Existencia y unicidad de soluciones débiles para una familia de ecuaciones parabólicas degeneradas. Aplicación a un problema de electromagnetismo bidimensional

germán augusto tobar bravo

Universidad del Cauca
Facultad de Ciencias Naturales, Exactas y de la Educación
Departamento de Matemáticas
Popayán, Cauca

2013

Existencia y unicidad de soluciones débiles para una familia de ecuaciones parabólicas degeneradas. Aplicación a un problema de electromagnetismo bidimensional

propuesta de trabajo de grado
En modalidad seminario, presentado como requisito parcial para optar al título de matemático

germán augusto tobar bravo

Director:
Dr. ramiro miguel acevedo martínez

Universidad del Cauca
Facultad de Ciencias Naturales, Exactas y de la Educación
Departamento de Matemáticas
Popayán, Cauca
2013

Nota de aceptación

Director: **Dr. Ramiro Acevedo Martínez**

Jurado: **Dra. Aida Patricia González**

Jurado: **Mg. Gerardo Loaiza Motato**

Fecha de sustentación: Popayán, 25 de Junio de 2013

Agradecimientos

El presente trabajo de grado primeramente me gustaría agradecerle a Dios por bendecirme para llegar hasta donde he llegado, por darme la oportunidad de cumplir un sueño más en mi vida.

A la UNIVERSIDAD DEL CAUCA por darme la oportunidad de estudiar y ser un profesional.

Al profesor Ramiro Acevedo Martínez por manifestarme su interés en dirigir mi trabajo de grado, por su confianza, colaboración y apoyo en mi proceso de realización de la monografía.

A los profesores Aida Patricia González y Gerardo Loaiza miembros del comité de seguimiento por todas sus sugerencias y aportes.

Por último, a mi familia, a mis amigos y todas aquellas personas que me colaboraron en el transcurso de mi carrera.

Índice general

Introducción

Un "*modelo matemático*", en general es entendido como un conjunto de ecuaciones y/o demás relaciones matemáticas capaces de captar las características esenciales de un complejo natural o un sistema artificial, con el fin de describir, predecir y controlar su evolución. El estudio de modelos matemáticos no se limita unicamente a las ciencias naturales clásicas, además de la física y la química, la práctica de la modelización matemática en gran medida afecta disciplinas como las finanzas, la biología, la ecología, la medicina y la sociología entre otras.

En la actividad industrial (por ejemplo para el sector aeroespacial o los proyectos navales, reactores nucleares, problemas de combustión, producción y distribución de energía eléctrica, control de tráfico, etc) la modelación matemática, que involucra en primer lugar el análisis numérico y la simulación y seguidamente ensayos experimentales, se ha convertido en un procedimiento común, necesario para la innovación, y tambien motivado por factores económicos. Es evidente que todo esto se hace posible por el enorme poder computacional disponible.

En el caso particular de los modelos matemáticos que conducen a Ecuaciones Diferenciales Parciales, el estudio de las propiedades teóricas de sus soluciones, además de ser un procedimiento preliminar para su análisis numérico, permite sondear otras características que no son tan evidentes, incluso se pueden predecir hechos o fenómenos que a partir de la observación no se obtienen. La historia de la ciencia está plagada de muchos casos de este tipo, entre los cuales quizás el ejemplo más famoso, es el descubrimiento de que la luz es una onda electromagnética a partir del estudio teórico la ecuaciones de Maxwell, lo que permitió relacionar los campos de la Optica y el Electromagnetismo. En consecuencia el estudio teórico de las ecuaciones diferenciales es de suma importancia para aquellos que por oficio o por propio interés quieren entender un fenómeno natural.

En 1873 Maxwell fundó la teoría moderna del electromagnetismo con la publicación de su obra *Treatise on Electricity and Magnetism*, en la cual se formularon las ecuaciones que hoy en dia llevan su nombre y que constituyen uno de los modelos más importantes de la actualidad debido a la variedad de sus aplicaciones tecnológicas a nuestra vida moderna. El comportamiento de un campo electromagnético está gobernado por las ecuaciones de Maxwell, las cuales sintetizan largos años de resultados experimentales en los campos de Electricidad y Magnetismo, en los que resaltan los trabajos de Coulomb, Gauss, Ampere y Faraday.

Desde la formulación de la teoría electromagnética, científicos e ingenieros han buscado la solución exacta de los problemas de contorno que resultan a partir de las ecuaciones de Maxwell. Inicialmente todos los esfuerzos se centraron en determinar estas soluciones a través de métodos análiticos, con los cuales en muchos casos no se obtuvieron resultados satisfactorios. En consecuencia, con el auge de los métodos computacionales, los métodos numéricos resultaron ser una excelente alternativa, lo que ha llevado a que en la actualidad exista un enorme interés por parte de la comunidad de ingeniería y de matemática aplicada en realizar simulaciones del fenómeno electromagnético. Además, por parte de la matemática, recientemente ha crecido el interés en entender las propiedades matemáticas de las ecuaciones de Maxwell que resulten relevantes para su análisis numérico.

En algunos casos es posible usar un modelo simplifcado que aproxime en algún sentido las ecuaciones de Maxwell y que pueda resolverse de una forma más eficiente. Está situación ocurre por ejemplo en problemas relacionados con maquinas que trabajan en bajas frecuencias, donde puede ser usado el llamado modelo de corrientes inducidas (*eddy current model*) que se obtiene a partir de las ecuaciones de Maxwell despreciando las corrientes de desplazamiento de la Ley de Ampère.

En el presente trabajo se estudiará la llamada formulación débil de un cierto tipo de problemas parabólicos, que incluye como un caso particular un modelo bidimensional del problema de corrientes inducidas. Este análisis constituye un primer paso para llegar a una solución tangible o cuantitativa, pues el siguiente paso sería trabajar en espacios de dimensión finita relacionados con los espacios estudiados en el trabajo, para de esta manera crear o utilizar algún método numérico como el método de elementos finitos para encontrar la solución cuantitativa del problema.

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Elementos del análisis funcional.

Introducimos en esta sección, algunos elementos del análisis funcional, los cuales serán usados más adelante. Entre estos está la definición de un funcional lineal, la definición convergencia débil y convergencia débil* y algunas propiedades respectivamente.

Definición 1.1. Sea X un espacio vectorial normado sobre un campo $\mathbb{K}$ (en esté trabajo asumiremos que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{K} = \mathbb{C}$), $f : X \to \mathbb{K}$ es llamado un funcional. Un funcional es llamado lineal si como operador es un operador lineal, es decir

$$\langle f, \alpha x + y\rangle = \alpha \langle f, x\rangle + \langle f, y\rangle\,, \text{ para todos } x, y \in X, \text{ y todo } \alpha \in \mathbb{K}.$$

De la misma forma un funcional lineal es acotado si existe $C > 0$, tal que

$$|\langle f, x\rangle| \leq C \|x\|\,, \quad \forall x \in X,$$

y la norma de un funcional acotado es definida por

$$\|f\| = \sup_{\substack{x\in D(f)\\ x\neq \mathbf{0}}} \frac{|\langle f, x\rangle|}{\|x\|}. \tag{1.1}$$

Definición 1.2. Diremos que un espacio vectorial normado X es completo si toda sucesión de Cauchy en X converge en X. Los espacios normados completos los llamaremos *Espacios de Banach.*

Definición 1.3. Sea X un espacio vectorial normado sobre $\mathbb{K}$. El conjunto

$$X^* := \{f : X \to \mathbb{K} | f \text{ es lineal y acotado}\}\,,$$

dotado de las operaciones de suma de funciones y producto por un escalar, es llamado el espacio dual de X (sobre $\mathbb{K}$). Observamos que X^* es un espacio vectorial normado con la norma definida en (1.1).

Ahora, definimos el espacio bidual de X por

$$(X^*)^* := \{f : X^* \to \mathbb{K} | f \text{ lineal y acotado}\}\,,$$

y lo denotamos por $(X^*)^* := X^{**}$.

Lema 1.4. *Para cada x fijo en un espacio vectorial normado X, el funcional $g_x : X^{**} \to \mathbb{R}$ definido por*

$$g_x(f) := \langle f, x \rangle \qquad \forall f \in X^*, \tag{1.2}$$

es un funcional lineal acotado en X^*, tal que $g_x \in X^{**}$, y su norma satisface

$$\|g_x\| = \|x\| .$$

Demostración. Ver [7, Lema 4.6-1]. □

Definición 1.5. Para todo $x \in X$ le corresponde un único funcional lineal acotado $g_x \in X^{**}$ dado por (1.2). Este define una función

$$\begin{aligned} C : X &\to X^{**} \\ x &\mapsto C(x) := g_x, \end{aligned} \tag{1.3}$$

donde $g_x : X^{**} \to \mathbb{R}$ es la función definida en (1.2). C es llamada la función canónica de X en X^{**}.

Lema 1.6. *La función canónica C dada por* (1.3) *es un isomorfismo entre el espacio normado X y el espacio normado $\mathcal{R}(C)$ (rango de C), es decir C es inyectiva y preserva las normas.*

Demostración. Ver [7, Lema 4.6-2]. □

Definición 1.7 (Reflexividad)**.** Un espacio vectorial X se dice reflexivo si

$$\mathcal{R}(C) = X^{**},$$

donde $C : X \to X^{**}$ es la función canónica definida por (1.3).

Proposición 1.8. *Todo subespacio lineal cerrado Y de un espacio de Banach reflexivo, es también un espacio de Banach reflexivo.*

Demostración. Ver [18, Proposición 4] □

Definición 1.9 (Convergencia débil)**.** Sean X un espacio de Banach y $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en X. Decimos que u_n converge débilmente a un elemento $u \in X$ si para todo $f \in X^*$ se tiene

$$\langle f, u_n \rangle \to \langle f, u \rangle , \qquad n \to \infty. \tag{1.4}$$

En tal caso escribimos,

$$u_n \rightharpoonup u, \qquad n \to \infty. \tag{1.5}$$

El siguiente resultado, es crucial para las pruebas de teoremas de existencia y unicidad en el cálculo de variaciones y la teoría de operadores monótonos.

Teorema 1.10 (Eberlein (1947), Šmuljan (1940))**.** *Cada sucesión acotada en un espacio de Banach reflexivo, posee una subsucesión débilmente convergente.*

Demostración. Ver [16, Proposición 21.D] □

Proposición 1.11 (Propiedades de la convergencia débil)**.** *Sea $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en el espacio de Banach X, sobre $\mathbb{K}$. Entonces:*

a) La convergencia fuerte $u_n \to u$, $n \to \infty$, implica la convergencia débil $u_n \rightharpoonup u$, $n \to \infty$.

b) Si $u_n \rightharpoonup u$, $n \to \infty$, entonces $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ es acotada y,

$$\|u\| \leq \liminf_{n\to\infty} \|u_n\|.$$

c) Sea X un espacio de Banach reflexivo. Si $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión acotada en X y cada subsucesión débilmente convergente de $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$, posee el mismo límite $u \in X$, entonces $u_n \rightharpoonup u$, $n \to \infty$ en X.

Demostración. Ver [16, Proposición 21.23]. □

Definición 1.12 (convergencia débil*)**.** Sea X un espacio de Banach. Una sucesión $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ en X^* se dice que converge débil* a $f \in X^*$ si para todo $u \in X$ se satisface que

$$\langle f_n, u\rangle \to \langle f, u\rangle\,, \qquad n \to \infty. \tag{1.6}$$

En tal caso escribimos

$$f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f, \qquad n \to \infty. \tag{1.7}$$

Teorema 1.13. *Sea X un espacio de Banach separable. Entonces cada sucesión acotada $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ en X^* posee una subsucesión que converge débilmente*.*

Demostración. Ver [16, Proposición 21.E]. □

Proposición 1.14 (Propiedades de la convergencia débil*)**.** *Sea X un espacio de Banach sobre $\mathbb{K}$, y sea $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en X^*. Entonces:*

a) Si $f_n \to f$, en X^* cuando $n \to \infty$, entonces $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$, $n \to \infty$.

b) Si las sucesiones $\{\langle f_n, u\rangle\}_{n=1}^{\infty}$ en el campo $\mathbb{K}$ son convergentes para todo $u \in X$ entonces existe $f \in X^*$ tal que $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$, $n \to \infty$.

Demostración. Ver [16, Proposición 21.26]. □

La siguiente definición es básica para nuestro trabajo, y será muy importante más adelante.

Definición 1.15. Sea X un espacio de Banach real y sea $A : X \to X^*$ un operador, entonces:

i) El operador A es llamado hemicontinuo si la función real

$$\lambda \mapsto \langle A(u + \lambda v), w\rangle$$

es una función continua en $\mathbb{R}$ para todos $u, v, w \in X$.

ii) El operador A es llamado monótono si

$$\langle A(u) - A(v), u - v \rangle \geq 0 \qquad \forall u, v \in X.$$

iii) El operador A es llamado estrictamente monótono si

$$\langle A(u) - A(v), u - v \rangle > 0 \qquad \forall u, v \in X \quad , u \neq v.$$

iv) El operador A es llamado fuertemente monótono si existe $c > 0$ tal que

$$\langle A(u) - A(v), u - v \rangle \geq c \, \|u - v\|^2 \qquad \forall u, v \in X.$$

v) El operador A es llamado coercitivo si

$$\lim_{\|u\| \to \infty} \frac{\langle A(u), u \rangle}{\|u\|} = \infty.$$

1.2. Elementos de teoría de la medida e integración.

Aquí, pretendemos dar algunos elementos de la integral de Lebesgue, los cuales serán usados posteriormente, en el planteamiento abstracto de nuestro problema de corrientes inducidas, y en la demostración del Teorema principal que corresponde a este trabajo. Damos aquí los teoremas de la convergencia dominada de Lebesgue y la derivación con respecto a un parámetro de una función.

Trabajaremos en un subconjunto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ medible, con la medida de Lebesgue

$$\lambda : \mathcal{L} \subseteq \mathcal{P}\left(\mathbb{R}^N\right) \to \overline{\mathbb{R}},$$

la cual es estudiada en detalle (ver por ejemplo [6, Capítulo 2]), donde $\mathcal{L}$ es la σ-álgebra de Lebesgue. La medida de Lebesgue λ satisface las siguientes propiedades:

i) $\lambda(A) \geq 0 \qquad \forall A \in \mathcal{L}.$

ii) $\lambda(\emptyset) = 0.$

iii) Si $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{L}$, entonces

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{L},$$

y si los A_i son disjuntos, entonces

$$\lambda\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(A_i).$$

Damos ahora las definiciones de funciones medibles, función simple, la integral de una función y algunas aplicaciones.

Definición 1.16. Sean $\mathcal{L}$ la σ-álgebra de Lebesgue en $\mathbb{R}^N$ y $f : \mathbb{R}^N \to \overline{\mathbb{R}}$. Se dice que f es medible si para todo $t \in \overline{\mathbb{R}}$

$$f^{-1}\left([-\infty, t]\right) \in \mathcal{L}.$$

Definición 1.17. Una función $s : \mathbb{R}^N \to \overline{\mathbb{R}}$ es llamada simple, si su rango es finito.

Observación 1.18. Sea $s : \mathbb{R}^N \to \overline{\mathbb{R}}$ una función simple, entonces $\mathcal{R}(s) = \{c_1, c_2, ..., c_n\}$ con $c_i \neq c_j$ si $i \neq j$, entonces

$$s = \sum_{i=1}^{n} c_i \chi_{A_i},$$

donde

$$A_i = s^{-1}(\{c_i\}), \qquad \text{con} \qquad A_i \cap A_j = \emptyset \quad \text{si} \quad i \neq j,$$

y χ_{A_i} es la función caracteristica de A_i, $i = 1, ..., n$. Para dicha función simple s definimos su integral de Lebesgue como

$$\int s \; d\lambda := \sum_{i=1}^{n} c_i \lambda(A_i).$$

Definición 1.19 (Integral de Lebesgue para funciones no negativas)**.** Sea $f : \mathbb{R}^N \to \overline{\mathbb{R}}$ una función medible no negativa, definimos su integral de Lebesgue como

$$\int f \; d\lambda := \sup \left\{ \int s \; d\lambda \middle| \; s \text{ es simple, medible y } 0 \leq s \leq f \right\}$$

Definición 1.20 (Integración de funciones medibles)**.** Si $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ es una función medible, definimos su parte positiva y su parte negativa por

$$f^+ := \max\{f, 0\}, \qquad f^- := \max\{-f, 0\}$$

respectivamente, donde f^+ y f^- son funciones medibles.

Decimos que f es integrable si

$$\int f^+ \; d\lambda < \infty \quad \text{y} \quad \int f^- \; d\lambda < \infty.$$

En tal caso se define la integral de Lebesgue de f por

$$\int f \; d\lambda := \int f^- \; d\lambda + \int f^- \; d\lambda.$$

Definición 1.21 (Casi toda parte)**.** Si el conjunto de elementos de $\mathbb{R}^N$ que no satisfacen una determinada propiedad tiene medida cero, se dice que dicha propiedad se cumple " en casi toda parte " y lo denotaremos por c.t.p (casi toda parte).

Teorema 1.22 (Teorema de la convergencia dominada de Lebesgue)**.** *Sea* $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *una sucesión de funciones medibles en un conjunto medible* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$*, que converge para casi todo* $x \in \Omega$ *a* $f(x)$*.*

Suponga que existe una función g *integrable sobre* Ω*, tal que*

$$|f_n(x)| \leq g(x),$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ *y casi todo* $x \in \Omega$*.*

Entonces f_n *y* f*,* $n = 1, 2, ...$ *son integrables, y*

$$\int_{\Omega} f \; d\lambda = \lim_{n \to \infty} \int_{\Omega} f_n \; d\lambda.$$

Demostración. Ver[8, Teorema 2.1.2]. □

Teorema 1.23 (Derivación de la integral con respecto a un parámetro)**.** *Sean* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$*,* $N \geq 1$ *medible,* $I := [0, T]$ *con* $0 < T < \infty$ *y sea* $f(\boldsymbol{x}, t)$ *definida en* $\Omega \times [0, T]$*. Definimos,*

$$F(t) := \int_{\Omega} f(\boldsymbol{x}, t)\, d\boldsymbol{x}.$$

Supongamos que, para cada $t \in I$*,* $f(\boldsymbol{x}, t)$ *es integrable en* Ω*; para casi todo* $x \in \Omega$*,* $f(\boldsymbol{x}, t)$ *es diferenciable para todo* $t \in I$*, y existe* $h \in L^1(\Omega)$ *tal que la derivada satisface,*

$$\left| \frac{\partial}{\partial t} f(\boldsymbol{x}, t) \right| \leq h(\boldsymbol{x}) \qquad c.t.p \qquad \boldsymbol{x} \in \Omega, \quad \forall t \in I.$$

Entonces F *es también diferenciable en* I*, y*

$$\frac{dF}{dt}(t) = \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t} f(\boldsymbol{x}, t)\, d\boldsymbol{x}$$

Demostración. Ver [8, Teorema 2.1.7]. □

Definición 1.24 (Los espacios L^p)**.** Sea $1 \leq p < \infty$ definimos el espacio L^p como

$$L^p := \left\{ f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R} \,\middle|\, f \text{ es medible y } \int |f|^p \, d\lambda < \infty \right\},$$

y su norma está definida por

$$\|f\|_p := \left(\int |f|^p \, d\lambda \right)^{1/p}.$$

Observación 1.25. Para $f, g \in L^p$ definimos la igualdad de funciones como

$$f = g \quad \text{en} \quad L^p \qquad \Leftrightarrow \qquad f(x) = g(x) \quad \text{c.t.p} \quad x \in \mathbb{R}^N.$$

Proposición 1.26 (Desigualdad de Hölder)**.** *Sean* $f \in L^p$*,* $g \in L^q$ *con* $1/p + 1/q = 1$*, entonces* $fg \in L^1$ *y*

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \, \|g\|_q \, .$$

Demostración. Ver [14, Teorema 1, Capítulo 7]. □

Teorema 1.27 (Teorema de Riesz-Fischer)**.** *Para* $1 \leq p < \infty$ *se tiene que* L^p *con la norma* $\|\cdot\|_p$ *es un espacio de Banach.*

Demostración. Ver [8, Teorema 2.9.5]. □

1.3. Algunos espacios funcionales.

En esta sección introducimos los espacios funcionales en los cuales se pretende trabajar el problema de corrientes inducidas bidimensional. Para ello presentaremos la definición de los espacios de Sobolev $H^k(\Omega)$, $H^{-k}(\Omega)$ y $H(\mathrm{div}, \Omega)$ con sus respectivas normas, necesarios para mostrar la formulación fuerte del problema. Seguidamente introduciremos la integral de Bochner, que da sentido al concepto de integral de una función con valores en espacios de Banach y que permite definir los espacios funcionales de Lebesgue $L^p(0, T; X)$ y de Sobolev $W^1_p(0, T; V, H)$, necesarios para obtener la formulación variacional del problema. Para la definición de estos últimos espacios será necesario introducir los conceptos de terna de evolución y derivada generalizada.

1.3.1. Los espacios de Sobolev $H^k(\Omega)$ y $H(\mathrm{div}, \Omega)$.

Definición 1.28. Sea $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ ua función continua. Definimos el soporte de f, denotado por *supp* f como

$$\mathit{supp}\, f := \overline{\{x \in \mathbb{R}^N | f(x) \neq 0\}}.$$

Definición 1.29. Sea Ω un subconjunto abierto no vacío de $\mathbb{R}^N$, $N \geq 1$.

i) $C^k(\Omega)$ es el conjunto de todas las funciones reales $u : \Omega \to \mathbb{R}$ que tienen derivadas parciales continuas hasta de orden k en Ω.

ii) $C^k(\overline{\Omega})$ es el conjunto de todas las $u \in C^k(\Omega)$ para las que todas sus derivadas parciales hasta de orden k pueden ser extendidas continuamente a $\overline{\Omega}$.

iii) Denotaremos simplemente por $C(\Omega)$ (respectivamente $C(\overline{\Omega})$) las funciones reales continuas en Ω (respectivamente $\overline{\Omega}$) en vez de $C^0(\Omega)$ (respectivamente $C^0(\overline{\Omega})$).

iv) Si $u \in C^k(\Omega)$ (respectivamente $u \in C^k(\overline{\Omega})$) para todo $k = 0, 1, ...$, entonces escribimos $u \in C^\infty(\Omega)$ (respectivamente $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$).

v) $C_0^\infty(\Omega)$ es el conjunto de todas las funciones $u \in C^\infty(\Omega)$ con soporte compacto.

Definición 1.30. La frontera $\partial\Omega$ de un dominio acotado Ω es Lipschitz continuo si para todo $x \in \partial\Omega$ existe un conjunto abierto $\mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^N$ con $x \in \mathcal{O}$ y un sistema de coordenadas ortogonales $\boldsymbol{\zeta} = (\zeta_1, ..., \zeta_N)$ que tiene las siguientes propiedades. Existe un vector $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^N$ con

$$\mathcal{O} := \{\boldsymbol{\zeta} | -\alpha_j < \zeta_j < \alpha_j,\ 1 \leq j \leq N\}$$

y una función Lipschitz continua ϕ definida en

$$\mathcal{O}' := \left\{\boldsymbol{\zeta}' \in \mathbb{R}^{N-1} | -\alpha_j < \zeta_j < \alpha_j,\ 1 \leq j \leq N-1\right\},$$

con $|\phi(\boldsymbol{\zeta}')| \leq \alpha_N/2$ para todo $\boldsymbol{\zeta}' \in \mathcal{O}'$ tal que

$$\Omega \cap \mathcal{O} := \left\{\boldsymbol{\zeta} = (\boldsymbol{\zeta}', \zeta_N) \in \mathbb{R}^N | \zeta_N < \phi(\boldsymbol{\zeta}'),\ \boldsymbol{\zeta}' \in \mathcal{O}'\right\}$$

y

$$\partial\Omega \cap \mathcal{O} := \left\{ \boldsymbol{\zeta} = (\boldsymbol{\zeta}', \zeta_N) \in \mathbb{R}^N | \zeta_N = \phi(\boldsymbol{\zeta}'),\ \boldsymbol{\zeta}' \in \mathcal{O}' \right\}.$$

diremos simplemente que el dominio Ω es Lipschitz cuando la frontera sea Lipschitz continua.

Definición 1.31. Sea $\boldsymbol{\zeta} = (\zeta_1, ..., \zeta_N)$ y $D_j := \dfrac{\partial}{\partial \zeta_j}$. Por un multiíndice $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, ..., \alpha_N)$, entenderemos como una N-upla de enteros no negativos $\alpha_1, ..., \alpha_N$. Definimos su norma por $|\boldsymbol{\alpha}| := \alpha_1 + \cdots + \alpha_N$ y

$$D^{\boldsymbol{\alpha}} u := D_1^{\alpha_1} \ldots D_N^{\alpha_1} u,$$

esto es,

$$D^{\boldsymbol{\alpha}} u := \frac{\partial^{|\boldsymbol{\alpha}|} u}{\partial \zeta_1^{\alpha_1} \ldots \zeta_N^{\alpha_N}}.$$

Para $\boldsymbol{\alpha} = (0, 0, ..., 0)$, definimos $D^{\boldsymbol{\alpha}} u := u$.

Definición 1.32. Sea Ω un conjunto abierto no vacío de $\mathbb{R}^N$, $N \geq 1$ y sean $u,\ w \in L^1_{loc}(\Omega)$. Entonces w es llamada la derivada generalizada de u de tipo $D^{\boldsymbol{\alpha}}$ si la igualdad

$$\int_\Omega u D^{\boldsymbol{\alpha}} v d\boldsymbol{\zeta} = (-1)^{|\boldsymbol{\alpha}|} \int_\Omega w v d\boldsymbol{\zeta} \qquad \forall v \in C_0^\infty(\Omega),$$

se satisface. En tal caso escribimos $w = D^{\boldsymbol{\alpha}} u$.

Definición 1.33 (El espacio $H^k(\Omega)$)**.** Sean $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ un dominio Lipschitz, $N \geq 1$, $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{N}^N$ y $k = 0, 1, ...,$ $H^k(\Omega)$ denota el espacio de Sobolev,

$$H^k(\Omega) := \left\{ u \in L^2(\Omega) |\ D^{\boldsymbol{\alpha}} u \in L^2(\Omega), \quad \forall\, |\boldsymbol{\alpha}| \leq k \right\}, \tag{1.8}$$

provisto con la norma,

$$\|u\|_{H^k(\Omega)} := \sum_{|\boldsymbol{\alpha}| \leq k} \|D^{\boldsymbol{\alpha}} u\|_{L^2(\Omega)}. \tag{1.9}$$

Teorema 1.34 (Densidad en $H^k(\Omega)$)**.** *Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ un dominio Lipschitz acotado. Supongamos que $u \in H^k(\Omega)$. Entonces existe $\{u_n\}_{n=1}^\infty \subseteq C^\infty(\overline{\Omega})$, tal que*

$$u_n \to u \qquad en \qquad H^k(\Omega).$$

Demostración. Ver [16, Teorema 21.A]. □

Observación 1.35. Denotamos el espacio $H_0^k(\Omega)$ como la clausura de $C_0^\infty(\Omega)$ con la norma $\|\cdot\|_{H^k(\Omega)}$, es decir,

$$H_0^k(\Omega) := \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{H^k(\Omega)}}$$

Por último, $H^{-k}(\Omega)$ denotará el espacio dual de $H_0^k(\Omega)$, provisto con la norma dual, es decir

$$H^{-k}(\Omega) := \left(H_0^k(\Omega) \right)^*,$$

con la norma,

$$\|v\|_{H^{-k}(\Omega)} := \sup_{\substack{u \in H_0^k(\Omega) \\ u \neq 0}} \frac{|\langle v, u \rangle|}{\|u\|_{H_0^k(\Omega)}}.$$

Teorema 1.36 (Teorema de la traza)**.** *Sea Ω un subconjunto de $\mathbb{R}^N$ un dominio Lipschitz abierto y acotado. Entonces existe un operador lineal acotado*

$$\gamma_0 : H^1(\Omega) \to L^2(\partial\Omega),$$

tal que

$$\gamma_0(v) = v\,|_{\partial\Omega} \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Demostración. Ver [5, Teorema 1, Sección 5.5]. □

Proposición 1.37 (Integración por partes)**.** *Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ un dominio Lipschitz abierto y acotado. Si u, v son funciones de $H^1(\Omega)$, se tiene,*

$$\int_\Omega u\frac{\partial v}{\partial x_i}\,d\boldsymbol{x} = -\int_\Omega v\frac{\partial u}{\partial x_i}\,d\boldsymbol{x} + \int_{\partial\Omega} uv\eta_i\,ds, \qquad i = 1, ..., N, \tag{1.10}$$

donde $\boldsymbol{\eta} = (\eta_1, \eta_2, ..., \eta_N)$ es el vector normal exterior unitario a $\partial\Omega$.

Demostración. Ver [12, Teorema 3.2.1] o, [5, Teorema 2, Apendice C]. □

Definición 1.38 (El espacio $H^s(\Omega)$, con s no entero)**.** Sea $s \in \mathbb{R}$ y $s \geq 0$. Sea $m \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ y supongamos $s = m + \sigma$, donde $\sigma \in \mathbb{R}$ y $0 < \sigma < 1$. Entonces $H^s(\Omega)$ es definido como el espacio de distribuciones $u \in (C_0^\infty(\Omega))'$ tales que $u \in H^m(\Omega)$ y

$$\int_\Omega\int_\Omega \frac{|D^{\boldsymbol{\alpha}}u(\boldsymbol{x}) - D^{\boldsymbol{\alpha}}u(\mathbf{y})|^2}{\|\boldsymbol{x} - \mathbf{y}\|^{N+2\sigma}}\,d\boldsymbol{x}d\mathbf{y} < \infty \qquad \forall\,|\boldsymbol{\alpha}| = m.$$

La norma para este espacio, está dada por

$$\|u\|_{H^s(\Omega)} = \left\{ \|u\|^2_{H^m(\Omega)} + \sum_{|\boldsymbol{\alpha}|=m} \int_\Omega\int_\Omega \frac{|D^{\boldsymbol{\alpha}}u(\boldsymbol{x}) - D^{\boldsymbol{\alpha}}u(\mathbf{y})|^2}{\|\boldsymbol{x} - \mathbf{y}\|^{N+2\sigma}}\,d\boldsymbol{x}d\mathbf{y} \right\}^{1/2}.$$

Definición 1.39 (El espacio $H^s(\partial\Omega)$)**.** Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ un dominio Lipschitz acotado con frontera $\partial\Omega$. Una distribución u en $\partial\Omega$ pertenece a $H^s(\partial\Omega)$ para $|s| \leq 1$ si la composición $u \circ \phi \in H^s(\mathcal{O}' \cap \phi^{-1}(\partial\Omega \cap \mathcal{O}))$ para todo posible $\mathcal{O}$ y ϕ que satisfacen la definición 1.30.

Para definir una norma en $H^s(\partial\Omega)$, seleccionamos $(\mathcal{O}_j, \phi_j)_{j=1}^J$ algún atlas para $\partial\Omega$, tal que los pares $(\mathcal{O}_j, \phi_j)$, $j = 1, ..., J$ satisfacen las condiciones de la definición 1.30, entonces

$$\|u\|_{H^s(\partial\Omega)} = \left(\sum_{j=1}^J \|u \circ \phi\|_{H^s(\mathcal{O}_j' \cap \phi_j^{-1}(\partial\Omega \cap \mathcal{O}_j))} \right)^{1/2}.$$

En el caso $0 < s \leq 1$ esta definición es equivalente a

$$\|u\|_{H^s(\partial\Omega)} = \left(\int_{\partial\Omega} |u|^2\,d\sigma + \int_{\partial\Omega}\int_{\partial\Omega} \frac{|u(\boldsymbol{x}) - u(\mathbf{y})|^2}{\|\boldsymbol{x} - \mathbf{y}\|^{N-1+2s}}\,d\boldsymbol{x}d\mathbf{y} \right)^{1/2}.$$

Como caso particular para los valores negativos sea $s = -1/2$, entonces en el espacio $H^{-1/2}(\partial\Omega)$ su norma está definida por

$$\|u\|_{H^{-1/2}(\partial\Omega)} = \left(\sum_{j=1}^{J} \|u \circ \phi\|_{H^{-1/2}(\mathcal{O}'_j \cap \phi_j^{-1}(\partial\Omega \cap \mathcal{O}_j))} \right)^{1/2},$$

donde,

$$\|u \circ \phi\|_{H^{-1/2}(\mathcal{O}'_j \cap \phi_j^{-1}(\partial\Omega \cap \mathcal{O}_j))} = \sup_{\substack{v \in H^{1/2}(\mathcal{O}'_j \cap \phi_j^{-1}(\partial\Omega \cap \mathcal{O}_j)) \\ v \neq 0}} \frac{|\langle u \circ \phi, v \rangle|}{\|v\|_{H^{1/2}(\mathcal{O}'_j \cap \phi_j^{-1}(\partial\Omega \cap \mathcal{O}_j))}}.$$

Para $s > 1$ podemos definir el espacio normado

$$H^s(\partial\Omega) := \left\{ u \in L^2(\partial\Omega) | u = U|_{\partial\Omega} \text{ para algún } U \in H^{s+1/2}(\Omega) \right\},$$

con la norma dada por

$$\|u\|_{H^s(\partial\Omega)} = \inf_{\substack{U \in H^{s+1/2}(\Omega) \\ u = U|_{\partial\Omega}}} \|U\|_{H^{s+1/2}(\Omega)}.$$

Teorema 1.40. *Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ un dominio Lipschitz acotado, entonces existe un único operador lineal y acotado $\gamma : H^1(\Omega) \to H^{1/2}(\partial\Omega)$ tal que $\gamma(u) = u|_{\partial\Omega}$ para todo u en $C^\infty(\overline{\Omega})$.*

Demostración. Ver [8, Teorema 6.8.1]. □

Teorema 1.41. *Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ un dominio Lipschitz acotado, entonces existe un operador lineal y acotado $T : H^{1/2}(\partial\Omega) \to H^1(\Omega)$ tal que para $v = T(u)$ se tiene $v = u$ en $\partial\Omega$.*

Demostración. Ver [8, Teorema 6.9.2]. □

El siguiente lema, será utilizado más adelante en nuestro trabajo.

Lema 1.42. *Sea Ω un dominio Lipschitz con $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ y $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$. Sean f, g funciones definidas en Γ_1 y Γ_2 respectivamente, tales que $f \in H^{1/2}(\Gamma_1)$ y $g \in H^{1/2}(\Gamma_2)$, entonces la función definida en $\partial\Omega$ por*

$$h(\boldsymbol{x}) := \begin{cases} f(\boldsymbol{x}), & si \quad \boldsymbol{x} \in \Gamma_1, \\ \\ g(\boldsymbol{x}), & si \quad \boldsymbol{x} \in \Gamma_2, \end{cases} \tag{1.11}$$

pertenece a $H^{1/2}(\partial\Omega)$.

Observación 1.43. Un dominio Ω con las características mencionadas en este lema puede tener la forma mostrada en la siguiente figura. En el problema de electromagnetismo bidimensional que estudiaremos en el siguiente capítulo, la región encerrada entre las fronteras Γ_1 y Γ_2 representará un material dieléctrico (no conductor, como por ejemplo aire), mientras que la región interior a Γ_1 representará el material ocupado por un material conductor (como por ejemplo una placa metálica).

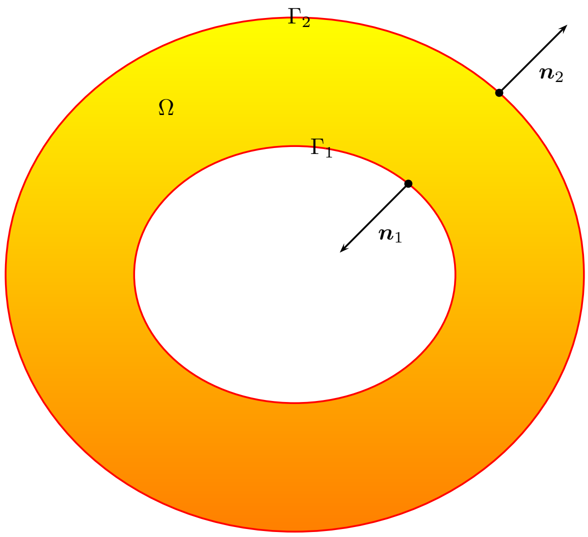

Figura 1.1: Dominio modelo que cumple los requerimientos del Lema 1.42.

Demostración. Supongamos $f_1 \in H^{1/2}(\Gamma_1)$, $f_2 \in H^{1/2}(\Gamma_2)$ y f definida por (1.11), mostremos que $f \in H^{1/2}(\partial\Omega)$.

En efecto, sea $x \in \partial\Omega$, puesto que $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$ entonces $x \in \Gamma_1$ o $x \in \Gamma_2$. Si $x \in \Gamma_1$ por ser esté Lipschitz existen un abierto $\mathcal{O}$ y una función ϕ que satisfacen la definición 1.30, así por ser $f_1 \in H^{1/2}(\Gamma_1)$ entonces

$$f_1 \circ \phi \in H^{1/2}(\mathcal{O}' \cap \phi^{-1}(\Gamma_1 \cap \mathcal{O})). \tag{1.12}$$

Análogamente si $x \in \Gamma_2$ por ser esté Lipschitz existen un abierto $\mathcal{O}$ y una función ϕ que satisfacen la definición 1.30 y por ser $f_2 \in H^{1/2}(\Gamma_2)$ entonces

$$f_2 \circ \phi \in H^{1/2}(\mathcal{O}' \cap \phi^{-1}(\Gamma_2 \cap \mathcal{O})) \tag{1.13}$$

Como $x \in \partial\Omega$ es cualquiera entonces de (1.12) y (1.13) se tiene

$$f \circ \phi \in H^{1/2}(\mathcal{O}' \cap \phi^{-1}(\Gamma_2 \cap \mathcal{O})),$$

para todo abierto $\mathcal{O}$ y toda función ϕ que satisfacen la definiciốm 1.30.

Por lo tanto, hemos mostrado que $f \in H^{1/2}(\partial\Omega)$. $\square$

Definición 1.44 (El espacio $H(\mathrm{div}, \Omega)$)**.** El espacio de funciones con divergencia de cuadrado integrable es denotado por $H(\mathrm{div}, \Omega)$ y definido por

$$H(\mathrm{div}, \Omega) := \left\{ u \in \left(L^2(\Omega)\right)^N \mid \mathrm{div}\, u \in L^2(\Omega) \right\}, \tag{1.14}$$

al cual le asociamos la norma,

$$\|u\|_{H(\mathrm{div},\Omega)} := \left(\|u\|_{(L^2(\Omega))^N} + \|\mathrm{div}\, u\|_{L^2(\Omega)} \right)^{1/2}, \tag{1.15}$$

donde,

$$\|u\|^2_{(L^2(\Omega))^N} := \sum_{i=1}^{N} \int_\Omega |u_i|^2 \, d\boldsymbol{x}, \quad u = (u_1, u_2, ..., u_N).$$

El siguiente teorema muestra qué funciones en $H(\mathrm{div}, \Omega)$ tienen bien definida la componente normal en $\partial\Omega$. Para una función $v \in \left(C^\infty(\overline{\Omega})\right)^3$ el operador traza normal γ_n es definido en casi toda parte en la manera clásica por

$$\gamma_n(v) := v|_{\partial\Omega} \cdot \nu. \tag{1.16}$$

Teorema 1.45. *Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ un dominio Lipschitz acotado en $\mathbb{R}^3$ con vector normal unitario exterior ν. Entonces*

a) La función definida en (1.16) en $\left(C^\infty(\overline{\Omega})\right)^3$, puede ser extendida por continuidad a una función lineal continua γ_n de $H(\mathrm{div}, \Omega)$ en $H^{-1/2}(\partial\Omega)$.

b) El siguiente teorema de Green se tiene para funciones $v \in H(\mathrm{div}, \Omega)$ y $\phi \in H^1(\Omega)$:

$$(v, \nabla\phi) + (\mathrm{div}\, v, \phi) = \langle \phi, \gamma_n(v) \rangle_{\partial\Omega}.$$

Demostración. Ver [11, Teorema 3.24] □

Proposición 1.46. *Supongamos que K_1 y K_2 son dos dominios Lipschitz que no se sobreponen con una superficie común Σ, tal que $\overline{K_1} \cap \overline{K_2} = \Sigma$.*

a) Supongamos que $u_1 \in H^1(K_1)$ y $u_2 \in H^1(K_2)$ y definimos $u \in L^2(K_1 \cup \Sigma \cup K_2)$, por

$$u(\boldsymbol{x}) := \begin{cases} u_1(\boldsymbol{x}) & \text{si} \quad \boldsymbol{x} \in K_1. \\ \\ u_2(\boldsymbol{x}) & \text{si} \quad \boldsymbol{x} \in K_2. \end{cases} \tag{1.17}$$

Entonces, si $u_1 = u_2$ en Σ, tenemos $u \in H^1(K_1 \cup \Sigma \cup K_2)$.

b) Supongamos que $u_1 \in H(\mathrm{div}, K_1)$ y $u_2 \in H(\mathrm{div}, K_2)$ y definimos $u \in (L^2(K_1 \cup \Sigma \cup K_2))^3$ como en (1.17). Entonces, si $u_1 \cdot \nu = u_2 \cdot \nu$ en Σ, donde ν es el vector normal unitario a Σ en una única dirección, tenemos $u \in H(\mathrm{div}, K_1 \cup \Sigma \cup K_2)$.

Demostración. Ver [11, Lema 5.3] □

1.3.2. La integral de Bochner.

Definición 1.47. Sea X un espacio de Banach. Una función $f : [0, T] \to X$ es llamada una función simple, si existen $c_1, ..., c_n \in X$ y subconjuntos (Lebesgue) medibles $M_1, ..., M_n$ de $[0, T]$ con $M_i \cap M_j = \emptyset$, $i \neq j$ tales que

$$f(t) := \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} \chi_{M_i}(t) c_i, & \forall t \in \bigcup_{i=1}^{n} M_i \\ \\ \mathbf{0}, & \forall t \in [0, T] \setminus \bigcup_{i=1}^{n} M_i, \end{cases}$$

donde **0** es el cero de X y χ_M es la función característica del conjunto M. Si los conjuntos M_i son intervalos de $[0,T]$, entonces f es llamada una función escalonada o función de salto.

