, $f^*(t) < a$.
Como la función λ_f decrece, entonces $\lambda_f(a) \; \leq \; \lambda_f\,(f^*(t)) \; \leq \; t$, lo que implica que $\lambda_f(a) \leq t_0$ (Dado el conjunto $I = \{t : \; t > t_0\}$, entonces $t_0 = \inf I$. Además si para todo $t \in I$, $\lambda_f(a) < t$ entonces $\lambda_f(a) \leq t_0$).
De la definición de reordenamiento, se tiene que $f^*(t_0) \leq a$, con lo cual se llega a una contradicción.
(b) Si $f^*(0) = \|f\|_{L_\infty(E)} = \infty$.
Supóngase que f^* no es contínua a la derecha de 0. Como la función f^* decrece, entonces

$$\lim_{t \to 0+} f^*(t) = \sup_{t > 0} f^*(t) =: a < f^*(0) = +\infty,$$

esto indica que para todo $t > 0$, $f^*(t) < a$. Como la función λ_f decrece, entonces $\lambda_f(a) \leq \lambda_f(f^*(t)) \leq t$, lo cual implica que $\lambda_f(a) \leq 0$.
Por definición de reordenamiento $f^*(0) \leq a$, lo cual es una contradicción.
Se ha probado que $\lim\limits_{t \to 0+} f^*(t) = \infty$, lo que en este lema significa que la función es contínua a la derecha del punto 0.

El caso $f^*(0) < \infty$ se prueba de manera similar (ver [2], pág 43).

$\square$

Las demostraciones de los siguientes lemas pueden consultarse en [1] y [5].

Lema 1.5. *Sea* $E \subset \mathbb{R}^N$, f *y* f_k $(k \in \mathbb{N})$ *funciones medibles no negativas en* E *y además p.c.t* $x \in E$, $f_k(x) \leq f_{k+1}(x)$, *y* $\lim_{k\to+\infty} f_k(x) = f(x)$. *Entonces para todo* $t \in [0, +\infty)$,

$$\lambda_{f_k}(t) \leq \lambda_{f_{k+1}}(t) \leq \lambda_f(t), \quad \lim_{k\to+\infty} \lambda_{f_k}(t) = \lambda_f(t).$$

$$f_k^*(t) \leq f_{k+1}^*(t) \leq f^*(t) \ \ y \ \lim_{k\to\infty} f_k^*(t) = f^*(t).$$

Lema 1.6. *Sean* $E \subset \mathbb{R}^N$, $f : E \to \mathbb{C}$ *una función medible en* E *y* $g : [0, \infty) \to [0, \infty)$ *una función contínua y creciente. Entonces*

$$(g(|f|))^* = g(f^*),$$

En particular para $p > 0$, $(|f|^p)^* = (f^*)^p$.

Observación 1.7. *Del lema 1.5 se sigue que si para casi todo* $x \in E$, $|f(x)| \leq |g(x)|$. *Entonces para* $t \in [0, \infty)$, $f^*(t) \leq g^*(t)$.

Definición 1.7. *Dos funciones* $f, g : E \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{C}$ *se denominan equimedibles si tienen la misma función de distribución, esto es, si:* $\forall\ t \geq 0$, $\lambda_f(t) = \lambda_g(t)$.

Observación 1.8.

Si f es medible entonces f y f^* son equimedibles.

Teorema 1.9. *Sean* $0 < p \leq \infty$, $E \subset \mathbb{R}^N$ *y* f *una función medible en* E. *Entonces*

$$\|f\|_{L_p(E)} = \|f^*\|_{L_p(0,\infty)} = \|f^*\|_{L_p(0,\mu_N(E))}.$$

(ver [5], pág 35)

Consecuencia 1.2. *Para todo subconjunto medible* F *de* E *se satisface:*

$$\|f\|_{L_p(F)} \leq \|f^*\|_{L_p(0,\mu_N(F))}. \tag{1.7}$$

Demostración.
Sea χ_F la función característica del conjunto F. Entonces

$$f\chi_F \leq f \ \text{ en } \ E,$$

lo que significa que

$$(f\chi_{_F})^* \;\le\; f^*.$$

De acuerdo con la propiedad (3) del lema 1.4 y el teorema 1.9 ,

$$\|f\|_{L_p(F)} \;=\; \|f\chi_{_F}\|_{L_p(E)} \;=\; \|(f\chi_{_F})^*\|_{L_p(0,\,\mu_{_N}(E))} \;\le\; \|f^*\|_{L_p(0,\,\mu_{_N}(F))}\,.$$

□

Lema 1.7. *Sean $f, g : E \to \mathbb{C}$ funciones medibles. Entonces para $t_1,\, t_2 \in [0,\, \infty)$,*

$$(f+g)^*(t_1+t_2) \;\le\; f^*(t_1) + g^*(t_2), \tag{1.8}$$

$$(fg)^*(t_1+t_2) \;\le\; f^*(t_1)g^*(t_2). \tag{1.9}$$

Demostración.
Supóngase que $a := f^*(t_1),\; b := g^*(t_2)$.
Si se satisface que:

$$|f(x)+g(x)| \;>\; a+b, \quad |f(x)g(x)| \;>\; ab$$

entonces

$$|f(x)| \;>\; a \quad \text{o} \quad |g(x)| \;>\; b.$$

Teniendo en cuenta la propiedad (4) del lema 1.4 se obtiene que:

$$\begin{aligned}
\lambda_{f+g}(a+b) &= \mu_{_N}\left\{x \in E : |f(x)+g(x)| > a+b\right\} \\
&\le \mu_{_N}\left(\{x \in E : |f(x)| > a\} \cup \{x \in E : |g(x)| > b\}\right) \\
&\le \mu_{_N}\left\{x \in E : |f(x)| > a\right\} + \mu_{_N}\left\{x \in E : |g(x)| > b\right\} \\
&\le \lambda_f(a) + \lambda_f(b) \le \lambda_f(f^*(t_1)) + \lambda_f(g^*(t_2)) \le t_1 + t_2.
\end{aligned}$$

Además

$$\begin{aligned}
\lambda_{fg}(ab) &= \mu_{_N}\left\{x \in E : |f(x)g(x)| > ab\right\} \\
&\le \mu_{_N}\left(\{x \in E : |f(x)| > a\} \cup \{x \in E : |g(x)| > b\}\right) \\
&\le \mu_{_N}\left\{x \in E : |f(x)| > a\right\} + \mu_{_N}\left\{x \in E : |g(x)| > b\right\} \\
&\le \lambda_f(a) + \lambda_f(b) \le \lambda_f(f^*(t_1)) + \lambda_f(g^*(t_2)) \le t_1 + t_2.
\end{aligned}$$

En consecuencia, según la definición de reordenamiento,

$$(f+g)^*\,(t_1+t_2) \le a+b = f^*(t_1) + g^*(t_2).$$
$$(fg)^*\,(t_1+t_2) \le ab = f^*(t_1)g^*(t_2).$$

□

Observaciones 1.1.

1. En la desigualdad (1.6) puede tener lugar la igualdad, por ejemplo para $f = g$ en E se tiene que

$$(f+g)^*(t_1+t_2) = (2f)^*(t_1+t_2) = 2f^*(t_1+t_2) = f^*(t_1+t_2) + g^*(t_1+t_2).$$

2. El anterior lema muestra que los reordenamientos no son "aditivos" es decir, en general no tiene lugar una desigualdad similar a la triangular. Esto por supuesto dificultará la definición de normas mediante los reordenamientos.

1.3. Espacios de Marcinkiewicz

Definición 1.8. *Sea $0 < p \leq \infty$, $f : E \to \mathbb{C}$ una función medible. Para $0 < p < \infty$ se dice que $f \in M_p(E)$, si*

$$\|f\|^{(1)}_{M_p(E)} := \sup_{t\in[0,\infty)} t\,[\lambda_f(t)]^{\frac{1}{p}} < \infty; \tag{1.10}$$

para $p = \infty$ definimos,

$$M_\infty(E) \equiv L_\infty(E) \quad y \quad \|f\|^{(1)}_{M_\infty(E)} := \|f\|_{L_\infty(E)}\,. \tag{1.11}$$

El espacio lineal $M_p(E)$ para $0 < p < \infty$ también se denomina espacio $L_p(E)$ débil.

Ejemplo 1.5. *Sean $E \subset \mathbb{R}^N$, $0 < p \leq \infty$ y χ_F la función característica del conjunto $F \subset E$ de medida finita. Entonces*

$$\|\chi_F\|^{(1)}_{M_p(E)} = \|\chi_F\|^{(1)}_{M_p(F)} = [\,\mu_N(F)]^{\frac{1}{p}}\,.$$

En efecto,

$$\lambda_{\chi_F}(t) = \mu_N\{x\in E : \chi_F(x) > t\} = \mu_N\{x \in F : 1 > t\} = \begin{cases} \mu_N(F) & \text{si } 0 \leq t < 1 \\ 0 & \text{si } t \geq 1 \end{cases}$$

En consecuencia,

$$\|\chi_F\|^{(1)}_{M_p(E)} = \|\chi_F\|^{(1)}_{M_p(F)} = \sup_{t\geq 0} t\left[\lambda_{\chi_F}(t)\right]^{\frac{1}{p}} = \sup_{t\in(0,1)} t\,[\,\mu_N(F)]^{\frac{1}{p}} = [\,\mu_N(F)]^{\frac{1}{p}}\,.$$

y por ello $\chi_F \in M_p(F)$ para $0 < p \leq \infty$.

Ejemplo 1.6. *Sean* $0 < p < \infty,\ \gamma \in \mathbb{R},\ r > 0$. *Entonces, la función* $|x|^\gamma \in M_p(\mathbb{R}^N)$ *si y sólo si* $\gamma = -\frac{N}{p}$.

En $\mathbb{R}^N$ sólo se debe verificar $\gamma < 0$, ya que en los demás casos la función $\lambda_{|x|^\gamma}(t) = \infty$. Lo que implica que $|x|^\gamma \notin M_p(\mathbb{R}^N)$. En consecuencia:

$$\left\| |x|^\gamma \right\|^{(1)}_{M_p(\mathbb{R}^N)} = \sup_{t>0} t \left[\lambda_{|x|^\gamma}(t)\right]^{\frac{1}{p}},$$

pero

$$\lambda_{|x|^\gamma}(t) = \begin{cases} \infty & \text{si } t = 0 \\ \upsilon_N t^{\frac{N}{\gamma}} & \text{si } t > 0 \end{cases}$$

Entonces

$$\left\| |x|^\gamma \right\|^{(1)}_{M_p(\mathbb{R}^N)} = \sup_{t>0} t \left[\upsilon_N t^{\frac{N}{\gamma}}\right]^{\frac{1}{p}} = (\upsilon_N)^{\frac{1}{p}} \sup_{t>0} t^{1+\frac{N}{\gamma p}}$$

1. Si $\gamma < -\frac{N}{p}$, entonces $1 + \frac{N}{\gamma p} > 0$, lo que indica que $\sup_{t>0} t^{1+\frac{N}{\gamma p}} = +\infty$.

2. Si $\gamma = -\frac{N}{p}$, entonces $1 + \frac{N}{\gamma p} = 0$, lo que indica que $\sup_{t>0} t^{1+\frac{N}{\gamma p}} < +\infty$.

3. Si $\gamma > -\frac{N}{p}$, entonces $1 + \frac{N}{\gamma p} < 0$, lo que indica que $\sup_{t>0} \frac{1}{t^{-\left(1+\frac{N}{\gamma p}\right)}} = +\infty$.

Esto indica que para $0 < p < \infty,\ |x|^\gamma \in M_p(\mathbb{R}^N)$ si $\gamma = -\frac{N}{p}$.

Los espacios de Marcinkiewicz pueden normarse de diferentes formas, algunas de las cuales conllevan a cuasinormas equivalentes. A continuación se presenta una segunda forma de normalizar estos espacios.

Definición 1.9. *Sea* $0 < p \leq \infty$ *y* $f : E \to \mathbb{C}$ *una función medible. Se dice que* $f \in M_p(E)$ *si:*

$$\|f\|^{(2)}_{M_p(E)} := \sup_{t\in[0,\infty)} t^{\frac{1}{p}} f^*(t) = \sup_{t\in[0,\mu_N(E))} t^{\frac{1}{p}} f^*(t) < \infty \tag{1.12}$$

Para $p = \infty$ *se considera* $t^{\frac{1}{p}} \equiv 1$.

