TERNAS PITAGÓRICAS

JOHN HENRY SALAZAR CERÓN

JUAN YIMMY CABEZAS PEPICANO

UNIVERSIDAD DEL CAUCA

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES, EXACTAS Y DE LA EDUCACIÓN

POPAYÁN

2015

TERNAS PITAGÓRICAS

JOHN HENRY SALAZAR CERÓN
JUAN YIMMY CABEZAS PEPICANO

Trabajo de Grado en modalidad de seminario de grado presentado como requisito parcial para optar al título de matemático otorgado por la Universidad del Cauca

Director
Dr. CARLOS ALBERTO TRUJILLO SOLARTE

UNIVERSIDAD DEL CAUCA
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES, EXACTAS Y DE LA EDUCACIÓN
POPAYÁN

2015

Índice general

Capítulo 1

Introducción

El tema que abordaremos en este trabajo de grado ha sido uno de los mas influyentes en la matemática por su contribución en la geometría, álgebra y teoría de números, por esta razón consideramos que este análisis es importante porque nos ayudará a entender la naturaleza y a comprender uno de los problemas más antiguos y famosos de la teoría de números elemental; por este motivo nace la idea de realizar esta monografía sobre ternas pitagóricas, el cual es homólogo al estudio de triángulos pitagóricos.

Además es necesario comprender algunos de los problemas resueltos y abiertos que se originaron a partir de la ecuación pitagórica, lo cual se hará basándonos en artículos originales de diferentes autores y en libros que consideren el desarrollo histórico del tema. Este es nuestro objetivo en general.

Como objetivos específicos tenemos: Resolver los problemas sobre ternas pitagóricas que se presentan en el Capítulo 3, realizar una revisión histórica sobre ternas pitagóricas teniendo como base fundamental [2], e identificar algunos problemas abiertos relacionados con el tema. Además comprender estrategias de solución que se han utilizado en algunos de los problemas antes mencionados, con el fin de identificar algunas relaciones entre la geometría, el álgebra y la teoría de números en las ternas pitagóricas. Y por último dejar las bases iniciales para un análisis investigativo posterior sobre el tema.

1.1. Resumen

Una terna de enteros positivos (a, b, c) se llama pitagórica si satisface la igualdad $a^2 + b^2 = c^2$. Y todo triángulo que cumpla esta relación con sus tres lados números enteros positivos se denomina triángulo pitagórico.

Durante el desarrollo de este trabajo realizamos una revisión sobre ternas pitagóricas tomando como base el texto [2], revisamos cómo se plantearon algunos problemas sobre ternas pitagóricas y cómo se buscaron soluciones a los mismos; estos problemas han sido de gran interés para los matemáticos de la antigüedad. Además se estudiaron y analizaron algunas propiedades sobre ternas pitagóricas como por ejemplo, el número más pequeño que divide al producto abc es 60 o la hipotenusa de un triángulo pitagórico primitivo (ver definición 1.2) es de la forma $4k+1$ con k entero. Las pruebas de esas propiedades y las soluciones de algunos problemas interesantes sobre ternas pitagóricas se presentan en los Capítulos 2 y 3.

Para complementar nuestro trabajo, en el Capítulo 4 presentamos un método de demostración debido a Fermat, poco conocido en nuestro medio, llamado descenso al infinito.

1.2. Preliminares

Desde la antigüedad ha interesado la relación entre las figuras geométricas y las ecuaciones. Una de las relaciones nos dice que en todo triángulo rectángulo, el área del cuadrado construido sobre la hipotenusa es igual a la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre cada uno de los catetos; en términos algebraicos se tiene que

$$a^2 + b^2 = c^2 \tag{1.1}$$

siendo a y b las longitudes de los catetos y c la longitud de la hipotenusa [3]. Este resultado se conoce como el Teorema de Pitágoras, y toma su nombre del matemático griego Pitágoras (569AC - 500AC) quien fue tal vez la primera persona en ofrecer una prueba de su resultado, pese a que la comunidad científica identificó dicha relación mucho antes de Pitágoras [5].