Definición 1.48. La integral de Bochner de una función simple $f:[0,T]\to X$ está definida por

$$\int_{[0,T]} f(t)\,dt \equiv \int_0^T f(t)\,dt := \sum_{i=1}^{n} c_i\lambda(M_i).$$

Definición 1.49. Sea X un espacio de Banach con la norma $\|\cdot\|_X$. Decimos que una función $u:[0,T]\to X$ es Bochner medible si existe una sucesión de funciones simples $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}\subseteq X$ tales que

$$\lim_{n\to\infty}\|u_n(t)-u(t)\|_X = 0 \qquad \text{c.t.p} \qquad t\in[0,T]. \tag{1.18}$$

Si además,

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^T \|u_n(t)-u(t)\|_X\, dt = 0, \tag{1.19}$$

donde las integrales son integrales de Lebesgue, entonces u se dice Bochner integrable.

Definición 1.50. Para conjuntos medibles $M\subseteq[0,T]$ y funciones $u:[0,T]\to X$ Bochner integrables definimos la integral de Bochner $\int\limits_M u(t)\,dt$, como un elemento de X que satisface

$$\lim_{n\to\infty}\left\|\int_M u(t)\,dt-\int_{[0,T]}\chi_M(t)u_n(t)\,dt\right\|_X = 0,$$

donde la sucesión $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ satisface las relaciones (1.18) y (1.19).

Teorema 1.51 (Teorema de Bochner). *Una función $u:[0,T]\to X$ Bochner medible, es Bochner integrable si, y soló si, la función de valor real $\|u\|_X:[0,T]\to\mathbb{R}$ tiene integral de Lebesgue finita.*

Demostración. Ver [8, Teorema 2.19.8]. □

1.3.3. El espacio de Lebesgue $L^p(0,T;X)$.

Definición 1.52. Sean $1\le p\le\infty$, X un espacio de Banach, con la norma $\|\cdot\|_X$. Denotamos por $L^p(0,T;X)$, el conjunto de todas las funciones $u:(0,T)\to X$ medibles y tal que:

$$\|u\|_{L^p(0,T;X)} := \left(\int_0^T \|u(t)\|_X^p\,dt\right)^{1/p} < \infty \quad \textit{para } 1\le p<\infty, \tag{1.20}$$

y

$$\|u\|_{L^\infty(0,T;X)} := Inf\{M\in\mathbb{R} \mid \|u(t)\|_X\le M,\ \text{c.t.p } t\in(0,T)\}. \tag{1.21}$$

Observación 1.53. La igualdad de elementos de $L^p(0,T;X)$ la entendemos como igualdad en casi toda parte, es decir

$$u=v \quad L^p(0,T;X) \qquad\Leftrightarrow\qquad u(t)=v(t) \quad \text{c.t.p} \quad t\in[0,T].$$

Observación 1.54. Sean $u, v \in L^p(0,T;X)$ y $u = v$ entonces de la observación anterior se tiene que

$$\left| \|u\|_{L^p(0,T;X)} - \|v\|_{L^p(0,T;X)} \right| \leq \|u - v\|_{L^p(0,T;X)} = 0.$$

Por lo tanto, si $u = v$ en $L^p(0,T;X)$ entonces $\|u\|_{L^p(0,T;X)} = \|v\|_{L^p(0,T;X)}$ como era de esperarse.

Proposición 1.55. *Los espacios de Lebesgue $L^p(0,T;X)$ con la norma* (1.20)*, $1 \leq p < \infty$ y el espacio $L^\infty(0,T;X)$ con la norma* (1.21) *son espacios de Banach.*

Demostración. Ver [8, Teorema 2.20.4, Teorema 2.20.8]. □

Proposición 1.56. *Sean X y Y espacios de Banach sobre $\mathbb{K}$. Si la inclusión $X \subseteq Y$ es continua, entonces la inclusión*

$$L^r(0,T;X) \subseteq L^q(0,T;Y) \qquad 1 \leq q \leq r \leq \infty,$$

es también continua.

Demostración. Ver [16, Proposición 23.2] □

Proposición 1.57. *Para todo $u \in L^p(0,T;X)$, $1 \leq p \leq \infty$ tiene sentido la integral*

$$\int_0^T u(t)\, dt \in X.$$

Demostración. Por la proposición anterior, tenemos que $L^p(0,T;X) \subseteq L^1(0,T;X)$ para todo $1 < p < \infty$. Así, dado $u \in L^p(0,T;X)$, se tiene $u \in L^1(0,T;X)$, es decir

$$\int_0^T \|u\|_X \, dt < \infty.$$

Por lo tanto, por el Teorema 1.51 (Teorema de Bochner),

$$\int_0^T u(t)\, dt$$

existe, y es un elemento de X. □

Proposición 1.58 (El espacio dual de $L^p(0,T;V)$)**.** *Sean $1 < p < \infty$ con $1/p + 1/q = 1$ y V un espacio de Banach reflexivo (o separable). Entonces toda $f \in (L^p(0,T;V))^*$, puede representarse únicamente en la forma,*

$$f(u) = \int_0^T \langle v(t), u(t) \rangle \, dt, \qquad \forall u \in L^p(0,T;V),$$

donde $v \in L^q(0,T;V^*)$. La función $v \in L^q(0,T;V^*)$ es determinada únicamente por $f \in (L^p(0,T;V))^*$, la correspondencia $f \mapsto u$ es lineal, y se tiene

$$\|f\|_{(L^p(0,T;V))^*} = \|v\|_{L^q(0,T;V^*)} .$$

Demostración. Ver [8, Teorema 2.22.2]. □

Proposición 1.59 (El espacio dual de $L^1(0,T;V)$)**.** *Sean V un espacio de Banach reflexivo y $f \in (L^1(0,T;V))^*$. Entonces, existe $v \in L^\infty(0,T;V^*)$ tal que*

$$f(u) = \int_0^T \langle v(t), u(t)\rangle \; dt \qquad \forall u \in L^1(0,T;V),$$

la función $v \in L^\infty(0,T;V^*)$ es determinada unicamente por la función $f \in (L^1(0,T;V))^*$, la correspondencia $f \mapsto v$ es lineal y además se satisface

$$\|f\|_{(L^1(0,T;V))^*} = \|v\|_{L^\infty(0,T;V^*)}\,.$$

Demostración. Ver [8, Teorema 2.22.3] □

Proposición 1.60 (Desigualdad de Hölder)**.** *Sean V un espacio de Banach, $u \in L^p(0,T;V)$, $v \in L^q(0,T;V^*)$, con $1 < p < \infty$, $1/p + 1/q = 1$. Entonces la desigualdad,*

$$\int_0^T |\langle v(t), u(t)\rangle_V| dt \leq \left(\int_0^T \|v(t)\|_{V^*}^q dt\right)^{1/q} \left(\int_0^T \|u(t)\|_V^p \, dt\right)^{1/p}, \tag{1.22}$$

se tiene. En particular todas las integrales en (1.22) *existen.*

Demostración. Ver [16, Proposicion 23.6]. □

Proposición 1.61 (Límites relacionados para integrales)**.** *Sea V un espacio de Banach reflexivo y separable. Además sea $1 < p < \infty$, $1/p + 1/q = 1$, y $0 \leq t \leq T < \infty$. Entonces los siguientes enunciados son validos:*

a) Si $u \in L^p(0,T;V)$, entonces

$$\left\langle v^*, \int_0^t u(s)\, ds \right\rangle_V = \int_0^t \langle v^*, u(s)\rangle \, ds \qquad \forall v^* \in V^*.$$

b) Si $u \in L^p(0,T;V^*)$, entonces

$$\left\langle \int_0^t u(s)\, ds, v \right\rangle_V = \int_0^t \langle u(s), v\rangle_V \, ds \qquad \forall v \in V.$$

c) Si,

$$u_n \to u \text{ en } L^p(0,T;V),\; n \to \infty,$$
$$v_n \rightharpoonup v \text{ en } L^q(0,T;V^*),\; n \to \infty,$$

o,

$$u_n \rightharpoonup u \text{ en } L^p(0,T;V),\; n \to \infty,$$
$$v_n \to v \text{ en } L^q(0,T;V^*),\; n \to \infty.$$

Entonces,

$$\int_0^t \langle v_n(s), u_n(s)\rangle_V \, ds \to \int_0^t \langle v(s), u(s)\rangle_V \, ds, \quad n \to \infty.$$

Demostración. Ver [16, Proposición 23.9]. $\square$

Proposición 1.62 (Lema variacional)**.** *Sean X un espacio de Banach, y $u \in L^1(0,T;X)$ tal que*

$$\int_0^T \varphi(t)u(t)\,dt = \mathbf{0} \qquad \forall \varphi \in C_0^\infty(0,T).$$

Entonces, $u = \mathbf{0}$ en $L^1(0,T;X)$, esto es $u(t) = \mathbf{0}$ para casi todo $t \in (0,T)$.

Demostración. Ver [16, Proposición 23.10]. $\square$

Corolario 1.63. *Sean X un espacio de Banach, y $u \in L^p(0,T;X)$ tal que*

$$\int_0^T \varphi(t)u(t)\,dt = \mathbf{0} \qquad \forall \varphi \in C_0^\infty(0,T).$$

Entonces, $u = \mathbf{0}$ en $L^p(0,T;X)$, esto es $u(t) = \mathbf{0}$ para casi todo $t \in (0,T)$.

Demostración. Sean $1 < p < \infty$ y $u \in L^p(0,T;X)$. Entonces para todo $\varphi \in C_0^\infty(0,T)$ se tiene que $\varphi u \in L^p(0,T;X)$. Pero por la Proposición 1.56,

$$\varphi u \in L^1(0,T;X).$$

Así, por el Lema 1.62, tenemos que $u = \mathbf{0}$ en $L^1(0,T;X)$, pero $u \in L^p(0,T;X)$, por lo que

$$u = \mathbf{0} \qquad \text{en} \qquad L^p(0,T;X).$$

$\square$

1.3.4. El espacio de Sobolev $W_p^1(0,T;V,H)$.

Definición 1.64 (Terna de evolución)**.** Se dice que " $V \subseteq H \subseteq V^*$ " es una terna de evolución si:

i) V es un espacio de Banach real, separable y reflexivo,

ii) H es un espacio de Hilbert real, separable,

iii) V es denso en H y la inclusión $V \subseteq H$ es continua, es decir

$$\|v\|_H \leq c\|v\|_V \qquad \forall v \in V.$$

Para explicar en qué sentido se hace la inclusión $H \subseteq V^*$, enunciamos la siguiente proposición.

Proposición 1.65. *Sea $V \subseteq H \subseteq V^*$ una terna de evolución. Entonces se tiene lo siguiente:*

a) A caca $h \in H$ le corresponde vía

$$\langle \bar{h}, v \rangle_V = (h,v)_H \qquad \forall v \in V, \tag{1.23}$$

un funcional lineal y continuo $\bar{h} : V \to \mathbb{R}$, es decir $\bar{h} \in V^*$.

b) La función $h \mapsto \bar{h}$ de H en V^* es lineal, inyectiva y continua.

Demostración. Supongamos que $V \subseteq H \subseteq V^*$ es una terna de evolución.

a) Sea $h \in H$, como la inclusión $V \subseteq H$ es continua, entonces

$$|(h,v)_H| \leq \|h\|_H \|v\|_H \leq c \|h\|_H \|v\|_V \qquad \forall v \in V.$$

Por lo tanto, existe $\bar{h} \in V^*$ que satisface

$$\left\langle \bar{h}, v \right\rangle_V = (h,v)_H \qquad \forall v \in V$$

y además

$$\left\|\bar{h}\right\|_{V^*} = \sup_{\substack{v \in V \\ v \neq \mathbf{0}}} \frac{\left|\left\langle \bar{h}, v\right\rangle_V\right|}{\|v\|_V} = \sup_{\substack{v \in V \\ v \neq \mathbf{0}}} \frac{|(h,v)_H|}{\|v\|_V} \leq c \|h\|_H .$$

b) Sea $F : H \to V^*$ definida por

$$F(h) := \bar{h},$$

veamos que F es lineal. En efecto, sean $h, j \in H$, $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces para todo $v \in V$

$$\begin{aligned}
\langle F(h+\alpha j), v\rangle_V &= \left\langle \overline{h+\alpha j}, v\right\rangle_V \\
&= (h+\alpha j, v)_H \\
&= (h,v)_H + \alpha\,(j,v)_H \\
&= \left\langle \bar{h}, v\right\rangle_V + \alpha\,\langle \bar{j}, v\rangle_V \\
&= \langle F(h), v\rangle_V + \alpha\,\langle F(j), v\rangle_V \\
&= \langle F(h) + \alpha F(j), v\rangle_V .
\end{aligned}$$

Así, F es lineal.

Además F es acotado, ya que para todo $h \in H$

$$\|F(h)\|_{V^*} = \left\|\bar{h}\right\|_{V^*} \leq c \|h\|_H .$$

Por lo tanto, F es continua.

Veamos por último que F es inyectiva. Si $\bar{h} = \mathbf{0}$ entonces $F(h) = \mathbf{0}$, por lo que

$$(h,v) = 0 \qquad \forall v \in V,$$

y como V es denso en H entonces

$$(h,v) = 0 \qquad \forall v \in H.$$

Por lo tanto $h = \mathbf{0}$.

□

Convención 1.66. Por la Proposición 1.65, vamos a identificar a $\bar{h}$ con h, en este sentido $H \subseteq V^*$. Así, escribimos h en vez de $\bar{h}$. Entonces lo siguiente es válido:

$$\begin{aligned} \langle h, v \rangle_V &= (h, v)_H \qquad \forall h \in H, \quad \forall v \in V, \\ \|h\|_{V^*} &\leq c \|h\|_H \qquad \forall h \in H. \end{aligned}$$

En lo siguiente, la relación $V \subseteq H \subseteq V^*$, para ternas de evolución se entenderá en el sentido de esta convención. Observamos que por la definición de terna de evolución y por lo anterior, las inclusiones $V \subseteq H$ y $H \subseteq V^*$ son continuas. En particular tenemos

$$\langle u, v \rangle_V = \langle v, u \rangle_V \qquad \forall u, v \in V.$$

Definición 1.67 (Derivada generalizada)**.** Sean X y Y espacios de Banach con $X \cap Y \neq \emptyset$. Sean $u \in L^1(0, T; Y)$ y $w \in L^1(0, T; Z)$, entonces w es llamada la n-ésima derivada generalizada de la función u en $(0, T)$, si,

$$\int_0^T \varphi^{(n)}(t) u(t)\, dt = (-1)^n \int_0^T \varphi(t) w(t)\, dt \qquad \forall \varphi \in C_0^\infty(0, T), \tag{1.24}$$

es válida. En tal caso escribimos $w = u^{(n)}$.

Proposición 1.68 (Derivadas generalizadas y convergencia débil)**.** *Sean Y y Z espacios de Banach sobre $\mathbb{K}$ con $Y \subseteq Z$ incluido continuamente. Entonces se sigue de $u_k^{(n)} = v_k$ en $(0, T)$ para todo k y $n \geq 1$ fijo y*

$$\begin{aligned} u_k &\rightharpoonup u \qquad \textit{en} \qquad L^p(0, T; Y), \qquad n \to \infty, \\ v_k &\rightharpoonup v \qquad \textit{en} \qquad L^q(0, T; Z), \qquad n \to \infty, \quad 1 \leq p,\, q < \infty \end{aligned}$$

que $u^{(n)} = v$ en $(0, T)$.

Demostración. Ver [16, Proposicion 23.19]. □

Proposición 1.69 (Existencia de $u^{(n)}$)**.** *Sea $V \subseteq H \subseteq V^*$ una terna de evolución, $0 < T < \infty$ y sea $1 \leq p, q \leq \infty$ con $1/p + 1/q = 1$. Entonces lo siguiente es válido:*

a) Unicidad: Para $u \in L^p(0, T; V)$, la derivada generalizada $u^{(n)}$ es única como elemento de $L^q(0, T; V^*)$, esto es $t \mapsto u^{(n)}(t)$ puede ser modificada sólo en un subconjunto de medida cero de $(0, T)$.

b) Existencia: Sea $u \in L^p(0, T; V)$. La derivada generalizada $u^{(n)} \in L^q(0, T; V^*)$ existe si, y sólo si, existe una función $w \in L^q(0, T; V^*)$ tal que

$$\int_0^T (u(t), v)_H \varphi^{(n)}(t)\, dt = (-1)^n \int_0^T \langle w(t), v \rangle_V \varphi(t)\, dt \tag{1.25}$$

para todo $v \in V$ y todo $\varphi \in C_0^\infty(0, T)$.

En tal caso, $w = u^{(n)}$ y

$$\frac{d^n}{dt^n}(u(t), v)_H = \langle u^{(n)}(t), v \rangle_V, \tag{1.26}$$

se tiene para todo $v \in V$ y casi todo $t \in (0, T)$. Aquí d^n/dt^n significa la n-ésima derivada generalizada de funciones reales en $(0, T)$.

Demostración. Ver [16, Proposición 23.20]. □

Proposición 1.70. *Sean $u, w : [0,T] \to X$ funciones Bochner integrables, y sea $\zeta \in X$, si para $t_0 \in [0,T]$, se tiene*

$$u(t) = \zeta + \int_{t_0}^{t} w(s)\, ds \qquad c.t.p \qquad t \in [0,T],$$

entonces $u' = w$.

Demostración. Ver [19, Teorema 127]. □

Proposición 1.71. *Sea $u : [0,T] \to X$ Bochner integrable. La función $v : [0,T] \to X$ definida por la relación*

$$v(t) := \int_{t_0}^{t} u(s)\, ds, \qquad (t_0 \in [0,T]),$$

es una función absolutamente continua, es diferenciable y además,

$$v'(t) = u(t), \qquad c.t.p \qquad t \in [0,T].$$

Demostración. Ver [19, Teorema 113] □

Proposición 1.72. *Si $u : [0,T] \to X$ satisface $u' = \mathbf{0}$ entonces la función u es una constante, es decir, existe una constante $c \in X$ tal que*

$$u(t) = c \in X \qquad c.t.p \qquad t \in [0,T].$$

Demostración. Ver [19, Lema 129]. □

Definición 1.73. Sean $X := L^p(0,T;V)$ y $X^* := L^q(0,T;V^*)$, con $1/p + 1/q = 1$, definimos

$$W_p^1(0,T;V,H) := \{u \in X \mid u' \in X^*,\ 1 < p < \infty\}.$$

Proposición 1.74. *Sean $V \subseteq H \subseteq V^*$ una terna de evolución, $0 < T < \infty$ y $1 < p < \infty$ con $1/p + 1/q = 1$. Sea $W := W_p^1(0,T;V,H)$, con la norma $\|u\|_W = \|u\|_X + \|u'\|_{X^*}$. Entonces W es un espacio de Banach, y la inclusión $W \subseteq C([0,T],H)$ es continua. Además para todos $u, v \in W$, $t \in [0,T]$ la siguiente fórmula de integración por partes es valida,*

$$(u(t), v(0))_H - (v(t), u(0))_H = \int_0^t \{\langle u'(\tau), v(\tau)\rangle_V + \langle v'(\tau), u(\tau)\rangle_V\}\, d\tau. \tag{1.27}$$

Demostración. Ver [16, Proposición 23.23]. □

Capítulo 2

Un problema de electromagnetismo bidimensional

El problema de corrientes inducidas (*eddy current*) se obtiene a partir del sistema completo de ecuaciones de Maxwell despreciando el término que involucra el campo eléctrico en la ley de Ampere Maxwell [2, Capítulo 8]. El estudio de este problema es muy importante para la ingeniería eléctrica debido principalmente a su amplia lista de aplicaciones que incluyen entre otros, problemas termoeléctricos, de bioelectromagnetismo y de levitación magnética, las cuales pueden ser estudiadas con más detalle en [1, Capítulo 9]. El modelo de corrientes inducidas es un problema típicamente tridimensional, pero desde el punto de vista teórico resulta muy interesante e instructivo, primero estudiar simplificaciones bidimensionales de dicho problema, como la que introduciremos en este Capítulo, la cual fue estudiada por M. Zlamal en 1981 [20] y que constituye el tema central de este trabajo de grado.

2.1. Motivación.

Las ecuaciones de Maxwell en su forma diferencial, están dadas por (ver por ejemplo [2, capítulo 1]):

$$\frac{\partial \mathcal{D}}{\partial t} - \mathbf{rot}\,\mathcal{H} = -\mathcal{J}, \tag{2.1}$$

$$\frac{\partial \mathcal{B}}{\partial t} + \mathbf{rot}\,\mathcal{E} = \mathbf{0}, \tag{2.2}$$

$$\operatorname{div} \mathcal{E} = \rho, \tag{2.3}$$

$$\operatorname{div} \mathcal{B} = 0, \tag{2.4}$$

donde $\mathcal{E}$ es la intensidad del campo eléctrico, $\mathcal{D}$ es el desplazamiento eléctrico, $\mathcal{H}$ la intensidad del campo magnético y $\mathcal{B}$ la inducción magnética. La distribución de cargas es dada por una función escalar ρ que representa la densidad de carga eléctrica, mientras que las corrientes son descritas por una función vectorial de *densidad de corriente* $\mathcal{J}$.

La ecuación (2.1) es llamada la ley de Ampère-Maxwell que relaciona al campo magnético con la variación en el tiempo del desplazamiento eléctrico. La ley de Ampère-Maxwell coincide con la ley de Ampère salvo el término adicional $\dfrac{\partial \mathcal{D}}{\partial t}$ introducido por Maxwell y conocido en la literatura como *corrientes de desplazamiento*.

Para obtener un sistema cerrado a partir de las ecuaciones de Maxwell (2.1)–(2.4), requerimos de información adicional que vincule los distintos campos entre sí. Esta información está dada a través de las *leyes constitutivas*

$$\mathcal{B} = \mu\mathcal{H}, \qquad \mathcal{D} = \varepsilon\mathcal{E}, \tag{2.5}$$

con $\mu = \mu(\|\mathcal{H}\|)$ y por la *ley de Ohm*

$$\mathcal{J} = \mathcal{J}_d + \sigma\mathcal{E},$$

donde $\mathcal{J}_d$ es la densidad de la fuente de corriente aplicada, y ε, μ, σ son funciones que dependen de los materiales físicos involucrados llamadas permitividad eléctrica, permeabilidad magnética y conductividad eléctrica respectivamente.

Despreciando el término que involucra las corrientes de desplazamiento en (2.1), obtenemos el llamado modelo de corrientes inducidas, que consiste en: Hallar $\mathcal{H}$ y $\mathcal{E}$ con $\mathcal{H} : \mathbb{R}^3 \times [0, T] \to \mathbb{R}^3$, $\mathcal{E} : \mathbb{R}^3 \times [0, T] \to \mathbb{R}^3$ tales que

$$\mathbf{rot}\, \mathcal{H} = \mathcal{J}_d + \sigma\mathcal{E}, \qquad \operatorname{div} \mathcal{E} = \rho, \tag{2.6}$$

$$\mathbf{rot}\, \mathcal{E} + \frac{\partial\, (\mu\mathcal{H})}{\partial t} = \mathbf{0}, \qquad \operatorname{div}\, (\mu\mathcal{H}) = 0. \tag{2.7}$$

En esta sección deduciremos "formalmente" una simplificación bidimensional del modelo de corrientes inducidas (2.6)-(2.7) en términos de una nueva incógnita, por lo que asumiremos que los campos vectoriales $\mathcal{B}, \mathcal{H}, \mathcal{D}, \mathcal{E}, \mathcal{J}$ y los campos escalares μ, σ y ε sólo dependen de las componentes espaciales x_1, x_2 y de la variable temporal t. Además asumiremos que la densidad de carga ρ es nula, con lo cual de (2.6) se sigue

$$\operatorname{div} \mathcal{E} = 0, \tag{2.8}$$

y que la inducción magnética $\mu\mathcal{H}$ tiene la forma

$$\mu\mathcal{H} = (\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, 0)\,. \tag{2.9}$$

En consecuencia, la segunda ecuación de (2.7) sugiere introducir una nueva incógnita $\mathcal{A}$ tal que

$$\mu\mathcal{H} = \mathbf{rot}\, \mathcal{A}, \tag{2.10}$$

donde $\mathcal{A} : \mathbb{R}^2 \times [0, T] \to \mathbb{R}^3$, con $\mathcal{A}_i = \mathcal{A}_i(x_1, x_2, t)$, $i = 1, 2, 3$. Así, dado que

$$\begin{aligned}
\mu\mathcal{H} = \mathbf{rot}\, \mathcal{A} &= \left(\frac{\partial \mathcal{A}_3}{\partial x_2} - \frac{\partial \mathcal{A}_2}{\partial x_3}, \frac{\partial \mathcal{A}_1}{\partial x_3} - \frac{\partial \mathcal{A}_3}{\partial x_1}, \frac{\partial \mathcal{A}_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \mathcal{A}_1}{\partial x_2} \right) \\
&= \left(\frac{\partial \mathcal{A}_3}{\partial x_2}, -\frac{\partial \mathcal{A}_3}{\partial x_1}, \frac{\partial \mathcal{A}_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \mathcal{A}_1}{\partial x_2} \right).
\end{aligned}$$

Luego, por el requerimiento de que $\mathcal{B}_3 \equiv 0$ se sigue

$$\mu\mathcal{H} = \left(\frac{\partial \mathcal{A}_3}{\partial x_2}, -\frac{\partial \mathcal{A}_3}{\partial x_1}, 0 \right) \tag{2.11}$$

y en consecuencia,

$$\frac{\partial \mathcal{A}_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \mathcal{A}_1}{\partial x_2} = 0.$$

Así, es posible asumir que $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_2 = 0$ y obtener

$$\mathcal{A} = (0, 0, u), \quad \mathcal{A}_3 = u(x_1, x_2, t). \tag{2.12}$$

En consecuencia, por la ecuación anterior se tiene en (2.11)

$$\mu\mathcal{H} = \left(\frac{\partial u}{\partial x_2}, -\frac{\partial u}{\partial x_1}, 0\right), \qquad \|\mu\mathcal{H}\| = \|\nabla u\|, \tag{2.13}$$

donde, $\|\nabla u\|^2 := \left|\frac{\partial u}{\partial x_1}\right|^2 + \left|\frac{\partial u}{\partial x_2}\right|^2$. Por otro lado, reemplazando (2.10) en (2.7) tenemos

$$\mathbf{rot}\,\mathcal{E} + \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{rot}\,\mathcal{A}) = \mathbf{0}. \tag{2.14}$$

Luego, si asumimos que $\mathcal{A}$ es suficientemente regular (por ejemplo, si $\mathcal{A}$ es de clase $C^2(\mathbb{R}^2 \times [0, T])$), se deduce que

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{rot}\,\mathcal{A}) \\
&= \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \mathcal{A}_3}{\partial x_2} - \frac{\partial \mathcal{A}_2}{\partial x_3}, \frac{\partial \mathcal{A}_1}{\partial x_3} - \frac{\partial \mathcal{A}_3}{\partial x_1}, \frac{\partial \mathcal{A}_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \mathcal{A}_1}{\partial x_2}\right) \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \mathcal{A}_3}{\partial x_2} - \frac{\partial \mathcal{A}_2}{\partial x_3}\right), \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \mathcal{A}_1}{\partial x_3} - \frac{\partial \mathcal{A}_3}{\partial x_1}\right), \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \mathcal{A}_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \mathcal{A}_1}{\partial x_2}\right)\right) \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial \mathcal{A}_3}{\partial t}\right) - \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial \mathcal{A}_2}{\partial t}\right), \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial \mathcal{A}_1}{\partial t}\right) - \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial \mathcal{A}_3}{\partial t}\right),\right. \\
&\qquad \left.\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial \mathcal{A}_2}{\partial t}\right) - \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial \mathcal{A}_1}{\partial t}\right)\right) \\
&= \mathbf{rot}\left(\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial t}\right),
\end{aligned}$$

por lo que (2.14) es equivalente a

$$\mathbf{0} = \mathbf{rot}\,\mathcal{E} + \mathbf{rot}\left(\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial t}\right) = \mathbf{rot}\left(\mathcal{E} + \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial t}\right).$$

La igualdad anterior sugiere introducir $\varphi : \mathbb{R}^3 \times [0, T] \to \mathbb{R}$ tal que

$$\mathcal{E} + \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial t} = -\nabla\varphi$$

o equivalentemente,

$$\mathcal{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial t}. \tag{2.15}$$

Ahora bien, si φ es suficientemente regular (por ejemplo, si es de clase $C^2(\mathbb{R}^3 \times [0,T])$), reemplazando (2.15) en (2.6), tenemos

$$\begin{aligned}
\operatorname{div} \mathcal{E} &= \operatorname{div}\left(-\nabla \varphi - \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial t}\right) \\
&= -\operatorname{div}(\nabla \varphi) - \operatorname{div} \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial t} \\
&= -\Delta\varphi - \operatorname{div}\left(0, 0, \frac{\partial u}{\partial t}\right) \\
&= -\Delta\varphi - \frac{\partial^2 u}{\partial t\, \partial x_3} \\
&= -\Delta\varphi - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial x_3}\right) \\
&= -\Delta\varphi.
\end{aligned}$$

Luego, de (2.8) se sigue,

$$-\Delta\varphi = 0. \tag{2.16}$$

Así podemos asumir que $\varphi = \mathbf{0}$ y obtener de (2.12) y (2.15) que,

$$\mathcal{E} = \left(0, 0, -\frac{\partial u}{\partial t}\right). \tag{2.17}$$

Por otro lado, de (2.13) se tiene,

$$\begin{aligned}
\mathbf{rot}\, \mathcal{H} &= \mathbf{rot}\left(\frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial u}{\partial x_2}, -\frac{\partial u}{\partial x_1}, 0\right)\right) \\
&= \left(0 - \frac{\partial}{\partial x_3}\left(-\frac{1}{\mu}\frac{\partial u}{\partial x_1}\right), \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{1}{\mu}\frac{\partial u}{\partial x_2}\right) - 0, \frac{\partial}{\partial x_1}\left(-\frac{1}{\mu}\frac{\partial u}{\partial x_1}\right) - \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{1}{\mu}\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)\right) \\
&= \left(0, 0, -\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{1}{\mu}\frac{\partial u}{\partial x_1}\right) - \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{1}{\mu}\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)\right).
\end{aligned} \tag{2.18}$$

Luego, si $\mathcal{J}_d = (\mathcal{J}_{d_1}, \mathcal{J}_{d_2}, \mathcal{J}_{d_3})$, de (2.17) se sigue

$$\mathcal{J}_d + \sigma\mathcal{E} = (\mathcal{J}_{d_1}, \mathcal{J}_{d_2}, \mathcal{J}_{d_3}) + \sigma\left(0, 0, -\frac{\partial u}{\partial t}\right) = \left(\mathcal{J}_{d_1}, \mathcal{J}_{d_2}, \mathcal{J}_{d_3} - \sigma\frac{\partial u}{\partial t}\right). \tag{2.19}$$

Reemplazando (2.18) y (2.19) en (2.6), tenemos

$$\left(0, 0, -\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{1}{\mu}\frac{\partial u}{\partial x_1}\right) - \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{1}{\mu}\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)\right) = \left(\mathcal{J}_{d_1}, \mathcal{J}_{d_2}, \mathcal{J}_{d_3} - \sigma\frac{\partial u}{\partial t}\right).$$

En consecuencia $\mathcal{J}_{d_1} = \mathcal{J}_{d_2} = 0$ y si hacemos $\nu := \frac{1}{\mu}$ y $J := \mathcal{J}_{d_3}$ se tiene

$$\sigma\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\nu\frac{\partial u}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\nu\frac{\partial u}{\partial x_2}\right) + J \tag{2.20}$$

o equivalentemente

$$\sigma\frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}(\nu \nabla u) + J. \tag{2.21}$$

Observación 2.1. La reluctancia magnética es definida por:

$$\nu = \nu(\|\mathcal{B}\|) = \frac{1}{\mu(\|\mathcal{H}\|)}.$$

Además, por las leyes constitutivas y por (2.13) se tiene,

$$\|\mathcal{B}\| = \|\mu\mathcal{H}\| = \|\nabla u\|.$$

En consecuencia, obtenemos:

$$\nu = \nu\left(\|\nabla u\|\right).$$

Así, (2.21) puede ser escrita como

$$\sigma\frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}\left(\nu\left(\|\nabla u\|\right)\nabla u\right) + J.$$

El procedimiento anterior se puede realizar en orden inverso para deducir el siguiente teorema.

Teorema 2.2. *Supongamos que* $\mathcal{J}_d = (0,0,J)$ *y* $\rho = 0$*. Si* $u : \mathbb{R}^2 \times [0,T] \to \mathbb{R}$*, es solución de* (2.21)*, con* $u \in C^2(\Omega \times [0,T])$ *entonces*

$$\mathcal{E} = \left(0,0,-\frac{\partial u}{\partial t}\right), \quad \mathcal{H} = \left(\nu\frac{\partial u}{\partial x_1}, -\nu\frac{\partial u}{\partial x_2}, 0\right)$$

son solución de (2.6)-(2.7).

Observación 2.3. En los problemas de electromagnetismo generalmente se requiere determinar los campos eléctrico y magnético, mientras que la densidad de la fuente de corriente aplicada $\mathcal{J}_d$ y la densidad de carga eléctrica ρ son datos conocidos del problema. Las hipótesis de este teorema indican las condiciones que deben cumplir dichos datos para que a partir de solucionar la ecuación bidimensional (2.21), se pueda obtener una solución del modelo de corrientes inducidas tridimensional.

Demostración. En primer lugar notamos que si reemplazamos los valores de $\mathcal{H}$, $\mathcal{E}$, y $\mathcal{J}$ en la primera ecuación de (2.6), obtenemos (2.18) y (2.19). En consecuencia dado que u satisface (2.21) se sigue la primera ecuación de (2.6). Para la segunda ecuación de (2.6), basta observar que

$$\begin{aligned}\operatorname{div}\mathcal{E} &= \frac{\partial}{\partial x_3}\left(-\frac{\partial u}{\partial t}\right)\\ &= -\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial x_3}\right)\\ &= 0,\end{aligned}$$

puesto que u no depende de la componente x_3.

Veamos ahora la primera ecuación de (2.7). En efecto, puesto que $u \in C^2(\Omega \times [0,T])$ se tiene,

$$
\begin{aligned}
\mathbf{rot}\,\mathcal{E} + \frac{\partial\,(\mu\mathcal{H})}{\partial t} &= \mathbf{rot}\left(0, 0, -\frac{\partial u}{\partial t}\right) + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial x_2}, -\frac{\partial u}{\partial x_1}, 0\right) \\
&= \left(-\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right), \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right), 0\right) + \left(\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right), -\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right), 0\right) \\
&= \mathbf{0}.
\end{aligned}
$$

Finalmente,

$$
\begin{aligned}
\operatorname{div}(\mu\mathcal{H}) &= \operatorname{div}\left(\frac{\partial u}{\partial x_2}, -\frac{\partial u}{\partial x_1}, 0\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right) - \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right) \\
&= 0,
\end{aligned}
$$

de donde se obtiene la segunda ecuación de (2.7).

Por lo tanto, hemos mostrado el teorema. □

2.2. Problema modelo.

Ahora consideraremos la ecuación (2.21) en un dominio acotado $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$. Es decir, consideraremos el problema: Hallar $u : \Omega \times [0,T] \to \mathbb{R}$ tal que

$$
\sigma \frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}\,(\nu \nabla u) + J \qquad \text{en} \qquad \Omega \times [0,T]. \tag{2.22}
$$

2.2.1. Deducción de las ecuaciones fuertes.

Sea $R \subseteq \mathbb{R}^2$ el conjunto ocupado por los materiales conductores que intervienen en el problema y supondremos que $\overline{R} \subseteq \Omega$. Así, $S := \Omega \setminus \overline{R}$ representa al conjunto ocupado por lo materiales dieléctricos (no conductores). En la Figura 2.1 se muestra una posible distribución de la geometría del problema modelo. R representa la región ocupada por los materiales conductores y S la región ocupada por los materiales diélectricos. Además, $\Omega = R \cup \partial R \cup S$. $\boldsymbol{\eta}$ representa el vector normal unitario exterior a ∂R, mientras que $\boldsymbol{\eta}_S$ representa el vector normal unitario exterior a ∂S. Notamos que $\boldsymbol{\eta}_S = -\boldsymbol{\eta}$ en ∂R.

En consecuencia, la conductividad eléctrica satisface

$$
\sigma(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} \tilde{\sigma}(\boldsymbol{x}), & \text{si} \quad \boldsymbol{x} \in R, \\ \\ 0, & \text{si} \quad \boldsymbol{x} \in S. \end{cases}
$$

Por simplicidad, utilizaremos la misma notación para σ y $\tilde{\sigma}$, es decir

$$
\sigma(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} \sigma(\boldsymbol{x}), & \text{si} \quad \boldsymbol{x} \in R, \\ \\ 0, & \text{si} \quad \boldsymbol{x} \in S. \end{cases}
$$

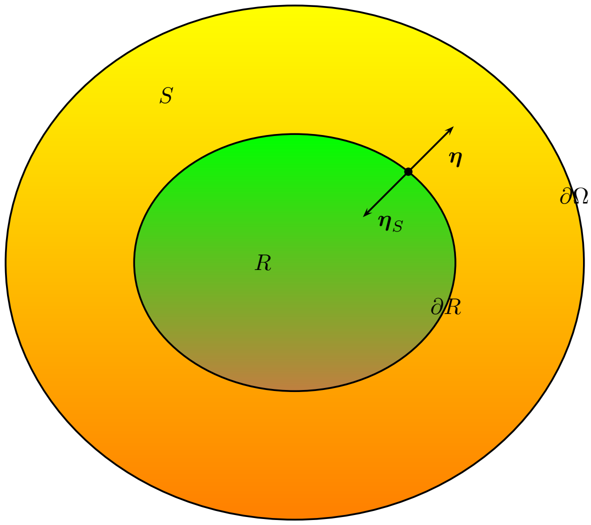

Figura 2.1: Representación geométrica del problema modelo.

Entonces la ecuación (2.22), se transforma en dos ecuaciones:

$$\sigma \frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}(\nu \nabla u) + J, \quad \text{en} \quad R \times (0, T), \tag{2.23}$$

$$0 = \operatorname{div}(\nu \nabla u) + J, \quad \text{en} \quad S \times (0, T). \tag{2.24}$$

Notamos que la primera ecuación es parabólica y la segunda elíptica, por lo que para la primera de estas se necesita una condición inicial,

$$u(\boldsymbol{x}, 0) = u_0(\boldsymbol{x}) \qquad \text{en} \quad R. \tag{2.25}$$

Además, puesto que trabajaremos en un dominio acotado Ω, el problema requiere de una condición de frontera. En nuestro caso supondremos,

$$u = 0 \qquad \text{en} \quad \partial\Omega \times [0, T]. \tag{2.26}$$

En los problemas de corrientes inducidas, generalmente se exige que la densidad de corriente aplicada $\mathcal{J}_d$ sea de cuadrado integrable, lo que implica que J sea de cuadrado integrable en todo Ω. En consecuencia, dado que (2.22) se debe cumplir en todo Ω, es razonable pensar que ∇u y $\operatorname{div}(\nu \nabla u)$ también son de cuadrado integrable en Ω y así, deben satisfacerse las siguiente condiciones de salto sobre la frontera $\Gamma := \partial R$ (ver Proposición 1.46):

$$[u]_R^S := u^+ - u^- = 0 \qquad \text{en} \quad \Gamma, \tag{2.27}$$

$$\left[\nu \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\eta}}\right] := \nu \nabla u^+ \cdot \boldsymbol{\eta} - \nu \nabla u^- \cdot \boldsymbol{\eta} = 0 \qquad \text{en} \quad \Gamma, \tag{2.28}$$

donde $u^+ := u|_{\overline{R}}$, $u^- := u|_{\overline{S}}$ y $\boldsymbol{\eta}$ es el vector unitario normal exterior a Γ. Las condiciones (2.27)–(2.28) son necesarias para la deducción de la formulación variacional del problema y por lo tanto se adicionarán a las ecuaciones (2.23)–(2.26), obteniendo el siguiente problema que consideraremos como nuestro problema modelo para el análisis.