Lema 1.8. *Las definiciones 1.8 y 1.9 son equivalentes y además para* $f \in M_p(E)$,

$$\|f\|^{(1)}_{M_p(E)} \equiv \|f\|^{(2)}_{M_p(E)}. \tag{1.13}$$

Demostración.
Para $p = \infty$ la igualdad (1.13) se tiene de las siguientes igualdades:

$$\|f\|^{(2)}_{M_\infty(E)} = \sup_{t\in[0,\infty)} f^*(t) = f^*(0) = \|f\|_{L_\infty(E)} = \|f\|^{(1)}_{M_\infty(E)}.$$

Sean $0 < p < \infty$ y f una función que satisface las condiciones del lema 1.1. Entonces según dicho lema,

$$\forall t \in [a_m, \infty], \quad \lambda_f(t) = 0 \ \text{ y}$$

$$\forall t \in [a_{k-1}, a_k), \ k \in \{1, 2, \cdots, m\}, \ \lambda_f(t) = \sum_{l=k}^{m} \mu_{_N}(E_l).$$

Así se tiene que:

$$\sup_{t\geq 0} t\,[\lambda_f(t)]^{\frac{1}{p}} = \sup_{\substack{0\leq t<a_k\\ 1\leq k\leq m}} t\,[\lambda_f(t)]^{\frac{1}{p}} = \sup_{1\leq k\leq m} a_k \left[\sum_{l=k}^{m} \mu_{_N}(E_l)\right]^{\frac{1}{p}} = \sup_{1\leq k\leq m} a_k\,(c_k)^{\frac{1}{p}}$$
$$= \sup_{\substack{c_{k+1}\leq t<c_k\\ 1\leq k\leq m}} f^*(t)t^{\frac{1}{p}} = \sup_{t\geq 0} t^{\frac{1}{p}} f^*(t).$$

Para cualquier función f medible en E considérese la sucesión $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ de funciones f_k que satisfacen:

$$p.c.t\ x \in E, \quad f_k(x) \leq f_{k+1}(x) \ \text{ y } \ \lim_{k\to\infty} f_k(t) = f(t).$$

Entonces del lema 1.5 se tiene que para todo $t \in [0, \infty)$,

$$\lambda_{f_k}(t) \leq \lambda_{f_{k+1}}(t), \quad \lim_{k\to\infty} \lambda_{f_k}(t) = \lambda_f(t) \ \text{ y } \ f^*_k(t) \leq f^*_{k+1}(t), \ \lim_{k\to\infty} f^*_k(t) = f^*(t).$$

En consecuencia,

$$\sup_{t\in[0,\,\infty)} t\,[\lambda_f(t)]^{\frac{1}{p}} = \sup_{t\in[0,\,\infty)} \lim_{k\to\infty} t\,[\lambda_{f_k}(t)]^{\frac{1}{p}} = \lim_{k\to\infty} \sup_{t\in[0,\,\infty)} t\,[\lambda_{f_k}(t)]^{\frac{1}{p}}$$
$$= \lim_{k\to\infty} \sup_{t\in[0,\,\infty)} t^{\frac{1}{p}} f^*_k(t) = \sup_{t\in[0,\,\infty)} \lim_{k\to\infty} t^{\frac{1}{p}} f^*_k(t)$$
$$= \sup_{t\in[0,\,\infty)} t^{\frac{1}{p}} f^*(t),$$

hemos así demostrado lo deseado. □

Observación 1.9. *Debido a la igualdad (1.13) en adelante se simbolizará:*

$$\|f\|_{M_p(E)} = \|f\|^{(1)}_{M_p(E)} \equiv \|f\|^{(2)}_{M_p(E)} .$$

Teorema 1.10. *Sean* $0 < p < q \leq \infty$, $\mu_{_N}(E) < \infty$ *y* $f \in M_q(E)$. *Entonces* $f \in M_p(E)$, *es decir*

$$M_q(E) \subset M_p(E) \;\; y$$
$$\|f\|_{M_p(E)} \leq [\mu_{_N}(E)]^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \|f\|_{M_q(E)} .$$

Observación 1.10.

1. La constante $[\mu_{_N}(E)]^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}$ es exacta.

2. Para $\mu_{_N}(E) < \infty$, se tiene que a mayor indice p, "menor" es el espacio $M_p(E)$. Por eso $M_\infty(E)$ es el más "pequeño"de los espacios de Marcinkiewicz; o sea para todo $p > 0$, $L_\infty(E) \equiv M_\infty(E) \subset M_p(E)$.

3. Si $\mu_{_N}(E) = \infty \quad 0 < p < q \leq \infty$ el resultado no es valido; considérese por ejemplo la función $f(x) = |x|^{-\frac{N}{q}}$ en $\mathbb{R}^N$. Claramente $f \in M_q(\mathbb{R}^N)$ pero $f \notin M_p(\mathbb{R}^N)$.

Teorema 1.11. *Sean* $0 < p < \infty$ *y* $E \subset \mathbb{R}^N$ *un conjunto medible. Entonces*

$$L_p(E) \subset M_p(E) \tag{1.14}$$

Si $0 < \epsilon < p \quad y \quad \mu_{_N}(E) < \infty$. *Entonces*

$$M_p(E) \subset L_{p-\epsilon}(E) \tag{1.15}$$

Además para toda función $f \in L_p(E)$,

$$\|f\|_{M_p(E)} \leq \|f\|_{L_p(E)} .$$

Las demostraciones de estos teoremas se encuentran en [5].

Observación 1.11. *Para cualquier conjunto* $E \subset \mathbb{R}^N$ *de medida no nula la inclusión (1.14) y si* $\mu_{_N}(E) < \infty$ *la inclusión (1.15) son estrictas. Para (1.14) esto se verifica mediante la función* $f(x) := 2^{\frac{k}{p}} \chi_{E_k}$, *en tanto que para (1.15) lo hace la función* $f(x) := 2^{\frac{k}{p-\frac{\epsilon}{2}}} \chi_{E_k}$, *para todo* $k \in \mathbb{N}$ *y para todo* $x \in E_k$.

Definición 1.10. *Sean* $1 < p \leq \infty$ *y* $f : E \to \mathbb{C}$ *una función medible. Se dice que* $f \in M_p(E)$ *si*

$$\|f\|^{(3)}_{M_p(E)} := \sup_{F \subset E} \left\{ [\,\mu_{_N}(F)]^{-\frac{1}{p'}} \int\limits_F |f(x)|\, dx \right\} < \infty. \tag{1.16}$$

El supremo se toma respecto a todos los subconjuntos medibles F *del conjunto* E.

Lema 1.9. *Para* $1 < p \leq \infty$ *las definiciones 1.8, 1.9 y 1.10 son equivalentes y además para toda* $f \in M_p(E)$,

$$\|f\|_{M_p(E)} \leq \|f\|^{(3)}_{M_p(E)} \leq p' \, \|f\|_{M_p(E)} \,. \tag{1.17}$$

En particular,

$$\|f\|_{M_\infty(E)} = \|f\|^{(3)}_{M_\infty(E)} \ \left(= \|f\|_{L_\infty(E)} \right).$$

Demostración.
Considérese los siguientes casos:

1. Si $\|f\|_{M_p(E)} = 0$, entonces f es equivalente a 0 sobre E y las desigualdades (1.17) son triviales.

2. Supongamos que $\|f\|^{(3)}_{M_p(E)} > 0$. Entonces para cualquier conjunto medible $F \subset E$,

   $$\int\limits_F |f(x)| dx \leq [\,\mu_{_N}(F)]^{\frac{1}{p'}} \, \|f\|^{(3)}_{M_p(E)} \,.$$

   En particular para todo $t \in [0, \infty)$, considérese los conjuntos $E_t := \{x \in E : |f(x)| > t\}$ y sea $F := E_t$. Entonces según la definición de λ_f se tiene:

   $$\int\limits_{E_t} |f(x)|\, dx \leq [\lambda_f(t)]^{\frac{1}{p'}} \, \|f\|^{(3)}_{M_p(E)}$$

   De otra parte, puesto que para todo E_t, $|f(x)| > t$ entonces

   $$\int\limits_{E_t} |f(x)|\, dx \geq t \, \mu_{_N}(E_t) = t \, \lambda_f(t)$$

   Esto significa que

   $$t\lambda_f(t) \leq [\lambda_f(t)]^{\frac{1}{p'}} \, \|f\|^{(3)}_{M_p(E)}$$

Puesto que $\lambda_f(t) > 0$ para $t < \|f\|_{L_\infty(E)}$ (ver lema 1.2, punto 4), entonces para todo $t \in [0, \mu_{_N}(E))$,

$$t\,[\lambda_f(t)]^{\frac{1}{p}} = t\,[\lambda_f(t)]^{1-\frac{1}{p'}} \leq \|f\|^{(3)}_{M_p(E)}$$

Finalmente, pasando al supremo respecto a $t \in [0, \mu_{_N}(E))$, se obtiene la desigualdad izquierda de (1.17).

3. Sea ahora $\|f\|_{M_p(E)} \equiv \|f\|^{(2)}_{M_p(E)} < \infty$. Entonces de acuerdo con la desigualdad (1.7), para cualquier conjunto $F \subset E$ de medida positiva se verifica:

$$\int\limits_F |f(x)|\,dx \leq \int\limits_0^{\mu_N(F)} f^*(t)\,dt = \int\limits_0^{\mu_N(F)} t^{\frac{1}{p}} f^*(t) t^{-\frac{1}{p}}\,dt$$

$$\leq \sup_{t\in[0,\infty)} t^{\frac{1}{p}} f^*(t) \int\limits_0^{\mu_N(F)} t^{-\frac{1}{p}}\,dt = p'\,[\mu_{_N}(F)]^{\frac{1}{p'}}\,\|f\|_{M_p(E)}$$

De aquí, dividiendo entre $[\,\mu_{_N}(F)]^{\frac{1}{p'}} \neq 0$ y pasando al supremo respecto a F, se obtiene la desigualdad derecha de (1.17).

Para el caso $\mu_N(F) = 0$ el resultado es trivial.

El lema 1.9 queda entonces demostrado. □

Observación 1.12. *Para* $0 < p \leq 1$, $\|f\|^{(3)}_{M_p(E)} = [\,\mu_{_N}(E)]^{-\frac{1}{p'}}\,\|f\|_{L_1(E)}$ *y la definición 1.10 no es equivalente a las definiciones 1.8 y 1.9, lo que se sigue de los lemas 1.11, teniendo encuenta la observación 1.11.*

En efecto,

1. Para $0 < p < 1$ se tiene que $p' = \frac{p}{p-1} < 0$ y

$$\|f\|^{(3)}_{M_p(E)} = \sup_{F\subset E}\left\{[\,\mu_{_N}(F)]^{-\frac{1}{p'}} \int\limits_F |f(x)|\,dx\right\} = [\,\mu_{_N}(E)]^{-\frac{1}{p'}}\,\|f\|_{L_1(E)}\,.$$

2. Para $p = 1$, $p' := \infty$ y $\|f\|^{(3)}_{M_1(E)} = \|f\|_{L_1(E)}$, de donde se deduce que $M_1(E) \equiv L_1(E)$.

Lo anterior muestra que para $0 < p \leq 1$ los espacios $M_p(E)$ con esta definición coinciden con $L_p(E)$, en contradicción con las contenencias estrictas que se tienen entre $M_p(E)$ y $L_p(E)$ dadas las definiciones 1.8, 1.9 y la observación 1.11. Es por ello que en la definición de $\|f\|^{(3)}_{M_p(E)}$ se considera solamente el caso $p > 1$.

Capítulo 2

TEOREMA DE STEIN-WEISS Y LOS ESPACIOS DE LORENTZ

2.1. Algunas desigualdades integrales relacionadas con los espacios M_p

Teorema 2.1. *(Desigualdad multiplicativa) Sean* $0 < p_1 < p < p_2 \leq \infty$ *y* $f \in M_{p_1}(E) \bigcap M_{p_2}(E)$. *Entonces* $f \in L_p(E)$ *y además*

$$\|f\|_{L_p(E)} \leq \left(\frac{p(p_2 - p_1)}{(p - p_1)(p_2 - p)} \right)^{\frac{1}{p}} \|f\|^{1-\theta}_{M_{p_1}(E)} \|f\|^{\theta}_{M_{p_2}(E)};$$

$$\|f\|_{M_p(E)} \leq \|f\|^{1-\theta}_{M_{p_1}(E)} \|f\|^{\theta}_{M_{p_2}(E)},$$

donde el número $\theta \in (0, 1)$ *se define de la igualdad* $\dfrac{1}{p} = \dfrac{1-\theta}{p_1} + \dfrac{\theta}{p_2}$.

Observación 2.1. *Las constantes en las desigualdades anteriores son exactas. Además, puesto que para* $0 < p_1 < p < p_2 \leq \infty$ *se verifica la desigualdad* $(p - p_1)^2 + p_1 (p_2 - p_1) > 0$, *es decir* $p (p_2 - p_1) > (p - p_1)(p_2 - p)$, *se sigue que la constante en la primera desigualdad es estrictamente mayor que 1.*

Para la prueba véase [2], págs 59-60.

Teorema 2.2. *Sea* $h \in \mathbb{R}^N$ *y* f *una función medible en* $E + h := \{x + h : x \in E\}$. *Entonces*

$$\|f(\cdot + h)\|_{M_p(E)} = \|f\|_{M_p(E+h)}.$$

En particular,

$$\|f(\cdot + h)\|_{M_p(\mathbb{R}^N)} = \|f\|_{M_p(\mathbb{R}^N)}.$$

(Invarianza de la $M_p(E)$-cuasinorma respecto al desplazamiento).

Demostración.

1. Para $p = \infty$ se tiene que $M_\infty(E) \equiv L_\infty(E)$ y $L_\infty(E)$ es invariante respecto a su norma.

2. Para $0 < p < \infty$ observe que:

$$\|f(\cdot + h)\|_{M_p(E)} = \sup_{t>0} t \left[\lambda_{f(\cdot+h)}(t)\right]^{\frac{1}{p}} = \sup_{t>0} t \left[\lambda_f(t)\right]^{\frac{1}{p}} = \|f\|_{M_p(E+h)},$$

puesto que

$$\lambda_{f(\cdot+h)}(t) = \mu_N \{x \in E : |f(x+h)| > t\} = \mu_N \{y \in E+h : |f(y)| > t\} = \lambda_f(t).$$

$\square$

El siguiente teorema presenta una desigualdad similar a

$\|f+g\|_{M_p(E)} \leq 2^{\frac{1}{p}} \left(\|f\|_{M_p(E)} + \|g\|_{M_p(E)}\right) \forall f, g \in M_p(E),$ libre de la constante $2^{\frac{1}{p}} > 1$. (ver [5], pág 56).

Teorema 2.3. *Sea $0 < p < \infty$. Si $f, g \in M_p(E)$ entonces*

$$\|f+g\|_{M_p(E)} \leq \left(\|f\|_{M_p(E)}^{\frac{p}{p+1}} + \|g\|_{M_p(E)}^{\frac{p}{p+1}}\right)^{\frac{p+1}{p}}.$$

Para la demostración de esta desigualdad es necesario el siguiente lema.

Lema 2.1.

Supóngase $\varphi(\epsilon) = A\epsilon^\alpha + B(1-\epsilon)^\alpha$ con $A, B > 0$, $\alpha < 0$ y $0 < \epsilon < 1$. Entonces φ tiene mínimo local en $\epsilon_0 = \frac{1}{\left(\frac{B}{A}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} + 1}$, y además $\min\limits_{0<\epsilon<1} \varphi(\epsilon) = \varphi(\epsilon_0) = \left(A^{\frac{1}{1-\alpha}} + B^{\frac{1}{1-\alpha}}\right)^{1-\alpha}$.

