Teoría de Babuska-Brezzi
y su aplicación a los problemas de Stokes y Darcy

WEYMAR ANDRÉS ASTAIZA SULEZ

Universidad del Cauca
Facultad de Ciencias Naturales, Exactas y de la Educación
Departamento de Matemáticas
Programa de Matemáticas
Popayán
2013

Teoría de Babuska-Brezzi
y su aplicación a los problemas de Stokes y Darcy

WEYMAR ANDRÉS ASTAIZA SULEZ

Trabajo de grado
En la modalidad de seminario presentado como requisito
parcial para optar al título de matemático

Director
Dr. RAMIRO MIGUEL ACEVEDO

Universidad del Cauca
Facultad de Ciencias Naturales, Exactas y de la Educación
Departamento de Matemáticas
Programa de Matemáticas
Popayán
2013

Nota de aceptación

Director

Dr. Ramiro Acevedo

Comité evaluador

Dr. Willy Sierra

Mg. Gerardo Loaiza

Fecha de sustentación: Popayán, 27 de Junio de 2013.

Agradecimientos

Agradezco a Dios por darme la oportunidad de vivir y de poder interactuar en el mundo para cumplir mis sueños.

Agradezco a mis padres por todo el apoyo brindado en el transcurso de mi vida, en mi formación personal y en mi formación profesional.

Agradezco a mi hermana por todos su apoyo incondiconal y sus sabios consejos.

Agradezco al profesor Ramiro Acevedo por su paciencia en la orientación de este trabajo, por enseñarme cualidades humanas y profesionales.

Agradezco a la Universidad del Cauca por darme la oportunidad de formarme profesionalmente.

Introducción

En diferentes ciencias naturales, como Biología, Química y en Ingenierias aparecen problemas que conllevan a resolver ciertos tipos de sistemas de ecuaciones, bien sea ordinarias o parciales. En consecuencia, es necesario desarrollar elementos que ayuden a establecer cuándo estos sistemas tienen solución y además determinar condiciones que garanticen que esta solución es única. Por lo tanto es importante conocer diferentes herramientas que ayuden a resolver situaciones que se modelan en las tantas disciplinas donde se estudian fenómenos de la naturaleza y así utilizar la matemática como medio para resolver dichos problemas.

El principal objeto de estudio para este trabajo son algunas EDP (Ecuaciones diferenciales parciales), por ello es imprescindible estudiar elementos del análisis funcional que ayudan a comprender y manejar este tipo de problemas.

Existen diferentes formas en el planteamiento de las EDP, muchas de ellas se resuelven gracias a resultados conocidos del análisis funcional, tal es el caso del lema de **Lax-Milgram** (ver Corolario 5.8 de [5]) el cual establece cuándo una formulación variacional (elíptica) de la forma:

Hallar $u \in X$ tal que

$$a(u,v) = f(v) \qquad \forall v \in X, \tag{1}$$

donde X es un espacio de Hilbert, $a\colon X \times X \to \mathbb{R}$ es una forma bilineal y $f \in X'$, tiene solucíon y cuando es única. Muchas ecuaciones diferenciales parciales (tales como la ecuación de Laplace) conducen a una formulación variacional de la forma (1) (ver, por ejemplo [17]). Pero no siempre las formulaciones variacionales son de este tipo, en muchos casos se debe recurrir a otro tipo de formulaciones que ayuden a resolver EDP y para ello se necesitará conocer otras teorías importantes como la dada por el matemático checo Ivo Babuska [3] y el matemático italiano Franco Brezzi [6], conocida como **Teoría de Babuska-Brezzi** que estudia las llamadas **formulaciones variacionales mixtas** y será el principal objeto de estudio de este trabajo. La Teoría de Babuska-Brezzi también incluye el análisis de discretización de las formulaciones que se tratan en su teoría, es decir incluye la aproximación en subespacios finito dimensionales. En particular la mencionada teoría incluye análisis de aproximación a través de subespacios de elementos finitos [4]. Sin embargo, en el presente trabajo solamente se estudiarán los problemas continuos, sin considerar sus discretizaciones.

Como aplicación de la Teoría de Babuska-Brezzi, estudiaremos los problemas de **Stokes** y **Darcy**, los cuales describen fenómenos que se presentan en el estudio de la dinámica de fluidos y que son de particular importancia en problemas industriales relacionados con oleoductos, acueductos, tratamientos de aguas residuales, etc, donde se requiere el estudio de ecuaciones que modelan el comportamiento de fluidos en general.

Notaciones

$\emptyset$	Conjunto vacio
$\mathbb{R}$	Conjunto de los números reales
$\mathbb{Z}^+$	Conjunto de los enteros no negativos
Ω	Subconjunto abierto de $\mathbb{R}^N$
$\partial\Omega$	Frontera del conjunto Ω
u	Campo escalar
$\boldsymbol{u}$	Campo vectorial
$\nabla \cdot \boldsymbol{u}$	Divergencia de $\boldsymbol{u}$
$\|\Omega\|$	Medida de Lebesgue del conjunto Ω
$C^k(\Omega)$	Conjunto de funciones k-veces continuamente diferenciables en Ω
$C_0(\Omega)$	Conjunto de funciones continuas de soporte compacto en Ω
$C_0^\infty(\Omega)$	Conjunto de funciones infinitamente diferenciables y de soporte compacto en Ω
$C^k(\overline{\Omega})$	Conjunto de funciones en $C^k(\Omega)$ las cuales son acotadas k-veces diferenciables en $\overline{\Omega}$
$\square$	Culminación de una demostración

Índice general

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Conceptos del Análisis Funcional

Las definiciones y resultados que se presentan a continuación son muy importantes en el Análisis Funcional, los cuales son ampliamente conocidos y pueden ser consultados en [1], [5],[10], [11], [12].

Definición 1.1.1. Sean X, M espacios de Hilbert reales y $B\colon X \times M \to \mathbb{R}$. Se dice que B es una forma bilineal sobre $X \times M$ si

1. $B(\alpha u + \beta v, w) = \alpha B(u, w) + \beta B(v, w) \qquad \forall u, v \in X \quad \forall w \in M \qquad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$
2. $B(u, \alpha v + \beta w) = \alpha B(u, v) + \beta B(u, w) \qquad \forall u \in X \quad \forall v, w \in M \qquad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$

B es **acotada**, si existe $C > 0$ tal que

$$|B(u, v)| \leq C\|u\|_X \|v\|_M,$$

para todo $u \in X$ y para todo $v \in M$.

Además, si $X = M$, entonces :
B se llama **elíptica** si existe $\alpha > 0$ tal que

$$B(v, v) \geq \alpha \|v\|_X^2,$$

para todo $v \in X$.
B se llama **simétrica** si

$$B(u, v) = B(v, u) \quad \forall u, v \in X.$$

B se llama **positiva** si

$$B(v, v) \geq 0 \quad \forall v \in X.$$

Definición 1.1.2. Sea $B\colon X \times M \to \mathbb{R}$ una forma bilineal, donde X y M son espacios normados. B se dice continua en $(x_0, q_0) \in X \times M$ si para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para todo $(x, q) \in X \times M$ se tiene

$$\|(x, q) - (x_0, q_0)\|_{X \times M} \leq \delta \Rightarrow |B(x, q) - B(x_0, q_0)| \leq \epsilon.$$

B se dice continua si B es continua para todo $(x, q) \in X \times M$.

Observación 1.1.3. Si en $X \times M$ consideramos la norma

$$\|(u,v)\|_{X\times M} := \|u\|_X + \|v\|_M \qquad \forall (u,v) \in X \times M,$$

podemos mostrar que para B una forma bilineal, ser continua es equivalente a ser acotada. En efecto, supongamos que B es acotada, luego tenemos que existe $C > 0$ tal que

$$|B(u,v)| \le C\|u\|_X\|v\|_M, \quad \forall u \in X \quad \forall v \in M.$$

Sean $\{u_n\}_{n\in\mathbb{Z}^+} \subset X$ y $\{v_n\}_{n\in\mathbb{Z}^+} \subset M$ tales que

$$(u_n, v_n) \to (u,v), \quad n \to \infty \quad en \quad X \times M,$$

así,

$$u_n \to u, \quad n \to \infty \quad en \quad X \quad y \quad v_n \to v, \quad n \to \infty \quad en \quad M.$$

Luego, por ser $\{u_n\}_{n\in\mathbb{Z}^+}$ y $\{v_n\}_{n\in\mathbb{Z}^+}$ convergentes entonces son acotadas, de donde

$$\begin{aligned} |B(u_n,v_n) - B(u,v)| &= |B(u_n,v_n) - B(u,v_n) + B(u,v_n) - B(u,v)| \\ &\le |B(u_n,v_n) - B(u,v_n)| + |B(u,v_n) - B(u,v)| \\ &= |B(u_n - u, v_n)| + |B(u, v_n - v)| \\ &\le C\|u_n - u\|_X\|v_n\|_M + C\|u\|_X\|v_n - v\|_M \\ &\le C_1\|u_n - u\|_X + C_2\|v_n - v\|_M \qquad \forall n \in \mathbb{Z}^+. \end{aligned}$$

En consecuencia,

$$\lim_{n\to\infty} B(u_n, v_n) = B(u,v),$$

lo que implica que B es continua en (u,v).

Supongamos que B es continua, así en particular B es continua en $(0,0)$, es decir

$$\lim_{(u,v)\to(0,0)} B(u,v) = 0.$$

Así, para $\epsilon = 1$ tenemos que existe $\delta > 0$ tal que

$$\|(u,v)\| < \delta \Rightarrow |B(u,v)| < 1.$$

Sea $z = (u,v)$, con $u \neq 0$ y $v \neq 0$. Si definimos

$$\tilde{z} := \frac{\delta}{4}\left(\frac{u}{\|u\|_X}, \frac{v}{\|v\|_M}\right),$$

se tiene que

$$\|\tilde{z}\| = \frac{\delta}{4}\left(\frac{\|u\|_X}{\|u\|_X} + \frac{\|v\|_M}{\|v\|_M}\right) = \frac{\delta}{4}2 = \frac{\delta}{2} < \delta,$$

y en consecuencia

$$\left|B\left(\frac{\delta u}{4\|u\|_X}, \frac{\delta v}{4\|v\|_M}\right)\right| < 1,$$

de donde

$$|B(u,v)| < \frac{16}{\delta}\|u\|_X\|v\|_M.$$

Dado que esta última desigualdad se cumple si $u = 0$ ó $v = 0$, se tiene que B es acotada.

Definición 1.1.4. Sea $T\colon X \to M$ un operador. Entonces se define la Imagen y Kernel (Núcleo) de T respectivamente por

$$\mathrm{Im}T := \{T(x) \in M : x \in X\} \quad y$$
$$\mathrm{Ker}T := \{x \in D(T) : T(x) = 0\}.$$

Definición 1.1.5. Un operador lineal es un un operador tal que

1. El dominio e imagen de T son espacios vectoriales sobre el mismo campo $\mathbb{K}$, donde $\mathbb{K}$ denota a $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$.

2. Para todo $x, y \in D(T)$ y para cualquier $\alpha \in \mathbb{K}$ se tiene que

$$T(x+y) = T(x) + T(y) \qquad \text{y} \qquad T(\alpha x) = \alpha T(x).$$

Se dice que T es lineal conjugado si satisface que

$$T(\alpha x + \beta y) = \overline{\alpha} T(x) + \overline{\beta} T(y),$$

donde $\overline{\alpha}$ y $\overline{\beta}$, representan el conjugado de α y β respectivamente.

Definición 1.1.6. Sea $T\colon X \to M$ un operador lineal, con X y M espacios normados. Entonces decimos que el operador T es acotado si existe $\beta > 0$ tal que

$$\|T(x)\|_M \leq \beta \|x\|_X,$$

para todo $x \in X$.

Definición 1.1.7. Sea $T\colon X \to M$ un operador, no necesariamente lineal con X y M espacios normados. Entonces T es continuo en $x_0 \in D(T)$ si para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para todo $x \in D(T)$ se tiene

$$\|x - x_0\|_X < \delta \Rightarrow \|T(x) - T(x_0)\|_M < \epsilon$$

T será continuo si T es continuo en cada $x \in D(T)$.

Teorema 1.1.8. *Sea $T\colon D(T) \to M$ un operador lineal, donde $D(T) \subset X$ y X, M son espacios normados. Entonces*

1. *T es continuo sí, y sólo si, T es acotado.*

2. *Si T es continuo en un punto del dominio entonces T es continuo.*

Demostración. Ver Teorema 2.7-9 de [12]. $\square$

Definición 1.1.9. Sea X un espacio normado sobre $\mathbb{K}$, donde $\mathbb{K}$ es $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$. Entonces f es un funcional, si este es un operador

$$f\colon X \to \mathbb{K}.$$

Un funcional f es lineal y acotado, si como operador lo es.

Definición 1.1.10. Dado X un espacio normado, entonces el conjunto de todos los funcionales acotados constituye un espacio normado, con norma definida por

$$\|f\|_{X'} = \sup_{\substack{x\in X\\ x\neq 0}} \frac{|f(x)|}{\|x\|}.$$

Este espacio es llamado el espacio dual de X y se denota por X'. Si en el contexto se sabe el espacio dual en el cual se esta trabajando, escribiremos $\|f\|$ en lugar de $\|f\|_{X'}$.
La forma bilineal

$$\langle .,.\rangle \colon X' \times X \to \mathbb{R},$$

tal que

$$f(v) := \langle f, v\rangle,$$

es llamada producto de dualidad en X.

Teorema 1.1.11. ***(Teorema de Hahn-Banach.)*** *Sea f un funcional lineal y acotado sobre un subespacio Z de un espacio normado X. Entonces existe un funcional $\tilde{f}$ lineal y acotado sobre X, el cual es una extensión de f y además*

$$\|f\|_{X'} = \|\tilde{f}\|_{Z'},$$

donde

$$\|\tilde{f}\|_{X'} = \sup_{\substack{x\in X\\ x\neq 0}} \frac{|\tilde{f}(x)|}{\|x\|} \quad y \quad \|f\|_{Z'} = \sup_{\substack{x\in Z\\ x\neq 0}} \frac{|f(x)|}{\|x\|}.$$

Demostración. Ver Teorema 4.3-2 de [12]. □

Lema 1.1.12. *Sean X y M dos espacios de Hilbert, $l\colon X \times M \to \mathbb{R}$ una forma bilineal y continua. Si para cada $x \in X$ definimos*

$$Ax\colon M \to \mathbb{R},$$

tal que

$$Ax(q) = l(x,q) \quad \forall q \in M,$$

entonces $Ax \in M'$. Además, el operador

$$A\colon X \to M',$$

es también un operador lineal y continuo.

Demostración. Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $q, p \in M$. Luego

$$\begin{aligned} Ax(\alpha p + \beta q) &= l(x, \alpha p + \beta q) \\ &= l(x, \alpha p) + l(x, \beta q) \\ &= \alpha l(x,p) + \beta l(x,q) \\ &= \alpha Ax(p) + \beta Ax(q), \end{aligned}$$

es decir Ax es lineal. Ahora, veamos que Ax es acotado. En efecto, dado que l es acotado, para $q \in M$ se tiene que

$$\begin{aligned} |Ax(q)| &= |l(x,q)| \\ &\leq C\|x\|\|q\|, \end{aligned}$$

y por tanto

$$\frac{|Ax(q)|}{\|q\|} \leq \tilde{C},$$

con $\tilde{C} = C\|x\|$, por lo cual

$$\|Ax\| \leq \tilde{C},$$

y así Ax es acotado. Por último, mostraremos que A es lineal y acotado. Para ello, tomemos $x, y \in X$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, luego

$$\begin{aligned} A(\alpha x + \beta y)(q) &= l(\alpha x + \beta y, q) \\ &= l(\alpha x, q) + l(\beta y, q) \\ &= \alpha l(x, q) + \beta l(y, q) \\ &= \alpha Ax(q) + \beta Ay(q) \quad \forall q \in M, \end{aligned}$$

de donde vemos que A es lineal. Además, para $x \in X$ se tiene que

$$\|Ax\| \leq C\|x\|,$$

por lo cual

$$\frac{\|Ax\|}{\|x\|} \leq C,$$

es decir

$$\|A\| \leq C,$$

y con esto se prueba que A es acotado o equivalentemente es continuo. □

Definición 1.1.13. Sean X un espacio normado, $V \subset X$ y $W \subset X'$. Se define el anulador de V y el anulador de W, denotados respectivamente V^0 y W^0, como

$$V^0 := \{f \in X' : \langle f, v\rangle = 0 \quad \forall v \in V\},$$

$$W^0 := \{v \in X : \langle f, v\rangle = 0 \quad \forall f \in W\}.$$

Además se define el conjunto ortogonal de V como

$$V^\perp := \{y \in X : (v, y) = 0 \quad \forall v \in V\}.$$

Observación 1.1.14. Deseamos resaltar que la definición de anulador de un conjunto es diferente para subconjuntos de X que para subconjuntos de X'. De hecho, $V^0 \subset X'$ para $V \subset X$, mientras que $W^0 \subset X$ para $W \subset X'$.

Lema 1.1.15. *Sea X un espacio Banach y $V \subset X$. Entonces V^0 es Banach.*

Demostración. Dado que X un espacio Banach es suficiente probar que V^0 es un subespacio cerrado en X'. En efecto, sea $\{\boldsymbol{f}_n\}_{n\in\mathbb{Z}^+} \subset V^0$ tal que $\boldsymbol{f}_n \to \boldsymbol{f}$ en X'. Tomando $\boldsymbol{v} \in V$ y usando la continuidad de los funcionales $\boldsymbol{f}$ y $\boldsymbol{f}_n$ para cada $n \in \mathbb{Z}^+$ se sigue

$$\begin{aligned} |\langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}\rangle| = |\langle \boldsymbol{f} - \boldsymbol{f}_n + \boldsymbol{f}_n, \boldsymbol{v}\rangle| &= |\langle \boldsymbol{f} - \boldsymbol{f}_n, \boldsymbol{v}\rangle| + |\langle \boldsymbol{f}_n, \boldsymbol{v}\rangle| \\ &= |\langle \boldsymbol{f} - \boldsymbol{f}_n, \boldsymbol{v}\rangle| + 0 \\ &= |\langle \boldsymbol{f} - \boldsymbol{f}_n, \boldsymbol{v}\rangle| \\ &\leq \|\boldsymbol{f} - \boldsymbol{f}_n\|_{X'} \|\boldsymbol{v}\|_X . \end{aligned}$$

Ahora, haciendo que $n \to \infty$ en la desigualdad anterior se sigue

$$|\langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{v} \rangle| = 0$$

y así $\langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{v} \rangle = 0$ para todo $\boldsymbol{v} \in V$. Es decir, $\boldsymbol{f} \in V^0$ y por lo tanto V^0 es cerrado. $\square$

Definición 1.1.16. Un espacio vectorial X se dice que es la suma directa de dos subespacios Y, Z de X y se escribe

$$X = Y \oplus Z,$$

si cada $x \in X$ tiene una única representación

$$x = y + z \qquad y \in Y \quad z \in Z.$$

Teorema 1.1.17. ***(Teorema de Suma directa.)*** *Sea Y un subespacio cerrado de un espacio de Hilbert X. Entonces*

$$X = Y \oplus Y^{\perp}.$$

Demostración. Ver Teorema 3.3-4 de [12]. $\square$

Teorema 1.1.18. ***(Teorema de Representación de Riesz.)*** *Sea f un funcional lineal y acotado sobre un espacio de Hilbert X. Entonces, existe un único elemento $z \in X$ tal que*

$$\langle f, u \rangle = (u, z) \qquad \forall u \in X \tag{1.1}$$

y además

$$\|f\|_{X'} = \|z\|_X.$$

Demostración. Ver Teorema 1.2.3 de [17] o ver Teorema 3.8-1 de [12]. $\square$

Observación 1.1.19. El elemento $z \in X$ que satisface (1.1) se denomina representante de Riesz de f y se denota por $\mathcal{R}(f)$. Además, para $V \subset X$ se puede mostrar que el operador representación de Riesz

$$\mathcal{R} \colon V^0 \to V^{\perp}$$

es un isomorfismo. En efecto, por Teorema 1.1.18 sabemos que para $f \in V^0$ existe $z \in X$ tal que

$$\|\mathcal{R}(f)\|_X = \|z\|_X = \|f\|_{X'}, \tag{1.2}$$

y como

$$(v, \mathcal{R}(f)) = \langle f, v \rangle = 0 \quad \forall v \in V,$$

entonces $\mathcal{R}(f) \in V^{\perp}$ y por la igualdad (1.2) se tiene que el operador $\mathcal{R}$ es inyectivo. De otro lado, para $z \in V^{\perp} \subset X$ tenemos que por ser

$$\mathcal{R} \colon X' \to X$$

un isomorfismo, existe $f \in X'$ tal que

$$z = \mathcal{R}(f),$$

ahora veamos que $f \in V^0$. Para esto, tomemos $v \in V$ cualquiera, así utilizando el hecho de que $z \in V^{\perp}$ tenemos que

$$\langle f, v \rangle = (v, \mathcal{R}(f)) = (v, z) = 0,$$

es decir

$$\langle f, v \rangle = 0 \quad \forall v \in V$$

y así $f \in V^0$. En consecuencia, existe $f \in V^0$ tal que

$$z = \mathcal{R}(f),$$

es decir $\mathcal{R}$ es sobreyectiva.

De lo anterior tenemos que

$$\mathcal{R} \colon X' \to X$$

es un isomorfismo (isométrico) y además $\mathcal{R}|_{V^0}$ es un isomorfismo entre V^0 y $V^{\perp}$.

Teorema 1.1.20. *Sea X un espacio de Hilbert. Entonces el espacio dual X' es un espacio de Hilbert.*

Demostración. Basta observar

$$\langle f, g \rangle_{X'} := (\mathcal{R}(f), \mathcal{R}(g))_X,$$

define un producto interior en X', el cual induce la norma

$$\|f\|_{X'} = (\mathcal{R}(f), \mathcal{R}(f))_X^{\frac{1}{2}},$$

donde $\mathcal{R}$ es el operador representante de Riesz. □

Definición 1.1.21. Sea X un espacio normado. La función

$$\mathcal{C} \colon X \to X'',$$

definida por

$$\mathcal{C}(x) = h_x \in X'',$$

donde

$$\langle h_x, f \rangle = \langle f, x \rangle \quad \text{para toda} \quad f \in X',$$

es llamada la función **canónica** (de X en X''). Notamos que

$$\langle \mathcal{C}(x), f \rangle = \langle f, x \rangle \qquad \forall f \in X' \quad \forall x \in X.$$

Lema 1.1.22. *Sean X un espacio normado y $\mathcal{C} : X \to X''$ la inyección canónica dada en la definición anterior.*

i) $\mathcal{C}$ es una isometria, es decir $\mathcal{C}$ es lineal y

$$\|\mathcal{C}x\|_{X''} = \|x\|_X \quad \forall x \in X. \tag{1.3}$$

Además, la identidad anterior implica que $\mathcal{C}$ es inyectiva y $\|\mathcal{C}\| = 1$.

ii) Si X es un espacio de Hilbert, entonces $\mathcal{C}$ es biyectiva. Además, si M es un espacio normado y

$$T\colon X'' \to M$$

es lineal y acotado. Entonces se cumple

$$\|T \circ \mathcal{C}\| = \|T\|. \tag{1.4}$$

Demostración. *i)* La linealidad de $\mathcal{C}$ y (1.3) se demuestran en el Lema 4.6-2 de [12]. De (1.3) se sigue que el nucleo de $\mathcal{C}$ es trivial, por lo que $\mathcal{C}$ es inyectiva. Además,

$$\|\mathcal{C}\| = \sup_{\substack{x\in X\\ x\neq 0}} \frac{\|\mathcal{C}x\|_{X''}}{\|x\|_X} = \sup_{\substack{x\in X\\ x\neq 0}} \frac{\|x\|_X}{\|x\|_X} = 1.$$

ii) La sobreyectividad de $\mathcal{C}$ en el caso de que X es Hilbert se demuestra en el Teorema 4.6-6 de [12]. Para demostrar (1.4), primero observamos que

$$\|T\mathcal{C}\| \leq \|T\|\|\mathcal{C}\| = \|T\|. \tag{1.5}$$

Por otro lado, se tiene que para cada $f \in X''$ existe $x \in X$ tal que

$$\mathcal{C}x = f$$

y así,

$$\begin{aligned}\|Tf\|_M &= \|T\mathcal{C}x\|_M \\ &\leq \|T\mathcal{C}\|_M\|x\|_X \\ &= \|T\mathcal{C}\|_M\|\mathcal{C}x\|_{X''} \\ &= \|T\mathcal{C}\|_M\|f\|_{X''}\end{aligned}$$

por lo tanto

$$\frac{\|Tf\|_M}{\|f\|_{X''}} \leq \|T\mathcal{C}\|_M \qquad \forall f \in X''\backslash\{0\},$$

en consecuencia

$$\|T\| \leq \|T\mathcal{C}\| \tag{1.6}$$

y así, por (1.5) y (1.6) se obtiene

$$\|T\| = \|T \circ \mathcal{C}\|.$$

□

Lema 1.1.23. ***(Lema de Lax-Milgram.)*** *Sean X un espacio de Hilbert, $a\colon X \times X \to \mathbb{R}$ bilineal y acotada, $F\colon X \to \mathbb{R}$ lineal y acotada. Si existe $\alpha > 0$ tal que*

$$a(v,v) \geq \alpha\|v\|_X^2 \ \forall v \in X,$$

entonces para el problema
Encontrar $u \in X$:

$$a(u,v) = F(v) \qquad \forall v \in X, \tag{1.7}$$

tiene solución única y $\alpha\|u\|_X \leq \|F\|_{X'}$.

Demostración. Ver Teorema 1.2.4 de [17] o Colorario 5.8 de [5]. $\square$

Lema 1.1.24. *Sean X y M espacios de Hilbert y $T\colon X \to M$ un operador lineal y acotado. Si existe $C > 0$ tal que*

$$\|u\|_X \leq C\|Tu\|_M \quad \forall u \in X, \tag{1.8}$$

entonces T es inyectivo e ImT *es cerrado.*

Demostración. Notemos que (1.8) implica que si $u \in X$ es tal que

$$Tu = 0,$$

entonces $u = 0$. Así, T es inyectivo. Por lo tanto

$$T\colon X \to \mathrm{Im}T,$$

es biyectivo y así existe

$$T^{-1}\colon \mathrm{Im}T \to X,$$

lineal y biyectivo. Además, (1.8) es equivalente a

$$\|T^{-1}u\|_X \leq \|u\|_M \quad \forall u \in \mathrm{Im}T,$$

de donde T^{-1} es continuo y por tanto

$$\mathrm{Im}T = T^{-1}(X)$$

es cerrado. $\square$

Definición 1.1.25. Sea $B\colon X \to M$ un operador lineal acotado, donde X y M son espacios normados, entonces el operador **Adjunto**[1] de B, denotado por B^*, es el operador

$$B^*\colon M' \to X',$$

tal que para todo $g \in M'$

$$\langle B^*g, y\rangle = \langle g, By\rangle \quad \forall y \in X,$$

donde X' y M' son los respectivos espacios duales de X y M.

Teorema 1.1.26. *Sea $B\colon X \to M$ un operador lineal acotado, entonces el operador* ***Adjunto*** *es lineal, acotado y además*

$$\|B\| = \|B^*\|.$$

[1]En algunos textos, como por ejemplo Kreyszig [12], se denota el operador adjunto como $B^\times$ y reservan la notación B^* para el operador *Adjunto de Hilbert* (ver Sección 3.9 de [12]). Dado que en este trabajo no se hace mención al operador Adjunto de Hilbert, el uso de la notación aquí usada no causará confusión y está acorde con la notación usada en otros textos más avanzados como Brezis [5] y Zeidler [22].