Hallar $u : \Omega \times [0,T] \to \mathbb{R}$ que satisface:

$$\sigma \frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}(\nu \nabla u) + J \qquad \text{en} \qquad R \times (0,T), \tag{2.29}$$

$$u(\boldsymbol{x},0) = u_0(\boldsymbol{x}) \qquad \text{en} \qquad R, \tag{2.30}$$

$$0 = \operatorname{div}(\nu \nabla u) + J \qquad \text{en} \qquad S \times (0,T), \tag{2.31}$$

$$u = 0 \qquad \text{en} \qquad \partial\Omega \times [0,T], \tag{2.32}$$

$$[u]_R^S = \left[\nu \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\eta}}\right]_R^S = 0 \qquad \text{en} \qquad \Gamma = \partial R \tag{2.33}$$

2.2.2. Deducción de la formulación variacional.

Deduciremos ahora una formulación variacional para el problema (2.29)-(2.33). Para esto, multiplicamos por una función $v \in H_0^1(\Omega)$ a las ecuaciones (2.29),(2.31) y usaremos la fórmula de integración por partes (1.37) y las condiciones de salto (2.33). En efecto, para (2.29) tenemos,

$$\begin{aligned}
\int_R \sigma \frac{\partial u}{\partial t} v\, d\boldsymbol{x} &= \int_R \operatorname{div}(\nu \nabla u)\, v\, d\boldsymbol{x} + \int_R J v\, d\boldsymbol{x} \\
&= \sum_{i=1}^{2} \int_R \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\nu \frac{\partial u}{\partial x_i}\right) v\, d\boldsymbol{x} + \int_R J v\, d\boldsymbol{x} \\
&= \sum_{i=1}^{2} \left\{ -\int_R \nu \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}\, d\boldsymbol{x} + \int_{\partial R} \nu \frac{\partial u^+}{\partial x_i} v \eta_i\, ds \right\} + \int_R J v\, d\boldsymbol{x} \\
&= -\sum_{i=1}^{2} \int_R \nu \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}\, d\boldsymbol{x} + \sum_{i=1}^{2} \int_{\partial R} \nu \frac{\partial u^+}{\partial x_i} v \eta_i\, ds + \int_R J v\, d\boldsymbol{x} \\
&= -\int_R \nu \nabla u \cdot \nabla v\, d\boldsymbol{x} + \int_{\partial R} \nu \left(\frac{\partial u^+}{\partial x_1}\eta_1 + \frac{\partial u^+}{\partial x_2}\eta_2 \right) v ds + \int_R J v\, d\boldsymbol{x} \\
&= -\int_R \nu \nabla u \cdot \nabla v\, d\boldsymbol{x} + \int_\Gamma \nu \frac{\partial u^+}{\partial \boldsymbol{\eta}} v\, ds + \int_R J v\, d\boldsymbol{x}.
\end{aligned}$$

Así,

$$\int_R \sigma \frac{\partial u}{\partial t} v\, d\boldsymbol{x} = -\int_R \nu \nabla u \cdot \nabla v\, d\boldsymbol{x} + \int_\Gamma \nu \frac{\partial u^+}{\partial \boldsymbol{\eta}} v\, ds + \int_R J v\, d\boldsymbol{x} \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega). \tag{2.34}$$

Por otro lado, análogamente a como se demostró (2.34), de (2.31) tenemos que

$$0 = -\int_S \nu \nabla u \cdot \nabla v\, d\boldsymbol{x} + \int_{\partial S} \nu \frac{\partial u^-}{\partial \boldsymbol{\eta}_S} v\, ds + \int_S J v\, d\boldsymbol{x} \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega),$$

de donde

$$\int_{\partial S} \nu \frac{\partial u^-}{\partial \boldsymbol{\eta}_S} v\, ds = \int_S \nu \nabla u \cdot \nabla v\, d\boldsymbol{x} + -\int_S J v\, d\boldsymbol{x} \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega). \tag{2.35}$$

Además, puesto que $\partial S = \Gamma \cup \partial\Omega$ (ver Figura 2.1), se tiene entonces que

$$\begin{aligned}\int_{\partial S} \nu \frac{\partial u^-}{\partial \boldsymbol{\eta}_S} v\, ds &= \int_{\Gamma} \nu \frac{\partial u^-}{\partial \boldsymbol{\eta}_S} v\, ds + \int_{\partial\Omega} \nu \frac{\partial u^-}{\partial \boldsymbol{\eta}_S} v\, ds,\\ &= \int_{\Gamma} \nu \frac{\partial u^-}{\partial \boldsymbol{\eta}_S} v\, ds,\end{aligned}$$

donde $\boldsymbol{\eta}_S$ representa el vector normal exterior a S en Γ. Es decir $\boldsymbol{\eta} = -\boldsymbol{\eta}_S$. Así por la condición de salto (2.33) se tiene,

$$\int_{\Gamma} \nu \frac{\partial u^+}{\partial \boldsymbol{\eta}} v\, ds = \int_{\Gamma} \nu \frac{\partial u^-}{\partial \boldsymbol{\eta}} v\, ds = -\int_{\Gamma} \nu \frac{\partial u^-}{\partial \boldsymbol{\eta}_S} v\, ds.$$

Luego, reemplazando lo anterior en (2.35), se tiene

$$\int_{\Gamma} \nu \frac{\partial u^+}{\partial \boldsymbol{\eta}} v\, ds = -\int_{S} \nu \nabla u \cdot \nabla v\, d\boldsymbol{x} + \int_{S} Jv\, d\boldsymbol{x} \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Por lo tanto, sustituyendo la ecuación anterior en (2.34) tenemos para todo $v \in H_0^1(\Omega)$ que

$$\begin{aligned}\int_{R} \sigma \frac{\partial u}{\partial t} v\, d\boldsymbol{x} &= -\int_{R} \nu \nabla u \cdot \nabla v\, d\boldsymbol{x} - \int_{S} \nu \nabla u \cdot \nabla v\, d\boldsymbol{x} + \int_{S} Jv d\boldsymbol{x} + \int_{R} Jv\, d\boldsymbol{x}\\ &= -\int_{\Omega} \nu \nabla u \cdot \nabla v\, d\boldsymbol{x} + \int_{\Omega} Jv\, d\boldsymbol{x}.\end{aligned}$$

Así,

$$\int_{R} \sigma \frac{\partial u}{\partial t} v\, d\boldsymbol{x} + \int_{\Omega} \nu \nabla u \cdot \nabla v\, d\boldsymbol{x} = \int_{\Omega} Jv\, d\boldsymbol{x} \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Tenemos entonces

$$\left(\sigma \frac{\partial u}{\partial t}, v\right)_{L^2(R)} + a(u,v) = (J,v)_{L^2(\Omega)} \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega), \tag{2.36}$$

donde,

$$a(u,v) := \int_{\Omega} \nu \nabla u \cdot \nabla v\, d\boldsymbol{x} \qquad \forall u, v \in H_0^1(\Omega). \tag{2.37}$$

Por otro lado, como las funciones σ y v no dependen de la variable temporal t, entonces

$$\sigma \frac{\partial u}{\partial t} v = \frac{\partial}{\partial t}(\sigma u v).$$

Si suponemos además que la función u satisface las hipótesis del Teorema 1.23 y reemplazando lo anterior en la primera integral del lado izquierdo de (2.36) se tiene

$$\left(\sigma \frac{\partial u}{\partial t}, v\right)_{L^2(R)} = \int_{R} \sigma \frac{\partial u}{\partial t} v\, d\boldsymbol{x} = \int_{R} \frac{\partial}{\partial t}(\sigma u v)\, d\boldsymbol{x} = \frac{d}{dt} \int_{R} \sigma u v\, d\boldsymbol{x} = \frac{d}{dt}(\sigma u, v)_{L^2(R)}.$$

Con lo que (2.36) es equivalente a

$$\frac{d}{dt}(\sigma u, v)_{L^2(R)} + a(u,v) = (J,v)_{L^2(\Omega)} \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Así, a partir del razonamiento anterior se deduce que la solución del problema (2.29)-(2.33) es solución del problema variacional: Hallar $u : \Omega \times [0,T] \to \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\sigma u, v)_{L^2(R)} + a(u,v) = (J,v)_{L^2(\Omega)} \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega), \\ u(0) = u_0 \in L^2(R). \end{aligned} \tag{2.38}$$

2.3. Problema abstracto.

En esta sección plantearemos un problema abstracto, que permite abordar el problema (2.38) como un caso particular. Para ello asumimos las hipótesis necesarias para que dicho problema pueda plantearse adecuadamente, entre las cuales hacemos referencia al dominio Ω, y a los espacios funcionales con los que se piensa trabajar. Además se estudiaran dos formulaciones para el problema abstracto, las cuales resultan equivalentes. En primer lugar es necesario precisar las características generales de los espacios abstractos considerados.

2.3.1. Consideraciones sobre los espacios funcionales.

Asumiremos que se cumplen las condiciones dadas por la siguiente hipótesis.

Hipótesis 1.

Parte 1. Consideraremos dos espacios de Hilbert reales H_R y H_S, con productos escalares $(\cdot,\cdot)_R$ y $(\cdot,\cdot)_S$ respectivamente y supondremos que H_R es separable. Denotaremos por

$$\begin{aligned} |\cdot|_R &:= (\cdot,\cdot)_R^{1/2}, \\ |\cdot|_S &:= (\cdot,\cdot)_S^{1/2}, \end{aligned}$$

las normas inducidas por sus respectivos productos escalares.

Parte 2. Supondremos que $H := H_R \times H_S$ es un espacio de Hilbert, dotado de un producto interior $(\cdot,\cdot)$, cuya norma $|\cdot| := (\cdot,\cdot)^{1/2}$ es equivalente a $|\cdot|_R + |\cdot|_R$. Es decir, existen constantes positivas c_1, c_2, tales que,

$$c_1 |v| \leq |v_R|_R + |v_S|_S \leq c_2 |v| \qquad \forall v := [v_R, v_S] \in H. \tag{2.39}$$

En lo que sigue, se usará la letra c, (con, o sin subíndices) para denotar constantes, que no son necesariamente iguales.

Parte 3. Sea $V \subseteq H$ un espacio de Banach separable y reflexivo con norma $\|\cdot\|$. Consideraremos los siguientes subespacios:

$$\begin{aligned} V_R &:= \{v_R \in H_R | \, (\exists v_S \in H_S) \, ([v_R, v_S] \in V)\}, \\ V_S &:= \{v_S \in H_S | \, (\exists v_R \in H_R) \, ([v_R, v_S] \in V)\}, \\ \overset{\circ}{V}_R &:= \{v_R \in H_R | \; v = [v_R, \mathbf{0}] \in V\}, \\ \overset{\circ}{V}_S &:= \{v_S \in H_S | \; v = [\mathbf{0}, v_S] \in V\}. \end{aligned} \tag{2.40}$$

Parte 4. Supondremos que los subespacios definidos en (2.40) satisfacen las siguientes propiedades:

a) Existen espacios de Banach reflexivos B_R y B_S tales que $V_R \subseteq B_R \subseteq H_R$ y $V_S \subseteq B_S \subseteq H_S$. Las normas de B_R y B_S se denotarán respectivamente por $\|\cdot\|_R$, $\|\cdot\|_S$. Supondremos además que existen constantes positivas c_1, c_2, tales que,

$$c_1 \|v\| \leq \|v_R\|_R + \|v_S\|_S \leq c_2 \|v\| \qquad \forall v := [v_R, v_S] \in V. \tag{2.41}$$

b) Sea $\overline{V}_R$ la clausura de V_R respecto a la norma de B_R. Supondremos que $\overline{V}_R$ está incluido continuamente en H_R, es decir:

$$|w|_R \leq c\|w\|_R \qquad \forall w \in \overline{V}_R. \tag{2.42}$$

c) $\overset{\circ}{V}_R$ es denso en H_R.

Observación 2.4. Si $H_S = \emptyset$, entonces $H = H_R$, luego la Hipótesis (1) debe entenderse como sigue: existe un espacio de Banach V, que es reflexivo y separable, normado por $\|\cdot\|$, que es denso y está incluido continuamente en H, con H un espacio de Banach separable.

Los subíndices R y S usados para los espacios H_R y H_S definidos en la Hipótesis 1 tienen relación con los dominios R y S que aparecen en el problema (2.29)-(2.33) (ver Figura 2.1), como se demuestra en la siguiente proposición.

Proposición 2.5. *Sean $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ y $R \subseteq \mathbb{R}^2$ dominios Lipschitz, tales que $\overline{R} \subseteq \Omega$. Sea $S := \Omega \setminus \overline{R}$ y sea $\sigma \in L^\infty(R)$ con $\sigma \geq \sigma_0 > 0$. Si se seleccionan los espacios:*

$$\begin{array}{lll}
H := L^2(\Omega), & (u,v) := (u,v)_{L^2(\Omega)} & \forall u,v \in L^2(\Omega), \\[2ex]
H_R := L^2(R), & (u,v)_R := (\sigma u,v)_{L^2(R)} & \forall u,v \in L^2(R), \\[2ex]
H_S := L^2(S), & (u,v)_S := (u,v)_{L^2(S)} & \forall u,v \in L^2(S), \\[2ex]
V := H_0^1(\Omega), & \|u\| := \|u\|_{H^1(\Omega)} & \forall u \in H_0^1(\Omega), \\[2ex]
B_R := H^1(R), & \|u\|_R := \|u\|_{H^1(R)} & \forall u \in H^1(R), \\[2ex]
B_S := H^1(S), & \|u\|_S := \|u\|_{H^1(S)} & \forall u \in H^1(S),
\end{array}$$

*donde, las parejas ordenadas $u := [u_R, u_S] \in L^2(\Omega)$ son tales que $u_R := u|_R$ y $u_S := u|_S$, es decir, son la restricción de u a R y S respectivamente. Entonces los requerimientos de la **Hipótesis 1** se satisfacen, más aún se tiene que:*

$$V_R = H^1(R),\ V_S = H^1_{\partial\Omega}(S),\ \overline{V}_R = H^1(R),\ \overline{V}_S = H^1_{\partial\Omega}(S),\ \overset{\circ}{V}_R = H_0^1(R),\ \overset{\circ}{V}_S = H_0^1(S),$$

donde,

$$H^1_{\partial\Omega}(S) := \left\{u \in H^1(S) |\ \gamma(u)|_{\partial\Omega} = 0\right\}.$$

Demostración. La demostración se hará por partes.

Parte 1. En primer lugar, es bien conocido que $H_S := L^2(S)$ con su producto interior usual $(\cdot,\cdot) := (\cdot,\cdot)_{L^2(\Omega)}$ es un espacio de Hilbert.

Para la parte 1 resta mostrar que $H_R := L^2(R)$ con $(u,v)_R := (\sigma u, v)_{L^2(R)}$ para todos $u, v \in L^2(R)$ es un espacio de Hilbert, para esto debemos ver primero que $(\cdot,\cdot)_R$ define en realidad un producto interno. En efecto, para $u, v, w \in L^2(R)$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ se tiene:

i. *Simetría.*

$$(u,v)_R = (\sigma u, v)_{L^2(R)} = \int_R (\sigma u) v \, d\boldsymbol{x} = \int_R (\sigma v) u \, d\boldsymbol{x} = (v,u)_R.$$

ii. *Bilinealidad.*

$$(u+v, w)_R = (\sigma(u+v), w)_{L^2(R)} = (\sigma u, w)_{L^2(R)} + (\sigma v, w)_{L^2(R)} = (u,w)_R + (v,w)_R.$$

y

$$(\alpha u, v)_R = (\sigma(\alpha u), v)_{L^2(R)} = \alpha(\sigma u, v)_{L^2(R)} = \alpha(u,v)_R.$$

iii. *No negatividad.*

$$(u,u)_R = (\sigma u, u)_{L^2(R)} = \int_R \sigma u^2 d\boldsymbol{x} \geq 0.$$

Supongamos que $(u,u)_R = 0$, veamos que $u = 0$. En efecto, puesto que $\sigma > \sigma_0 > 0$, se sigue

$$0 = (u,u)_R = \int_R \sigma |u|^2 \, d\boldsymbol{x} \geq \sigma_0 \int_R |u|^2 \, d\boldsymbol{x},$$

de donde $\|u\|_{L^2(R)} = 0$ y así $u = 0$.

Así, por **(i)–(iv)**, $(\cdot,\cdot)_R$ es un producto interno.

Veamos ahora que $L^2(R)$ es un espacio de Hilbert con el producto interior $(\cdot,\cdot)_R$, para esto observemos que

$$|u|_R^2 = (\sigma u, u)_{L^2(R)} = \int_R \sigma u^2 d\boldsymbol{x} \leq \|\sigma\|_\infty \|u\|_{L^2(R)}^2 ,$$

y además

$$\|u\|_{L^2(R)}^2 = \int_R u^2 d\boldsymbol{x} = \frac{1}{\sigma_0} \int_R \sigma_0 u^2 d\boldsymbol{x} \leq \frac{1}{\sigma_0} \int_R \sigma u^2 d\boldsymbol{x} = \frac{1}{\sigma_0} |u|_R^2 .$$

Por lo tanto se tiene que $|\cdot|_R$ y $\|\cdot\|_{L^2(R)}$ son equivalentes, ya que

$$\|\sigma\|_\infty^{-1/2} |u|_R^2 \leq \|u\|_{L^2(R)} \leq \sigma_0^{-1/2} |u|_R .$$

Así, puesto que $L^2(R)$ es completo con $\|\cdot\|_{L^2(R)}$ entonces es también completo con $|\cdot|_R$. Luego $L^2(R)$ es Hilbert con $(\cdot,\cdot)_R$.

Por último, es bien conocido que $H_R := L^2(R)$ es un espacio de Hilbert separable.

Parte 2. Notamos que $H := L^2(\Omega)$ con su producto interior usual $(\cdot,\cdot) := (\cdot,\cdot)_{L^2(\Omega)}$ es un espacio de Hilbert.

Mostramos ahora, en que sentido se hace la identificación $L^2(\Omega) = L^2(R) \times L^2(S)$. Sea $\Psi : L^2(\Omega) \to L^2(R) \times L^2(S)$, definida por

$$\Psi(u) := [u|_R, u|_S].$$

Para $u \in L^2(\Omega)$ denotamos $u_R := u|_R$ y $u_S := u|_S$, así tenemos

$$\Psi(u) = [u_R, u_S].$$

La norma considerada en $L^2(R) \times L^2(S)$ es

$$\|[u,v]\|_{L^2(R)\times L^2(S)} := \left(\|u\|^2_{L^2(R)} + \|v\|^2_{L^2(S)}\right)^{1/2} \qquad \forall [u,v] \in L^2(R) \times L^2(S).$$

Afirmamos que Ψ es una isometría biyectiva entre $L^2(\Omega)$ y $L^2(R) \times L^2(S)$. En efecto, sean $u, v \in L^2(\Omega)$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces

i. *Linealidad.*

$$\begin{aligned}
\Psi(u + \alpha v) &= [(u + \alpha v)_R, (u + \alpha v)_S] \\
&= [u_R + \alpha v_R, u_S + \alpha v_S] \\
&= [u_R, u_S] + \alpha\,[v_R, v_S] \\
&= \Psi(u) + \alpha \Psi(v).
\end{aligned}$$

ii. *Acotación.*

$$\begin{aligned}
\|\Psi(u)\|_{L^2(R)\times L^2(S)} &= \left(\|u_R\|^2_{L^2(R)} + \|u_S\|^2_{L^2(S)}\right)^{1/2} \\
&= \left(\int_R |u_R|^2\, d\boldsymbol{x} + \int_S |u_S|^2\, d\boldsymbol{x}\right)^{1/2} \\
&= \left(\int_R |u|^2\, d\boldsymbol{x} + \int_S |u|^2\, d\boldsymbol{x}\right)^{1/2} \\
&= \left(\int_{R\cup S} |u|^2\, d\boldsymbol{x}\right)^{1/2} \\
&= \left(\int_\Omega |u|^2\, d\boldsymbol{x}\right)^{1/2} \\
&= \|u\|_{L^2(\Omega)}\,.
\end{aligned}$$

Así,

$$\|\Psi(u)\|_{L^2(R)\times L^2(S)} = \|u\|_{L^2(\Omega)}\,. \tag{2.43}$$

iii. *Biyectividad.* Por (2.43) se tiene que Ψ es inyectiva. En consecuencia, sólo resta mostrar que Ψ es sobreyectiva. Sea $(u,v) \in L^2(R) \times L^2(S)$, definimos $w : \Omega \to \mathbb{R}$ por

$$w(\boldsymbol{x}) := \begin{cases} u(\boldsymbol{x}), & \text{si} \quad \boldsymbol{x} \in R \\ \\ v(\boldsymbol{x}), & \text{si} \quad \boldsymbol{x} \in S \\ \\ \mathbf{0}, & \text{si} \quad \boldsymbol{x} \in \Gamma. \end{cases}$$

Entonces w es una función medible por ser $u, v, \mathbf{0}$ funciones medibles. Veamos ahora que $w \in L^2(\Omega)$.

$$\begin{aligned} \|w\|_{L^2(\Omega)} &= \left(\int_\Omega |w|^2 \, d\boldsymbol{x} \right)^{1/2} \\ &= \left(\int_R |u|^2 \, d\boldsymbol{x} + \int_S |v|^2 \, d\boldsymbol{x} + \int_\Gamma |\mathbf{0}|^2 \, d\boldsymbol{x} \right)^{1/2} \\ &< \infty. \end{aligned}$$

Luego, $w \in L^2(\Omega)$ y además

$$\Psi(w) = [w_R, w_S] = [u, v].$$

De donde, Ψ es biyectiva.

Por lo tanto, por (i), (ii) y (iii) tenemos que Ψ es una isometría biyectiva entre $L^2(\Omega)$ y $L^2(R) \times L^2(S)$ y es en este sentido en el que hacemos la identificación entre estos espacios.

Veamos ahora que la suma de las normas $|\cdot|_R + |\cdot|_S$ es equivalente con $|\cdot|$, es decir se tiene (2.39). En efecto, por una parte tenemos

$$\begin{aligned} |u|^2 &= \int_\Omega u^2 d\boldsymbol{x} \\ &= \int_R u^2 d\boldsymbol{x} + \int_S u^2 d\boldsymbol{x} \\ &= \frac{1}{\sigma_0} \int_R \sigma_0 u^2 d\boldsymbol{x} + |u_S|_S^2 \\ &\leq \frac{1}{\sigma_0} \int_R \sigma u^2 d\boldsymbol{x} + |u_S|_S^2 \\ &= \frac{1}{\sigma_0} |u_R|_R^2 + |u_S|_S^2 \\ &\leq c^2 \{ |u_R|_R^2 + |u_S|_S^2 \}, \quad c^2 = \text{máx}\{1, 1/\sigma_0\}. \end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} |u| &\leq c \left(|u_R|_R^2 + |u_S|_S^2 \right)^{1/2} \\ &\leq c \left(|u_R|_R + |u_S|_S \right). \end{aligned}$$

Así,

$$c^{-1}|u| \leq |u_R|_R + |u_S|_S.$$

Por otro lado

$$\begin{aligned}
|u_R|_R + |u_S|_S &= \left(\int_R \sigma u_R^2 \, d\boldsymbol{x}\right)^{1/2} + \left(\int_S u_S^2 \, d\boldsymbol{x}\right)^{1/2} \\
&\leq \|\sigma\|_\infty^{1/2} \left(\int_R u_R^2 \, d\boldsymbol{x}\right)^{1/2} + \left(\int_S u_S^2 \, d\boldsymbol{x}\right)^{1/2} \\
&\leq \|\sigma\|_\infty^{1/2} \left(\int_\Omega u^2 \, d\boldsymbol{x}\right)^{1/2} + \left(\int_\Omega u^2 \, d\boldsymbol{x}\right)^{1/2} \\
&= \left(\|\sigma\|_\infty^{1/2} + 1\right)|u| \\
&= c\,|u|.
\end{aligned}$$

En consecuencia se tiene que $|\cdot|_R + |\cdot|_S$ y $|\cdot|$ son equivalentes.

Parte 3. Claramente $V := H_0^1(\Omega) \subseteq L^2(\Omega) =: H$ y además $V := H_0^1(\Omega)$ es un espacio de Banach reflexivo y separable con la norma $\|\cdot\| := \|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$.

i. Veamos ahora que $V_R = H^1(R)$ y $V_S = H^1(S)$. En efecto, de acuerdo a la definición de V_R dada en la hipótesis 1, se tiene.

$$V_R := \left\{u_R \in L^2(R) \middle| \left(\exists u_S \in L^2(S)\right)\left(u := [u_R, u_S] \in H_0^1(\Omega)\right)\right\}.$$

En la definición anterior $u := [u_R, u_S] \in H_0^1(\Omega)$ significa que

$$u(\boldsymbol{x}) := \begin{cases} u_R(\boldsymbol{x}), & \text{si} \quad \boldsymbol{x} \in R \\ u_S(\boldsymbol{x}), & \text{si} \quad \boldsymbol{x} \in S, \end{cases}$$

es un elemento de $H_0^1(\Omega)$. Luego, si $u_R \in V_R$ entonces existe $u_S \in L^2(S)$ tal que $u = [u_R, u_S] \in H_0^1(\Omega)$, así por ser u_R la restricción de u a R entonces $u_R \in H^1(R)$. Por lo tanto, tenemos que

$$V_R \subseteq H^1(R).$$

Veamos ahora la otra inclusión. Sea $u_R \in H^1(R)$, mostremos que existe $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que $u|_R = u_R$.

Dado que $S = \Omega \setminus \overline{R}$ y $\partial S = \partial R \cup \partial\Omega$ con $\partial R \cap \partial\Omega = \emptyset$, ∂R y $\partial\Omega$ dominios Lipschitz, se tiene que S es un dominio Lipschitz, así puesto que $u_R \in H^1(R)$, entonces por el Teorema 1.40 tenemos $v := u_R|_{\partial R} \in H^{1/2}(\partial R)$. De igual forma, la función $g \equiv \mathbf{0}$ en $\partial\Omega$ es tal que $g \in H^{1/2}(\partial\Omega)$. Luego si definimos la función $f : \partial S \to \mathbb{R}$ por

$$f(\boldsymbol{x}) := \begin{cases} v(\boldsymbol{x}), & \text{si} \quad \boldsymbol{x} \in \partial R \\ \mathbf{0}, & \text{si} \quad \boldsymbol{x} \in \partial\Omega, \end{cases}$$

entonces, por el Lema 1.42, tenemos que $f \in H^{1/2}(\partial S)$ y así, por el Teorema 1.41 existe $u_S \in H^1(S)$ tal que $u_S|_{\partial S} = f$.

Definamos $u : \Omega \to \mathbb{R}$ por

$$u(\boldsymbol{x}) := \begin{cases} u_R(\boldsymbol{x}), & \text{si} \quad \boldsymbol{x} \in R \\ \\ u_S(\boldsymbol{x}), & \text{si} \quad \boldsymbol{x} \in S. \end{cases}$$

Mostremos que $u \in H_0^1(\Omega)$ y $u|_R = u_R$. En efecto, dado que $u_R \in H^1(R)$, $u_S \in H^1(S)$ y $u_R|_{\partial R} - u_S|_{\partial R} = \mathbf{0}$, entonces por la Proposición 1.46, tenemos que $u \in H^1(\Omega)$ con $u|_R = u_R$. Además $u|_{\partial\Omega} = \mathbf{0}$, de donde $u \in H_0^1(\Omega)$.

Por lo tanto hemos mostrado que $H^1(R) \subseteq V_R$, de donde tenemos

$$V_R = H^1(R).$$

Análogamente vemos que $V_S = H^1_{\partial\Omega}(S)$.

ii. Mostremos ahora que $\overset{\circ}{V}_R = H_0^1(R)$ y $\overset{\circ}{V}_S = H_0^1(S)$. En efecto,

$$\overset{\circ}{V}_R := \left\{ u_R \in L^2(R) | u = [u_R, \mathbf{0}] \in H_0^1(\Omega)) \right\}.$$

Si $u_R \in \overset{\circ}{V}_R$, entonces $u = [u_R, \mathbf{0}] \in H_0^1(\Omega)$ entonces u_R (la restricción de u a R) es un elemento de $H^1(R)$. Además como $u = [u_R, \mathbf{0}] \in H_0^1(\Omega)$ entonces $u_R|_{\partial R} - \mathbf{0}|_{\partial R} = \mathbf{0}$, de donde $u_R \in H_0^1(R)$. En consecuencia

$$\overset{\circ}{V}_R \subseteq H_0^1(R).$$

Para la otra inclusión, basta observar que dado $u_R \in H_0^1(R)$ se tiene $u_R|_{\partial R} = \mathbf{0}$ y así $u_R|_{\partial R} - \mathbf{0}|_{\partial R} = \mathbf{0}$. Por lo tanto, definiendo

$$u(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} u_R(\boldsymbol{x}), & \text{si} \quad \boldsymbol{x} \in R \\ \\ \mathbf{0}, & \text{si} \quad \boldsymbol{x} \in S, \end{cases}$$

se sigue de la Proposición 1.46 que $u \in H_0^1(\Omega)$. Además, $u|_R = u_R$ y así $u_R \in \overset{\circ}{V}_R$. Luego, $H_0^1(R) \subseteq \overset{\circ}{V}_R$. En conclusión,

$$\overset{\circ}{V}_R = H_0^1(R).$$

Análogamente se demuestra que $\overset{\circ}{V}_S = H_0^1(S)$.

Parte 4.

a) Es bien conocido que $B_R := H^1(R)$ y $B_S := H^1(S)$ con las normas $\|\cdot\|_S := \|\cdot\|_{H^1(R)}$ y $\|\cdot\|_S := \|\cdot\|_{H^1(S)}$ son espacios de Hilbert y por lo tanto son espacios de Banach reflexivos (ver [7, Teorema 4.6-6]) con

$$B_R := H^1(R) \subseteq L^2(R) =: H_R \qquad \text{y} \qquad B_S := H^1(S) \subseteq L^2(S) =: H_S.$$

Veamos ahora que la norma de $H_0^1(\Omega)$ ($\|\cdot\| = \|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$) es equivalente a $\|\cdot\|_R + \|\cdot\|_S$ es decir, se tiene (2.41). En efecto, por una parte tenemos que

$$\begin{aligned}\|u\| &= \|u\|_{L^2(\Omega)} + \|\partial_1 u\|_{L^2(\Omega)} + \|\partial_2 u\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \|u_R\|_{L^2(R)} + \|u_S\|_{L^2(S)} + \|\partial_1 u_R\|_{L^2(R)} + \|\partial_1 u_S\|_{L^2(S)} + \|\partial_2 u_R\|_{L^2(R)} + \|\partial_2 u_S\|_{L^2(S)} \\ &= \|u_R\|_R + \|u_S\|_S.\end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}&\|u_R\|_R + \|u_S\|_S \\ &= \|u_R\|_{H^1(R)} + \|u_S\|_{H^1(S)} \\ &= \left\{\|u_R\|_{L^2(R)} + \|\partial_1 u_R\|_{L^2(R)} + \|\partial_2 u_R\|_{L^2(R)}\right\} + \left\{\|u_S\|_{L^2(S)} + \|\partial_1 u_S\|_{L^2(S)} + \|\partial_2 u_S\|_{L^2(S)}\right\} \\ &= \left\{\|u\|_{L^2(R)} + \|\partial_1 u\|_{L^2(R)} + \|\partial_2 u\|_{L^2(R)}\right\} + \left\{\|u\|_{L^2(S)} + \|\partial_1 u\|_{L^2(S)} + \|\partial_2 u\|_{L^2(S)}\right\} \\ &\leq \left\{\|u\|_{L^2(\Omega)} + \|\partial_1 u\|_{L^2(\Omega)} + \|\partial_2 u\|_{L^2(\Omega)}\right\} + \left\{\|u\|_{L^2(\Omega)} + \|\partial_1 u\|_{L^2(\Omega)} + \|\partial_2 u\|_{L^2(\Omega)}\right\} \\ &= 2\left\{\|u\|_{L^2(\Omega)} + \|\partial_1 u\|_{L^2(\Omega)} + \|\partial_2 u\|_{L^2(\Omega)}\right\} \\ &= 2\,\|u\|_{H^1(\Omega)}.\end{aligned}$$

En consecuencia, hemos mostrado que $\|\cdot\|$ y $\|\cdot\|_R + \|\cdot\|_S$ son equivalentes.

b) Notamos que por ser $H^1(R)$ y $H^1_{\partial\Omega}(S)$ espacios cerrados respecto a sus normas se tiene

$$\overline{V}_R := \overline{H^1(R)}^{\|\cdot\|_R} = H^1(R) \qquad \text{y} \qquad \overline{V}_S := \overline{H^1_{\partial\Omega}(S)}^{\|\cdot\|_R} = H^1_{\partial\Omega}(S).$$

Mostremos ahora que $\overline{V}_R := H^1(R)$ está incluido continuamente en $L^2(R)$ es decir, se tiene (2.42). En efecto, sea $w \in \overline{V}_R = H^1(R)$, entonces

$$\begin{aligned}|w|_R &= \left(\int_R \sigma w^2 d\boldsymbol{x}\right)^{1/2} \\ &\leq \|\sigma\|_\infty^{1/2}\left(\int_R w^2 d\boldsymbol{x}\right)^{1/2} \\ &\leq \|\sigma\|_\infty^{1/2}\Big(\|w\|_{L^2(R)} + \|D_1 w\|_{L^2(R)} + \|D_2 w\|_{L^2(R)}\Big) \\ &= \|\sigma\|_\infty^{1/2}\|w\|_{H^1(R)}.\end{aligned}$$

c) Demostremos por último que $\overset{\circ}{V}_R = H^1_0(R)$ es denso en $H_R = L^2(R)$. En efecto, puesto que $C_0^\infty(R)$ es denso en $L^2(R)$, se tiene

$$\overline{C_0^\infty(R)}^{\|\cdot\|_{L^2(R)}} = L^2(R)$$

y puesto que $|\cdot|_R$ es equivalente a $\|\cdot\|_{L^2(R)}$ entonces

$$\overline{C_0^\infty(R)}^{|\cdot|_R} = L^2(R).$$

Como $C_0^\infty(R) \subseteq H_0^1(R) \subseteq L^2(R)$ se sigue

$$\overline{H_0^1(R)}^{|\cdot|_R} = L^2(R).$$

En consecuencia, $H_0^1(R)$ es denso en $L^2(R)$.

$\square$

Proposición 2.6. *Supongamos que las condiciones dadas en la* **Hipótesis 1** *se satisfacen, entonces*

$$\overline{V}_R \subseteq H_R \subseteq \overline{V}_R^* \quad y \quad \overset{\circ}{V}_R \subseteq H_R \subseteq \overset{\circ}{V}{}_R^* \tag{2.44}$$

son ternas de evolución.

Demostración. Supongamos que se satisface la hipótesis 1. Para mostrar (2.44), debemos mostrar que se satisfacen las condiciones de la definición de terna de evolución, (ver Definición 1.64).

Mostremos primero que $\overline{V}_R \subseteq H_R \subseteq \overline{V}_R^*$ es una terna de evolución.

i) Por la parte 4 de la hipótesis 1, $\overline{V}_R$ es la adherencia de V_R con respecto a la norma del espacio de Banach B_R, entonces $\overline{V}_R$ también es un espacio de Banach por ser un subespacio cerrado.

   Mostremos ahora que $\overline{V}_R$ es separable. En efecto, por la parte 2 de la hipótesis 1, se tiene que $V \subseteq H$ con norma $\|\cdot\|$ es un espacio de Banach separable, así existe un conjunto numerable $X \subseteq V$ tal que $\overline{X}^{\|\cdot\|} = V$. Definimos

$$X_R := \{u_R \in V_R | (\exists u_S \in V_S)(u := [u_R, u_S] \in X)\}.$$

   Por la forma en cómo se definio X_R, tenemos que este es numerable y además $X_R \subseteq V_R$, de donde $X_R \subseteq \overline{V}_R$. Mostremos que $\overline{X_R}^{\|\cdot\|_R} = \overline{V}_R$.

   Por una parte, dado que $\overline{V}_R$ es la adherencia de V_R, entonces dados $u_R \in \overline{V}_R$ y $\varepsilon > 0$, existe $u_R^* \in V_R$ tal que

$$\|u_R - u_R^*\|_R < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.45}$$

   Por otro lado, como $u_R^* \in V_R$ entonces existe $u_S^* \in V_S$ tal que $u^* := [u_R^*, u_S^*] \in V$. Así, para este u^* existe $v := [v_R, v_S] \in X$ tal que

$$\|u^* - v\| < \frac{\varepsilon}{2c_2},$$

   donde c_2 satisface (2.41). Luego, de (2.41) tenemos que,

$$\begin{aligned} \|u_R^* - v_R\|_R &\leq \|u_R^* - v_R\|_R + \|u_S^* - v_S\|_S \\ &\leq c_2 \|u^* - v\| \\ &< \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned} \tag{2.46}$$

En consecuencia, de (2.45) y (2.46) se tiene

$$\begin{aligned}\|u_R - v_R\|_R &= \|(u_R - u_R^*) + (u_R^* - v_R)\|_R \\ &\leq \|u_R - u_R^*\|_R + \|u_R^* - v_R\|_R \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon.\end{aligned}$$

Así, hemos mostrado que dados $u_R \in \overline{V}_R$ y $\varepsilon > 0$ existe $v_R \in X_R$ tal que

$$\|u_R - v_R\|_R < \varepsilon,$$

es decir, X_R es denso en $\overline{V}_R$. Por lo tanto $\overline{V}_R$ es separable.

Por otro lado, como $\overline{V}_R$ es un subespacio cerrado del espacio de Banach reflexivo B_R, entonces por la Proposición 1.8, $\overline{V}_R$ es también un espacio de Banach reflexivo.

ii) Por la parte 1 de la hipótesis 1, H_R es un espacio de Hilbert separable.

iii) Por la parte 4 de la hipótesis 1, la inclusión $\overline{V}_R \subseteq H_R$ es continua, además notemos que

$$\overset{\circ}{V}_R \subseteq V_R \subseteq \overline{V}_R \subseteq B_R \subseteq H_R,$$

y por hipótesis $\overset{\circ}{V}_R$ es denso en H_R.

Por lo tanto $\overline{V}_R$ es denso en H_R.

Luego, por (i), (ii) y (iii) hemos mostrado que las condiciones de la definición 1.64 se satisfacen para $\overline{V}_R$ y H_R. Por lo tanto $\overline{V}_R \subseteq H_R \subseteq \overline{V}_R^*$ es una terna de evolución.

Veamos ahora que $\overset{\circ}{V}_R \subseteq H_R \subseteq \overset{\circ}{V}{}_R^*$ es una terna de evolución.

i*) Mostremos primero que $\overset{\circ}{V}_R$ es un espacio de Banach con la norma inducida por el espacio de Banach B_R.

Sea $\{u_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \overset{\circ}{V}_R$ una sucesión de Cauchy, puesto que $\overset{\circ}{V}_R \subseteq B_R$ y B_R es un espacio de Banach, existe $u \in B_R$ tal que

$$\|u_n - u\|_R \to 0, \qquad n \to \infty.$$

Debemos mostrar que $u \in \overset{\circ}{V}_R$. En efecto, sean $u^* := [u, \mathbf{0}]$ y $\{u_n^*\}_{n=1}^{\infty} \subseteq V$ con $u_n^* := [u_n, \mathbf{0}]$ para $n \in \mathbb{Z}^+$. Veamos que $u_n^* \to u^*$ cuando $n \to \infty$ en V. Por (2.41) tenemos que

$$\|u_n^* - u^*\| \leq \frac{1}{c_1} \|u_n - u\|_R .$$

Por lo tanto $u_n^* \to u^*$, $n \to \infty$ en V. Así, hemos mostrado que $u_n \to u$, $n \to \infty$ en $\overset{\circ}{V}_R$, por lo que $\overset{\circ}{V}_R$ es un espacio de Banach.

Ahora, análogamente a como se demostró que $\overline{V}_R$ era un espacio de Banach separable en (i), se demuestra que $\overset{\circ}{V}_R$ es un espacio de Banach separable, y como $\overset{\circ}{V}_R$ es un subespacio cerrado del espacio de Banach reflexivo B_R, entonces por la Proposición 1.8, se tiene que $\overset{\circ}{V}_R$ es también un espacio de Banach reflexivo.

ii*) Por la parte 1 de la hipótesis 1, H_R es un espacio de Hilbert separable.

iii*) Veamos por último que la inclusión $\overset{\circ}{V}_R \subseteq H_R$ es continua y que $\overset{\circ}{V}_R$ es denso en H_R. En efecto, ya que $\overset{\circ}{V}_R \subseteq \overline{V}_R$ y por (2.42), se tiene que

$$|u|_R \leq \|u\|_R \qquad \forall u \in \overset{\circ}{V}_R,$$

así tenemos que la inclusión $\overset{\circ}{V}_R \subseteq \overline{V}$ es continua.

Por último, por la parte 4 de la hipótesis 1, tenemos que $\overset{\circ}{V}_R$ es denso en H_R.

Por lo tanto, por (i*), (ii*) y (iii*) tenemos que $\overset{\circ}{V}_R \subseteq H_R \subseteq \overset{\circ}{V}{}_R^*$ es una terna de evolución. □

Por otro lado, dado que $V \subseteq H := H_R \times H_S$, si $u \in L^p(0,T;V)$ entonces para todo $t \in [0,T]$ se tiene

$$u(t) = [u_R(t), u_S(t)] \in V \subseteq H_R \times H_S.$$

Además, de acuerdo a la definición de V_R y V_S, se tiene que para todo $t \in [0,T]$:

$$u_R(t) \in V_R \subseteq \overline{V}_R, \quad u_S(t) \in V_S \subseteq \overline{V}_S.$$

Más aún, en virtud de la equivalencia entre las normas $\|\cdot\|$ y $\|\cdot\|_R + \|\cdot\|_S$ se sigue

$$\int_0^T \|u_R(t)\|_R^p \, dt \leq C \int_0^T \|u(t)\|^p \, dt < \infty,$$

de donde $u_R \in L^p(0,T;\overline{V}_R)$. Así, puesto que $\overline{V}_R \subseteq H_R \subseteq \overline{V}_R^*$ es una terna de evolución, de acuerdo a la Proposición 1.69 bajo ciertas condiciones se puede tener que $u'_R \in L^q(0,T;\overline{V}_R^*)$. Luego, de lo anterior tenemos que tiene sentido considerar el espacio definido a continuación.

Definición 2.7. Definimos el espacio W_R como:

$$W_R := \left\{ u \in L^p(0,T;V) | \; u'_R \in L^q(0,T;\overline{V}_R^*) \right\},$$

y definimos $\|\cdot\|_{W_R} : W_R \to \mathbb{R}$ por

$$\|u\|_{W_R} := \|u\|_{L^p(0,T;V)} + \|u'_R\|_{L^q(0,T;\overline{V}_R^*)} \qquad \forall u \in W_R.$$

Proposición 2.8. *La función $\|\cdot\|_{W_R} : W_R \to \mathbb{R}$ dada en la definición anterior es una norma en W_R. Además, W_R con la norma $\|\cdot\|_{W_R}$ es un espacio de Banach.*

Demostración. Mostremos primero que $\|\cdot\|_{W_R}$ es una norma en W_R. En efecto, dados $u, v \in W_R$ y $\alpha \in \mathbb{R}$,

i. *No negatividad.*
$$\|u\|_{W_R} = \|u\|_{L^p(0,T;V)} + \|u'_R\|_{L^q(0,T;\overline{V}^*_R)} \geq 0.$$
Supongamos ahora que $\|u\|_{W_R} = 0$, mostremos que $u = 0$. En efecto, puesto que $\|\cdot\|_{L^p(0,T;V)}$ es una norma en $L^p(0,T;V)$ y
$$\|u\|_{L^p(0,T;V)} \leq \|u\|_{W_R} \qquad \forall u \in W_R$$
entonces $\|u\|_{W_R} = 0$ implica $\|u\|_{L^p(0,T;V)} = 0$ de donde $u = 0$.

ii. *Homogeneidad.* Dado que $\|\cdot\|_{L^p(0,T;V)}$ y $\|\cdot\|_{L^q(0,T;\overline{V}^*_R)}$ son normas en $L^p(0,T;V)$ y $L^q(0,T;\overline{V}^*_R)$ respectivamente, entonces
$$\begin{aligned}\|\alpha u\|_{W_R} &= \|\alpha u\|_{L^p(0,T;V)} + \|\alpha u'_R\|_{L^q(0,T;\overline{V}^*_R)}\\ &= |\alpha|\,\|u\|_{L^p(0,T;V)} + |\alpha|\,\|u'_R\|_{L^q(0,T;\overline{V}^*_R)}\\ &= |\alpha|\left(\|u\|_{L^p(0,T;V)} + \|u'_R\|_{L^q(0,T;\overline{V}^*_R)}\right)\\ &= |\alpha|\,\|u\|_{W_R}.\end{aligned}$$

iii. *Desigualdad triangular.* Nuevamente, como $\|\cdot\|_{L^p(0,T;V)}$ y $\|\cdot\|_{L^q(0,T;\overline{V}^*_R)}$ son normas en $L^p(0,T;V)$ y $L^q(0,T;\overline{V}^*_R)$ respectivamente, entonces
$$\begin{aligned}\|u+v\|_{W_R} &= \|u+v\|_{L^p(0,T;V)} + \|u'_R + v'_R\|_{L^q(0,T;\overline{V}^*_R)}\\ &\leq \|u\|_{L^p(0,T;V)} + \|v\|_{L^p(0,T;V)} + \|u'_R\|_{L^q(0,T;\overline{V}^*_R)} + \|v'_R\|_{L^q(0,T;\overline{V}^*_R)}\\ &= \|u\|_{L^p(0,T;V)} + \|u'_R\|_{L^q(0,T;\overline{V}^*_R)} + \|v\|_{L^p(0,T;V)} + \|v'_R\|_{L^q(0,T;\overline{V}^*_R)}\\ &= \|u\|_{W_R} + \|v\|_{W_R}.\end{aligned}$$

Por lo tanto, por (i)–(iii) $\|\cdot\|_{W_R}$ es una norma en W_R.