Demostración.
Encontremos los puntos críticos de φ :

$$\varphi'(\epsilon) = \alpha A\epsilon^{\alpha-1} - \alpha B (1-\epsilon)^{\alpha-1}.$$

$\varphi'(\epsilon) = 0$ si y solamente si

$$B(1-\epsilon)^{\alpha-1} = A\epsilon^{\alpha-1} \Leftrightarrow \epsilon = \frac{1}{\left(\frac{B}{A}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} + 1}.$$

De modo que $\frac{1}{\left(\frac{B}{A}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}+1}$ es punto crítico. Como

$$\varphi'(\epsilon) < 0 \;\text{ para }\; 0 < \epsilon < \frac{1}{\left(\frac{B}{A}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} + 1}$$

$$\varphi'(\epsilon) > 0 \;\text{ para }\; \frac{1}{\left(\frac{B}{A}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} + 1} < \epsilon < 1;$$

entonces según el criterio de la primera derivada, φ tiene un mínimo local en $\epsilon_0 = \frac{1}{\left(\frac{B}{A}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}+1}$ y por lo tanto

$$\begin{aligned}
\min_{0<\epsilon<1} \varphi(\epsilon) = \varphi(\epsilon_0) &= A\left(\frac{1}{\left(\frac{B}{A}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} + 1}\right)^{\alpha} + B\left(1 - \frac{1}{\left(\frac{B}{A}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} + 1}\right)^{\alpha} \\
&= \frac{A^{\frac{1}{1-\alpha}}}{\left(A^{\frac{1}{1-\alpha}} + B^{\frac{1}{1-\alpha}}\right)^{\alpha}} + \frac{B^{\frac{1}{1-\alpha}}}{\left(A^{\frac{1}{1-\alpha}} + B^{\frac{1}{1-\alpha}}\right)^{\alpha}} = \left(A^{\frac{1}{1-\alpha}} + B^{\frac{1}{1-\alpha}}\right)^{1-\alpha}.
\end{aligned}$$

□

Demostración del teorema 2.3.

Sean $f, g \in M_p(E)$. Entonces para todo $t \in [0,\infty)$ y $\epsilon \in (0,1)$,

$$(f+g)^*(t) \leq f^*(\epsilon t) + g^*((1-\epsilon)t).$$

Luego,

$$\begin{aligned}
\|f+g\|_{M_p(E)} &= \sup_{t\in[0,\infty)} t^{\frac{1}{p}} (f+g)^*(t) \leq \sup_{t\in[0,\infty)} t^{\frac{1}{p}} \left[f^*(\epsilon t) + g^*((1-\epsilon)t)\right] \\
&\leq \epsilon^{-\frac{1}{p}} \sup_{s\in[0,\infty)} s^{\frac{1}{p}} f^*(s) + (1-\epsilon)^{-\frac{1}{p}} \sup_{s\in[0,\infty)} s^{\frac{1}{p}} g^*(s) \\
&= \epsilon^{-\frac{1}{p}} \|f\|_{M_p(E)} + (1-\epsilon)^{-\frac{1}{p}} \|g\|_{M_p(E)}.
\end{aligned}$$

Tomando en el lema 2.1

$$A = \|f\|_{M_p(E)}\,,\ B = \|g\|_{M_p(E)} \text{ y } \alpha = -\frac{1}{p},$$

se tiene que $\epsilon = \frac{1}{\left(\frac{\|g\|_{M_p(E)}}{\|f\|_{M_p(E)}}\right)^{\frac{p}{p+1}}+1}$ y por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\|f+g\|_{M_p(E)} &\le \left[\left(\frac{\|g\|_{M_p(E)}}{\|f\|_{M_p(E)}}\right)^{\frac{p}{p+1}} + 1\right]^{\frac{1}{p}} \left[\|f\|_{M_p(E)} + \|g\|_{M_p(E)} \left(\frac{\|g\|_{M_p(E)}}{\|f\|_{M_p(E)}}\right)^{-\frac{1}{p+1}}\right] \\
&= \|f\|_{M_p(E)}^{-\frac{1}{p+1}} \left(\|f\|_{M_p(E)}^{\frac{p}{p+1}} + \|g\|_{M_p(E)}^{\frac{p}{p+1}}\right)^{\frac{1}{p}} \|f\|_{M_p(E)}^{\frac{1}{p+1}} \left(\|f\|_{M_p(E)}^{\frac{p}{p+1}} + \|g\|_{M_p(E)}^{\frac{p}{p+1}}\right) \\
&= \left(\|f\|_{M_p(E)}^{\frac{p}{p+1}} + \|g\|_{M_p(E)}^{\frac{p}{p+1}}\right)^{\frac{p+1}{p}}.
\end{aligned}$$

□

Teorema 2.4. *Sean $1 \le p \le \infty$ y $E \subset \mathbb{R}^N$. Si $f \in M_p(E)$ y $g \in M_{p'}(E)$, entonces*

$$\|fg\|_{M_1(E)} \le p^{\frac{1}{p}}\ (p')^{\frac{1}{p'}}\ \|f\|_{M_p(E)}\ \|g\|_{M_{p'}(E)}\,. \tag{2.1}$$

(Desigualdad de Hölder para los espacios de Marcinkiewicz).

Para la demostración de esta desigualdad es necesario el siguiente lema, cuya demostración es similar a la del lema 2.1.

Lema 2.2.

Supóngase $\varphi(\epsilon) = A\,B\,\epsilon^{\alpha}\,(1-\epsilon)^{\beta}$ con $A, B > 0,\ \alpha, \beta < 0$ y $0 < \epsilon < 1$. Entonces φ tiene mínimo local en $\epsilon_0 = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}$, y $\min\limits_{0<\epsilon<1} \varphi(\epsilon) = \varphi(\epsilon_0) = A\,B\left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\right)^{\alpha}\left(\frac{\beta}{\alpha+\beta}\right)^{\beta}$.

Demostración del teorema 2.4.

1. Sean $1 < p < \infty$, $f \in M_p(E)$ y $g \in M_{p'}(E)$. Entonces $\forall\, t \in [0, \infty)$ y $\epsilon \in (0, 1)$,

$$(fg)^*\,(t) \le f^*\,(\epsilon t)\ g^*\,((1-\epsilon)t)\,;$$

además como p, p' son conjugados, se sigue que

$$\begin{aligned}
\|fg\|_{M_1(E)} &= \sup_{t\in[0,\infty)} t\,(fg)^*(t) \le \sup_{t\in[0,\infty)} t\,[f^*(\epsilon t)\; g^*((1-\epsilon)t)] \\
&\le \epsilon^{-\frac{1}{p}} \sup_{s\in[0,\infty)} s^{\frac{1}{p}} f^*(s)\;\; (1-\epsilon)^{-\frac{1}{p'}} \sup_{s\in[0,\infty)} s^{\frac{1}{p'}} g^*(s) \\
&= \epsilon^{-\frac{1}{p}} (1-\epsilon)^{-\frac{1}{p'}} \, \|f\|_{M_p(E)} \; \|g\|_{M_{p'}(E)} .
\end{aligned}$$

Reemplazando en el lema 2.2:

$$A = \|f\|_{M_p(E)}\,,\; B = \|g\|_{M_{p'}(E)}\,, \alpha = -\frac{1}{p} \text{ y } \;\beta = -\frac{1}{p'},$$

se tiene que $\epsilon = \frac{p'}{p+p'}$ y por lo tanto

$$\begin{aligned}
\|fg\|_{M_1(E)} &\le \left(\frac{p'}{p+p'}\right)^{-\frac{1}{p}} \left(1-\frac{p'}{p+p'}\right)^{-\frac{1}{p'}} \|f\|_{M_p(E)} \; \|g\|_{M_{p'}(E)} \\
&= \left(\frac{p+p'}{p'}\right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{p+p'}{p}\right)^{\frac{1}{p'}} \|f\|_{M_p(E)} \; \|g\|_{M_{p'}(E)} \\
&= p^{\frac{1}{p}} (p')^{\frac{1}{p'}} \, \|f\|_{M_p(E)} \; \|g\|_{M_{p'}(E)} .
\end{aligned}$$

2. Si $p = \infty$, entonces $p' = 1$. Ahora, nótese que $\lim\limits_{p\to+\infty} p^{\frac{1}{p}} = 1$ entonces debe probarse que $\|fg\|_{M_1(E)} \le \|f\|_{M_\infty(E)} \|g\|_{M_1(E)}$. En efecto:

$$\begin{aligned}
\|fg\|_{M_1(E)} &= \sup_{t\in[0,\infty)} t\; (fg)^*(t) \le \sup_{t\in[0,\infty)} t\, f^*(0)\, g^*(t) \\
&= f^*(0) \sup_{t\in[0,\infty)} t\, g^*(t) = \|f\|_{L_\infty(E)} \|g\|_{M_1(E)} \\
&= \|f\|_{M_\infty(E)} \|g\|_{M_1(E)} .
\end{aligned}$$

El caso $p = 1$ es similar, ya que entonces $p' = \infty$. Así, el teorema 2.4 queda demostrado.

$\square$

Observación 2.2. *La constante* $p^{\frac{1}{p}}(p')^{\frac{1}{p'}}$ *de la desigualdad (2.1) es exacta. En efecto,*

Sea $f_0(x) = x^{-\frac{1}{p}}$ *y* $g_0(x) = x^{\frac{1}{p}}$ *para todo* $x \in (0,1)$*;* $1 \leq p \leq \infty$*. Entonces*

$$f_0^*(t) = \begin{cases} t^{-\frac{1}{p}} & si\ 0 < t < 1 \\ 0 & si\ t \geq 1 \end{cases} \quad , \qquad g_0^*(t) = \begin{cases} (1-t)^p & si\ 0 < t < 1 \\ 0 & si\ t \geq 1 \end{cases} \quad ;$$

además

$$(f_0\, g_0)^*(t) = \begin{cases} 1 & si \quad 0 < t < 1 \\ 0 & si \quad t \geq 1. \end{cases}$$

Por lo tanto,

$$\|f_0 g_0\|_{M_1} = \sup_{t\in(0,1)} t = 1, \quad \|f_0\|_{M_p} = \sup_{t\in(0,1)} t^{\frac{1}{p}} t^{-\frac{1}{p}} = 1 \quad y \quad \|g_0\|_{M_{p'}} = \sup_{t\in(0,1)} t(1-t)^{\frac{1}{p}} = p^{-\frac{1}{p}}(p')^{-\frac{1}{p'}}.$$

Luego,

$$\|f_0 g_0\|_{M_1} = 1 = p^{\frac{1}{p}}(p')^{\frac{1}{p'}} \|f_0\|_{M_p} \|g_0\|_{M_{p'}}.$$

Obsérvese que si la desigualdad 2.1 fuera cierta para algún $0 < \epsilon < p^{\frac{1}{p}}(p')^{\frac{1}{p'}}$ *entonces,*

$$\|f_0 g_0\|_{M_1} \leq \epsilon \|f_0\|_{M_p} \|g_0\|_{M_{p'}}, \quad \epsilon \in (0,\, p^{\frac{1}{p}}(p')^{\frac{1}{p'}});$$

lo que implica que $\epsilon \geq p^{\frac{1}{p}}(p')^{\frac{1}{p'}}$*, lo cual es contradictorio.*

Teorema 2.5. *Sean* $1 < p \leq \infty$ *y* $f : E \to \mathbb{C}$ *una función medible. Entonces*

$$\|f\|^{(3)}_{M_p(E)} = \sup_{t\in(0,\infty)} t^{\frac{1}{p}} f^{**}(t);$$

donde $f^{**}(t) := \frac{1}{t}\int\limits_0^t f^*(s)ds$*.*

Demostración.

- Sea $p = \infty$. Entonces para todo $t > 0$,

$$f^{**}(t) = \frac{1}{t}\int_0^t f^*(s)ds \geq \frac{1}{t}f^*(t)\int_0^t ds = f^*(t).$$

Luego,

$$\|f\|^{(3)}_{M_\infty(E)} = \|f\|_{L_\infty(E)} = f^*(0) = \sup_{t\in(0,\infty)} f^*(t) \leq \sup_{t\in(0,\infty)} f^{**}(t);$$

así, $\|f\|^{(3)}_{M_\infty(E)} \leq \sup_{t\in(0,\infty)} f^{**}(t)$.

Por otro lado,

$$\begin{aligned} f^{**}(t) = \frac{1}{t}\int_0^t f^*(s)ds \leq \frac{1}{t}\sup_{s\in(0,\infty)} f^*(s)\int_0^t ds = \sup_{s\in(0,\infty)} f^*(s) \\ = f^*(0) = \|f\|_{L_\infty(E)} = \|f\|^{(3)}_{M_\infty(E)}; \end{aligned}$$

pasando al supremo respecto a t se obtiene:

$$\sup_{t\in(0,\infty)} f^{**}(t) \leq \|f\|^{(3)}_{M_\infty(E)}.$$

En consecuencia,

$$\|f\|^{(3)}_{M_\infty(E)} = \sup_{t\in(0,\infty)} f^{**}(t).$$

- Si $1 < p < \infty$ entonces,

$$\begin{aligned} \|f\|^{(3)}_{M_p(E)} &= \sup_{t\in(0,\infty)} \sup_{\substack{F\subset E \\ \mu_N(F)=t}} [\mu_N(F)]^{-\frac{1}{p'}} \int_F |f(x)|\,dx \\ &= \sup_{t\in(0,\infty)} t^{\frac{1}{p}} \left(t^{-1} \sup_{\substack{F\subset E \\ \mu_N(F)=t}} \int_F |f(x)|\,dx \right), \quad (\star) \end{aligned}$$

y dado que (ver [1] pág.49)

$$\sup_{\substack{F\subset E\\ \mu_N(F)=t}} \int_F |f(x)|\,dx \leq \int_0^t f^*(u)\,du, \tag{2.2}$$

se sigue que

$$\|f\|^{(3)}_{M_p(E)} \leq \sup_{t\in(0,\infty)} t^{\frac{1}{p}} f^{**}(t). \quad (\star\star)$$

Por otro lado, considérese $t_0 := \text{ínf}\{t > 0 : f^*(t) = f^*(+\infty)\}$ y demostremos que

$$f^{**}(t) = \frac{1}{t} \sup_{\substack{F\subset E\\ \mu_N(F)=t}} \int_F |f(x)|\,dx \quad \forall t \in (0, t_0), \tag{2.3}$$

o equivalentemente

$$\int_0^t f^*(u)\,du = \sup_{\substack{F\subset E\\ \mu_N(F)=t}} \int_F |f(x)|\,dx \quad \forall t \in (0, t_0). \tag{2.4}$$

Puede probarse (ver [1], p.82, formula (17)) que para todo $t > 0$ existe un conjunto medible $F_t \subset E$ tal que $\mu_N(F) = t$ y:

$$(f\chi_{F_t})^*(u) := \begin{cases} f^*(u), & si \quad u < t \\ 0, & si \quad u \geq t, \end{cases}$$

entonces, del teorema 1.9 se sigue que

$$\int_{F_t} |f(x)|\,dx = \left\|f\chi_{F_t}\right\|_{L_1(E)} = \int_0^\infty (f\chi_{F_t})^*(u)\,du = \int_0^t f^*(u)\,du,$$

así,

$$\int_0^t f^*(u)\,du \leq \sup_{\substack{F\subset E\\ \mu_N(F)=t}} \int_F |f(x)|\,dx.$$

De la desigualdad anterior y de (2.2) se tiene (2.4).