Demostración. Ver Teorema 4.5-2 de [12]. □

Veamos a continuación una importante relación para el operador adjunto de $B\colon X \to M$ un operador lineal dado, con X y M espacios normados. Para ello supongamos que B es un operador lienal biyectivo, así B^{-1} existe y es un operador lineal. Además, se puede mostrar que $(B^*)^{-1}$ existe y

$$(B^*)^{-1} = (B^{-1})^*.$$

En efecto, sea $g \in M'$ tal que

$$B^*g = 0,$$

luego

$$\langle B^*g, x\rangle = 0 \quad \forall x \in X \Leftrightarrow \langle g, Bx\rangle = 0 \quad \forall x \in X,$$

pero como B es biyectivo, tenemos que para todo $q \in M$ existe $x \in X$ tal que

$$Bx = q,$$

con lo cual

$$\langle g, q\rangle = 0 \quad \forall q \in M$$

y por tanto $g = 0$ en M', es decir B^* es inyectivo. De otro lado, podemos ver que B^* es sobreyectivo, para tal hecho tomemos $f \in X'$ y $x \in X$, luego existe $q \in M$ tal que

$$x = B^{-1}q,$$

de donde

$$\begin{aligned}\langle f, x\rangle &= \langle f, B^{-1}q\rangle \\ &= \langle (B^{-1})^* f, q\rangle \\ &= \langle (B^{-1})^* f, Bx\rangle \\ &= \langle B^*(B^{-1})^* f, x\rangle.\end{aligned} \tag{1.9}$$

Así, para $g = (B^{-1})^* f \in M'$ tenemos que

$$\langle f, x\rangle = \langle B^*g, x\rangle \quad \forall x \in X,$$

esto es

$$B^*g = f,$$

con lo cual, B^* es sobreyectivo. En conclusión tenemos que $(B^{-1})^*$ existe y por la última expresion de (1.9) se tiene que

$$(B^{-1})^* = (B^*)^{-1},$$

luego, de esta última expresión y de (1.1.26) se sigue que

$$\|(B^*)^{-1}\| = \|(B^{-1})^*\| = \|B^{-1}\|.$$

Definición 1.1.27. Sean E y F dos espacios normados y $A\colon E \to F$ un operador lineal. Se dice que A es cerrado si

$$G(A) = \{(u, Au) \quad con \quad u \in D(A)\} \quad \text{es cerrado en} \quad E \times F.$$

Teorema 1.1.28. *Sean E y F dos espacios normados. Si $A\colon E \to F$ es un operador lineal y acotado, entonces A es cerrado. Además, si E y F son espacios de Banach, las siguientes afirmaciones son equivalentes*

i) $\mathrm{Im}A$ *es cerrado.*

ii) $\mathrm{Im}A^*$ *es cerrado.*

iii) $\mathrm{Im}A = (\mathrm{Ker}A^*)^0$.

iv) $\mathrm{Im}A^* = (\mathrm{Ker}A)^0$.

Demostración. En el Lema 4.13-5 de [12] se verifica que todo operador lineal y acotado es cerrado. Finalmente en el Teorema 2.19 de [5] se demuestra que las condiciones *i)-iv)* son equivalentes para operadores cerrados (incluso se demuestra que son equivalentes aún para operadores cerrados no acotados). □

Teorema 1.1.29. *Sean E, F espacios de Banach y $A : E \to F$ un operador lineal acotado. Las siguientes afirmaciones son equivalentes*

i) *A es sobreyectivo, es decir* $\mathrm{Im}A = F$.

ii) *Existe una constante $C > 0$ tal que*

$$\|f\|_{F'} \leq C \|A^* f\|_{E'} \qquad \forall f \in F'.$$

iii) *A^* es inyectivo e* $\mathrm{Im}A^*$ *es cerrado.*

Demostración. Ver Teorema 2.20 de [5]. □

1.2. Espacios de Sobolev

En esta sección y a lo largo del trabajo Ω es un subconjunto abierto y no vacio de $\mathbb{R}^N$. A continuación mencionamos resultados importantes que surgen en el estudio de los Espacios de Sobolev y que serán de gran importancia en el desarrollo del trabajo.

Definición 1.2.1. Si $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ es continua se define el soporte de f como

$$Supp f := \overline{\{x \in \Omega : f(x) \neq 0\}}.$$

Diremos que f tiene soporte compacto si $Supp f$ es un subconjunto compacto de $\mathbb{R}^N$.

Definición 1.2.2. Se define el conjunto de funciones infinitamente diferenciables y de soporte compacto incluido en Ω como

$$C_0^\infty(\Omega) := \{f\colon \Omega \to \mathbb{R} : f \in C^\infty(\Omega) \quad y \quad Supp f \subset \Omega \quad es \quad compacto\}.$$

Definición 1.2.3. Para Ω acotado, diremos que $\partial\Omega$ es de clase $C^k (k \in \mathbb{Z}^+)$ (Lipschitz continua), si para todo $x_0 \in \partial\Omega$, existen $r_{x_0} > 0$ y $\gamma_{x_0}\colon \mathbb{R}^{(N-1)} \to \mathbb{R}$ tales que

$$\begin{aligned} \Omega \cap B(x_0, r_{x_0}) &= \{x \in B(x_o, r_{x_0}) : x_N > \gamma_{x_0}(x_1, \ldots, x_{N-1})\} \;\; y \\ \partial\Omega \cap B(x_0, r_{x_0}) &= \{x \in B(x_o, r_{x_0}) : x_N = \gamma_{x_0}(x_1, \ldots, x_{N-1})\}, \end{aligned}$$

con $\gamma_{x_0} \in C^k$ (Lipschitz continua).

Definición 1.2.4. Para Ω acotado, $1 \leq p < \infty$ y $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$, decimos que $f \in L^p(\Omega)$ si f es medible y

$$\int_\Omega |f|^p < \infty.$$

Definición 1.2.5. (Derivada débil) Sea $f \in L^2(\Omega)$. Para $i = 1, 2, \dots, N$, la i-ésima derivada débil de f (si existe) es una función $w_i := \frac{\partial f}{\partial x_i} \in L^2(\Omega)$ tal que

$$\int_\Omega f \frac{\partial \phi}{\partial x_i} = -\int_\Omega w_i \phi \qquad\qquad \forall \phi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Observación 1.2.6. Cuando las funciones w_i existen se puede probar que estas son únicas en el séntido de $L^2(\Omega)$. Además si f es lo suficientemente suave, las derivadas en el sentido clásico coinciden con las derivadas débiles. Con la definición anterior se definen los espacios vectoriales $H^1(\Omega)$ y $H^2(\Omega)$ que involucran las derivadas en este sentido, donde $H^1(\Omega)$ tiene en cuenta las derivadas de primer orden y $H^2(\Omega)$ involucra tanto las de primer orden como las derivadas de segundo orden, es decir

$$\begin{aligned} H^1(\Omega) &:= \left\{ f \in L^2(\Omega) : \frac{\partial f}{\partial x_i} \in L^2(\Omega)\ ,\ i = 1, 2, ..., N \right\}, \\ H^2(\Omega) &:= \left\{ f \in L^2(\Omega) : \frac{\partial f}{\partial x_i} \in H^1(\Omega)\ ,\ i = 1, 2, ..., N \right\}. \end{aligned}$$

Estos espacios son de Hilbert con los productos interiores dados por

$$\begin{aligned} (f, g)_{H^1(\Omega)} &:= \int_\Omega (fg \ + \ \nabla f \cdot \nabla g)\,, \\ (f, g)_{H^2(\Omega)} &:= (f, g)_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}, \frac{\partial g}{\partial x_i} \right)_{H^1(\Omega)}, \end{aligned}$$

donde $\nabla h := (w_1, \dots, w_N)$ con $w_i := \frac{\partial h}{\partial x_i}$.

Teorema 1.2.7. *Si Ω es acotado y con frontera de clase C^1,*

$$\overline{C^\infty(\overline{\Omega})}^{\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}} = H^1(\Omega), \quad \overline{C^\infty(\overline{\Omega})}^{\|\cdot\|_{H^2(\Omega)}} = H^2(\Omega).$$

Además, existen operadores lineales y acotados

$$\gamma_0\colon H^1(\Omega) \to L^2(\partial\Omega), \qquad \gamma_1\colon H^2(\Omega) \to L^2(\partial\Omega)$$

tales que

$$\gamma_0(v) = v|_{\partial\Omega}, \quad \gamma_1(v) = \left.\frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{n}}\right|_{\partial\Omega} \qquad \forall v \in C^\infty(\overline{\Omega}),$$

donde $\boldsymbol{n}$ es el vector normal exterior a $\partial\Omega$. Los operadores γ_0 y γ_1 son llamados traza y derivada normal.

Demostración. Ver Teorema 4.4.1 de [1]. $\square$

Observación 1.2.8. Para $u \in H^1(\Omega)$ y $v \in H^2(\Omega)$, en lugar de $\gamma_0(u)$ y $\gamma_1(v)$ usaremos la notación

$$u|_{\partial\Omega} \quad \text{y} \quad \left.\frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{n}}\right|_{\partial\Omega}.$$

Así, en lugar de escribir

$$\int_{\partial\Omega} \gamma_0(u)\gamma_1(v),$$

escribiremos

$$\int_{\partial\Omega} u\frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{n}}.$$

Además, dado que γ_0 y γ_1 son lineales y acotados se tiene que existen constantes positivas C_1 y C_2 tales que

$$\|u\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq C_1 \|u\|_{H^1(\Omega)} \qquad \forall u \in H^1(\Omega) \tag{1.10}$$

y

$$\left\|\frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{n}}\right\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq C_2 \|v\|_{H^2(\Omega)} \qquad \forall v \in H^2(\Omega). \tag{1.11}$$

Definición 1.2.9. Para Ω acotado y con frontera de clase C^1 se define

$$\mathrm{Im}(\gamma_0) := H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega),$$

dotado con la siguiente norma:

$$\|v\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} := \inf_{\phi\in H^1(\Omega)} \left\{\|\phi\|_{H^1(\Omega)} : \gamma_0(\phi) = v\right\}.$$

Además, definimos $(H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega))' := H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$.

Teorema 1.2.10. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un dominio acotado con frontera $\partial\Omega$ Lipschitz continua. Entonces el operador*

$$\gamma_0 \colon H^1(\Omega) \to H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$$

tiene una inversa continua a la derecha.

Demostración. Ver Teorema 1.5.1.3 de [11].

Definición 1.2.11. El espacio $H_0^1(\Omega)$ denota a los elementos de $H^1(\Omega)$ que poseen traza cero. Además,

$$H_0^1(\Omega) := \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}},$$

y se define $(H_0^1(\Omega))' := H^{-1}(\Omega)$.

Teorema 1.2.12. ***(Desigualdad de Poincaré.)*** *Sea Ω acotado, entonces existe $C > 0$ tal que*

$$\int_\Omega |v|^2 \leq C \int_\Omega |\nabla v|^2,$$

para toda $v \in H_0^1(\Omega)$.

Demostración. Ver Proposición 4.3.10 de [1]. □

Teorema 1.2.13. ***(Identidades de Green.)*** *Sea Ω acotado y de clase C^1. Las siguientes identidades son validas*

1. *Para todo $v \in H^1(\Omega)$ y $u \in H^2(\Omega)$ se tiene*

$$\int_\Omega v\Delta u = -\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v + \int_{\partial\Omega} v\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}$$

2. *Para todo $v \in H^2(\Omega)$ y $u \in H^2(\Omega)$ se tiene*

$$\int_\Omega [v\Delta u - u\Delta v] = \int_{\partial\Omega}\left[v\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} - u\frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{n}}\right]$$

donde $\boldsymbol{n}$ es el vector normal exterior a $\partial\Omega$ y Δu es el operador laplaciano de u.

Demostración. Ver Teorema 4.3.30 de [1]. □

Observación 1.2.14. Notemos que si $v \in H_0^1(\Omega)$ la primera identidad del Teorema 1.2.13 se transforma en

$$\int_\Omega v\Delta u = -\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \quad \forall u \in H^2(\Omega).$$

Definición 1.2.15. Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ abierto y $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in (L^2(\Omega))^N = L^2(\Omega) \times \ldots \times L^2(\Omega)$. Entonces el producto interior para $(L^2(\Omega))^N$ se define como

$$(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})_{(L^2(\Omega))^N} = \int_\Omega \sum_{i=1}^N u_i v_i.$$

Definición 1.2.16. Sean $\boldsymbol{u} \in (H^1(\Omega))^N$ y $\boldsymbol{v} \in (H^2(\Omega))^N$. Se define el gradiente de $\boldsymbol{u}$ como la matriz

$$\nabla \boldsymbol{u} := \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right]_{i,j=1,\ldots,N} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial u_1}{\partial x_N} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial u_2}{\partial x_N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial u_N}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial u_N}{\partial x_N} \end{bmatrix}$$

Además, el naplaciano de $\boldsymbol{v}$ se define como

$$\Delta \boldsymbol{v} := \begin{bmatrix} \Delta v_1 \\ \vdots \\ \Delta v_N \end{bmatrix}$$

y la cantidad $\displaystyle\sum_{i,j=1,\ldots,N} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial v_i}{\partial x_j}$ se denota por $\nabla \boldsymbol{u} : \nabla \boldsymbol{v}$.

Definición 1.2.17. Para Ω un dominio abierto en R^N se define el espacio

$$(H^1(\Omega))^N := \left\{\boldsymbol{v} = (v_1, \ldots, v_N) : v_i \in H^1(\Omega) \qquad \forall i = 1, \ldots, N\right\},$$

dotado de la siguiente norma

$$\|\boldsymbol{v}\|_{(H^1(\Omega))^N} := \left(\|\boldsymbol{v}\|^2_{(L^2(\Omega))^N} + \|\nabla \boldsymbol{v}\|^2_{L^2(\Omega)^{N\times N}}\right)^{\frac{1}{2}},$$

donde $\|\nabla \boldsymbol{v}\|^2_{L^2(\Omega)^{N\times N}} = \displaystyle\int_\Omega \nabla \boldsymbol{v} : \nabla \boldsymbol{v}$.

Observación 1.2.18. **i)** Sean $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in (H^1(\Omega))^N$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Así, teniendo en cuenta las definiciones anteriores y propiedades de derivadas se tiene que

$$\begin{aligned}
\nabla \boldsymbol{u} : \nabla(\boldsymbol{\alpha v} + \boldsymbol{\beta w}) &= \sum_{i,j=1,\dots,N} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial\left(\alpha v_i + \beta w_i\right)}{\partial x_j} \\
&= \sum_{i,j=1,\dots,N} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \alpha v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \beta w_i}{\partial x_j} \right) \\
&= \sum_{i,j=1,\dots,N} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \left(\alpha \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \beta \frac{\partial w_i}{\partial x_j} \right) \\
&= \sum_{i,j=1,\dots,N} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \alpha \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \; + \sum_{i,j=1,\dots,N} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \beta \frac{\partial w_i}{\partial x_j} \\
&= \alpha \sum_{i,j=1,\dots,N} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \; + \; \beta \sum_{i,j=1,\dots,N} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial w_i}{\partial x_j} \\
&= \alpha \left(\nabla \boldsymbol{u} : \nabla \boldsymbol{v} \right) + \beta \left(\nabla \boldsymbol{u} : \nabla \boldsymbol{w} \right).
\end{aligned}$$

Similarmente se puede mostrar que

$$\nabla(\alpha \boldsymbol{u} + \beta \boldsymbol{v}) : \nabla \boldsymbol{w} = \alpha \left(\nabla \boldsymbol{u} : \nabla \boldsymbol{w} \right) + \beta \left(\nabla \boldsymbol{v} : \nabla \boldsymbol{w} \right).$$

ii) Teniendo en cuenta la definición 1.2.16 se puede ver fácilmente que

$$\nabla \boldsymbol{u} : \nabla \boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^{N} \nabla u_i \cdot \nabla v_i$$

para todo $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in (H^1(\Omega))^N$.

Capítulo 2

Teoría de Babuska-Brezzi

Los resultados que se presentan en este capítulo pueden ser consultados ampliamente en los siguientes libros: [5], [9], [12].

2.1. Formulaciones variacionales mixtas: Un problema de Neumann

En esta sección se estudiarán resultados de la Teoría de Babuska-Brezzi para la existencia y unicidad de las llamadas formulaciones variacionales mixtas, que son el eje central en el presente trabajo.

Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ abierto y acotado de clase C^1, $f \in C(\overline{\Omega}), g \in C(\partial\Omega)$. El problema de Neumann consiste en encontrar $u \colon \Omega \to \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \qquad \text{en } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} &= g \qquad \text{en } \partial\Omega, \end{aligned} \tag{2.1}$$

donde $\boldsymbol{n}$ denota el vector normal unitario exterior a $\partial\Omega$.
En primer lugar deduciremos una formulación variacional elíptica para el Problema de Neumann. Para ello, comenzamos multiplicando por $v \in H^1(\Omega)$ en la primera ecuación e integramos sobre Ω, luego aplicando la primera identidad de Green se obtiene

$$\begin{aligned} \int_\Omega -\Delta u v = \int_\Omega f v &\iff \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} v = \int_\Omega f v \\ &\iff \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v - \int_{\partial\Omega} g v = \int_\Omega f v \end{aligned}$$

o equivalentemente

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v = \int_{\partial\Omega} g v + \int_\Omega f v \qquad \forall v \in H^1(\Omega).$$

Si hacemos

$$a(u, v) := \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v, \qquad F(v) := \int_{\partial\Omega} g v + \int_\Omega f v,$$

entonces el problema anterior es equivalente a hallar $u \in H^1(\Omega)$:

$$a(u, v) = F(v) \qquad \forall v \in H^1(\Omega). \tag{2.2}$$

Dado que a es una forma bilineal sobre $H^1(\Omega)$ y F es un operador lineal sobre $H^1(\Omega)$ entonces la expresión anterior es una formulación variacional para (2.1).
Notamos además, que si consideramos $v : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ definida por

$$v(x,y) = 1 \qquad \forall (x,y) \in \overline{\Omega},$$

tenemos que $a(v,v) = 0$ con $v \neq 0$. Por lo tanto, la forma bilineal a no es elíptica en $H^1(\Omega)$ y así el Lema de Lax-Milgram (ver Lema 1.1.23) no puede garantizar existencia y unicidad de solución para el problema (2.2).

El inconveniente de la no unicidad de solución del problema (2.2), se supera proponiendo una formulación mixta para el problema (2.2). Más precisamente, exigiendo que la solución u de (2.2) satisfaga la restricccción

$$\int_\Omega u = 0. \tag{2.3}$$

Esta restricción garantiza que la única solución constante del problema es la solución nula, puesto que si

$$u(x,y) = C \qquad \forall x,y \in \Omega,$$

entonces

$$0 = \int_\Omega u = \int_\Omega C = C \int_\Omega = C|\Omega|,$$

y como $|\Omega| \neq 0$ se sigue que

$$C = 0.$$

De acuerdo a lo anterior, para garantizar unicidad de solución, debe incorporarse la restricción (2.3) a la formulación variacional (2.2). Para ello es necesario que (2.3) se escriba también en forma variacional, lo cual puede hacerse por ejemplo exigiendo

$$\mu \int_\Omega u = 0 \qquad \forall \mu \in \mathbb{R}.$$

Así, considerando tal restricción se obtiene la formulación: Hallar $u \in H^1(\Omega)$ tal que

$$\begin{aligned} \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v &= \int_\Omega fv + \int_{\partial\Omega} gv \qquad \forall v \in H^1(\Omega), \\ \mu \int_\Omega u &= 0 \qquad \forall \mu \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Dado que en el problema (2.4) hay una incógnita ($u \in H^1(\Omega)$) y dos ecuaciones, en lugar de (2.4) consideramos el siguiente problema:
Encontrar $(u,\lambda) \in H^1(\Omega) \times \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v + \lambda \int_\Omega v &= \int_\Omega fv + \int_{\partial\Omega} gv \qquad \forall v \in H^1(\Omega), \\ \mu \int_\Omega u &= 0 \qquad \forall \mu \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Es fácil mostrar que si u es solución de (2.4), entonces $(u,0)$ es solución de (2.5) y que si (u,λ) es solución de (2.5), entonces con $\lambda = 0$ tenemos que $(u,0)$ es solución de (2.4), es decir estos dos problemas son equivalentes en cierto sentido.
El problema (2.5) es un caso particular de las llamadas formulaciones variacionales mixtas, las cuales se definen a continuación.

Definición 2.1.1. Sean X y M dos espacios Hilbert, a y b dos formas bilineales, donde $a\colon X \times X \to \mathbb{R}$ y $b\colon X \times M \to \mathbb{R}$. Entonces una formulación variacional mixta consiste en: Hallar $(u, p) \in X \times M$ tal que

$$\begin{aligned} a(u,v) + b(v,p) &= f(v) \qquad \forall v \in X, \\ b(u,q) &= g(q) \qquad \forall q \in M, \end{aligned}$$

donde $f \in X'$ y $g \in M'$.

En la siguiente sección se estudiarán las condiciones bajo las cuales una formulación variacional mixta tiene solución única. La teoría que determina dichas condiciones es llamada **Teoría de Babuska-Brezzi** que como se dijo antes será de vital importancia en el desarrollo del presente trabajo. En particular se usará la Teoría de Babuska-Brezzi para mostrar que (2.5) tiene solución única.

2.2. Teoremas de existencia y unicidad

Sean X y M dos espacios Hilbert, a y b dos formas bilineales, donde $a\colon X \times X \to \mathbb{R}$ y $b\colon X \times M \to \mathbb{R}$. Consideramos la formulación variacional mixta (ver Definición 2.1.1) que consiste en hallar $(u, p) \in X \times M$ tal que

$$\begin{aligned} a(u,v) + b(v,p) &= f(v) \qquad \forall v \in X, \\ b(u,q) &= g(q) \qquad \forall q \in M, \end{aligned} \tag{2.6}$$

donde $f \in X'$ y $g \in M'$.
Sean $A\colon X \to X'$, $B\colon X \to M'$ y $B^T\colon M \to X'$ operadores lineales y acotados definidos de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \langle Au, v\rangle &= a(u,v) \qquad \forall (u,v) \in X \times X, \\ \langle Bu, w\rangle &= b(u,w) \qquad \forall (u,w) \in X \times M, \\ \langle B^T q, p\rangle &= b(p,q) \qquad \forall (p,q) \in X \times M. \end{aligned}$$

Luego, usando los operadores definidos anteriormente para el problema (2.6) tenemos que

$$\begin{aligned} a(u,v) + b(v,p) &= f(v) \qquad \forall v \in X, \\ b(u,q) &= g(q) \qquad \forall q \in M, \\ &\Updownarrow \\ \langle Au, v\rangle + \langle B^T p, v\rangle &= \langle f, v\rangle \quad \forall v \in X \\ \langle Bu, q\rangle &= \langle g, q\rangle \quad \forall q \in M \\ &\Updownarrow \\ \langle Au + B^T p, v\rangle &= \langle f, v\rangle \quad \forall v \in X \\ \langle Bu, q\rangle &= \langle g, q\rangle \quad \forall q \in M \end{aligned} \tag{2.7}$$

De donde este problema se convierte en : Hallar $(u, p) \in X \times M$ tal que para todo $(v, q) \in X \times M$ se cumpla que

$$\begin{aligned} Au + B^T p &= f \qquad en \quad X' \\ Bu &= g \qquad en \quad M'. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Ahora notemos que B^T definido anteriormente no es exactamente el operador **Adjunto** B^* (ver Definición 1.1.25), por lo cual mostramos a continuación la relación existente entre estos operadores.

Lema 2.2.1. *Sean X, M espacios de Hilbert, $b\colon X \times M \to \mathbb{R}$ una forma bilineal. Entonces para $B\colon X \to M'$, $B^T\colon M \to X'$ mencionados anteriormente, $B^*\colon M'' \to X'$ el operador adjunto de B (ver Definición 1.1.25) y $\mathcal{C}\colon M \to M''$ (ver Definición 1.1.21) la inyección canónica. Se tienen las siguientes relaciones*

i) $B^* \circ \mathcal{C} = B^T$.

ii) $\|B^* \circ \mathcal{C}\| = \|B^T\| = \|B\|$.

iii) $\mathrm{Im} B^* = \mathrm{Im} B^T$.

iv) $\mathrm{Ker} B^* = \mathcal{C}(\mathrm{Ker} B^T)$.

v) Si B es biyectivo, se tiene que B^T es biyectivo y

$$\left\|(B^{-1})^T\right\| = \left\|(B^T)^{-1}\right\| = \left\|B^{-1}\right\|.$$

Demostración. *i)* Es fácil verificar que

$$B^* \circ \mathcal{C}\colon M \to X',$$

y así notamos que el operador B^T definido anteriormente y $B^* \circ \mathcal{C}$ tienen el mismo dominio y codominio. Resta mostrar que para todo $q \in M$ se tiene que

$$(B^* \circ \mathcal{C})q = B^T q \qquad en \quad X'. \tag{2.9}$$

En efecto, si $q \in M$ y $x \in X$ se sigue que

$$\begin{aligned} \langle (B^* \circ \mathcal{C})q, x\rangle &= \langle B^*(\mathcal{C}q), x\rangle \\ &= \langle \mathcal{C}q, Bx\rangle \\ &= \langle Bx, q\rangle \\ &= \langle B^T q, x\rangle, \end{aligned}$$

lo cual muestra (2.9). En consecuencia

$$B^* \circ \mathcal{C} = B^T.$$

ii) Dado que se satisface *i)* se obtiene de inmediato que

$$\|B^* \circ \mathcal{C}\| = \|B^T\|.$$

En consecuencia, usando el Lema 1.1.22 y el Teorema 1.1.26, se tiene que

$$\|B^T\| = \|B^* \circ \mathcal{C}\| = \|B^*\| = \|B\|. \tag{2.10}$$

iii) Podemos observar que

$$\begin{aligned} f \in \mathrm{Im} B^T &\Rightarrow f \in \mathrm{Im} B^* \circ \mathcal{C} \\ &\Rightarrow \exists q \in M : f = B^* \mathcal{C} q \\ &\Rightarrow f \in \mathrm{Im} B^*. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Ahora bien,

$$\begin{aligned} f \in \mathrm{Im}B^* &\Rightarrow \exists g \in M'' : f = B^* g \\ &\Rightarrow \exists q \in M : f = B^*\mathcal{C}q \\ &\Rightarrow \exists q \in M : f = B^T q \\ &\Rightarrow f \in \mathrm{Im}B^T, \end{aligned} \tag{2.12}$$

por lo tanto de (2.11) y (2.12) se concluye que $\mathrm{Im}B^* = \mathrm{Im}B^T$.
iv) Sea $f \in M''$. Luego

$$\begin{aligned} f \in \mathrm{Ker}B^* &\Leftrightarrow B^* f = 0 \\ &\Leftrightarrow B^T\mathcal{C}^{-1} f = 0 \\ &\Leftrightarrow \mathcal{C}^{-1} f \in \mathrm{Ker}B^T \\ &\Leftrightarrow f \in \mathcal{C}(\mathrm{Ker}B^T). \end{aligned}$$

En consecuencia, $\mathrm{Ker}B^* = \mathcal{C}(\mathrm{Ker}B^T)$.
v) Supongamos que B es biyectivo. Mostremos primero que B^T es biyectivo. En efecto, dado que B es biyectivo entonces B^* es también biyectivo y como M es un espacio de Hilbert tenemos que $\mathcal{C}\colon M \to M''$ es un isomorfismo, por tanto $B^T = B^*\mathcal{C}$ es biyectivo. Además, con este último hecho se garantiza que $(B^T)^{-1}$ existe. Ahora, veamos que se cumple

$$\left\|(B^{-1})^T\right\| = \left\|(B^T)^{-1}\right\| = \left\|B^{-1}\right\|.$$

Primero podemos notar que al ser $\mathcal{C}$ una isometria entonces $\mathcal{C}^{-1} : M'' \to M$ es también una isometria, es decir $\left\|\mathcal{C}^{-1}g\right\|_M = \|g\|_{M'}$ para todo $g \in M''$. Así, utilizando propiedades de $\mathcal{C}^{-1}$ y B^* se tiene que

$$\left\|(B^T)^{-1}\right\| = \left\|(B^*\mathcal{C})^{-1}\right\| = \left\|\mathcal{C}^{-1}(B^*)^{-1}\right\| = \left\|(B^*)^{-1}\right\| = \left\|(B^{-1})^*\right\| = \left\|B^{-1}\right\|. \tag{2.13}$$

De otro lado, utilizando *i)* y *ii)* para el operador B^{-1} tenemos que $(B^{-1})^T = (B^{-1})^*\mathcal{C}$ y además

$$\left\|(B^{-1})^T\right\| = \left\|(B^{-1})^*\mathcal{C}\right\| = \left\|B^{-1}\right\|. \tag{2.14}$$

En consecuencia, de (2.13) y (2.14) se sigue que

$$\left\|(B^T)^{-1}\right\| = \left\|B^{-1}\right\| = \left\|(B^{-1})^T\right\|.$$

□

A continuación presentaremos un teorema que garantiza existencia y unicidad para el problema (2.6). Antes de ello denotemos por

$$V := \mathrm{Ker}B = \{u \in X : Bu = 0\} = \{u \in X : b(u,q) = 0 \quad \forall q \in M\}$$

y

$$V^0 = \{h \in X' : \langle h, v\rangle = 0 \quad \forall v \in V\}.$$

Además definamos

$$\Pi\colon X' \to V',$$

la inclusión canónica que se define para cualquier $h \in X'$ por:

$$\langle \Pi h, v\rangle = \langle h, v\rangle \quad \forall v \in V. \tag{2.15}$$

Teorema 2.2.2. *Sean $f \in X'$ y $g \in M'$. El problema (2.8) tiene única solución sí y sólo si se cumplen las siguientes dos condiciones:*

i) $\Pi \circ A$ *es un isomorfismo de* V *en* V',

ii) $B\colon X \to M'$ *es sobreyectivo.*

Demostración. $\Rightarrow$) Supongamos que (2.8) tiene solución única para todo $f \in X'$ y $g \in M'$.