Veamos ahora que $\left(W_R, \|\cdot\|_{W_R}\right)$ es un espacio de Banach.

Sea $\{u_n\}$ una sucesión de Cauchy en W_R, entonces para todo $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{Z}^+$, tales que si $n, m \geq N$ entonces
$$\|u_n - u_m\|_{W_R} = \|u_n - u_m\|_{L^p(0,T;V)} + \left\|u'_{R,n} - u'_{R,m}\right\|_{L^q(0,T;\overline{V}^*_R)} < \varepsilon.$$

Con lo cual $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ y $\{u'_{R,n}\}_{n=1}^\infty$ son sucesiones de Cauchy en $L^p(0,T;V)$ y $L^q(0,T;\overline{V}^*_R)$ respectivamente. Así existen $u \in L^p(0,T;V)$ y $v \in L^q(0,T;\overline{V}^*_R)$ tales que
$$\begin{aligned} u_n &\to u \qquad \text{en } L^p(0,T;V),\\ u'_{R,n} &\to v \qquad \text{en } L^q(0,T;\overline{V}^*_R).\end{aligned} \tag{2.47}$$

Además de (2.41) se sigue que
$$\|u_R\|_R \leq \|u_R\|_R + \|u_S\|_S \leq c\,\|u\| \qquad \forall u = [u_R, u_S] \in V,$$

de donde $\|u_R\|^p \leq c\,\|u\|^p$ para todo $u := [u_R, u_S] \in V$. Así

$$\int_0^T \|u_R\|_R^p\,dt \leq c\int_0^T \|u\|^p\,dt.$$

Luego, de lo anterior y por (2.47) se tiene

$$\int_0^T \|u_{R,n} - u_R\|_R^p\,dt \leq c\int_0^T \|u_n - u\|^p\,dt \to 0, \qquad n \to \infty.$$

Así, la sucesión $\{u_{R,n}\}_{n=1}^{\infty} \subseteq L^p(0,T;\overline{V}_R)$ converge a $u_R \in L^p(0,T;\overline{V}_R)$.

Además la inclusión $\overline{V}_R \subseteq \overline{V}_R^*$ es continua. En efecto, por ser $\overline{V}_R \subseteq H_R \subseteq \overline{V}_R^*$ una terna de evolución, las inclusiones $\overline{V}_R \subseteq H_R$ y $H_R \subseteq \overline{V}_R^*$ son continuas, por lo que existen constantes positivas c_1, c_2 tales que

$$|u|_R \leq c_1\,\|u\|_R \qquad \forall u \in \overline{V}_R$$

y

$$\|u\|_{\overline{V}_R^*} \leq c_2\,|u|_R \qquad \forall u \in H_R,$$

de donde

$$\|u\|_{\overline{V}_R^*} \leq c\,\|u\|_R \qquad \forall u \in \overline{V}_R.$$

Así, al inclusión $\overline{V}_R \subseteq \overline{V}_R^*$ es continua. Luego, por la Proposición 1.68, se tiene que $v = u_R'$. Por lo tanto se tiene que $u \in W_R$ y

$$\begin{aligned} u_n \to u \qquad &\text{en} \qquad L^p(0,T;V), \\ u_{R,n}' \to u_R' \qquad &\text{en} \qquad L^q(0,T;\overline{V}_R^*). \end{aligned}$$

En consecuencia, $u_n \to u$ en W_R cuando $n \to \infty$. □

2.3.2. Problemas variacionales abstractos.

En esta subsección seguimos conservando las notaciones y suponiendo las consideraciones dadas en la subsección anterior, en particular consideramos que la Hipótesis 1 se verifica. Formularemos dos problemas variacionales abstractos equivalentes, inspirados en la formulación variacional del problema modelo introducido en la Sección 2.2. El primero de los problemas variacionales a considerar tiene una semejanza directa con el problema variacional (2.38).

Problema P: Dados $a : V \times V \to \mathbb{R}$, $f \in L^q(0,T;V^*)$ y $u_0 \in H_R$ encontrar $u \in W_R$ tal que para todo $v \in V$:

$$\frac{d}{dt}(u_R, v_R) + a(u,v) = \langle f, v\rangle \qquad \text{en} \qquad \mathcal{D}'(0,T) \tag{2.48}$$

$$u_R(0) = u_0 \in H_R. \tag{2.49}$$

Observación 2.9. Si $H = H_R$, entonces el problema **P** se debe entender así: Dados $f \in L^q(0,T;V^*)$ y $u_0 \in H$, encontrar

$$u \in W = \{u \in L^p(0,T;V) |\; u' \in L^q(0,T;V^*)\},$$

tal que para todo $v \in V$:

$$\frac{d}{dt}(u,v) + a(u,v) = \langle f, v\rangle \qquad \text{en} \qquad \mathcal{D}'(0,T)$$
$$u(0) = u_0 \in H.$$

Este problema corresponde a la formulación variacional de un problema parabólico clásico (ver Zeidler, Capítulo 23). En consecuencia, el **Problema P** corresponde a una generalización de los problemas parabólicos clásicos.

Problema P′: Dados $u_0 \in H_R$, y

$$\begin{aligned} &A^R : \overline{V}_R \to \overline{V}_R^*, && A^S : \overline{V}_S \to \overline{V}_S^*, \\ &f^R \in L^q(0,T;\overline{V}_R^*), && f^S \in L^q(0,T;\overline{V}_S^*), \end{aligned} \tag{2.50}$$

encontrar $u \in W_R$, tal que

$$\frac{du_R}{dt} + A^R(u_R) = f^R \qquad \text{en} \qquad L^q(0,T;\overline{V}_R^*), \qquad u_R(0) = u_0, \tag{2.51}$$

$$A^S(u_S) = f^S \qquad \text{en} \qquad L^q(0,T;\overline{V}_S^*). \tag{2.52}$$

Observación 2.10. Si $H = H_R$, entonces denotamos A^R por A y la formulación débil del problema se lee:

Dados $A : V \to V^*$, $f \in L^q(0,T;V^*)$ y $u_0 \in H$, encontrar

$$u \in W = \{u \in L^p(0,T;V) |\; u' \in L^q(0,T;V^*)\},$$

tal que

$$\frac{du}{dt} + A(u) = f, \qquad \text{en} \qquad L^q(0,T;V^*),$$
$$u(0) = u_0.$$

Observación 2.11. De $u \in W_R$ se sigue

$$u_R \in \{w \in L^p(0,T;\overline{V}_R) |\; w' \in L^q(0,T;\overline{V}_R^*)\}.$$

así, por la Proposición 1.74, $u_R \in C([0,T];H_R)$ y la condición inicial $u_R(0) = u_0$ se hace en este sentido.

De ahora en adelante, consideraremos los productos de dualidad

$$\langle \cdot,\cdot\rangle : V^* \times V \to \mathbb{R}, \quad \langle \cdot,\cdot\rangle_R : \overline{V}_R^* \times \overline{V}_R \to \mathbb{R}, \quad \langle \cdot,\cdot\rangle_S : \overline{V}_S^* \times \overline{V}_S \to \mathbb{R}.$$

Por otro lado, de la Proposición 2.6 se tiene que

$$\overline{V}_R \subseteq H_R \subseteq \overline{V}_R^*, \qquad \overset{\circ}{V}_R \subseteq H_R \subseteq \overset{\circ}{V}{}_R^*$$

son ternas de evolución. Luego, por la Proposición 1.65, se tiene que $H_R \subseteq \overline{V}_R^*$ a través de la identificación

$$\langle h, v\rangle_R = (h,v)_R \qquad \forall h \in H_R \quad \forall v \in \overline{V}_R.$$

Teorema 2.12. *Supongamos que las condiciones de la* **Hipótesis 1** *se satisfacen. Sean* A^R, A^S, f^R, f^S *como en el Problema* $\mathbf{P}'$. *Si* $u \in W_R$ *es solución del problema* $\mathbf{P}'$ *con* $a : V \times V \to \mathbb{R}$, *y* $f : V \to \mathbb{R}$ *definidas por*

$$a(u,v) := \left\langle A^R(u_R), v_R \right\rangle_R + \left\langle A^S(u_S), v_S \right\rangle_S \qquad \forall v := [v_R, v_S] \in V, \tag{2.53}$$

$$\langle f, v \rangle := \left\langle f^R, v_R \right\rangle_S + \left\langle f^S, v_S \right\rangle_S \qquad \forall v := [v_R, v_S] \in V. \tag{2.54}$$

Entonces, u *es solución del Problema* $\mathbf{P}$.

Reciprocamente, si $u \in W_R$ *es solución del Problema* $\mathbf{P}$, *con* $a : V \times V \to \mathbb{R}$ *y* $f : V \to \mathbb{R}$ *son definidos por* (2.53) *y* (2.54) *respectivamente, y además* A^R, A^S *satisfacen*

$$\left\| A^R(u) \right\|_{\overline{V}_R^*} \leq c \left\| u \right\|_R^{p-1} \qquad \forall u \in \overline{V}_R, \tag{2.55}$$

$$\left\| A^S(u) \right\|_{\overline{V}_S^*} \leq c \left\| u \right\|_R^{p-1} \qquad \forall u \in \overline{V}_S. \tag{2.56}$$

Entonces, u *es solución del Problema* $\mathbf{P}'$.

Demostración. Sea u solución del problema $\mathbf{P}'$, entonces $u \in W_R$ y además $u_R(0) = u_0$.

En primer lugar, notamos que por (2.50), $f^R \in L^q(0,T;\overline{V}_R^*)$ y $f^S \in L^q(0,T;\overline{V}_S^*)$. Mostremos que $f : V \to \mathbb{R}$ es un elemento de $L^q(0,T;V^*)$. En efecto, veamos primero que $f(t) \in V^*$ para todo $t \in [0,T]$.

i. *Linealidad.* Sean $u, v \in V$ con $u := [u_R, v_R]$, $v := [v_R, v_S]$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces

$$\begin{aligned}
\langle f(t), u + \alpha v \rangle &= \left\langle f^R(t), u_R + \alpha v_R \right\rangle_R + \left\langle f^S(t), u_S + \alpha v_S \right\rangle \\
&= \left\langle f^R(t), u_R \right\rangle_R + \alpha \left\langle f^R(t), v_R \right\rangle_R + \left\langle f^S(t), u_S \right\rangle_R + \alpha \left\langle f^S(t), v_S \right\rangle \\
&= \left\langle f^R(t), u_R \right\rangle_R + \left\langle f^S(t), u_S \right\rangle_R + \alpha \left\{ \left\langle f^R(t), v_R \right\rangle_R + \left\langle f^S(t), v_S \right\rangle \right\} \\
&= \langle f(t), u \rangle + \alpha \langle f(t), v \rangle .
\end{aligned}$$

ii. *Acotación.* De (2.41) se sigue $\|v_R\|_R + \|v_S\|_S \leq C \|v\|$, luego dado $v \in V$ cualquiera tenemos

$$\begin{aligned}
|\langle f(t), v \rangle| &= \left| \left\langle f^R(t), v_R \right\rangle_R + \left\langle f^S(t), v_S \right\rangle_S \right| \\
&\leq \left| \left\langle f^R(t), v_R \right\rangle_R \right| + \left| \left\langle f^S(t), v_S \right\rangle_S \right| \\
&\leq \left\| f^R(t) \right\|_{\overline{V}_R^*} \|v_R\|_R + \left\| f^S(t) \right\|_{\overline{V}_S^*} \|v_S\|_S \\
&\leq \left\| f^R(t) \right\|_{\overline{V}_R^*} (\|v_R\|_R + \|v_S\|_S) + \left\| f^S(t) \right\|_{\overline{V}_S^*} (\|v_R\|_R + \|v_S\|_S) \\
&\leq C \left(\left\| f^R(t) \right\|_{\overline{V}_R^*} + \left\| f^S(t) \right\|_{\overline{V}_S^*} \right) \|v\| .
\end{aligned}$$

Por lo tanto, por (i)–(ii), $f(t) \in V^*$ para todo $t \in [0,T]$ y

$$\begin{aligned}
\|f(t)\|_{V^*}^q &= \sup_{\substack{v \in V \\ v \neq 0}} \frac{|\langle f(t), v \rangle|}{\|v\|} \\
&\leq C \left(\left\| f^R(t) \right\|_{\overline{V}_R^*} + \left\| f^S(t) \right\|_{\overline{V}_S^*} \right)^q \\
&\leq 2^q C \left(\left\| f^R(t) \right\|_{\overline{V}_R^*}^q + \left\| f^S(t) \right\|_{\overline{V}_S^*}^q \right).
\end{aligned}$$

En consecuencia, $f \in L^q(0,T;V^*)$.

Por otro lado, de (2.51) y (2.52) se tiene

$$\begin{aligned} \frac{du_R}{dt}(t) + A^R(u_R(t)) - f^R(t) &= \mathbf{0} \qquad \text{c.t.p} \quad t \in [0,T], \quad \text{en} \quad \overline{V}_R^*, \\ A^S(u_S(t)) - f^S(t) &= \mathbf{0} \qquad \text{c.t.p} \quad t \in [0,T], \quad \text{en} \quad \overline{V}_S^*. \end{aligned}$$

Luego, para todo $\varphi \in C_0^\infty(0,T)$ se tiene

$$\int_0^T \left\{ \frac{du_R}{dt}(t) + A^R(u_R(t)) - f^R(t) \right\} \varphi(t)\, dt = \mathbf{0} \qquad \text{en} \qquad \overline{V}_R^*$$

y

$$\int_0^T \left\{ A^S(u_S(t)) - f^S(t) \right\} \varphi(t)\, dt = \mathbf{0} \qquad \text{en} \qquad \overline{V}_S^*.$$

Así, para todo $v := [v_R, v_S] \in V$ se tiene

$$\left\langle \int_0^T \left\{ \frac{du_R}{dt} + A^R(u_R) - f^R \right\} \varphi\, dt, v_R \right\rangle_R + \left\langle \int_0^T \left\{ A^S(u_S) - f^S \right\} \varphi\, dt, v_S \right\rangle_S = 0,$$

entonces, por la Proposición 1.61 se tiene que lo anterior es equivalente a

$$\int_0^T \left\langle \left\{ \frac{du_R}{dt} + A^R(u_R) - f^R \right\} \varphi, v_R \right\rangle_R dt + \int_0^T \left\langle \left\{ A^S(u_S) - f^S \right\} \varphi, v_S \right\rangle_S dt = 0,$$

de donde

$$\begin{aligned} \int_0^T \left\langle \frac{du_R}{dt}, v_R \right\rangle_R \varphi\, dt + \int_0^T \left\{ \left\langle A^R(u_R), v_R \right\rangle_R + \left\langle A^S(u_S), v_S \right\rangle_S \right\} \varphi\, dt \\ = \int_0^T \left\{ \left\langle f^R, v_R \right\rangle_R + \left\langle f^S, v_S \right\rangle_S \right\} \varphi\, dt, \end{aligned}$$

pero por (2.53) y (2.54), lo anterior es equivalente a

$$\int_0^T \left\{ \left\langle \frac{du_R}{dt}, v_R \right\rangle_R + a(u,v) \right\} \varphi\, dt = \int_0^T \langle f, v \rangle\, \varphi\, dt \qquad \forall \varphi \in C_0^\infty(0,T).$$

Luego, hemos mostrado que para todo $v \in V$, el elemento $u \in W_R$ es solución de

$$\left\langle \frac{du_R}{dt}, v_R \right\rangle_R + a(u,v) = \langle f, v \rangle \qquad \text{en} \qquad \mathcal{D}'(0,T).$$

Por lo tanto, por la Proposición 1.69 tenemos

$$\frac{d}{dt}\left(u_R, v_R\right)_R + a(u,v) = \langle f, v \rangle \qquad \text{en} \qquad \mathcal{D}'(0,T).$$

Así, u es solución del problema $\mathbf{P}$.

Ahora, sea u una solución del problema $\mathbf{P}$, entonces se tiene $u \in W_R$ y $u_R(0) = u_0$. Sea $w \in \overset{\circ}{V}_R$. Así $v := [w, 0] \in V$, y por lo tanto, usando (2.53) y (2.54), de (2.48) se sigue

$$\frac{d}{dt}(u_R, w)_R + \left\langle A^R(u_R), w \right\rangle_R = \left\langle f^R, w \right\rangle_R \qquad \forall w \in \overset{\circ}{V}_R \, .$$

Así, para todo $w \in \overset{\circ}{V}_R$ se tiene

$$\frac{d}{dt}(u_R, w)_R = \left\langle f^R - A^R(u_R), w \right\rangle_R \qquad \text{en} \qquad \mathcal{D}'(0, T).$$

Ahora, para cada $w \in \overset{\circ}{V}_R$ definimos en $[0, T]$ las funciones

$$G(t) := (u_R(t), w)_R, \qquad g(t) := \left\langle f^R(t) - A^R(u_R(t)), w \right\rangle_R,$$

puesto que $u_R \in C([0, T]; H_R)$ entonces G es continua en $[0, T]$ y por ser f^R, $A^R(u_R)$ elementos de $L^q(0, T; \overline{V}^*_R)$, la función g pertenece a $L^q(0, T)$. Por lo tanto la función

$$F(t) := \int_0^t g(\tau)\, d\tau,$$

es una función absolutamente continua en $[0, T]$ y en consecuencia $F' = g$ en casi todo $[0, T]$ (por la Proposición 1.71). Demostraremos que la derivada distribucional

$$\frac{d}{dt}(G - F) = 0 \qquad \text{en} \qquad \mathcal{D}'(0, T).$$

En efecto, para $\varphi \in C_0^\infty(0, T)$ se tiene:

$$\begin{aligned}
\int_0^T (G(t) - F(t))' \varphi(t)\, dt &= -\int_0^T (G(t) - F(t))\, \varphi'(t)\, dt \\
&= -\int_0^T G(t)\varphi'(t)\, dt + \int_0^T F(t)\varphi'(t)\, dt \\
&= \int_0^T G'(t)\varphi(t)\, dt - \int_0^T F'(t)\varphi(t)\, dt \\
&= \int_0^T \frac{d}{dt}\, (u_R(t), w)_R\, \varphi(t)\, dt - \int_0^T \left\langle f^R(t) - A^R(u_R(t)), w \right\rangle_R \varphi(t)\, dt \\
&= \int_0^T \left\{ \frac{d}{dt}\, (u_R(t), w)_R - \left\langle f^R(t) - A^R(u_R(t)), w \right\rangle_R \right\} \varphi(t)\, dt \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Así, por la Proposición 1.72 existe una constante $c_0 \in \mathbb{R}$ tal que, $G - F = c_0$, luego

$$G(t) = c_0 + \int_0^t g(\tau)\, d\tau \qquad \text{c.t.p} \qquad t \in [0, T].$$

Pero, la función G es continua en $[0,T]$ y la función F es absolutamente continua, por lo que la igualdad anterior se da en toda parte. Así, tenemos que

$$G(t) = c_0 + \int_0^t g(\tau)\, d\tau \qquad \forall t \in [0,T].$$

y evidentemente $c_0 = G(0) = (u_0, w)_R$. Luego, recordando las definiciones de G y g se sigue

$$(u_R(t), w)_R = (u_0, w)_R + \int_0^t \left\langle f^R - A^R(u_R), w \right\rangle_R d\tau \qquad \forall w \in \overset{\circ}{V}_R$$

y por la Proposición 1.61, se tiene que lo anterior es equivalente a

$$(u_R(t), w)_R = (u_0, w)_R + \left\langle \int_0^t \left\{ f^R - A^R(u_R) \right\} d\tau, w \right\rangle_R \qquad \forall w \in \overset{\circ}{V}_R\ .$$

Como $\overset{\circ}{V}_R \subseteq H_R \subseteq \overset{\circ}{V}{}^*_R$ es una terna de evolución, y $u_R(t)$, $u_0 \in H_R$ para casi todo $t \in [0,T]$ entonces $u_R(t)$, $u_0 \in \overset{\circ}{V}{}^*_R$, para casi todo $t \in [0,T]$ de donde

$$\langle u_R(t), w\rangle_R = \langle u_0, w\rangle_R + \left\langle \int_0^t \left\{ f^R - A^R(u_R) \right\} d\tau, w \right\rangle_R \qquad \forall w \in \overset{\circ}{V}_R\ .$$

Pero lo anterior es equivalente a

$$\left\langle u_R(t) - u_0 - \int_0^t \left\{ f^R - A^R(u_R) \right\} d\tau, w \right\rangle_R = 0 \qquad \forall w \in \overset{\circ}{V}_R\ .$$

Así,

$$u_R(t) - u_0 - \int_0^t \left\{ f^R - A^R(u_R) \right\} d\tau = \mathbf{0} \qquad \text{en} \qquad \overset{\circ}{V}{}^*_R,$$

y como la inclusión $H_R \subseteq \overset{\circ}{V}{}^*_R$ es continua entonces

$$u_R(t) - u_0 - \int_0^t \left\{ f^R - A^R(u_R) \right\} d\tau = \mathbf{0} \qquad \text{en} \qquad H_R.$$

Así, por ser $\overline{V}_R \subseteq H_R \subseteq \overline{V}{}^*_R$ una terna de evolución

$$u_R(t) = u_0 + \int_0^t \left\{ f^R - A^R(u_R) \right\} d\tau \qquad \text{en} \qquad \overline{V}{}^*_R.$$

En consecuencia, por la Proposición 1.70, tenemos que

$$\frac{du_R}{dt}(t) = f^R(t) - A^R(u_R(t)) \qquad \text{c.t.p} \quad t \in [0,T]\,, \text{ en } \overline{V}{}^*_R. \tag{2.57}$$

Por otro lado, por (2.55) y (2.56) se tiene

$$\left\| A^R(u_R) \right\|^q_{\overline{V}{}^*_R} \leq c \left\| u_R \right\|^p_R \qquad \forall u_R \in \overline{V}_R,$$
$$\left\| A^S(u_S) \right\|^q_{\overline{V}{}^*_S} \leq c \left\| u_S \right\|^p_S \qquad \forall u_S \in \overline{V}_S,$$

luego, como $u \in L^p(0,T;V)$ por (2.41) se sigue que $u_R \in L^p(0,T;\overline{V}_R)$ y $u_S \in L^p(0,T;\overline{V}_S)$, en consecuencia,

$$A^R(u_R) \in L^q(0,T;\overline{V}_R^*), \qquad A^S(u_S) \in L^q(0,T;\overline{V}_S^*).$$

Además, dado que $f^R \in L^q(0,T;\overline{V}_R^*)$, entonces la igualdad en (2.57) se da en $L^p(0,T;\overline{V}_R^*)$. Por lo tanto tenemos (2.51).

Finalmente, como $\dfrac{d}{dt}(u_R, z_R)_R = \langle u_R', z_R \rangle_R$ (ver Proposición 1.69), entonces en (2.48) tenemos que para todo $v \in V$

$$\langle u_R', v_R \rangle_R + a(u,v) = \langle f, v \rangle \qquad \text{en} \qquad \mathcal{D}'(0,T).$$

Pero, por (2.53) y (2.54) la ecuación anterior es equivalente a

$$\langle u_R', v_R \rangle_R + \left\langle A^R(u_R), v_R \right\rangle_R + \left\langle A^S(u_S), v_S \right\rangle_S = \left\langle f^R, v_R \right\rangle_R + \left\langle f^S, v_S \right\rangle_S \qquad \text{en} \qquad \mathcal{D}'(0,T).$$

De donde agrupando los dos primeros términos del lado izquierdo de la igualdad anterior y utilizando (2.51), obtenemos para todo $v_S \in \overline{V}_S$ que

$$\left\langle A^S(u_S), v_S \right\rangle_S = \left\langle f^S, v_S \right\rangle_S \qquad \text{en} \qquad \mathcal{D}'(0,T).$$

Así, para todo $v_S \in \overline{V}_S$

$$\int_0^T \left\langle A^S(u_S), v_S \right\rangle_S \varphi \, dt = \int_0^T \left\langle f^S, v_S \right\rangle_S \varphi \, dt \qquad \forall \varphi \in C_0^\infty(0,T),$$

luego, por la Proposición 1.61, para todo $v_S \in \overline{V}_S$ se tiene

$$\left\langle \int_0^T \left\{ A^S(u_S) - f^S \right\} \varphi \, dt, v_S \right\rangle_S = 0 \qquad \forall \varphi \in C_0^\infty(0,T),$$

de donde, para todo $\varphi \in C_0^\infty(0,T)$

$$\int_0^T \left\{ A^S(u_S) - f^S \right\} \varphi dt = \mathbf{0} \qquad \text{en} \quad \overline{V}_S^*.$$

Así, por la Proposición 1.62 (Lema variacional) se tiene

$$A^S(u_S) = f^S \qquad \text{en} \qquad L^q(0,T,\overline{V}_S^*).$$

En consecuencia, tenemos (2.52).

Por lo tanto, hemos mostrado que si $u \in W_R$ es solución del problema **P** entonces u es solución del problema **P**$'$.

□

Capítulo 3

Método de Rothe para un problema variacional

3.1. Consideraciones sobre los operadores.

De ahora en adelante asumiremos que las condiciones dadas a continuación se satisfacen (también se asumirá que se cumple la hipótesis 1, ver pág. 30).

Hipótesis 2: Supondremos que los operadores no lineales

$$A^R : \overline{V}_R \to \overline{V}_R^* \qquad \text{y} \qquad A^S : \overline{V}_S \to \overline{V}_S^*,$$

los cuales aparecen en el Problema P' (ver (2.50)) satisfacen:

Parte 1. Los operadores A^R y A^S son hemicontinuos (con referencia a la Definición 1.15, parte (i)). Es decir, las funciones

$$\lambda \mapsto \langle A^R(u + \lambda v), w \rangle_R \qquad \forall u, v, w \in \overline{V}_R$$

y

$$\lambda \mapsto \langle A^S(u + \lambda v), w \rangle_S \qquad \forall u, v, w \in \overline{V}_S$$

son continuas en $(-\infty, \infty)$.

Parte 2. Se tiene[1]

$$\begin{aligned} \left\| A^R(u) \right\|_{\overline{V}_R^*} &\leq c \|u\|_R^{p-1} \qquad \forall u \in \overline{V}_R, \\ \left\| A^S(u) \right\|_{\overline{V}_S^*} &\leq c \|u\|_S^{p-1} \qquad \forall u \in \overline{V}_S, \end{aligned} \tag{3.1}$$

donde $1 < p < \infty$.

Parte 3. Los operadores A^R y A^S son monótonos (con referencia a la Definición 1.15, parte (ii)), es decir

$$\begin{aligned} \langle A^R(u) - A^R(v), u - v \rangle_R &\geq 0 \qquad \forall u, v \in \overline{V}_R, \\ \langle A^S(u) - A^S(v), u - v \rangle_S &\geq 0 \qquad \forall u, v \in \overline{V}_S. \end{aligned} \tag{3.2}$$

[1]Notese que la parte 2, implica que $A^R(u) \in L^q(0, T; \overline{V}_R^*)$ si $u \in L^p(0; T; \overline{V}_R)$.

Parte 4. El operador A^S es estrictamente monótono en el siguiente sentido

$$\langle A^S(u) - A^S(v), u - v\rangle_S > 0 \qquad \forall u, v \in \overline{V}_S,\ u \neq v,\ u - v \in \overset{\circ}{V}_S\ . \tag{3.3}$$

De ahora en adelante, seguiremos asumiendo que las funciones $a : V \times V \to \mathbb{R}$ y $f \in L^q(0, T; V^*)$ estan dadas por (2.53), (2.54)respectivamente, es decir:

$$a(u, v) := \langle A^R(u_R), v_R\rangle_R + \langle A^S(u_S), v_S\rangle_S \qquad \forall u, v \in V, \tag{3.4}$$

$$\langle f, v\rangle := \langle f^R, v_R\rangle_R + \langle f^S, v_S\rangle_S \qquad \forall v \in V. \tag{3.5}$$

Lema 3.1. *La función $a : V \times V \to \mathbb{R}$ posee las siguientes propiedades:*

a) $a : V \times V \to \mathbb{R}$ es hemicontinua (ver Definición 1.15).

b) Sea $1 < p < \infty$, existe $C > 0$ tal que

$$|a(u, v)| \leq C\|u\|^{p-1}\|v\| \qquad \forall u, v \in V. \tag{3.6}$$

c) $a : V \times V \to \mathbb{R}$ es monótona (ver Definición 1.15), es decir

$$a(u, u - v) - a(v, u - v) \geq 0 \qquad \forall u, v \in V. \tag{3.7}$$

Demostración. Sea $a : V \times V \to \mathbb{R}$ definida por (3.4), entonces.

a) Debemos mostrar que $\lambda \mapsto a(u + \lambda v, w)$ es una función continua en $(-\infty, \infty)$ para todos $u, v, w \in V$. Esto se sigue, puesto que $A^R(u_R)$ y $A^S(u_S)$ son hemicontinuas. Así

$$\lambda \mapsto a(u + \lambda v, w) = \langle A^R(u_R + \lambda v_R), w_R\rangle_R + \langle A^S(u_S + \lambda v_S), w_S\rangle_S$$

es continua por ser la suma de funciones continuas.

b) Mostremos que (3.6) se tiene. En efecto, por definición de la función a y por la parte 2 de la Hipótesis 2 se tiene

$$\begin{aligned}
|a(u, v)| &= \left|\langle A^R(u_R), v_R\rangle_R + \langle A^S(u_S), v_S\rangle_S\right| \\
&\leq \left|\langle A^R(u_R), v_R\rangle_R\right| + \left|\langle A^S(u_S), v_S\rangle_S\right| \\
&\leq \left\|A^R(u_R)\right\|_{\overline{V}_R^*}\|v_R\|_R + \left\|A^S(u_S)\right\|_{\overline{V}_S^*}\|v_S\|_S \\
&\leq c_1\|u_R\|_R^{p-1}\|v_R\|_R + c_2\|u_S\|_S^{p-1}\|v_S\|_S
\end{aligned}$$

Ahora, sea $c_3 := \max\{c_1, c_2\}$ y recordando que $\|u_R\|_R + \|u_S\|_S \leq c\,\|u\|$ entonces,

$$\begin{aligned}
|a(u, v)| &\leq c_3\left(\|u_R\|_R^{p-1}\|v_R\|_R + \|u_S\|_S^{p-1}\|v_S\|_S\right) \\
&\leq c_3\left(c\|u_R\|_R^{p-1}\|v\| + c\|u_S\|_S^{p-1}\|v\|\right) \\
&\leq c_4\left(\|u_R\|_R^{p-1} + \|u_S\|_S^{p-1}\right)\|v\| \\
&\leq c_4\left\{(\|u_R\|_R + \|u_S\|_S)^{p-1} + (\|u_R\|_R + \|u_S\|_S)^{p-1}\right\}\|v\| \\
&\leq c_4\left\{c\,\|u\|^{p-1} + c\,\|u\|^{p-1}\right\}\|v\| \\
&=: C\|u\|^{p-1}\|v\|.
\end{aligned}$$

c) Mostremos que (3.7) se tiene. En efecto, por definición de la función a y recordando que los operadores A^R y A^S son monótonos (ver parte 3, Hipótesis 2) tenemos:

$$\begin{aligned} a(u,u-v)-a(v,u-v) &= \langle A^R(u_R),(u-v)_R\rangle_R + \langle A^S(u_S),(u-v)_S\rangle_S \\ &\quad - \langle A^R(v_R),(u-v)_R\rangle_R - \langle A^S(v_S),(u-v)_S\rangle_S \\ &= \langle A^R(u_R)-A^R(v_R),(u-v)_R\rangle_R \\ &\quad + \langle A^S(u_S)-A^S(v_S),(u-v)_S\rangle_S \\ &= \langle A^R(u_R)-A^R(v_R),u_R-v_R\rangle_R \\ &\quad + \langle A^S(u_S)-A^S(v_S),u_S-v_S\rangle_S \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

□

En este lugar adicionamos la última hipótesis que necesitaremos más adelante,

Hipótesis 3: Sea $1 < p < \infty$, existe $\alpha > 0$ tal que la función $a : V \times V \to \mathbb{R}$ definida en (3.4) satisface

$$a(v,v) \geq \alpha [\![v]\!]^p \qquad \forall v \in V, \tag{3.8}$$

donde $[\![\cdot]\!] : V \to \mathbb{R}$ es una seminorma en V tal que, existen $\lambda \geq 0$, $\beta > 0$ tales que

$$[\![v]\!] + \lambda |v_R|_R \geq \beta \|v\| \qquad \forall v \in V. \tag{3.9}$$

Observación 3.2. Si la función $a : V \times V \to \mathbb{R}$ satisface

$$a(v,v) \geq \alpha \|v\|^p \qquad \forall v \in V,$$

entonces, definiendo $[\![v]\!] := \|v\|$ para todo $v \in V$, y haciendo $\lambda = 0$, $\beta = 1$ se verifica (3.8).

En el desarrollo del método de Rothe, que se realizará en la siguiente sección haremos uso del siguiente resultado para garantizar existencia y unicidad de ciertos problemas elípticos que resultan en el desarrollo de este método, el cual pretendemos dar a continuación de este resultado.

Teorema 3.3 (Browder (1963), Minty (1963))**.** *Sean X un espacio de Banach real, separable y reflexivo y $A : X \to X^*$ un operador monótono, hemicontinuo y coercitivo (ver Definición 1.15), entonces:*

a) Conjunto solución. Para cada $b \in X^*$, existe $u \in X$ tal que

$$A(u) = b, \qquad en \qquad X^*. \tag{3.10}$$

b) Unicidad. Si además, el operador A es estrictamente monótono (ver Definición 1.15), entonces para cada $b \in X^*$ existe un único $u \in X$ que verifica (3.10).

Demostración. Ver [17, Teorema 26.A]. □

3.2. Discretización del problema abstracto.

Para resolver el Problema P formularemos el método de Rothe, el cual consiste en hacer una discretización en el tiempo mediante una partición del intervalo $[0, T]$ y una discretización en el espacio V mediante subespacios de dimensión finita de dicho espacio. Así, en lugar de resolver un problema evolutivo, resolvemos r problemas elípticos, para ello, sean $r \in \mathbb{Z}^+$ y $\Delta t := T/r$. Definimos:

$$t_i \equiv t_i^r := i\Delta t, \qquad i = 0, 1, ..., r, \tag{3.11}$$

$$f^i := \frac{1}{\Delta t} \int_{t_{i-1}}^{t_i} f(\tau)\, d\tau \in V^*, \qquad i = 1, ..., r. \tag{3.12}$$

El método de Rothe, será llevado a cabo mediante los siguientes pasos:

Paso 1 (Semidiscretización del Problema P). Deseamos resolver el problema: Hallar $u \in W_R$ tal que para todo $v \in V$ se tenga

$$\frac{d}{dt}(u_R, v_R)_R + a(u, v) = \langle f, v \rangle \qquad \text{en} \qquad \mathcal{D}'(0, T),$$
$$u_R(0) = u_0.$$

Para lo cual, haremos primero una discretización en el tiempo t. Así para $t_i \in [0, T]$ con $i = 0, ...r$ denotamos los valores aproximados de $u(t_i) \in V$ para $i = 1, ..., r$ por $u^i \in V$ y $u_R^0 := u_0 \in H_R$.

Tomando entonces el problema anterior con $t = t_i$, $i = 0, ..., r$ y aproximando los valores $\dfrac{d}{dt}(u_R(t_i), v_R)_R$, $a(u(t_i), v)$, $\langle f(t_i), v \rangle$ repectivamente por:

$$\left(\frac{u_R^i - u_R^{i-1}}{\Delta t}, v_R \right)_R, \qquad a(u^i, v), \qquad \left\langle f^i, v \right\rangle.$$

Obtenemos el siguiente problema: Hallar $u^1, u^2, ..., u^r \in V$ tales que:

$$\begin{gathered} \left(\frac{u_R^i - u_R^{i-1}}{\Delta t}, v_R \right)_R + a(u^i, v) = \left\langle f^i, v \right\rangle \qquad \forall v \in V, \\ u_R^0 = u_0 \in H_R. \end{gathered} \tag{3.13}$$

En el desarrollo del método de Rothe, se mostrara que el problema anterior está bien definido, es decir para cada $i = 1, ..., r$ existe un único $u^i \in V$ que es solución de dicho problema.

Paso 2 (Existencia de los subespacios de dimensión finita). El problema (3.13) define un problema semidiscreto (ya que sólo se ha discretizado el tiempo, mientras que el espacio V no se discretiza). Nuestra meta es obtener un esquema completamente discreto que pueda usarse en aplicaciones. Esto significa que aproximaremos los problemas elípticos (3.13) por problemas en subespacios de V finito dimensionales. Más exactamente, se demostrará que existen $h^* > 0$ y $\left\{V^h\right\}_{h\in(0,h^*)}$ una familia de subespacios de dimensión finita de V tales que

$$\lim_{h\to 0} \operatorname{dist}\left(V^h, v\right) = 0 \qquad \forall v \in V. \tag{3.14}$$

La existencia de estos subespacios finito dimensionales, lo cual se demostrará más adelante, es una consecuencia de que V es un espacio de Banach separable, lo que se encuentra garantizado por la hipótesis 1.

Paso 3 (Discretización completa). Después de garantizar la existencia de los espacios de dimensión finita $\left\{V^h\right\}_{h\in(0,h^*)}$ consideraremos las aproximaciones para el Problema (3.13) de la siguiente manera: Definimos para cada $h \in (0, h^*)$ la aproximación $U^i \in V^h$ de $u^i \in V$ para $i = 1, ..., r$ como el elemento que satisface

$$\left(\frac{U_R^i - U_R^{i-1}}{\Delta t}, z_R\right)_R + a(U^i, z) = \left\langle f^i, z\right\rangle \qquad \forall z := [z_R, z_S] \in V^h,$$

y para $i = 0$ definimos $U_R^0 := u_0 \in H_R$.

Así, tenemos el siguiente problema completamente discreto: Hallar $U^1, U^2, ..., U^r \in V^h$, $h \in (0, h^*)$ tales que

$$\begin{aligned} \left(U_R^{i-1} - U_R^i, z_R\right)_R + \Delta t a(U^i, z) = \Delta t \left\langle f^i, z\right\rangle \qquad \forall z := [z_R, z_S] \in V^h, \\ U_R^0 = u_0 \in H_R. \end{aligned} \tag{3.15}$$

Se mostrará que el problema (3.15) está bien planteado, es decir para cada $i = 1, ..., r$ y cada $h \in (0, h^*)$ existe un único $U^i \in V^h$ que es solución del problema (3.15).

Paso 4 (Construcción de las funciones de interpolación). Extendemos las soluciones $U^i \in V^h$, $i = 1, ..., r$ en el intervalo $[0, T]$, mediante la función escalonada $U^\delta : [0, T] \to V^h$, con $\delta := (h, \Delta t)$ por

$$U^\delta \equiv U^\delta(t) := \begin{cases} U^1, & \text{si} \quad t \in [t_0, t_1] \\ U^i, & \text{si} \quad t \in (t_{i-1}, t_i]; \quad i = 2, ..., r. \end{cases} \tag{3.16}$$

Además de la función escalonada anterior, también consideraremos la función de Rothe $\mathcal{U}^\delta \in C([0, T]; V^h)$ dada por

$$\mathcal{U}^\delta \equiv \mathcal{U}^\delta(t) := \begin{cases} U^1, & \text{si} \quad t \in [t_0, t_1], \\ U^{i-1} + \dfrac{t - t_{i-1}}{\Delta t}\left(U^i - U^{i-1}\right), & \text{si} \quad t \in [t_{i-1}, t_i], \quad i = 2, ..., r. \end{cases} \tag{3.17}$$

Paso 5 (Covergencia de las funciones de interpolación). La función escalonada $U^\delta : [0, T] \to V^h$ debe satisfacer lo siguiente:

$$U^\delta \rightharpoonup u \qquad \text{en} \qquad L^p(0, T; V), \qquad \text{si} \qquad \delta \to (0, 0)$$

y

$$\lim_{\delta\to(0,0)} \sup_{0\le t\le T} \left|u_R(t) - U_R^\delta(t)\right|_R = 0,$$
$$\lim_{\delta\to(0,0)} \left\|u - U^\delta\right\|_{L^p(0,T;V)} = 0.$$

Para cierta función $u \in W_R$ que precisamente resulta ser la solución del problema (2.48).

Igualmente, para la función de Rothe $\mathcal{U}^\delta \in C([0,T];V^h)$ se debe obtener:

$$\lim_{\delta\to(0,0)} \left\|u_R - \mathcal{U}_R^\delta\right\|_{C([0,T];H_R)} = 0,$$
$$\lim_{\delta\to(0,0)} \left\|u - \mathcal{U}^\delta\right\|_{L^p(0,T;V)} = 0.$$

3.2.1. Desarrollo del método de Rothe (Parte 1).

Paso 1. Para este paso, lo único que necesitamos mostrar es que el problema (3.13) está bien definido, lo cual se hará en el siguiente lema.

Lema 3.4. *Supongamos que las condiciones de las* ***Hipótesis*** **1 − 3** *se satisfacen. Entonces, para cada $i = 1, ..., r$ existe un único $u^i \in V$ que satisface* (3.13).

Demostración. La demostración de este resultado se realizará verificando las hipótesis del Teorema 3.3.