Si $t_0 = \infty$, entonces de $(\star)$ y (2.3) se sigue que

$$\|f\|_{M_p(E)}^{(3)} = \sup_{t\in(0,\infty)} t^{\frac{1}{p}} f^{**}(t).$$

Si $t_0 < \infty$ y $\|f\|_{M_p(E)}^{(3)} < \infty$ entonces, de acuerdo con el lema 1.9, $\|f\|_{M_p(E)} < \infty$, de donde $f^*(+\infty) := \lim_{t\to\infty} f^*(t) = 0$. O sea $f^*(t) \equiv 0$ sobre $[t_0, +\infty)$ y $f^{**}(t) = t^{-1}\int_0^{t_0} f^*(u)\,du,\ \forall t \geq t_0$, es decir

$$\sup_{t\geq t_0}\left[t^{\frac{1}{p}} f^{**}(t)\right] = \left(\int_0^{t_0} f^*(u)\,du\right) t_0^{\frac{1}{p}-1} = t_0^{\frac{1}{p}} f^{**}(t_0);$$

en consecuencia, $\sup_{t\in(0,\infty)} t^{\frac{1}{p}} f^{**}(t) = \sup_{t\in(0,t_0)} t^{\frac{1}{p}} f^{**}(t)$ y entonces aplicando la fórmula (2.3), se obtiene que $\sup_{t\in(0,\infty)} t^{\frac{1}{p}} f^{**}(t) \leq \|f\|_{M_p(E)}^{(3)}$ y con $(\star\star)$ se obtiene lo deseado.

$\square$

2.2. Espacios de Lorentz

Definición 2.1. *Sea $E \subset \mathbb{R}^N$ y $f : E \to \mathbb{C}$ una función medible. Para $0 < p \leq \infty$ y $0 < \sigma < \infty$ se dice que $f \in L_{p,\sigma}(E)$ si*

$$\|f\|_{L_{p,\sigma}(E)} := \left[\int_0^\infty \left(t^{\frac{1}{p}} f^*(t)\right)^\sigma \frac{dt}{t}\right]^{\frac{1}{\sigma}} < \infty.$$

Si $0 < p \leq \infty$ y $\sigma = \infty$ se considera $L_{p,\infty}(E) = M_p(E)$. Recordemos que $M_\infty(E) \equiv L_\infty(E)$ y entonces $L_{\infty,\infty}(E) = L_\infty(E)$. De esta manera $L_{p,\sigma}(E)$ está definido para $0 < p, \sigma \leq \infty$.

El espacio lineal $L_{p,\sigma}(E)$ con la expresión $\|.\|_{L_{p,\sigma}(E)}$ se denomina espacio de Lorentz.

Observación 2.3.

- Si $\mu_N(E) = 0$ entonces para cualquier función $f : E \to \mathbb{C}$, $f^* = 0$ en $[0, \infty)$ y $\|f\|_{L_{p,\sigma}(E)} = 0$. Así toda f medible está en $L_{p,\sigma}(E)$ y por ello el caso $\mu_N(E) = 0$ no reviste importancia. En adelante se supondrá que $\mu_N(E) > 0$.

- Si se considera en la definición $p = \sigma$ con $0 < p \leq \infty$ entonces $L_{p,p}(E) \equiv L_p(E)$, es decir los espacios de Lorentz son una generalización de los espacios de Lebesgue $L_p(E)$. En efecto, para $0 < p = \sigma < \infty$ se obtiene que

$$\begin{aligned}\|f\|_{L_{p,p}(E)} &= \left[\int_0^\infty \left(t^{\frac{1}{p}} f^*(t)\right)^p \frac{dt}{t}\right]^{\frac{1}{p}} = \left[\int_0^\infty t\,(f^*(t))^p \,\frac{dt}{t}\right]^{\frac{1}{p}} \\ &= \left[\int_0^\infty (f^*(t))^p \,dt\right]^{\frac{1}{p}} = \left(\int_E |f(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} = \|f\|_{L_p(E)}.\end{aligned}$$

  Por otro lado, dado que f^* es decreciente, según el lema 1.4 se sigue que

$$\|f\|_{L_{\infty,\infty}(E)} = \sup_{t \in [0,\infty)} f^*(t) = f^*(0) = \|f\|_{L_\infty(E)}.$$

  Por lo tanto,

  $\|f\|_{L_{p,p}(E)} = \|f\|_{L_p(E)}$ para $0 < p \leq \infty$ lo cual implica que $L_{p,p}(E) = L_p(E)$.

Ejemplo 2.1. *Sea $E \subset \mathbb{R}^N$ un conjunto medible y χ_G la función característica del conjunto de medida finita $G \subset E$. Entonces*

$$\|\chi_G\|_{L_{p,\sigma}(E)} = A_{p,\sigma}\,[\mu_N(G)]^{\frac{1}{p}}\,,$$

donde

$$A_{p,\sigma} = \begin{cases} \left(\frac{p}{\sigma}\right)^{\frac{1}{\sigma}} & si \;\; \sigma < p < \infty \\ 1 & si \;\; \sigma = \infty \;\; y \; p < \infty. \end{cases} \tag{2.5}$$

Además, si $p = \sigma = \infty$ entonces

$$\|\chi_G\|_{L_{p,\sigma}(E)} = 1. \tag{2.6}$$

En efecto,

$$\lambda_{\chi_G}(s) = \mu_N \{x \in E : \chi_G(x) > s\} = \mu_N \{x \in G : 1 > s\} = \begin{cases} \mu_N(G) & si \;\; 0 \le s < 1 \\ 0 & si \;\; s \ge 1. \end{cases}$$

Luego,

$$\chi_G^*(t) = \operatorname{ínf}\left\{s \in [0, +\infty) : \lambda_{\chi_G}(s) \le t\right\} = \begin{cases} 1 & si \;\; t \in [0, \mu_N(G)] \\ 0 & si \;\; t > \mu_N(G); \end{cases}$$

es decir

$$\chi_G^*(t) = \chi_{[0,\mu_N(G)]}(t).$$

En consecuencia:

1. *Si $\sigma < p < \infty$ se tiene que*

$$\begin{aligned} \|\chi_G\|^\sigma_{L_{p,\sigma}(E)} &= \int_0^\infty \left[t^{\frac{1}{p}}\chi_G^*(t)\right]^\sigma \frac{dt}{t} = \int_0^\infty \left[t^{\frac{1}{p}}\chi_{[0,\mu_N(G)]}(t)\right]^\sigma \frac{dt}{t} \\ &= \int_0^{\mu_N(G)} t^{\frac{\sigma}{p}-1} dt = \frac{p}{\sigma}\left[\mu_N(G)\right]^{\frac{\sigma}{p}}. \end{aligned}$$

Así,

$$\|\chi_G\|_{L_{p,\sigma}(E)} = \left(\frac{p}{\sigma}\right)^{\frac{1}{\sigma}} \left[\mu_N(G)\right]^{\frac{1}{p}}.$$

2. *Si $\sigma = \infty$ y $p < \infty$ entonces*

$$\|\chi_G\|^\sigma_{L_{p,\sigma}(E)} = \sup_{t \in [0,\infty)} t^{\frac{1}{p}}\chi_G^*(t) = \sup_{t \in [0,\infty)} t^{\frac{1}{p}}\chi_{[0,\mu_N(G)]}(t) = \left[\mu(G)\right]^{\frac{1}{p}}.$$

De 1 y 2 se sigue (2.5).

Por otro lado, si $p = \sigma = \infty$ entonces

$$\|\chi_G\|_{L_{p,\sigma}(E)} = \sup_{t \in [0,\infty)} \chi_G^*(t) = \sup_{t \in [0,\infty)} \chi_{[0,\mu_N(G)]}(t) = 1.$$

Por lo tanto $\|\chi_G\|_{L_{p,\sigma}(E)} = 1$.

Lema 2.3.

Supóngase que $0 < p, \sigma \leq \infty$, $f \in L_{p,\sigma}(E)$ y $g \approx f$ en E. Entonces $g \in L_{p,\sigma}(E)$ y además $\|g\|_{L_{p,\sigma}(E)} = \|f\|_{L_{p,\sigma}(E)}$.

Demostración.

Sea $f \in L_{p,\sigma}(E)$, es decir $\|f\|_{L_{p,\sigma}(E)} < \infty$ y como $g \approx f$ en E entonces para todo $t \in [o, \infty)$, $g^*(t) = f^*(t)$.
Ahora, si $\sigma = \infty$ entonces

$$\|g\|_{L_{p,\infty}(E)} = \|g\|_{M_p(E)} = \sup_{t \geq 0} t^{\frac{1}{p}} g^*(t) = \sup_{t \geq 0} t^{\frac{1}{p}} f^*(t) = \|f\|_{L_{p,\infty}(E)} < \infty.$$

Si $0 < \sigma < \infty$ entonces,

$$\|g\|_{L_{p,\sigma}(E)} = \left[\int_0^\infty \left(t^{\frac{1}{p}} g^*(t) \right)^\sigma \frac{dt}{t} \right]^{\frac{1}{\sigma}} = \left[\int_0^\infty \left(t^{\frac{1}{p}} f^*(t) \right)^\sigma \frac{dt}{t} \right]^{\frac{1}{\sigma}} = \|f\|_{L_{p,\sigma}(E)} < \infty.$$

En los dos casos se tiene que $g \in L_{p,\sigma}(E)$ y $\|g\|_{M_{p,\sigma}(E)} = \|f\|_{M_{p,\sigma}(E)}$. □

Lema 2.4. *Supóngase que $\mu_N(E) > 0$. Para que $\|f\|_{L_{p,\sigma}(E)} = 0$ es necesario y suficiente que la función f sea equivalente a la función 0 sobre E.*

Demostración.
($\Rightarrow$) Supóngase inicialmente que $\|f\|_{L_{p,\sigma}(E)} = 0$, para $0 < p, \sigma \leq \infty$. Entonces,

1. Si $\sigma = \infty$ el resultado se tiene en [5]. Aquí se presenta otra demostración directa, que no usa λ_f:

   $$\|f\|_{L_{p,\infty}(E)} = \sup_{t \geq 0} t^{\frac{1}{p}} f^*(t) = 0.$$

   Por lo tanto, para todo $t \geq 0$, $f^*(t) = 0$; y de acuerdo con el teorema 1.8 se tiene:

   $$\|f\|_{L_p(E)} = \left[\int_0^\infty (f^*(t))^p \, dt \right]^{\frac{1}{p}} = 0,$$

   lo que implica que para casi todo $x \in E$, $f(x) = 0$ o sea $f \approx 0$ en E.

2. Si $0 < \sigma < \infty$ entonces, para todo $s > 0$,

$$0 = \|f\|_{L_{p,\sigma}(E)} = \left[\int_0^\infty \left(t^{\frac{1}{p}} f^*(t)\right)^\sigma \frac{dt}{t}\right]^{\frac{1}{\sigma}} \geq f^*(s) \left[\int_0^s t^{\frac{q}{p}-1} dt\right]^{\frac{1}{\sigma}} = \left(\frac{p}{q}\right) s^{\frac{1}{p}} f^*(s) > 0.$$

Por lo tanto, para todo $s > 0$ $f^*(s) = 0$ lo que implica $f \approx 0$ en E.

($\Leftarrow$) Se sigue directamente del lema 2.3. □

Teorema 2.6. *Sean* $0 < \sigma_1 < \sigma_2 \leq \infty$ *y* $\mu(E) < \infty$. *Entonces*

$$L_{p,\sigma_1}(E) \subset L_{p,\sigma_2}(E). \tag{2.7}$$

Además para toda función $f \in L_{p,\sigma_1}(E)$,

$$\|f\|_{L_{p,\sigma_2}(E)} \leq \left(\frac{\sigma_1}{p}\right)^{\frac{1}{\sigma_1}-\frac{1}{\sigma_2}} \|f\|_{L_{p,\sigma_1}}(E).$$

Demostración.