Demostración de *ii)* Sea $h \in M'$ cualquiera. Sea $(u, p) \in X \times M$ la solución de (2.8) considerando $f = 0$ y $g = h$. Así,

$$Bu = h \qquad \textit{en} \quad M'$$

y por lo tanto B es sobreyectivo.

Demostración de *i)* Primero mostremos que $\Pi \circ A$ es sobreyectivo, para ello tomemos $f \in V'$. Como f es un operador lineal y acotado tenemos por el **Teorema Hahn-Banach** (ver Teorema 1.1.11), que existe $\tilde{f} \in X'$, extensión de f a todo X. Así, existe $(u, p) \in X \times M$ tal que

$$\begin{aligned} Au + B^T p &= \tilde{f} \qquad \textit{en} \quad X', \\ Bu &= 0 \qquad \textit{en} \quad M'. \end{aligned}$$

Luego, para todo $v \in V = \mathrm{Ker}B \subset X$ se tiene

$$\langle Au, v\rangle + \langle B^T p, v\rangle = \langle \tilde{f}, v\rangle = \langle f, v\rangle,$$

pero, dado que

$$\langle B^T p, v\rangle = \langle Bv, p\rangle = 0,$$

usando (2.15) se sigue

$$\langle \Pi Au, v\rangle = \langle Au, v\rangle = \langle f, v\rangle \quad \forall v \in V$$

y así

$$\Pi Au = f \qquad \text{en } V'.$$

En consecuencia $\Pi \circ A$ es sobreyectivo. Ahora debemos verificar la inyectividad de $\Pi \circ A$, para lo cual consideramos $u \in V$ talque

$$\Pi Au = 0 \qquad \text{en } V'.$$

Luego, para cada $v \in V$ tenemos

$$\langle \Pi Au, v\rangle = \langle Au, v\rangle = 0$$

y así $Au \in V^0 = (\mathrm{Ker}B)^0$. Por otro lado, como B es sobreyectivo tenemos que

$$\mathrm{Im}B = M',$$

el cual es cerrado en M' (pues todo espacio es cerrado en si mismo) entonces por el **Teorema del rango cerrado** (ver Teorema 1.1.28) y el Lema 2.2.1 se sigue que

$$V^0 = \mathrm{Im}B^* = \mathrm{Im}B^T.$$

Luego

$$Au \in \mathrm{Im}B^T,$$

y así, existe $p \in M$ tal que
$$B^T p = -Au,$$
de donde
$$\begin{aligned} Au + B^T p &= 0 \qquad \text{en } X', \\ Bu &= 0 \qquad \text{en } M'. \end{aligned}$$
Así, (u, p) es solución de (2.8) con $f = 0$ y $g = 0$. Luego dado que $(0, 0)$ es también solución de dicho problema, y por hipótesis este tiene solución única, se sigue que $(u, p) = (0, 0)$ y así concluimos que $u = 0$, de donde se deduce la inyectividad de $\Pi \circ A$.

$\Leftarrow$) Supongamos que se satisfacen *i)* y *ii)*. Probemos que el problema (2.8) tiene solución única. En efecto, sean $f \in X'$ y $g \in M'$. Dada la sobreyectividad de B se garantiza que existe $u_g \in X$ tal que
$$Bu_g = g \qquad en \quad M'.$$
Además, dado que $\Pi : X' \to V'$ y $A : X \to X'$ se tiene que
$$\Pi f - \Pi A u_g \in V'$$
y como $\Pi \circ A : V \to V'$ es isomorfismo por hipótesis, existe $u_0 \in V$ tal que
$$\Pi A u_0 = \Pi f - \Pi A u_g.$$
Ahora, si tomamos $u = u_0 + u_g$ tenemos que
$$\Pi A u = \Pi f,$$
con lo cual, de la linealidad de Π, tenemos que
$$0 = \langle \Pi(f - Au), v \rangle = \langle f - Au, v \rangle \quad \forall v \in V,$$
y así
$$f - Au \in (\text{Ker}B)^0. \tag{2.16}$$
Por otro lado, como por hipótesis $B : X \to M'$ es sobreyectivo, se tiene que su imagen es M', el cual es cerrado. Luego, el Teorema del rango cerrado (ver Teorema 1.1.28) garantiza que $(\text{Ker}B)^0 = \text{Im}B^T$, con lo cual, por (2.16), existe $p \in M$ tal que
$$f - Au = B^T p \qquad \text{en } X'.$$
Además, dado que $u = u_g + u_0$ y $u_0 \in V = \text{Ker}B$ se tiene
$$Bu = Bu_g + Bu_0 = Bu_g + 0 = g \qquad \text{en } M'.$$
En consecuencia se ha demostrado que
$$\begin{aligned} Au + B^T p &= f \qquad \text{en } X', \\ Bu &= g \qquad \text{en } M', \end{aligned}$$
lo que demuestra que (u, p) es solución de (2.8).

Resta probar la unicidad de solución. Para ello supongamos que $(u,p) \in X \times M$ y $(\tilde{u},\tilde{p}) \in X \times M$ son soluciones de (2.8), es decir

$$\begin{aligned} Au + B^T p = A\tilde{u} + B^T\tilde{p} = f \qquad &\text{en } X', \\ Bu = B\tilde{u} = g \qquad &\text{en } M'. \end{aligned}$$

En consecuencia

$$A(u-\tilde{u}) + B^T(p-\tilde{p}) = 0 \qquad \text{en } X', \tag{2.17}$$

de donde

$$\Pi A(u-\tilde{u}) + \Pi B^T(p-\tilde{p}) = 0 \qquad \text{en } V'. \tag{2.18}$$

Sin embargo, puesto que

$$\langle \Pi B^T(p-\tilde{p}), v\rangle = \langle B^T(p-\tilde{p}), v\rangle = \langle Bv, p-\tilde{p}\rangle = 0 \qquad \forall v \in V,$$

se tiene $\Pi B^T(p-\tilde{p}) = 0$ en V' y así, de (2.18) se obtiene

$$\Pi A(u-\tilde{u}) = 0 \qquad \text{en } V'.$$

Luego, dado que por hipótesis $\Pi \circ A$ es inyectivo, se tiene $u = \tilde{u}$.

Resta demostrar que $p = \tilde{p}$. Para ello notamos que al ser $u = \tilde{u}$, de (2.17) obtenemos que

$$B^T(p-\tilde{p}) = 0. \tag{2.19}$$

Finalmente, dado que B es sobreyectivo se tiene que B^* es inyectivo (ver Teorema 1.1.29), y por ser $B^T = B^* \circ \mathcal{C}$, se deduce que B^T es inyectivo. Así (2.19) implica $p = \tilde{p}$. □

2.3. Condición ínf-sup

Una formulación equivalente para la parte dos del Teorema 2.2.2 se da gracias a la condición que mostramos en seguida.

Definición 2.3.1. Sean X, M espacios de Hilbert. Decimos que una forma bilineal

$$b\colon X \times M \to \mathbb{R}$$

satisface la **condición ínf-sup**, también conocida como **condición Babuska-Brezzi** o **condición LBB** (por Ladyzhenskaya-Babuska-Brezzi), si existe $\beta > 0$ tal que

$$\inf_{q\in M} \sup_{v\in X} \frac{b(v,q)}{\|v\|_X \|q\|_M} \geq \beta \qquad \forall q \in M. \tag{2.20}$$

Observación 2.3.2. Es fácil ver que (2.20) es equivalente a

$$\sup_{v\in X} \frac{b(v,q)}{\|v\|_X} \geq \beta \|q\|_M \qquad \forall q \in M.$$

La condición ínf-sup esta relacionada con la existencia y unicidad de la solución del problema (2.8). Más exactamente, se encuentra relacionada con la condición *ii* del Teorema 2.2.2, como se demuestra a continuación.

Teorema 2.3.3. *Sea $b\colon X \times M \to \mathbb{R}$ una forma bilineal y acotada. Entonces, para $\beta > 0$ los tres resultados siguientes son equivalentes* *i) La condición **ínf-sup** se satisface con constante β.*

ii)

$$\|B^T q\|_{X'} \geq \beta \|q\|_M \qquad \forall q \in M. \tag{2.21}$$

iii)

$$\|Bu\|_{M'} \geq \beta \|u\|_X \qquad \forall u \in V^{\perp}. \tag{2.22}$$

Además, las condiciones (2.21) y (2.22) implican que B^T es un isomorfismo de M sobre V^0 y B es un isomorfismo de $V^{\perp}$ sobre M' respectivamente.

Demostración. *i) ⇒ ii)*. En primer lugar notamos que para $q \in M$ se tiene que

$$\begin{aligned} \|B^T q\|_{X'} &= \sup_{v \in X} \frac{\langle B^T q, v\rangle_X}{\|v\|_X} \\ &= \sup_{v \in X} \frac{\langle Bv, q\rangle_M}{\|v\|_X} \\ &= \sup_{v \in X} \frac{b(v,q)}{\|v\|_X} \end{aligned} \tag{2.23}$$

y así, (2.21) es equivalente a la condición ínf-sup. Resta demostrar que

$$B^T\colon M \to V^0$$

es un isomorfismo. En efecto, usando el hecho de que b es acotada, se deduce que

$$\|B^T q\|_{X'} = \sup_{v \in X} \frac{b(v,q)}{\|v\|_X} \leq \sup_{v \in X} \frac{C\|v\|_X \|q\|_M}{\|v\|_X} = C\|q\|_M \qquad \forall q \in M,$$

lo que muestra que B^T es acotado. Además, observamos que (2.21) y Lema 1.1.24 implican que B^T es inyectivo e $\mathrm{Im}B^T$ es cerrado. Así, usando Lema 2.2.1 y Teorema 1.1.28, se obtiene que $\mathrm{Im}B^T = \mathrm{Im}B^* = V^0$ y en consecuencia $B^T\colon M \to V^0$ es un isomorfismo.

ii) ⇒ i). En la demostración *i) ⇒ ii)* se mostró que la condición ínf-sup es equivalente a la condición (2.21).

ii) ⇒ iii). Primero demostraremos que $B : V^{\perp} \to M'$ es un isomorfismo. En efecto, dada la biyectividad de B^T tenemos que $\mathrm{Im}B^T = X'$, lo que implica que $\mathrm{Im}B^T$ es cerrado. Luego, usando el Teorema del rango cerrado (ver Teorema 1.1.28), el Lema 2.2.1 y recordando que B^T es inyectiva, se tiene que

$$\mathrm{Im}B = (\mathrm{Ker}B^*)^0 = (\mathcal{C}(\mathrm{Ker}B^T))^0 = (\mathcal{C}(\{0\}))^0 = \{0\}^0 = M'.$$

Así, $B\colon X \to M'$ es sobreyectiva. Además, por ser B continuo se tiene que $V := \mathrm{Ker}B$ es cerrado y por lo tanto $X = V \oplus V^{\perp}$. En consecuencia

$$M' = \mathrm{Im}B = B(X) = B(V + V^{\perp}) = B(V) + B(V^{\perp}) = \{0\} + B(V^{\perp}) = B(V^{\perp}),$$

de donde $B : V^{\perp} \to M'$ es sobreyectiva.

Para concluir que $B : V^{\perp} \to M'$ es isomorfismo, resta probar su inyectividad. En efecto, si $z \in V^{\perp}$ es tal que $Bz = 0$, entonces $z \in V \cap V^{\perp} = \{0\}$ y así $z = 0$. Luego, por ser B lineal se tiene que $B : V^\perp \to M'$ es inyectivo. En consecuencia, se tiene que $B : V^\perp \to M'$ es un isomorfismo.

Finalmente deduciremos (2.22). Notamos que (2.21) implica

$$\|(B^T)^{-1}\| \leq \frac{1}{\beta}.$$

Así, del Lema 2.2.1 se deduce

$$\|B^{-1}\| = \|(B^{-1})^T\| = \|(B^T)^{-1}\| \leq \frac{1}{\beta},$$

de donde

$$\|B^{-1}g\|_X \leq \frac{1}{\beta}\|g\|_{M'} \qquad \forall g \in M',$$

o equivalentemente

$$\|Bu\|_{M'} \geq \beta\|u\|_X \qquad \forall u \in V^\perp.$$

iii) $\Rightarrow$ *ii)*. La prueba se hace similar al caso *ii)* $\Rightarrow$ *iii)*. □

Teorema 2.3.4. ***(Babuska-Brezzi.)*** *Sean X y M dos espacios de Hilbert, $A\colon X \to X'$ y $B\colon X \to M'$ los operadores inducidos por las formas bilineales y acotadas $a\colon X \times X \to \mathbb{R}$ y $b\colon X \times M \to \mathbb{R}$. Supongamos que*

i) $\exists \beta > 0$ *tal que*

$$\sup_{v \in X} \frac{b(v,q)}{\|v\|_X} \geq \beta\|q\|_M \quad \forall q \in M. \tag{2.24}$$

ii) $\exists \alpha > 0$ *tal que*

$$a(v,v) \geq \alpha\|v\|_X^2 \quad \forall v \in V = \mathrm{Ker}B. \tag{2.25}$$

Entonces para cada $f \in X'$ y $g \in M'$ existe una única pareja $(u,p) \in X \times M$ tal que

$$\begin{aligned} Au + B^T p &= f \qquad \text{en} \quad X', \\ Bu &= g \qquad \text{en} \quad M'. \end{aligned} \tag{2.26}$$

Además existe una constante C positiva tal que

$$\|u\|_X + \|p\|_M \leq C\left(\|f\|_{X'} + \|g\|_{M'}\right). \tag{2.27}$$

Demostración. Parte 1: *Unicidad.* Demostraremos que existe a lo más una solución (u,p) del problema (2.26). En efecto, sean (u_1,p_1), (u_2,p_2) soluciones de (2.26). Así,

$$\begin{aligned} A(u_1 - u_2) + B^T(p_1 - p_2) &= 0 \qquad \text{en} \quad X', \\ B(u_1 - u_2) &= 0 \qquad \text{en} \quad M'. \end{aligned} \tag{2.28}$$

Luego, $u_1 - u_2 \in V := \mathrm{Ker}B$ y además, para todo $v \in V$ se tiene

$$0 = \langle A(u_1-u_2), v\rangle + \langle B^T(p_1-p_2), v\rangle = \langle A(u_1-u_2), v\rangle + \langle Bv, (p_1-p_2)\rangle = \langle A(u_1-u_2), v\rangle$$

y así

$$0 = \langle A(u_1-u_2), u_1-u_2\rangle = a(u_1-u_2, u_1-u_2).$$

Luego, (2.25) implica $u_1 = u_2$. Así, de (2.28) se sigue que $B^T(p_1 - p_2) = 0$. En consecuencia, dado que el Teorema 2.3.3 garantiza que (2.24) implica

$$\left\|B^T(p_1 - p_2)\right\|_{X'} \geq \beta \left\|p_1 - p_2\right\|_M$$

se sigue, $p_1 = p_2$.

Parte 2: *Existencia.* En primer lugar demostraremos que existe $u \in X$ tal que $Bu = g$. Dada la hipótesis *i)* tenemos por el Teorema 2.3.3 que $B\colon V^\perp \to M'$ es biyectivo, luego para $g \in M'$ existe $u_0 \in V^\perp$ tal que $Bu_0 = g$ y además, el mismo Teorema 2.3.3 garantiza que

$$\|g\|_{M'} = \|Bu_0\|_{M'} \geq \beta \|u_0\|_X$$

o sea

$$\|u_0\|_X \leq \frac{1}{\beta}\|g\|_{M'}. \tag{2.29}$$

Por otro lado, dado que B es continuo entonces $V = \mathrm{Ker}B$ es cerrado y por tanto $X = V \oplus V^\perp$ (ver Teorema 1.1.17). En virtud de esta descomposición de X mostraremos que la u buscada tiene la forma $u := \tilde{u} + u_0$, para algún $\tilde{u}$ en V. Para ello observamos que si (u, p) es solución del problema (2.26), entonces de la segunda ecuación de dicho problema se sigue que para todo $v \in V$:

$$\langle f, v\rangle = \langle Au + B^T p, v\rangle = \langle Au, v\rangle + \langle B^T p, v\rangle = \langle Au, v\rangle + \langle Bv, p\rangle = \langle Au, v\rangle.$$

Luego, dado que $u := \tilde{u} + u_0$, se tiene que

$$\langle Au, v\rangle = \langle A\tilde{u}, v\rangle + \langle Au_0, v\rangle = a(\tilde{u}, v) + \langle Au_0, v\rangle$$

y así, $\tilde{u}$ debe ser solución del problema:

Hallar $\tilde{u} \in V$ tal que

$$a(\tilde{u}, v) = \langle f - Au_0, v\rangle \qquad \forall v \in V. \tag{2.30}$$

Dado que a es lineal, acotada y además satisface (2.25), el Lema de Lax-Milgram (ver Lema 1.1.23) garantiza que el problema anterior tiene una única solución. En consecuencia $u = \tilde{u} + u_0$ satisface

$$\langle Au, v\rangle = \langle f, v\rangle \qquad \forall v \in V. \tag{2.31}$$

Además, dado que $\tilde{u} \in V := \mathrm{Ker}B$, se tiene

$$Bu = B\tilde{u} + Bu_0 = 0 + g = g,$$

es decir u satisface la segunda ecuación de (2.26).

Resta demostrar que existe $p \in M$ tal que (u, p) verifica la primera ecuación de (2.26). Para esto, observamos que (2.31) implica

$$\langle f - Au, v\rangle = 0 \qquad \forall v \in V,$$

de donde $f - Au \in V^0$. Luego, por ser $B^T\colon M \to V^0$ isomorfismo, existe $p \in M$ tal que

$$B^T p = f - Au, \tag{2.32}$$

que es justamente la segunda ecuación de (2.26).

Parte 3: *Demostración de* (2.27). Dado que $\tilde{u}$ es la solución de (2.30), cuya existencia es garantizada por el Lema de Lax-Milgram, se tiene que

$$\|\tilde{u}\|_X \leq \frac{1}{\alpha}\|f - Au_0\|_{X'},$$

así, usando (2.29) se sigue

$$\begin{aligned} \|\tilde{u}\|_X &\leq \frac{1}{\alpha}\|f\|_{X'} + \frac{1}{\alpha}\|A\|_{X'}\|u_0\|_X \\ &\leq \frac{1}{\alpha}\|f\|_{X'} + \frac{1}{\alpha\beta}\|A\|_{X'}\|g\|_{M'}. \end{aligned} \tag{2.33}$$

Además, recordando que $u := \tilde{u} + u_0$ usando (2.33)

$$\begin{aligned} \|u\|_X &\leq \|\tilde{u}\|_X + \|u_0\|_X \\ &\leq \frac{1}{\alpha}\|f\|_{X'} + \frac{1}{\alpha\beta}\|A\|_{X'}\|g\|_{M'} + \frac{1}{\beta}\|g\|_{M'} \\ &= \frac{1}{\alpha}\|f\|_{X'} + \frac{1}{\beta}\left(\frac{1}{\alpha}\|A\|_{X'} + 1\right)\|g\|_{M'}. \end{aligned} \tag{2.34}$$

Por otro lado, usando (2.21) (que se garantiza por el Teorema 2.3.3) y (2.32), se obtiene

$$\beta\|p\|_M \leq \|B^T p\|_{X'} = \|f - Au\|_{X'} \leq (\|f\|_{X'} + \|A\|_{X'}\|u\|_X),$$

o equivalentemente

$$\|p\|_M \leq \frac{1}{\beta}(\|f\|_{X'} + \|A\|_{X'}\|u\|_X).$$

Por consiguiente, haciendo uso de (2.34) en la acotación anterior se tiene que

$$\|p\|_M \leq \left(\frac{1}{\beta} + \frac{1}{\alpha\beta}\|A\|_{X'}\right)\|f\|_{X'} + \left(\frac{\|A\|_{X'}}{\beta^2}\left(\frac{1}{\alpha}\|A\|_{X'} + 1\right)\right)\|g\|_{M'}$$

y por lo tanto

$$\|u\|_X + \|p\|_M \leq C(\|f\|_{X'} + \|g\|_{M'})$$

donde $C = \text{máx}\left\{\frac{1}{\alpha} + \left(\frac{1}{\beta} + \frac{1}{\alpha\beta}\|A\|_{X'}\right), \frac{1}{\beta}\left(\frac{1}{\alpha}\|A\|_{X'} + 1\right) + \left(\frac{\|A\|_{X'}}{\beta^2}\left(\frac{1}{\alpha}\|A\|_{X'} + 1\right)\right)\right\}$. □

El Teorema anterior es el resultado principal de la Teoría de Babuska-Brezzi y se aplicará para demostrar existencia y unicidad de solución para los Problemas de Stokes y Darcy en los siguientes capítulos de este trabajo. Antes de ello, mostraremos como se aplica el mencionado Teorema para deducir existencia y unicidad de solución para el problema de Neumann que se introdujo en la Sección 2.1.

Ejemplo 2.3.5. Problema de Neumann

Recordemos que en el problema de Neumann (2.1) no se tenia la condición de elipticidad de la forma bilineal correspondiente y con ello no se podia garantizar la unicidad a través del Lema de Lax-Milgram, por lo tanto fue necesario replantearlo como el siguiente problema de estructura mixta (2.5):

Hallar $(u, \lambda) \in H^1(\Omega) \times \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{aligned} a(u, v) + b(v, \lambda) &= F(v) \qquad \forall v \in H^1(\Omega), \\ b(u, \mu) &= G(\mu) \qquad \forall \mu \in \mathbb{R}, \end{aligned} \tag{2.35}$$

donde $a : H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \to \mathbb{R}$, $b : H^1(\Omega) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F : H^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ y $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ están dados por:

$$a(u,v) := \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v, \quad b(v,\mu) := \mu \int_\Omega v$$

y

$$F(v) := \int_{\partial\Omega} gv + \int_\Omega fv, \quad G(\mu) := 0,$$

para todo $u, v \in H^1(\Omega)$ y para todo $\mu \in \mathbb{R}$.

Demostraremos que (2.35) tiene una única solución usando el Teorema de Babuska-Brezzi. En primer lugar, notamos que es sencillo verificar que a y b son formas bilineales acotadas y que F y G son funcionales lineales acotados. Además, en virtud de la desigualdad de Poincaré (ver Teorema 1.2.12) se deduce que

$$a(v,v) = \int_\Omega \nabla v \cdot \nabla v \geq C\|v\|^2_{H^1(\Omega)} \qquad \forall v \in H^1(\Omega).$$

En particular, para $V = \mathrm{Ker}B$ donde B es el operador inducido por b, tenemos que a es elíptica en

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ker}B = \{v \in H^1(\Omega) : Bv = 0\} &= \{v \in H^1(\Omega) : \langle Bv, \mu\rangle\} \\
&= \{v \in H^1(\Omega) : b(v,\mu) = 0\} \\
&= \{v \in H^1(\Omega) : \mu \int_\Omega v = 0 \quad \forall \mu \in \mathbb{R}\} \\
&= \{v \in H^1(\Omega) : \int_\Omega v = 0\} \subset H^1(\Omega).
\end{aligned}$$

La única hipótesis del Teorema de Babuska-Brezzi que resta demostrar es la condición ínf-sup de b. En efecto, por ser Ω acotado, tenemos que para todo $\mu \in \mathbb{R}$ la función constante

$$\tilde{v} : \Omega \to \mathbb{R}, \qquad \tilde{v}(x) := \mu \quad \forall x \in \Omega$$

pertenece a $H^1(\Omega)$ y $\|\tilde{v}\|_{H^1(\Omega)} = \mu\,|\Omega|^{1/2}$. Luego, si $\mu \neq 0$ se tiene

$$\sup_{\substack{v \in H^1(\Omega)\\ v \neq 0}} \frac{b(v,\mu)}{\|v\|_{H^1(\Omega)}} \geq \frac{b(\tilde{v},\mu)}{\|\tilde{v}\|_{H^1(\Omega)}} = \frac{\mu\int_\Omega \tilde{v}}{\|\tilde{v}\|_{H^1(\Omega)}} = \frac{\mu^2|\Omega|}{|\mu||\Omega|^{\frac{1}{2}}} = |\Omega|^{\frac{1}{2}}|\mu|.$$

Así, si definimos $\beta := |\Omega|^{\frac{1}{2}}$ se obtiene

$$\sup_{\substack{v \in H^1(\Omega)\\ v \neq 0}} \frac{b(v,\mu)}{\|v\|_{H^1(\Omega)}} \geq \beta|\mu| \qquad \forall \mu \in \mathbb{R}.$$

En consecuencia, el Teorema de Babuska-Brezzi garantiza que existen únicos $u \in H^1(\Omega)$ y $\mu \in \mathbb{R}$ que verifican (2.35) y que además existe $C_1 > 0$ tal que

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} + |\mu| \leq C_1 \|F\|_{[H^1(\Omega)]'}\,. \tag{2.36}$$

Finalmente, podemos notar que para todo $v \in H^1(\Omega)$ se cumple

$$|\langle F, v\rangle| = \left|\int_{\partial\Omega} gv + \int_\Omega fv\right| \leq \int_{\partial\Omega} |gv| + \int_\Omega |fv| \leq \|g\|_{L^2(\partial\Omega)} \|v\|_{L^2(\partial\Omega)} + \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)}$$

y usando la desigualdad de trazas (1.10), existe $C_2 > 0$ tal que

$$|\langle F, v\rangle| \leq C_2 \left(\|g\|_{L^2(\partial\Omega)} + \|f\|_{L^2(\Omega)} \right) \|v\|_{H^1(\Omega)} .$$

En consecuencia

$$\|F\|_{[H^1(\Omega)]'} \leq \|g\|_{L^2(\partial\Omega)} + \|f\|_{L^2(\Omega)}$$

y así, de (2.36) se sigue

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} + |\mu| \leq C \left(\|g\|_{L^2(\partial\Omega)} + \|f\|_{L^2(\Omega)} \right) . \quad \square$$

Capítulo 3

$H(\mathrm{div}, \Omega)$: El espacio de funciones con divergencia de cuadrado integrable

Los resultados que se mostrarán en este capítulo pueden ser consultados de manera detallada en los siguientes libros: [1], [9], [10], [11], [15].

3.1. Motivación

En esta sección mostraremos un importante espacio funcional que surge cuando los problemas de Stokes y Darcy se llevan a una formulación variacional mixta, la cual será tratada gracias a la Teoría de Babuska-Brezzi que se estudió en el segundo capítulo. Antes de presentarlo se verán importantes conceptos que llevan de manera natural a dicho espacio.

Definición 3.1.1. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un conjunto abierto y $\boldsymbol{f} = (f_1, \ldots, f_N)$ un campo vectorial continuamente diferenciable. Entonces se define la divergencia de $\boldsymbol{f}$ como

$$\mathrm{div}\, \boldsymbol{f} := \nabla \cdot \boldsymbol{f} = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial f_i}{\partial x_i}. \tag{3.1}$$

Observación 3.1.2. Podemos observar que para $\boldsymbol{f} = (f_1, \ldots, f_N)$, $\boldsymbol{g} = (g_1, \ldots, g_N)$ continuamente diferenciables y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tenemos

$$\begin{aligned}
\mathrm{div}\,(\alpha \boldsymbol{f} + \beta \boldsymbol{g}) = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial\,(\alpha f_i + \beta\; g_i)}{\partial x_i} &= \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial \alpha f_i}{\partial x_i} + \frac{\partial \beta g_i}{\partial x_i} \right) \\
&= \sum_{i=1}^{N} \left(\alpha \frac{\partial f_i}{\partial x_i} + \beta \frac{\partial g_i}{\partial x_i} \right) \\
&= \left(\sum_{i=1}^{N} \alpha \frac{\partial f_i}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^{N} \beta \frac{\partial g_i}{\partial x_i} \right) \\
&= \left(\alpha \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial f_i}{\partial x_i} + \beta \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial g_i}{\partial x_i} \right) \\
&= \alpha\, \mathrm{div}\, \boldsymbol{f} + \beta\, \mathrm{div}\, \boldsymbol{g}.
\end{aligned}$$

Es decir, el operador divergencia es lineal.