Por la hipótesis 1, V es un espacio de Banach real, separable y reflexivo. Ahora, (3.13) es equivalente a

$$(u_R^i, v_R)_R + \Delta t\, a(u^i, v) = (u_R^{i-1}, v_R)_R + \Delta t \left\langle f^i, v\right\rangle \qquad \forall v \in V. \tag{3.18}$$

Sean $A : V \to V^*$ y $b^i \in V^*$ $i = 1, ..., r$ definidos por

$$\langle A(u), v\rangle := (u_R, v_R)_R + \Delta t\, a(u, v) \qquad \forall v \in V,$$
$$\left\langle b^i, v\right\rangle := (u_R^{i-1}, v_R)_R + \Delta t \left\langle f^i, v\right\rangle \qquad \forall v \in V.$$

Así, tenemos que (3.18) es equivalente a

$$\left\langle A(u^i), v\right\rangle = \left\langle b^i, v\right\rangle \qquad \forall v \in V, \quad i = 1, ..., r.$$

Luego, tenemos para $i = 1, ..., r$ las ecuaciones

$$A(u^i) = b^i \qquad \text{en} \qquad V^*.$$

Veamos que $A : V \to V^*$ es un operador estrictamente monótono, hemicontinuo y coercitivo. En efecto,

i. *Monotonía estricta.* Debemos mostrar que

$$\langle A(u) - A(v), u - v\rangle > 0 \qquad \forall u, v \in V, u \neq v.$$

Sean $u, v \in V$, $u \neq v$ entonces

$$\begin{aligned}
&\langle A(u) - A(v), u - v\rangle \\
&= \langle A(u), u - v\rangle - \langle A(v), u - v\rangle \\
&= (u_R, u_R - v_R)_R + \Delta t\, a(u, u - v) - (v_R, u_R - v_R)_R - \Delta t\, a(v, u - v) \\
&= (u_R - v_R, u_R - v_R)_R + \Delta t \left\{a(u, u - v) - a(v, u - v)\right\} \\
&= |u_R - v_R|_R^2 + \Delta t \left\{a(u, u - v) - a(v, u - v)\right\}
\end{aligned}$$

Si $u_R \neq v_R$ entonces $|u_R - v_R|_R^2 > 0$, por lo que

$$\langle A(u) - A(v), u - v\rangle > 0.$$

Si $u_R = v_R$, por ser $u \neq v$ tenemos $u_S - v_S \in \overset{\circ}{V}_R$. Así,

$$\begin{aligned}
\langle A(u) - A(v), u - v\rangle &= \Delta t \left\{a(u, u - v) - a(v, u - v)\right\} \\
&= \Delta t \left\{\left\langle A^S(u_S), u_S - v_S\right\rangle_S - \left\langle A^S(v_S), u_S - v_S\right\rangle_S\right\} \\
&= \Delta t \left\{\left\langle A^S(u_S) - A^S(v_S), u_S - v_S\right\rangle_S\right\} \\
&> 0.
\end{aligned}$$

Donde la última desigualdad se da por ser $\Delta t > 0$ y por (3.3). Por lo tanto el operador $A : V \to V^*$ es estrictamente monótono.

ii. *Hemicontinuidad.* Para mostrar que el operador $A : V \to V^*$ es hemicontinuo, debemos ver que para todos $u, v, w \in V$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, la función

$$\lambda \mapsto \langle A(u + \lambda v), w\rangle = (u_R + \lambda v_R, w_R)_R + \Delta t\, a\left(u + \lambda v, w\right),$$

es continua. En efecto, sea $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$h(\lambda) := (u_R + \lambda v_R, w_R)_R = (u_R, w_R)_R + \lambda(v_R, w_R)_R.$$

Entonces, h es continua, puesto que en función de λ es una función lineal.

Por otro lado, como $a : V \times V \to \mathbb{R}$ es hemicontinua, entonces

$$\lambda \mapsto a(u + \lambda v, w)$$

es continua para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ y todo $u, v, w \in V$. Luego,

$$\lambda \mapsto \Delta t\, a(u + \lambda v, w),$$

es también continua para todo $u, v, w \in V$ y $\lambda \in \mathbb{R}$. Así, la función

$$\lambda \mapsto \langle A(u + \lambda v), w\rangle$$

es también continua, por ser la suma de funciones continuas.

Por lo tanto, $A : V \to V^*$, es hemicontinuo.

iii. *Coercitividad.* Veamos que el operador $A : V \to V^*$ es coercitivo, esto es

$$\lim_{\|u\|\to\infty} \frac{\langle A(u), u\rangle}{\|u\|} = \infty.$$

Para mostrar lo anterior estimamos

$$\frac{\langle A(u), u\rangle}{\|u\|}.$$

Por una parte tenemos que

$$\begin{aligned}\langle A(u), u\rangle &= (u_R, u_R)_R + \Delta t\, a(u,u)\\ &= |u_R|_R^2 + \Delta t\, a(u,u).\end{aligned}$$

Ahora, por (3.8) tenemos que $a(u,u) \geq \alpha [\![u]\!]^p$, donde $\alpha > 0$ es constante. Definimos $\gamma(\Delta t) := \text{mín}\{1, \alpha\Delta t\}$, entonces

$$\begin{aligned}\langle A(u), u\rangle &\geq |u_R|_R^2 + \alpha\Delta t [\![u]\!]^p\\ &\geq \gamma(\Delta t)\left(|u_R|_R^2 + [\![u]\!]^p\right).\end{aligned} \tag{3.19}$$

Por otro lado, por (3.9) tenemos

$$\begin{aligned}\|u\| &\leq \beta^{-1}\left([\![u]\!] + \lambda\, |u_R|_R\right)\\ &\leq c\left([\![u]\!] + |u_R|_R\right), \qquad c := \beta^{-1}\,\text{máx}\{1,\lambda\}.\end{aligned}$$

Así,

$$\frac{1}{\|u\|} \geq c\frac{1}{[\![u]\!] + |u_R|_R}.$$

Por lo tanto, por (3.19) y lo anterior se tiene

$$\frac{\langle A(u), u\rangle}{\|u\|} \geq c(\Delta t)\frac{|u_R|_R^2 + [\![u]\!]^p}{|u_R|_R + [\![u]\!]}.$$

Haciendo los siguientes cambios de variable,

$$c := |u_R|_R, \qquad d := [\![u]\!], \qquad x := c + d,$$

si $\|u\| \to \infty$, entonces $x \to \infty$. Así para probar que el operador $A : V \to V^*$ es coercitivo es suficiente probar que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{c^2 + d^p}{x} = \infty. \tag{3.20}$$

En efecto. En primer lugar consideremos el caso $p \geq 2$. Si $b \geq 1$ entonces utilizando la desigualdad

$$y^2 + z^2 \geq \frac{1}{2}(y+z)^2 \qquad y, z \in \mathbb{R},$$

tenemos que

$$\frac{c^2+d^p}{x} \geq \frac{c^2+d^2}{x} = \frac{c^2+(x-c)^2}{x} \geq \frac{(c+(x-c))^2}{2x} = \frac{x}{2}.$$

Ahora, si $d<1$ entonces, recordando que $d>0$, se sigue

$$\frac{c^2+d^p}{x} \geq \frac{c^2}{x} = \frac{(x-d)^2}{x} \geq \frac{(x-1)^2}{x}.$$

Analizamos ahora el caso $1<p<2$. En primer lugar, si $c>1$ tenemos que

$$\frac{c^2+d^p}{x} \geq \frac{c^p+(x-c)^p}{x} \geq \frac{2^{-p}(c+(x-c))^p}{x} = 2^{-p}x^{p-1},$$

donde se ha utilizado la desigualdad

$$(y+z)^p \leq \{2\sup\{y,z\}\}^p \leq 2^p(y^p+z^p), \qquad y,z \geq 0.$$

Ahora, si $0<c\leq 1$ entonces

$$\frac{c^2+d^p}{x} \geq \frac{d^p}{x} = \frac{(x-c)^p}{x} \geq \frac{(x-1)^p}{x}.$$

Así, en cualquier caso haciendo $x \to \infty$ tenemos (3.20).

Por lo tanto, $A: V \to V^*$ es coercitivo.

Así, por (i), (ii) y (iii), $A: V \to V^*$ satisface las hipótesis del Teorema 3.3, por lo que dado $b^i \in V^*$, $i=1,...,r$ existe un único $u^i \in V$ tal que

$$A(u^i) = b^i \qquad \text{en} \qquad V^*.$$

Por lo tanto, para cada $i=1,...,r$ existe un único $u^i \in V$ que es solución de (3.13). □

Paso 2. En este paso, sólo queda garantizar la existencia de los subespacios de dimensión finita $\left\{V^h\right\}_{h\in(0,h^*)}$ de V que satisfacen la propiedad (3.14), lo cual lo garantizaremos en la siguiente proposición.

Proposición 3.5. *Sea V un espacio de Banach separable. Existen $h^*>0$ y una familia $\left\{V^h\right\}_{h\in(0,h^*)}$ de subespacios finito dimensionales de V que satisfacen* (3.14)*, es decir*

$$\lim_{h\to 0} \operatorname{dist}\left(V^h, v\right) = 0 \qquad \forall v \in V.$$

Demostración. Notemos que si V es un espacio de dimensión finita, entonces haciendo $V^h := V$ para todo $h>0$ se sigue el resultado.

Supongamos entonces que $\dim V = \infty$. La demostración la haremos por pasos.

Paso 1^***.** Existe una sucesión estrictamente decreciente $\{h_r\}_{r=1}^{\infty}$ de números positivos con

$$\lim_{r\to\infty} h_r = 0$$

y una familia $\left\{V^{h_r}\right\}_{r=1}^{\infty}$ de subespacios finito dimensionales de V tales que

$$\lim_{r\to\infty} \operatorname{dist}\left(V^{h_r}, v\right) = 0 \qquad \forall v \in V.$$

En efecto, puesto que V es un espacio de Banach separable, existe un conjunto numerable $X := \{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ tal que

$$\overline{X} = V.$$

Podemos suponer sin perdida de generalidad que $x_1 \neq \mathbf{0}$. Sea $\varphi_1 := x_1$, $h_1 := 1$ y definimos

$$V^{h_1} := \mathbf{gen}\{\varphi_1\} \subseteq V.$$

Ahora, si $X \subseteq V^{h_1}$ entonces

$$V = \overline{X} \subseteq \overline{V^{h_1}} = \overline{\mathbf{gen}\{\varphi_1\}} = \mathbf{gen}\{\varphi_1\} = V^{h_1},$$

de donde $V = V^{h_1}$, lo cual no puede ser puesto que $\dim V = \infty$, luego existe $x_{i_1} \in X$ tal que $x_{i_1} \notin V^{h_1}$. Sea $\varphi_2 := x_{i_1} \in X$ tal que $x_{i_1} \notin V^{h_1}$ y $x_1, ..., x_{i_1-1} \in V^{h_1}$, entonces φ_1, φ_2 son linealmente independientes. Sea $h_2 := 1/2$, definimos

$$V^{h_2} := \mathbf{gen}\{\varphi_1, \varphi_2\} \subseteq V.$$

Igual a como se demostró anteriormente, se puede ver que existe $x_{i_2} \in X$ tal que $x_{i_2} \notin V^{h_2}$. Sea entonces $\varphi_3 := x_{i_2} \in X$ tal que $x_{i_2} \notin V^{h_2}$ y $x_1, ..., x_{i_2-1} \in V^{h_2}$, entonces φ_1, φ_2, φ_3 son linealmente independientes. Definimos $h_3 := 1/3$ y

$$V^{h_3} := \mathbf{gen}\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\} \subseteq V.$$

Continuando con el proceso, se puede mostrar que existe $x_{i_{r-1}} \in X$ tal que $x_{i_{r-1}} \notin V^{h_{r-1}}$. Sea $\varphi_r := x_{i_{r-1}} \in X$ tal que $x_{i_{r-1}} \notin V^{h_{r-1}}$ y $x_1, ..., x_{i_{r-1}-1} \in V^{h_{r-1}}$, entonces $\varphi_1, ..., \varphi_r$ son linealmente independientes. Definimos $h_r := 1/r$ y

$$V^{h_r} := \mathbf{gen}\{\varphi_1, ..., \varphi_r\} \subseteq V.$$

Así, tenemos que $\{h_r\}_{r=1}^{\infty} := \{1/r\}_{r=1}^{\infty}$ es una sucesión estrictamente decreciente, tal que $h_r \to 0$ si $r \to \infty$. Además $V^1 \subseteq V^{1/2} \subseteq ...$ y

$$X = \bigcup_{r=1}^{\infty} V^{h_r}.$$

Luego, dados $v \in V$ y $\varepsilon > 0$ existe $u \in \bigcup_{r=1}^{\infty} V^{h_r}$ tal que

$$\|u - v\| < \varepsilon.$$

Por otro lado, puesto que $V^{h_1} \subseteq V^{h_2} \subseteq ...$, y $u \in \bigcup_{r=1}^{\infty} V^{h_r}$ entonces existe $N \in \mathbb{Z}^+$ tal que si $r \geq N$ entonces $u \in V^{h_r}$.

Por lo tanto, dado $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{Z}^+$ tal que si $r \geq N$ entonces

$$\operatorname{dist}(V^{h_r}, v) = \inf_{u^* \in V^{h_r}} \|u^* - v\| \leq \|u - v\| < \varepsilon,$$

por lo que se tiene

$$\lim_{r\to\infty} \operatorname{dist}(V^{h_r}, v) = 0 \qquad \forall v \in V.$$

Paso 2^* **(Demostración del resultado).**

Consideremos la sucesión $\{h_r\}_{r=1}^{\infty}$ garantizada por el Paso 1^*. Sea $h^* := h_1 > 0$, definamos

$$V^h := V^{h_r}, \qquad h \in (h_{r+1}, h_r].$$

Veamos que la familia $\left\{V^h\right\}_{h\in(0,h^*)}$ satisface (3.14). Debemos mostrar que dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $0 < h < \delta$ entonces

$$\operatorname{dist}\left(V^h, v\right) < \varepsilon \qquad \forall v \in V.$$

En efecto, sea $\varepsilon > 0$, por el paso 1^* existe $N \in \mathbb{Z}^+$ tal que si $r \geq N$ entonces

$$\operatorname{dist}\left(V^{h_r}, v\right) < \varepsilon \qquad \forall v \in V.$$

Sea $\delta := h_N$, entonces si $0 < h < \delta = h_N$ existe $N^* \in \mathbb{Z}^+$ tal que $h_{N^*+1} < h < h_{N^*} \leq h_N$.

Luego, $V^h = V^{h_{N^*}}$ y así

$$\operatorname{dist}\left(V^h, v\right) = \operatorname{dist}\left(V^{h_{N^*}}, v\right) < \varepsilon \qquad \forall v \in V.$$

Por lo tanto, la familia $\left\{V^h\right\}_{h\in(0,h^*)}$ satisface (3.14). $\square$

Paso 3. En este paso, igual que en el paso 1, resta garantizar que el problema (3.15) está bien definido, lo cual lo garantizaremos en el siguiente lema.

Lema 3.6. *Supongamos que las condiciones de las* ***Hipótesis*** $\mathbf{1-3}$ *se satisfacen. Entonces para cada* $h \in (0, h^*)$ *y cada* $i = 1, ..., r$*, existe un único* $U^i \in V^h$ *que satisface (3.15).*

Demostración. Sea $\{\varphi^j\}_{j=1}^{d}$ una base de V^h (para hacer la notación simple, escribimos φ^j y d en lugar de $\varphi^{h,j}$, d^h). Como $U^i \in V^h$ existen $\alpha_1, ..., \alpha_d \in \mathbb{R}$ tales que

$$U^i = \sum_{j=1}^{d} \alpha_j \varphi^j.$$

Así, reemplazando U^i en (3.15) tenemos

$$\left(\sum_{j=1}^{d} \alpha_j \varphi_R^j, z_R\right)_R + \Delta t\, a\left(\sum_{j=1}^{d} \alpha_j \varphi^j, z\right) = (U_R^{i-1}, z_R)_R + \Delta t \left\langle f^i, z\right\rangle \qquad \forall z \in V^h.$$

En particular para $z = \varphi^k$, $k = 1, ..., d$ se tiene

$$\left(\sum_{j=1}^{d} \alpha_j \varphi_R^j, \varphi_R^k\right)_R + \Delta t\, a\left(\sum_{j=1}^{d} \alpha_j \varphi^j, \varphi^k\right) = (U_R^{i-1}, \varphi_R^k)_R + \Delta t \left\langle f^i, \varphi^k\right\rangle. \tag{3.21}$$

Sea $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, ..., \alpha_d)$, para $k = 1, ..., d$ denotamos por

$$F_k(\boldsymbol{\alpha}) := \left(\sum_{j=1}^{d} \alpha_j \varphi_R^j, \varphi_R^k \right)_R + \Delta t\, a \left(\sum_{j=1}^{d} \alpha_j \varphi^j, \varphi^k \right),$$
$$g_k := (U_R^{i-1}, \varphi_R^k)_R + \Delta t \left\langle f^i, \varphi^k \right\rangle.$$

Definiendo $\mathbf{F} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ y $\mathbf{g} \in \mathbb{R}^d$ como

$$\mathbf{F}(\boldsymbol{\alpha}) := \left(F_1(\boldsymbol{\alpha}), ..., F_d(\boldsymbol{\alpha})\right),$$
$$\mathbf{g} := (g_1, ..., g_d).$$

Tenemos que (3.15) es equivalente al sistema no lineal de ecuaciones

$$\mathbf{F}(\boldsymbol{\alpha}) = \mathbf{g}.$$

Veamos ahora que $\mathbf{F} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ satisface las hipótesis del Teorema 3.3. Es decir, $\mathbf{F}$ es una función estrictamente monótona, hemicontinua y coercitiva. En efecto, notamos primero que $\mathbb{R}^d$ es un espacio de Banach real, separable y reflexivo, con $\left(\mathbb{R}^d\right)^* = \mathbb{R}^d$. Veamos ahora las otras hipótesis:

i. *Monotonía estricta.* Esto es,

$$(\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta})^T(\mathbf{F}(\boldsymbol{\alpha}) - \mathbf{F}(\boldsymbol{\beta})) > 0 \qquad \forall \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}^d,\ \boldsymbol{\alpha} \neq \boldsymbol{\beta}.$$

En efecto, sean $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, ..., \alpha_d)$, $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, ..., \beta_d)$ elementos de $\mathbb{R}^d$ con $\boldsymbol{\alpha} \neq \boldsymbol{\beta}$ y sean

$$u = \sum_{k=1}^{d} \alpha_k \varphi^k \in V^h, \qquad v = \sum_{k=1}^{d} \beta_k \varphi^k \in V^h,$$

entonces para $k = 1, ..., d$ tenemos

$$\begin{aligned}
&(\alpha_k - \beta_k)\left(F_k(\boldsymbol{\alpha}) - F_k(\boldsymbol{\beta})\right) \\
&= (\alpha_k - \beta_k)\left((u_R, \varphi_R^k)_R + \Delta t a(u, \varphi^k) - (v_R, \varphi_R^k)_R - \Delta t a(v, \varphi^k)\right) \\
&= (\alpha_k - \beta_k)\left\{(u_R - v_R, \varphi_R^k)_R + \Delta t \left(a(u, \varphi^k) - a(v, \varphi^k)\right)\right\} \\
&= (u_R - v_R, \alpha_k \varphi_R^k - \beta_k \varphi_R^k)_R + \Delta t \left\{a(u, \alpha_k \varphi^k - \beta_k \varphi^k) - a(v, \alpha_k \varphi^k - \beta_k \varphi^k)\right\}.
\end{aligned}$$

Así,

$$
\begin{aligned}
&(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta})^T\left(\mathbf{F}(\boldsymbol{\alpha})-\mathbf{F}(\boldsymbol{\beta})\right)\\
&=\sum_{k=1}^{d}(\alpha_k-\beta_k)\left(F_k(\boldsymbol{\alpha})-F_k(\boldsymbol{\beta})\right)\\
&=\sum_{k=1}^{d}(u_R-v_R,\alpha_k\varphi_R^k-\beta_k\varphi_R^k)_R\\
&\quad+\sum_{k=1}^{d}\Delta t\left\{a(u,\alpha_k\varphi^k-\beta_k\varphi^k)-a(v,\alpha_k\varphi^k-\beta_k\varphi^k)\right\}\\
&=\left(u_R-v_R,\sum_{k=1}^{d}\alpha_k\varphi_R^k-\beta_k\varphi_R^k\right)_R\\
&\quad+\Delta t\left\{a\left(u,\sum_{k=1}^{d}\alpha_k\varphi^k-\beta_k\varphi^k\right)-a\left(v,\sum_{k=1}^{d}\alpha_k\varphi^k-\beta_k\varphi^k\right)\right\}\\
&=(u_R-v_R,u_R-v_R)_R+\Delta t\ \{a(u,u-v)-a(v,u-v)\}\\
&=|u_R-v_R|_R^2+\Delta t\ \{a(u,u-v)-a(v,u-v)\}\,.
\end{aligned}
$$

Ahora, si $u_R\neq v_R$ tenemos que $|u_R-v_R|_R^2>0$, y además por (3.7) se tiene

$$a(u,u-v)-a(v,u-v)\geq 0.$$

Así, si $u_R\neq v_R$ entonces

$$(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta})^T\left(\mathbf{F}(\boldsymbol{\alpha})-\mathbf{F}(\boldsymbol{\beta})\right)>0.$$

Por otro lado, si $u_R=v_R$ entonces por ser $\boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{\beta}$ se tiene $u_S-v_S\in\overset{\circ}{V}_S$ y así

$$
\begin{aligned}
(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta})^T\left(\mathbf{F}(\boldsymbol{\alpha})-\mathbf{F}(\boldsymbol{\beta})\right)&=\Delta t\left(a(u,u-v)-a(v,u-v)\right)\\
&=\Delta t\left(\left\langle A^R(u_R),u_R-v_R\right\rangle_R+\left\langle A^S(u_S),u_S-v_S\right\rangle_S\right)\\
&\quad-\Delta t\left(\left\langle A^R(v_R),u_R-v_R\right\rangle_R-\left\langle A^S(v_S),u_S-v_S\right\rangle_S\right)\\
&=\Delta t\left(\left\langle A^S(u_S),u_S-v_S\right\rangle_S-\left\langle A^S(v_S),u_S-v_S\right\rangle_S\right)\\
&=\Delta t\left\langle A^S(u_S)-A^S(v_S),u_S-v_S\right\rangle_S\\
&>0.
\end{aligned}
$$

Donde la última desigualdad se da por ser $\Delta t>0$ y por (3.3) (Parte 4, Hipótesis 2). Por lo tanto $\mathbf{F}:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^d$ es estrictamente monótona.

ii. *Hemicontinuidad.* Para mostrar que $\mathbf{F}:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^d$ es hemicontinua, debemos ver que dados $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\zeta}\in\mathbb{R}^d$, $\lambda\in\mathbb{R}$ tales que

$$u=\sum_{i=1}^{d}\alpha_i\varphi^i,\quad v=\sum_{i=1}^{d}\beta_i\varphi^i,\quad w=\sum_{i=1}^{d}\zeta_i\varphi^i,$$

la función

$$\lambda \mapsto \boldsymbol{\zeta}^T \mathbf{F}(\boldsymbol{\alpha} + \lambda \boldsymbol{\beta}) = \left(u_R + \lambda v_R, w_R\right)_R + \Delta t\, a\left(u + \lambda v, w\right),$$

es continua. En efecto, sea $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$h(\lambda) := \left(u_R + \lambda v_R, w_R\right)_R = (u_R, w_R)_R + \lambda (v_R, w_R)_R.$$

Entonces, h es continua, puesto que en función de λ es una función lineal. Por otro lado, como $a : V \times V \to \mathbb{R}$ es hemicontinua, entonces

$$\lambda \mapsto a(u + \lambda v, w)$$

es continua para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ y todo $u, v, w \in V$. Luego,

$$\lambda \mapsto \Delta t\, a(u + \lambda v, w),$$

es continua para $u, v, w \in V$ y $\lambda \in \mathbb{R}$. Así, la función

$$\lambda \mapsto \boldsymbol{\zeta}^T \mathbf{F}(\boldsymbol{\alpha} + \lambda \boldsymbol{\beta})$$

es continua, por ser la suma de funciones continuas. Por lo tanto, $\mathbf{F} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, es hemicontinua.

iii. *Coercitividad.* Veamos que la función $\mathbf{F} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ es coercitiva, esto es

$$\lim_{\|\boldsymbol{\alpha}\| \to \infty} \frac{\boldsymbol{\alpha}^T \mathbf{F}(\boldsymbol{\alpha})}{\|\boldsymbol{\alpha}\|} = \infty.$$

Para mostrar lo anterior estimamos

$$\frac{\boldsymbol{\alpha}^T \mathbf{F}(\boldsymbol{\alpha})}{\|\boldsymbol{\alpha}\|}.$$

En efecto, sea

$$U = \sum_{k=1}^{d} \alpha_k \varphi^k,$$

por una parte tenemos,

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\alpha}^T \mathbf{F}(\boldsymbol{\alpha}) &= \sum_{k=1}^{d} \alpha_k F_k(\boldsymbol{\alpha}) \\
&= \sum_{k=1}^{d} \alpha_k \left\{ (U_R, \varphi^k_R)_R + \Delta t\, a(U, \varphi^k) \right\} \\
&= \left(U_R, \sum_{k=1}^{d} \alpha_k \varphi^k_R \right) + \Delta t\, a \left(U, \sum_{k=1}^{d} \alpha_k \varphi^k \right) \\
&= (U_R, U_R)_R + \Delta t\, a(U, U) \\
&= |U_R|_R^2 + \Delta t\, a(U, U).
\end{aligned}$$

Ahora, por (3.8) tenemos $a(U,U) \geq \alpha [\![U]\!]^p$, donde $\alpha > 0$ es constante. Definimos $\gamma(\Delta t) := \text{mín}\{1, \alpha\Delta t\}$, entonces

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\alpha}^T \mathbf{F}(\boldsymbol{\alpha}) &\geq |U_R|_R^2 + \alpha\Delta t [\![U]\!]^p \\ &\geq \gamma(\Delta t) \left(|U_R|_R^2 + [\![U]\!]^p \right). \end{aligned} \tag{3.22}$$

Por otro lado, como $\{\varphi^j\}_{j=1}^d$ es una base de V^h entonces $\{\varphi^j\}_{j=1}^d$ es un conjunto linealmente independiente y

$$\left\|\varphi^j\right\| > 0, \qquad j = 1, ..., d.$$

Así, la función

$$\boldsymbol{\alpha} \mapsto \|U\| = \left\| \sum_{j=1}^d \alpha_j \varphi^j \right\|, \qquad \boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^d$$

define una norma en $\mathbb{R}^d$ y como las normas en $\mathbb{R}^d$ son equivalentes entonces $\|\boldsymbol{\alpha}\|$ es equivalente a $\|U\|$, por lo que existen constantes positivas $c_1(h), c_2(h)$ tales que

$$c_1(h) \|U\| \leq \|\boldsymbol{\alpha}\| \leq c_2(h) \|U\|.$$

Ahora por (3.9) tenemos

$$\begin{aligned} \|U\| &\leq \beta^{-1} \left([\![U]\!] + \lambda \, |U_R|_R \right) \\ &\leq c \left([\![U]\!] + |U_R|_R \right), \qquad c := \beta^{-1} \text{máx}\{1, \lambda\}. \end{aligned}$$

Luego, por la equivalencia entre $\|\boldsymbol{\alpha}\|$ y $\|U\|$ y lo anterior se tiene

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{\alpha}\| &\leq c_2(h) \|U\| \\ &\leq c_3(h) \left([\![U]\!] + |U_R|_R \right), \qquad c_3(h) := c \cdot c_2(h). \end{aligned}$$

Así,

$$\frac{1}{\|\boldsymbol{\alpha}\|} \geq c_3^{-1}(h) \frac{1}{[\![U]\!] + |U_R|_R}.$$

Por lo tanto, por (3.22) y lo anterior se tiene

$$\frac{\boldsymbol{\alpha}^T \mathbf{F}(\boldsymbol{\alpha})}{\|\boldsymbol{\alpha}\|} \geq c(h, \Delta t) \frac{|U_R|_R^2 + [\![U]\!]^p}{|U_R|_R + [\![U]\!]}, \qquad c(h, \Delta t) := c_3^{-1}(h)\gamma(\Delta t).$$

Haciendo los siguientes cambios de variable,

$$c := |U_R|_R, \qquad d := [\![U]\!], \qquad x := c + d,$$

si $\|U\| \to \infty$, entonces $x \to \infty$. Así para probar que $\mathbf{F} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ es coercitiva es suficiente probar que

$$\lim_{x \to \infty} \frac{c^2 + d^p}{x} = \infty.$$

Pero esto ya se demostró en (3.20). Por lo tanto, la función $\mathbf{F}$ es coercitiva.

Así, por (i), (ii) y (iii), $\mathbf{F} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ satisface las hipótesis del Teorema 3.3, por lo que dado $\mathbf{g} \in \mathbb{R}^d$ existe un único $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^d$ tal que

$$\mathbf{F}(\boldsymbol{\alpha}) = \mathbf{g}.$$

Por lo tanto, dado que la ecuación anterior es equivalente a la ecuación (3.15), entonces para cada $i = 1, ..., r$ existe un único $U^i \in V^h$ que es solución de (3.15). $\square$

Paso 4. Notamos que simplemente se han definido las funciones de interpolación $U^\delta, \mathcal{U}^\delta : [0,T] \to V^h$, donde U^δ es una función escalonada y $\mathcal{U}^\delta$ es una función lineal continua conocida como función de Rothe. Estas funciones dependen de los valores $U^1, U^2, ..., U^r$ para $r \in \mathbb{Z}^+$, cuya existencia ya se ha garantizado en el paso anterior.

Paso 5. Este constituye el paso esencial del método de Rothe y será desarrollado en el Teorema principal del próximo capítulo. Para dicha demostración necesitaremos de algunios resultados, los cuales se enunciaran y demostrarán a continuación.

Proposición 3.7 (Desigualdad discreta de Gronwall)**.** *Supongamos que* $\{k_n\}_{n=0}^\infty$ *es una sucesión no negativa y que la sucesión* $\{\varphi_n\}_{n=0}^\infty$ *satisface*

$$\begin{cases} \varphi_0 \leq g_0 \\ \\ \varphi_n \leq g_0 + \sum\limits_{s=0}^{n-1} p_s + \sum\limits_{s=0}^{n-1} k_s \varphi_s, \qquad n \geq 1. \end{cases}$$

Entonces φ_n *satisface*

$$\begin{cases} \varphi_1 \leq g_0(1+k_0) + p_0 \\ \\ \varphi_n \leq g_0 \prod\limits_{s=0}^{n-1}(1+k_s) + \sum\limits_{s=0}^{n-2} p_s \prod\limits_{r=s+1}^{n-1}(1+k_r) + p_{n-1}, \qquad n \geq 2. \end{cases}$$

Además, si $g_0 \geq 0$ *y* $p_n \geq 0$ *para* $n \geq 0$*, se sigue que*

$$\varphi_n \leq \left(g_0 + \sum_{s=0}^{n-1} p_s \right) \exp\left(\sum_{s=0}^{n-1} k_s \right), \qquad n \geq 1.$$

Demostración. Ver [13, Lema 1.4.2]. $\square$

En lo que sigue, seguimos asumiendo que los elementos $t_i \in [0,T]$, $i = 0, ..., r$, $r \in \mathbb{Z}^+$ que forman una partición de dicho intervalo, estan dados por la ecuación (3.11), es decir, $t_i = i\Delta t$, $i = 0, ..., r$ con $\Delta t = T/r$.

Lema 3.8. *Supongamos que las condiciones de las* ***Hipótesis*** $\mathbf{1-3}$ *se satisfacen. Entonces, las funciones escalonadas* $U^\delta : [0,T] \to V^h$ *definidas por* (3.16) *satisfacen:*

$$\left| U_R^\delta(T) \right|_R \leq C, \tag{3.23}$$

$$\left\| U_R^\delta \right\|_{L^\infty(0,T;H_R)} \leq C, \tag{3.24}$$

$$\left\| U^\delta \right\|_{L^p(0,T;V)} \leq C. \tag{3.25}$$

Donde la constante C, no es necesariamente la misma y además es independiente de h y Δt.

Demostración. Sea $1 \leq j \leq r$. En primer lugar deduciremos algunas estimaciones para $U^i \in V^h$. Para esto, notamos que si hacemos $z = U^i$ en (3.15) y sumamos desde $i = 1$ hasta $i = j$, se tiene:

$$\sum_{i=1}^{j}(U_R^i - U_R^{i-1}, U_R^i)_R + \Delta t \sum_{i=1}^{j} a(U^i, U^i) = \Delta t \sum_{i=1}^{j} \left\langle f^i, U^i \right\rangle. \tag{3.26}$$

Ahora, notamos que

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{j}(U_R^i - U_R^{i-1}, U_R^i)_R \\
&= \sum_{i=1}^{j} \left(U_R^i - U_R^{i-1}, \frac{1}{2}(U_R^i - U_R^{i-1}) + \frac{1}{2}(U_R^i + U_R^{i-1}) \right)_R \\
&= \sum_{i=1}^{j} \left\{ \frac{1}{2}\big(U_R^i - U_R^{i-1}, U_R^i - U_R^{i-1}\big)_R + \frac{1}{2}\big(U_R^i - U_R^{i-1}, U_R^i + U_R^{i-1}\big)_R \right\} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{j} \left|U_R^i - U_R^{i-1}\right|_R^2 \\
&\quad + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{j} \left\{ \big(U_R^i, U_R^i\big)_R + \big(U_R^i, U_R^{i-1}\big)_R - \big(U_R^{i-1}, U_R^i\big)_R - \big(U_R^{i-1}, U_R^{i-1}\big)_R \right\} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{j} \left|U_R^i - U_R^{i-1}\right|_R^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{j} \left\{ \left|U_R^i\right|_R^2 - \left|U_R^{i-1}\right|_R^2 \right\} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{j} \left|U_R^i - U_R^{i-1}\right|_R^2 + \frac{1}{2}\left|U_R^j\right|_R^2 - \frac{1}{2}\left|u_0\right|_R^2 .
\end{aligned}$$

Luego,

$$\frac{1}{2}\left|U_R^j\right|_R^2 - \frac{1}{2}\left|u_0\right|_R^2 \leq \sum_{i=1}^{j}(U_R^i - U_R^{i-1}, U_R^i)_R. \tag{3.27}$$

Por otro lado, por (3.8), $a(U^i, U^i) \geq \alpha [\![U^i]\!]^p$. Así,

$$\alpha \Delta t \sum_{i=1}^{j} [\![U^i]\!]^p \leq \Delta t \sum_{i=1}^{j} a(U^i, U^i).$$

Usando las dos desigualdades anteriores y (3.26), tenemos que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\left|U_R^j\right|_R^2 - \frac{1}{2}\left|u_0\right|_R^2 + \alpha \Delta t \sum_{i=1}^{j} [\![U^i]\!]^p &\leq \sum_{i=1}^{j}(U_R^i - U_R^{i-1}, U_R^i)_R + \Delta t \sum_{i=1}^{j} a(U^i, U_R^i) \\
&= \Delta t \sum_{i=1}^{j} \left\langle f^i, U^i \right\rangle .
\end{aligned}$$

Así,

$$\left|U_R^j\right|_R^2 + 2\alpha\Delta t\sum_{i=1}^{j}[\![U^i]\!]^p \leq 2\Delta t\sum_{i=1}^{j}\left\langle f^i, U^i\right\rangle + |u_0|_R^2. \tag{3.28}$$

A continuación, estimamos la suma del lado derecho de la desigualdad anterior. Por definición de $f^i \in V^*$ (ver ecuación (3.12)), se sigue:

$$\begin{aligned}
\Delta t\sum_{i=1}^{j}\left\langle f^i, U^i\right\rangle &= \Delta t\sum_{i=1}^{j}\left\langle \frac{1}{\Delta t}\int_{t_{i-1}}^{t_i} f(t)\,dt, U^i\right\rangle \\
&= \Delta t\sum_{i=1}^{j}\frac{1}{\Delta t}\int_{t_{i-1}}^{t_i}\left\langle f, U^i\right\rangle dt \\
&= \sum_{i=1}^{j}\int_{t_{i-1}}^{t_i}\left\langle f, U^i\right\rangle dt \\
&\leq \sum_{i=1}^{j}\int_{t_{i-1}}^{t_i}\left|\left\langle f, U^i\right\rangle\right| dt \\
&\leq \sum_{i=1}^{j}\int_{t_{i-1}}^{t_i}\|f\|_{V^*}\left\|U^i\right\| dt.
\end{aligned}$$

Por otro lado, de (3.9), $\|U^i\| \leq c_1\left([\![U^i]\!] + |U_R^i|\right)$ donde $c_1 := \beta^{-1}\,\text{mín}\,\{1,\lambda\}$. Luego, continuando con los cálculos anteriores,

$$\begin{aligned}
\Delta t\sum_{i=1}^{j}\left\langle f^i, U^i\right\rangle &\leq c_1\sum_{i=1}^{j}\int_{t_{i-1}}^{t_i}\|f\|_{V^*}\left\{[\![U^i]\!] + \left|U_R^i\right|_R\right\} dt \\
&\leq c_1\sum_{i=1}^{j}\left(\int_{t_{i-1}}^{t_i}\left\{[\![U^i]\!] + \left|U_R^i\right|_R\right\}^p dt\right)^{1/p}\left(\int_{t_{i-1}}^{t_i}\|f\|_{V^*}^q dt\right)^{1/q} \\
&= c_1\sum_{i=1}^{j}\left\{[\![U^i]\!] + \left|U_R^i\right|_R\right\}\Delta t^{1/p}\left(\int_{t_{i-1}}^{t_i}\|f\|_{V^*}^q dt\right)^{1/q} \\
&= c_1\sum_{i=1}^{j}\Delta t^{1/p}[\![U^i]\!]\left(\int_{t_{i-1}}^{t_i}\|f\|_{V^*}^q dt\right)^{1/q} + \\
&\quad + c_1\sum_{i=1}^{j}\Delta t^{1/p}\left|U_R^i\right|_R\left(\int_{t_{i-1}}^{t_i}\|f\|_{V^*}^q dt\right)^{1/q}.
\end{aligned} \tag{3.29}$$

Analicemos por aparte las sumas:

$$\sum_{i=1}^{j}\Delta t^{1/p}[\![U^i]\!]\left(\int_{t_{i-1}}^{t_i}\|f\|_{V^*}^q dt\right)^{1/q},$$

$$\sum_{i=1}^{j}\Delta t^{1/p}\left|U_R^i\right|_R\left(\int_{t_{i-1}}^{t_i}\|f\|_{V^*}^q dt\right)^{1/q}.$$

Usando la desigualdad de Young en la primera suma, para cada $\varepsilon > 0$ tenemos:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{j} \Delta t^{1/p} [\![U^i]\!] \left(\int_{t_{i-1}}^{t_i} \|f\|_{V^*}^q dt \right)^{1/q} &= \sum_{i=1}^{j} \varepsilon \Delta t^{1/p} [\![U^i]\!] \frac{1}{\varepsilon} \left(\int_{t_{i-1}}^{t_i} \|f\|_{V^*}^q dt \right)^{1/q} \\
&\le \sum_{i=1}^{j} \left\{ \frac{\varepsilon^p \Delta t [\![U^i]\!]^p}{p} + \frac{1}{q\varepsilon^q} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|f\|_{V^*}^q dt \right\} \\
&= \sum_{i=1}^{j} \frac{\varepsilon^p \Delta t [\![U^i]\!]^p}{p} + \sum_{i=1}^{j} \frac{1}{q\varepsilon^q} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|f\|_{V^*}^q dt \\
&= \sum_{i=1}^{j} \frac{\varepsilon^p \Delta t [\![U^i]\!]^p}{p} + \frac{1}{q\varepsilon^q} \int_{0}^{t_j} \|f\|_{V^*}^q dt \\
&\le \sum_{i=1}^{j} \frac{\varepsilon^p \Delta t [\![U^i]\!]^p}{p} + \frac{1}{q\varepsilon^q} \int_{0}^{T} \|f\|_{V^*}^q dt \\
&= \sum_{i=1}^{j} \frac{1}{p} \varepsilon^p \Delta t [\![U^i]\!]^p + \frac{1}{q} \varepsilon^{-q} \|f\|_{L^q(0,T;V^*)}^q .
\end{aligned} \tag{3.30}$$

Respecto a la segunda suma, usando la desigualdad de Hölder, se tiene

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{j} \Delta t^{1/p} \left|U_R^i\right|_R \left(\int_{t_{i-1}}^{t_i} \|f\|_{V^*}^q dt \right)^{1/q} \\
&\le \left(\sum_{i=1}^{j} \Delta t \left|U_R^i\right|_R^p \right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{j} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|f\|_{V^*}^q dt \right)^{1/q} \\
&= \left(\sum_{i=1}^{j} \Delta t \left|U_R^i\right|_R^p \right)^{1/p} \left(\int_{0}^{t_j} \|f\|_{V^*}^q dt \right)^{1/q} \\
&\le \left(\sum_{i=1}^{j} \Delta t \left|U_R^i\right|_R^p \right)^{1/p} \left(\int_{0}^{T} \|f\|_{V^*}^q dt \right)^{1/q} \\
&= \left(\sum_{i=1}^{j} \Delta t \left|U_R^i\right|_R^p \right)^{1/p} \|f\|_{L^q(0,T;V^*)} .
\end{aligned} \tag{3.31}$$

Ahora, combinando (3.29)–(3.31), y escogiendo $\varepsilon > 0$ tal que $\frac{c_1}{p}\varepsilon^p = \alpha/2$ se obtiene,

$$\begin{aligned}
\Delta t \sum_{i=1}^{j} \left\langle f^i, U^i \right\rangle dt &\le c_1 \sum_{i=1}^{j} \frac{1}{p} \varepsilon^p \Delta t [\![U^i]\!]^p + \frac{1}{q} \varepsilon^{-q} \|f\|_{L^q(0,T;V^*)}^q \\
&\quad + c_1 \left(\sum_{i=1}^{j} \Delta t \left|U_R^i\right|_R^p \right)^{1/p} \|f\|_{L^q(0,T;V^*)} \\
&= \frac{\alpha}{2} \Delta t \sum_{i=1}^{j} [\![U^i]\!]^p + c_3 + c_4 \left(\Delta t \sum_{i=1}^{j} \left|U_R^i\right|_R^p \right)^{1/p} ,
\end{aligned}$$

con, $c_3 := \frac{1}{q}\varepsilon^{-q}\,\|f\|^q_{L^q(0,T;V^*)}$, y $c_4 := \|f\|_{L^q(0,T;V^*)}$. Utilizando la desigualdad, $x \leq (x^2+1)$, obtenemos de lo anterior

$$\begin{aligned}
\Delta t \sum_{i=1}^{j} \left\langle f^i, U^i \right\rangle dt &\leq \frac{\alpha}{2}\Delta t \sum_{i=1}^{j} [\![U^i]\!]^p + c_3 + c_4 \left\{ \left(\Delta t \sum_{i=1}^{j} \left|U_R^i\right|_R^p \right)^{2/p} + 1 \right\} \\
&\leq \frac{\alpha}{2}\Delta t \sum_{i=1}^{j} [\![U^i]\!]^p + c_5 \left\{ \left(\Delta t \sum_{i=1}^{j} \left|U_R^i\right|_R^p \right)^{2/p} + 1 \right\},
\end{aligned}$$

donde $c_5 := c_3 + c_4$. Así, por lo anterior tenemos en (3.28),

$$\left|U_R^j\right|_R^2 + 2\alpha\Delta t \sum_{i=1}^{j} [\![U^i]\!]^p \leq \alpha\Delta t \sum_{i=1}^{j} [\![U^i]\!]^p + 2c_5 \left\{ \left(\Delta t \sum_{i=1}^{j} \left|U_R^i\right|_R^p \right)^{2/p} + 1 \right\} + |u_0|_R^2.$$

Luego,

$$\left|U_R^j\right|_R^2 + \alpha\Delta t \sum_{i=1}^{j} [\![U^i]\!]^p \leq c_6 \left\{ \left(\Delta t \sum_{i=1}^{j} \left|U_R^i\right|_R^p \right)^{2/p} + 1 \right\}, \tag{3.32}$$

con $c_6 := 2c_5 + |u_0|_R^2$.