Cuando las letras de la Ecuación (1.1) representan números enteros positivos, la terna (a, b, c) se denomina *terna pitagórica*. Acerca del tema de ternas pitagóricas se tiene conocimiento que entre 1900 y 1600 antes de Cristo en la antigua Mesopotamia, algunas ternas aparecieron en una tablilla llamada Plimton 332 que es una tablilla de barro de origen babilónico que data de 1800 a.C. y que se conserva en la Universidad de Columbia [6].

La terna pitagórica más conocida, por ser la menor respecto al orden lexicográfico y además permitir una comprobación instantánea del teorema, es $(3, 4, 5)$. También los agrimensores egipcios utilizaban la terna $(3, 4, 5)$, que corresponde al triángulo rectángulo de lados 3, 4 y 5, llamado *triángulo sagrado* *egipcio,* a modo de escuadra para trazar líneas perpendiculares. Así nació la profesión de Arpedonapta. Una cuerda con doce nudos igualmente espaciados fue templada en nudos $0, 4$ y 7 para hacer un ángulo recto preciso [8]. A partir de esta observación, nace la necesidad de preguntarse si existen finitas o infinitas ternas pitagóricas, y si es posible determinarlas todas.

Definición 1.1 *Una terna de enteros positivos* (a, b, c) *es una* ***terna pitagórica*** *si* $a^2 + b^2 = c^2$*. Un triángulo rectángulo cuyos lados tienen como longitudes a números enteros positivos se llama* ***triángulo pitagórico.***

Es claro que en la definición anterior, c representa la hipotenusa y a, b corresponden a los catetos.

El nombre de terna pitagórica viene del Teorema de Pitágoras el cual establece que en todo triángulo rectángulo sus lados (enteros o no) satisfacen la fórmula $a^2 + b^2 = c^2$, donde a y b representan las longitudes de los catetos y c la longitud de la hipotenusa. Así las ternas pitagóricas corresponden a las tres longitudes de los lados de un triángulo Pitagórico.

Lema 1.1 *Si* (a, b, c) *es una terna pitagórica y* k *es un entero positivo, entonces la terna* (ka, kb, kc) *es pitagórica.*

Demostración. La prueba es inmediata a partir de la definición

$$a^2 + b^2 = c^2 \Leftrightarrow (ka)^2 + (kb)^2) = (kc)^2$$

Q.E.D.

En particular existen infinitas ternas pitagóricas $(3k, 4k, 5k)$ para todo entero positivo k. Esto sugiere la siguiente definición.

Definición 1.2 *Una terna pitagórica* (a, b, c) *se llama* ***primitiva*** *si sus componentes son relativamente primos, es decir si*

$$\mathrm{mcd}(a, b, c) = 1.$$

Lema 1.2 *La terna pitagórica* (a, b, c) *es primitiva si y sólo si los tres enteros son relativamente primos por pares, es decir, si y sólo si*

$$\mathrm{mcd}(a, b) = \mathrm{mcd}(a, c) = \mathrm{mcd}(b, c) = 1.$$

Demostración.

$\Rightarrow$) Sea $d = mcd(a, b)$. Si $d > 1$, existe un primo p talque $p \mid d$. Entonces $p \mid a$ y $p \mid b$, y como $a^2 + b^2 = c^2$ también $p \mid c^2$ y de aquí $p \mid c$. Luego $p \mid \mathrm{mcd}(a, b, c)$ que no es posible, luego $d = 1$. Similarmente $mcd(a, c) = 1$, $mcd(b, c) = 1$.

$\Leftarrow$) Sea $d = mcd(a, b, c)$ luego $d \mid a$ y $d \mid b$ y como $mcd(a, b) = 1$ entonces $d = 1$. Q.E.D.