Si $0 < \sigma_1 < \sigma_2 = \infty$ entonces

$$\begin{aligned}\|f\|^{\sigma_1}_{L_{p,\sigma_1}(E)} &= \int_0^\infty \left(t^{\frac{1}{p}} f^*(t)\right)^{\sigma_1} \frac{dt}{t} \geq \int_0^s \left(t^{\frac{1}{p}} f^*(t)\right)^{\sigma_1} \frac{dt}{t} \\ &\geq (f^*(s))^{\sigma_1} \int_0^s t^{\frac{\sigma_1}{p}-1} dt = \left(s^{\frac{1}{p}} f^*(s)\right)^{\sigma_1} \frac{p}{\sigma_1};\end{aligned}$$

para todo $s > 0$. Luego,

$$\|f\|_{M_p(E)} \leq \left(\frac{\sigma_1}{p}\right)^{\frac{1}{\sigma_1}} \|f\|_{L_{p,\sigma_1}(E)}. \tag{2.8}$$

Si $0 < \sigma_1 < \sigma_2 < \infty$ entonces

$$\begin{aligned}\|f\|_{L_{p,\sigma_2}(E)} &= \left[\int_0^\infty \left(t^{\frac{1}{p}} f^*(t)\right)^{\sigma_2} \frac{dt}{t}\right]^{\frac{1}{\sigma_2}} = \left[\int_0^\infty \left(t^{\frac{1}{p}} f^*(t)\right)^{\sigma_2-\sigma_1} \left(t^{\frac{1}{p}} f^*(t)\right)^{\sigma_1} \frac{dt}{t}\right]^{\frac{1}{\sigma_2}} \\ &\leq \|f\|^{\frac{\sigma_2-\sigma_1}{\sigma_2}}_{M_p(E)} \left[\int_0^\infty \left(t^{\frac{1}{p}} f^*(t)\right)^{\sigma_1} \frac{dt}{t}\right]^{\frac{1}{\sigma_2}} \leq \|f\|^{\frac{\sigma_2-\sigma_1}{\sigma_2}}_{M_p(E)} \|f\|^{\frac{\sigma_1}{\sigma_2}}_{L_{p,\sigma_1}(E)}.\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\|f\|_{L_{p,\sigma_2}(E)} \leq \|f\|_{M_p(E)}^{\frac{\sigma_2-\sigma_1}{\sigma_2}} \|f\|_{L_{\sigma_2,\sigma_1}(E)}^{\frac{\sigma_1}{\sigma_2}}.$$

De (2.8) y la desigualdad anterior se sigue que

$$\|f\|_{L_{p,\sigma_2}(E)} \leq \left(\frac{\sigma_1}{p}\right)^{\frac{1}{\sigma_1}-\frac{1}{\sigma_2}} \|f\|_{L_{p,\sigma_1}}(E) < \infty.$$

□

Proposición 2.1. *Para cualquier conjunto $E \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ de medida no nula la inclusión (2.7) es estricta.*

***Demostración*.**

Sea E cualquier conjunto en $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ de medida positiva. Entonces considérese el conjunto $E_0 \subset E$ tal que $0 < \mu_{_N}(E_0) < \infty$, $E_0 = \bigsqcup_{k\in\mathbb{N}} E_k$ y $\mu_{_N}(E_k) = 2^{-k}$.
Además, para $c_k = 2^{-(k-1)}$ considérese la función

$$f(x) := \sum_{k=1}^{\infty} 2^{\frac{k}{p}}\ k^{-\frac{1}{\sigma_1}}\ \chi_{[c_{k+1},c_k]}(x).$$

Entonces, de acuerdo con el lema 1.3, $f^*(t) = 2^{\frac{k}{p}}\ k^{-\frac{1}{\sigma_1}}$ y así

$$\|f\|_{L_{p,\sigma_1}(E)}^{\sigma_1} = \int_0^{\infty} \left(t^{\frac{1}{p}} f^*(t)\right)^{\sigma_1} \frac{dt}{t} = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{c_{k+1}}^{c_k} \left(t^{\frac{1}{p}}\ 2^{\frac{k}{p}}\ k^{-\frac{1}{\sigma_1}}\right)^{\sigma_1} \frac{dt}{t}$$

$$= \frac{p}{\sigma_1} \sum_{k=1}^{\infty} \left[2^{\frac{\sigma_1 k}{p}} k^{-1} \left(c_k^{\frac{\sigma_1}{p}} - c_{k+1}^{\frac{\sigma_1}{p}}\right)\right] = \frac{p}{\sigma_1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{\frac{\sigma_1}{p}} - 1}{k} = \infty.$$

Es decir $f \notin L_{p,\sigma_1}$. Por otro lado,

$$
\begin{aligned}
\|f\|^{\sigma_2}_{L_{p,\sigma_2}(E)} &= \int_0^\infty \left(t^{\frac{1}{p}} f^*(t)\right)^{\sigma_2} \frac{dt}{t} = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{c_{k+1}}^{c_k} \left(t^{\frac{1}{p}}\ 2^{\frac{k}{p}}\ k^{-\frac{1}{\sigma_2}}\right)^{\sigma_2} \frac{dt}{t} \\
&= \frac{p}{\sigma_2} \sum_{k=1}^{\infty} \left[2^{\frac{\sigma_2 k}{p}} k^{-\frac{\sigma_2}{\sigma_1}} \left(c_k^{\frac{\sigma_2}{p}} - c_{k+1}^{\frac{\sigma_2}{p}} \right) \right] = \frac{p}{\sigma_2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{\frac{\sigma_2}{p}} - 1}{k^{\frac{\sigma_2}{\sigma_1}}} < \infty.
\end{aligned}
$$

Es decir $f \in L_{p,\sigma_2}$, lo que prueba que $L_{p,\sigma_2}(E) \not\subset L_{p,\sigma_1}(E)$.

□

Consecuencia 2.1. *Sean* $0 < \sigma \leq p \leq \infty$ *y* $E \subset \mathbb{R}^N$. *Entonces*

$$L_{p,\sigma}(E) \subset L_p(E). \tag{2.9}$$

Además, si $0 < p \leq \sigma \leq \infty$ *entonces*

$$L_p(E) \subset L_{p,\sigma}(E). \tag{2.10}$$

Demostración.

En efecto, tomando en (2.7) $\sigma_1 = \sigma$, $\sigma_2 = p$ se tiene (2.9); y con $\sigma_2 = \sigma$, $\sigma_1 = p$ se sigue (2.10). Además de la proposición 2.1 se sigue que estas inclusiones son estrictas.

□

Teorema 2.7. *Sea* $E \subset \mathbb{R}^N$. *Si* $0 < p \leq \infty$ *y* $1 \leq \sigma \leq \infty$, *la expresión* $\|\cdot\|_{L_{p,\sigma}(E)}$ *es semicuasinorma en* $L_{p,\sigma}(E)$.

Demostración.

1. Para toda función $f \in L_{p,\sigma}(E)$ se tiene que $\|f\|_{L_{p,\sigma}(E)} \geq 0$.

2. Considérese ahora cualquier función $f \in L_{p,\sigma}(E)$ y $a \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$. Entonces de acuerdo con (1.6):

   (a) Si $\sigma = \infty$ entonces

$$\sup_{t\in[0,\infty)} t^{\frac{1}{p}} (af)^*(t) = \sup_{t\in[0,\infty)} t^{\frac{1}{p}} |a| f^*(t) = |a| \sup_{t\in[0,\infty)} t^{\frac{1}{p}} f^*(t).$$

Por lo tanto

$$\|af\|_{L_{p,\infty}} = |a| \, \|f\|_{L_{p,\infty}} .$$

(b) Si $1 \leq \sigma < \infty$ entonces

$$\int_0^\infty \left[t^{\frac{1}{p}} (af)^*(t)\right]^\sigma \frac{dt}{t} = \int_0^\infty \left[t^{\frac{1}{p}} |a| f^*(t)\right]^\sigma \frac{dt}{t} = |a|^\sigma \int_0^\infty \left[t^{\frac{1}{p}} f^*(t)\right]^\sigma \frac{dt}{t};$$

y según la definición 2.1,

$$\|af\|_{L_{p,\sigma}} = |a| \, \|f\|_{L_{p,\sigma}} .$$

3. Sean $f, g \in L_{p,\sigma}$. Entonces de acuerdo con el lema 1.7 para todo $t \in [0, \infty)$,

$$(f+g)^*(t) \leq f^*\left(\frac{t}{2}\right) + g^*\left(\frac{t}{2}\right);$$

luego:

(a) Si $\sigma = \infty$ entonces

$$\begin{aligned}
\sup_{t \in [0,\infty)} t^{\frac{1}{p}} (f+g)^*(t) &\leq \sup_{t \in [0,\infty)} t^{\frac{1}{p}} \left[f^*\left(\frac{t}{2}\right) + g^*\left(\frac{t}{2}\right)\right] \\
&\leq 2^{\frac{1}{p}} \left[\sup_{s \in [0,\infty)} s^{\frac{1}{p}} f^*(s) + \sup_{s \in [0,\infty)} s^{\frac{1}{p}} g^*(s)\right].
\end{aligned}$$

Así,

$$\|f+g\|_{L_{p,\infty}} \leq 2^{\frac{1}{p}} \left(\|f\|_{L_{p,\infty}} + \|g\|_{L_{p,\infty}}\right).$$

(b) Si $1 \leq \sigma < \infty$ entonces

$$\begin{aligned}
\|f+g\|_{L_{p,\sigma}} &= \left[\int_0^\infty \left(t^{\frac{1}{p}} (f+g)^*(t)\right)^\sigma \frac{dt}{t}\right]^{\frac{1}{\sigma}} \leq \left[\int_0^\infty \left(t^{\frac{1}{p}} f^*\left(\frac{t}{2}\right) + t^{\frac{1}{p}} g^*\left(\frac{t}{2}\right)\right)^\sigma \frac{dt}{t}\right]^{\frac{1}{\sigma}} \\
&\leq 2^{\frac{1}{p}} \left[\int_0^\infty \left(s^{\frac{1}{p}} f^*(s) + s^{\frac{1}{p}} g^*(s)\right)^\sigma \frac{ds}{s}\right]^{\frac{1}{\sigma}}. \\
&= 2^{\frac{1}{p}} \left[\int_0^\infty \left(s^{\frac{1}{p}-\frac{1}{\sigma}} f^*(s) + s^{\frac{1}{p}-\frac{1}{\sigma}} g^*(s)\right)^\sigma ds\right]^{\frac{1}{\sigma}}.
\end{aligned}$$

Por la desigualdad de Minkówsky se sigue que

$$\begin{aligned}\|f+g\|_{L_{p,\sigma}} &\leq 2^{\frac{1}{p}}\left\{\left[\int_0^\infty \left(s^{\frac{1}{p}-\frac{1}{\sigma}}f^*(s)\right)^\sigma dt\right]^{\frac{1}{\sigma}} + \left[\int_0^\infty \left(s^{\frac{1}{p}-\frac{1}{\sigma}}g^*(s)\right)^\sigma dt\right]^{\frac{1}{\sigma}}\right\}\\ &= 2^{\frac{1}{p}}\left\{\left[\int_0^\infty \left(s^{\frac{1}{p}}f^*(s)\right)^\sigma \frac{dt}{t}\right]^{\frac{1}{\sigma}} + \left[\int_0^\infty \left(s^{\frac{1}{p}}g^*(s)\right)^\sigma \frac{dt}{t}\right]^{\frac{1}{\sigma}}\right\};\end{aligned}$$

es decir,

$$\|f+g\|_{L_{p,\sigma}} \leq 2^{\frac{1}{p}}\left(\|f\|_{L_{p,\sigma}} + \|g\|_{L_{p,\sigma}}\right).$$

4. La condición $\|f\|_{L_{p,\sigma}} = 0$ es equivalente a que $f \approx 0$ sobre E.

Por lo tanto $\|\cdot\|_{M_p(E)}$ es semicuasinorma.

$\square$

Observación 2.4. *La constante $2^{\frac{1}{p}}$ en la desigualdad anterior no puede disminuirse; o sea, para $0 < \epsilon < 2^{\frac{1}{p}}$ la desigualdad $\|f+g\|_{L_{p,\sigma}} \leq \epsilon\left(\|f\|_{L_{p,\sigma}} + \|g\|_{L_{p,\sigma}}\right)$ $(\star)$ no se verifica. En efecto,*

Sea $f_0(x) = x$ y $g_0(x) = 1-x$ para todo $x \in (0,1)$. Entonces

$$f_0^*(t) = g_0^*(t) = \begin{cases} 1-t & si \quad 0 \leq t \leq 1\\ 0 & si \quad t > 1,\end{cases}$$

además

$$(f_0+g_0)^*(t) = \begin{cases} 1 & si \quad 0 \leq t \leq 1\\ 0 & si \quad t > 1.\end{cases}$$

Por lo tanto, para $p=1$ y $\sigma = \infty$ se sigue que

$$\|f_0+g_0\|_{L_{1,\infty}} = \sup_{t\in[0,\infty)} t = 1 \quad y \quad \|f_0\|_{L_{1,\infty}} = \|g_0\|_{L_{1,\infty}} = \sup_{t\in[0,1]} t(1-t) = \frac{1}{4}.$$

Obsérvese que si la desigualdad $(\star)$ fuera cierta para algún $0 < \epsilon < 2^{\frac{1}{p}}$ entonces

$$\|f_0+g_0\|_{L_{1,\infty}} \leq \epsilon\left(\|f_0\|_{L_{1,\infty}} + \|g_0\|_{L_{1,\infty}}\right), \quad \epsilon \in (0, 2^{\frac{1}{p}});$$

lo que implica que $\epsilon \geq 2$, lo cual es contradictorio.

Teorema 2.8. *Sean $1 \leq p \leq \infty$, $1 \leq \sigma \leq \infty$ y $E \subset \mathbb{R}^N$. Si $f \in L_{p,\sigma}(E)$ y $g \in L_{p',\sigma'}(E)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, $\frac{1}{\sigma} + \frac{1}{\sigma'} = 1$, entonces*

$$\|fg\|_{L_1(E)} \leq \|f\|_{L_{p,\sigma}(E)} \|g\|_{L_{p',\sigma'}(E)} . \tag{2.11}$$

(Desigualdad de Hölder para los espacios de Lorentz).

Demostración.

Sean $1 \leq p \leq \infty$, $f \in L_{p,\sigma}(E)$ y $g \in L_{p',\sigma'}(E)$. Entonces por la desigualdad de Hölder se sigue que:

1. Si $1 < \sigma < \infty$. Entonces

$$\begin{aligned}\|fg\|_{L_1(E)} &\leq \int_0^\infty f^*(t)g^*(t)dt = \int_0^\infty t^{\frac{1}{p}-\frac{1}{\sigma}} f^*(t)\ t^{\frac{1}{p'}-\frac{1}{\sigma'}} g^*(t)dt \\ &\leq \left[\int_0^\infty \left(t^{\frac{1}{p}} f^*(t)\right)^\sigma \frac{dt}{t}\right]^{\frac{1}{\sigma}} \left[\int_0^\infty \left(t^{\frac{1}{p'}} g^*(t)\right)^{\sigma'} \frac{dt}{t}\right]^{\frac{1}{\sigma'}} = \|f\|_{L_{p,\sigma}(E)} \|g\|_{L_{p',\sigma'}(E)} .\end{aligned}$$

2. Si $\sigma = \infty$ entonces $\sigma' = 1$ y

$$\begin{aligned}\|fg\|_{L_1(E)} &\leq \int_0^\infty f^*(t)g^*(t)dt = \int_0^\infty t^{\frac{1}{p}} f^*(t)\ t^{-\frac{1}{p}} g^*(t)dt \\ &\leq \int_0^\infty \left(\sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}} f^*(t)\right) t^{\frac{1}{p'}-1} g^*(t)dt = \|f\|_{M_p(E)} \|g\|_{L_{p',1}(E)} \\ &= \|f\|_{L_{p,\infty}(E)} \|g\|_{L_{p',1}(E)} .\end{aligned}$$

El caso $\sigma' = \infty$ es similar ya que entonces $\sigma = 1$. Así, el teorema 2.8 queda completamente demostrado.