Ahora, como

$$\left|U_R^j\right|_R^2 \leq \left|U_R^j\right|_R^2 + \alpha\Delta t \sum_{i=1}^{j} [\![U^i]\!]^p,$$

entonces, por (3.32)

$$\left|U_R^j\right|_R^2 \leq c_6 \left\{ \left(\Delta t \sum_{i=1}^{j} \left|U_R^i\right|_R^p \right)^{2/p} + 1 \right\}.$$

Luego, utilzando la desigualdad $(x^2+y^2)^{1/2} \leq |x| + |y|$ para todos $x, y \in \mathbb{R}$ y definiendo $c_7 := {c_6}^{p/2}$ se sigue,

$$\begin{aligned}
\left|U_R^j\right|_R^p &\leq c_7 \left\{ \left(\Delta t \sum_{i=1}^{j} \left|U_R^i\right|_R^p \right)^{2/p} + 1 \right\}^{p/2} \\
&\leq c_7 \left\{ \left(\Delta t \sum_{i=1}^{j} \left|U_R^i\right|_R^p \right)^{1/p} + 1 \right\}^{p} \\
&\leq 2^p c_7 \left\{ \Delta t \sum_{i=1}^{j} \left|U_R^i\right|_R^p + 1 \right\} \\
&= 2^p c_7 \Delta t \sum_{i=1}^{j} \left|U_R^i\right|_R^p + 2^p c_7 \\
&= 2^p c_7 \Delta t \sum_{i=1}^{j-1} \left|U_R^i\right|_R^p + 2^p c_7 \Delta t \left|U_R^j\right|_R^p + 2^p c_7.
\end{aligned}$$

En consecuencia,

$$(1 - 2^p c_7 \Delta t) \left| U_R^j \right|_R^p \leq 2^p c_7 \left(\Delta t \sum_{i=1}^{j-1} \left| U_R^i \right|_R^p + 1 \right).$$

Sea $r \in \mathbb{Z}^+$ lo suficientemente grande para que $\Delta t := T/r$ satisfaga $2^p c_7 \Delta t < 1/2$. Así, definiendo $c_8 := 2^{p+1} c_7$, tenemos por lo anterior

$$\left| U_R^j \right|_R^p \leq c_8 \left(\Delta t \sum_{i=1}^{j-1} \left| U_R^i \right|_R^p + 1 \right).$$

Por lo tanto, por la Proposición 3.7 (Desigualdad discreta de Grongwall) se tiene

$$\begin{aligned} \left| U_R^j \right|_R^p &\leq c_8 \exp \left(c_8 \sum_{i=1}^{j-1} \Delta t \right) \\ &= c_8 e^{c_8 t_j} \\ &\leq c_8 e^{c_8 T} \\ &=: C^p. \end{aligned}$$

Entonces,

$$\left| U_R^i \right|_R \leq C, \qquad i = 1, ..., r. \tag{3.33}$$

Donde C, es independiente de h y Δt. Así, por (3.33) obtenemos las siguientes cotas:

$$\begin{aligned} \left| U_R^\delta(T) \right|_R &\leq C, \\ \left\| U_R^\delta \right\|_{L^\infty(0,T;H_R)} &\leq C. \end{aligned}$$

Es decir, se tienen las afirmaciones (3.23) y (3.24).

Por otro lado, por (3.9), $\|U\| \leq c_1 \{ [\![U]\!] + |U_R|_R \}$, donde $c_1 = \beta^{-1} \operatorname{máx}\{1, \lambda\}$. Entonces,

$$\begin{aligned} \|U\|^p &\leq c_1^p \{ [\![U]\!] + |U_R|_R \}^p \\ &\leq (2c_1)^p \left([\![U]\!]^p + |U_R|_R^p \right) \\ &=: c_9 \left([\![U]\!]^p + |U_R|_R^p \right). \end{aligned}$$

Así,

$$\Delta t \sum_{i=1}^{r} \left\| U^i \right\|^p \leq c_9 \Delta t \sum_{i=1}^{r} [\![U^i]\!]^p + c_9 \Delta t \sum_{i=1}^{r} \left| U_R^i \right|_R^p.$$

Por (3.33), $|U_R^i|_R \leq C$, $i = 1, ..., r$ por lo que

$$\begin{aligned} \Delta t \sum_{i=1}^{r} \left\| U^i \right\|^p &\leq c_9 \Delta t \sum_{i=1}^{r} [\![U^i]\!]^p + c_9 C^p \sum_{i=1}^{r} \Delta t \\ &= c_9 \Delta t \sum_{i=1}^{r} [\![U^i]\!]^p + c_9 C^p T. \end{aligned}$$

Así, de (3.32) se sigue

$$\Delta t \sum_{i=1}^{r} \left\| U^i \right\|^p \leq c_9 \frac{c_6}{\alpha} \left\{ \left(\Delta t \sum_{i=1}^{r} \left| U_R^i \right|_R^p \right)^{2/p} + 1 \right\} + c_9 C^p T.$$

En consecuencia, por (3.33) se tiene,

$$\Delta t \sum_{i=1}^{r} \left\| U^i \right\|^p \leq c_9 \frac{c_6}{\alpha} \{ C^2 T^{2/p} + 1 \} + c_9 C^p T =: C_2^p.$$

Usando la definición de U^δ (ecuación (3.16)), lo anterior es equivalente a

$$\left\| U^\delta \right\|_{L^p(0,T;V)} \leq C_2.$$

Por lo tanto, hemos mostrado la afirmación (3.25) del lema. □

Proposición 3.9. *Sean $V \subseteq H \subseteq V^*$ una terna de evolución, $u \in C([0,T];V)$ tal que $u' \in L^q(0,T;V^*)$, y sea $\varphi \in C^\infty([0,T])$, entonces*

$$\int_0^T u(t)\varphi'(t)\,dt = u(T)\varphi(T) - u(0)\varphi(0) - \int_0^T u'(t)\varphi(t)\,dt. \tag{3.34}$$

Demostración. Afirmamos primero que,

$$(u(t)\varphi(t))' = u(t)\varphi'(t) + u'(t)\varphi(t) \qquad \text{c.t.p} \quad t \in [0,T]. \tag{3.35}$$

En efecto, sea $\psi \in C_0^\infty(0,T)$ entonces

$$\int_0^T u(t)\varphi(t)\psi'(t)\,dt = -\int_0^T (u(t)\varphi(t))'\,\psi(t)\,dt$$

y

$$\begin{aligned}
\int_0^T u(t)\varphi(t)\psi'(t)\,dt &= \int_0^T u(t)\,(\varphi(t)\psi'(t))\,dt \\
&= \int_0^T u(t)\,\left\{(\varphi(t)\psi(t))' - \varphi(t)'\psi(t)\right\}dt \\
&= \int_0^T u(t)\,(\varphi(t)\psi(t))'\,dt - \int_0^T (u(t)\varphi'(t))\,\psi(t)\,dt \\
&= -\int_0^T u'(t)\varphi(t)\psi(t)\,dt - \int_0^T (u(t)\varphi'(t))\,\psi(t)\,dt.
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\int_0^T (u(t)\varphi(t))'\,\psi(t)\,dt = \int_0^T u(t)\varphi'(t)\psi(t)\,dt + \int_0^T u'(t)\varphi(t)\psi(t)\,dt \qquad \forall \psi \in C_0^\infty(0,T).$$

En consecuencia, se tiene (3.35).

Luego,

$$\int_{\mathbb{R}} u(t)\varphi'(t)\,dt = \int_0^T (u(t)\varphi(t))'\,dt - \int_0^T u'(t)\varphi(t)\,dt. \tag{3.36}$$

Afirmamos ahora que

$$\int_0^T (u(t)\varphi(t))'dt = u(T)\varphi(T) - u(0)\varphi(0). \tag{3.37}$$

En efecto, sea $F:[0,T]\to V^*$ definida por

$$F(t) := \int_0^t (u(s)\varphi(s))'ds,$$

por la Proposición 1.71, se tiene que la función F es absolutamente continua y

$$F'(t) = (u(t)\varphi(t))' \qquad \text{c.t.p} \quad t\in[0,T].$$

Así,

$$(u(t)\varphi(t) - F(t))' = \mathbf{0} \qquad \text{c.t.p} \quad t\in[0,T].$$

Luego, por la Proposición 1.72, existe $c\in V^*$ tal que

$$u(t)\varphi(t) - \int_0^t (u(s)\varphi(s))'ds = c \qquad \text{c.t.p} \quad t\in[0,T].$$

Pero, por hipótesis tenemos que $u\in C\left([0,T];V\right)$ por lo que $\varphi u\in C\left([0,T];V\right)$. Así, por ser $V\subseteq H\subseteq V^*$ una terna de evolución se tiene $\varphi u\in C([0,T];V^*)$. Además, la función F es absolutamente continua, por lo que es también continua, en consecuencia la igualdad anterior es en toda parte, es decir

$$u(t)\varphi(t) - \int_0^t (u(s)\varphi(s))'ds = c \qquad \forall t\in[0,T].$$

Entonces, para $t=0$, la igualdad anterior se tiene, de donde $c=u(0)\varphi(0)$. Así,

$$u(t)\varphi(t) - \int_0^t (u(s)\varphi(s))'ds = u(0)\varphi(0) \qquad \forall t\in[0,T].$$

En particular, si $t=T$ se tiene (3.37). Por lo tanto, reemplazando (3.37) en (3.36), tenemos que

$$\int_{\mathbb{R}} u(t)\varphi'(t)\,dt = u(T)\varphi(T) - u(0)\varphi(0) - \int_0^T u'(t)\varphi(t)\,dt \qquad \forall\varphi\in C_0^\infty(\mathbb{R}).$$

En consecuencia, se tiene (3.34). □

Capítulo 4

Aplicación del método de Rothe a un problema de electromagnetismo bidimensional

4.1. Desarrollo del método de Rothe (Parte 2).

El método de Rothe, estará completamente terminado con la demostración del Teorema 4.3, el cual se demostrará en esta sección. Dicho teorema es desarrollado en varios pasos en los cuales necesitaremos de herramientas tales como: La fórmula de integración por partes (1.27), y algunos resultados importantes de las convergencias débil y debil* (ver Sección 1.1). Primero se demostrará unicidad de la solución, luego se estudiará en conjunto existencia de dicha solución al Problema P, y convergencia través de las funciones escalonadas $U^\delta : [0,T] \to V^h$ definidas por (3.16).

Antes de enunciar y demostrar el Teorema 4.3, requerimos de algunos resultados importantes, los cuales se enunciarán y demostrarán a continuación:

Proposición 4.1. *Sea $\varphi \in C^\infty([0,T])$, definimos $\varphi^i \in \mathbb{R}$ para $i = 1, ..., r$, como la función φ evaluada en los elementos de la partición del intervalo $[0,T]$, es decir $\varphi^i := \varphi(t_i)$, $i = 1, ..., r$ y definimos $\varphi^{r+1} = \varphi^r := \varphi(T)$. Definimos las funciones $\varphi_{\Delta t}, \overline{\varphi_{\Delta t}} : [0,T] \to \mathbb{R}$ por:*

$$\varphi_{\Delta t}(t) := \begin{cases} \varphi^1, & si \quad t \in [t_0, t_1] \\ \varphi^i, & si \quad t \in (t_{i-1}, t_i], \quad i = 2, ..., r, \end{cases} \tag{4.1}$$

$$\overline{\varphi_{\Delta t}}(t) := \begin{cases} \dfrac{\varphi^2 - \varphi^1}{\Delta t}, & si \quad t \in [t_0, t_1] \\ \dfrac{\varphi^{i+1} - \varphi^i}{\Delta t}, & si \quad t \in (t_{i-1}, t_i], \quad i = 2, ..., r. \end{cases} \tag{4.2}$$

Entonces

$$\|\varphi_{\Delta t} - \varphi\|_p \leq C\Delta t^{1/p} \tag{4.3}$$

$$\|\overline{\varphi_{\Delta t}} - \varphi'\|_p \leq C\Delta t^{1/p} \tag{4.4}$$

Demostración. Notamos primero que $\varphi_{\Delta t}$, $\overline{\varphi_{\Delta t}} : [0,T] \to \mathbb{R}$ son funciones escalonadas, por lo que son integrables, así

$$\varphi_{\Delta t},\ \overline{\varphi_{\Delta t}} \in L^p(0,T).$$

Mostremos ahora que se verifica (4.3). En efecto,

$$\begin{aligned}
\|\varphi_{\Delta t} - \varphi\|_p^p &= \int_0^T |\varphi_{\Delta t}(t) - \varphi(t)|^p dt \\
&= \sum_{i=1}^r \int_{t_{i-1}}^{t_i} |\varphi_{\Delta t}(t) - \varphi(t)|^p dt \\
&= \sum_{i=1}^r \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left| \int_t^{t_i} \varphi'(\tau) d\tau \right|^p dt \\
&\leq \sum_{i=1}^r \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left(\int_t^{t_i} |\varphi'(\tau)|\, d\tau \right)^p dt \\
&\leq \sum_{i=1}^r \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left\{ \left(\int_t^{t_i} d\tau \right)^{1/p} \left(\int_t^{t_i} |\varphi'(\tau)|^q \, d\tau \right)^{1/q} \right\}^p dt \\
&\leq \sum_{i=1}^r \int_{t_{i-1}}^{t_i} (t_i - t)\, \|\varphi'\|_q^p \, dt \\
&= \|\varphi'\|_q^p \sum_{i=1}^r \int_{t_{i-1}}^{t_i} (t_i - t)\, dt.
\end{aligned}$$

Haciendo el cambio de variable $u = t_i - t$, tenemos por lo anterior que

$$\begin{aligned}
\|\varphi_{\Delta t} - \varphi\|_p^p &\leq \|\varphi'\|_q^p \sum_{i=1}^r \int_0^{\Delta t} u\, du \\
&= \|\varphi'\|_q^p \sum_{i=1}^r \frac{\Delta t^2}{2} \\
&= \frac{1}{2}\Delta t\, \|\varphi'\|_q^p \sum_{i=1}^r \Delta t \\
&= \frac{T}{2}\, \|\varphi'\|_q^p\, \Delta t \\
&=: C^p \Delta t.
\end{aligned}$$

Así,

$$\|\varphi_{\Delta t} - \varphi\|_p \leq C\Delta t^{1/p}.$$

En consecuencia, (4.3) se tiene.

Mostremos ahora (4.4). En efecto,

$$\begin{aligned}\|\overline{\varphi_{\Delta t}}-\varphi'\|_p^p &= \int_0^T |\overline{\varphi_{\Delta t}}(t)-\varphi'(t)|^p\,dt\\ &= \int_0^{T-\Delta t} |\overline{\varphi_{\Delta t}}(t)-\varphi'(t)|^p\,dt + \int_{t_{r-1}}^T |\varphi'(t)|^p\,dt. \end{aligned}\tag{4.5}$$

En primer lugar, notamos que de la segunda integral de (4.5), tenemos:

$$\int_{t_{r-1}}^T |\varphi'(t)|^p\,dt \leq \max_{0\leq t\leq T} |\varphi'(t)|^p \int_{t_{r-1}}^T dt = \Delta t \max_{0\leq t\leq T} |\varphi'(t)|^p\,. \tag{4.6}$$

Ahora, de la primera integral de (4.5), se sigue

$$\begin{aligned}
&\int_0^{T-\Delta t} |\overline{\varphi_{\Delta t}}(t)-\varphi'(t)|^p\,dt\\
&= \sum_{i=1}^{r-1}\int_{t_{i-1}}^{t_i} \left|\frac{\varphi^{i+1}-\varphi^i}{\Delta t}-\varphi'(t)\right|^p dt\\
&= \sum_{i=1}^{r-1}\int_{t_{i-1}}^{t_i} \left|\frac{1}{\Delta t}\int_{t_i}^{t_{i+1}}\varphi'(\tau)\,d\tau-\varphi'(t)\right|^p dt\\
&= \sum_{i=1}^{r-1}\int_{t_{i-1}}^{t_i} \frac{1}{\Delta t^p}\left|\int_{t_i}^{t_{i+1}}\varphi'(\tau)\,d\tau-\Delta t\,\varphi'(t)\right|^p dt\\
&= \sum_{i=1}^{r-1}\int_{t_{i-1}}^{t_i} \frac{1}{\Delta t^p}\left|\int_{t_i}^{t_{i+1}}\varphi'(\tau)\,d\tau-\int_{t_i}^{t_{i+1}}\varphi'(t)\,d\tau\right|^p dt\\
&= \sum_{i=1}^{r-1}\int_{t_{i-1}}^{t_i} \frac{1}{\Delta t^p}\left|\int_{t_i}^{t_{i+1}}\int_t^\tau\varphi''(s)\,dsd\tau\right|^p dt\\
&\leq \sum_{i=1}^{r-1}\int_{t_{i-1}}^{t_i} \frac{1}{\Delta t^p}\left(\int_{t_i}^{t_{i+1}}\int_t^\tau|\varphi''(s)|\,dsd\tau\right)^p dt\\
&= \frac{1}{\Delta t^p}\sum_{i=1}^{r-1}\int_{t_{i-1}}^{t_i} \left(\int_{t_i}^{t_{i+1}}\int_t^\tau|\varphi''(s)|\,dsd\tau\right)^p dt\\
&\leq \frac{1}{\Delta t^p}\sum_{i=1}^{r-1}\int_{t_{i-1}}^{t_i} \left\{\int_{t_i}^{t_{i+1}}\left(\int_t^\tau ds\right)^{1/p}\left(\int_t^\tau|\varphi''(s)|^q\,ds\right)^{1/q}d\tau\right\}^p dt\\
&\leq \frac{1}{\Delta t^p}\sum_{i=1}^{r-1}\int_{t_{i-1}}^{t_i} \left\{\int_{t_i}^{t_{i+1}}(\tau-t)^{1/p}d\tau\right\}^p \|\varphi''\|_q^p\,dt
\end{aligned}$$

Ahora, haciendo el cambio de variable $u = \tau - t$ en lo anterior tenemos

$$\begin{aligned}
&\int_0^{T-\Delta t} |\overline{\varphi_{\Delta t}}(t) - \varphi'(t)|^p \, dt \\
&\leq \frac{1}{\Delta t^p} \|\varphi''\|_q^p \sum_{i=1}^{r-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left\{ \int_{t_i - t}^{t_{i+1}-t} u^{1/p} du \right\}^p dt \\
&= \frac{1}{\Delta t^p} \|\varphi''\|_q^p \sum_{i=1}^{r-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left\{ \frac{p}{p+1} \left((t_{i+1} - t)^{\frac{p+1}{p}} - (t_i - t)^{\frac{p+1}{p}} \right) \right\}^p dt \\
&\leq \frac{1}{\Delta t^p} \|\varphi''\|_q^p \left(\frac{2p}{p+1} \right)^p \sum_{i=1}^{r-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left\{ (t_{i+1} - t)^{p+1} + (t_i - t)^{p+1} \right\} dt.
\end{aligned} \tag{4.7}$$

Analicemos la integral

$$\int_{t_{i-1}}^{t_i} \left\{ (t_{i+1} - t)^{p+1} + (t_i - t)^{p+1} \right\} dt = \int_{t_{i-1}}^{t_i} (t_{i+1} - t)^{p+1} dt + \int_{t_{i-1}}^{t_i} (t_i - t)^{p+1} dt.$$

Por una parte, haciendo el cambio de variable $u = t_{i+1} - t$ en la primera integral se tiene

$$\begin{aligned}
\int_{t_{i-1}}^{t_i} (t_{i+1} - t)^{p+1} dt &= \int_{\Delta t}^{2\Delta t} u^{p+1} du \\
&= \frac{1}{p+2} \left\{ (2\Delta t)^{p+2} - \Delta t^{p+2} \right\} \\
&= \frac{1}{p+2} \left(2^{p+2} - 1 \right) \Delta t^{p+2}.
\end{aligned}$$

Por otro lado, haciendo el cambio de variable $u = t_i - t$ en la segunda integral se tiene

$$\int_{t_{i-1}}^{t_i} (t_i - t)^{p+1} dt = \int_0^{\Delta t} u^{p+1} du = \frac{1}{p+2} \Delta t^{p+2}.$$

Así, remplazando las dos igualdades anteriores en la última igualdad de (4.7), tenemos:

$$\begin{aligned}
\int_0^{T-\Delta t} |\overline{\varphi_{\Delta t}} - \varphi'|^p \, dt &\leq \frac{1}{\Delta t^p} \left(\frac{2p}{p+1} \right)^p \|\varphi''\|_q^p \sum_{i=1}^{r-1} \left(\frac{1}{p+2} \left(2^{p+2} - 1 \right) \Delta t^{p+2} + \frac{1}{p+2} \Delta t^{p+2} \right) \\
&= \frac{1}{\Delta t^p} \left(\frac{2p}{p+1} \right)^p \|\varphi''\|_q^p \sum_{i=1}^{r-1} \frac{1}{p+2} 2^{p+2} \Delta t^{p+2} \\
&= \frac{1}{p+2} 2^{p+2} \frac{1}{\Delta t^p} \Delta t^{p+1} \left(\frac{2p}{p+1} \right)^p \|\varphi''\|_q^p \sum_{i=1}^{r-1} \Delta t \\
&= \frac{1}{p+2} 2^{p+2} \left(\frac{2p}{p+1} \right)^p \|\varphi''\|_q^p (T - \Delta t) \Delta t \\
&\leq \frac{T}{p+2} 2^{p+2} \left(\frac{2p}{p+1} \right)^p \|\varphi''\|_q^p \Delta t \\
&=: C_1 \Delta t.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, por (4.6) y lo anterior se tiene que

$$\begin{aligned}
\|\overline{\varphi_{\Delta t}} - \varphi'\|_p &\leq \left\{ \Delta t \max_{0\leq t\leq T} |\varphi'|^p + C_1 \Delta t \right\}^{1/p} \\
&= \left\{ \max_{0\leq t\leq T} |\varphi'|^p + C_1 \right\}^{1/p} \Delta t^{1/p} \\
&=: C\Delta t^{1/p}.
\end{aligned}$$

□

Proposición 4.2. *Consideremos las funciones $\varphi, \varphi_{\Delta t}, \overline{\varphi_{\Delta t}} : [0,T] \to \mathbb{R}$ definidas como en la Proposición 4.1. Sean $f \in L^p(0,T;V^*)$, y $f^i \in V^*$ $i = 1, ..., r$ definidas como en* (3.12). *Definimos la función escalonada $f_{\Delta t} : [0,T] \to V^*$ por*

$$f_{\Delta t}(t) := \begin{cases} f^1, & si \quad t \in [t_0, t_1] \\ \\ f^i, & si \quad t \in (t_{i-1}, t_i], \quad i = 2, ..., r. \end{cases}$$

Entonces $f_{\Delta t} \in L^q(0,T;V^*)$ y

$$\|f_{\Delta t}\|_{L^q(0,T;V^*)} \leq \|f\|_{L^q(0,T;V^*)}\,. \tag{4.8}$$

Además, para cualquier $z^h \in V^h$ se tiene:

$$\begin{aligned}
&-\int_0^T \left(U_R^\delta, z_R^h\right)_R \overline{\varphi_{\Delta t}}\, dt + \int_0^T a(U^\delta, z^h)\varphi_{\Delta t}\, dt \\
&= \left(u_0, z_R^h\right)_R \varphi^1 - \left(U_R^\delta(T), z_R^h\right)_R \varphi(T) + \int_0^T \left\langle f_{\Delta t}, z^h \right\rangle \varphi_{\Delta t}\, dt.
\end{aligned} \tag{4.9}$$

Demostración. Notamos que por ser $f_{\Delta t}$ una función escalonada, entonces $f_{\Delta t}$ es medible e integrable. Veamos que se satisface (4.8),

$$\begin{aligned}
\|f_{\Delta t}\|^q_{L^q(0,T;V^*)} &= \int_0^T \|f_{\Delta t}\|^q_{V^*}\, dt \\
&= \sum_{i=1}^r \Delta t \left\|f^i\right\|^q_{V^*} \\
&= \sum_{i=1}^r \Delta t \left\| \frac{1}{\Delta t} \int_{t_{i-1}}^{t_i} f\, d\tau \right\|^q_{V^*} \\
&\leq \sum_{i=1}^r \Delta t^{1-q} \left\{ \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|f\|_{V^*}\, dt \right\}^q \\
&\leq \sum_{i=1}^r \Delta t^{1-q} \left\{ \left(\int_{t_{i-1}}^{t_i} dt \right)^{1/p} \left(\int_{t_{i-1}}^{t_i} \|f\|^q_{V^*}\, dt \right)^{1/q} \right\}^q.
\end{aligned}$$

Así,

$$
\begin{aligned}
\|f_{\Delta t}\|^q_{L^q(0,T;V^*)} &\leq \sum_{i=1}^{r} \Delta t^{1-q} \Delta t^{q/p} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|f\|^q_{V^*}\, dt \\
&= \sum_{i=1}^{r} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|f\|^q_{V^*}\, dt \\
&= \int_0^T \|f\|^q_{V^*}\, dt \\
&= \|f\|^q_{L^q(0,T;V^*)} .
\end{aligned}
$$

Veamos ahora que se satisface (4.9). Sea $z^h \in V^h$, definimos $z := \varphi^i z^h \in V^h$, $i = 1, ..., r$. Reemplazando $z \in V^h$ en (3.15) y sumando hasta r,

$$
\sum_{i=1}^{r} \left(U^i_R - U^{i-1}_R, z^h_R\right)_R \varphi^i + \Delta t \sum_{i=1}^{r} a(U^i, z^h)\varphi^i = \Delta t \sum_{i=1}^{r} \left\langle f^i, z^h \right\rangle \varphi^i. \tag{4.10}
$$

Analicemos las sumas de (4.10) por aparte. Notamos que,

$$
\Delta t \sum_{i=1}^{r} a(U^i, z^h)\varphi^i = \int_0^T a(U^\delta, z^h)\varphi_{\Delta t}\, dt,
$$

y

$$
\Delta t \sum_{i=1}^{r} \left\langle f^i, z^h\right\rangle \varphi^i = \int_0^T \left\langle f_{\Delta t}, z^h \right\rangle \varphi_{\Delta t}\, dt.
$$

Además,

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{r} \left(U^i_R - U^{i-1}_R, z^h_R\right)_R \varphi^i \\
&= \sum_{i=1}^{r} \left\{ \left(U^i_R, z^h_R\right)_R \varphi^i - \left(U^{i-1}_R, z^h_R\right)_R \varphi^i \right\} \\
&= \sum_{i=1}^{r} \left\{ - \left(U^i_R, z^h_R\right)_R (-\varphi^i) - \left(U^{i-1}_R, z^h_R\right)_R \varphi^i \right\} \\
&= \sum_{i=1}^{r} \left\{ - \left(U^i_R, z^h_R\right)_R (\varphi^{i+1} - \varphi^i) + \left(U^i_R, z^h_R\right)_R \varphi^{i+1} - \left(U^{i-1}_R, z^h_R\right)_R \varphi^i \right\} \\
&= - \sum_{i=1}^{r} \left(U^i_R, z^h_R\right)_R (\varphi^{i+1} - \varphi^i) + \sum_{i=1}^{r} \left(U^i_R, z^h_R\right)_R \varphi^{i+1} - \sum_{i=1}^{r} \left(U^{i-1}_R, z^h_R\right)_R \varphi^i \\
&= - \sum_{i=1}^{r-1} \left(U^i_R, z^h_R\right)_R (\varphi^{i+1} - \varphi^i) + \sum_{i=1}^{r} \left\{ \left(U^i_R, z^h_R\right)_R \varphi^{i+1} - \left(U^{i-1}_R, z^h_R\right)_R \varphi^i \right\},
\end{aligned}
$$

continuando con los calculos anteriores tenemos:

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{r}\left(U_R^i-U_R^{i-1},z_R^h\right)_R\varphi^i\\
&=-\sum_{i=1}^{r-1}\left(U_R^i,z_R^h\right)_R(\varphi^{i+1}-\varphi^i)+\left(U_R^r,z_R^h\right)_R\varphi^{r+1}-\left(U_R^0,z_R^h\right)_R\varphi^1\\
&=-\sum_{i=1}^{r-1}\left(U_R^i,z_R^h\right)_R(\varphi^{i+1}-\varphi^i)+\left(U_R^\delta(T),z_R^h\right)_R\varphi(T)-\left(u_0,z_R^h\right)_R\varphi^1\\
&=-\frac{1}{\Delta t}\Delta t\sum_{i=1}^{r-1}\left(U_R^i,z_R^h\right)_R(\varphi^{i+1}-\varphi^i)+\left(U_R^\delta(T),z_R^h\right)_R\varphi(T)-\left(u_0,z_R^h\right)_R\varphi^1\\
&=-\Delta t\sum_{i=1}^{r-1}\left(U_R^i,z_R^h\right)_R\left(\frac{\varphi^{i+1}-\varphi^i}{\Delta t}\right)+\left(U_R^\delta(T),z_R^h\right)_R\varphi(T)-\left(u_0,z_R^h\right)_R\varphi^1\\
&=-\int_0^T\left(U_R^\delta,z_R^h\right)\overline{\varphi_{\Delta t}}\,dt+\left(U_R^\delta(T),z_R^h\right)_R\varphi(T)-\left(u_0,z_R^h\right)_R\varphi^1.
\end{aligned}$$

Entonces, (4.10) es equivalente a

$$\begin{aligned}
&-\int_0^T\left(U_R^\delta,z_R^h\right)_R\overline{\varphi_{\Delta t}}\,dt+\int_0^T a(U^\delta,z^h)\varphi_{\Delta t}\,dt\\
&=\left(u_0,z_R^h\right)_R\varphi^1-\left(U_R^\delta(T),z_R^h\right)_R\varphi(T)+\int_0^T\left\langle f_{\Delta t},z^h\right\rangle\varphi_{\Delta t}\,dt.
\end{aligned}$$

□

Teorema 4.3 (Principal)**.** *Supongamos que las condiciones de las* ***Hipótesis*** $\mathbf{1-3}$ *se satisfacen. Sean* $1<p<\infty$ *con* $1/p+1/q=1$*,* $u_0\in H_R$ *y*

$$f^R\in L^q(0,T;\overline{V}_R^*)\quad y\quad f^S\in L^q(0,T;\overline{V}_S^*).$$

Entonces existe una única función $u\in W_R$ *que satisface el Problema* P*. Además las funciones de salto* $U^\delta:[0,T]\to V^h$ *definidas por* (3.16) *con* $\delta:=(h,\Delta t)$ *son tales que*

$$U^\delta\rightharpoonup u\qquad en\quad L^p(0,T;V),\quad si\quad \delta\to 0. \tag{4.11}$$

Demostración. La demostración se hará por partes. Primero demostraremos unicidad.

Prueba de unicidad:

Sean $u^1:=[u_R^1,u_S^1]$, $u^2:=[u_R^2,u_S^2]$ elementos de W_R que satisfacen el Problema P, por el Teorema 2.12, u^1 y u^2 también satisfacen el Problema P'. Así de la ecuación (2.51), $u_R^1(0)-u_R^2(0)=\mathbf{0}$ y para $v\in\overline{V}_R$,

$$\left\langle\frac{d}{dt}(u_R^1-u_R^2),v\right\rangle_R+\left\langle A^R(u_R^1)-A^R(u_R^2),v\right\rangle_R=0\qquad \text{c.t.p}\qquad [0,T].$$

En particular $u_R^1-u_R^2\in\overline{V}_R$, de donde

$$\left\langle\frac{d}{dt}(u_R^1-u_R^2),u_R^1-u_R^2\right\rangle_R+\left\langle A^R(u_R^1)-A^R(u_R^2),u_R^1-u_R^2\right\rangle_R=0\qquad \text{c.t.p}\qquad [0,T].$$

Integrando la ecuación anterior en $(0,t)$ tenemos

$$\int_0^t \left\langle \frac{d}{d\tau}(u_R^1 - u_R^2), u_R^1 - u_R^2 \right\rangle_R d\tau = -\int_0^t \left\langle A^R(u_R^1) - A^R(u_R^2), u_R^1 - u_R^2 \right\rangle_R d\tau,$$

pero por (3.2) (Parte 3 de la Hipótesis 2), $\left\langle A^R(u_R^1) - A^R(u_R^2), u_R^1 - u_R^2 \right\rangle_R \geq 0$. Así,

$$\int_0^t \left\langle A^R(u_R^1) - A^R(u_R^2), u_R^1 - u_R^2 \right\rangle_R d\tau \geq 0.$$

Luego,

$$\int_0^t \left\langle \frac{d}{d\tau}(u_R^1 - u_R^2), u_R^1 - u_R^2 \right\rangle_R d\tau \leq 0.$$

Por otro lado, por la fórmula de integración por partes (1.27), para casi todo $t \in [0,T]$ se sigue,

$$\begin{aligned} 0 \geq \int_0^t \left\langle \frac{d}{dt}(u_R^1 - u_R^2), u_R^1 - u_R^2 \right\rangle_R dt &= \frac{1}{2}\left(\left| u_R^1(t) - u_R^2(t) \right|_R^2 - \left| u_R^1(0) - u_R^2(0) \right|_R^2 \right) \\ &= \frac{1}{2}\left| u_R^1(t) - u_R^2(t) \right|_R^2. \end{aligned}$$

Así,

$$u_R^1 = u_R^2 \qquad \text{en} \qquad \overline{V}_R.$$

Veamos ahora que $u_S^1 = u_S^2$. En efecto, usando (2.52) y razonando como antes,

$$\left\langle A^S(u_S^1) - A^S(u_S^2), u_S^1 - u_S^2 \right\rangle_S = 0 \qquad \text{c.t.p} \qquad [0,T]. \tag{4.12}$$

Ya probamos que $u_R^1 = u_R^2$, por lo que $u_S^1 - u_S^2 \in \overset{\circ}{V}_S$. Así, por (3.3) (ver Hipótesis 2) se tiene

$$\left\langle A^S(u) - A^S(v), u - v \right\rangle_S > 0 \qquad \forall u, v \in \overline{V}_S,\ u \neq v,\ u - v \in \overset{\circ}{V}_S\ .$$

combinando lo anterior con (4.12) se deduce,

$$u_S^1 = u_S^2 \qquad \text{en} \qquad \overline{V}_S.$$

Por lo tanto,

$$u^1 = u^2.$$

Prueba de existencia y convergencia:

Puesto que deseamos analizar convergencia cuando $\delta \to 0$, entonces consideremos las sucesiones $\{h_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq (0, h^*)$ y $\{\Delta t_n\}_{n=1}^{\infty}$ cualesquiera, tales que

$$\lim_{n\to\infty} h_n = 0 \qquad \text{y} \qquad \lim_{n\to\infty} \Delta t_n = 0.$$

Consideraremos la sucesión $\left\{U^{\delta_n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ de $\left\{U^{\delta}\right\}_{h\in(0,h^*)}$, con $\delta_n = (h_n, \Delta t_n)$.

Ahora, por la hipótesis 1, V es un espacio de Banach reflexivo, luego $L^p(0,T;V)$ también es un espacio de Banach reflexivo, además por (3.25) la sucesión $\left\{U^{\delta_n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ es acotada en $L^p(0,T;V)$. Así, por el Teorema 1.10 existe una subsucesión de $\left\{U^{\delta_n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ que también denotaremos por simplicidad $\left\{U^{\delta_n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ tal que

$$U^{\delta_n} \rightharpoonup u \qquad \text{en} \qquad L^p(0,T;V), \qquad n \to \infty, \tag{4.13}$$

para algún $u \in L^p(0,T;V)$. Mostraremos que u es la solución del problema P.

De ahora en adelante, cualquier subsucesión será denotada de la misma manera que la sucesión original.

a) Existen $\zeta \in H_R$ y subsucesiones de $\left\{U_R^{\delta_n}(T)\right\}_{n=1}^{\infty}$, y $\left\{U_R^{\delta_n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ tales que:

$$U_R^{\delta_n}(T) \rightharpoonup \zeta \qquad \text{en} \qquad H_R, \qquad n \to \infty, \tag{4.14}$$

$$U_R^{\delta_n} \overset{*}{\rightharpoonup} u_R \qquad \text{en} \qquad L^\infty(0,T;H_R), \qquad n \to \infty. \tag{4.15}$$

En efecto, por la hipótesis 1, H_R es un espacio de Hilbert por lo que H_R es reflexivo y por la ecuación (3.23) se tiene que la sucesión $\left\{U_R^{\delta_n}(T)\right\}_{n=1}^{\infty}$ es acotada en H_R. Así, por el Teorema 1.10 existe una subsucesión de $\left\{U_R^{\delta_n}(T)\right\}_{n=1}^{\infty}$ tal que

$$U_R^{\delta_n}(T) \rightharpoonup \zeta \qquad \text{en} \qquad H_R, \qquad n \to \infty,$$

para algún $\zeta \in H_R$. Es decir, se tiene (4.14).

Mostremos ahora (4.15). Por la hipótesis 1, H_R es un espacio de Banach separable, por lo que $L^1(0,T;H_R)$ es un espacio de Banach separable. Además $H_R = H_R^*$, luego $(L^1(0,T;H_R))^* = L^\infty(0,T;H_R)$ y por la ecuación (3.24) la sucesión $\left\{U_R^{\delta_n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ es acotada en $L^\infty(0,T;H_R)$. Luego, por el Teorema 1.13 existe una subsucesión de $\left\{U_R^{\delta_n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ tal que

$$U_R^{\delta_n} \overset{*}{\rightharpoonup} \xi^* \qquad \text{en} \qquad L^\infty(0,T;H_R), \qquad n \to \infty,$$

para algún $\xi^* \in L^\infty(0,T;H_R)$. Es decir,

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^T \left\langle U_R^{\delta_n} - \xi^*, w\right\rangle_{H_R^*} dt = 0 \qquad \forall w \in L^1(0,T;H_R). \tag{4.16}$$

Mostraremos que $\xi^* = u_R$. Sea $n \in \mathbb{Z}^+$ cualquiera, en primer lugar notamos que por ser $U^{\delta_n}, u \in L^p(0,T;V)$ entonces $U_R^{\delta_n},\ u_R \in L^p(0,T;\overline{V}_R)$. Como $\overline{V}_R \subseteq H_R \subseteq \overline{V}_R^*$ es una terna de evolución, la inclusión $\overline{V}_R \subseteq H_R$ es continua, en consecuencia, por la Proposición 1.56 se tiene $U_R^{\delta_n}, u_R \in L^p(0,T;H_R)$.