A continuación daremos una motivación a la definición formal de divergencia. Para esto, recordemos el Teorema de integración por partes (ver Corolario 3.2.3 [1]), el cual garantiza que para $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ abierto y acotado, con $\partial\Omega$ de clase C^1 se obtiene

$$\int_\Omega \frac{\partial v}{\partial x_i} = \int_{\partial\Omega} v n_i \qquad \forall v \in C^1(\overline{\Omega}), \tag{3.2}$$

donde n_i representa la i-ésima componente del vector unitario $\boldsymbol{n}$ ortogonal a $\partial\Omega$.
Ahora, tomemos $\boldsymbol{f} = (f_1, ..., f_N) \in C^1(\overline{\Omega})^N$ un campo vectorial. Aplicando (3.2) a cada f_i tenemos

$$\begin{aligned} \int_\Omega \frac{\partial f_1}{\partial x_1} &= \int_{\partial\Omega} f_1 n_1, \\ &\vdots \\ \int_\Omega \frac{\partial f_N}{\partial x_N} &= \int_{\partial\Omega} f_N n_N \end{aligned}$$

y así, sumando estas expresiones y usando la linealidad de la integral se deduce

$$\int_\Omega \sum_{i=1}^N \frac{\partial f_i}{\partial x_i} = \int_{\partial\Omega} \sum_{i=1}^N f_i n_i,$$

esto es

$$\int_\Omega \operatorname{div} \boldsymbol{f} = \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{n}. \tag{3.3}$$

Por otro lado, si $u \colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ es continuamente diferenciable, se verifica que $\operatorname{div}(u\boldsymbol{f}) = \nabla u \cdot \boldsymbol{f} + u \operatorname{div} \boldsymbol{f}$. En efecto,

$$\begin{aligned} \operatorname{div} u\boldsymbol{f} &= \operatorname{div}(uf_1, ..., uf_N) \\ &= \sum_{i=1}^N \frac{\partial u f_i}{\partial x_i} \\ &= (\frac{\partial u}{\partial x_1} f_1 + u \frac{\partial f_1}{\partial x_1}) + ... + (\frac{\partial u}{\partial x_N} f_N + u \frac{\partial f_N}{\partial x_N}) \\ &= (\frac{\partial u}{\partial x_1} f_1 + ... + \frac{\partial u}{\partial x_N} f_N) + (u \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + ... + u \frac{\partial f_N}{\partial x_N}) \\ &= \nabla u \cdot \boldsymbol{f} + u \operatorname{div} \boldsymbol{f}. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Luego, usando (3.4) y (3.3) se obtiene que

$$\int_\Omega \operatorname{div} u\boldsymbol{f} = \int_\Omega \nabla u \cdot \boldsymbol{f} + u \operatorname{div} \boldsymbol{f} = \int_{\partial\Omega} u\boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{n},$$

o lo que es equivalente

$$\int_\Omega u \operatorname{div} \boldsymbol{f} = -\int_\Omega \nabla u \cdot \boldsymbol{f} + \int_{\partial\Omega} u\boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{n}. \tag{3.5}$$

En particular, si $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ se tiene

$$\int_\Omega \phi \operatorname{div} \boldsymbol{f} = -\int_\Omega \nabla\phi \cdot \boldsymbol{f}. \tag{3.6}$$

La integral anterior tiene sentido aún en casos en los cuales $\boldsymbol{f} \notin C^1(\overline{\Omega})^N$. Por ejemplo, si $\boldsymbol{f} \in (L^2(\Omega))^N$ y $\operatorname{div} \boldsymbol{f} \in L^2(\Omega)$, entendiendo la $\operatorname{div} \boldsymbol{f}$ es este caso como (3.1), donde $\frac{\partial f_i}{\partial x_i}$ $(i = 1, \ldots, N)$ son las derivadas débiles de $\boldsymbol{f}$. Lo anterior motiva a la siguiente definición.

Definición 3.1.3. Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ abierto y acotado, con $\partial\Omega$ de clase C^1. Además, sea $\boldsymbol{w} \in (L^2(\Omega))^N$. Diremos que $l \in L^2(\Omega)$ es la divergencia débil de $\boldsymbol{w}$ ($\operatorname{div} \boldsymbol{w} = l$) si

$$\int_\Omega \varphi l = -\int_\Omega \nabla\varphi \cdot \boldsymbol{w} \qquad \forall\varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Observación 3.1.4. Unicidad de la divergencia débil. Sea $\boldsymbol{w} \in (L^2(\Omega))^N$. Supongamos que existen $l_1, l_2 \in L^2(\Omega)$ tales que $\operatorname{div} \boldsymbol{w} = l_1$ y $\operatorname{div} \boldsymbol{w} = l_2$. Así, por la definición anterior se sigue

$$\int_\Omega \varphi(l_1 - l_2) = 0 \quad \forall\varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Luego, se tiene que $l_1 - l_2 = 0$ y así $l_1 = l_2$. Es decir, tenemos que la definición de divergencia débil esta bien definida.

Definición 3.1.5. Para $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ abierto y acotado, se define el espacio

$$H(\operatorname{div}, \Omega) := \{\boldsymbol{u} \in (L^2(\Omega))^N : \operatorname{div} \boldsymbol{u} = \nabla \cdot \boldsymbol{u} \in L^2(\Omega)\},$$

dotado de la norma

$$\|\boldsymbol{u}\|_{H(\operatorname{div},\Omega)} := \left(\|\boldsymbol{u}\|^2_{(L^2(\Omega))^N} + \|\operatorname{div} \boldsymbol{u}\|^2_{L^2(\Omega)}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{3.7}$$

3.2. Propiedades del espacio $H(\operatorname{div}, \Omega)$

Lema 3.2.1. *La forma bilineal*

$$(.,.) \colon H(\operatorname{div}, \Omega) \times H(\operatorname{div}, \Omega) \to \mathbb{R}$$

dada por

$$(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \int_\Omega \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} + \int_\Omega \operatorname{div} \boldsymbol{u} \operatorname{div} \boldsymbol{v},$$

define un producto interior en $H(\operatorname{div}, \Omega)$, que induce la norma (3.7).

Demostración. Sean $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in H(\operatorname{div}, \Omega)$ y $\alpha \in \mathbb{R}$.

i) $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})_{H(\operatorname{div},\Omega)} \geq 0$, ya que

$$\int_\Omega \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})_{(L^2(\Omega))^N}$$

y

$$\int_\Omega \operatorname{div} \boldsymbol{u} \operatorname{div} \boldsymbol{v} = (\operatorname{div} \boldsymbol{u}, \operatorname{div} \boldsymbol{v})_{L^2(\Omega)}$$

definen productos interiores en $(L^2(\Omega))^N$ y $L^2(\Omega)$ respectivamente, así

$$(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})_{H(\operatorname{div},\Omega)} = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})_{(L^2(\Omega))^N} + (\operatorname{div} \boldsymbol{u}, \operatorname{div} \boldsymbol{v})_{L^2(\Omega)} \geq 0.$$

Ahora bien,

$$(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u})_{H(\operatorname{div},\Omega)} = 0 \Leftrightarrow \|\boldsymbol{u}\|^2_{(L^2(\Omega))^N} + \|\operatorname{div} \boldsymbol{u}\|^2_{L^2(\Omega)} = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{u} = 0.$$

ii) Dada la linealidad de los productos interiores de $(L^2(\Omega))^N$ y $L^2(\Omega)$ se sigue

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w})_{H(\operatorname{div},\Omega)} &= (\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w})_{(L^2(\Omega))^N} + (\operatorname{div}\boldsymbol{u},\operatorname{div}\boldsymbol{v}+\operatorname{div}\boldsymbol{w})_{L^2(\Omega)}\\ &= (\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})_{(L^2(\Omega))^N} + (\operatorname{div}\boldsymbol{u},\operatorname{div}\boldsymbol{v})_{L^2(\Omega)} + (\boldsymbol{u},\boldsymbol{w})_{(L^2(\Omega))^N} + (\operatorname{div}\boldsymbol{u},\operatorname{div}\boldsymbol{w})_{L^2(\Omega)}\\ &= (\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})_{H(\operatorname{div},\Omega)} + (\boldsymbol{u},\boldsymbol{w})_{H(\operatorname{div},\Omega)}.\end{aligned}$$

iii) Dada la conmutatividad en los productos interiores de $(L^2(\Omega))^N$ y $L^2(\Omega)$ se obtiene

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})_{H(\operatorname{div},\Omega)} &= (\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})_{(L^2(\Omega))^N} + (\operatorname{div}\boldsymbol{u},\operatorname{div}\boldsymbol{v})_{L^2(\Omega)}\\ &= (\boldsymbol{v},\boldsymbol{u})_{(L^2(\Omega))^N} + (\operatorname{div}\boldsymbol{v},\operatorname{div}\boldsymbol{u})_{L^2(\Omega)}\\ &= (\boldsymbol{v},\boldsymbol{u})_{H(\operatorname{div},\Omega)}.\end{aligned}$$

iv)

$$\begin{aligned}(\alpha\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})_{H(\operatorname{div},\Omega)} &= (\alpha\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})_{(L^2(\Omega))^N} + (\operatorname{div}\alpha\boldsymbol{u},\operatorname{div}\boldsymbol{v})_{L^2(\Omega)}\\ &= \alpha(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})_{(L^2(\Omega))^N} + (\alpha\operatorname{div}\boldsymbol{u},\operatorname{div}\boldsymbol{v})_{L^2(\Omega)}\\ &= \alpha(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})_{(L^2(\Omega))^N} + \alpha(\operatorname{div}\boldsymbol{u},\operatorname{div}\boldsymbol{v})_{L^2(\Omega)}\\ &= \alpha(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})_{H(\operatorname{div},\Omega)}.\end{aligned}$$

v) Podemos observar que

$$(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u})^{\frac{1}{2}}_{H(\operatorname{div},\Omega)} = \left(\|\boldsymbol{u}\|^2_{(L^2(\Omega))^N} + \|\operatorname{div}\boldsymbol{u}\|^2_{L^2(\Omega)}\right)^{\frac{1}{2}},$$

que es efectivamente la norma definida en $H(\operatorname{div},\Omega)$ por (3.7). □

Teorema 3.2.2. $H(\operatorname{div},\Omega)$ *es un espacio de Hilbert.*

Demostración. Sea $\{\boldsymbol{k}_n\}_{n\in\mathbb{Z}^+} \subset H(\operatorname{div},\Omega)$ una sucesión de Cauchy. Luego, para todo $\epsilon > 0$ existe $M \in \mathbb{Z}^+$ tal que para todo $n, m \geq M$ se sigue

$$\|\boldsymbol{k}_n - \boldsymbol{k}_m\|^2_{H(\operatorname{div},\Omega)} < \epsilon^2,$$

esto es

$$\|\boldsymbol{k}_n - \boldsymbol{k}_m\|^2_{(L^2(\Omega))^N} + \|\operatorname{div}(\boldsymbol{k}_n - \boldsymbol{k}_m)\|^2_{L^2(\Omega)} < \epsilon^2.$$

De esta última expresión se observa que

$$\{\boldsymbol{k}_n\}_{n\in\mathbb{Z}^+} \qquad y \qquad \{\operatorname{div}\boldsymbol{k}_n\}_{n\in\mathbb{Z}^+}$$

son sucesiones de Cauchy en $(L^2(\Omega))^N$ y $L^2(\Omega)$ respectivamente. Luego, usando el hecho de que $(L^2(\Omega))^N$ y $L^2(\Omega)$ son espacios completos, entonces existen $\boldsymbol{w} \in (L^2(\Omega))^N$ y $z \in L^2(\Omega)$, los cuales satisfacen

$$\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{k}_n = \boldsymbol{w} \qquad en \quad (L^2(\Omega))^N \quad y \quad \lim_{n\to\infty} \operatorname{div}\boldsymbol{k}_n = z \qquad en \quad L^2(\Omega).$$

Probemos que $\operatorname{div}\boldsymbol{w} = z$ o equivalentemente

$$\int_\Omega \varphi z = -\int_\Omega \nabla\varphi\cdot\boldsymbol{w} \qquad \forall\varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

En primer lugar, mostremos

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega \nabla\varphi\cdot\boldsymbol{k}_n=\int_\Omega \nabla\varphi\cdot\boldsymbol{w}\qquad \forall\varphi\in C_0^\infty(\Omega).$$

En efecto, sea $\varphi\in C_0^\infty(\Omega)$ cualquiera. Usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz se obtiene

$$\begin{aligned}\left|\int_\Omega \nabla\varphi\cdot\boldsymbol{k}_n-\int_\Omega \nabla\varphi\cdot\boldsymbol{w}\right| &= \left|\int_\Omega \nabla\varphi\cdot(\boldsymbol{k}_n-\boldsymbol{w})\right|\\ &\le \|\nabla\varphi\|_{(L^2(\Omega))^N}\|\boldsymbol{k}_n-\boldsymbol{w}\|_{(L^2(\Omega))^N}\to 0,\ n\to\infty.\end{aligned}$$

De la misma forma

$$-\int_\Omega \nabla\varphi\cdot\boldsymbol{k}_n\to-\int_\Omega \nabla\varphi\cdot\boldsymbol{w},\ n\to\infty. \tag{3.8}$$

Similarmente, se prueba

$$\int_\Omega \varphi\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{k}_n\to\int_\Omega \varphi z,\ n\to\infty\qquad \forall\varphi\in C_0^\infty(\Omega). \tag{3.9}$$

En segundo lugar, debemos mostrar que

$$-\int_\Omega \nabla\varphi\cdot\boldsymbol{k}_n=\int_\Omega \varphi\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{k}_n\qquad \forall\varphi\in C_0^\infty(\Omega).$$

Para esto, tomemos $\varphi\in C_0^\infty(\Omega)$ cualquiera y recordemos que $\boldsymbol{k}_n=(k_{n_1},...,k_{n_N})$ para todo $n\in\mathbb{Z}^+$. Así, usando la linealidad de la integral y la definición de derivada débil

$$\begin{aligned}\int_\Omega \varphi\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{k}_n &= \int_\Omega \varphi\left(\frac{\partial k_{n_1}}{\partial x_1}+\cdots+\frac{\partial k_{n_N}}{\partial x_N}\right)\\ &= \sum_{i=1}^N\int_\Omega \varphi\frac{\partial k_{n_i}}{\partial x_i}\\ &= -\sum_{i=1}^N\int_\Omega \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}k_{n_i}\\ &= -\int_\Omega\sum_{i=1}^N \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}k_{n_i}\\ &= -\int_\Omega \nabla\varphi\cdot\boldsymbol{k}_n.\end{aligned}$$

En consecuencia,

$$-\lim_{n\to\infty}\int_\Omega \nabla\varphi\cdot\boldsymbol{k}_n=\lim_{n\to\infty}\int_\Omega \varphi\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{k}_n. \tag{3.10}$$

Finalmente, de (3.8), (3.10) y (3.9) tenemos

$$-\int_\Omega \nabla\varphi\cdot\boldsymbol{w}=-\lim_{n\to\infty}\int_\Omega \nabla\varphi\cdot\boldsymbol{k}_n=\lim_{n\to\infty}\int_\Omega \varphi\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{k}_n=\int_\Omega \varphi z\quad \forall\varphi\in C_0^\infty(\Omega).$$

Es decir, se probó que $\mathrm{div}\,\boldsymbol{w}=z$ y así el espacio $H(\mathrm{div},\Omega)$ es completo. $\square$

Observación 3.2.3. **i)** Recordemos la igualdad que se establece en (3.5), ahora veremos su equivalente para campos vectoriales. Para tal hecho, tomemos $\boldsymbol{u} \in (H^1(\Omega))^N$ y $\boldsymbol{v} \in (H^2(\Omega))^N$ con $\boldsymbol{u} = (u_1, \dots, u_N)$ y $\boldsymbol{v} = (v_1, \dots, v_N)$. Teniendo en cuenta (3.5) se obtiene

$$\begin{aligned} \int_\Omega (\nabla u_1 \cdot \nabla v_1 + u_1 \operatorname{div} \nabla v_1) &= \int_{\partial\Omega} u_1 \nabla v_1 \cdot \boldsymbol{n}, \\ &\vdots \\ \int_\Omega (\nabla u_N \cdot \nabla v_N + u_N \operatorname{div} \nabla v_N) &= \int_{\partial\Omega} u_N \nabla v_N \cdot \boldsymbol{n}. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Además, podemos notar que $\operatorname{div} \nabla v_i = \Delta v_i$ para cada $i = 1, \dots, N$. Luego, sumando las ecuaciones de (3.11) y recordando la parte **ii)** de la Observación 1.2.18, la cual establece que $\nabla \boldsymbol{u} : \nabla \boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^{N} \nabla u_i \cdot \nabla v_i$ para todo $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in (H^1(\Omega))^N$, obtenemos

$$\begin{aligned} \int_\Omega \sum_{i=1}^{N} (\nabla u_i \cdot \nabla v_i + u_i \operatorname{div} \nabla v_i) &= \int_\Omega \sum_{i=1}^{N} (\nabla u_i \cdot \nabla v_i + u_i \Delta v_i) \\ &= \int_\Omega \nabla \boldsymbol{u} : \nabla \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u} \cdot \Delta \boldsymbol{v} \\ &= \int_{\partial\Omega} \sum_{i=1}^{N} u_i \nabla v_i \cdot \boldsymbol{n}. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Ahora bien, podemos notar que

$$(\nabla \boldsymbol{v})\boldsymbol{\eta} = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial v_1}{\partial x_N} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial v_2}{\partial x_N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial v_N}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial v_N}{\partial x_N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 \\ \vdots \\ n_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} n_1 & + \cdots + & \frac{\partial v_1}{\partial x_N} n_N \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} n_1 & + \cdots + & \frac{\partial v_2}{\partial x_N} n_N \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial v_N}{\partial x_1} n_1 & + \cdots + & \frac{\partial v_N}{\partial x_N} n_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \nabla v_1 \cdot \boldsymbol{n} \\ \vdots \\ \nabla v_N \cdot \boldsymbol{n} \end{bmatrix}$$

Por lo tanto

$$\boldsymbol{u} \cdot (\nabla \boldsymbol{v}) \boldsymbol{n} = \sum_{i=1}^{N} u_i \nabla v_i \cdot \boldsymbol{n}$$

y así, por (3.12) se deduce

$$\int_\Omega \nabla \boldsymbol{u} : \nabla \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u} \cdot \Delta \boldsymbol{v} dx = \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{u} \cdot (\nabla \boldsymbol{v}) \boldsymbol{n} \quad \forall \boldsymbol{u} \in (H^1(\Omega))^N \quad \forall \boldsymbol{v} \in (H^2(\Omega))^N. \tag{3.13}$$

ii) Veamos una importante relación entre las normas de $(H^1(\Omega))^N$ y el espacio $H(\operatorname{div}, \Omega)$. Para ello, tomemos $\boldsymbol{v} \in H(\operatorname{div}, \Omega)$. Luego,

$$\begin{aligned}
\|\boldsymbol{v}\|^2_{H(\operatorname{div},\Omega)} = \|\boldsymbol{v}\|^2_{(L^2(\Omega))^N} + \|\operatorname{div}\boldsymbol{v}\|^2_{L^2(\Omega)} &= \|\boldsymbol{v}\|^2_{(L^2(\Omega))^N} + \left\|\sum_{i=1}^N \frac{\partial v_i}{\partial x_i}\right\|^2_{L^2(\Omega)} \\
&\leq \|\boldsymbol{v}\|^2_{(L^2(\Omega))^N} + \sum_{i=1}^N \left\|\frac{\partial v_i}{\partial x_i}\right\|^2_{L^2(\Omega)} \\
&\leq \|\boldsymbol{v}\|^2_{(L^2(\Omega))^N} + \sum_{i,j=1}^N \left\|\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right\|^2_{L^2(\Omega)} \\
&= \|\boldsymbol{v}\|^2_{(L^2(\Omega))^N} + \|\nabla\boldsymbol{v}\|^2_{L^2(\Omega)^{N\times N}} \\
&= \|\boldsymbol{v}\|^2_{(H^1(\Omega))^N}.
\end{aligned}$$

En consecuencia, se tiene

$$\|\boldsymbol{v}\|_{H(\operatorname{div},\Omega)} \leq \|\boldsymbol{v}\|_{(H^1(\Omega))^N}. \tag{3.14}$$

Teorema 3.2.4. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un dominio Lipschitz. Entonces*

$$\overline{(C^\infty(\overline{\Omega}))^N}^{\|\cdot\|_{H(\operatorname{div},\Omega)}} = H(\operatorname{div},\Omega).$$

Demostración. La demostración de este resultado usa el Teorema de suma directa (ver Teorema 1.1.17), ya que al ser $\overline{(C^\infty(\overline{\Omega}))^N}^{\|\cdot\|_{H(\operatorname{div},\Omega)}}$ un subespacio cerrado en $H(\operatorname{div},\Omega)$ entonces se garantiza

$$H(\operatorname{div},\Omega) = \overline{(C^\infty(\overline{\Omega}))^N} \oplus (\overline{(C^\infty(\overline{\Omega}))^N})^\perp.$$

Luego, probaremos que si $\boldsymbol{u} \in H(\operatorname{div},\Omega)$ es tal que

$$\boldsymbol{u} \perp \overline{(C^\infty(\overline{\Omega}))^N} \tag{3.15}$$

con el producto interno de $H(\operatorname{div},\Omega)$, entonces $\boldsymbol{u} = \mathbf{0}$. Con este hecho se habrá probado que $(\overline{(C^\infty(\overline{\Omega}))^N})^\perp = \{\mathbf{0}\}$ respecto al producto interior de $H(\operatorname{div},\Omega)$ y así del Teorema de suma directa (ver Teorema 1.1.17) se sigue

$$H(\operatorname{div},\Omega) = \overline{(C^\infty(\overline{\Omega}))^N}^{\|\cdot\|_{H(\operatorname{div},\Omega)}} \oplus \{\mathbf{0}\} = \overline{(C^\infty(\overline{\Omega}))^N}^{\|\cdot\|_{H(\operatorname{div},\Omega)}}.$$

En efecto, sea $\boldsymbol{u} \in H(\operatorname{div},\Omega)$ tal que $\boldsymbol{u}$ satisface (3.15). Es decir,

$$(\boldsymbol{u},\boldsymbol{\phi})_{(L^2(\Omega))^N} + (\nabla\cdot\boldsymbol{u},\nabla\cdot\boldsymbol{\phi})_{L^2(\Omega)} = 0 \qquad \forall\boldsymbol{\phi} \in (C^\infty(\Omega))^N. \tag{3.16}$$

Además, sean $D\boldsymbol{u} := \nabla\cdot\boldsymbol{u}$ y $\tilde{\boldsymbol{u}}$, $\widetilde{D\boldsymbol{u}}$ las extensiones de $\boldsymbol{u}$ y $D\boldsymbol{u}$ a $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ por cero fuera de Ω respectivamente. Podemos observar que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} |\tilde{\boldsymbol{u}}|^2 = \int_\Omega |\boldsymbol{u}|^2 < \infty$ y $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} |\widetilde{D\boldsymbol{u}}|^2 = \int_\Omega |D\boldsymbol{u}|^2 < \infty$, es decir $\tilde{\boldsymbol{u}} \in (L^2(\mathbb{R}^N))^N$ y $\widetilde{D\boldsymbol{u}} \in L^2(\mathbb{R}^N)$.

Luego, dada la elección de $\boldsymbol{u}$ tenemos

$$(\tilde{\boldsymbol{u}},\boldsymbol{\phi})_{(L^2(\mathbb{R}^N))^N} + (\tilde{D\boldsymbol{u}},\nabla\cdot\boldsymbol{\phi})_{L^2(\mathbb{R}^N)} = (\boldsymbol{u},\boldsymbol{\phi})_{(L^2(\Omega))^N} + (D\boldsymbol{u},\nabla\cdot\boldsymbol{\phi})_{L^2(\Omega)} = 0 \qquad \forall\boldsymbol{\phi} \in (C_0^\infty(\mathbb{R}^N))^N,$$

lo que es equivalente a

$$(\tilde{\boldsymbol{u}},\boldsymbol{\phi})_{(L^2(\mathbb{R}^N))^N} = -(\widetilde{D\boldsymbol{u}},\nabla\cdot\boldsymbol{\phi})_{L^2(\mathbb{R}^N)} \qquad \forall\boldsymbol{\phi} \in (C_0^\infty(\mathbb{R}^N))^N.$$

Ahora, usando la conmutatividad en el producto interior, tanto en $(L^2(\mathbb{R}^N))^N$ como $L^2(\mathbb{R}^N)$ se sigue que la ecuación anterior es equivalente a

$$(\boldsymbol{\phi}, \tilde{\boldsymbol{u}})_{(L^2(\mathbb{R}^N))^N} = -(\nabla \cdot \boldsymbol{\phi}, \widetilde{D\boldsymbol{u}})_{L^2(\mathbb{R}^N)} \qquad \forall \boldsymbol{\phi} \in (C_0^\infty(\mathbb{R}^N))^N$$

y así, usando (3.6) se obtiene que

$$-(\nabla \cdot \boldsymbol{\phi}, \widetilde{D\boldsymbol{u}})_{L^2(\mathbb{R}^N)} = (\boldsymbol{\phi}, \nabla \widetilde{D\boldsymbol{u}})_{(L^2(\mathbb{R}^N))^N}.$$

Por lo tanto, tenemos

$$(\boldsymbol{\phi}, \tilde{\boldsymbol{u}} - \nabla \widetilde{D\boldsymbol{u}})_{(L^2(\mathbb{R}^N)^N} = 0 \qquad \forall \boldsymbol{\phi} \in (C_0^\infty(\mathbb{R}^N))^N$$

y así

$$\nabla \widetilde{D\boldsymbol{u}} = \tilde{\boldsymbol{u}} \in (L^2(\mathbb{R}^N))^N.$$

Con este último hecho podemos observar que $\frac{\partial \widetilde{D\boldsymbol{u}}}{\partial x_i} \in L^2(\mathbb{R}^N)$ para todo $i = 1, \ldots, N$, es decir $\widetilde{D\boldsymbol{u}} \in H^1(\mathbb{R}^N)$ y además $\widetilde{D\boldsymbol{u}}|_\Omega \in H^1(\Omega)$.
Ahora, sea O una bola tal que $\overline{\Omega} \subset O$. Luego, $O \backslash \overline{\Omega}$ es un dominio Lipschitz y teniendo en cuenta la definición de $\widetilde{D\boldsymbol{u}}$ se obtiene que $\widetilde{D\boldsymbol{u}}\,|_{O\backslash\overline{\Omega}} = 0$. Entonces, usando el Teorema de Trazas (ver Teorema 1.2.7) aplicado a $O\backslash\overline{\Omega}$ se tiene que $\widetilde{D\boldsymbol{u}} = 0$ sobre $\partial\left(O\backslash\overline{\Omega}\right)$ y por lo tanto $\widetilde{D\boldsymbol{u}} = 0$ sobre $\partial\Omega$, con lo cual $D\boldsymbol{u} \in H_0^1(\Omega)$.
De otro lado, como $C_0^\infty(\Omega)$ es denso en $H_0^1(\Omega)$ existe una sucesión $\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{Z}^+} \subset C_0^\infty(\Omega)$ tal que

$$\phi_n \to D\boldsymbol{u} \qquad en \quad H_0^1(\Omega).$$

Además, por la continuidad del operador ∇ podemos observar

$$\nabla\phi_n \to \nabla D\boldsymbol{u} \qquad en \quad (H_0^1(\Omega))^N.$$

Así, por (3.16) con $\boldsymbol{\phi} = \nabla\phi_n$ y recordando que $\boldsymbol{u} = \nabla D\boldsymbol{u}$ se deduce

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u})_{(L^2(\mathbb{R}^N))^N} + (\nabla \cdot \boldsymbol{u}, \nabla \cdot \boldsymbol{u})_{L^2(\mathbb{R}^N)} &= (\boldsymbol{u}, \nabla D\boldsymbol{u})_{(L^2(\mathbb{R}^N))^N} + (\nabla \cdot \boldsymbol{u}, D\boldsymbol{u})_{L^2(\mathbb{R}^N)} \\ &= (\nabla \cdot \boldsymbol{u}, \lim_{n\to\infty} \nabla\phi_n)_{(L^2(\mathbb{R}^N))^N} + (\nabla \cdot \boldsymbol{u}, \lim_{n\to\infty} \phi)_{L^2(\mathbb{R}^N)} \\ &= \lim_{n\to\infty} \left\{ (\boldsymbol{u}, \nabla\phi_n)_{(L^2(\mathbb{R}^N))^N} + (\nabla \cdot \boldsymbol{u}, \phi)_{L^2(\mathbb{R}^N)} \right\} \\ &= 0.\end{aligned}$$

Con lo cual, se concluye que $\|\boldsymbol{u}\|_{H(\mathrm{div},\Omega)} = 0$ y por lo tanto $\boldsymbol{u} = \mathbf{0}$. □

Teorema 3.2.5. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un dominio Lipschitz acotado con frontera $\partial\Omega$ y vector normal exterior $\boldsymbol{n}$. Si $\xi \in C^1(\overline{\Omega})$ y $\boldsymbol{u} \in (C^1(\overline{\Omega}))^N$ entonces*

$$\int_\Omega \nabla \cdot \boldsymbol{u}\xi = -\int_\Omega \boldsymbol{u} \cdot \nabla\xi + \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n}\xi.$$

Demostración. Para demostrar esta igualdad haremos uso del Teorema de divergencia (ver Teorema 3.19 [15]), el cual garantiza que bajo las mismas hipótesis de este Teorema y con $\boldsymbol{F} \colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ un campo vectorial, donde $F \in (C^1(\overline{\Omega}))^N$ se tiene que

$$\int_\Omega \mathrm{div}\, \boldsymbol{F} = \int_\Omega \nabla \cdot \boldsymbol{F} = \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}.$$

Luego, para $\boldsymbol{F} := \xi \boldsymbol{u}$ tenemos

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot \xi \boldsymbol{u} = \int_{\partial\Omega} \xi \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n}$$

y recordando (3.4) se sigue

$$\int_{\Omega} (\nabla \xi \cdot \boldsymbol{u} + \xi \nabla \cdot \boldsymbol{u}) = \int_{\partial\Omega} \xi \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n}$$

o lo que es lo mismo

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot \boldsymbol{u} \xi = -\int_{\Omega} \boldsymbol{u} \cdot \nabla \xi + \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n} \xi.$$

$\square$

El siguiente resultado requiere de precisar el significado de solución débil de un problema de la forma:
Hallar $\phi \colon \Omega \to \mathbb{R}$ tal que:

$$\begin{aligned} -\Delta \phi + \phi &= f \qquad \text{en} \quad \Omega, \\ \phi &= \mu \qquad \text{en} \quad \partial\Omega. \end{aligned} \tag{3.17}$$

Para ello, notamos que si $\xi \in H_0^1(\Omega)$ y ϕ es la solución de (3.17) se tiene por la primera identidad de Green (ver Teorema 1.2.13)

$$\int_{\Omega} f \xi = -\int_{\Omega} \Delta \phi \xi + \int_{\Omega} \phi \xi = \int_{\Omega} \nabla \phi \cdot \nabla \xi + \int_{\Omega} \phi \xi.$$

La identidad anterior permite definir una solución débil de (3.17) como sigue:

Definición 3.2.6. Diremos que $\phi \in H^1(\Omega)$ es una solución débil de (3.17), si

$$\phi \in \{u \in H^1(\Omega) : \ u = \mu \quad \text{en} \quad \partial\Omega\}$$

y se cumple

$$\int_{\Omega} \nabla \phi \cdot \nabla \xi + \int_{\Omega} \phi \xi = \int_{\Omega} f \xi \quad \forall \xi \in H_0^1(\Omega).$$

Observación 3.2.7. Para que exista por lo menos una solución débil de (3.17), es necesario que $\mu \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$, pues en caso contrario $\{u \in H^1(\Omega) : \ u = \mu \quad \text{en} \quad \partial\Omega\} = \emptyset$.