$\square$

Definición 2.2. *Sean $f : E \to \mathbb{C}$, $1 < p \leq \infty$ y $0 < \sigma \leq \infty$.*
Se dice que $f \in L_{p,\sigma}(E)$ si es finita la expresión

$$\|f\|^{(1)}_{L_{p,\sigma}(E)} := \begin{cases} \left[\int_0^\infty \left(t^{\frac{1}{p}} f^{**}(t)\right)^\sigma \frac{dt}{t}\right]^{\frac{1}{\sigma}}, & si\ 1 < p \leq \infty,\ 0 < \sigma < \infty \\ \sup\limits_{t\in[0,\infty)} t^{\frac{1}{p}} f^{**}(t), & si\ 1 < p \leq \infty,\ \sigma = \infty. \end{cases}$$

Aquí,

$$f^{**}(t) = \frac{1}{t}\int_0^t f^*(s)ds.$$

Lema 2.5. *Para $1 < p \leq \infty$ las definiciones 2.1 y 2.2 son equivalentes y además para toda $f \in M_p(E)$,*

$$\|f\|_{L_{p,\sigma}} \leq \|f\|^{(1)}_{L_{p,\sigma}} \leq \left(\frac{p}{p-1}\right) \|f\|_{L_{p,\sigma}}. \tag{2.12}$$

Demostración.

Sea $1 \leq \sigma < \infty$ y σ' su conjugado. Entonces como $1 < p \leq \infty$ se tiene que

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{\sigma} < \frac{1}{\sigma'},$$

y por lo tanto puede aplicarse la desigualdad de Hardy. Además, dado que

$$f^{**}(t) = \frac{1}{t}\int_0^t f^*(s)ds \geq \frac{1}{t} f^*(t)\int_0^t ds = f^*(t)$$

se sigue que:

1.
$$\|f\|_{L_{p,\sigma}} = \left[\int_0^\infty (t^{\frac{1}{p}} f^*(t))^\sigma \frac{dt}{t}\right]^{\frac{1}{\sigma}} \leq \left[\int_0^\infty (t^{\frac{1}{p}} f^{**}(t))^\sigma \frac{dt}{t}\right]^{\frac{1}{\sigma}} = \|f\|^{(1)}_{L_{p,\sigma}}.$$

2.
$$\begin{aligned} \|f\|^{(1)}_{L_{p,\sigma}} &= \left[\int_0^\infty \left(t^{\frac{1}{p}} f^{**}(t)\right)^\sigma \frac{dt}{t}\right]^{\frac{1}{\sigma}} = \left[\int_0^\infty \left(t^{\frac{1}{p}-1}\int_0^t f^*(s)ds\right)^\sigma \frac{dt}{t}\right]^{\frac{1}{\sigma}} \\ &= \left[\int_0^\infty \left(t^{\frac{1}{p}-\frac{1}{\sigma}} \frac{1}{t}\int_0^t f^*(s)ds\right)^\sigma dt\right]^{\frac{1}{\sigma}} = \left\| t^{\frac{1}{p}-\frac{1}{\sigma}} H_1 f^*(t)\right\|_{L_\sigma} \\ &\leq \left[\frac{1}{\sigma'} - \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{\sigma}\right)\right]^{-1} \left\| t^{\frac{1}{p}-\frac{1}{\sigma}} f^*(t)\right\|_{L_\sigma} = \left(\frac{p}{p-1}\right) \left[\int_0^\infty \left(t^{\frac{1}{p}} f^*(t)\right)^\sigma \frac{dt}{t}\right]^{\frac{1}{\sigma}}; \end{aligned}$$

es decir,

$$\|f\|^{(1)}_{L_{p,\sigma}} \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)\|f\|_{L_{p,\sigma}}.$$

Si $\sigma = \infty$ entonces

$$t^{\frac{1}{p}} f^*(t) \leq t^{\frac{1}{p}} f^{**}(t) \leq \sup_{t\in[0,\infty)} t^{\frac{1}{p}} f^{**}(t) = \|f\|^{(1)}_{L_{p,\infty}};$$

pasando al supremo respecto a t se sigue que

$$\sup_{t\in[0,\infty)} \left[t^{\frac{1}{p}} f^*(t)\right] \leq \|f\|^{(1)}_{L_{p,\infty}}.$$

Por lo tanto,

$$\|f\|_{L_{p,\infty}} \leq \|f\|^{(1)}_{L_{p,\infty}}.$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned} t^{\frac{1}{p}} f^{**}(t) &= t^{\frac{1}{p}}\left(\frac{1}{t}\int_0^t f^*(s)ds\right) = t^{\frac{1}{p}-1}\int_0^t \left(s^{\frac{1}{p}} f^*(s)\right) s^{-\frac{1}{p}} ds \\ &\leq t^{\frac{1}{p}-1}\|f\|_{L_{p,\infty}}\int_0^t s^{-\frac{1}{p}} ds = \left(\frac{p}{p-1}\right)\|f\|_{L_{p,\infty}}. \end{aligned}$$

Pasando al supremo respecto a t se sigue que

$$\|f\|^{(1)}_{L_{p,\infty}} \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)\|f\|_{L_{p,\infty}}.$$

Lo que culmina la prueba de (2.12).

$\square$

Teorema 2.9. *Sea $E \subset \mathbb{R}^N$. Si $1 < p \leq \infty$ y $1 \leq \sigma \leq \infty$, la expresión $\|\cdot\|^{(1)}_{L_{p,\sigma}(E)}$ es seminorma en $L_{p,\sigma}(E)$.*

Demostración.

1. Para toda función $f \in L_{p,\sigma}(E)$ se tiene que $\|f\|^{(1)}_{L_{p,\sigma}(E)} \geq 0$.

2. Considérese ahora cualquier función $f \in L_{p,\sigma}(E)$ y $a \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$.

   (a) Si $\sigma = \infty$ entonces dado que

$$(af)^{**}(t) = \frac{1}{t}\int_0^t (af)^*(s)ds = |a|\frac{1}{t}\int_0^t f^*(s)ds = |a|f^{**}(t),$$

   se sigue que

$$\sup_{t\in[0,\infty)} t^{\frac{1}{p}}(af)^{**}(t) = \sup_{t\in[0,\infty)} t^{\frac{1}{p}}|a|f^{**}(t) = |a| \sup_{t\in[0,\infty)} t^{\frac{1}{p}}f^{**}(t).$$

   Por lo tanto

$$\|af\|^{(1)}_{L_{p,\infty}} = |a| \, \|f\|^{(1)}_{L_{p,\infty}} .$$

   (b) Si $1 \leq \sigma < \infty$ entonces

$$\int_0^\infty \left[t^{\frac{1}{p}}(af)^{**}(t)\right]^\sigma \frac{dt}{t} = \int_0^\infty \left[t^{\frac{1}{p}}|a|f^{**}(t)\right]^\sigma \frac{dt}{t} = |a|^\sigma \int_0^\infty \left[t^{\frac{1}{p}}f^{**}(t)\right]^\sigma \frac{dt}{t};$$

   y según la definición 2.2,

$$\|af\|^{(1)}_{L_{p,\sigma}} = |a| \, \|f\|^{(1)}_{L_{p,\sigma}} .$$

3. Sean $f, g \in L_{p,\sigma}$. Entonces dado que para todo $t \in [0,\infty)$,

$$(f+g)^{**}(t) \leq f^{**}(t) + g^{**}(t),$$

   se tiene:

   (a) Si $\sigma = \infty$ entonces

$$\begin{aligned}\sup_{t\in[0,\infty)} t^{\frac{1}{p}} (f+g)^{**}(t) &\leq \sup_{t\in[0,\infty)} t^{\frac{1}{p}} \left[f^{**}(t)+g^{**}(t)\right] \\ &= \sup_{t\in[0,\infty)} t^{\frac{1}{p}} f^{**}(t) + \sup_{t\in[0,\infty)} t^{\frac{1}{p}} g^{**}(t)\,.\end{aligned}$$

Así,

$$\|f+g\|^{(1)}_{L_{p,\infty}} \leq \|f\|^{(1)}_{L_{p,\infty}} + \|g\|^{(1)}_{L_{p,\infty}}\,.$$

(b) Si $1\leq\sigma<\infty$ entonces

$$\begin{aligned}\|f+g\|^{(1)}_{L_{p,\sigma}} &= \left[\int_0^\infty \left(t^{\frac{1}{p}}(f+g)^{**}(t)\right)^\sigma \frac{dt}{t}\right]^{\frac{1}{\sigma}} \leq \left[\int_0^\infty \left(t^{\frac{1}{p}} f^{**}(t) + t^{\frac{1}{p}} g^{**}(t)\right)^\sigma \frac{dt}{t}\right]^{\frac{1}{\sigma}} \\ &= \left[\int_0^\infty \left(t^{\frac{1}{p}-\frac{1}{\sigma}} f^{**}(t) + t^{\frac{1}{p}-\frac{1}{\sigma}} g^{**}(t)\right)^\sigma dt\right]^{\frac{1}{\sigma}},\end{aligned}$$

Por la desigualdad de Minkówsky se sigue que

$$\begin{aligned}\|f+g\|^{(1)}_{L_{p,\sigma}} &\leq \left[\int_0^\infty \left(t^{\frac{1}{p}-\frac{1}{\sigma}} f^{**}(t)\right)^\sigma dt\right]^{\frac{1}{\sigma}} + \left[\int_0^\infty \left(t^{\frac{1}{p}-\frac{1}{\sigma}} g^{**}(t)\right)^\sigma dt\right]^{\frac{1}{\sigma}} \\ &= \left[\int_0^\infty \left(t^{\frac{1}{p}} f^{**}(t)\right)^\sigma \frac{dt}{t}\right]^{\frac{1}{\sigma}} + \left[\int_0^\infty \left(t^{\frac{1}{p}} g^{**}(t)\right)^\sigma \frac{dt}{t}\right]^{\frac{1}{\sigma}};\end{aligned}$$

es decir,

$$\|f+g\|^{(1)}_{L_{p,\sigma}} \leq \|f\|^{(1)}_{L_{p,\sigma}} + \|g\|^{(1)}_{L_{p,\sigma}}\,.$$

4. La condición $\|f\|^{(1)}_{L_{p,\sigma}}=0$ es equivalente a que $f\approx 0$ sobre E.

   Obsérvese que $f^{**}(t)=0$ si y sólo si $f\approx 0$. En efecto,

$$0 = f^{**}(t) = \frac{1}{t}\int_0^t f^*(s)ds \geq \frac{f^*(t)}{t}\int_0^t ds = f^*(t) > 0.$$

Por lo tanto, $f^*(t) = 0$ para todo $t > 0$ y de acuerdo con el teorema 1.8 se tiene:

$$\|f\|_{L_p(E)} = \left[\int_0^\infty (f^*(t))^p \, dt\right]^{\frac{1}{p}} = 0,$$

lo que es equivalente a que *p.c.t.* $x \in E$, $f(x) = 0$; o sea, $f \approx 0$.
Por lo tanto, $f^{**}(t) = 0$ si y sólo si $f \approx 0$. De lo anterior se sigue que $\|f\|^{(1)}_{L_{p,\sigma}} = 0$ si y sólo si $f \approx 0$ sobre E.

Por lo tanto, $\|\cdot\|^{(1)}_{M_p(E)}$ es seminorma.

$\square$

Definición 2.3. *Sean $f : E \to \mathbb{C}$, $0 < p \leq \infty$ y $0 < \sigma \leq \infty$.*
Se dice que $f \in L_{p,\sigma}(E)$ si:

$$\|f\|^{(2)}_{L_{p,\sigma}(E)} := p^{\frac{1}{q}} \left\{\int_0^\infty \left[t\left(\lambda_f(t)\right)^{\frac{1}{p}}\right]^\sigma \frac{dt}{t}\right\}^{\frac{1}{\sigma}} < \infty.$$

Para $\sigma = \infty$ se considera $L_{p,\sigma}(E) \equiv M_p(E)$.

Lema 2.6. *Las definiciones 2.1 y 2.3 son equivalentes y además para $f \in L_{p,\sigma}(E)$,*

$$\|f\|_{L_{p,\sigma}(E))} \equiv \|f\|^{(2)}_{L_{p,\sigma}(E)}. \tag{2.13}$$

Demostración.

Sean $0 < p < \infty$, $0 < \sigma < \infty$ y f una función que satisface las condiciones del lema 1.1. Entonces,

$$\forall t \in [a_m, \infty], \ \ \lambda_f(t) = 0 \ \text{ y}$$

$$\forall t \in [a_{k-1}, a_k) \, y \; k \in \{1, 2, \cdots, m\}\,; \ \ \lambda_f(t) = \sum_{l=k}^m \mu_{_N}(E_l).$$

Así se tiene que:

$$
\begin{aligned}
p\int_0^{\infty}\left[t\left(\lambda_f(t)\right)^{\frac{1}{p}}\right]^{\sigma}\frac{dt}{t} &= p\sum_{k=1}^{m}\int_{a_{k-1}}^{a_k}\left[t\left(\lambda_f(t)\right)^{\frac{1}{p}}\right]^{\sigma}\frac{dt}{t} = p\sum_{k=1}^{m}\int_{a_{k-1}}^{a_k}\left[t\left(\sum_{l=k}^{m}\mu_{N(E_l)}\right)^{\frac{1}{p}}\right]^{\sigma}\frac{dt}{t} \\
&= p\sum_{k=1}^{m}(c_k)^{\frac{\sigma}{p}}\int_{a_{k-1}}^{a_k}t^{\sigma-1}\frac{dt}{t} = \frac{p}{\sigma}\sum_{k=1}^{m}(c_k)^{\frac{\sigma}{p}}\left(a_{k-1}^{\sigma}-a_k^{\sigma}\right).
\end{aligned}
$$

Utilizando la transformación de Abel [1] se obtiene:

$$
p\int_0^{\infty}\left[t\left(\lambda_f(t)\right)^{\frac{1}{p}}\right]^{\sigma}\frac{dt}{t} = \sum_{k=1}^{m}\int_{c_{k-1}}^{c_k}\left(t^{\frac{1}{p}}f^*(t)\right)^{\sigma}\frac{dt}{t} = \int_0^{\infty}\left(t^{\frac{1}{p}}f^*(t)\right)^{\sigma}\frac{dt}{t}.
$$

De esta forma se sigue (2.13) para funciones simples.