$(3, 4, 5)$	$(5, 12, 13)$	$(7, 24, 25)$	$(8, 15, 17)$
$(9, 40, 41)$	$(11, 60, 61)$	$(12, 35, 37)$	$(13, 84, 85)$
$(15, 112, 113)$	$(16, 63, 65)$	$(17, 144, 145)$	$(19, 180, 181)$
$(20, 21, 29)$	$(20, 99, 101)$	$(21, 220, 221)$	$(23, 264, 265)$
$(24, 143, 145)$	$(28, 45, 53)$	$(28, 195, 197)$	$(32, 255, 257)$
$(33, 56, 65)$	$(36, 77, 85)$	$(39, 80, 89)$	$(44, 117, 125)$
$(48, 55, 73)$	$(51, 140, 149)$	$(52, 165, 173)$	$(57, 176, 185)$
$(60, 91, 109)$	$(60, 221, 229)$	$(65, 72, 97)$	$(68, 285, 293)$
$(69, 260, 269)$	$(84, 187, 205)$	$(85, 132, 157)$	$(88, 105, 137)$
$(95, 168, 193)$	$(96, 247, 265)$	$(104, 153, 185)$	$(105, 208, 233)$
$(115, 252, 277)$	$(119, 120, 169)$	$(120, 209, 241)$	$(133, 156, 205)$
$(140, 171, 221)$	$(160, 231, 281)$	$(161, 240, 289)$	

Cuadro 1.1: Ternas Pitagóricas Primitivas (a, b, c), con $0 < a < b < c < 300$ (ver [9]).

Capítulo 2

Teorema de Euclides y algunas propiedades de ternas pitagóricas

En este capítulo presentamos aportes de varios matemáticos y aficionados que intervinieron en el estudio de ternas pitagóricas, teniendo como referencia el Capítulo IV del texto *Dickson, Leonard E. History of the Theory of Numbers: Diophantine Analysis. Carnegie Institution of Washington* en donde se encuentran preguntas tales como: ¿que métodos hay para resolver la ecuación pitagórica en los enteros?, ¿hay criterios de divisibilidad en las ternas pitagóricas?, ¿hay triángulos pitagóricos en los que sus lados difieran por la unidad y hay forma de generarlos todos?.

En la Sección 2.1 veremos aportes de algunos matemáticos que intentaron resolver la ecuación pitagórica en los enteros y la fórmula de Euclides, al igual que su teorema que es el pilar de esta sección.

2.1. Algunos métodos para resolver $x^2+y^2=z^2$ en enteros

• De acuerdo con Proclus, Pitágoras(siglo VI A.C.) representó el cateto menor como, $x = 2\alpha + 1$, el cateto mayor como $y = 2\alpha^2 + 2\alpha$ y la hipotenusa como $z = y+1$; aquí podemos ver reflejado el problema de encontrar triángulos pitagóricos en los cuales dos de los lados difieran por la unidad. Platón tomó la diferencia $z-y$ como 2 (en lugar de 1) y obtuvo $x = 2\alpha$, $y = \alpha^2-1$, $z = \alpha^2+1$;

este es el caso en donde dos de los lados de un triángulo pitagórico difieren por dos.

• Los hindúes Baudhayana y Apastamba, cerca del siglo quinto A.C., obtuvieron independientemente de los griegos, las soluciones

$$(3,4,5),(5,12,13),(7,24,25) \quad y \quad (8,15,17),(12,35,37),$$

que son casos de la regla de Pitágoras y la regla de Platón.