Teorema 3.2.8. *Sea Ω un dominio Lipschitz. Sea $\mu \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ y $f \in H^{-1}(\Omega)$. Entonces, existe una única solución débil $\phi \in H^1(\Omega)$ de*

$$\begin{aligned} -\Delta \phi + \phi &= f \qquad \textit{en} \quad \Omega, \\ \phi &= \mu \qquad \textit{en} \quad \partial\Omega. \end{aligned} \tag{3.18}$$

Además, existe una constante C que cumple

$$\|\phi\|_{H^1(\Omega)} \leq C \left(\|\mu\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} + \|f\|_{H^{-1}(\Omega)} \right). \tag{3.19}$$

Demostración. Sea γ_0^{-1} una inversa continua a la derecha del operador traza $\gamma_0\colon H^1(\Omega) \to H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ (ver Teorema 1.2.10). Así, existe $\tilde{\phi} \in H^1(\Omega)$ tal que $\gamma_0(\tilde{\phi}) = \mu$ y

$$\left\|\tilde{\phi}\right\|_{H^1(\Omega)} \leq \tilde{C} \left\|\mu\right\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}. \tag{3.20}$$

i) *Existencia.* Consideremos el problema :
Hallar $\psi \in H_0^1(\Omega)$:

$$\int_\Omega \nabla\psi \cdot \nabla\xi + \int_\Omega \psi\xi = \int_\Omega f\xi - \int_\Omega \nabla\tilde{\phi} \cdot \nabla\xi - \int_\Omega \tilde{\phi}\xi \quad \forall \xi \in H_0^1(\Omega). \tag{3.21}$$

Mostraremos que el problema anterior tiene solución única usando el Lema de Lax-Milgram (ver Lema 1.1.23). En efecto, si hacemos $a(u,v) := \displaystyle\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v + \int_\Omega uv$ y
$F(v) := \displaystyle\int_\Omega fv - \int_\Omega \nabla\tilde{\phi} \cdot \nabla v - \int_\Omega \tilde{\phi} v$ para todo $u, v \in H_0^1(\Omega)$ entonces el problema (3.21) se convierte en:
Hallar $\psi \in H_0^1(\Omega)$:

$$a(\psi, v) = F(v) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega),$$

con $a\colon H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ y $F\colon H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$.

Procedamos a verificar que este problema satisface las condiciones del Lema de Lax-Milgram (ver Lema 1.1.23). Primero, dada la linealidad de la integral y del operador ∇ se observa que a es bilineal y que F es lineal. En segundo lugar veamos que a es continua y elíptica. En efecto, para $u, v \in H_0^1(\Omega)$ usando desigualdad de Cauchy-Schwarz se obtiene

$$\begin{aligned}
|a(u,v)| = \left|\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v + \int_\Omega uv\right| &\leq \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq \left(\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\|v\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Además, para a se verifica que es elíptica, ya que

$$a(v,v) = \|v\|_{H^1(\Omega)}^2 \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Resta mostrar que F es continuo. Para ello, podemos observar que f es un funcional definido en $H^1(\Omega)$ y como $H_0^1(\Omega)$ es un subespacio de $H^1(\Omega)$ entonces se sigue que para $v \in H_0^1(\Omega)$

$$\begin{aligned}
|F(v)| = \left|\int_\Omega fv - \left(\int_\Omega \tilde{\phi} v + \nabla\tilde{\phi} \cdot \nabla v\right)\right| &= |\langle f, v\rangle - (\tilde{\phi}, v)_{H^1(\Omega)}| \\
&\leq |\langle f, v\rangle| + |(\tilde{\phi}, v)_{H^1(\Omega)}| \\
&\leq \|f\|_{H^{-1}(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)} + \left\|\tilde{\phi}\right\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)} \\
&= \left(\|f\|_{H^{-1}(\Omega)} + \left\|\tilde{\phi}\right\|_{H^1(\Omega)}\right) \|v\|_{H^1(\Omega)}.
\end{aligned}$$

En consecuencia, $F \in H^{-1}(\Omega)$ y

$$\|F\|_{H^{-1}(\Omega)} \leq \|f\|_{H^{-1}(\Omega)} + \left\|\tilde{\phi}\right\|_{H^1(\Omega)}.$$

Por lo tanto, por el Lema de Lax-Milgram se tiene que (3.21) tiene solución única y además

$$\|\psi\|_{H^1(\Omega)} \leq \|F\|_{H^{-1}(\Omega)} \leq \|f\|_{H^{-1}(\Omega)} + \left\|\tilde{\phi}\right\|_{H^1(\Omega)}. \tag{3.22}$$

Ahora, consideremos $\psi \in H_0^1(\Omega)$ la solución de (3.21). Así,

$$\phi := \psi + \tilde{\phi} \tag{3.23}$$

es la solución débil de (3.21), ya que $\gamma_0(\phi) = \gamma_0(\psi + \tilde{\phi}) = \gamma_0(\psi) + \gamma_0(\tilde{\phi}) = 0 + \mu = \mu$ y además para toda $\xi \in H_0^1(\Omega)$ se tiene

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \nabla\phi \cdot \nabla\xi + \int_\Omega \phi\xi &= \int_\Omega \nabla(\psi + \tilde{\phi}) \cdot \nabla\xi + \int_\Omega (\psi + \tilde{\phi})\xi \\
&= \left(\int_\Omega \nabla\psi \cdot \nabla\xi + \int_\Omega \psi\xi\right) + \left(\int_\Omega \nabla\tilde{\phi} \cdot \nabla\xi + \int_\Omega \tilde{\phi}\xi\right) \\
&= \left(\int_\Omega f\xi - \int_\Omega \nabla\tilde{\phi} \cdot \nabla\xi - \int_\Omega \tilde{\phi}\xi\right) + \left(\int_\Omega \nabla\tilde{\phi} \cdot \nabla\xi + \int_\Omega \tilde{\phi}\xi\right) \\
&= \int_\Omega f\xi.
\end{aligned}$$

ii) *Unicidad.* Sean ϕ_1, ϕ_2 soluciones débiles de (3.18). Entonces,

$$\psi := \phi_1 - \phi_2$$

satisface que $\psi \in H_0^1(\Omega)$ y $\displaystyle\int_\Omega \nabla\psi \cdot \nabla\xi + \int_\Omega \psi\xi = 0 \quad \forall\xi \in H_0^1(\Omega)$. En particular:

$$0 = \int_\Omega \nabla\psi \cdot \nabla\psi + \int_\Omega \psi\psi = \|\psi\|^2_{H^1(\Omega)},$$

de donde, $\psi = 0$ y así $\phi_1 = \phi_2$.

Finalmente, probaremos (3.19). Debido a la unicidad de solución, la solución del problema (3.18) está dada por (3.23). Así, usando (3.22) y (3.20) se sigue

$$\begin{aligned}
\|\phi\|_{H^1(\Omega)} \leq \|\psi\|_{H^1(\Omega)} + \left\|\tilde{\phi}\right\|_{H^1(\Omega)} &\leq \|f\|_{H^{-1}(\Omega)} + \left\|\tilde{\phi}\right\|_{H^1(\Omega)} + \left\|\tilde{\phi}\right\|_{H^1(\Omega)} \\
&= \|f\|_{H^{-1}(\Omega)} + 2\left\|\tilde{\phi}\right\|_{H^1(\Omega)} \\
&\leq \|f\|_{H^{-1}(\Omega)} + 2\tilde{C}\,\|\mu\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} \\
&\leq C\left(\|f\|_{H^{-1}(\Omega)} + \|\mu\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}\right).
\end{aligned} \tag{3.24}$$

□

Ahora presentaremos el significado de solución débil para un problema de la forma: Hallar $\phi\colon \Omega \to \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
-\Delta\phi + \phi = 0 \quad &\text{en} \quad \Omega, \\
\frac{\partial\phi}{\partial\boldsymbol{n}} = \mu \quad &\text{en} \quad \partial\Omega.
\end{aligned} \tag{3.25}$$

Notamos que si $\psi \in H^1(\Omega)$ y ϕ es solución de (3.25) tenemos que usando la primera identidad de Green (ver Teorema 1.2.13) se sigue

$$0 = \int_\Omega -\Delta\phi\psi + \int_\Omega \phi\psi = \int_\Omega \nabla\phi \cdot \nabla\psi - \langle \frac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{n}}, \gamma_0(\psi) \rangle_{\partial\Omega} + \int_\Omega \phi\psi,$$

donde $\frac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{n}}$ es una notación para $\nabla\phi \cdot \boldsymbol{n}$.

La igualdad anterior pemite definir una solución débil de (3.25) como sigue:

Definición 3.2.9. Diremos que $\phi \in H^1(\Omega)$ es solución débil de (3.25), si

$$\phi \in \{u \in H^1(\Omega) : \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} = \mu \quad \text{en} \quad \partial\Omega\}$$

y se cumple

$$\int_\Omega \nabla\phi \cdot \nabla\psi - \langle \frac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{n}}, \gamma_0(\psi) \rangle_{\partial\Omega} + \int_\Omega \phi\psi = 0 \quad \forall\psi \in H^1(\Omega).$$

Observación 3.2.10. Para que exista por lo menos una solución débil de (3.25), es necesario que $\mu \in H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$, pues en caso contrario $\{u \in H^1(\Omega) : \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} = \mu \quad \text{en} \quad \partial\Omega\} = \emptyset$.

Teorema 3.2.11. *Sea Ω un dominio Lipschitz con frontera $\partial\Omega$ y vector normal exterior $\boldsymbol{n}$. Sea $\mu \in H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$. Entonces existe una única solución débil $\phi \in H^1(\Omega)$ de*

$$\begin{aligned} -\Delta\phi + \phi &= 0 \quad \textit{en} \quad \Omega, \\ \frac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{n}} &= \mu \quad \textit{en} \quad \partial\Omega, \end{aligned} \tag{3.26}$$

Además, existe una constante C tal que

$$\|\phi\|_{H^1(\Omega)} \leq C \|\mu\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}.$$

Demostración. Consideremos el siguiente problema:
Hallar $\phi \in H^1(\Omega)$ tal que:

$$\int_\Omega \nabla\phi \cdot \nabla\psi - \langle \frac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{n}}, \gamma_0(\psi) \rangle_{\partial\Omega} + \int_\Omega \phi\psi = 0 \quad \forall\psi \in H^1(\Omega), \tag{3.27}$$

o lo que es lo mismo

$$\int_\Omega \nabla\phi \cdot \nabla\psi + \int_\Omega \phi\psi = \langle \frac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{n}}, \gamma_0(\psi) \rangle_{\partial\Omega} = \langle \mu, \gamma_0(\psi) \rangle_{\partial\Omega} \quad \forall\psi \in H^1(\Omega).$$

Por lo tanto, el anterior problema toma la siguiente forma:
Hallar $\phi \in H^1(\Omega)$ tal que

$$a(\phi, v) = F(v) \qquad \forall v \in H^1(\Omega),$$

donde $a\colon H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ y $F\colon H^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ con $a(u,v) := \displaystyle\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v + \int_\Omega uv$ y $F(v) := \langle \mu, \gamma_0(v) \rangle_{\partial\Omega}$ para todo $u, v \in H^1(\Omega)$. Observemos que a tiene la misma estructura que resultó para la forma bilineal en el Teorema 3.2.8, luego tenemos que a es continua y elíptica.

Resta probar que F es un operador continuo. Para esto, notemos que usando la continuidad del operador $\mu \in H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ se tiene

$$|F(v)| = |\langle \mu, \gamma_0(v) \rangle_{\partial\Omega}| \leq \|\mu\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} \|\gamma_0(v)\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}$$

y recordando la norma en $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ (ver Definición 1.2.9) tenemos que en particular

$$\|\gamma_0(v)\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} \leq \|v\|_{H^1(\Omega)} .$$

Por lo tanto

$$|F(v)| \leq \|\mu\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)}$$

y así tenemos que F es continuo con

$$\|F\|_{H^1(\Omega)'} \leq \|\mu\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} . \tag{3.28}$$

En consecuancia del Lema de Lax-Milgram se sigue que (3.27) tiene solución única y además

$$\|\phi\|_{H^1(\Omega)} \leq \|F\|_{H^1(\Omega)'} .$$

Así, usando (3.28) y la desigualdad anterior se obtiene

$$\|\phi\|_{H^1(\Omega)} \leq \|\mu\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} .$$

Finalmente, recordando la definición de solución débil de (3.25) se tiene que $\phi \in H^1(\Omega)$ solución única de (3.27), la cual se probó anteriormente, es támbien la única solución débil de (3.18) y así concluimos esta demostración. □

Definición 3.2.12. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un dominio Lipschitz acotado. Para una función $\boldsymbol{v} \in (C^\infty(\overline{\Omega}))^N$ se define la traza normal de $\boldsymbol{v}$ por

$$\gamma_n(\boldsymbol{v}) := \boldsymbol{v}|_{\partial\Omega} \cdot \boldsymbol{n}.$$

Teorema 3.2.13. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un dominio Lipschitz acotado en $\mathbb{R}^N$ con vector normal exterior $\boldsymbol{n}$. Entonces*

i) La definición de traza normal indica un operador lineal y continuo:

$$\gamma_n : (C^\infty(\overline{\Omega}))^N \to H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega),$$

donde $(C^\infty(\overline{\Omega}))^N$ es considerado un subespacio normado de $H(\mathrm{div}, \Omega)$ y

$$\langle \gamma_n(\boldsymbol{v}), \phi \rangle_{\partial\Omega} := (\boldsymbol{v}, \nabla\phi) + (\nabla \cdot \boldsymbol{v}, \phi) \quad \forall \boldsymbol{v} \in (C^\infty(\overline{\Omega}))^N \quad \forall \phi \in H^1(\Omega).$$

ii) El operador traza normal puede ser extendido continuamente a un operador sobreyectivo de $H(\mathrm{div}, \Omega)$ en $H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$.

iii) La siguiente identidad de Green se cumple para funciones $\boldsymbol{v} \in H(\mathrm{div}, \Omega)$ y $\phi \in H^1(\Omega)$

$$(\boldsymbol{v}, \nabla\phi)_{H(\mathrm{div},\Omega)} + (\nabla \cdot \boldsymbol{v}, \phi)_{H^1(\Omega)} = \langle \gamma_n(\boldsymbol{v}), \phi \rangle_{\partial\Omega},$$

donde $\langle ., . \rangle_{\partial\Omega}$ representa el producto de dualidad en $H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \times H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$.

Demostración. *i)* Usando el Teorema 3.2.5 para $\phi \in C^\infty(\overline{\Omega})$ y $\boldsymbol{v} \in (C^\infty(\overline{\Omega}))^N$ se tiene

$$\int_\Omega \nabla \cdot \boldsymbol{v}\phi = -\int_\Omega \boldsymbol{v} \cdot \nabla\phi + \int_{\partial\Omega} (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n})\phi$$

o equivalentemente

$$(\boldsymbol{v}, \nabla\phi) + (\nabla \cdot \boldsymbol{v}, \phi) = \langle \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}, \phi \rangle_{\partial\Omega} = \langle \gamma_n(\boldsymbol{v}), \phi \rangle_{\partial\Omega}.$$

Ahora, usando la densidad de $C^\infty(\overline{\Omega})$ en $H^1(\Omega)$ (ver Teorema 1.2.7) se tiene como consecuencia que esta igualdad también es válida para $\phi \in H^1(\Omega)$, es decir

$$(\boldsymbol{v}, \nabla\phi) + (\nabla \cdot \boldsymbol{v}, \phi) = \langle \gamma_n(\boldsymbol{v}), \phi \rangle_{\partial\Omega} \qquad \forall \phi \in H^1(\Omega) \quad \forall \boldsymbol{v} \in (C^\infty(\overline{\Omega}))^N. \tag{3.29}$$

ii) Haciendo uso de la desigualdad de Cauchy-Schwarz en (3.29) se sigue

$$\begin{aligned}
|\langle \gamma_n(\boldsymbol{v}), \phi \rangle_{\partial\Omega}| &= |(\boldsymbol{v}, \nabla\phi) + (\nabla \cdot \boldsymbol{v}, \phi)| \\
&\leq |(\boldsymbol{v}, \nabla\phi)| + |(\nabla \cdot \boldsymbol{v}, \phi)| \\
&\leq \|\boldsymbol{v}\|_{(L^2(\Omega))^N} \|\nabla\phi\|_{(L^2(\Omega))^N} + \|\nabla \cdot \boldsymbol{v}\|_{L^2(\Omega)} \|\phi\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq \left(\|\boldsymbol{v}\|^2_{(L^2(\Omega))^N} + \|\nabla \cdot \boldsymbol{v}\|^2_{L^2(\Omega)} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\|\phi\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla\phi\|^2_{(L^2(\Omega))^N} \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \|\boldsymbol{v}\|_{H(\mathrm{div},\Omega)} \|\phi\|_{H^1(\Omega)}
\end{aligned} \tag{3.30}$$

para todo $\boldsymbol{v} \in (C^\infty(\overline{\Omega}))^N$ y para todo $\phi \in H^1(\Omega)$. De otro lado, sea $\mu \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ y definamos $\phi \in H^1(\Omega)$ la solución débil de

$$\begin{aligned}
-\Delta\phi + \phi &= 0 \quad \text{en} \quad \Omega, \\
\phi &= \mu \quad \text{en} \quad \partial\Omega.
\end{aligned} \tag{3.31}$$

En virtud del resultado de regularidad para el problema elíptico en el Teorema 3.2.8 tenemos

$$\|\phi\|_{H^1(\Omega)} \leq C \|\mu\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)},$$

luego, de (3.30) se obtiene

$$|\langle \gamma_n(\boldsymbol{v}), \mu \rangle_{\partial\Omega}| \leq C \|\boldsymbol{v}\|_{H(\mathrm{div},\Omega)} \|\mu\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)},$$

o lo que es equivalente

$$\frac{|\langle \gamma_n(\boldsymbol{v}), \mu \rangle|_{\partial\Omega}}{\|\mu\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}} \leq C \|\boldsymbol{v}\|_{H(\mathrm{div},\Omega)}$$

para todo $\mu \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ y para todo $\boldsymbol{v} \in (C^\infty(\Omega))^N$. Este resultado implica, usando la definición de norma en $H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$, que

$$\|\gamma_n(\boldsymbol{v})\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} \leq C \|\boldsymbol{v}\|_{H(\mathrm{div},\Omega)}.$$

Entonces,

$$\gamma_n \colon \boldsymbol{v} \to \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}|_{\partial\Omega}$$

es un operador lineal y acotado (continuo) definido del conjunto $(C^\infty(\overline{\Omega}))^N$ en $H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$. Luego, como $(C^\infty(\overline{\Omega}))^N$ es denso en $H(\mathrm{div},\Omega)$ (ver Teorema 3.2.4) tenemos que γ_n puede ser extendido de manera continua de $H(\mathrm{div},\Omega)$ en $H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$.

Ahora, procedamo a probar la sobreyectividad. Este hecho se probará de manera natural, es decir que para $\mu \in H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ se mostrará que existe $\boldsymbol{v} \in H(\mathrm{div},\Omega)$ tal que $\gamma_n(\boldsymbol{v}) = \mu$. Para ello, recordemos el problema que se plantea en el Teorema 3.2.11 en el cual, usando una identidad de Green se obtiene la formulación variacional:
Hallar $\phi \in H^1(\Omega)$ tal que:

$$(\nabla\phi, \nabla\psi)_{(L^2(\Omega))^N} + (\phi,\psi)_{L^2(\Omega)} = \langle \mu, \gamma_0(\psi)\rangle_{\partial\Omega} \quad \forall\psi \in H^1(\Omega). \tag{3.32}$$

Entonces, si denotamos $\boldsymbol{v} = \nabla\phi \in (L^2(\Omega))^N$ tenemos que tomando $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$ en (3.32) se obtiene

$$(\boldsymbol{v}, \nabla\psi)_{(L^2(\Omega))^N} + (\phi,\psi)_{L^2(\Omega)} = 0 \qquad \forall\psi \in C_0^\infty(\Omega),$$

o lo que es lo mismo

$$(\phi,\psi)_{L^2(\Omega)} = -(\boldsymbol{v}, \nabla\psi)_{(L^2(\Omega))^N} \quad \forall\psi \in C_0^\infty(\Omega)$$

y como consecuencia de (3.6) tenemos que $\mathrm{div}\,\boldsymbol{v} = \nabla\cdot\boldsymbol{v} = \phi \in L^2(\Omega)$. Así $\boldsymbol{v} \in H(\mathrm{div},\Omega)$ y $\gamma_n(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v} = \boldsymbol{n}\cdot\nabla\phi = \frac{\partial\boldsymbol{\phi}}{\partial\boldsymbol{n}} = \mu$, lo cual prueba la sobreyectividad.

iii) Dado que $(C^\infty(\overline{\Omega}))^N$ es denso en $H(\mathrm{div},\Omega)$ (ver Teorema 3.2.4) tenemos que para $\boldsymbol{v} \in H(\mathrm{div},\Omega)$ existe una sucesión $\{\boldsymbol{v_n}\}_{n\in \mathrm{Z}^+} \subset (C^\infty(\overline{\Omega}))^N$ la cual satisface

$$\boldsymbol{v_n} \to \boldsymbol{v}, \quad n\to\infty \quad \text{en} \quad H(\mathrm{div},\Omega),$$

así, usando (3.29) se tiene para todo $n \in \mathrm{Z}^+$

$$(\boldsymbol{v_n}, \nabla\phi) + (\nabla\cdot\boldsymbol{v_n}, \phi) = \langle \gamma_n(\boldsymbol{v_n}), \phi\rangle_{\partial\Omega} \quad \forall\phi \in H^1(\Omega).$$

Entonces, pasando al límite cuando $n\to\infty$ y usando la continuidad del producto interior de $(L^2(\Omega))^N$, $L^2(\Omega)$ y del operador ∇ se sigue

$$(\boldsymbol{v}, \nabla\phi) + (\nabla\cdot\boldsymbol{v}, \phi) = \langle \gamma_n(\boldsymbol{v}), \phi\rangle_{\partial\Omega} \qquad \forall v \in H(\mathrm{div},\Omega) \quad \forall\phi \in H^1(\Omega).$$

□

Definición 3.2.14. Para Ω un dominio Lipschitz y acotado en $\mathbb{R}^N$, con vector normal exterior $\boldsymbol{n}$ se define el espacio

$$H_0(\mathrm{div},\Omega) := \overline{(C_0^\infty(\Omega))^N}^{\|\cdot\|_{H(\mathrm{div},\Omega)}}.$$

Teorema 3.2.15.

$$H_0(\mathrm{div},\Omega) = \left\{\boldsymbol{v} \in H(\mathrm{div},\Omega) : \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}|_{\partial\Omega} = 0\right\}.$$

Demostración. Para demostrar este resultado usaremos el Teorema de suma directa (ver Teorema 1.1.17). Dado que $\overline{(C_0^\infty(\Omega))^N}$ es un subespacio cerrado en $H_0(\mathrm{div},\Omega)$ respecto a la norma en $H(\mathrm{div},\Omega)$ tenemos

$$H_0(\mathrm{div},\Omega) = (\overline{(C_0^\infty(\Omega))^N}) \oplus (\overline{(C_0^\infty(\Omega))^N})^\perp.$$

Luego, mostraremos que si

$$\boldsymbol{v} \in (\overline{(C_0^\infty(\Omega))^N})^\perp \quad \text{y} \quad \gamma_n(\boldsymbol{v}) = 0 \tag{3.33}$$

entonces $\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$.
Supongamos que $\boldsymbol{v}$ satisface (3.33). Luego,

$$(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u})_{(L^2(\Omega))^N} + (\nabla \cdot \boldsymbol{v}, \nabla \cdot \boldsymbol{u})_{L^2(\Omega)} = 0 \quad \forall \boldsymbol{u} \in (C_0^\infty(\Omega))^N,$$

y si definimos $D\boldsymbol{v} = \nabla \cdot \boldsymbol{v}$ se obtiene gracias a (3.6) que

$$0 = (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u})_{(L^2(\Omega))^N} + (D\boldsymbol{v}, \nabla \cdot \boldsymbol{u})_{L^2(\Omega)} = (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u})_{(L^2(\Omega))^N} - (\nabla(D\boldsymbol{v}), \boldsymbol{u})_{(L^2(\Omega))^N},$$

o equivalentemente

$$(\boldsymbol{v} - \nabla(D\boldsymbol{v}), \boldsymbol{u})_{(L^2(\Omega))^N} \quad \forall \boldsymbol{u} \in (C_0^\infty(\Omega))^N,$$

con lo cual $\boldsymbol{v} = \nabla(D\boldsymbol{v})$ y así $\boldsymbol{v} \in (L^2(\Omega))^N$ y $D\boldsymbol{v} \in H^1(\Omega)$.
Ahora bien, aplicando la parte *iii)* del Teorema 3.2.13 con $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}$ y $\phi = D\boldsymbol{v}$ y recordando que $\gamma_n(\boldsymbol{v}) = 0$ se tiene

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v})_{(L^2(\Omega))^N} + (\nabla \cdot \boldsymbol{v}, \nabla \cdot \boldsymbol{v})_{L^2(\Omega)} &= (\boldsymbol{v}, \nabla(D\boldsymbol{v}))_{(L^2(\Omega))^N} + (\nabla \cdot \boldsymbol{v}, D\boldsymbol{v})_{L^2(\Omega)} \\ &= \langle \gamma_n(\boldsymbol{v}), D\boldsymbol{v} \rangle_{\partial\Omega} \\ &= \langle 0, D\boldsymbol{v} \rangle_{\partial\Omega} \\ &= 0.\end{aligned}$$

Lo que muestra que $\|\boldsymbol{v}\|_{H(\mathrm{div},\Omega)} = 0$ y por lo tanto $\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$. □

3.3. Propiedades de los operadores divergencia y gradiente

De ahora en adelante, denotaremos el espacio de funciones de divergencia nula como:

$$V := \{\boldsymbol{v} \in (H_0^1(\Omega))^N : \operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0\}.$$

Definición 3.3.1. Para $f \in L^2(\Omega)'$ tenemos que $\nabla f \in (H^{-1}(\Omega))^N$ donde

$$\langle \nabla f, \boldsymbol{v} \rangle := -\int_\Omega (\operatorname{div} \boldsymbol{v}) \mathcal{R}(f) \qquad \forall \boldsymbol{v} \in (H_0^1(\Omega))^N,$$

donde $\mathcal{R}(f)$ es el representante de Riesz de f. En particular, cuando $u \in L^2(\Omega)$ tenemos que $\mathcal{R}(u) = u$ y

$$\langle \nabla u, \boldsymbol{v} \rangle := -\int_\Omega (\operatorname{div} \boldsymbol{v}) u \qquad \forall \boldsymbol{v} \in (H_0^1(\Omega))^N.$$

Observación 3.3.2. Si $u \in H^1(\Omega)$ notamos que usando la definición anterior e integración por partes (ver Corolario 3.2.3 [1]), tenemos

$$-\int_\Omega (\operatorname{div} \boldsymbol{v}) u = \int_\Omega \nabla u \cdot \boldsymbol{v} =: \langle \nabla u, \boldsymbol{v} \rangle \qquad \forall \boldsymbol{v} \in (H_0^1(\Omega))^N,$$

es decir, la definición anterior tiene sentido.