Ahora, considérese cualquier función f medible en E y $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones f_k que satisfacen:

$$
p.c.t\ x\in E,\ \ f_k(x)\leq f_{k+1}(x)\ \text{ y }\ \lim_{k\to\infty}f_k(t)=f(t).
$$

Entonces del lema 1.5 se sigue que

$$
\lambda_{f_k}(t)\leq\lambda_{f_{k+1}}(t),\quad \lim_{k\to\infty}\lambda_{f_k}(t)=\lambda_f(t)\ \text{ y }\ f_k^*(t)\leq f_{k+1}^*(t),\ \ \lim_{k\to\infty}f_k^*(t)=f^*(t).
$$

Así,

$$
\begin{aligned}
p^{\frac{1}{q}}\left\{\int_0^{\infty}\left[t\left(\lambda_f(t)\right)^{\frac{1}{p}}\right]^{\sigma}\frac{dt}{t}\right\}^{\frac{1}{\sigma}} &= \lim_{k\to\infty}p^{\frac{1}{q}}\left\{\int_0^{\infty}\left[t\left(\lambda_{f_k}(t)\right)^{\frac{1}{p}}\right]^{\sigma}\frac{dt}{t}\right\}^{\frac{1}{\sigma}} \\
&= \lim_{k\to\infty}\left\{\int_0^{\infty}\left[t^{\frac{1}{p}}f_k^*(t)\right]^{\sigma}\frac{dt}{t}\right\}^{\frac{1}{\sigma}} \\
&= \left\{\int_0^{\infty}\left[t^{\frac{1}{p}}f^*(t)\right]^{\sigma}\frac{dt}{t}\right\}^{\frac{1}{\sigma}}.
\end{aligned}
$$

Lo que termina la prueba del lema. □

[1] **Transformación de Abel**. Sean $A_1,...,A_{m+1},B_0,...,B_m,\ldots$ números complejos, con $m\in\mathbb{N}$. Entonces es válida la identidad: $\sum_{k=1}^{m}A_k\left(B_k-B_{k-1}\right)=A_{m+1}B_m-A_1B_0-\sum_{k=1}^{m}\left(A_{k+1}-A_K\right)B_{k+1}$.

2.3. Teorema de Stein-Weiss

Las técnicas de interpolación constituyen una herramienta esencial para obtener propiedades de acotación de operadores. El primer resultado de interpolación de operadores se debe a I.Schur (1911). Otro paso importante se debe a los teoremas de interpolación de Riesz-Thorin(1926) y de Marcinkiewicz. Este último fue demostrado por Zygmund en 1956. Ambos teoremas tienen numerosas aplicaciones en el análisis armónico y se han conocido distintas variantes y extensiones, de modo que la interpolación se puede aplicar a operadores entre otras familias de espacios funcionales, además de los espacios L_p. Una generalización del teorema de Marcinkiewicz es el teorema de Stein-Weiss.

Definición 2.4. *Simbolizaremos* $L_p + L_q$ *la suma aritmética de* L_p *y* L_q*, es decir* $L_p(E) + L_q(E) = \{f + g : f \in L_p(E),\, g \in L_q(E)\}$.

Teorema de interpolación de Riesz-Thorin.
Para los operadores lineales tiene lugar el siguiente resultado que se cita sin demostración. Los detalles se pueden encontrar por ejemplo en [2], págs 67-77.

Teorema 2.10. *Sean* $E \subset \mathbb{R}^N$, $F \subset \mathbb{R}^M$ *conjuntos medibles,* $0 < p_1,\, p_2,\, q_1,\, q_2 \leq \infty$ *y* T *un operador lineal definido sobre* $L_{p_1}(E) + L_{p_2}(E)$ *tal que*

$$T : L_{p_1}(E) \to L_{q_1}(F)\ ,\ \ T : L_{p_2}(E) \to L_{q_2}(F),$$

y además,

$$\|T\|_{L_{p_1(E)} \to L_{q_1(F)}} < \infty\ ,\ \ \|T\|_{L_{p_2(E)} \to L_{q_2(F)}} < \infty.$$

Entonces para cualesquiera p, q *tales que*

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_1} + \frac{\theta}{p_2}\ ,\ \ \frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_1} + \frac{\theta}{q_2},$$

para cierto $\theta \in (0,1)$,

$$T : L_p(E) \to L_q(F).$$

Además, en el caso de los espacios complejos L_s *(* $s = p_1,\, p_2,\, q_1,\, q_2,\, p,\, q$ *),*

$$\|T\|_{L_p(E) \to L_q(F)} \leq\ \|T\|^{1-\theta}_{L_{p_1}(E) \to L_{q_1}(F)}\, \|T\|^{\theta}_{L_{p_2}(E) \to L_{q_2}(F)}, \tag{2.14}$$

y en el caso de los espacios reales L_s para $p \leq q$ se cumple (2.14) y para $q < p$,

$$\|T\|_{L_p(E)\to L_q(F)} \leq c\, \|T\|^{1-\theta}_{L_{p_1}(E)\to M_{q_1}(F)} \|T\|^{\theta}_{L_{p_2}(E)\to M_{q_2}(F)},$$

donde $c > 0$, depende únicamente de p_1, q_1, p_2, q_2, p, q.

Observación 2.5.

A manera de aplicación, se tiene por ejemplo, el teorema de Hausdorff-Young:

Si $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p \leq 2$ entonces $\mathcal{F}f \in L_{p'}(\mathbb{R}^n)$, con $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ y $\|\mathcal{F}f\|_{L_{p'}} \leq (2\pi)^{\frac{n(p-2)}{2p}} \|f\|_{L_p}$, donde

$$(\mathcal{F}f)(\xi) := (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int\limits_{\mathbb{R}_n} e^{-i(x,\xi)} f(x)dx, \tag{2.15}$$

es la transformación de Fourier de f. Aquí $(x, \xi) := x_1\xi_1 + \cdots + x_n\xi_n$ es el producto escalar de los vectores $x = (x_1 \cdots x_n)$, y $\xi = (\xi_1 \cdots \xi_n)$.

En efecto, si se aplica el teorema de Riesz-Thorin al operador lineal $\mathcal{F}$, teniendo en cuenta que (teorema de Plancharel),

$$\mathcal{F} : L_1 \to L_\infty \ , \ \mathcal{F} : L_2 \to L_2 \qquad y$$

$$\|\mathcal{F}\|_{L_1\to L_\infty} \leq (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \ , \ \|\mathcal{F}\|_{L_2\to L_2} = 1,$$

entonces $p_1 = 1$, $q_1 = \infty$ y $p_2 = q_2 = 2$. Así, para $\theta \in (0, 1)$,

$$\tfrac{1}{p} = \tfrac{1+\theta}{2}\,,\ \tfrac{1}{q} = \tfrac{1-\theta}{2}.$$

De aquí es fácil notar que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, es decir $q = p'$ y además, como $p = \frac{2}{1+\theta}$, se tiene que $1 \leq p \leq 2$. Luego, para $1 \leq p \leq 2$, $\mathcal{F}$ es un operador acotado de L_p en $L_{p'}$ y además

$$\|\mathcal{F}\|_{L_p\to L_{p'}} \leq [(2\pi)^{-\frac{n}{2}}]^{\theta} 1^{1-\theta} = (2\pi)^{-\frac{n}{2}\frac{2-p}{p}},$$

es decir, $\quad \|\mathcal{F}\|_{L_p\to L_{p'}} \leq (2\pi)^{\frac{n(p-2)}{2p}}$.

Definición 2.5. *Un operador T que actúa de un espacio funcional a otro se denomina subaditivo, si su dominio de definición contiene para cada par de funciones f, g su suma $f+g$ y se verifica la desigualdad $|T(f+g)| \leq |T(f)| + |T(g)|$.*

Ejemplo 2.2. *Sea $T : C([0,1]) \to C([0,1])$ el operador definido por*

$$Tf(x) = \int_0^1 k(x,y) f(y) dy,$$

donde k es una función continua en $[0,1] \times [0,1]$ llamada núcleo del operador. Entonces el operador T es subaditivo. En efecto, sean $f,\, g \in C([0,1])$. Entonces $\forall x \in [0,1]$,

$$\begin{aligned}|T(f+g)(x)| &= \left|\int_0^1 k(x,y)\,(f+g)(y)\,dy\right| = \left|\int_0^1 k(x,y)\,f(y)\,dy + \int_0^1 k(x,y)\,g(y)\,dy\right| \\ &\leq |Tf(x)| + |Tg(x)|.\end{aligned}$$

Luego T es subaditivo.

Ejemplo 2.3. *Sea T el operador definido en $L_2((0,1]) + L_\infty((0,1])$ mediante*

$$Tf(x) = \frac{f(x)}{x^{\frac{1}{2}}}.$$

Entonces el operador T es subaditivo. En efecto, sean $f,\, g \in L_2((0,1]) + L_\infty((0,1])$. Entonces $\forall x \in (0,1]$,

$$\begin{aligned}|T(f+g)(x)| &= \left|\frac{(f+g)(x)}{x^{\frac{1}{2}}}\right| = \left|\frac{f(x)}{x^{\frac{1}{2}}} + \frac{g(x)}{x^{\frac{1}{2}}}\right| \\ &\leq |Tf(x)| + |Tg(x)|.\end{aligned}$$

Por lo tanto, T es subaditivo.

Ejemplo 2.4. *Sea $T : C([0,1]) \to C([0,1])$, definido por*

$$Tf(x) = x^2 \int_0^x |f(t)| dt,$$

Este operador T es subaditivo pero no lineal. En efecto, sean $f,\, g \in C([0,1])$. Entonces $\forall x \in [0,1]$,

$$\begin{aligned} T(f+g)(x) &= x^2 \int_0^x |f(t)+g(t)|\,dt \leq x^2 \int_0^x |f(t)|\,dt + x^2 \int_0^x |g(t)|\,dt \\ &= Tf(x) + Tg(x). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |T(f+g)(x)| &= \left| x^2 \int_0^x |f(t)+g(t)|\,dx \right| \leq \left| x^2 \int_0^x |f(t)|\,dt + x^2 \int_0^x |g(t)|\,dt \right| \\ &\leq |Tf(x)| + |Tg(x)|\,. \end{aligned}$$

Por lo tanto, T es subaditivo pero no lineal.

Mostremos que bajo ciertas condiciones adicionales respecto a los parámetros, el teorema de Riesz-Thorin tiene una variante más fuerte en el sentido de que la acotación del operador lineal T como operador de $L_p(E)$ a $L_q(E)$ puede establecerse bajo condiciones mas débiles que su acotación como operador de $L_{p_k}(E)$ a $L_{q_k}(E)$ (k=1,2), y también para operadores más generales que los lineales.

Teorema de interpolación de Marcinkiewicz.

Teorema 2.11. *Sean $E \subset \mathbb{R}^N$, $F \subset \mathbb{R}^M$ conjuntos medibles,*

$$0 < p_1 \leq q_1 \leq \infty, \quad 0 < p_2 \leq q_2 \leq \infty, \quad p_1 \neq p_2, \quad q_1 \neq q_2; \tag{2.16}$$

T un operador subaditivo definido sobre $L_{p_1}(E) + L_{p_2}(E)$ tal que,

$$T : L_{p_1}(E) \to M_{q_1}(F)\ ,\ \ T : L_{p_2}(E) \to M_{q_2}(F),$$

y además,

$$\|T\|_{L_{p_1(E)} \to M_{q_1(F)}} < \infty\ ,\ \ \|T\|_{L_{p_2(E)} \to M_{q_2(F)}} < \infty.$$

Entonces para cualesquiera p, q tales que

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_1} + \frac{\theta}{p_2}\ ,\ \ \frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_1} + \frac{\theta}{q_2},$$

para cierto $\theta \in (0,1)$,

$$T : L_p(E) \to L_q(F).$$

Además existe $c > 0$, que depende sólo de p_1, q_1, p_2, q_2, p, q, tal que

$$\|T\|_{L_p(E)\to L_q(F)} \leq c\, \|T\|^{1-\theta}_{L_{p_1}(E)\to M_{q_1}(F)}\, \|T\|^{\theta}_{L_{p_2}(E)\to M_{q_2}(F)}.$$

Observación 2.6.

Se utiliza la siguiente terminología: si el operador T es acotado como operador de $L_p(E)$ a $L_q(F)$ entonces se dice que T es un operador fuerte tipo (p,q); si T es acotado como operador de $L_p(E)$ a $M_q(F)$ (recordemos que $M_q(F)$ es un espacio más amplio que $L_q(F)$) entonces se dice que T es un operador débil tipo (p,q). En esta terminología el teorema de Marcinkiewicz se formula de la siguiente manera:

Si bajo las condiciones 2.16 el operador subaditivo T es simultáneamente operador débil de los tipos (p_1,q_1) y (p_2,q_2), entonces para los p, q señalados en el teorema, T es un operador fuerte tipo (p,q).

Observación 2.7.

El resultado anterior puede fallar si no se cumple la condición 2.16. En efecto:
Sea $E = F = (0,1]$ y T el operador definido en $L_2(E) + L_\infty(E)$ mediante

$$Tf(x) = \frac{f(x)}{x^{\frac{1}{2}}}.$$

Este operador es simultáneamente operador débil de los tipos $(2,1)$ y $(\infty,2)$. T debería ser un operador fuerte tipo $(\frac{2}{\theta}, \frac{2}{\theta+1})$ para cierto $\theta \in (0,1)$; sin embargo esto no ocurre:

1. sea $g(x) = \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}$. Entonces,

$$g^*(s) = \begin{cases} \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} & \text{para} \quad 0 < s < 1 \\ 0 & \text{para} \quad s \geq 1 \\ -\infty & \text{para} \quad s = 0. \end{cases}$$

y por lo tanto,

$$\begin{aligned}\|Tf\|_{M_2(E)} &= \sup_{t\in[0,\infty)}\left[t^{\frac{1}{2}}(Tf)^*(t)\right] = \sup_{t\in[0,\infty)}\left[t^{\frac{1}{2}}(fg)^*(t)\right]\\ &\leq \sup_{t\in[0,\infty)}\left[t^{\frac{1}{2}}f^*\left(\frac{t}{2}\right)g^*\left(\frac{t}{2}\right)\right] = \sqrt{2}\sup_{s\in(0,1)}\left[s^{\frac{1}{2}}f^*(s)g(s)\right] = \sqrt{2}\ \|f\|_{L_\infty(E)},\end{aligned}$$

en consecuencia, T es un operador débil tipo $(\infty,2)$.