• Euclides dio el conjunto de soluciones,

$$\alpha\beta\gamma, \quad \frac{1}{2}\alpha(\beta^2-\gamma^2), \quad \frac{1}{2}\alpha(\beta^2+\gamma^2),$$

como también el conjunto relacionado.

$$\sqrt{mn}, \quad \frac{1}{2}(m-n), \quad \frac{1}{2}(m+n).$$

• Marcus Junius Nipsus, al menos un siglo después de Diofanto, dio dos reglas para encontrar triángulos rectángulos con lados enteros dado un cateto. Expresadas algebraicamente, sus reglas dan como solución de $z^2-y^2=x^2$,

$$z=\frac{1}{2}(x^2+1), \quad y=\frac{1}{2}(x^2-1), \quad para\ x\ impar\ y$$

$$z=\frac{1}{4}x^2+1, \quad y=\frac{1}{4}x^2-1, \quad para\ x\ par,$$

fórmulas equivalentes a las de Pitágoras y Platón.

• Diofanto tomó un valor dado para z y requirió que z^2-x^2 fuese un cuadrado de la forma $(mx-z)^2$. Así

$$x=\frac{2mz}{m^2+1}, \quad y=mx-z=(\frac{m^2-1}{m^2+1})z.$$

Aquí m es cualquier número racional; reemplazándolo por m/n y tomando $z=m^2+n^2$ tenemos

$$x=2mn; \quad y=m^2-n^2; \quad z=m^2+n^2. \tag{2.1}$$

Diofanto se refiere al triángulo rectángulo con esos lados como el formado por los dos números m,n.

• Un manuscrito Árabe anónimo de 972 estableció que en todo triángulo rectángulo primitivo (con lados enteros relativamente primos), los lados son dados por (2.1). Además dio condiciones necesarias para que (2.1) dé un triángulo primitivo, las cuales son que m, n sean relativamente primos y $m+n$ sea impar. Lo que se puede notar en este manuscrito es que ya estaba implícito el Teorema de Euclides que se presenta más adelante, además ya se tenía el concepto de terna primitiva y es la primera evidencia en la cual encontramos este concepto.

Se tenía que la hipotenusa de un triángulo rectángulo primitivo es una suma de dos cuadrados y es de la forma $12k+1$ o $12k+5$, aunque no todos de tales números son sumas de dos cuadrados; por ejemplo 65^2 es suma de dos cuadrados en dos formas: $63^2+16^2=33^2+56^2$. Aquí podemos ver que ya estaban surgiendo algunos de los problemas planteados en el anteproyecto como ¿qué forma debe tener un entero para que sea la hipotenusa de un triángulo pitagórico?.

• Leonardo Pisano usó el hecho que la suma $1+3+\cdots$ de n números impares consecutivos es n^2 para encontrar dos cuadrados cuya suma es un cuadrado. Primero, si un cuadrado a^2 es impar, tomar el otro como $1+3+\cdots+(a^2-2)$; su suma $1+3+\cdots+a^2$ es un cuadrado. Si un cuadrado es par, como 36, sumar y restar la unidad de su mitad, obteniendo los números impares consecutivos 17 y 19; entonces $1+3+\cdots+15=64$ y

$$64+36=1+\cdots+15+17+19=10^2.$$

Esto se corresponde con la reglas de Pitágoras y Platón. Por otro lado, Leonardo también obtuvo soluciones racionales de $x^2+y^2=a^2$ por un método muy diferente al de Diofanto; el cual consistía en partir de cualquier triángulo racional conocido para el cual $\alpha^2+\beta^2=\gamma^2$, y tomar $x=a\alpha/\gamma, y=a\beta/\gamma$.

• M. Stifel llamó a $a\cdot b$ un número diametral si $a^2+b^2=c^2$ y estableció incorrectamente que $a\cdot b$ es un número diametral si y sólo si a/b pertenece a una de las sucesiones $1\frac{1}{3}, 2\frac{2}{5}, 3\frac{3}{7}, \cdots$ y $1\frac{7}{8}, 2\frac{11}{12}, 3\frac{15}{16}, \cdots$, este resultado expresado en lenguaje moderno se escribe

$$\frac{a}{b}=\frac{2n^2+2n}{2n+1} \ o \ \frac{a}{b}=\frac{4n^2+8n+3}{4n+4},$$

que corresponde a las soluciones de $a^2+b^2=c^2$ de Pitágoras y Platón.