Definición 3.3.3. Dado $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ abierto y acotado se definen los espacios vectoriales

$$L_0^2(\Omega) := \left\{ f \in L^2(\Omega) : \int_\Omega f = 0 \right\} \quad \text{y} \quad L^2(\Omega)/\mathbb{R} := \left\{ [f] : f \in L^2(\Omega) \right\},$$

donde $[f] = \left\{ g \in L^2(\Omega) : g - f \in \mathbb{R} \right\}$. Además, para $[f] \in L^2(\Omega)/\mathbb{R}$ se define su norma como

$$\|[f]\|_{L^2(\Omega)/\mathbb{R}} = \text{ínf} \left\{ \|g\|_{L^2(\Omega)} : g \in [f] \right\}.$$

Teorema 3.3.4. *$L_0^2(\Omega)$ es un espacio de Banach.*

Demostración. Dado que $L_0^2(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ y $L^2(\Omega)$ es un espacio de Banach, basta probar que $L_0^2(\Omega)$ es cerrado en $L^2(\Omega)$. Para esto, es suficiente observar

$$G \colon L^2(\Omega) \to \mathbb{R},$$

definico por:

$$G(f) := \int_\Omega f \quad \forall f \in L^2(\Omega)$$

es lineal y continuo. En efecto, sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $p, q \in L^2(\Omega)$. Por la linealidad de la integral

$$G(\alpha p + \beta q) = \int_\Omega (\alpha p + \beta q) = \int_\omega \alpha p + \int_\Omega \beta q = \alpha \int_\Omega p + \beta \int_\Omega q.$$

Además, por desigualdad de Cauchy-Schwarz

$$|G(p)| = \left| \int_\Omega p \right| \leq |\Omega|^{\frac{1}{2}} \|p\|_{L^2(\Omega)}.$$

Finalmente, podemos notar que

$$\text{Ker} G = \left\{ f \in L^2(\Omega) : \int_\Omega f = 0 \right\} =: L_0^2(\Omega)$$

y como el núcleo de todo operador lineal y continuo es cerrado, concluimos que $L_0^2(\Omega)$ es cerrado. $\square$

Lema 3.3.5. *El operador*

$$J \colon L^2(\Omega)/\mathbb{R} \to L_0^2(\Omega)$$

dado por

$$J([f]) := f - \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega f \quad \forall [f] \in L^2(\Omega)/\mathbb{R}$$

es una isometría biyectiva.

Demostración. En primer lugar, mostremos que J es independiente del representante. En efecto, sea $g \in [f]$, luego $f - g = C$, donde C es una constante, así tenemos que $g = f + C$ y además por definición

$$\begin{aligned}
J(g) = g - \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega g &= (f+C) - \frac{1}{|\Omega|}\left(\int_\Omega f + \int_\Omega C\right)\\
&= (f+C) - \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega f - \frac{C}{|\Omega|}\int_\Omega\\
&= (f+C) - \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega f - \frac{C}{|\Omega|}|\Omega|\\
&= (f+C) - \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega f - C\\
&= f - \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega f\\
&= J(f).
\end{aligned}$$

En segundo lugar, podemos ver que J esta bien definida, ya que para $f \in [f]$ se sigue

$$\int_\Omega J(f) = \int_\Omega \left(f - \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega f\right) = \int_\Omega f - \left(\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega f\right)|\Omega| = 0$$

y esto muestra que $J(f) \in L_0^2(\Omega)$ para todo $f \in L^2(\Omega)/\mathbb{R}$.

Por último, mostremos que J es una isometría biyectiva de $L^2(\Omega)/\mathbb{R}$ en $L_0^2(\Omega)$. Para esto, debemos probar que J es lineal, sobreyectiva y $\|J(f)\|_{L^2(\Omega)} = \|[f]\|_{L^2(\Omega)/\mathbb{R}}$ para todo $[f] \in L^2(\Omega)/\mathbb{R}$. En efecto, sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $f, g \in L^2(\Omega)/\mathbb{R}$. Usando la linealidad de la integral se tiene

$$\begin{aligned}
J([\alpha f + \beta g]) &= (\alpha f + \beta g) - \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega (\alpha f + \beta g)\\
&= \alpha f + \beta g - \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega \alpha f - \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega \beta g\\
&= \alpha\left(f - \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega f\right) + \beta\left(g - \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega g\right)\\
&= \alpha J([f]) + \beta J([g]),
\end{aligned}$$

lo cual muestra la linealidad de J.

Ahora bien, notemos que

$$\begin{aligned}
\|J(f)\|_{L^2(\Omega)} = \left(\int_\Omega J(f)^2\right)^{\frac{1}{2}} &= \left(\int_\Omega \left\{f - \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega f\right\}^2\right)^{\frac{1}{2}}\\
&= \left(\int_\Omega \left\{f^2 - \frac{2f}{|\Omega|}\int_\Omega f + \frac{1}{|\Omega|^2}\left(\int_\Omega f\right)^2\right\}\right)^{\frac{1}{2}}\\
&= \left(\int_\Omega f^2 - \frac{2}{|\Omega|}\left(\int_\Omega f\right)^2 + \frac{1}{|\Omega|}\left(\int_\Omega f\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}\\
&= \left(\int_\Omega f^2 + \left(\int_\Omega f\right)^2\left\{\frac{1}{|\Omega|} - \frac{2}{|\Omega|}\right\}\right)^{\frac{1}{2}}\\
&= \left(\|f\|^2_{L^2(\Omega)} + \left(\int_\Omega f\right)^2\left\{\frac{1}{|\Omega|} - \frac{2}{|\Omega|}\right\}\right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned} \tag{3.34}$$

De otro lado, usando la definición de norma en el espacio $L^2(\Omega)/\mathbb{R}$ se sigue

$$\begin{aligned}\|[f]\|_{L^2(\Omega)/\mathbb{R}} &= \text{ínf}\left\{\|g\|_{L^2(\Omega)} : g \in [f]\right\}\\ &= \text{ínf}\left\{\|g\|_{L^2(\Omega)} : f - g = C\right\}\\ &= \text{ínf}\left\{\|g\|_{L^2(\Omega)} : g = f - C\right\}\\ &= \inf_{C\in\mathbb{R}}\left\{\|f - C\|_{L^2(\Omega)}\right\}.\end{aligned}$$

Además, para todo $C \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\|f - C\|_{L^2(\Omega)} = \left(\int_\Omega \{f - C\}^2\right)^{\frac{1}{2}} &= \left(\int_\Omega \left\{f^2 - 2Cf + C^2\right\}\right)^{\frac{1}{2}}\\ &= \left(\|f\|^2_{L^2(\Omega)} - 2C\int_\Omega f + C^2|\Omega|\right)^{\frac{1}{2}},\end{aligned}$$

luego, con $\tilde{C} = \frac{1}{|\Omega|}\displaystyle\int_\Omega f$ se obtiene

$$\left\|f - \tilde{C}\right\|_{L^2(\Omega)} = \left(\|f\|^2_{L^2(\Omega)} + \left\{\frac{1}{|\Omega|} - \frac{2}{|\Omega|}\right\}\left(\int_\Omega f\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

y así, usando la definición de ínfimo y recordando (3.34) se tiene

$$\|[f]\|_{L^2(\Omega)/\mathbb{R}} = \inf_{C\in\mathbb{R}}\left\{\|f - C\|_{L^2(\Omega)}\right\} \le \left\|f - \tilde{C}\right\|_{L^2(\Omega)} = \|J(f)\|_{L^2(\Omega)},$$

es decir, $\|[f]\|_{L^2(\Omega)/\mathbb{R}} \le \|J(f)\|_{L^2(\Omega)}$. Para mostrar la otra desigualdad, notemos que

$$J([f]) - f = \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega f = \tilde{C},$$

es decir $J([f]) \in [f]$ y por lo tanto $\|J([f])\|_{L^2(\Omega)} \le \|[f]\|_{L^2(\Omega)/\mathbb{R}}$. En conclusión, tenemos que $\|J([f])\|_{L^2(\Omega)} = \|[f]\|_{L^2(\Omega)/\mathbb{R}}$ y esto implica la inyectividad de J. Ahora mostremos que J es sobreyectiva. Para ello, tomemos $f \in L^2_0(\Omega)$. Luego, definiendo $\tilde{g} := f \in L^2(\Omega)/\mathbb{R}$ se sigue

$$J([\tilde{g}]) = \tilde{g} - \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega \tilde{g} = f - \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega f = f - 0 = f.$$

Por lo tanto, J es una biyección y así tenemos que $J^{-1}\colon L^2_0(\Omega) \to L^2(\Omega)/\mathbb{R}$ también es una isometría biyectiva. □

Teorema 3.3.6. *Sea Ω un dominio abierto Lipschitz acotado y conexo. Entonces el rango del operador gradiente $\nabla\colon L^2(\Omega) \to (H^{-1}(\Omega))^N$ es cerrado.*

Demostración. En primer lugar, demostraremos que

$$\nabla(L^2(\Omega)) = \nabla(L^2_0(\Omega)).$$

En efecto, sea $f \in L^2(\Omega)$ y definamos

$$\dot{f} := \frac{1}{|\Omega|}\int_{\Omega} f \in L^2(\Omega).$$

Notemos que

$$\begin{aligned}\langle \nabla \dot{f}, \boldsymbol{\varphi}\rangle &= -(\operatorname{div}\boldsymbol{\varphi}, \dot{f}) \\ &= -\int_{\Omega} \dot{f}\operatorname{div}\boldsymbol{\varphi} \\ &= -\dot{f}\int_{\Omega}\operatorname{div}\boldsymbol{\varphi} \\ &= 0 \quad \forall \boldsymbol{\varphi} \in (H_0^1(\Omega))^N,\end{aligned}$$

así, para todo $f \in L^2(\Omega)$ se tiene que $\nabla \dot{f} = 0 \quad \text{en} \quad (H^{-1}(\Omega))^N$ y por tanto

$$\nabla f = \nabla(f - \dot{f}) \in \nabla(L_0^2(\Omega)).$$

Es decir, $\nabla(L^2(\Omega)) \subset \nabla(L_0^2(\Omega))$.

De otro lado, dado que $L_0^2(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ entonces $\nabla(L_0^2(\Omega)) \subset \nabla(L^2(\Omega))$. De esta manera, usando las dos inclusiones anteriores concluimos que

$$\nabla(L_0^2(\Omega)) = \nabla(L^2(\Omega)).$$

Ahora bien, por la última igualdad se tiene que mostrar que $\nabla(L^2(\Omega))$ es cerrado en $(H^{-1}(\Omega))^N$, es equivalente a demostrar que $\nabla(L_0^2(\Omega))$ es cerrado en $(H^{-1}(\Omega))^N$. Para demostrar esto, haremos uso del Lema 1.1.24, por lo cual mostraremos que se cumplen las condiciones de este Lema. Es decir, debemos :
Probar que ∇ es un operador lineal acotado y además mostrar que existe C tal que

$$\|p\|_{L^2(\Omega)} \leq C\|\nabla p\|_{(H^{-1}(\Omega))^N} \qquad \forall p \in L_0^2(\Omega). \tag{3.35}$$

En efecto, sean $u \in L_0^2(\Omega)$ y $\boldsymbol{\varphi} \in (H^1(\Omega))^N$. Usando la definición del operador ∇ (ver Definición 3.3.1) , la desigualdad de Cauchy-Schwarz y la parte **ii)** de la Observación 3.2.3 tenemos

$$\begin{aligned}|\langle \nabla u, \boldsymbol{\varphi}\rangle| = \left|-(\operatorname{div}\boldsymbol{\varphi}, u)_{L^2(\Omega)}\right| &\leq \|u\|_{L^2(\Omega)}\|\operatorname{div}\boldsymbol{\varphi}\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \|u\|_{L^2(\Omega)}\|\boldsymbol{\varphi}\|_{(H^1(\Omega))^N},\end{aligned}$$

de donde,

$$\|\nabla u\|_{(H^{-1}(\Omega))^N} \leq \|u\|_{L^2(\Omega)}.$$

Dada la linealidad del operador ∇ se obtiene entonces que este es un operador continuo.

Ahora, usando el hecho de que $J^{-1}\colon L_0^2(\Omega) \to L^2(\Omega)/\mathbb{R}$ es isometría biyectiva (ver Lema 3.3.5) tenemos que para $p \in L_0^2(\Omega)$ existe $[u] \in L^2(\Omega)/\mathbb{R}$ tal que $p = J([u])$ y así

$$\nabla p = \nabla J([u]) = \nabla\left(u - \frac{1}{|\Omega|}\int_{\Omega} u\right) = \nabla u = \nabla([u]) = \nabla J^{-1}p.$$

Finalmente, dada la isometría de J^{-1}, la igualdad anterior y (ver Corolario 2.1 [10]) entonces

$$\|p\|_{L^2(\Omega)} = \left\|J^{-1}p\right\|_{L^2(\Omega)/\mathbb{R}} \leq C\left\|\nabla J^{-1}p\right\|_{(H^{-1}(\Omega))^N} = C\|\nabla p\|_{(H^{-1}(\Omega))^N},$$

es decir,

$$\|p\|_{L^2(\Omega)} \leq C\,\|\nabla p\|_{(H^{-1}(\Omega))^N} \quad \forall p \in L^2_0(\Omega).$$

Por lo tanto hemos probado las dos condiciones del Lema 1.1.24 para el operador ∇ y así concluimos que $\nabla(L^2_0(\Omega)) = \nabla(L^2(\Omega))$ es cerrado en $(H^{-1}(\Omega))^N$. $\square$

Lema 3.3.7. *Sean Ω un dominio Lipschitz acotado. Si*

$$\boldsymbol{f} \in V^0 = \{\boldsymbol{f} \in (H^{-1}(\Omega))^N : \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}\rangle = 0 \quad \forall \boldsymbol{v} \in V\},$$

entonces existe $p \in L^2(\Omega)$ tal que $\nabla p = \boldsymbol{f}$.

Cuando Ω es conexo, p es único salvo una constante aditiva.

Demostración. En primer lugar, mostraremos que existe la siguiente relación entre el operador adjunto de ∇ (ver Definición 1.1.25) y el operador div, la cual usando la linealidad de estos operadores es:

$$\operatorname{div} = \mathcal{R}(-\nabla^*)\mathcal{C} = -\mathcal{R}\nabla^*\mathcal{C}, \tag{3.36}$$

donde $\mathcal{R}\colon L^2(\Omega)' \to L^2(\Omega)$ representa el operador representante de Riesz y $\mathcal{C}\colon (H^1_0(\Omega))^N \to ((H^{-1}(\Omega))^N)'$ la función canónica (ver Observación 1.1.19 y Definición 1.1.21 respectivamente). Es decir, para $\boldsymbol{u} \in (H^1_0(\Omega))^N$ debemos verificar

$$\operatorname{div}\boldsymbol{u} = -\mathcal{R}\nabla^*\mathcal{C}\boldsymbol{u}$$

o equivalentemente (Por la densidad de las funciones $C^\infty_0(\Omega)$ en $L^2(\Omega)$)

$$(\varphi, \operatorname{div}\boldsymbol{u})_{L^2(\Omega)} = -(\varphi, \mathcal{R}\nabla^*\mathcal{C}\boldsymbol{u})_{L^2(\Omega)} \quad \forall \varphi \in C^\infty_0(\Omega) \quad \forall \boldsymbol{u} \in (H^1_0(\Omega))^N.$$

En efecto, sean $\boldsymbol{u} \in (H^1_0(\Omega))^N$ y $\varphi \in C^\infty_0(\Omega)$. Luego, usando propiedades de los operadores $\mathcal{R}$, ∇^*, $\mathcal{C}$ y la definición del operador ∇ se tiene que

$$(\varphi, \mathcal{R}\nabla^*\mathcal{C}\boldsymbol{u})_{L^2(\Omega)} = \langle \nabla^*\mathcal{C}\boldsymbol{u}, \varphi\rangle = \langle \mathcal{C}\boldsymbol{u}, \nabla\varphi\rangle = \langle \nabla\varphi, \boldsymbol{u}\rangle = -(\varphi, \operatorname{div}\boldsymbol{u})_{L^2(\Omega)}.$$

Usando (3.36) y el hecho de que el operador Representante de Riesz es biyectivo se sigue

$$\begin{aligned} V &= \{\boldsymbol{v} \in (H^1_0(\Omega))^N : -\mathcal{R}\nabla^*\mathcal{C}\boldsymbol{v} = 0\} \\ &= \{\boldsymbol{v} \in (H^1_0(\Omega))^N : \mathcal{R}\nabla^*\mathcal{C}\boldsymbol{v} = 0\} \\ &= \{\boldsymbol{v} \in (H^1_0(\Omega))^N : \nabla^*\mathcal{C}\boldsymbol{v} = 0\} \\ &= \{\boldsymbol{v} \in (H^1_0(\Omega))^N : \mathcal{C}\boldsymbol{v} \in \operatorname{Ker}\nabla^*\} \\ &= \mathcal{C}^{-1}(\operatorname{Ker}\nabla^*), \end{aligned}$$

con lo cual, se obtiene

$$\mathcal{C}V = \operatorname{Ker}\nabla^*. \tag{3.37}$$

Además, dado que $\operatorname{Im}\nabla$ es un subespacio cerrado en $(H^{-1}(\Omega))^N$ (ver Teorema 3.3.6) entonces por el Teorema del rango cerrado (ver Teorema 1.1.28) se sigue que $\operatorname{Im}\nabla = (\operatorname{Ker}\nabla^*)^0$ y usando (3.37) obtenemos

$$\operatorname{Im}\nabla = (\mathcal{C}V)^0.$$

Pero, recordando las propiedades del operador $\mathcal{C}$ tenemos que

$$\begin{aligned}(\mathcal{C}V)^0 &= \{\boldsymbol{f} \in (H^{-1}(\Omega))^N : \langle \boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{f} \rangle = 0 \quad \forall \boldsymbol{\varphi} \in CV\} \\ &= \{\boldsymbol{f} \in (H^{-1}(\Omega))^N : \langle \mathcal{C}\boldsymbol{v}, \boldsymbol{f} \rangle = 0 \quad \forall \boldsymbol{v} \in V\} \\ &= \{\boldsymbol{f} \in (H^{-1}(\Omega))^N : \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{v} \rangle = 0 \quad \forall \boldsymbol{v} \in V\} \\ &= V^0.\end{aligned}$$

Así, se ha demostrado

$$\mathrm{Im}\nabla = V^0$$

y por lo tanto, para cualquier $\boldsymbol{f} \in V^0$ existe $p \in L^2(\Omega)$ tal que

$$\boldsymbol{f} = \nabla p.$$

Ahora bien, supongamos que Ω es conexo y supongamos que para $\boldsymbol{f} \in V^0$ existen $p, q \in L^2(\Omega)$ tales que $\nabla p = \nabla q = \boldsymbol{f}$. Así, $\nabla(p-q) = 0$ y por tanto $p - q = C$ para alguna constante C (ver Teorema 5.49 [18]). Es decir,

$$p = q + C,$$

con lo cual, culmina esta demostración. □

Corolario 3.3.8. *Sea Ω un dominio Lipschitz acotado y conexo. Entonces*

i) El operador ∇ es un isomorfismo de $L_0^2(\Omega)$ en V^0.

ii) El operador div *es un isomorfismo de $V^\perp$ sobre $L_0^2(\Omega)$.*

Demostración. *i)* Dado el Lema anterior (ver Lema 3.3.7) tenemos que $\nabla \colon L^2(\Omega) \to V^0$ es un operador lineal sobreyectivo. Mostraremos que $\nabla \colon L_0^2(\Omega) \to V^0$ es un isomorfismo (Operador lineal y biyectivo). En efecto, sea $p \in L_0^2(\Omega)$ tal que

$$\nabla p = 0 \quad \text{en} \quad (H^{-1}(\Omega))^N,$$

luego $p \in H^1(\Omega)$. Así, al ser Ω conexo tenemos que

$$p = C,$$

para alguna constante C en $L^2(\Omega)$. Además,

$$0 = \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega p = \frac{C}{|\Omega|} |\Omega| = C,$$

con lo cual $p = 0$ y así tenemos la inyectividad.

Ahora, probemos la sobreyectividad. Para esto, tomemos $\boldsymbol{f} \in V^0$. Por el Lema 3.3.7 tenemos que existe un único $p \in L^2(\Omega)$, salvo constante aditiva, tal que

$$\nabla p = \boldsymbol{f}.$$

Si definimos $\tilde{p} := p - \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega p$ tenemos que $\tilde{p} \in L_0^2(\Omega)$ y

$$\nabla \tilde{p} = \nabla p - \nabla \left(\frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega p \right) = \nabla p - 0 = \nabla p = \boldsymbol{f}.$$

En conclusión tenemos que $\nabla\colon L_0^2(\Omega) \to V^0$ es un isomorfismo.

Ahora demostremos que se satisface *ii)*. Para esto, mostremos en primer lugar que $\mathcal{C}(V^\perp) = (V^0)'$ donde $\mathcal{C}\colon (H_0^1(\Omega))^N \to ((H^{-1}(\Omega))^N)'$ es la función canónica. En primer lugar, notemos que al ser $(H^{-1}(\Omega))^N$ un espacio de Hilbert, entonces $((H^{-1}(\Omega))^N)'$ es un espacio de Hilbert (ver Teorema 1.1.20), además como $V^0 \subset (H^{-1}(\Omega))^N$ es un subespacio cerrado (ver Lema 1.1.15) entonces

$$(H^{-1}(\Omega))^N = V^0 \oplus (V^0)^\perp, \tag{3.38}$$

con lo cual, para todo $\boldsymbol{f} \in (H^{-1}(\Omega))^N$ existen únicos $\boldsymbol{f_1} \in V^0$ y $\boldsymbol{f_2} \in (V^0)^\perp$ tales que $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{f_1} + \boldsymbol{f_2}$.

Por otro lado, tomemos $F \in (V^0)'$, es decir

$$F\colon V^0 \to \mathbb{R},$$

es un operador lineal y acotado. Mostremos que $F = \mathcal{C}\boldsymbol{w}$ para algún $\boldsymbol{w} \in V^\perp$. En efecto, Definamos

$$\tilde{F}\colon (H^{-1}(\Omega))^N \to \mathbb{R},$$

dado por

$$\tilde{F}(\boldsymbol{w}) := F(\boldsymbol{f}),$$

donde $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{f} + \tilde{\boldsymbol{f}}$, con $\boldsymbol{f} \in V^0$ y $\tilde{\boldsymbol{f}} \in (V^0)^\perp$. Mostremos que $\tilde{F} \in ((H^{-1}(\Omega))^N)'$. Para esto, tomemos $\boldsymbol{g_1}, \boldsymbol{g_2} \in (H^{-1}(\Omega))^N$ y $\alpha \in \mathbb{R}$. Usando (3.38), tenemos que existen únicos $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in V^0$ y $\tilde{\boldsymbol{a}}, \tilde{\boldsymbol{b}} \in (V^0)^\perp$ tales que

$$\boldsymbol{g_1} = \boldsymbol{a} + \tilde{\boldsymbol{a}}, \quad \text{y} \quad \boldsymbol{g_2} = \boldsymbol{b} + \tilde{\boldsymbol{b}}.$$

Luego,

$$\begin{aligned}
\tilde{F}(\alpha\boldsymbol{g_1} + \boldsymbol{g_2}) = \tilde{F}(\alpha(\boldsymbol{a} + \tilde{\boldsymbol{a}}) + (\boldsymbol{b} + \tilde{\boldsymbol{b}})) &= \tilde{F}((\alpha\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) + (\alpha\tilde{\boldsymbol{a}} + \tilde{\boldsymbol{b}})) \\
&= F((\alpha\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})) \\
&= \alpha F(\boldsymbol{a}) + F(\boldsymbol{b}) \\
&= \alpha\tilde{F}(\boldsymbol{g_1}) + \tilde{F}(\boldsymbol{g_2}),
\end{aligned}$$

lo cual muestra la linealidad de $\tilde{F}$.
De otro lado, notemos que

$$\begin{aligned}
\|\boldsymbol{g_1}\|^2_{(H^{-1}(\Omega))^N} = (\boldsymbol{g_1}, \boldsymbol{g_1}) &= (\boldsymbol{a} + \tilde{\boldsymbol{a}}, \boldsymbol{a} + \tilde{\boldsymbol{a}}) \\
&= (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) + 2(\boldsymbol{a}, \tilde{\boldsymbol{a}}) + (\tilde{\boldsymbol{a}}, \tilde{\boldsymbol{a}}) \\
&= \|\boldsymbol{a}\|^2_{(H^{-1}(\Omega))^N} + \|\tilde{\boldsymbol{a}}\|^2_{(H^{-1}(\Omega))^N} \\
&\geq \|\boldsymbol{a}\|^2_{(H^{-1}(\Omega))^N},
\end{aligned}$$

y así, $\|\boldsymbol{a}\|_{(H^{-1}(\Omega))^N} \leq \|\boldsymbol{g_1}\|_{(H^{-1}(\Omega))^N}$. En consecuencia,

$$|\tilde{F}(\boldsymbol{g_1})| = |F(\boldsymbol{a})| \leq \|F\|_{(V^0)'} \|\boldsymbol{a}\|_{(H^{-1}(\Omega))^N} \leq \|F\|_{(V^0)'} \|\boldsymbol{g_1}\|_{(H^{-1}(\Omega))^N},$$

es decir, $\tilde{F}$ es continuo. Ahora, usando el hecho de que $\mathcal{C}\colon (H_0^1(\Omega))^N \to ((H^{-1}(\Omega))^N)'$ es una biyección y que $\tilde{F} \in ((H^{-1}(\Omega))^N)'$ se tiene que existe $\boldsymbol{u} \in (H_0^1(\Omega))^N$ tal que $\mathcal{C}\boldsymbol{u} = \tilde{F}$.