Ahora, sea $w \in L^q(0,T;H_R)$, definimos $v \in V^*$ por

$$\langle v, u\rangle := (w, u_R)_R \qquad \forall u = [u_R, u_S] \in V.$$

Veamos que $v \in L^q(0,T;V^*)$. En efecto, sabemos que la inclusión $\overline{V}_R \subseteq H_R$ es continua, de donde

$$|\langle v, u\rangle| = |(w, v_R)_R| \le |w|_R\, |u_R|_R \le c\, |w|_R\, \|u_R\|_R \le c\, |w|_R\, \|u\| \qquad \forall u \in V.$$

Así,
$$\|v\|_{V^*} \leq c\,|w|_R\,.$$
Por lo anterior,
$$\int_0^T \|v\|_{V^*}^q \,dt \leq c^q \int_0^T |w|_R^q \,dt < \infty.$$
Por lo tanto, $v \in L^q(0,T;V^*)$. Así, por (4.13) para todo $w \in L^q(0,T;H_R)$, se sigue:
$$\lim_{n\to\infty} \int_0^T \big(w, U_R^{\delta_n} - u_R\big)_R \,dt = \lim_{n\to\infty} \int_0^T \big\langle v, U^{\delta_n} - u\big\rangle dt = 0. \tag{4.17}$$
Por otro lado, estamos identificando H_R^* con H_R, luego
$$\begin{aligned}\int_0^T \big\langle U^{\delta_n} - u_R, w\big\rangle_{H_R^*} \,dt &= \int_0^T \big(U^{\delta_n} - u_R, w\big)_R \,dt\\ &= \int_0^T \big(w, U^{\delta_n} - u_R\big)_R \,dt.\end{aligned}$$
En consecuencia, por (4.17),
$$\lim_{n\to\infty} \int_0^T \big\langle U^{\delta_n} - u_R, w\big\rangle_{H_R^*} \,dt = 0 \qquad \forall w \in L^q(0,T;H_R). \tag{4.18}$$
Ahora, notamos que,
$$\int_0^T \langle \xi^* - u_R, w\rangle_{H_R^*} \,dt = \int_0^T \big\langle U^{\delta_n} - u_R, w\big\rangle_{H_R^*} \,dt - \int_0^T \big\langle U^{\delta_n} - \xi^*, w\big\rangle_{H_R^*} \,dt.$$
Luego, haciendo $n \to \infty$ en lo anterior, por (4.16) y (4.18) se tiene $\xi^* - u_R = \mathbf{0}$ en $L^q(0,T;H_R^*)$. Por lo tanto $\xi^* - u_R = \mathbf{0}$ en $L^\infty(0,T;H_R^*)$, de donde, $\xi^* = u_R$ y
$$U_R^{\delta_n} \overset{*}{\rightharpoonup} u_R \qquad \text{en} \qquad L^\infty(0,T;H_R), \qquad n \to \infty.$$
Así, hemos mostrado (4.15).

b) Consideraremos las sucesiones $\left\{\chi^{\delta_n}\right\}_{n=1}^\infty \subseteq L^q(0,T;V^*)$, $\left\{\chi^{R,\delta_n}\right\}_{n=1}^\infty \subseteq L^q(0,T;\overline{V}_R^*)$ y $\left\{\chi^{S,\delta_n}\right\}_{n=1}^\infty \subseteq L^q(0,T;\overline{V}_S^*)$ definidas por:
$$\begin{aligned}\big\langle \chi^{\delta_n}, v\big\rangle &:= a(U^{\delta_n}, v) \qquad \forall v \in V,\\ \big\langle \chi^{R,\delta_n}, v\big\rangle &:= \big\langle A^R(U_R^{\delta_n}), v\big\rangle_R \qquad \forall v \in \overline{V}_R,\\ \big\langle \chi^{S,\delta_n}, v\big\rangle &:= \big\langle A^S(U_S^{\delta_n}), v\big\rangle_S \qquad \forall v \in \overline{V}_S.\end{aligned}$$
Demostraremos que dichas sucesiones poseen subsucesiones débilmente convergentes, es decir, que existen $\chi \in L^q(0,T;V^*)$, $\chi^R \in L^q(0,T;\overline{V}_R^*)$ y $\chi^S \in L^q(0,T;\overline{V}_S^*)$ tales que:
$$\chi^{\delta_n} \overset{*}{\rightharpoonup} \chi \qquad \text{en} \qquad L^q(0,T;V^*), \qquad n \to \infty, \tag{4.19}$$
$$\chi^{R,\delta_n} \overset{*}{\rightharpoonup} \chi^R \qquad \text{en} \qquad L^q(0,T;\overline{V}_R^*), \qquad n \to \infty, \tag{4.20}$$
$$\chi^{S,\delta_n} \overset{*}{\rightharpoonup} \chi^S \qquad \text{en} \qquad L^q(0,T;\overline{V}_S^*) \qquad n \to \infty. \tag{4.21}$$

y que,

$$\langle \chi, v\rangle = \left\langle \chi^R, v_R\right\rangle_R + \left\langle \chi^S, v_S\right\rangle_S \qquad \forall v = [v_R, v_S] \in V. \tag{4.22}$$

En efecto, por (3.6) y (3.1), para todo $n \in \mathbb{Z}^+$ se sigue,

$$\begin{aligned}
\left\|\chi^{\delta_n}\right\|_{V^*} &\leq C\left\|U^{\delta_n}\right\|^{p-1},\\
\left\|\chi^{R,\,\delta_n}\right\|_{\overline{V}_R^*} &\leq C\left\|U_R^{\delta_n}\right\|_R^{p-1},\\
\left\|\chi^{S,\,\delta_n}\right\|_{\overline{V}_S^*} &\leq C\left\|U_S^{\delta_n}\right\|_S^{p-1}.
\end{aligned}$$

Así, $\chi^{\delta_n} \in L^q(0,T;V^*)$, $\chi^{R,\,\delta_n} \in L^q(0,T;\overline{V}_R^*)$ y $\chi^{S,\,\delta} \in L^q(0,T;\overline{V}_S^*)$, para todo $n \in \mathbb{Z}^+$. Además, por (3.25):

$$\begin{aligned}
\left\|\chi^{\delta_n}\right\|_{L^q(0,T;V^*)} &\leq C,\\
\left\|\chi^{R,\,\delta_n}\right\|_{L^q(0,T;\overline{V}_R^*)} &\leq C,\\
\left\|\chi^{S,\,\delta_n}\right\|_{L^q(0,T;\overline{V}_S^*)} &\leq C.
\end{aligned}$$

Así, hemos mostrado que las sucesiones $\left\{\chi^{\delta_n}\right\}_{n=1}^{\infty}$, $\left\{\chi^{R,\,\delta_n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ y $\left\{\chi^{S,\,\delta_n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ son acotadas en los espacios de Banach reflexivos $L^q(0,T;V^*)$, $L^q(0,T;\overline{V}_R^*)$ y $L^q(0,T;\overline{V}_S^*)$ respectivamente. En consecuencia, por el Teorema 1.13 se tienen las afirmaciones (4.19)–(4.21). Es decir, cuando $n \to \infty$, se tiene:

$$\begin{aligned}
\int_0^T \left\langle \chi^{\delta_n}, w\right\rangle dt &= \int_0^T a\left(U^{\delta_n}, w\right) dt \to \int_0^T \langle \chi, w\rangle\, dt \qquad \forall w \in L^p(0,T;V),\\
\int_0^T \left\langle \chi^{R,\,\delta_n}, w\right\rangle dt &= \int_0^T \left\langle A^R(U_R^{\delta_n}), w\right\rangle_R dt \to \int_0^T \left\langle \chi^R, w\right\rangle_R dt \qquad \forall w \in L^p(0,T;\overline{V}_R),\\
\int_0^T \left\langle \chi^{S,\,\delta_n}, w\right\rangle dt &= \int_0^T \left\langle A^S(U_S^{\delta_n}), w\right\rangle_S dt \to \int_0^T \left\langle \chi^S, w\right\rangle_S dt \qquad \forall w \in L^p(0,T;\overline{V}_S).
\end{aligned}$$

Por último, notamos que

$$\int_0^T \left\langle \chi^{\delta}, w\right\rangle dt = \int_0^T \left\{\left\langle \chi^{R,\,\delta}, w_R\right\rangle_R + \left\langle \chi^{S,\,\delta}, w_S\right\rangle_S\right\} dt \qquad \forall w \in L^p(0,T;V).$$

Además, dados $v \in V$ y $\varphi \in C_0^\infty(0,T)$ se tiene $v\varphi \in L^p(0,T;V)$, por lo que, por (4.19)–(4.20) se sigue,

$$\int_0^T \langle \chi, v\rangle \varphi\, dt = \int_0^T \left\{\left\langle \chi^R, v_R\right\rangle_R + \left\langle \chi^S, v_S\right\rangle_S\right\}\varphi\, dt \qquad \forall \varphi \in C_0^\infty(0,T).$$

En consecuencia, por el Lema 1.62 (Lema variacional) se tiene (4.22).

c) Para todo $z \in V$ se satisface el problema:

$$\frac{d}{dt}(u_R, z_R)_R + \langle \chi, z\rangle = \langle f, z\rangle \qquad \text{en} \qquad \mathcal{D}'(0,T). \tag{4.23}$$

En efecto, supondremos que las condiciones de la Proposición 4.2 se satisfacen, entonces (4.9) se satisface para todo $n \in \mathbb{Z}^+$, es decir, para todo $z^h \in V^h$ se cumple:

$$
\begin{aligned}
&-\int_0^T \left(U_R^{\delta_n}, z_R^h\right)_R \overline{\varphi_{\Delta t_n}}\, dt + \int_0^T a(U^{\delta_n}, z^h)\varphi_{\Delta t_n}\, dt \\
&= \left(u_0, z_R^h\right)_R \varphi^1 - \left(U_R^{\delta_n}(T), z_R^h\right)_R \varphi(T) + \int_0^T \left\langle f_{\Delta t_n}, z^h\right\rangle \varphi_{\Delta t_n}\, dt.
\end{aligned}
\tag{4.24}
$$

Sea $z \in V$ cualquiera, escogemos $z^h \in V^h$ tal que $\left\|z^h - z\right\| \to 0$ si $h \to 0$. Analicemos cada término de (4.24) por aparte.

De la primera integral, se tiene:

$$
\begin{aligned}
&\int_0^T \left(U_R^{\delta_n}, z_R^h\right)_R \overline{\varphi_{\Delta t_n}}\, dt \\
&= \int_0^T \left(U_R^{\delta_n}, z_R^h - z_R\right)_R \overline{\varphi_{\Delta t_n}}\, dt + \int_0^T \left(U_R^{\delta_n}, z_R\right)_R \overline{\varphi_{\Delta t_n}}\, dt \\
&= \int_0^T \left(U_R^{\delta_n}, z_R^h - z_R\right)_R \overline{\varphi_{\Delta t_n}}\, dt + \int_0^T \left(U_R^{\delta_n}, z_R\right)_R \varphi' dt \\
&\quad + \int_0^T \left(U_R^{\delta_n}, z_R\right)_R (\overline{\varphi_{\Delta t_n}} - \varphi')\, dt.
\end{aligned}
\tag{4.25}
$$

Puesto que $z^h \to z$ en V si $h \to 0$, entonces $z_R^h \to z_R$ en $\overline{V}_R$ si $h \to 0$. Además, por la Proposición 4.1, $\|\overline{\varphi_{\Delta t}} - \varphi'\|_p \to 0$ si $\Delta t \to 0$ y por (3.24), $\left\|U_R^{\delta}\right\|_{L^\infty(0,T;H_R)} \leq C$, por lo que:

$$
\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \int_0^T \left(U_R^{\delta_n}, z_R^h - z_R\right)_R \overline{\varphi_{\Delta t_n}}\, dt = 0 \\
&\lim_{n\to\infty} \int_0^T \left(U_R^{\delta_n}, z_R\right)_R (\overline{\varphi_{\Delta t_n}} - \varphi')\, dt = 0.
\end{aligned}
\tag{4.26}
$$

Por otro lado, por (4.15), $U_R^{\delta} \overset{*}{\rightharpoonup} u_R$ en $L^\infty(0,T;H_R)$, luego,

$$
\lim_{n\to\infty} \int_0^T \left(U_R^{\delta_n}, z_R\right)_R \varphi' dt = \int_0^T (u_R, z_R)_R\, \varphi' dt.
$$

Combinando (4.25), (4.26) y lo anterior obtenemos:

$$
\lim_{n\to\infty} \int_0^T \left(U_R^{\delta_n}, z_R^h\right)_R \overline{\varphi_{\Delta t_n}}\, dt = \int_0^T (u_R, z_R)\, \varphi' dt. \tag{4.27}
$$

Ahora, analicemos la segunda integral de (4.24):

$$
\begin{aligned}
\int_0^T a\left(U^{\delta_n}, z^h\right) \varphi_{\Delta t_n}\, dt &= \int_0^T a\left(U^{\delta_n}, z^h - z\right) \varphi_{\Delta t_n}\, dt + \int_0^T a\left(U^{\delta_n}, z\right) \varphi_{\Delta t_n}\, dt \\
&= \int_0^T a\left(U^{\delta_n}, z^h - z\right) \varphi_{\Delta t_n}\, dt + \int_0^T a\left(U^{\delta_n}, z\right) (\varphi_{\Delta t_n} - \varphi)\, dt \\
&\quad + \int_0^T a\left(U^{\delta_n}, z\right) \varphi\, dt.
\end{aligned}
\tag{4.28}
$$

Razonando de manera análoga a (4.25) y recordando que $z^h \to z$ en V si $h \to 0$, $\|\varphi_{\Delta t} - \varphi\|_p \to 0$ si $\Delta t \to 0$ se tiene:

$$\begin{aligned} &\lim_{n\to\infty} \int_0^T a\left(U^{\delta_n}, z^h - z\right) \varphi_{\Delta t_n}\, dt = 0, \\ &\lim_{n\to\infty} \int_0^T a(U^\delta, z)\,(\varphi_{\Delta t} - \varphi)\; dt = 0. \end{aligned} \tag{4.29}$$

Además, por (4.19), $\chi^\delta \rightharpoonup \chi$ en $L^q(0,T;V^*)$, por lo que

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^T a(U^\delta, z)\varphi\, dt = \int_0^T \left\langle \chi^\delta, \varphi z\right\rangle dt \to \int_0^T \langle \chi, z\rangle\, \varphi\, dt.$$

Por lo tanto, por (4.29) y lo anterior, de (4.28) se tiene,

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^T a\left(U^{\delta_n}, z^h\right) \varphi_{\Delta t_n}\, dt = \int_0^T \langle \chi, z\rangle\, \varphi\, dt. \tag{4.30}$$

Analicemos el primer término de (4.24). Por definición de φ^i sabemos que $\varphi^1 = \varphi(t_1)$ con $|t_1| = |\Delta t_n|$, por lo que $t_1 \to 0$ si $n \to \infty$. Así, recordando que $z_R^h \to z_R$ en $\overline{V}_R$ si $h \to 0$ entonces,

$$\lim_{n\to\infty} (u_0, z_R^h)_R \varphi^1 = \lim_{n\to\infty} (u_0, z_R^h - z_R)_R \varphi^1 + \lim_{n\to\infty} (u_0, z_R)_R \varphi^1 = (u_0, z_R)\varphi(0). \tag{4.31}$$

Ahora, analizamos el segundo término del lado derecho de (4.24):

$$\left(U_R^{\delta_n}(T), z_R^h\right)_R \varphi(T) = \left(U_R^{\delta_n}(T), z_R^h - z_R\right)_R \varphi(T) + \left(U_R^{\delta_n}(T), z_R\right)_R \varphi(T).$$

Por (3.23), $\left|U_R^\delta(T)\right|_R \leq C$, y por (4.14), $U_R^\delta(T) \rightharpoonup \zeta$ en H_R. Así, pasando al limíte en lo anterior,

$$\lim_{n\to\infty} \left(U_R^{\delta_n}(T), z_R^h\right)_R \varphi(T) = (\zeta, z_R)_R \varphi(T). \tag{4.32}$$

Veamos por último la tercera integral de (4.24).

$$\int_0^T \left\langle f_{\Delta t_n}, z^h\right\rangle \varphi_{\Delta t_n}\, dt = \int_0^T \left\langle f_{\Delta t_n}, z^h - z\right\rangle \varphi_{\Delta t_n}\, dt + \int_0^T \langle f_{\Delta t_n}, z\rangle\, \varphi_{\Delta t_n}\, dt. \tag{4.33}$$

Por (4.8), $\|f_{\Delta t}\|_{L^q(0,T;V^*)} \leq \|f\|_{L^q(0,T;V^*)}$, entonces,

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^T \left\langle f_{\Delta t_n}, z^h - z\right\rangle \varphi_{\Delta t_n}\, dt = 0. \tag{4.34}$$

Ahora, notamos que

$$\begin{aligned}
\int_0^T \langle f_{\Delta t_n}, z\rangle\, \varphi_{\Delta t_n}\, dt &= \sum_{i=1}^{r} \Delta t\, \left\langle f^i, z\right\rangle \frac{\varphi^{i+1}-\varphi^i}{\Delta t}\\
&= \sum_{i=1}^{r} \Delta t \left\langle \frac{1}{\Delta t}\int_{t_{i-1}}^{t_i} f\, d\tau, z\right\rangle \frac{\varphi^{i+1}-\varphi^i}{\Delta t}\\
&= \sum_{i=1}^{r} \left\langle \int_{t_{i-1}}^{t_i} f\, d\tau, z\right\rangle \frac{\varphi^{i+1}-\varphi^i}{\Delta t}\\
&= \sum_{i=1}^{r} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \langle f, z\rangle\, \varphi_{\Delta t}\, dt\\
&= \int_0^T \langle f, z\rangle\, \varphi_{\Delta t}\, dt.
\end{aligned}$$

Entonces, por lo anterior:

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^T \langle f_{\Delta t_n}, z\rangle\, \varphi_{\Delta t_n}\, dt = \int_0^T \langle f, z\rangle\, \varphi\, dt. \tag{4.35}$$

Por lo tanto, por (4.34) y (4.35) tenemos en (4.33),

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^T \left\langle f_{\Delta t_n}, z^h\right\rangle \varphi_{\Delta t_n}\, dt = \int_0^T \langle f, z\rangle\, \varphi\, dt. \tag{4.36}$$

Así, por (4.27), (4.30), (4.31), (4.32) y (4.36), vemos que pasando al límete en (4.24), se tiene para todo $z \in V$ que,

$$\begin{aligned}
&-\int_0^T (u_R, z_R)_R\, \varphi' dt + \int_0^T \langle \chi, z\rangle\, \varphi\, dt\\
&= \int_0^T \langle f, z\rangle\, \varphi\, dt + (u_0, z_R)_R\varphi(0) - (\zeta, z_R)_R\varphi(T) \qquad \forall \varphi \in C^\infty([0,T]).
\end{aligned} \tag{4.37}$$

Restringiendo a $\varphi \in C_0^\infty(0,T)$ en (4.37), tenemos:

$$-\int_0^T (u_R, z_R)_R\, \varphi' dt + \int_0^T \langle \chi, z\rangle\, \varphi\, dt = \int_0^T \langle f, z\rangle\, \varphi\, dt \qquad \forall \varphi \in C_0^\infty(0,T). \tag{4.38}$$

Ahora, como

$$\int_0^T \frac{d}{dt}(u_R, z_R)_R \varphi\, dt = -\int_0^T (u_R, z_R)_R\, \varphi' dt \qquad \forall \varphi \in C_0^\infty(0,T)$$

entonces, para todo $z \in V$, (4.38) es equivalente a

$$\frac{d}{dt}(u_R, z_R)_R + \langle \chi, z\rangle = \langle f, z\rangle \qquad \text{en} \qquad \mathcal{D}'(0,T).$$

En consecuencia, se tiene (4.23).

d) $u \in W_R$ y además:

$$u'_R + \chi^R = f^R \qquad \text{c.t.p} \qquad [0,T] \quad \text{en} \quad \overline{V}^*_R, \tag{4.39}$$

$$\chi^S = f^S \qquad \text{c.t.p} \qquad [0,T] \quad \text{en} \quad \overline{V}^*_S. \tag{4.40}$$

Mostremos primero (4.39). Sea $w \in \overset{\circ}{V}_R$, entonces $z := [w, \mathbf{0}] \in V$. Así, de (4.22) se tiene,

$$\int_0^T \langle \chi, z \rangle \, \varphi \, dt = \int_0^T \left\langle \chi^R, w \right\rangle_R \varphi \, dt \qquad \forall \varphi \in C_0^\infty(0,T).$$

Luego, por (4.23), para todo $w \in \overset{\circ}{V}_R$ se cumple,

$$\frac{d}{dt}(u_R, w)_R + \left\langle \chi^R, w \right\rangle_R = \left\langle f^R, w \right\rangle_R \qquad \text{en} \qquad \mathcal{D}'(0,T). \tag{4.41}$$

Definimos las funciones $G, g : [0,T] \to \mathbb{R}$ por:

$$\begin{aligned} G(t) &:= (u_R(t), w)_R, \\ g(t) &:= \left\langle f^R(t) - \chi^R(t), w \right\rangle_R. \end{aligned}$$

Puesto que $u_R \in L^p(0,T;\overline{V}_R)$, f^R, $\chi^R \in L^q(0,T;\overline{V}^*_R)$, y $(\cdot,\cdot)$, $\langle \cdot,\cdot \rangle$ son continuas entonces $G(t)$ y $g(t)$, son funciones medibles. Veamos ahora que sus integrales son finitas. Analicemos primero la integral de G.

$$\begin{aligned} \int_0^T |G(t)|^p \, dt &= \int_0^T |(u_R(t), w)_R|^p \, dt \\ &\leq \int_0^T |u_R(t)|_R^p \, |w|_R^p \, dt \\ &\leq C \, \|w\|_R^p \int_0^T |u_R(t)|_R^p \, dt \\ &= C \, \|w\|_R^p \, \|u_R\|^p_{L^p(0,T;\overline{V}_R)} \end{aligned}$$

Por lo tanto $G \in L^p(0,T)$. Veamos ahora la integral de g.

$$\begin{aligned} \int_0^T |g(t)|^q \, dt &= \int_0^T \left| \left\langle f^R(t) - \chi^R(t), w \right\rangle_R \right|^q dt \\ &\leq \int_0^T \left\| f^R(t) - \chi^R(t) \right\|^q_{\overline{V}^*_R} \|w\|_R^q \, dt \\ &= \|w\|_R^q \int_0^T \left\| f^R(t) - \chi^R(t) \right\|^q_{\overline{V}^*_R} dt \\ &\leq \|w\|_R^q \int_0^T \left(\left\| f^R \right\|_{\overline{V}^*_R} + \left\| \chi^R \right\|_{\overline{V}^*_R} \right)^q dt \\ &\leq 2^q \, \|w\|_R^q \int_0^T \left\{ \left\| f^R \right\|^q_{\overline{V}^*_R} + \left\| \chi^R \right\|^q_{\overline{V}^*_R} \right\} dt \\ &= 2^q \, \|w\|_R^q \left(\left\| f^R \right\|^q_{L^q(0,T;\overline{V}^*_R)} + \left\| \chi^R \right\|^q_{L^q(0,T;\overline{V}^*_R)} \right) \end{aligned}$$

En consecuencia, $g \in L^q(0,T)$. Ahora, sea $F : [0,T] \to \mathbb{R}$ definida por,

$$F(t) := \int_0^t g(\tau)\, d\tau.$$

Por la Proposición 1.71, F es absolutamente continua en $[0,T]$ y

$$F'(t) = g(t) \qquad \text{c.t.p} \qquad t \in [0,T].$$

Así,

$$\int_0^T F(t)\varphi'(t)\, dt = -\int_0^T F'(t)\varphi(t)\, dt = -\int_0^T g(t)\varphi(t)\, dt \qquad \forall \varphi \in C_0^\infty(0,T).$$

Además de (4.41),

$$\int_0^T G(t)\varphi'(t)\, dt = -\int_0^T g(t)\varphi(t)\, dt \qquad \forall \varphi \in C_0^\infty(0,T).$$

Por lo que,

$$\int_0^T (G(t) - F(t))'\, \varphi(t)\, dt = 0 \qquad \forall \varphi \in C_0^\infty(0,T).$$

Luego, por el Lema 1.62 (Lema variacional), $(G(t) - F(t))' = 0$ para casi todo $t \in [0,T]$. Entonces, por la Proposición 1.72, existe $c_0 \in \mathbb{R}$ tal que

$$G(t) = c_0 + F(t) \qquad \text{c.t.p} \qquad t \in [0,T].$$

Es decir,

$$G(t) = c_0 + \int_0^t g(\tau)\, d\tau \qquad \text{c.t.p} \qquad t \in [0,T]. \tag{4.42}$$

Para determinar c_0, escogemos $\varphi \in C^\infty([0,T])$ en (4.37) con $\varphi(0) = 1$, $\varphi(T) = 0$ y obtenemos:

$$-\int_0^T G(t)\varphi'(t)\, dt = \int_0^T g(t)\varphi(t)\, dt + (u_0, w)_R \qquad \forall \varphi \in C^\infty([0,T]).$$

Por (4.42), para todo $\varphi \in C^\infty([0,T])$ lo anterior es equivalente a

$$-\int_0^T \left(c_0 + \int_0^t g(\tau)\, d\tau \right) \varphi'(t)\, dt = \int_0^T g(t)\varphi(t)\, dt + (u_0, w)_R. \tag{4.43}$$

Analicemos la integral del lado izquierdo de (4.43) por aparte. Sea $H : [0,T] \to \mathbb{R}$ definida por

$$H(t) := c_0 + \int_0^t g(\tau)\, d\tau,$$

entonces H es absolutamente continua y

$$H'(t) = g(t) \qquad \text{c.t.p} \qquad t \in [0,T].$$

Por la Proposición 3.9 y dado que $\varphi(T) = 1$ y $\varphi(0) = 0$ se tiene:

$$\begin{aligned}\int_0^T H(t)\varphi'(t)\,dt &= H(T)\varphi(T) - H(0)\varphi(0) - \int_0^T H'(t)\varphi(t)\,dt \\ &= -H(0) - \int_0^T H'(t)\varphi(t)\,dt \\ &= -c_0 - \int_0^T g(t)\varphi(t)\,dt.\end{aligned}$$

Por lo tanto, sustituyendo lo anterior en (4.43) obtenemos,

$$c_0 = (u_0, w)_R.$$

Luego, de (4.42) se sigue,

$$G(t) = (u_0, w)_R + \int_0^t g(\tau)\,d\tau \qquad \text{c.t.p} \qquad t \in [0, T].$$

Ahora, recordando como se definieron las funciones $G(t)$ y $g(t)$ para todo $t \in [0, T]$ tenemos,

$$(u_R(t), w)_R = (u_0, w)_R + \int_0^t \left\langle f^R(\tau) - \chi^R(\tau), w\right\rangle_R d\tau \qquad \forall w \in \overset{\circ}{V}_R\ .$$

Puesto que $\overset{\circ}{V}_R \subseteq H_R \subseteq \overset{\circ}{V}{}^*_R$ y $\overline{V}_R \subseteq H_R \subseteq \overline{V}{}^*_R$ son ternas de evolución, entonces se puede proceder como en la primera parte de la demostración del Teorema 2.12 para obtener,

$$u_R' + \chi^R = f^R \qquad \text{c.t.p} \qquad [0, T] \quad \text{en} \quad \overline{V}{}^*_R.$$

Es decir, se tiene (4.39). Además, $f^R, \chi^R \in L^q(0, T; \overline{V}{}^*_R)$, entonces por lo anterior $u_R' \in L^q(0, T; \overline{V}{}^*_R)$. Así, hemos mostrado que $u \in W_R$.

Mostremos ahora (4.40). Sea $z \in V$, usando (4.22) y (4.39) en (4.23) se tiene para todo $\varphi \in C_0^\infty(0, T)$ que:

$$\begin{aligned}&\int_0^T \left\langle f^R - \chi^R, z_R\right\rangle_R \varphi\,dt + \int_0^T \left\langle \chi^R, z_R\right\rangle_R \varphi\,dt + \int_0^T \left\langle \chi^S, z_S\right\rangle_S \varphi\,dt \\ &= \int_0^T \left\langle f^R, z_R\right\rangle_R \varphi\,dt + \int_0^T \left\langle f^S, z_S\right\rangle_S \varphi\,dt.\end{aligned}$$

En consecuencia,

$$\int_0^T \left\langle \chi^S, z_S\right\rangle_S \varphi\,dt = \int_0^T \left\langle f^S, z_S\right\rangle_S \varphi\,dt \qquad \forall \varphi \in C_0^\infty(0, T).$$

Por la Proposición 1.61, tenemos para todo $z_S \in \overline{V}_S$,

$$\left\langle \int_0^T \left\{\chi^S - f^S\right\} \varphi\,dt, z_S \right\rangle_S = 0 \qquad \forall \varphi \in C_0^\infty(0, T).$$

Así,

$$\int_0^T \left\{\chi^S - f^S\right\} \varphi\, dt = \mathbf{0} \qquad \forall \varphi \in C_0^\infty(0,T).$$

Por lo tanto, por el Lema 1.62 (Lema variacional),

$$\chi^S = f^S \qquad \text{c.t.p} \qquad [0,T] \quad \text{en} \quad \overline{V}_S^*.$$

En consecuencia, se tiene (4.40).

e) Si comparamos (4.39)–(4.40), con el problema P' (ver (2.50)–(2.52)), notamos que para demostrar que u es solución del problema P (el cual es equivalente con el problema P'), es suficiente mostrar que

$$\chi^R = A^R(u), \qquad \chi^S = A^S(u),$$

o equivalentemente (dado que $\chi = \chi^R + \chi^S$):

$$\langle \chi, v\rangle = a(u,v) \qquad \forall v \in V. \tag{4.44}$$

Demostraremos la identidad anterior.

En primer lugar, puesto que $u \in W_R$ entonces $u_R \in W_1^p(0,T;\overline{V}_R, H_R) \subseteq C\left([0,T];H_R\right)$. Así, por la Proposición 3.9, se tiene en la primera integral de (4.37):

$$\begin{aligned} &-\int_0^T (u_R, z_R)_R \varphi' dt \\ &= (u_R(0), z_R)_R\varphi(0) - (u_R(T), z_R)_R\varphi(T) + \int_0^T \frac{d}{dt}(u_R, z_R)_R \varphi\, dt. \end{aligned}$$

Sustituyendo lo anterior en (4.37),para todo $\varphi \in C^\infty([0,T])$ se tiene:

$$\begin{aligned} &(u_0, z_R)_R\varphi(0) - (u_R(T), z_R)_R\varphi(T) + \int_0^T \frac{d}{dt}(u_R, z_R)_R\varphi\, dt + \int_0^T \langle \chi, z\rangle\, \varphi dt \\ &= \int_0^T \langle f, z\rangle\, \varphi\, dt + (u_0, z_R)_R\varphi(0) - (\zeta, z_R)_R\varphi(T). \end{aligned} \tag{4.45}$$

Por otro lado, por ser:

$$\begin{aligned} \langle f, v\rangle &= \left\langle f^R, v_R\right\rangle_R + \left\langle f^S, v_S\right\rangle_S \qquad \forall v = [v_R, v_S] \in V, \\ \langle \chi, v\rangle &= \left\langle \chi^R, v_R\right\rangle_R + \left\langle \chi^S, v_S\right\rangle_S \qquad \forall v = [v_R, v_S] \in V, \end{aligned}$$

entonces, sumando (4.39) y (4.40), para todo $z \in V$ y toda $\varphi \in C^\infty([0,T])$ se tiene,

$$\int_0^T \frac{d}{dt}(u_R, z_R)_R\varphi\, dt + \int_0^T \langle \chi, z\rangle\, \varphi\, dt = \int_0^T \langle f, z\rangle\, \varphi\, dt.$$

Por lo tanto, por (4.45) y lo anterior, para todo $z \in V$ se deduce,

$$(u_R(T), z_R)_R\varphi(T) = (\zeta, z_R)_R\varphi(T) \qquad \forall \varphi \in C^\infty([0,T]).$$

De donde,

$$u_R(T) = \zeta.$$

Por lo anterior de (4.14) obtenemos,

$$U_R^{\delta_n}(T) \rightharpoonup u_R(T) \qquad \text{en} \qquad H_R, \qquad n \to \infty. \tag{4.46}$$

Ahora, de (4.39) notamos,

$$\chi^R = f^R - u_R' \qquad \text{c.t.p} \qquad [0,T].$$

Así, (4.40) y (4.22) implican para todo $w \in L^p(0,T;V)$:

$$\begin{aligned}\int_0^T \langle \chi, w \rangle \, dt &= \int_0^T \left\langle f^R - u_R', w_R \right\rangle_R dt + \int_0^T \left\langle f^S, w_S \right\rangle_S dt \\ &= -\int_0^T \langle u_R', w_R \rangle_R \, dt + \int_0^T \langle f, w \rangle \, dt.\end{aligned}$$

En particular para $w = u \in L^p(0,T;V)$ obtenemos,

$$\int_0^T \langle \chi, u \rangle \, dt = -\int_0^T \langle u_R', u_R \rangle_R \, dt + \int_0^T \langle f, u \rangle \, dt. \tag{4.47}$$

Analicemos la primera integral del lado derecho de lo anterior por separado. Por la fórmula de integración por partes (1.27) sabemos que:

$$\begin{aligned}\int_0^T \langle u_R', u_R \rangle_R \, dt &= \frac{1}{2} \int_0^T \{\langle u_R', u_R \rangle_R + \langle u_R', u_R \rangle_R\} \, dt \\ &= \frac{1}{2} \{(u_R(T), u_R(T))_R - (u_R(0), u_R(0))_R\} \\ &= \frac{1}{2} \left\{|u_R(T)|_R^2 - |u_R(0)|_R^2\right\} \\ &= \frac{1}{2} |u_R(T)|_R^2 - \frac{1}{2} |u_0|_R^2 .\end{aligned}$$

En consecuencia, (4.47) es equivalente a

$$\int_0^T \langle \chi, u \rangle \, dt = \frac{1}{2} |u_0|_R^2 - \frac{1}{2} |u_R(T)|_R^2 + \int_0^T \langle f, u \rangle \, dt. \tag{4.48}$$

Ahora, sea $n \in \mathbb{Z}^+$, definamos $X^{\delta_n} : L^p(0,T;V) \to \mathbb{R}$ para todo $w \in L^p(0,T;V)$ por:

$$X^{\delta_n}(w) := \int_0^T \left\{a(U^{\delta_n}, U^{\delta_n} - w) - a(w, U^{\delta_n} - w)\right\} dt, \tag{4.49}$$

demostraremos que:

$$\int_0^T \langle \chi, u - w \rangle \, dt - \int_0^T a(w, u - w) \, dt \geq 0 \qquad \forall w \in L^p(0,T;V). \tag{4.50}$$

En efecto, por la monotonía de la función $a : V \times V \to \mathbb{R}$ (ver ecuación (3.7)), se tiene que $X^{\delta_n}(w)$ es no negativa para todo $w \in L^p(0,T;V)$. Sea $z := U^i \in V^h$ en (3.15), sumando hasta r y razonando de la misma manera como se hizó en (3.27) se tiene:

$$\sum_{i=1}^{r} \left|U_R^i - U_R^{i-1}\right|_R^2 + \left|U_R^{\delta_n}(T)\right|_R^2 - |u_0|_R^2 + 2\Delta t \sum_{i=1}^{r} a(U^i, U^i) = 2\Delta t \sum_{i=1}^{r} \left\langle f^i, U^i \right\rangle.$$

Luego,

$$\left|U_R^{\delta_n}(T)\right|_R^2 - |u_0|_R^2 + \sum_{i=1}^{r} \left|U_R^i - U_R^{i-1}\right|_R^2 + 2\int_0^T a(U^{\delta_n}, U^{\delta_n})\, dt = 2\int_0^T \left\langle f_{\Delta t_n}, U^{\delta_n} \right\rangle dt.$$

Así,

$$\int_0^T a(U^{\delta_n}, U^{\delta_n})\, dt \leq \int_0^T \left\langle f_{\Delta t_n}, U^{\delta_n} \right\rangle dt + \frac{1}{2}|u_0|_R^2 - \frac{1}{2}\left|U_R^{\delta_n}(T)\right|_R^2. \tag{4.51}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
&\int_0^T a(U^{\delta}, U^{\delta_n})\, dt \\
&= \int_0^T \left\{a(U^{\delta_n}, U^{\delta_n} - w) + a(U^{\delta_n}, w) - a(w, U^{\delta_n} - w) + a(w, U^{\delta_n} - w)\right\} dt \\
&= \int_0^T \left\{a(U^{\delta_n}, U^{\delta_n} - w) - a(w, U^{\delta_n} - w)\right\} dt + \int_0^T a(U^{\delta_n}, w) dt \\
&\quad + \int_0^T a(w, U^{\delta_n} - w)\, dt \\
&= X^{\delta_n}(w) + \int_0^T a(U^{\delta_n}, w)\, dt + \int_0^T a(w, U^{\delta_n} - w)\, dt.
\end{aligned}$$

Luego,

$$X^{\delta_n}(w) = \int_0^T a(U^{\delta_n}, U^{\delta_n})\, dt - \int_0^T a(U^{\delta_n}, w)\, dt - \int_0^T a(w, U^{\delta_n} - w)\, dt.$$

Por (4.51) se tiene en lo anterior,

$$\begin{aligned}
X^{\delta_n}(w) \leq \int_0^T \left\langle f_{\Delta t_n}, U^{\delta_n} \right\rangle dt + \frac{1}{2}|u_0|_R^2 - \frac{1}{2}\left|U_R^{\delta_n}(T)\right|_R^2 \\
- \int_0^T a(U^{\delta_n}, w)\, dt - \int_0^T a(w, U^{\delta_n} - w)\, dt.
\end{aligned} \tag{4.52}$$

Analicemos los términos del lado derecho de (4.52) por separado. De la primera integral tenemos:

$$\begin{aligned}\int_0^T \left\langle f_{\Delta t_n}, U^{\delta_n}\right\rangle dt &= \Delta t \sum_{i=1}^{r} \left\langle f^i, U^i\right\rangle \\ &= \Delta t \sum_{i=1}^{r} \left\langle \frac{1}{\Delta t}\int_{t_{i-1}}^{t_i} f(\tau)\, d\tau, U^i\right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{r} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left\langle f, U^i\right\rangle dt \\ &= \int_0^T \left\langle f, U^{\delta_n}\right\rangle dt.\end{aligned}$$

Ahora estimaremos el tercer término del lado derecho de (4.52). Por (4.13), $U^{\delta_n} \rightharpoonup u$ en $L^p(0,T;V)$, $n \to \infty$ y así,

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^T \left\langle f_{\Delta t_n}, U^{\delta_n}\right\rangle dt = \lim_{n\to\infty} \int_0^T \left\langle f, U^{\delta_n}\right\rangle dt = \int_0^T \langle f, u\rangle\, dt. \tag{4.53}$$

Por otro lado, de (4.46) se sigue,

$$\lim_{n\to\infty} \left(u_R(T), U_R^{\delta_n}(T)\right)_R = (u_R(T), u_R(T))_R = |u_R(T)|_R^2 .$$

Así,

$$\begin{aligned}|u_R(T)|_R^4 &= (u_R(T), u_R(T))_R^2 \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(u_R(T), U_R^{\delta_n}(T)\right)_R^2 \\ &\leq |u_R(T)|_R^2 \liminf_{n\to\infty} \left|U_R^{\delta_n}(T)\right|_R^2 ,\end{aligned}$$

de donde,

$$|u_R(T)|_R^2 \leq \liminf_{n\to\infty} \left|U_R^{\delta_n}(T)\right|_R^2 .$$

Multiplicando lo anterior por -1, y recordando la siguiente propiedad del límite inferior ($-\liminf a_n = \limsup \{-a_n\}$) obtenemos,

$$\limsup_{n\to\infty} \left\{- \left|U_R^{\delta_n}(T)\right|_R^2\right\} \leq - |u_R(T)|_R^2 . \tag{4.54}$$

Ahora estimamos la segunda integral de (4.52). Por (4.19), $\chi^{\delta_n} \rightharpoonup \chi$ en $L^q(0,T;V^*)$ si $n \to \infty$ entonces,

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^T a(U^{\delta_n}, w)\, dt = \lim_{n\to\infty} \int_0^T \left\langle \chi^{\delta_n}, w\right\rangle dt = \int_0^T \langle \chi, w\rangle\, dt. \tag{4.55}$$

Finalmente, la tercera integral de (4.52) se estima a continuación. De (4.13), $U^{\delta_n} \rightharpoonup u$ en $L^p(0,T;V)$ si $n \to \infty$. En consecuencia:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \int_0^T a(v, U^{\delta_n} - v)\, dt &= \lim_{n\to\infty} \int_0^T a(v, U^{\delta_n})\, dt - \int_0^T a(v,v)\, dt \\ &= \int_0^T a(v, u-v)\, dt.\end{aligned} \tag{4.56}$$

Por lo tanto, usando (4.53)–(4.56) en (4.52), se obtiene:

$$\begin{aligned}
&\limsup_{k\to\infty} X^{\delta_n}(w)\\
&\leq \limsup_{n\to\infty}\int_0^T \left\langle f_{\Delta t_n}, U^{\delta_n}\right\rangle dt + \frac{1}{2}|u_0|_R^2 + \frac{1}{2}\limsup_{n\to\infty}\left\{-\left|U_R^{\delta_n}(T)\right|\right\}_R^2\\
&\quad - \liminf_{n\to\infty}\int_0^T a(w, U^{\delta_n}-w)\,dt - \liminf_{n\to\infty}\int_0^T a(U^{\delta_n}, w)\,dt\\
&= \lim_{n\to\infty}\int_0^T \left\langle f_{\Delta t_n}, U^{\delta_n}\right\rangle dt + \frac{1}{2}|u_0|_R^2 + \frac{1}{2}\limsup_{n\to\infty}\left\{-\left|U_R^{\delta_n}(T)\right|\right\}_R^2\\
&\quad - \lim_{n\to\infty}\int_0^T a(U^{\delta_n}, w)\,dt - \lim_{n\to\infty}\int_0^T a(w, U^{\delta_n}-w)\,dt\\
&\leq \int_0^T \langle f, u\rangle\,dt + \frac{1}{2}|u_0|_R^2 - \frac{1}{2}|u_R(T)|_R^2 - \int_0^T \langle \chi, w\rangle\,dt - \int_0^T a(w, u-w)\,dt.
\end{aligned}$$

Así, usando (4.48) se sigue,

$$\begin{aligned}
\limsup_{n\to\infty} X^{\delta_n} &\leq \int_0^T \langle \chi, u\rangle\,dt - \int_0^T \langle \chi, w\rangle\,dt - \int_0^T a(w, u-w)\,dt\\
&= \int_0^T \langle \chi, u-w\rangle\,dt - \int_0^T a(w, u-w)\,dt.
\end{aligned}$$

Pero, dado que $X^{\delta_n}(w) \geq 0$ para todo $w \in L^p(0,T;V)$, de donde se sigue (4.50). Ahora, definimos el operador $A : V \to V^*$ por

$$\langle A(v), \hat{v}\rangle := a(v, \hat{v}) \qquad \forall v, \hat{v} \in V. \tag{4.57}$$

Entonces, (4.50) se puede expresar de la siguiente manera:

$$\int_0^T \langle \chi - A(w), u-w\rangle\,dt \geq 0 \qquad \forall w \in L^p(0,T;V).$$

Sea $\hat{w}(t) := u(t) + \lambda w(t)$ para todo $t \in [0,T]$, donde $0 < \lambda < 1$ es arbitrario y $w \in L^p(0,T;V)$. Reemplazando $\hat{w}(t)$ en lo anterior,

$$0 \leq \int_0^T \langle \chi - A(u+\lambda w), u-(u+\lambda w)\rangle\,dt = -\lambda\int_0^T \langle \chi - A(u+\lambda w), w\rangle\,dt.$$

Así,

$$\int_0^T \langle \chi - A(u+\lambda w), w\rangle\,dt \leq 0 \qquad \forall w \in L^p(0,T;V).$$

Por la monotonía del límite,

$$\begin{aligned}
0 &\geq \lim_{\lambda\to 0}\int_0^T \langle \chi - A(u+\lambda w), w\rangle\,dt\\
&= \int_0^T \langle \chi, w\rangle\,dt - \lim_{\lambda\to 0}\int_0^T \langle A(u+\lambda w), w\rangle\,dt.
\end{aligned} \tag{4.58}$$

Analicemos el segundo límite de lo anterior por separado. Por el Lema 3.1, la función $a : V \times V \to \mathbb{R}$ es hemicontinua, así por (4.57),

$$\lim_{\lambda\to 0} \langle A(u+\lambda w), w\rangle = \lim_{\lambda\to 0} a(u+\lambda w, w) = a(u,w) = \langle A(u), w\rangle .$$

Además, por el Lema 3.1,

$$\begin{aligned}
|\langle A(u+\lambda w), w\rangle| &= |a(u+\lambda w, w)| \\
&\leq C \|u+\lambda w\|^{p-1} \|w\| \\
&\leq C (\|u\| + \lambda \|w\|)^{p-1} \|w\| \\
&\leq C (\|u\| + \|w\|)^{p-1} \|w\| \\
&\leq 2^{p-1} C \left(\|u\|^{p-1} \|w\| + \|w\|^p\right) .
\end{aligned}$$

Definamos $\widehat{g} : [0,T] \to \mathbb{R}$ por

$$\widehat{g}(t) := 2^{p-1} C \left(\|u(t)\|^{p-1} \|w(t)\| + \|w(t)\|^p\right) .$$

Veamos que $\widehat{g} \in L^1(0,T)$. En efecto, puesto que $u, w \in L^p(0,T;V)$ entonces por el Teorema 1.51 tenemos $\|u\|, \|w\| \in L^p(0,T)$, así, la función $\widehat{g} : [0,T] \to \mathbb{R}$ es medible y además

$$\begin{aligned}
\|\widehat{g}\|_1 &= \int_0^T |\widehat{g}|\, dt \\
&= 2^{p-1} C \int_0^T \left(\|u\|^{p-1} \|w\| + \|w\|^p\right) dt \\
&= 2^{p-1} C \int_0^T \|u\|^{p-1} \|w\|\, dt + 2^{p-1} C \int_0^T \|w\|^p\, dt \\
&\leq 2^{p-1} C \left(\int_0^T \|u\|^p\, dt\right)^{1/q} \left(\int_0^T \|w\|^p\, dt\right)^{1/p} + 2^{p-1} C \int_0^T \|w\|^p\, dt \\
&= 2^{p-1} C \|u\|_{L^p(0,T;V)}^{p/q} \|w\|_{L^p(0,T;V)} + 2^{p-1} C \|w\|_{L^p(0,T;V)}^p \\
&< \infty.
\end{aligned}$$

Así, $\widehat{g} \in L^1(0,T)$. Por el Teorema de convergencia dominada de Lebesgue se tiene:

$$\lim_{\lambda\to 0} \int_0^T \langle A(u+\lambda w), w\rangle\, dt = \int_0^T \lim_{\lambda\to 0} \langle A(u+\lambda w), w\rangle\, dt = \int_0^T \langle A(u), w\rangle\, dt.$$

Luego, por (4.58) y lo anterior, para todo $w \in L^p(0,T;V)$,

$$0 \geq \int_0^T \langle \chi, w\rangle\, dt - \int_0^T \langle A(u), w\rangle\, dt = \int_0^T \langle \chi - A(u), w\rangle\, dt. \tag{4.59}$$

Ahora, si $w \in L^p(0,T;V)$, entonces $-w \in L^p(0,T;V)$ y así,

$$0 \geq \int_0^T \langle \chi - A(u), -w\rangle\, dt = -\int_0^T \langle \chi - A(u), w\rangle\, dt \qquad \forall w \in L^p(0,T;V).$$

En consecuencia, por (4.59) y lo anterior,

$$\int_0^T \langle \chi - A(u), w \rangle \, dt = 0 \qquad \forall w \in L^p(0,T;V).$$

Es decir,

$$\int_0^T \langle \chi, w \rangle \, dt = \int_0^T \langle A(u), w \rangle \, dt = \int_0^T a(u,w) \, dt \qquad \forall w \in L^p(0,T;V).$$

Sean $\varphi \in C_0^\infty(0,T)$ y $v \in V$ cualquiera, entonces $\varphi v \in L^p(0,T;V)$ y

$$0 = \int_0^T \langle \chi - A(u), \varphi v \rangle \, dt = \int_0^T \langle \chi - A(u), v \rangle \, \varphi \, dt.$$

Así, por el Lema 1.62 (Lema variacional), para todo $v \in V$,

$$\langle \chi - A(u), v \rangle = 0 \qquad \text{c.t.p} \qquad [0,T].$$

Por lo tanto, para todo $v \in V$ se tiene:

$$\langle \chi, v \rangle = \langle A(u), v \rangle = a(u,v) \qquad \text{c.t.p} \qquad [0,T].$$

Es decir, se tiene (4.44). En conclusión, hemos mostrado que existe $u \in W_R$ que es solución del Problema P.

f) Hemos probado que existe una subsucesión $\left\{U^{\delta_k}\right\}_{k=1}^\infty$ de $\left\{U^{\delta_n}\right\}_{n=1}^\infty$ tal que

$$U^{\delta_k} \rightharpoonup u \qquad \text{en} \qquad L^p(0,T;V) \quad \text{si} \quad \delta_k = (h_k, \Delta t^k) \to 0,$$

donde $u \in W_R$ es solución del Problema P. Mostraremos que la sucesión $\left\{U^{\delta_n}\right\}_{n=1}^\infty$ también satisface

$$U^{\delta_n} \rightharpoonup u \qquad \text{en} \qquad L^p(0,T;V) \quad \text{si} \quad \delta_n = (h_n, \Delta t^n) \to 0. \tag{4.60}$$

En efecto, supongamos en busca de una contradicción que existe una subsucesión débilmente convergente de $\left\{U^{\delta_n}\right\}_{n=1}^\infty$ denotada $\left\{U^{\delta_{\tilde{k}}}\right\}_{\tilde{k}=1}^\infty$ tal que

$$U^{\delta_{\tilde{k}}} \rightharpoonup \tilde{u} \qquad \text{en} \qquad L^p(0,T;V) \quad \text{si} \quad \delta_{\tilde{k}} = (h_{\tilde{k}}, \Delta t^{\tilde{k}}) \to 0,$$

con $u \neq \tilde{u}$. Razonando de manera análoga a los pasos anteriores, encontramos que dicha subsucesión posee una subsucesión que converge debilmente a $u^* \in W_R$ donde u^* es solución del Problema P, luego por unicidad de la solución, tenemos $u = u^*$ y por unicidad del límite débil $u^* = \tilde{u}$. En consecuencia, $u = \tilde{u}$, lo cual es una contradicción. Así, toda subsucesión de $\left\{U^{\delta_n}\right\}_{n=1}^\infty$ que convergente debilmente en V posee el mismo límite $u \in W_R$. Por lo tanto, por la Proposición 1.11, la sucesión $\left\{U^{\delta_n}\right\}_{n=1}^\infty$ satisface (4.60).