• E. Meyer observó que las fórmulas para los números diametrales de Stifel no funcionan siempre, por ejemplo no usó $33\cdot 56$ que él debería haber utilizado.

• Euler notó que la suma de los cuadrados de $x + 1/x$ y $y + 1/y$ es un cuadrado si

$$\begin{aligned} y &= \frac{px-1}{x+1}; \\ k^2 &= (x+p)^2(px-1)^2 + x^2(p^2+1)^2, \quad k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

lo último siendo verdad si $(p^2 - 1)x = 4p$.

• L. Poinsot notó que cada conjunto de soluciones enteras de $z^2 - y^2 = x^2$, está dada por $z = (p + q)/2$, $y = (p - q)/2$, donde x^2 se ha expresado en todos los sentidos como un producto de dos números p y q, ambos impares y relativamente primos.

• P. Volpicelli notó que $z = a^2 + b^2 = \alpha^2 + \beta^2$ implica que:

$$x = \pm(a\alpha \mp b\beta), \quad y = \pm(a\beta \pm b\alpha)$$

son soluciones de $x^2 + y^2 = z^2$, y afirmó incorrectamente que se daban todas las soluciones, mientras que la Fórmula (2.1) no lo hacía.

• J. Liouville afirmó que para z dado, $x^2 + y^2 = z^2$ tiene soluciones en enteros relativamente primos si y sólo si z es un producto de números primos de la forma $4n + 1$; la solución $x = 1020, y = 425, z = 5 \cdot 13 \cdot 17$, es un contraejemplo de esta afirmación.

• C. M. Piuma citó el resultado conocido que las soluciones enteras de

$$x^2 + y^2 = z^2$$

son relativamente primos y están dados por:

$$x = mn, \quad y = \frac{m^2 - n^2}{2}, \quad z = \frac{m^2 + n^2}{2},$$

donde m y n son números enteros impares relativamente primos, y demostró que estas tres expresiones son relativamente primos dos a dos, mostrando mediante el uso de congruencias que no hay dos que sean divisibles por la misma potencia de un número primo. Esta es una de las observaciones más acertadas en la solución del problema de encontrar todas las ternas pitagóricas primitivas.

• L. E. Dickson obtuvo una solución equivalente a (2.1), $r+s$, $r+t$, $r+s+t$, donde $r^2 = 2st$ es un cuadrado. La misma regla la dieron mas tarde P. G. Egidi, D. Gambioli, A. Bottari, y H. Schotten.

• L. Kronecker probó que todas las soluciones enteras positivas de $x^2+y^2 = z^2$ se dan sin repetición por:

$$x = 2pqt, \quad y = t(p^2 - q^2), \quad z = t(p^2 + q^2), \quad p > q > 0, \quad t > 0,$$

p y q deben ser relativamente primos y no son ambos impares. La razón por la que cada solución se obtiene una vez y sólo una vez se debe al hecho de que el círculo $\xi^2 + \eta^2 = 1$ es de género cero; todos estos puntos deben ser expresados en forma racional en $r = \tan \omega/2$:

$$\xi = \cos \omega = \frac{1 - r^2}{1 + r^2}, \quad \eta = \sin \omega = \frac{2r}{1 + r^2}.$$

• A. Bottari probó que todas las soluciones enteras de $x^2 + y^2 = z^2$ vienen dadas por $x = u + w$, $y = v + w$, $z = u + v + w$, donde $u = p^2k$, $v = 2^{2s-1}q^2k$, $w = 2^s pqk$, p y q son enteros relativamente primos impares.

• J. Gegiking observó que para soluciones de primos relativos de $x^2 - y^2 = z^2$, podemos tomar $x - y$ cualquier número de la forma $(2n + 1)^2$ o $2n^2$, pero no otro. Entonces $x + y = (2m + 1)^2$ o $2m^2$, con $2m + 1$ y $2n + 1$ o m y n relativamente primos.