2. Por el teorema 2.4 y dado que $L_p\subset M_p$ se tiene que

$$\begin{aligned}\|Tf\|_{M_1(E)} &= \|fg\|_{M_1(E)} \leq 2\|f\|_{M_2(E)}\|g\|_{M_2(E)}\\ &= 2\|f\|_{M_2(E)} \leq 2\|f\|_{L_2(E)},\end{aligned}$$

en consecuencia, T es un operador débil tipo $(2,1)$.

3. Considérese la función

$$f_0(x) = \frac{\chi_{(0,\frac{1}{2})}(x)}{x^{\frac{\theta}{2}}|\ln(x)|^{(1+\theta)\frac{\theta}{2}}}.$$

Para ella

$$\|Tf_0\|_{L_{\frac{2}{\theta+1}}(E)} = \left(\int_0^1 |Tf_0(x)|^{\frac{2}{\theta+1}}dx\right)^{\frac{\theta+1}{2}} = \left(\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x|\ln(x)|^{\theta}}dx\right)^{\frac{\theta+1}{2}} = \infty,$$

y

$$\|f_0\|_{L_{\frac{2}{\theta}}(E)} = \left(\int_0^1 |f_0(x)|^{\frac{2}{\theta}}dx\right)^{\frac{\theta}{2}} = \left(\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x|\ln(x)|^{1+\theta}}dx\right)^{\frac{\theta+1}{2}} < \infty.$$

Por lo tanto, T no es un operador fuerte tipo $(\frac{2}{\theta},\frac{2}{\theta+1})$ para ningún $\theta\in(0,1)$.

Teorema de Stein-Weiss.

Según lo arriba expuesto el teorema de Marcinkiewicz generaliza el teorema de interpolación de Riesz-Thorin dado que $L_q(F) \subset M_q(F)$, $0 < q \leq \infty$. Es natural entonces preguntarse si el teorema 2.11 es válido para operadores definidos en espacios más amplios que $L_p(E)$. La respuesta afirmativa a este cuestionamiento se expresa en términos de los espacios de Lorentz, toda vez que $L_{p,p}(E) \equiv L_p$, lo que muestra una aplicación de $L_{p,\sigma}(E)$, con lo que se concluye el presente trabajo.

Teorema 2.12. *Sean $E \subset \mathbb{R}^N$, $F \subset \mathbb{R}^M$ conjuntos medibles,*

$$0 < p_1 \leq q_1 \leq \infty \ , \ \ 0 < p_2 \leq q_2 \leq \infty \ , \ \ p_1 \neq p_2 \ , \ \ q_1 \neq q_2, \tag{2.17}$$

T un operador subaditivo definido sobre $L_{p_1}(E) + L_{p_2}(E)$ tal que para ciertos $\sigma_1, \sigma_2 > 0$,

$$T : L_{p_1,\sigma_1}(E) \to M_{q_1}(F) \ , \ \ T : L_{p_2,\sigma_2}(E) \to M_{q_2}(F);$$

y además,

$$\|T\|_{L_{p_1,\sigma_1(E)} \to M_{q_1(F)}} < \infty \ , \ \ \|T\|_{L_{p_2,\sigma_2(E)} \to M_{q_2(F)}} < \infty.$$

Entonces para cualesquiera p, q tales que

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_1} + \frac{\theta}{p_2} \ , \ \ \frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_1} + \frac{\theta}{q_2},$$

para cierto $\theta \in (0,1)$,

$$T : L_p(E) \to L_q(F).$$

Además existe $c > 0$, que depende sólo de p_1, q_1, p_2, q_2, σ_1, σ_2, p, q, tal que

$$\|T\|_{L_p(E) \to L_q(F)} \leq c \ \|T\|^{1-\theta}_{L_{p_1 \sigma_1}(E) \to M_{q_1}(F)} \|T\|^{\theta}_{L_{p_2 \sigma_2}(E) \to M_{q_2}(F)}.$$

Observación 2.8.

El resultado anterior puede fallar si no se cumple la condición 2.17. En efecto:

Considérese el operador definido en la observación 2.7. Entonces:

1. El operador T es acotado simultáneamente, como operador de $L_{2,1}(E)$ a $M_1(E)$ y de $L_{\infty,1}(E)$ a $M_2(E)$. En efecto:

a. Para todo $s > 0$ se tiene:

$$\begin{aligned}\|f\|_{L_{2,1}(E)} &= \int_0^\infty t^{-\frac{1}{2}} f^*(t)dt \geq \int_0^s t^{-\frac{1}{2}} f^*(t)dt \\ &\geq f^*(s) \int_0^s t^{-\frac{1}{2}} dt = 2s^{\frac{1}{2}} f^*(s)\end{aligned}$$

En consecuencia, $\sup\limits_{s\in(0,1)} s^{\frac{1}{2}} f^*(s) \leq \frac{1}{2} \|f\|_{L_{2,1}(E)}$ y como

$$\begin{aligned}\|Tf\|_{M_1(E)} &= \sup_{t\in[0,\infty)} [t(Tf)^*(t)] = \sup_{t\in[0,\infty)} [t(fg)^*(t)] \\ &\leq \sup_{t\in[0,\infty)} \left[tf^* \left(\frac{t}{2}\right) g^* \left(\frac{t}{2}\right)\right] = 2 \sup_{s\in(0,1)} [sf^*(s)g(s)] = 2 \sup_{s\in(0,1)} s^{\frac{1}{2}} f^*(s);\end{aligned}$$

se tiene que $\|Tf\|_{M_1(E)} \leq \|f\|_{L_{2,1}(E)}$; es decir, T es acotado como operador de $L_{2,1}(E)$ a $M_1(E)$.

b. T es acotado como operador de $L_{\infty,1}(E)$ a $M_2(E)$:

$$\begin{aligned}\|Tf\|_{M_2(E)} &= \sup_{t\in[0,\infty)} \left[t^{\frac{1}{2}} (Tf)^*(t)\right] = \sup_{t\in(0,\infty)} \left[t^{\frac{1}{2}} (fg)^*(t)\right] \\ &\leq \sup_{t\in[0,\infty)} \left[t^{\frac{1}{2}} f^* \left(\frac{t}{2}\right) g^* \left(\frac{t}{2}\right)\right] = \sqrt{2} \sup_{s\in(0,1)} f^*(s).\end{aligned}$$

Así,

$$\|Tf\|_{M_2(E)} \leq \sqrt{2} \sup_{s\in(0,1)} f^*(s). \tag{2.18}$$

Por otro lado, para todo $s > 0$

$$\|f\|_{L_{\infty,1}(E)} = \int_0^{\infty} f^*(t)\frac{dt}{t} \geq \int_0^{s} \frac{f^*(t)}{t}dt \geq \int_0^{s} \frac{f^*(s)}{s}dt = f^*(s).$$

En consecuencia $\sup\limits_{s\in(0,1)} f^*(s) \leq \|f\|_{L_{\infty,1}(E)}$, y por lo tanto, de (2.18) se sigue que

$$\|Tf\|_{M_2(E)} \leq \sqrt{2}\|f\|_{L_{\infty,1}(E)}.$$

2. T no es un operador fuerte tipo $(\frac{2}{1-\theta}, \frac{2}{2-\theta})$ para ningún $\theta \in (0,1)$. Considérese para $\theta \in (0,1)$ la función:

$$f_1(x) = \frac{\chi_{(0,\frac{1}{2})}(x)}{x^{\frac{1-\theta}{2}}|\ln(x)|^{\frac{(1-\theta)(2-\theta)}{2}}}.$$

Entonces

$$\|f_1\|^{\frac{2}{1-\theta}}_{L_{\frac{2}{1-\theta}}(E)} = \int_0^1 |f_1(x)|^{\frac{2}{1-\theta}}dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x|\ln(x)|^{2-\theta}}dx = \int_{\ln 2}^{+\infty} \frac{1}{s^{2-\theta}}ds < \infty,$$

ya que con $\theta \in (0,1)$, $2-\theta > 1$. Luego $\|f_1\|_{L_{\frac{2}{\theta+1}}(E)} < \infty$.

Por otro lado,

$$\|Tf_1\|^{\frac{2}{2-\theta}}_{L_{\frac{2}{2-\theta}}(E)} = \int_0^1 |Tf_1(x)|^{\frac{2}{2-\theta}}dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x|\ln(x)|^{1-\theta}}dx = \int_{\ln 2}^{+\infty} \frac{1}{s^{1-\theta}}ds = \infty.$$

Por lo tanto , $\|Tf_1\|_{L_{\frac{2}{1-\theta}}(E)} = \infty$.

Nótese que en este caso para $p_1 = 2$, $q_1 = 1$; $p_2 = \infty$, $q_2 = 2$, (2.17) no se verifica.

Apéndice A

En el ejemplo 1.2 (ver pág.8) la fórmula $\lambda_f(t) = \upsilon_{_N}[\lambda_g(t)]^N$ $(\star)$ se estableció bajo el supuesto de que existe $r_t := \sup e_t$; es decir, se supuso que $e_t \neq \emptyset$ y es acotado superiormente.
En esta sección se demostrará que si al menos una de estas condiciones no se cumple, entonces la igualdad $(\star)$ se verifica trivialmente. En efecto,

1. Supóngase que para al menos un $t \geq 0$ el conjunto $e_{_t} := \{u \geq 0 : g(u) > t\}$ es vacío y sea $t_{_0} := \text{ínf}\{t \geq 0 : e_t = \emptyset\}$. Entonces:

   a. Si $t_{_0} = 0$, entonces $e_{_0} = \{u \geq 0 : g(u) > 0\} = \emptyset$. Ahora, como g es una función no negativa se tiene que $g(u) = 0,\ \forall u \geq 0$ y por lo tanto $e_{_t} = \emptyset,\ \forall t \geq 0$; por consiguiente $\lambda_g(t) = \mu(e_{_t}) = 0$. Además, como $f(x) = g(|x|) = 0$ se sigue que $\lambda_f(t) = 0$ y la igualdad $(\star)$ es exacta.

   b. Supóngase que $t_{_0} > 0$. Entonces con $0 < t < t_{_0}$ se tiene que $e_{_t} \neq \emptyset$, y por lo tanto la igualdad se cumple (se procede igual que en el capítulo 1). Ahora, $\forall\, t \in \{t \geq 0 : e_t = \emptyset\}, t \geq t_{_0}$ y $e_{_t} = \emptyset$ y por lo tanto $\lambda_g(t) = 0$ y además $\lambda_f(t) = 0$, ya que $f(x) = g(|x|) = 0$.

2. Supóngase que $e_{_t}$ no es acotado superiormente. Entonces $\forall\ a \geq 0,\ \exists\ t_a \in e_{_t}$: $t_a \geq a$. Como la función g decrece, $g(a) \geq g(t_a) > t$, lo cual implica que $a \in e_{_t},\ \forall a \geq 0$; por lo tanto, $e_{_t} = [0, +\infty)$.

   Es decir, si para algún $t_{_0} \geq 0$, e_{t_0} es no acotado, entonces $e_{t_0} = [0, +\infty)$ y así $\lambda_g(t_0) = +\infty$. Por lo tanto, para todo $0 \leq t < t_{_0}$, $\lambda_g(t) = +\infty$ y además $\lambda_f(t) = +\infty$ dado que $f(x) = g(|x|)$.

Apéndice B

En este sección se presentará una relación entre los espacios $M_p(E)$ y $L_{p,\sigma}(E)$ a partir de los teoremas 1.11 y de la consecuencia 2.1.

1. Sea $0 < \sigma \leq p \leq \infty$. Entonces, $L_{p,\sigma}(E) \subset L_p(E)$ y como $L_p(E) \subset M_p(E)$ $\forall\ 0 < p \leq \infty$, se sigue que

$$L_{p,\sigma}(E) \subset M_p(E)\,,\ \forall\ 0 < \sigma \leq p \leq \infty.$$

2. Sean $0 < \epsilon < p$ y $\mu_N(E) < \infty$. Entonces $M_p(E) \subset L_{p-\epsilon}(E)$. Por otro lado, si se considera $0 < p - \epsilon \leq \sigma \leq \infty$ se sigue que $L_{p-\epsilon}(E) \subset L_{p-\epsilon,\sigma}(E)$; y por lo tanto

$$M_p(E) \subset L_{p-\epsilon,\sigma}(E) \qquad \forall\ 0 < p - \epsilon \leq \sigma \leq \infty,$$

siempre que $\mu_N(E) < \infty$.

Bibliografía

[1] Burenkov, V.I. *Espacios funcionales. Espacios Lp*. Editorial U.D.N. Moscú, 1987.

[2] Burenkov, V.I. *Espacios funcionales. Desigualdades integrales fundamentales, relacionadas con los espacios Lp*. Primera edición, Editorial U.D.N. Moscú, 1989.

[3] Triebel, H. *Interpolation theory, function spaces, differential operators*. North-Holland Publishing Company, Amsterdam, New York, Osford, 1978.

[4] Stein.E,Weiss.G. *Introduction to Fourier analys on euclidean espaces*. Princeton University Press, 1971

[5] Gómez,J.*Normas equivalentes para los espacios de Marcinkiewicz y su inclusión en los espacios Lp*. Seminario de Grado, Universidad del Cauca. Mayo 19, 2010.

[6] Loukas Grafakos. *Classical Fourier Analysis*. Second Edition, University of Missouri, 2008.

[7] Colin Bennett, Robert Sharpley. *Interpolation of Operators*, University of South Carolina, 1946.

[8] Ramón R. León P.*Operador multiplicación en espacios L(p,q)*, Cumaná, 2009

[9] http://bibliotecavirtual.unl.edu.ar:8180/tesis/bitstream/1/28/1/tesis.pdf.

[10] http://cms.dm.uba.ar/depto/public/A/serieA20.pdf.