Ahora, puesto que la sucesión $\left\{U^{\delta_n}\right\}_{n=1}^\infty$ es cualquier sucesión de la familia $\left\{U^{\delta}\right\}$ con $\delta = (h, \Delta t)$ que satisface (4.60), entonces

$$U^{\delta} \rightharpoonup u \qquad \text{en} \qquad L^p(0,T;V) \quad \text{si} \quad \delta = (h, \Delta t) \to 0.$$

Así, tenemos (4.11). Por lo tanto hemos demostrado el teorema.

$\square$

Observación 4.4. Notamos que en el desarrollo del teorema anterior, hemos conseguido convergencia débil de las funciones escalonadas $U^\delta : [0,T] \to V^h$ definidas por (3.16) hacia la función $u \in W_R$ que es solución del Problema P. Ademas de dichas funciones de aproximación, podemos implementar las funciones de Rothe $\mathcal{U}^\delta : [0,T] \to V^h$ definidas por (3.17). Con estos dos tipos de funciones de interpolación, podemos conseguir a parte de convergencia débil los siguientes tipos de convergencia:

$$\lim_{\delta\to 0} \sup_{0\le t\le T} \left|u_R(t) - U_R^\delta(t)\right|_R = 0, \qquad \lim_{\delta\to 0} \left\|u - U^\delta\right\|_{L^p(0,T;V)} = 0,$$
$$\lim_{\delta\to 0} \left\|u_R - \mathcal{U}_R^\delta\right\|_{C([0,T];H_R)} = 0, \qquad \lim_{\delta\to 0} \left\|u - \mathcal{U}^\delta\right\|_{L^p(0,T;V)} = 0.$$

Para ver en más detalle la demostración de estos resultados, ver [21].

4.2. Aplicación problema de electromagnetismo bidimensional.

Vamos a aplicar el Teorema 4.3 al problema (2.29)–(2.33), por lo que verificaremos que el problema variacional 2.38 satisface las hipótesis de dicho teorema, es decir: Hallar una función $u : \Omega \times [0,T] \to \mathbb{R}$ que sea solución de

$$\frac{d}{dt}(\sigma u, v)_{L^2(R)} + a(u,v) = (J,v)_{L^2(\Omega)} \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega),$$
$$u(0) = u_0 \in L^2(R),$$

donde,

$$a(u,v) := \int_\Omega \nu(\|\nabla u\|)\, \nabla u \cdot \nabla v \, d\boldsymbol{x} \qquad \forall u, v \in H_0^1(\Omega). \tag{4.61}$$

Para garantizar existencia y unicidad de dicha función $u : \Omega \times [0,T] \to \mathbb{R}$ hacemos las siguientes suposiciones:

H1) Supondremos que la conductividad eléctrica $\sigma : \Omega \times [0,T] \to \mathbb{R}$ satisface la condición:

$$\sigma(\boldsymbol{x}) := \begin{cases} \sigma(\boldsymbol{x}), & \text{si} \quad \boldsymbol{x} \in R, \\ 0, & \text{si} \quad \boldsymbol{x} \in S, \end{cases} \tag{4.62}$$

donde, $\sigma \in L^\infty(R)$ es tal que $\sigma(\boldsymbol{x}) \ge \sigma_0 > 0$ para casi todo $\boldsymbol{x} \in R$.

Además supondremos que existe una constante $\nu_1 > 0$ (la reluctancia del medio dielectrico o no conductor) tal que:

$$\nu(\|\nabla u(\boldsymbol{x},t)\|) := \begin{cases} \nu_1, & \text{si} \quad \boldsymbol{x} \in S, \quad t \in (0,T), \\ \nu_R(\|\nabla u(\boldsymbol{x},t)\|), & \text{si} \quad \boldsymbol{x} \in R, \quad t \in (0,T), \end{cases} \tag{4.63}$$

donde $\nu_R : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ es una función continua que satisface las siguientes propiedades:

i. Existen constantes positivas ν_{min} y ν_0 (con ν_0 la reluctancia en el vacio) tales que

$$0 < \nu_{min} \leq \nu_R(s) \leq \nu_0,$$

ii. La función $s \mapsto \nu_R(s)$ es estrictamente creciente.

H2) Sean $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ y $R \subseteq \mathbb{R}^2$ dominios Lipschitz tales que $\overline{R} \subseteq \Omega$. Sea $S := \Omega \setminus \overline{R}$, seleccionamos los espacios:

$$\begin{aligned}
&H := L^2(\Omega), && (u,v) := (u,v)_{L^2(\Omega)} && \forall u,v \in L^2(\Omega),\\
&H_R := L^2(R), && (u,v)_R := (\sigma u,v)_{L^2(R)} && \forall u,v \in L^2(R),\\
&H_S := L^2(S), && (u,v)_S := (u,v)_{L^2(S)} && \forall u,v \in L^2(S),\\
&V := H_0^1(\Omega), && \|u\| := \|u\|_{H^1(\Omega)} && \forall u \in H_0^1(\Omega),\\
&B_R := H^1(R), && \|u\|_R := \|u\|_{H^1(R)} && \forall u \in H^1(R),\\
&B_S := H^1(S), && \|u\|_S := \|u\|_{H^1(S)} && \forall u \in H^1(S).
\end{aligned}$$

Las parejas ordenadas $u := [u_R, u_S] \in L^2(\Omega)$ son tales que $u_R := u|_R$ y $u_S := u|_S$, es decir, son la restricción de u a R y S respectivamente.

H3) Definimos los operadores $A^R : H^1(R) \to H^1(R)^*$, $A^S : H^1_{\partial\Omega}(S) \to H^1_{\partial\Omega}(R)^*$ por:

$$\left\langle A^R(u), v\right\rangle_R := \int_R \nu_R\left(\|\nabla u\|\right) \nabla u \cdot \nabla v \, d\boldsymbol{x} \qquad \forall u,\, v \in H^1(R), \tag{4.64}$$

$$\left\langle A^S(u), v\right\rangle_S := \nu_1 \int_S \nabla u \cdot \nabla v \, d\boldsymbol{x} \qquad \forall u,\, v \in H^1_{\partial\Omega}(S). \tag{4.65}$$

Observación 4.5. Sean $u, v \in H_0^1(\Omega)$ cualesquiera, entonces $u_R := u|_R$, $v_R := v|_R$ son elementos de $H^1(R)$ y $u_S := u|_S$, $v_S := v|_S$ son elementos de $H^1_{\partial\Omega}(S)$. Además, si la función $a : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ esta definida por (4.61), entonces

$$\begin{aligned}
a(u,v) &= \int_\Omega \nu\left(\|\nabla u\|\right) \nabla u \cdot \nabla v \, d\boldsymbol{x}\\
&= \int_R \nu\left(\|\nabla u\|\right) \nabla u \cdot \nabla v \, d\boldsymbol{x} + \int_S \nu\left(\|\nabla u\|\right) \nabla u \cdot \nabla v \, d\boldsymbol{x}\\
&= \int_R \nu_R\left(\|\nabla u_R\|\right) \nabla u_R \cdot \nabla v_R \, d\boldsymbol{x} + \nu_1 \int_S \nabla u_S \cdot \nabla v_S \, d\boldsymbol{x}\\
&= \left\langle A^R(u_R), v_R\right\rangle_R + \left\langle A^S(u_S), v_S\right\rangle_S .
\end{aligned}$$

En consecuencia,

$$a(u,v) = \left\langle A^R(u_R), v_R\right\rangle_R + \left\langle A^S(u_S), v_S\right\rangle_S \qquad \forall u,v \in H_0^1(\Omega).$$

Esta última identidad es justamente la relación que se requiere para establecer la equivalencia entre los problemas P y P'.

Proposición 4.6. *Supongamos que* **H1**) $-$ **H3**) *se satisfacen. Entonces los operadores* A^R *y* A^S *definidos por* (4.64) *y* (4.65) *respectivamente satisfacen las condiciónes de la* ***Hipótesis* 2**.

Demostración. La demostración se hará por partes, de acuerdo a la Hipótesis 2.

Parte 1. Los operadores A^R y A^S son hemicontinuos. En efecto, mostraremos primero que el operador $A^R : H^1(R) \to H^1(R)^*$ es hemicontinuo. Así, sean $u, v, w \in H^1(R)$ cualesquiera, veamos que la función:

$$\lambda \mapsto \left\langle A^R(u + \lambda v), w \right\rangle_R$$

es continua en todo $\mathbb{R}$. Por definición de A^R (ver ecuación (4.64)) tenemos

$$\begin{aligned} \left\langle A^R(u + \lambda v), w \right\rangle_R &= \int_R \nu_R \left(\|\nabla (u + \lambda v)\|\right) \nabla (u + \lambda v) \cdot \nabla w \, d\boldsymbol{x} \\ &= \left(\nu_R \left(\|\nabla (u + \lambda v)\|\right) \nabla (u + \lambda v), \nabla w\right)_{L^2(R)^2} . \end{aligned}$$

Por lo tanto, puesto que $\nu_R : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}^+$ es una función continua por hipótesis, y el producto interior $(\cdot, \cdot)_{L^2(R)^2} : L^2(R)^2 \times L^2(R)^2 \to \mathbb{R}$ es una función continua [1], por lo que se tiene $\lambda \mapsto \left\langle A^R(u + \lambda v), w \right\rangle_R$ es continuo en función de $\lambda \in \mathbb{R}$. En consecuencia, el operador $A^R : H^1(R) \to H^1(R)^*$ es hemicontinuo.

Análogamente mostramos que el operador $A^S : H^1_{\partial\Omega}(S) \to H^1_{\partial\Omega}(S)^*$ es hemicontinuo.

Parte 2. Los operadores A^R y A^S son acotados, es decir

$$\begin{aligned} \left\|A^R(u)\right\|_{H^1(R)^*} &\leq C \|u\|_{H^1(R)} \qquad \forall u \in H^1(R), \\ \left\|A^S(u)\right\|_{H^1_{\partial\Omega}(S)^*} &\leq C \|u\|_{H^1_{\partial\Omega}(S)} \qquad \forall u_S \in H^1_{\partial\Omega}(S). \end{aligned}$$

Mostremos primero que el operador A^R es acotado. Sean $u, v \in H^1(R)$ cualesquiera,

$$\begin{aligned} \left|\left\langle A^R(u), v \right\rangle_R\right| &= \left| \int_R \nu_R \left(\|\nabla u\|\right) \nabla u \cdot \nabla v \, d\boldsymbol{x} \right| \\ &\leq \int_R \nu_R \left(\|\nabla u\|\right) \left|\nabla u \cdot \nabla v\right| \, d\boldsymbol{x} \\ &\leq \nu_0 \int_R \|\nabla u\| \, \|\nabla v\| \, d\boldsymbol{x} \\ &\leq \nu_0 \|\nabla u\|_{L^2(R)^2} \|\nabla v\|_{L^2(R)^2} \\ &\leq \nu_0 \|u\|_{H^1(R)} \|v\|_{H^1(R)} \\ &=: C \|u\|_{H^1(R)} \|v\|_{H^1(R)} . \end{aligned}$$

[1] Esto se tiene por la desigualdad de Cauchy-Shwartz

$$\left|(u, v)_{L^2(R)^2}\right| \leq \|u\|_{L^2(R)^2} \|v\|_{L^2(R)^2} \qquad \forall u, v \in L^2(R)^2$$

En consecuencia,

$$\left\|A^R(u)\right\|_{H^1(R)^*} \leq C \left\|u\right\|_{H^1(R)} \qquad \forall u \in H^1(R).$$

Análogamente mostramos que

$$\left\|A^S(u)\right\|_{H^1_{\partial\Omega}(S)^*} \leq C \left\|u\right\|_{H^1_{\partial\Omega}(S)} \qquad \forall u \in H^1_{\partial\Omega}(S).$$

Parte 3. Los operadores A^R y A^S son monótonos, es decir

$$\begin{aligned}\left\langle A^R(u) - A^R(v), u - v\right\rangle_R &\geq 0 \qquad \forall u,\, v \in H^1(R),\\ \left\langle A^S(u) - A^S(v), u - v\right\rangle_S &\geq 0 \qquad \forall u,\, v \in H^1_{\partial\Omega}(S).\end{aligned}$$

Mostremos primero que el operador A^R es monótono. En efecto, sean $u,\, v \in H^1(R)$,

$$\begin{aligned}&\left\langle A^R(u) - A^R(v), u - v\right\rangle_R\\ &= \left\langle A^R(u), u - v\right\rangle_R - \left\langle A^R(v), u - v\right\rangle_R\\ &= \int_R \nu_R\left(\|\nabla u\|\right)\nabla u \cdot \nabla\left(u - v\right)\, d\boldsymbol{x} - \int_R \nu_R\left(\|\nabla v\|\right)\nabla v \cdot \nabla\left(u - v\right)\, d\boldsymbol{x}\\ &= \int_R \left(\nu_R\left(\|\nabla u\|\right)\nabla u - \nu_R\left(\|\nabla v\|\right)\nabla v\right) \cdot \nabla\left(u - v\right)\, d\boldsymbol{x}.\end{aligned}$$

Así, para todos $u, v \in H^1(R)$

$$\begin{aligned}&\left\langle A^R(u) - A^R(v), u - v\right\rangle_R\\ &= \int_R \left(\nu_R\left(\|\nabla u\|\right)\nabla u - \nu_R\left(\|\nabla v\|\right)\nabla v\right) \cdot \nabla\left(u - v\right)\, d\boldsymbol{x}\end{aligned} \tag{4.66}$$

Analicemos por aparte, $\left(\nu_R\left(\|\nabla u\|\right)\nabla u - \nu_R\left(\|\nabla v\|\right)\nabla v\right) \cdot \nabla\left(u - v\right)$. Supongamos sin perdida de generalidad que $\|\nabla u\| \geq \|\nabla v\|$,

$$\begin{aligned}&\left(\nu_R\left(\|\nabla u\|\right)\nabla u - \nu_R\left(\|\nabla v\|\right)\nabla v\right) \cdot \nabla\left(u - v\right)\\ &= \nu_R\left(\|\nabla u\|\right)\left(\|\nabla u\|^2 - \nabla u \cdot \nabla v\right) - \nu_R\left(\|\nabla v\|\right)\left(\nabla u \cdot \nabla v - \|\nabla v\|^2\right)\\ &= \nu_R\left(\|\nabla u\|\right)\left(\|\nabla u\|^2 - \nabla u \cdot \nabla v\right) + \nu_R\left(\|\nabla v\|\right)\left(\|\nabla v\|^2 - \nabla u \cdot \nabla v\right).\end{aligned}$$

Ahora, notamos que por ser $\|\nabla u\| \geq \|\nabla v\|$,

$$\|\nabla u\|^2 - \nabla u \cdot \nabla v \geq \|\nabla u\|^2 - \|\nabla u\| \|\nabla v\| = \|\nabla u\| \left(\|\nabla u\| - \|\nabla v\|\right) \geq 0.$$

Luego,

$$\begin{aligned}&\left(\nu_R\left(\|\nabla u\|\right)\nabla u - \nu_R\left(\|\nabla v\|\right)\nabla v\right) \cdot \nabla\left(u - v\right)\\ &\geq \nu_R\left(\|\nabla u\|\right)\left(\|\nabla u\|^2 - \nabla u \cdot \nabla v\right) + \nu_R\left(\|\nabla v\|\right)\left(\|\nabla v\|^2 - \nabla u \cdot \nabla v\right)\\ &= \nu_R\left(\|\nabla u\|\right)\left(\|\nabla u\|^2 - 2\,\nabla u \cdot \nabla v + \|\nabla v\|^2\right)\\ &= \nu_R\left(\|\nabla u\|\right)\|\nabla u - \nabla v\|^2\\ &\geq \nu_{min}\|\nabla u - \nabla v\|^2.\end{aligned}$$

Continuando en (4.66) se tiene para todos $u, v \in H^1(R)$:

$$\begin{aligned}
&\left\langle A^R(u) - A^R(v), u - v\right\rangle_R \\
&= \int_R \left(\nu_R\left(\|\nabla u\|\right)\nabla u - \nu_R\left(\|\nabla v\|\right)\nabla v\right)\cdot\nabla\left(u-v\right)\, d\boldsymbol{x} \\
&\geq \nu_{min}\int_R \|\nabla u - \nabla v\|^2 \\
&\geq 0.
\end{aligned}$$

Análogamente mostramos que el operador $A^S : H^1_{\partial\Omega}(S) \to H^1_{\partial\Omega}(S)^*$ es monótono.

Parte 4. El operador $A^S : H^1_{\partial\Omega}(S) \to H^1_{\partial\Omega}(S)^*$ es estrictamente monótono en el siguiente sentido:

$$\left\langle A^S(u) - A^S(v), u - v\right\rangle_S > 0 \qquad \forall u, v \in H^1_{\partial\Omega}(S), \quad u \neq v, \quad u - v \in H^1_0(S).$$

En efecto, sean $u, v \in H^1_{\partial\Omega}(S)$ con $u \neq v$ y $u - v \in H^1_0(S)$, entonces

$$\begin{aligned}
&\left\langle A^S(u) - A^S(v), u - v\right\rangle_S \\
&= \left\langle A^S(u), u - v\right\rangle_S - \left\langle A^S(v), u - v\right\rangle_S \\
&= \nu_1\int_S \nabla u\cdot\nabla\left(u-v\right)\, d\boldsymbol{x} - \nu_1\int_S \nabla v\cdot\nabla\left(u-v\right)\, d\boldsymbol{x} \\
&= \nu_1\int_S \nabla\left(u-v\right)\cdot\nabla\left(u-v\right)\, d\boldsymbol{x} \\
&= \nu_1\int_S \|\nabla u - \nabla v\|^2\, d\boldsymbol{x} \\
&\geq C\,\|u - v\|_{H^1(S)} \\
&> 0.
\end{aligned}$$

□

H4) Con respecto a los datos $J : \Omega \times [0, T] \to \mathbb{R}$ y $u_0 : R \to \mathbb{R}$ requerimos

$$J \in L^2(\Omega \times [0, T]) \qquad \text{y} \qquad u_0 \in L^2(R).$$

Sean, $J_R : R \times [0, T] \to \mathbb{R}$ y $J_S : S \times [0, T] \to \mathbb{R}$ las restricciones de la función J a los dominios R y S respectivamente. Definimos los operadores $f : [0, T] \to H^1_0(\Omega)^*$, $f^R : [0, T] \to H^1(R)^*$ y $f^S : [0, T] \to H^1_{\partial\Omega}(S)^*$ de la siguiente manera:

$$\langle f(t), v\rangle := \int_\Omega J(\boldsymbol{x}, t)v(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x} \qquad \forall v \in H^1_0(\Omega), \tag{4.67}$$

$$\left\langle f^R(t), v\right\rangle_R := \int_R J_R(\boldsymbol{x}, t)v(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x} \qquad \forall v \in H^1(R), \tag{4.68}$$

$$\left\langle f^S(t), v\right\rangle_S := \int_S J_S(\boldsymbol{x}, t)v(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x} \qquad \forall v \in H^1_{\partial\Omega}(S). \tag{4.69}$$

Proposición 4.7. *Supongamos que las condiciones* **H2**) *y* **H4**) *se satisfacen, entonces* $J_R \in L^2(R \times [0,T])$, *y* $J_S \in L^2(S \times [0,T])$. *Además, los operadores* f, f^R *y* f^S *definidos por* (4.67), (4.68) *y* (4.69) *respectivamente, son tales que:*

$$f \in L^2(0,T; H_0^1(\Omega)), \qquad f^R \in L^2(0,T; H^1(R)), \qquad f^S \in L^2(0,T; H_{\partial\Omega}(S))$$

y

$$\langle f(t), v \rangle = \left\langle f^R(t), v_R \right\rangle_R + \left\langle f^S(t), v_S \right\rangle_S \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega) \quad c.t.p \quad t \in [0,T] \tag{4.70}$$

Demostración. La demostración se realizará por pasos.

Paso 1. $J_R \in L^2(R \times [0,T])$, y $J_S \in L^2(S \times [0,T])$. En efecto, por hipótesis sabemos que $J \in L^2(\Omega \times [0,T])$ entonces J es una función medible en $\Omega \times [0,T]$ y

$$\|J\|_{L^2(\Omega\times[0,T])} = \left(\int_{\Omega\times[0,T]} |J(\boldsymbol{x},t)|^2 \, d\boldsymbol{x} \, dt \right)^{1/2}.$$

Por **H2** tenemos que $R \subseteq \Omega$ es un conjunto abierto, luego $R \times [0,T]$ es medible. Si definimos $J_R : R \times [0,T] \to \mathbb{R}$ como la restricción de J a R entonces J_R es medible y además por ser $R \times [0,T] \subseteq \Omega \times [0,T]$ se tiene

$$\int_{R\times[0,T]} |J_R(\boldsymbol{x},t)|^2 \, d\boldsymbol{x} \, dt \leq \int_{\Omega\times[0,T]} |J(\boldsymbol{x},t)|^2 \, d\boldsymbol{x} \, dt < \infty.$$

Por lo tanto, $J_R \in L^2(R \times [0,T])$. Análogamente mostramos que $J_S \in L^2(S \times [0,T])$.

Paso 2. $f \in L^2(0,T; H_0^1(\Omega)^*)$. En efecto, puesto que $J \in L^2(\Omega\times[0,T])$, por el Teorema de Fubini se tiene

$$\int_{\Omega\times[0,T]} |J(\boldsymbol{x},t)|^2 \, d\boldsymbol{x} \, dt = \int_0^T \left(\int_\Omega |J(\boldsymbol{x},t)|^2 \, d\boldsymbol{x} \right) dt, \tag{4.71}$$

donde la integral interior del lado derecho existe para casi todo $t \in [0,T]$. Así,

$$J(\cdot,t) \in L^2(\Omega) \qquad \text{c.t.p} \qquad t \in [0,T].$$

Por el teorema de representación de Riesz para espacios L^p, existe $f^* : [0,T] \to L^2(\Omega)^*$ tal que

$$\langle f^*(t), v \rangle = \int_\Omega J(\boldsymbol{x},t) v(\boldsymbol{x}) \, d\boldsymbol{x} \qquad \forall v \in L^2(\Omega),$$

con $\|f^*(t)\|_{L^2(\Omega)^*} = \|J(\boldsymbol{x},t)\|_{L^2(\Omega)}$ para casi todo $t \in [0,T]$. Luego, por (4.71) y lo anterior,

$$\begin{aligned}
\|f^*\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega)^*)} &= \int_0^T \|f^*(t)\|^2_{L^2(\Omega)} \, dt \\
&= \int_0^T \left(\int_\Omega |J(\boldsymbol{x},t)|^2 \, d\boldsymbol{x} \right) dt \\
&= \int_{\Omega\times[0,T]} |J(\boldsymbol{x},t)|^2 \, d\boldsymbol{x} \, dt \\
&< \infty.
\end{aligned}$$

Por lo tanto $f^* \in L^2(0,T;L^2(\Omega)^*)$. Ahora, definimos $f:[0,T] \to H_0^1(\Omega)^*$ por

$$\langle f(t), v\rangle := \langle f^*(t), v\rangle \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Entonces $f \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega)^*)$ y

$$\|f\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega)^*)} \le \|f^*\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega)^*)}\,.$$

Paso 3. $f^R \in L^2(0,T;H^1(R)^*)$ y $f^S \in L^2(0,T;H^1_{\partial\Omega}(S)^*)$. La demostración es análoga al Paso 2.

Paso 4. Mosetremos por último que se satisface (4.70). En efecto, sea $v \in H_0^1(\Omega)$ entonces $v_R := v|_R \in H^1(R)$ y $v_S := v|_S \in H_{\partial\Omega}(S)$, luego

$$\begin{aligned}
\langle f(t), v\rangle &= \int_\Omega J(\boldsymbol{x},t)v(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x}\\
&= \int_R J(\boldsymbol{x},t)v(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x} + \int_S J(\boldsymbol{x},t)v(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x}\\
&= \int_R J_R(\boldsymbol{x},t)v_R(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x} + \int_S J_S(\boldsymbol{x},t)v_S(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x}\\
&= \left\langle f^R(t), v_R\right\rangle_R + \left\langle f^S(t), v_S\right\rangle_S.
\end{aligned}$$

$\square$

Proposición 4.8. *Supongamos que las condiciones* **H1)** $-$ **H4)** *se cumplen. Entonces la* ***Hipótesis*** **3** *se satisface si definimos la seminorma* $[\![\cdot]\!] : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ *por*

$$[\![u]\!] := \left(\int_\Omega \|\nabla u\|^2\,d\boldsymbol{x}\right)^{1/2} \qquad \forall u \in H_0^1(\Omega). \tag{4.72}$$

Demostración. Debemos mostrar que se satisfacen las ecuaciones (3.8) y (3.9). En efecto, veamos primero (3.9), puesto que $[\![\cdot]\!] \to \mathbb{R}$ es una seminorma en $H^1(\Omega)$ que es equivalente a $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$, entonces existe $\beta > 0$ tal que

$$[\![u]\!] \ge \beta\,\|u\|_{H^1(\Omega)} \qquad \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

Por lo tanto, para $\beta > 0$ que satisface la desigualdad anterior y definiendo $\lambda := 0$ se tiene (3.9). Mostremos por último (3.8), sea $u \in H_0^1(\Omega)$,

$$\begin{aligned}
a(u,u) &= \int_\Omega \nu\left(\|\nabla u\|\right)\nabla u \cdot \nabla u\,d\boldsymbol{x}\\
&= \int_\Omega \nu\left(\|\nabla u\|\right)\|\nabla u\|^2\,d\boldsymbol{x}\\
&\ge \alpha \int_\Omega \|\nabla u\|^2\,d\boldsymbol{x}\\
&= \alpha[\![u]\!]^2,
\end{aligned}$$

donde $\alpha := \text{mín}\left\{\nu_{min}, \nu_1\right\} > 0$. $\square$

Observación 4.9. Puesto que $H_0^1(\Omega)$ es un espacio de Banach separable, entonces por la Proposición 3.5 existen $h^* > 0$ y una familia de subespacios de dimensión finita de $H_0^1(\Omega)$ que los denotaremos por $\left\{(H_0^1(\Omega))^h\right\}_{h\in(0,h^*)}$, tales que

$$\lim_{h\to 0} \operatorname{dist}\left(v, \left(H_0^1(\Omega)\right)^h\right) = 0 \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

Observación 4.10. El problema completamente discreto para el problema variacional (2.38) se puede enunciar de la siguiente manera: Dados $h \in (0, h^*)$ y $r \in \mathbb{Z}^+$, encontrar $U^1, ..., U^r \in (H_0^1(\Omega))^h$ tales que

$$\begin{aligned} \left(\sigma\left(U_R^i - U_R^{i-1}\right), z_R\right)_{L^2(R)} + \Delta t\, a(U^i, z) = \Delta t\, \left(f^i, z\right)_{L^2(\Omega)} \qquad & \forall z \in \left(H_0^1(\Omega)\right)^h \\ U_R^0 = u_0 \in L^2(R), \qquad & \end{aligned}$$

donde,

$$f^i := \int_{t_{i-1}}^{t_i} J(\cdot, t)\, dt.$$

Teorema 4.11. *Supongamos que las condiciones* **H1**) $-$ **H4**) *se satisfacen. Entonces existe una única función*

$$u \in W_R := \left\{u \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) |\; u_R' \in L^2(0, T; H^1(R)^*)\right\},$$

que es solución del problema variacional (2.38). *Además, para* $h \in (0, h^*)$ *las funciones escalonadas* $U^\delta : [0, T] \to (H_0^1(\Omega))^h$ *definidas por* (3.16), *satisfacen:*

$$U^\delta \rightharpoonup u \qquad en \quad L^2(0, T; H_0^1(\Omega)), \quad si \quad \delta \to 0. \tag{4.73}$$

Demostración. Para esta demostración, es suficiente verificar que a partir de las condiciones **H1)–H4)** se satisfacen las hipótesis del teorema 4.3, con la seminorma definida en (4.72).

Notamos primero que por las Proposiciones 2.5, 4.6 y 4.8, las **Hipótesis 1-3** se satisfacen respectivamente. Además, por la Proposición 4.7 los operadores f^R y f^S definidos por (4.68) y (4.69) respectivamente, son tales que

$$f^R \in L^2(0, T; H^1(R)^*) \qquad \text{y} \qquad f^S \in L^2(0, T; H_{\partial\Omega}^1(S)^*).$$

Luego, por el Teorema 4.3 existe una única función $u \in W_R$ que es solución del problema variacional 2.38. Además, las funciones escalonadas $U^\delta : [0, T] \to (H_0^1(\Omega))^h$ satisfacen (4.73). □

Conclusiones

- A partir de las ecuaciones de Maxwell en su forma diferencial y bajo supuestos sobre la densidad de corriente, se obtuvó un modelo de corrientes inducidas bidimensional. (Referencia: ecuaciones (2.29)–(2.33), página 32).
- Se obtuvó un problema variacional para el modelo de corrientes inducidas bidimensional. (Referencia: Problema (2.38), página 34).
- Para el problema variacional obtenido para el modelo de corrientes inducidas bidimensional, se plantearon dos formulaciones abstractas equivalentes, que permitieron abordar dicho problema como un caso particular. (Referencia: Problemas P y P', página 47).
- Al aplicar el método de Rothe a los Problemas abstractos se obtuvó un sistema de ecuaciones no lineales completamente discreto, del cual se demostró existencia y unicidad de solución. Además, a partir de esta solución, se construyerón funciones escalonadas que permitieron demostrar existencia y unicidad de solución para los problemas abstractos vía convergencia débil. (Referencia: Teorema 4.3, página 83).
- Se demostró existencia y unicidad de solución para el problema de electromagnetismo bidimensional, identificandolo como un caso particular de los problemas abstractos previamente analizados. (Referencia: Sección 4.2).

Notaciones

$\emptyset$	Conjunto vacio.
$A \subseteq B$	A incluido en B.
$A \setminus B$	Complemento de B en A.
$A \times B$	Producto cartesiano entre A y B.
$\mathbb{Z}^+$	Conjunto de los enteros positivos.
$\mathbb{R}$	Campo ordenado de los numeros reales.
$\mathbb{R}_0^+$	Conjunto de todos los números reales positivos unidos con el cero.
$\mathbb{C}$	Campo de los números complejos.
$\mathbb{K}$	Campo de los números reales o complejos.
$\overline{E}$	Adherencia de E.
∂E	Frontera de E.
$\mathbf{gen}\,\{E\}$	Conjunto generado por E.
$\operatorname{dist}(x, X)$	Distancia de x al conjunto X.
$D(f)$	Dominio de la función f.
$\mathcal{R}(f)$	Rango de la función f.
$f\|_E$	La función f restringida al conjunto E.
$(\cdot,\cdot)$ o $(\cdot,\cdot)_X$	Producto interior o producto interior en X.
$\\|\cdot\\|$ o $\\|\cdot\\|_X$	Norma o norma en X.
X^*	Espacio dual de X.
X^{**}	Espacio bidual de X.
$\langle\cdot,\cdot\rangle$ o $\langle\cdot,\cdot\rangle_X$	Producto de dualidad o producto de dualidad en X.
$\to$	Convergencia.
$\rightharpoonup$	Convergencia débil.
$\overset{*}{\rightharpoonup}$	Convergencia débil*.
$\lambda(E)$	Medida de Lebesgue del conjunto E.
c.t.p	Casi toda parte.
$L^p(\Omega)$	Espacio de Lebesgue, $L^p(\Omega) := \left\{f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^N \to \mathbb{R} \mid f \text{ es medible y } \|f\|^p \text{ es integrable}\right\}$.
supp f	Soporte de la función f.
$C_0^\infty(\Omega)$	Conjunto de funciones infinitamente diferenciables con soporte compacto.
$\mathcal{D}'(\Omega)$	Conjunto de funcionales lineales y continuos en $C_0^\infty(\Omega)$.
$D^{\boldsymbol{\alpha}}u$	Derivada generalizada de u de orden $\boldsymbol{\alpha}$.

$H^k(\Omega)$	El espacio de Sobolev, $H^k(\Omega) := \{u \in L^2(\Omega) \mid D^{\boldsymbol{\alpha}} u \in L^2(\Omega), \quad \forall\, \lvert\boldsymbol{\alpha}\rvert \le k\}$.
$H_0^k(\Omega)$	$H_0^k(\Omega) := \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{\lVert\cdot\rVert_{H^1(\Omega)}}$.
$\operatorname{div}\mathbf{F}$	Divergencia de $\mathbf{F}$, $\operatorname{div}\mathbf{F} := \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial F_i}{\partial x_i}, \qquad \mathbf{F} = (F_1, ..., F_N)$.
$H(\operatorname{div}, \Omega)$	$H(\operatorname{div}, \Omega) := \left\{\mathbf{F} \in L^2(\Omega)^N \mid \operatorname{div}\mathbf{F} \in L^2(\Omega)\right\}$.
∇u	Gradiente de u, $\nabla u := \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial u}{\partial x_N}\right)$.
$\mathbf{rot}\,\mathbf{F}$	Rotacional de $\mathbf{F}$, $\mathbf{rot}\,\mathbf{F} := \left(\frac{\partial F_3}{\partial x_2} - \frac{\partial F_2}{\partial x_3}, \frac{\partial F_1}{\partial x_3} - \frac{\partial F_3}{\partial x_1}, \frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2}\right), \quad \mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3)$.
Δu	Laplaciano de u, $\Delta u := \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$.
$L^p(0,T;X)$	Espacios de Lebesgue evolutivos, $L^p(0,T;X) := \{u : [0,T] \to X \mid u$ es medible y $\lVert u\rVert_X^p$ es integrable$\}$.
$V \subseteq H \subseteq V^*$	Terna de evolución.
$u^{(n)}$	n-ésima derivada débil generalizada de u.
$C([0,T];X)$	Espacio de funciones continuas evolutivo. $C([0,T];X) := \{u : [0,T] \to X \mid u$ es continua$\}$.
$W_p^1(0,T;V,H)$	Espacios de Sobolev evolutivos, $W_p^1(0,T;V,H) := \{u \in L^p(0,T;V) \mid u' \in L^q(0,T;V^*), \quad 1/p + 1/q = 1\}$.

Bibliografía

[1] A. Alonso and A. Valli, *Eddy Current Approximation of Maxwell Equations: Theory, algorithms and applications*, Milano, Italia: Springer, 2010.

[2] A. Bossavit, *Computational Electromagnetism*, San Diego, USA: Academic Press Inc., 1998.

[3] H. Brezis, *Functional analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, New York, Usa: Springer, 2010.

[4] Michel Chipot, *Elements of Nonlinear Analysis* Basel, Suiza: Birkäuser Verlag, 2000.

[5] L. C. Evans, *Partial Differential Equations*, USA: American Mathematical Society, 1998.

[6] F. Jones, *Lebesgue integration on Euclidean space*, Toronto, Canada: Jhons and barthle publishers, 2001.

[7] E. Kreyszig *Introductory Functional Analysis with Applications*, New York, USA: Wilay classics library, 1978.

[8] A. Kufner, O. John, S. Flučik, *Function Spaces*, Checoslovaquia: Noordhoff International Publishing, 1977.

[9] R. and J. L. Lions, *Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology, Volume 5: Evolutions Problems I*, Berlin, Alemania: Springer-Verlag, 1990.

[10] R. and J. L. Lions, *Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology, Volume 6: Evolutions Problems II*, Berlin, Alemania: Springer-Verlag, 1990.

[11] P. Monk, *Finite element methods for Maxwell's Equations*, Londres, Inglaterra: Oxford sciences publications, 2003.

[12] E. Y. Perdomo, *Formulación débil y de Galerkin de la ecuación bidimensional de Poisson*, Universidad del Cauca, 2011.

[13] A. Quaternioni, A. Valli, *Numerical Aproximation of Partial Differential Equations*, Milan, Italia: Springer, 2008.

[14] H. I Royden, P. M Fitzpatrick, *Real Analysis (fourth edition)*, China: Pearson, 2010.

[15] S. Salsa, *Partial Differential Equations in Action From Modeling to Theory*, New York, USA: Springer, 2007.

[16] E. Zeidler, *Nonlinear Functional Analysis and its Applications II \A Linear Monote Operators*, New York, USA: Springer-Verlag, 1990.

[17] E. Zeidler, *Nonlinear Functional Analysis and its Applications II \B Linear Monote Operators*, New York, USA: Springer-Verlag, 1990.

[18] E. Zeidler, *Applied functional analysis main principle and their applications*, New York, USA: Springer-Verlag, 1995.

[19] A. Ženišek, *Nonlinear Elliptic and Evolution Problem and Their Finite Element Aproximations*, Londres, Inglaterra: Academic Press Limited, 1990.

[20] Miloš Zlamal, *Finite Element Solution of Quasistationary Nonlinear Magnetic Field*, Rairo- Analyse numerique, tome 16, No 2, 1982, p. 161-191.

[21] Miloš Zlamal, *Addemdum " Finite Element Solution of Quasistationary Nonlinear Magnetic Field "* , Rairo- Analyse numerique, tome 17, No 4, 1983, p. 407-415.