A continuación se presenta la fórmula de Euclides la cual después de un análisis conduce al teorema fundamental de Euclides que da todas soluciones primitivas a la ecuación pitagórica.

2.2. Teorema de Euclides

La siguiente fórmula permite generar ternas pitagóricas (fórmula de Euclides). Dado un par arbitrario de enteros positivos m y n con $m > n$, la fórmula establece que los enteros

$$a = m^2 - n^2, \quad b = 2mn, \quad c = m^2 + n^2, \tag{2.2}$$

forman una terna pitagórica [7].

Por otro lado sabemos que si (x, y, z) es una terna pitagórica entonces (kx, ky, kz) también es terna pitagórica Lema 1.1. Luego toda terna puede generarse usando la fórmula con m y n para generar su parte primitiva y luego multiplicarla toda por k para obtener todas las ternas pitagóricas. En consecuencia basta determinar solo las ternas pitagóricas primitivas.

Observación. Notemos que si (a, b, c) es una terna pitagórica primitiva entonces los números a, b, c son primos relativos dos a dos, así que no hay dos de ellos pares. Por otro lado como a, b, c satisfacen $a^2 + b^2 = c^2$ no pueden ser todos impares. En consecuencia uno y sólo uno de los números a, b, c es par. Ahora si c es par y a, b son impares, entonces $a^2 + b^2 = 4t + 2$ y $c^2 = 4k$, para ciertos t, k así que $a^2 + b^2 = c^2$ no se satisface. De este análisis se puede deducir el siguiente lema.

Lema 2.2.1 *Si (a, b, c) es una terna pitagórica primitiva entonces exactamente uno de a, b es impar y la hipotenusa c es impar.*
Demostración. La prueba es inmediata a partir de la observación anterior Q.E.D.

Antes de presentar el Teorema de Euclides, daremos a conocer un lema básico de la teoría de números que será de importancia en la prueba y su demostración puede ser vista en [4].

Lema 2.2.2 *Si a y b son relativamente primos y su producto ab es un cuadrado entonces a y b son cuadrados.*

Teorema de Euclides. *La terna de enteros positivos (x, y, z) es pitagórica primitiva con x par, y impar si y sólo si existen enteros positivos m y n relativamente primos, con $m > n$ y de distinta paridad tales que:*

$$\begin{aligned} x &= 2mn, \\ y &= m^2 - n^2, \\ z &= m^2 + n^2. \end{aligned}$$

Demostración. Supongamos que (x, y, z) es una terna pitagórica primitiva con x par, y impar, luego se cumple que

$$x^2 = z^2 - y^2 = (z - y)(z + y).$$

Ahora como x es par tenemos que $x = 2k$, para algún k en los enteros positivos; por lo tanto

$$\begin{aligned} x^2 &= (z - y)(z + y), \\ (2k)^2 &= (z - y)(z + y), \\ k^2 &= \frac{(z - y)}{2}\frac{(z + y)}{2}. \end{aligned}$$

Además $\frac{(z-y)}{2}$ y $\frac{(z+y)}{2}$ son enteros, ya que y y z son ambos impares. De otro lado si d es un común divisor de $\frac{(z-y)}{2}$ y $\frac{(z+y)}{2}$, d divide a su suma y a su diferencia, así $d \mid z$ y $d \mid y$, lo que obliga a $d = 1$ por ser y, z primos relativos, así $\frac{(z-y)}{2}$ y $\frac{(z+y)}{2}$ son primos relativos, luego por Lema 2.2.2 tenemos que deben ser cuadrados esto es existen enteros m, n tales que