De otro lado, dado que div es un operador lineal y acotado entonces $V = \operatorname{Ker} \operatorname{div} \subset (H_0^1(\Omega))^N$ es cerrado. Así, $(H_0^1(\Omega))^N = V \oplus V^\perp$. Con lo cual, para $\boldsymbol{u} \in (H_0^1(\Omega))^N$ existen únicos $\boldsymbol{v} \in V$ y $\boldsymbol{v}_0 \in V^\perp$ tales que $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}_0$. Por tanto,

$$\mathcal{C}\boldsymbol{u} = \mathcal{C}\boldsymbol{v} + \mathcal{C}\boldsymbol{v}_0 = \tilde{F}$$

y así, $\boldsymbol{v}_0 = \mathcal{C}^{-1}\tilde{F} - \boldsymbol{v}$. Mostremos que $\mathcal{C}\boldsymbol{v}_0 = F$ en $(V^0)'$, es decir

$$\langle \mathcal{C}\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{f} \rangle = \langle F, \boldsymbol{f} \rangle \quad \forall \boldsymbol{f} \in V^0.$$

En efecto,

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{C}\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{f} \rangle &= \langle \tilde{F} - \mathcal{C}\boldsymbol{v}, \boldsymbol{f} \rangle \\
&= \langle \tilde{F}, \boldsymbol{f} \rangle - \langle \mathcal{C}\boldsymbol{v}, \boldsymbol{f} \rangle \\
&= \langle \tilde{F}, \boldsymbol{f} \rangle - \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{v} \rangle \\
&= \langle \tilde{F}, \boldsymbol{f} \rangle \\
&= \langle F, \boldsymbol{f} \rangle \quad \forall \boldsymbol{f} \in V^0,
\end{aligned}$$

esto es, $\mathcal{C}\boldsymbol{v}_0 = F$ y por tanto hemos probado que

$$(V^0)' \subset \mathcal{C}(V^\perp). \tag{3.39}$$

Mostremos la otra inclusión, es decir

$$\mathcal{C}(V^\perp) \subset (V^0)'. \tag{3.40}$$

En efecto, sea $\boldsymbol{v} \in V^\perp$. Así, $\mathcal{C}\boldsymbol{v} \in (H^{-1}(\Omega))^N$ y por tanto

$$\mathcal{C}\boldsymbol{v} = G,$$

para algún $G \in ((H^{-1}(\Omega))^N)'$. Dado que V^0 es un subespacio normado de $(H^{-1}(\Omega))^N$ podemos definir

$$\tilde{G} := G|_{V^0}.$$

Ahora, notemos que para $\boldsymbol{f} \in V^0$,

$$|\langle \tilde{G}, \boldsymbol{f} \rangle| = |\langle G, \boldsymbol{f} \rangle| \leq \|G\|_{((H^{-1}(\Omega))^N)'} \|\boldsymbol{f}\|_{(H^{-1}(\Omega))^N} \leq \|G\|_{((H^{-1}(\Omega))^N)'} \|\boldsymbol{f}\|_{V^0},$$

lo cual muestra la continuidad de $\tilde{G}$. Además, dada la linealidad de G se tiene que $\tilde{G}$ es lineal y así $\tilde{G} \in (V^0)'$. Resta mostrar que $\mathcal{C}\boldsymbol{v} = \tilde{G}$ en $(V^0)'$. Para esto, tomemos $\boldsymbol{f} \in V^0$. Luego,

$$\langle \mathcal{C}\boldsymbol{v}, \boldsymbol{f} \rangle = \langle G, \boldsymbol{f} \rangle = \langle \tilde{G}, \boldsymbol{f} \rangle,$$

lo cual muestra que $\mathcal{C}\boldsymbol{v} = \tilde{G}$ y así, se cumple (3.40). Por tanto, usando (3.39) se obtiene que

$$\mathcal{C}(V^\perp) = (V^0)'. \tag{3.41}$$

Finalmente, usando *i)* tenemos que $-\nabla\colon L_0^2(\Omega) \to V^0$ es un isomorfismo y así, $(-\nabla)^*\colon (V^0)' \to L_0^2(\Omega)'$ también es un isomorfismo. De otro lado, podemos observar que $\mathcal{C}\colon V^\perp \to \mathcal{C}(V^\perp)$ es un isomorfismo y usando propiedades del operador Representante de Riesz tenemos que $\mathcal{R}\colon L_0^2(\Omega)' \to L_0^2(\Omega)$ es un isomorfismo. Por último, usando (3.41) y recordando que $\operatorname{div} = -\mathcal{R}\nabla^*\mathcal{C}$ concluimos que

$$\operatorname{div}\colon V^\perp \to L_0^2(\Omega)$$

es un isomorfismo. □

Capítulo 4

Aplicación de la Teoría de Babuska-Brezzi a los problemas de Stokes y Darcy

La dinámica de fluidos es la ciencia natural de los fluidos (líquidos y gases) en movimiento. Cuenta con diversas subdisciplinas que incluyen la aerodinámica (el estudio del aire y otros gases en movimiento) y la hidrodinámica (el estudio de los líquidos en movimiento). La dinámica de fluidos tiene una amplia gama de aplicaciones, incluyendo el cálculo de fuerzas y momentos en los aviones, la determinación de la tasa de flujo de masa de petróleo a través de oleoductos, la predicción de los patrones del clima, la comprensión de las nebulosas en el espacio interestelar. Algunos de los principios de la dinámica de fluidos incluso se utilizan en la ingeniería de tráfico, donde el tráfico es tratado como un fluido continuo. La solución a un problema de dinámica de fluidos típicamente implica el cálculo de distintas propiedades del fluido, tales como velocidad, presión, densidad y temperatura, como funciones del tiempo y el espacio.

La teoría matemática de la dinámica de fluidos comienza en el siglo XVII con el trabajo de Isaac Newton, quien fue el primero en aplicar sus leyes de la mecánica a los movimientos de los flujos. Posteriormente, Leonhard Euler escribio por primera vez (1755) las ecuaciones diferenciales que rigen el movimiento de un fluido ideal, es decir, en ausencia de disipación debido a la interacción entre moleculas. Finalmente, de forma independiente C. Navier (1822) [16] y G. Stokes (1845) [61] introdujeron en el modelo el término de viscosidad y llegaron a las ecuaciones que hoy en día reciben el nombre de "Ecuaciones de Navier-Stokes", las cuales son consideradas la base de la dinámica de fluidos. Las Ecuaciones de Navier-Stokes conforman un sistema de ecuaciones diferenciales parciales no lineales y el análisis de existencia y regularidad de su solución constituye uno de los siete problemas matemáticos del milenio (`http://www.claymath.org/millennium/`).

En el caso de fluidos de baja viscocidad [19] las ecuaciones de Navier-Stokes pueden ser reemplazadas por el llamado "Problema de Stokes no estacionario", que resulta ser un sistema de ecuaciones diferenciales parciales más sencillo y cuya solución aproxima de manera razonable a la solución del sistema completo de Ecuaciones de Navier-Stokes [14, Sección 1.3]. Las ecuaciones que conforman el problema de Stokes forman un sistema de ecuaciones parabólicas lineales que pueden expresarse en su forma débil como una formulación (parabólica) mixta. Un paso inicial para estudiar el problema de Stokes no estacionario, consiste en analizar el"Problema de Stokes estacionario"(conocido simplemente com Problema de Stokes), el cual puede expresarse como una formulación variacional mixta y por lo tanto para su análisis puede aplicarse la Teoría de Babuska-Brezzi estudiada en el Capítulo 2.

La descripción del flujo en medios porosos es muy complicada a escalas inferiores a los poros (escalas del orden $10^{-5}cm$), se torna más fácil cuando se consideran escalas grandes con respecto al tamaño de los poros. Por otra parte tales flujos o filtraciones, suceden a tan pequeñas velocidades que los términos de inercia son despreciables en comparación con los de presión y viscocidad. La fuerza externa es usualmente la gravedad y se tiene en cuenta cuando el fluido es un líquido y el movimiento no es horizontal. El Ingeniero francés Henry Darcy (1803-1858), que trabajaba para el consorcio de aguas de la ciudad francesa de Dijon, propuso en 1856 una ley, llamada la Ley de Darcy la cual estaba basada en sus experimentos en las " fuentes públicas de la villa" como dice la memoria. Esta ley, que describe adecuadamente la dinámica del flujo de un fluido incompresible[1] en un medio poroso, abrió el análisis racional de los flujos de las aguas subterráneas y otros fluidos que fluyen a través de medios porosos. La ley ha sido ampliada posteriormente para cubrir las diversas situaciones que aparecen en la teoría de la filtración. La ley de Darcy al igual que las Ecuaciones de Stokes se plantea en un sistema de ecuaciones en derivadas parciales no lineales (Problema de Darcy), el cual se puede llevar a una formulación variacional mixta en la que se puede aplicar la Teoría de Babuska-Brezzi. Cabe resaltar que la ley de Darcy, una ley de origen experimental sustituye la ley dinámica usual de Navier-Stokes en la que se tiene en cuenta la interacción con el medio a través del cual fluye el fluido.

El propósito de este capítulo es analizar la existencia y unicidad de solución tanto para el Problema (estacionario) de Stokes, como para el Problema de Darcy. Para ello, se expresarán ambos problemas como formulaciones variacionales mixtas y se aplicará la Teoría de Babuska-Brezzi desarrollada en el Capítulo 2. En la Sección 4.1 se desarrollará el material concerniente al primero de estos problemas, mientras que en la Sección 4.2 se presentarán los resultados correspondientes al Problema de Darcy.

Los resultados que se presentan en este último capítulo pueden ser consultados en los siguientes libros: [2], [8], [9], [13].

4.1. Problema de Stokes

Antes de presentar el problema de Stokes y su respectiva formulación variacional mixta, daremos unos resultados que ayudarán a garantizar las condiciones que se requieren para que dicha formulación tenga solución única.

En el problema de Stokes, como veremos más adelante surge una forma bilineal b, para la cual tendremos que probar la condición ínf-sup y con ello garantizar una de las hipótesis del Teorema de Babuska-Brezzi. Tal condición se prueba en el siguiente Lema y más adelante se podrá observar que es efectivamente la condición ínf-sup de la forma bilineal b del problema de Stokes.

[1]La incompresibilidad se refiere a que el fluido mantiene su densidad constante.

Lema 4.1.1. *Para Ω Lipschitz acotado y conexo se tiene que existe $\beta > 0$ tal que*

$$\sup_{\boldsymbol{v}\in(H_0^1(\Omega))^N} \frac{-\displaystyle\int_\Omega q \operatorname{div} \boldsymbol{v}}{\|\boldsymbol{v}\|_{(H^1(\Omega))^N}} \geq \beta \|q\|_{L^2(\Omega)} \quad \forall q \in L_0^2(\Omega). \tag{4.1}$$

Demostración. En primer lugar demostraremos que

$$\|\boldsymbol{u}\|_{(H^1(\Omega))^N} \leq K \|\operatorname{div} \boldsymbol{u}\|_{L^2(\Omega)} \quad \forall \boldsymbol{u} \in (H_0^1(\Omega))^N. \tag{4.2}$$

En efecto, sea $\boldsymbol{u} \in (H_0^1(\Omega))^N$. Dado que $\mathcal{C}\colon (H_0^1(\Omega))^N \to ((H^{-1}(\Omega))^N)'$ es un isomorfismo entonces $\mathcal{C}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}$ para algún $\boldsymbol{f} \in ((H^{-1}(\Omega))^N)' \subset (V^0)'$ y además,

$$\|\boldsymbol{u}\|_{(H^1(\Omega))^N} = \|\mathcal{C}(\boldsymbol{u})\|_{((H^{-1}(\Omega))^N)'} = \|\boldsymbol{f}\|_{((H^{-1}(\Omega))^N)'}. \tag{4.3}$$

De otro lado, por el Corolario 3.3.8 tenemos que $\nabla\colon L_0^2(\Omega) \to V^0$ es un isomorfismo y como V^0, $L_0^2(\Omega)$ son espacios de Banach (ver Lema 1.1.15 y Teorema 3.3.4 respectivamente) se tiene por el Teorema 1.1.29 que existe $K > 0$ tal que

$$\|\boldsymbol{f}\|_{((H^{-1}(\Omega))^N)'} \leq K \|\nabla^* \boldsymbol{f}\|_{L^2(\Omega)'} \quad \forall \boldsymbol{f} \in (V^0)'.$$

Así, por (4.3) obtenemos

$$\|\boldsymbol{u}\|_{(H^1(\Omega))^N} \leq K \|\nabla^* \boldsymbol{f}\|_{L^2(\Omega)'} = K \|\nabla^* \mathcal{C}(\boldsymbol{u})\|_{L^2(\Omega)'} \quad \forall \boldsymbol{u} \in (H_0^1(\Omega))^N.$$

Además, usando que el operador representante de Riesz $\mathcal{R}\colon L_0^2(\Omega)' \to L_0^2(\Omega)$ es una isometría, es decir, $\|\mathcal{R}(f)\|_{L^2(\Omega)} = \|f\|_{L^2(\Omega)'}$ para todo $f \in L_0^2(\Omega)'$ y recordando que $\operatorname{div} \boldsymbol{u} = -\mathcal{R}\nabla^* C$ entonces

$$\begin{aligned}
\|\boldsymbol{u}\|_{(H^1(\Omega))^N} \leq K \|\nabla^* \mathcal{C}(\boldsymbol{u})\|_{L^2(\Omega)'} &= K \|\mathcal{R}(\nabla^* \mathcal{C}(\boldsymbol{u}))\|_{L^2(\Omega)} \\
&= K \|-\operatorname{div} \boldsymbol{u}\|_{L^2(\Omega)} \\
&= K \|\operatorname{div} \boldsymbol{u}\|_{L^2(\Omega)} \quad \forall \boldsymbol{u} \in (H_0^1(\Omega))^N,
\end{aligned}$$

lo que prueba (4.2).

Finalmente, para probar (4.1) notemos que al ser $\operatorname{div}\colon V^\perp \to L_0^2(\Omega)$ un isomorfismo (ver Corolario 3.3.8) entonces para $-q \in L_0^2(\Omega)$ existe $\boldsymbol{v} \in V^\perp$ tal que $\operatorname{div} \boldsymbol{v} = -q$. En consecuencia, usando (4.2)

$$\begin{aligned}
\sup_{\boldsymbol{u}\in(H_0^1(\Omega))^N} \frac{-\displaystyle\int_\Omega q \operatorname{div} \boldsymbol{u}}{\|\boldsymbol{u}\|_{(H^1(\Omega))^N}} &\geq \frac{-\displaystyle\int_\Omega q \operatorname{div} \boldsymbol{v}}{\|\boldsymbol{u}\|_{(H^1(\Omega))^N}} \\
&= \frac{\displaystyle\int_\Omega |q|^2}{\|\boldsymbol{u}\|_{(H^1(\Omega))^N}} \\
&= \frac{\|q\|_{L^2(\Omega)}^2}{\|\boldsymbol{u}\|_{(H^1(\Omega))^N}} \\
&\geq \frac{1}{K} \|q\|_{L^2(\Omega)},
\end{aligned}$$

para todo $q \in L_0^2(\Omega)$ y así, hemos probado (4.1). $\square$

Tomando en cuenta los resultados previos de este último capítulo, consideremos el **Problema de Stokes**, el cual a menudo es usado para modelar fluidos incompresibles.
Hallar $\boldsymbol{u}\colon \Omega \to \mathbb{R}^N$ y $p\colon \Omega \to \mathbb{R}$ tales que

$$\begin{aligned} -\Delta \boldsymbol{u} + \nabla p = \boldsymbol{f} &\qquad en \quad \Omega, \\ \operatorname{div} \boldsymbol{u} = 0 &\qquad en \quad \Omega, \\ \boldsymbol{u} = 0 &\qquad sobre \quad \partial\Omega. \end{aligned} \tag{4.4}$$

donde $\boldsymbol{f} \in (L^2(\Omega))^N$.

Aquí, $\boldsymbol{u}$ y p representan la velocidad y presión del fluido respectivamente. Notemos que en la ecuación la variable p esta precedida del operador gradiente, es decir aparece unicamente ∇p. Por lo tanto, si p es solución del problema también lo será $p+C$ con C una constante cualquiera. En consecuencia, el espacio en el que se debe buscar p debe ser en principio $L^2(\Omega)/\mathbb{R}$. Sin embargo, para evitar el uso de clases de equivalencia y la norma del espacio cociente, es preferible trabajar con el espacio

$$L_0^2(\Omega) : \left\{ q \in L^2(\Omega) : \int_\Omega q = 0 \right\},$$

el cual como ya se sabe es isométrico a $L^2(\Omega)/\mathbb{R}$ (ver Teorema 3.3.6).

A continuación veremos cómo se lleva este problema a una forma variacional mixta en donde se podrá aplicar la Teoría de Babuska-Brezzi.

Si en la primera ecuación de (4.4) multiplicamos por $\boldsymbol{v} \in (H_0^1(\Omega))^N$ y la segunda ecuación por $q \in L_0^2(\Omega)$ e integrando sobre Ω se tiene

$$\int_\Omega (-\Delta \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} + \nabla p \cdot \boldsymbol{v}) = \int_\Omega \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{v}$$
$$\int_\Omega q \operatorname{div} \boldsymbol{u} = 0.$$

Ahora bien, usando (3.13) y recordando que $\boldsymbol{u} = 0$ en $\partial\Omega$, se sigue

$$\int_\Omega -\Delta \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = \int_\Omega \nabla \boldsymbol{u} : \nabla \boldsymbol{v} - \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{u} \cdot (\nabla \boldsymbol{v})\boldsymbol{\eta} = \int_\Omega \nabla \boldsymbol{u} : \nabla \boldsymbol{v},$$

además, por (3.6) obtenemos

$$\int_\Omega \nabla p \cdot \boldsymbol{v} = \int_{\partial\Omega} p\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\eta} - \int_\Omega p \operatorname{div} \boldsymbol{v} = -\int_\Omega p \operatorname{div} \boldsymbol{v}.$$

Luego, dadas las dos igualdades anteriores podemos denotar

$$a\colon (H_0^1(\Omega))^N \times (H_0^1(\Omega))^N \to \mathbb{R}, \quad b\colon (H_0^1(\Omega))^N \times L_0^2(\Omega) \to \mathbb{R}$$

y

$$F\colon (H_0^1(\Omega))^N \to \mathbb{R}, \quad G\colon L_0^2(\Omega) \to \mathbb{R}$$

definidos por:

$$a(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) := \int_\Omega \nabla \boldsymbol{u} : \nabla \boldsymbol{v}, \quad b(\boldsymbol{v},p) := -\int_\Omega p \operatorname{div} \boldsymbol{v}$$

y

$$F(\boldsymbol{v}) = \int_\Omega \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{v}, \quad G(p) = 0$$

para todo $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v} \in (H_0^1(\Omega))^N$ y para todo $p \in L_0^2(\Omega)$. Entonces, (4.4) es equivalente a:
Hallar $(\boldsymbol{u},p) \in (H^1(\Omega))^N \times L_0^2(\Omega)$ tal que

$$\begin{aligned} a(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) + b(\boldsymbol{v},p) &= F(\boldsymbol{v}) \quad \forall \boldsymbol{v} \in (H_0^1(\Omega))^N, \\ b(\boldsymbol{u},q) &= 0 \quad \forall q \in L_0^2(\Omega). \end{aligned} \tag{4.5}$$

Este problema claramente es una formulación variacional mixta. Mostraremos que se satisfacen las condiciones del Teorema de Babuska-Brezzi (ver Teorema 2.3.4) para garantizar existencia y unicidad de solución. En efecto, notemos que al ser G el operador nulo, entonces este es lineal y continuo. Ahora, para F tomemos $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ y $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v} \in (H_0^1(\Omega))^N$. Por la linealidad de la integral y el producto punto tenemos

$$\begin{aligned} F(\alpha\boldsymbol{u} + \beta\boldsymbol{v}) = \int_\Omega \boldsymbol{f} \cdot (\alpha\boldsymbol{u} + \beta\boldsymbol{v}) &= \int_\Omega \boldsymbol{f} \cdot \alpha\boldsymbol{u} + \int_\Omega \boldsymbol{f} \cdot \beta\boldsymbol{v} \\ &= \alpha \int_\Omega \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{u} + \beta \int_\Omega \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{v} \\ &= \alpha F(\boldsymbol{u}) + \beta F(\boldsymbol{v}), \end{aligned}$$

lo cual muestra la linealidad de F. Además, por desigualdad de Cauchy-Schwarz se deduce

$$\begin{aligned} |F(\boldsymbol{v})| = \left| \int_\Omega \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{v} \right| &\leq \|\boldsymbol{f}\|_{(L^2(\Omega))^N} \|\boldsymbol{v}\|_{(L^2(\Omega))^N} \\ &\leq \|\boldsymbol{f}\|_{(L^2(\Omega))^N} \|\boldsymbol{v}\|_{(L^2(\Omega))^N} + \|\boldsymbol{f}\|_{(L^2(\Omega))^N} \|\nabla \boldsymbol{v}\|_{(L^2(\Omega))^{N\times N}} \\ &\leq \left(2 \|\boldsymbol{f}\|^2_{(L^2(\Omega))^N}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\|\boldsymbol{v}\|^2_{(L^2(\Omega))^N} + \|\nabla \boldsymbol{v}\|^2_{(L^2(\Omega))^{N\times N}}\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \sqrt{2} \|\boldsymbol{f}\|_{(L^2(\Omega))^N} \|\boldsymbol{v}\|_{(H^1(\Omega))^N} \\ &= C \|\boldsymbol{f}\|_{(L^2(\Omega))^N} \|\boldsymbol{v}\|_{(H^1(\Omega))^N}, \end{aligned}$$

donde $C = \sqrt{2} \|\boldsymbol{f}\|_{(L^2(\Omega))^N}$ y así hemos mostrado la continuidad de F.

Mostremos que a y b son formas bilineales continuas.

i) a **es una forma bilineal continua.** En efecto, sean $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w} \in (H_0^1(\Omega))^N$ y $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$.

Teniendo en cuenta la Observación 1.2.18 se tiene

$$\begin{aligned}
a(\boldsymbol{u}, \alpha\boldsymbol{v}+\beta\boldsymbol{w}) &= \int_\Omega \nabla\boldsymbol{u} : \nabla\left(\alpha\boldsymbol{v}+\beta\boldsymbol{w}\right)\\
&= \int_\Omega \nabla\boldsymbol{u} : \nabla\alpha\boldsymbol{v}+\nabla\beta\boldsymbol{w}\\
&= \int_\Omega \nabla\boldsymbol{u} : \alpha\nabla\boldsymbol{v}+\beta\nabla\boldsymbol{w}\\
&= \int_\Omega \nabla\boldsymbol{u} : \alpha\nabla\boldsymbol{v}+\int_\Omega \nabla\boldsymbol{u} : \beta\nabla\boldsymbol{w}\\
&= \alpha\int_\Omega \nabla\boldsymbol{u} : \nabla\boldsymbol{v}+\beta\int_\Omega \nabla\boldsymbol{u} : \nabla\boldsymbol{w}\\
&= \alpha a(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})+\beta a(\boldsymbol{u},\boldsymbol{w}).
\end{aligned}$$

Similarmente se prueba que $a(\alpha\boldsymbol{u}+\beta\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}) = \alpha a(\boldsymbol{u},\boldsymbol{w})+\beta a(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})$ para todo $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ y para todo $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}\in(H_0^1(\Omega))^N$, lo cual prueba que a es una forma bilineal. Resta probar que a es continua. En efecto, gracias a la parte **ii)** de la Observación 1.2.18 obtenemos

$$|a(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})| = \left|\int_\Omega \nabla\boldsymbol{u} : \nabla\boldsymbol{v}\right| = \left|\int_\Omega \sum_{i=1}^N \nabla u_i\cdot\nabla v_i\right| \le \sum_{i=1}^N \left|\int_\Omega \nabla u_i\cdot\nabla v_i\right|,$$

y por la desigualdad de Cauchy-Schwarz tenemos

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^N \left|\int_\Omega \nabla u_i\cdot\nabla v_i\right| &\le \sum_{i=1}^N \|\nabla u_i\|_{L^2(\Omega)}\|\nabla v_i\|_{L^2(\Omega)}\\
&\le \sum_{i=1}^N \|\nabla u_i\|_{L^2(\Omega)}\|\nabla v_i\|_{L^2(\Omega)}+\|u_i\|_{L^2(\Omega)}\|v_i\|_{L^2(\Omega)}\\
&\le \sum_{i=1}^N \left(\|u_i\|^2_{L^2(\Omega)}+\|\nabla u_i\|^2_{L^2(\Omega)}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\|v_i\|^2_{L^2(\Omega)}+\|\nabla v_i\|^2_{L^2(\Omega)}\right)^{\frac{1}{2}}\\
&= \sum_{i=1}^N \|u_i\|_{H^1(\Omega)}\|v_i\|_{H^1(\Omega)}\\
&\le \left(\sum_{i=1}^N \|u_i\|^2_{H^1(\Omega)}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{i=1}^N \|v_i\|^2_{H^1(\Omega)}\right)^{\frac{1}{2}}\\
&= \|\boldsymbol{u}\|_{(H^1(\Omega))^N}\|\boldsymbol{v}\|_{(H^1(\Omega))^N},
\end{aligned}$$

esto es, a es continua.
ii) b **es una forma bilineal continua.** En efecto, sean $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\in H_0^1(\Omega)$ y $p\in L_0^2(\Omega)$.

Por la linealidad de la divergencia

$$\begin{aligned}
b(\alpha\boldsymbol{u}+\beta\boldsymbol{v},p) &= -\int_\Omega p\operatorname{div}(\alpha\boldsymbol{u}+\beta\boldsymbol{v})\\
&= -\int_\Omega p\left(\alpha\operatorname{div}\boldsymbol{u}+\beta\operatorname{div}\boldsymbol{v}\right)\\
&= -\left(\int_\Omega p\alpha\operatorname{div}\boldsymbol{u}+\int_\Omega p\beta\operatorname{div}\boldsymbol{v}\right)\\
&= \alpha\left(-\int_\Omega p\operatorname{div}\boldsymbol{u}\right)+\beta\left(-\int_\Omega p\operatorname{div}\boldsymbol{v}\right)\\
&= \alpha b(\boldsymbol{u},p)+\beta b(\boldsymbol{v},p).
\end{aligned}$$

Ahora, sean $\boldsymbol{u}\in(H_0^1(\Omega))^N$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ y $p,q\in L_0^2(\Omega)$. Tenemos por la linealidad de la integral que

$$\begin{aligned}
b(\boldsymbol{u},\alpha p+\beta q) = -\int_\Omega(\alpha p+\beta q)\operatorname{div}\boldsymbol{u} &= -\left(\int_\Omega\alpha p\operatorname{div}\boldsymbol{u}+\int_\Omega\beta q\operatorname{div}\boldsymbol{u}\right)\\
&= -\alpha\int_\Omega p\operatorname{div}\boldsymbol{u}-\beta\int_\Omega q\operatorname{div}\boldsymbol{u}\\
&= \alpha\left(-\int_\Omega p\operatorname{div}\boldsymbol{u}\right)+\beta\left(-\int_\Omega q\operatorname{div}\boldsymbol{u}\right)\\
&= \alpha b(\boldsymbol{u},p)+\beta b(\boldsymbol{u},q).
\end{aligned}$$

Es decir, se mostró que b es una forma bilineal. Resta probar su continuidad, para esto tomemos $\boldsymbol{v}\in(H_0^1(\Omega))^N$ y $p\in L_0^2(\Omega)$. Usando desigualdad de Cauchy-Schwarz, se cumple

$$\begin{aligned}
|b(\boldsymbol{v},p)| = \left|-\int_\Omega p\operatorname{div}\boldsymbol{v}\right| &\leq \|p\|_{L^2(\Omega)}\|\operatorname{div}\boldsymbol{v}\|_{L^2(\Omega)}\\
&\leq \|p\|_{L^2(\Omega)}\|\boldsymbol{v}\|_{(L^2(\Omega))^N}+\|p\|_{L^2(\Omega)}\|\operatorname{div}\boldsymbol{v}\|_{L^2(\Omega)}\\
&\leq \left(\|p\|^2_{L^2(\Omega)}+\|p\|^2_{L^2(\Omega)}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\|\boldsymbol{v}\|^2_{(L^2(\Omega))^N}+\|\operatorname{div}\boldsymbol{v}\|^2_{L^2(\Omega)}\right)^{\frac{1}{2}}\\
&= \left(2\|p\|^2_{L^2(\Omega)}\right)^{\frac{1}{2}}\|\boldsymbol{v}\|_{H(\operatorname{div},\Omega)}\\
&= \sqrt{2}\|p\|_{L^2(\Omega)}\|\boldsymbol{v}\|_{H(\operatorname{div},\Omega)}.
\end{aligned}$$

Es decir, b es continua.