$$\frac{(z-y)}{2} = n^2 \quad y \quad \frac{(z+y)}{2} = m^2. \tag{2.3}$$

Claramente $m > n$, $\mathrm{mcd}(m, n) = 1$ y los números tienen distinta paridad, por lo tanto si sumamos y restamos las Ecuaciones (2.3) tenemos $z = m^2 + n^2$, $y = m^2 - n^2$ y como $x^2 = z^2 - y^2$ entonces $x = 2mn$. En consecuencia si (x, y, z) es una terna pitagórica primitiva, con x par y impar, existen enteros m, n con $m > n$, $\mathrm{mcd}(m, n) = 1$ y de distinta paridad tales que

$$z = m^2 + n^2, \quad y = m^2 - n^2, \quad x = 2mn,$$

que es precisamente lo que se quería probar.

Ahora supongamos que existen enteros m, n con $m > n$, $\mathrm{mcd}(m, n) = 1$ y de distinta paridad tales que,

$$z = m^2 + n^2, \quad y = m^2 - n^2, \quad x = 2mn. \tag{2.4}$$

Si x, y, z se definen como en (2.4), (x, y, z) es una terna pitagórica. Porque;

$$\begin{aligned} z^2 &= (m^2 + n^2)^2 = m^4 + 2m^2n^2 + n^4, \\ y^2 &= (m^2 - n^2)^2 = m^4 - 2m^2n^2 + n^4, \\ x^2 &= (2mn)^2 = 4m^2n^2, \end{aligned}$$

Claramente x es par y impar y por lo tanto z impar solo falta probar que es primitiva; para ello supongamos que no lo es, por lo tanto existe $d > 1$ en los enteros con

$$d = \mathrm{mcd}(x, y, z);$$

sea p un primo tal que $p \mid d$, luego $p \mid y$, $p \mid z$ entonces

$$p \mid z - y = 2n^2, \quad p \mid y + z = 2m^2,$$

el caso $p = 2$ no se puede dar(porque n, m son de distinta paridad) luego $p \mid n^2$ y $p \mid m^2$, en consecuencia $p \mid n$ y $p \mid m$, lo cual es una contradicción ya que $\mathrm{mcd}(n, m) = 1$. En consecuencia la terna (x, y, z) es pitagórica primitiva. Q.E.D.

Ejemplo 2.2.1 En el Cuadro 2.1, los enteros positivos n y m son relativamente primos con $m > n$ y de distinta paridad, estos generan ternas pitagóricas primitivas (x, y, z):

m	n	x	y	z
2	1	3	4	5
3	2	5	12	13
4	1	15	8	17
4	3	7	24	25
5	2	21	20	29
5	3	16	30	34
6	1	35	12	37
9	6	45	108	117
9	8	17	144	145

Cuadro 2.1: Ternas Pitagóricas Primitivas. Ilustración Teorema de Euclides.

2.3. Lados de un triángulo rectángulo divisibles entre 3, 4, o 5

• Frenicle de Bessy (1675) señaló que si el máximo común divisor de los lados enteros de un triángulo rectángulo es un cuadrado o el doble de un cuadrado, los lados son de la forma (2.4), un lado es divisible por 5, el otro por 3 y el restante por 4. Si los lados son relativamente primos, la suma y diferencia de los catetos son de la forma $8k \pm 1$.

• P. Lenthéric observó que el producto xyz de los números generados por (2.4) es divisible entre 60 dado que $mn(m^2 - n^2)$ es divisible entre 6 y si ninguno de $m, n, m \pm n$ es divisible entre 5, $m^2 + n^2$ lo es.

• L. Poinsont también dijo que si x, y, z son relativamente primos y son soluciones de $x^2 + y^2 = z^2$ entonces 3 es un factor de xy, 4 un factor de xy, y 5 un factor de xyz. Este resultado fue probado por E. R. Grenoble pero considerando los residuos cuadráticos módulo $3, 4$ o 5, y por J. Binet mediante el uso del Teorema de Fermat.

• A. Vermehren probó que xyz es divisible entre 60.