Por último, para demostrar todas las condicones del Teorema de Babuska-Brezzi, necesitamos mostar que a es elíptica y que b satisface la condición ínf-sup (ver Definición 2.3.1). En primer lugar, mostremos la elipticidad de a. En efecto, gracias a la linealidad de la integral y la desigualdad de Poincaré (ver Teorema 1.2.12) se sigue

$$
\begin{aligned}
a(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}) = \int_\Omega \nabla \boldsymbol{u} : \nabla \boldsymbol{u} = \int_\Omega \sum_{i=1}^N |\nabla v_i|^2 = \sum_{i=1}^N \int_\Omega |\nabla v_i|^2 \\
&\geq \sum_{i=1}^N \frac{1}{C} \|v_i\|^2_{H^1(\Omega)} \\
&= \frac{1}{C} \sum_{i=1}^N \|v_i\|^2_{H^1(\Omega)} \\
&= \frac{1}{C} \|\boldsymbol{v}\|^2_{(H^1(\Omega))^N} \qquad \forall \boldsymbol{v} \in (H_0^1(\Omega))^N.
\end{aligned}
$$

Luego, a es elíptica. En particular, tenemos que a es elíptica en $V = \mathrm{Ker}B \subset (H_0^1(\Omega))^N$ donde B es el operador inducido por la forma bilineal b (ver Lema 1.1.12).

Finalmente, usando (4.1) tenemos que b satisface la condición ínf-sup y por lo tanto, del Teorema de Babuska-Brezzi se tiene que el Problema de Stokes tiene solución única. □

4.2. Problema de Darcy

Un problema similar al Problema de Stokes es el Problema de Darcy, el cual a diferencia del primero tiene en cuenta factores como la permeabilidad en donde se mueve el fluido. Antes de presentar este problema veamos unos resultados importantes acerca de matrices.

4.2.1. Repaso de cálculo de matrices

En esta sección repasaremos importantes conceptos relacionados con matrices, los cuales serán de gran importancia en el momento de garantizar las hipótesis de la Teoría de Babuska-Brezzi y así verificarlas en la formulación variacional mixta del Problema de Darcy.

Definición 4.2.1. Una matriz $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$ es ortogonal si

$$A^T = A^{-1},$$

donde A^T representa la matriz transpuesta de A.

Definición 4.2.2. Dos matrices $A, B \in \mathbb{R}^{N\times N}$ son ortogonalmente semejantes si existe una matriz $P \in \mathbb{R}^{N\times N}$ ortogonal tal que

$$B = P^{-1}AP.$$

Observación 4.2.3. i) Notemos que si A es ortogonal entonces

$$|A\boldsymbol{u}| = |A^T\boldsymbol{u}| = |\boldsymbol{u}| \quad \forall \boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^N.$$

En efecto, para $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^N$ se sigue

$$
\begin{aligned}
|A^T\boldsymbol{u}|^2 = (A^T\boldsymbol{u})^T A^T\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}^T (A^T)^T A^T \boldsymbol{u} &= \boldsymbol{u}^T A A^T \boldsymbol{u} \\
&= \boldsymbol{u}^T A A^{-1} \boldsymbol{u} \\
&= \boldsymbol{u}^T I_N \boldsymbol{u} \\
&= \boldsymbol{u}^T \boldsymbol{u} = |\boldsymbol{u}|^2,
\end{aligned}
$$

donde I_N representa la matriz identidad de orden N. Así, de la igualdad anterior tenemos que $|A^T\boldsymbol{u}| = |\boldsymbol{u}|$ para todo $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^N$. Similarmente se demuestra que $|A\boldsymbol{u}| = |\boldsymbol{u}|$.

ii) Si $A, B \in \mathbb{R}^{N\times N}$ son ortogonalmente semejantes entoces $\det A = \det B$. En efecto, al ser A y B ortogonalmente semejantes entonces existe una matriz $P \in \mathbb{R}^{N\times N}$ ortogonal para la cual

$$B = P^{-1}AP,$$

o lo que es equivalente

$$PB = AP$$

y así, usando propiedades del determinante y el hecho de que $\det P \neq 0$ tenemos

$$\det P \det B = \det PB = \det AP = \det A \det P,$$

con lo cual, $\det A = \det B$.

iii) Si A y B son ortogonalmente semejantes entonces A y B tienen los mismos valores propios. Para esto, basta observar que si $\lambda \in \mathbb{R}$ y P es una matriz ortogonal tal que $A = P^{-1}BP$ entonces

$$\begin{aligned}\det(A - \lambda I_N) = \det(P^{-1}BP - \lambda I_N) &= \det(P^{-1}BP - \lambda P^{-1}I_N P)\\ &= \det(P^{-1}(B - \lambda I_N)P)\\ &= \det(B - \lambda I_N),\end{aligned}$$

donde la última igualdad se tiene por lo demostrado en la parte **ii)** de esta observación.

Definición 4.2.4. Una matriz $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$ es simétrica si

$$A = A^T,$$

donde A^T es la matriz transpuesta de A.

Definición 4.2.5. Una matriz $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$ simétrica es definida positiva si para todo $\boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{0} \in R^N$ se tiene

$$\boldsymbol{u}^T A\boldsymbol{u} > 0.$$

Teorema 4.2.6. *Sea $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$ una matriz simétrica. Entonces existe una matriz ortogonal U tal que*

$$U^T AU = D,$$

donde D es una matriz diagonal.

Demostración. Ver Teorema 4.4 de [13].

Observación 4.2.7. Teniendo en cuenta el Teorema anterior y la parte **iii)** de la Observación 4.2.3 se deduce que los elementos de la matriz diagonal D son precisamente los valores propios de A.

Finalizamos este repaso exhibiendo un resultado importante para matrices definidas positivas.

Teorema 4.2.8. *Sea $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$ una matriz simétrica. Entonces A es definida positiva sí, y sólo si, los valores propios de A son positivos.*

Demostración. Ver Teorema 3.3.2 de [2].

Corolario 4.2.9. *Si $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$ es simétrica y definida positiva entonces*

$$(A\boldsymbol{u})\cdot\boldsymbol{u} \geq \lambda_{\text{mín}}|\boldsymbol{u}|^2 \quad \forall \boldsymbol{u}\in\mathbb{R}^N,$$

donde $\lambda_{\text{mín}}$ es el mínimo de los valores propios de A.

Demostración. Al ser A simétrica, por el Teorema 4.2.6 y la Observación 4.2.7, existe una matriz ortogonal U tal que

$$A = UDU^T,$$

donde D es una matriz diagonal, cuyos elementos de la diagonal son los valores propios de A. Luego, para $\boldsymbol{u}\in R^N$ se tiene

$$\begin{aligned}(A\boldsymbol{u})\cdot\boldsymbol{u} = (A\boldsymbol{u})^T\boldsymbol{u} &= (\boldsymbol{u}^TA^T)\boldsymbol{u}\\ &= \boldsymbol{u}^T(UDU^T)^T\boldsymbol{u}\\ &= \boldsymbol{u}^T(U^T)^TD^TU^T\boldsymbol{u}\\ &= \boldsymbol{u}^TUDU^T\boldsymbol{u}\\ &= (U^T\boldsymbol{u})^TDU^T\boldsymbol{u}.\end{aligned}$$

Así, si $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_N$ son los valores propios de A (los cuales son todos positivos por el Teorema 4.2.8) y si $\boldsymbol{y} := U^T\boldsymbol{u}$, entonces

$$\begin{aligned}\boldsymbol{y}^TD\boldsymbol{y} = [y_1,\ldots,y_N][\lambda_1y_1,\ldots,\lambda_Ny_N]^T &= \sum_{i=1}^N\lambda_iy_i^2\\ &\geq \left(\min_{1\leq i\leq N}\lambda_i\right)\sum_{i=1}^N y_i^2\\ &= \lambda_{\text{mín}}|\boldsymbol{y}|^2,\end{aligned}$$

En consecuencia,

$$(U^T\boldsymbol{u})^TDU^T\boldsymbol{u} \geq \lambda_{\text{mín}}|U^T\boldsymbol{u}|^2 \quad \forall\boldsymbol{u}\in\mathbb{R}^N.$$

Finalmente, utilizando la parte **i)** en la Observación 4.2.3 tenemos que $|U^T\boldsymbol{u}| = |\boldsymbol{u}|$ para todo $\boldsymbol{u}\in\mathbb{R}^N$ y así concluimos

$$(A\boldsymbol{u})\cdot\boldsymbol{u} = (A\boldsymbol{u})^T\boldsymbol{u} = (U^T\boldsymbol{u})^TDU^T\boldsymbol{u} \geq \lambda_{\text{mín}}|\boldsymbol{u}|^2.$$

□

A continuación, consideremos el **Problema de Darcy**:
Hallar $\boldsymbol{u}\in H_0(\text{div},\Omega)$ y $p\in L_0^2(\Omega)$ tales que

$$\begin{aligned} M^{-1}\boldsymbol{u} + \nabla p &= \boldsymbol{f} && \text{en } \Omega,\\ \operatorname{div}\boldsymbol{u} &= g && \text{en } \Omega,\\ \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n} &= 0 && \text{en } \partial\Omega.\end{aligned} \tag{4.6}$$

donde $\boldsymbol{f} : \Omega \to \mathbb{R}^N$, $g : \Omega \to \mathbb{R}$ y $M \in \mathbb{R}^{N\times N}$ es una matriz simétrica y definida positiva.

Ahora, similarmente como el Problema de Stokes llevaremos el problema de Darcy a una formulación variacional mixta. En efecto, multiplicando la primera ecuación por $\boldsymbol{v} \in H_0(\mathrm{div}, \Omega)$ y multiplicando la segunda ecuación por $-q \in L_0^2(\Omega)$ e integrando ambas sobre Ω tenemos

$$\begin{aligned} \int_\Omega M^{-1}\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v} + \int_\Omega \nabla p\cdot\boldsymbol{v} &= \int_\Omega \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{v} \\ \int_\Omega -q\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{u} &= \int_\Omega gq, \end{aligned}$$

pero

$$\int_\Omega \nabla p\cdot\boldsymbol{v} = \int_{\partial\Omega} p\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n} - \int_\Omega p\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{v}$$

y como $\boldsymbol{v} \in H_0(\mathrm{div}, \Omega)$ entonces $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n} = 0$ sobre $\partial\Omega$. En consecuencia, las ecuaciones anteriores se convierten en

$$\begin{aligned} \int_\Omega M^{-1}\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v} - \int_\Omega p\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{v} &= \int_\Omega \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{v} \\ \int_\Omega -q\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{u} &= \int_\Omega gq, \end{aligned}$$

para toda $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in H_0(\mathrm{div}, \Omega)$ y para toda $p, q \in L_0^2(\Omega)$. Por lo tanto, si hacemos

$$a\colon H_0(\mathrm{div}, \Omega) \times H_0(\mathrm{div}, \Omega) \to \mathbb{R}, \quad b\colon H_0(\mathrm{div}, \Omega) \times L_0^2(\Omega) \to \mathbb{R}$$

y

$$F\colon H_0(\mathrm{div}, \Omega) \to \mathbb{R}, \quad G\colon L_0^2(\Omega) \to \mathbb{R}$$

dados por

$$a(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \int_\Omega M^{-1}\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}, \quad b(\boldsymbol{u}, q) = -\int_\Omega q\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{u}$$

y

$$F(\boldsymbol{v}) = \int_\Omega \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{v}, \quad G(q) = -\int_\Omega gq$$

para todo $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in H_0(\mathrm{div}, \Omega)$ y $q \in L_0^2(\Omega)$ entonces (4.6) se transforma en:
Hallar $(\boldsymbol{u}, p) \in H_0(\mathrm{div}, \Omega) \times L^2(\Omega)$ tal que

$$\begin{aligned} a(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) + b(\boldsymbol{v}, p) &= F(\boldsymbol{v}) \quad \forall \boldsymbol{v} \in H_0(\mathrm{div}, \Omega), \\ b(\boldsymbol{u}, q) &= G(q) \quad \forall q \in L_0^2(\Omega). \end{aligned} \tag{4.7}$$

Este problema claramente tiene la estructura de una formulación variacional mixta. Ahora probaremos las hipótesis del Teorema de Babuska-Brezzi para así garantizar existencia y unicidad de solución.

En primer lugar, mostremos la linealidad y continuidad de F y G. Recordemos que en el Problema de Stokes se llegó a una formulación variacional donde surgió el mismo operador F con diferente dominio, el cual se probó que era lineal y continuo. Dado que el dominio no influyé en la linealidad de este operador, restaría probar que F es continuo. En efecto, sea

$\boldsymbol{v} \in H_0(\mathrm{div}, \Omega)$. Usando desigualdad de Cauchy-Schwarz y recordando la norma en el espacio $H_0(\mathrm{div}, \Omega)$ obtenemos

$$
\begin{aligned}
|F(\boldsymbol{v})| = \left| \int_\Omega \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{v} \right| &\leq \|\boldsymbol{f}\|_{(L^2(\Omega))^N} \|\boldsymbol{v}\|_{(L^2(\Omega))^N} \\
&\leq \|\boldsymbol{f}\|_{(L^2(\Omega))^N} \|\boldsymbol{v}\|_{(L^2(\Omega))^N} + \|\boldsymbol{f}\|_{(L^2(\Omega))^N} \|\mathrm{div}\, \boldsymbol{v}\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq \left(2 \|\boldsymbol{f}\|^2_{(L^2(\Omega))^N}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\|\boldsymbol{v}\|^2_{(L^2(\Omega))^N} + \|\mathrm{div}\, \boldsymbol{v}\|^2_{L^2(\Omega)}\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \sqrt{2} \|\boldsymbol{f}\|_{(L^2(\Omega))^N} \|\boldsymbol{v}\|_{H(\mathrm{div}, \Omega)} .
\end{aligned}
$$

En consecuencia, F es continuo.

Ahora, para G tomemos $p, q \in L^2_0(\Omega)$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Por la linealidad de la integral

$$
G(\alpha p+\beta q) = -\int_\Omega g(\alpha p+\beta q) = -\int_\Omega \alpha g p - \int_\Omega \beta g q = \alpha \left(-\int_\Omega g p\right) + \beta \left(-\int_\Omega g q\right) = \alpha G(p) + \beta G(q),
$$

es decir, G es lineal. Además, por desigualdad de Cauchy-Schwarz

$$
|G(p)| = \left| -\int_\Omega g p \right| \leq \|g\|_{L^2(\Omega)} \|p\|_{L^2(\Omega)} .
$$

Por tanto, G es continuo.

En seguida mostremos que a y b son formas bilineales continuas.

i) a **es una forma bilineal continua.** En efecto, sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in H_0(\mathrm{div}, \Omega)$. Por la linealidad de la integral y del producto interno se deduce

$$
\begin{aligned}
a(\boldsymbol{u}, \alpha \boldsymbol{v} + \beta \boldsymbol{w}) = \int_\Omega M^{-1} \boldsymbol{u} \cdot (\alpha \boldsymbol{v} + \beta \boldsymbol{w}) &= \int_\Omega \left(M^{-1} \boldsymbol{u} \cdot \alpha \boldsymbol{v} + M^{-1} \boldsymbol{u} \cdot \beta \boldsymbol{w}\right) \\
&= \int_\Omega \alpha M^{-1} \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} + \int_\Omega \beta M^{-1} \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{w} \\
&= \alpha \int_\Omega M^{-1} \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} + \beta \int_\Omega M^{-1} \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{w} \\
&= \alpha a(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) + \beta a(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}).
\end{aligned}
$$

Análogamente, se puede mostrar que $a(\alpha \boldsymbol{u} + \beta \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = \alpha a(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}) + \beta a(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$ para todo $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in H_0(\mathrm{div}, \Omega)$ y para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, es decir a es una forma bilineal. Además, por desigualdad de Cauchy-Schwarz se tiene

$$
\begin{aligned}
|a(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})| = \left| \int_\Omega M^{-1} \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} \right| &\leq \left\|M^{-1} \boldsymbol{u}\right\|_{(L^2(\Omega))^N} \|\boldsymbol{v}\|_{(L^2(\Omega))^N} \\
&\leq \left\|M^{-1}\right\| \|\boldsymbol{u}\|_{(L^2(\Omega))^N} \|\boldsymbol{v}\|_{(L^2(\Omega))^N} \\
&\leq \left\|M^{-1}\right\| \left(\|\boldsymbol{u}\|_{(L^2(\Omega))^N} \|\boldsymbol{v}\|_{(L^2(\Omega))^N} + \|\mathrm{div}\, \boldsymbol{u}\|_{L^2(\Omega)} \|\mathrm{div}\, \boldsymbol{v}\|_{L^2(\Omega)}\right) \\
&\leq \left\|M^{-1}\right\| \left(\|\boldsymbol{u}\|^2_{(L^2(\Omega))^N} + \|\mathrm{div}\, \boldsymbol{u}\|^2_{L^2(\Omega)}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\|\boldsymbol{v}\|^2_{(L^2(\Omega))^N} + \|\mathrm{div}\, \boldsymbol{v}\|^2_{L^2(\Omega)}\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left\|M^{-1}\right\| \|\boldsymbol{u}\|_{H(\mathrm{div}, \Omega)} \|\boldsymbol{v}\|_{H(\mathrm{div}, \Omega)} ,
\end{aligned}
$$

lo cual muestra que a es continua.

ii) b **es una forma bilineal continua.** En efecto, sean $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\in H_0(\mathrm{div},\Omega)$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ y $p,q\in L_0^2(\Omega)$. Por la linealidad de la integral y del operador divergencia tenemos

$$\begin{aligned}
b(\alpha\boldsymbol{u}+\beta\boldsymbol{v},p) = -\int_\Omega p\,\mathrm{div}(\alpha\boldsymbol{u}+\beta\boldsymbol{v}) &= -\left(\int_\Omega p\,\mathrm{div}\,\alpha\boldsymbol{u}+p\,\mathrm{div}\,\beta\boldsymbol{v}\right)\\
&= -\left(\int_\Omega p\,\mathrm{div}\,\alpha\boldsymbol{u}\right)+-\left(\int_\Omega p\,\mathrm{div}\,\beta\boldsymbol{v}\right)\\
&= -\left(\alpha\int_\Omega p\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{u}\right)+-\left(\beta\int_\Omega p\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{v}\right)\\
&= \alpha\left(-\int_\Omega p\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{u}\right)+\beta\left(-\int_\Omega p\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{v}\right)\\
&= \alpha b(\boldsymbol{u},p)+\beta b(\boldsymbol{v},p)
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
b(\boldsymbol{u},\alpha p+\beta q) = -\int_\Omega(\alpha p+\beta q)\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{u} &= -\int_\Omega(\alpha p\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{u}+\beta q\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{u})\\
&= \left(-\alpha\int_\Omega p\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{u}\right)+\left(-\beta\int_\Omega q\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{u}\right)\\
&= \alpha\left(-\int_\Omega p\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{u}\right)+\beta\left(-\int_\Omega q\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{u}\right)\\
&= \alpha b(\boldsymbol{u},p)+\beta b(\boldsymbol{u},q).
\end{aligned}$$

Por lo tanto b es una forma bilineal. Además, usando desigualdad de Cauchy-Schwarz obtenemos

$$\begin{aligned}
|b(\boldsymbol{u},p)| = \left|-\int_\Omega p\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{u}\right| &\le \int_\Omega |p\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{u}|\\
&\le \|p\|_{L^2(\Omega)}\|\mathrm{div}\,\boldsymbol{u}\|_{L^2(\Omega)}\\
&\le \|p\|_{L^2(\Omega)}\|\mathrm{div}\,\boldsymbol{u}\|_{L^2(\Omega)}+\|p\|_{L^2(\Omega)}\|\boldsymbol{u}\|_{(L^2(\Omega))^N}\\
&\le \left(\|p\|^2_{L^2(\Omega)}+\|p\|^2_{L^2(\Omega)}\right)^{\frac12}\left(\|\mathrm{div}\,\boldsymbol{u}\|^2_{L^2(\Omega)}+\|\boldsymbol{u}\|^2_{(L^2(\Omega))^N}\right)^{\frac12}\\
&= \left(2\|p\|^2_{L^2(\Omega)}\right)^{\frac12}\left(\|\mathrm{div}\,\boldsymbol{u}\|^2_{L^2(\Omega)}+\|\boldsymbol{u}\|^2_{(L^2(\Omega))^N}\right)^{\frac12}\\
&= \sqrt{2}\,\|p\|_{L^2(\Omega)}\|\boldsymbol{u}\|_{H(\mathrm{div},\Omega)}.
\end{aligned}\tag{4.8}$$

Es decir, b es continua.

En seguida mostraremos que a es elíptica y que b satisface la condición ínf-sup y así garantizar todas las hipótesis del Teorema de Babuska-Brezzi. En primer lugar, mostremos la elipticidad de a. Antes de esto notemos que

$$\mathrm{Ker}B=\{\boldsymbol{u}\in H_0(\mathrm{div},\Omega):\mathrm{div}\,\boldsymbol{u}=0\}:=V.$$

donde B es el operador lineal inducido por la forma bilineal b. Así, para $\boldsymbol{v}\in V$ tenemos que

$$\|\boldsymbol{v}\|^2_{H(\mathrm{div}\,.\Omega)}=\|\boldsymbol{v}\|^2_{L^2(\Omega)}+\|\mathrm{div}\,\boldsymbol{v}\|^2_{L^2(\Omega)}=\|\boldsymbol{v}\|^2_{L^2(\Omega)}+0=\|\boldsymbol{v}\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Ahora bien, por el Corolario 4.2.9 y la última igualdad se tiene que para todo $\boldsymbol{v} \in V$

$$a(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) = \int_\Omega (M^{-1}\boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{v} \geq \min_{1 \leq i \leq N} \lambda_i \int_\Omega |\boldsymbol{v}|^2 = \alpha \|\boldsymbol{v}\|^2_{L^2(\Omega)} = \alpha \|\boldsymbol{v}\|^2_{H(\mathrm{div},\Omega)},$$

donde $\alpha = \min\limits_{1 \leq i \leq N} \lambda_i$. Es decir, a es elíptica en $V = \mathrm{Ker}B$.

Finalmente, probemos que b satisface la condición ínf-sup. Es decir, probemos que

$$\sup_{\boldsymbol{u} \in H_0(\mathrm{div},\Omega)} \frac{-\displaystyle\int_\Omega q \operatorname{div} \boldsymbol{u}}{\|\boldsymbol{u}\|_{H(\mathrm{div},\Omega)}} \geq \beta \|q\|_{L^2(\Omega)} \quad \forall q \in L^2_0(\Omega). \tag{4.9}$$

Para mostrar (4.9), mostraremos en primer lugar

$$\|\boldsymbol{u}\|_{H(\mathrm{div},\Omega)} \leq K \|\operatorname{div} \boldsymbol{u}\|_{L^2(\Omega)} \quad \forall \boldsymbol{u} \in H_0(\mathrm{div},\Omega). \tag{4.10}$$

En efecto, usando (4.2) tenemos que

$$\|\boldsymbol{u}\|_{(H^1(\Omega))^N} \leq K \|\operatorname{div} \boldsymbol{u}\|_{L^2(\Omega)} \quad \forall \boldsymbol{u} \in (H^1_0(\Omega))^N.$$

Además, recordando la parte **ii)** en la Observación 3.2.3, la cual establece que

$$\|\boldsymbol{u}\|_{H(\mathrm{div},\Omega)} \leq \|\boldsymbol{u}\|_{(H^1(\Omega))^N}$$

para toda $\boldsymbol{u} \in H_0(\mathrm{div},\Omega)$, entonces

$$\|\boldsymbol{u}\|_{H(\mathrm{div},\Omega)} \leq K \|\operatorname{div} \boldsymbol{u}\|_{L^2(\Omega)} \quad \forall \boldsymbol{u} \in H_0(\mathrm{div},\Omega),$$

lo que prueba (4.10).

Finalmente, para probar (4.9) recordemos que $\mathrm{div}\colon V^\perp \to L^2_0(\Omega)$. Así, para $-q \in L^2_0(\Omega)$ existe $\boldsymbol{v} \in V^\perp$ tal que $\operatorname{div} \boldsymbol{v} = -q$. En consecuencia, por (4.10) tenemos

$$\begin{aligned}
\sup_{\boldsymbol{u} \in H_0(\mathrm{div},\Omega)} \frac{-\displaystyle\int_\Omega q \operatorname{div} \boldsymbol{u}}{\|\boldsymbol{u}\|_{H(\mathrm{div},\Omega)}} &\geq \frac{-\displaystyle\int_\Omega q \operatorname{div} \boldsymbol{v}}{\|\boldsymbol{u}\|_{H(\mathrm{div},\Omega)}} \\
&= \frac{\displaystyle\int_\Omega |q|^2}{\|\boldsymbol{u}\|_{H(\mathrm{div},\Omega)}} \\
&= \frac{\|q\|^2_{L^2(\Omega)}}{\|\boldsymbol{u}\|_{H(\mathrm{div},\Omega)}} \\
&\geq \frac{1}{K} \|q\|_{L^2(\Omega)},
\end{aligned}$$

para todo $q \in L^2_0(\Omega)$. Es decir, se cumple (4.9).

Por lo tanto, hemos probado que b satisface la condición ínf-sup y así, todas las condiciones Teorema de Babuska-Brezzi. En conclusión, el Problema de Darcy tiene solución única. $\square$

Conclusiones

1. Se estudió la Teoría de Babuska-Brezzi para abordar las formulaciones variacionales mixtas y así garantizar existencia y unicidad de dichas formulaciones.

2. Se mostraron las principales propiedades del espacio $H(\text{div}, \Omega)$.

3. Se estudiarón propiedades importantes de los operadores divergencia (div) y gradiente (∇).

4. Bajo cierta condición se garantizó la existencia y unicidad de los problemas de Stokes y Darcy con ayuda de la Teoría de Babuska-Brezzi.

Bibliografía

[1] G. Allaire, *Numerical Analysis and Optimization. An Introduction to Mathematical Modelling and Numerical Simulation*, Oxford University Press, 2007.

[2] A. Asmar, *Tópicos en teoría de matrices. Documento de trabajo*, Universidad Nacional de Colombia, Sede Medellín. Disponible en internet en la dirección: `http://www.bdigital.unal.edu.co/1739/`

[3] I. Babuska, *The finite element method with lagrangian multipliers*. Numer. Math., Vol. 20 (1973), pp. 179–192.

[4] D. Boffi and L. Gastaldi (Eds.), *Mixed Finite Elements, Compatibility Conditions and Applications*, Springer, Berlin, 2008.

[5] H. Brezis, *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*. Universitext. Springer, New York, 2011.

[6] F. Brezzi, *On existence, uniqueness and approximation of saddle-point problems arising from Lagrange multipliers*. RAIRO Model. Math. Anal. Numer., Vol. 2 (1974), pp. 129-151.

[7] F. Brezzi and M. Fortin, *Mixed and hybrid finite element method*, Springer, New-York, 1991.

[8] A. Ern and J.-L. Guermond, *Theory and practice of finite elements*, Springer Verlag, New-York, 2004.

[9] J.-F. Gerbeau and C. Farhat, *The Finite Element Method for Fluid Mechanics*, Stanford University, 2009.

[10] V. Girault and P. A. Raviart, *Finite Element Methods for Navier Stokes Equations*, Springer, New York, 1986.

[11] P. Grisvard , *Elliptic problems in nonsmooth domains*, Boston, MA, 1985.

[12] E. Kreyszig, *Introductory functional analysis with applications*, Wiley, 1978.

[13] S. Lang, *Algebra Linear*, Springer-Verlag, 1987.

[14] A. Chorin and J. Marsden, *A Mathematical Introduction to Fluid Mechanics*. Springer, 1979.

[15] P. Monk, *Finite Element Methods for Maxwell's Equations*, Oxford Clarendon Press, 2003.

[16] C. L. M. H. Navier, *Mémoire sur les lois du mouvement des fluids*, Mem. Acad. Sci. Inst. Fr. **6** (1822) 389–416.

[17] Y. Perdomo, *Formulación débil y de Galerkin de la ecuación bidimensional de Poisson*, Universidad del Cauca, Trabajo de grado para obtener el título de Matemático, 2011.

[18] M. Renardy and R.C. Rogers, *An introduction to partial differential equations*, Texts in Applied. Math. 13, Springer-Verlag, 1993.

[19] P. N. Shankar, *Slow viscous flows: qualitative features and quantitative analysis using complex eigenfunction expansions*

[20] G. G. Stokes, *On the theories of internal friction of uids in motion*, Trans. Cambridge. Philos. Soc. **8** (1845), 287–305.

[21] R. Temam, *Navier-Stokes Equations, Theory and Numerical Analysis*, North-Holland, 1979.

[22] E. Zeidler, *Nonlinear Functional Analysis and its Applications, II/A, Springer, New York, 1990.*