De los anteriores resultados podemos deducir que para las ternas pitagóricas primitivas se cumplen los siguientes resultados:

Teorema 2.1 *En toda terna pitagórica primitiva (x, y, z) con x par y y impar se tiene que:*

a. *La hipotenusa z no es múltiplo de 3.*

b. *Exactamente uno de los catetos es múltiplo de* 3.

c. *El cateto par es múltiplo de* 4.

d. *Exactamente uno de los lados es múltiplo de* 5.

e. *El producto de los lados es múltiplo de* 60.

Demostración.

a. En efecto notemos que $x \equiv 0, 1, 2 \pmod{3}$, $y \equiv 0, 1, 2 \pmod{3}$. Por lo tanto $x^2 \equiv 0, 1 \pmod{3}$, $y^2 \equiv 0, 1 \pmod{2}$, entonces;

$$x^2 + y^2 \equiv 0, 1, 2 \pmod{3}.$$

Como $\text{mcd}(x, y) = 1$, no es posible que $x \equiv y \equiv 0 \pmod{3}$, por lo tanto $x^2 + y^2 \equiv 1, 2 \pmod{3}$, o sea $3 \nmid z^2$, así $3 \nmid z$.

b. Si $3 \mid x$, no es posible que $3 \mid y$ puesto que $\text{mcd}(x, y) = 1$ y no hay nada que probar.

Si $3 \nmid x$ entonces $x^2 \equiv 1 \pmod{3}$ y por (a) $z^2 \equiv 1 \pmod{3}$ luego,

$$z^2 - x^2 \equiv 0 \pmod{3},$$

entonces $y^2 \equiv 0 \pmod{3}$, o sea $3 \mid y^2$, en consecuencia $3 \mid y$.

c. El cateto par de una terna pitagórica primitiva tiene la forma $2mn$ con m, n primos relativos y de distinta paridad, supongamos que m sea par por lo tanto $m = 2k$, para algún entero k, luego $2mn = 4kn$ en consecuencia el cateto par es múltiplo de 4.

d. Para demostrar ahora que siempre uno de ellos es divisible por 5 procedamos de la siguiente manera, observando que si ninguno es múltiplo de 5, se tendría que,

$$x^2 \equiv \pm 1 \pmod{5}, \quad y^2 \equiv \pm 1 \pmod{5}, \quad z^2 \equiv \pm 1 \pmod{5}$$

lo que seria un absurdo, puesto que,

$$x^2 + y^2 \equiv 2, 0, -2 \equiv z^2 \equiv \pm 1 \pmod{3}$$

e. Por (b), (c), (d) se tiene el resultado.
Q.E.D.

Capítulo 3

Algunos problemas interesantes sobre ternas Pitagóricas

3.1. Orígenes de los problemas

A continuación se presentan algunos aportes de matemáticos que intervinieron en la búsqueda de respuesta a la siguiente pregunta.

¿Dado un entero positivo cuántos triángulos pitagóricos primitivos o no primitivos pueden tenerlo como un lado y qué forma debe tener un entero positivo para ser hipotenusa de un triangulo pitagórico?.

• Carl Friedrich Gauss notó que cada número que es hipotenusa en una terna pitagórica y tiene k factores primos distintos en total es hipotenusa en

$$\left[\frac{k}{1}\right] + 2\left[\frac{k}{2}\right] + 2^2\left[\frac{k}{3}\right] + \cdots + 2^{k-1}\left[\frac{k}{k}\right] = \sum_{n=1}^{k} 2^{n-1}\left[\frac{k}{n}\right]$$

diferentes ternas pitagóricas, donde $[x]$ es el mayor entero $\leq x$. Además, enunció el resultado que la cantidad de ternas pitagóricas primitivas que tienen a ese número como hipotenusa es 2^{k-1}.

Ejemplo 3.1.1 Sea $c = 65 = 5 \cdot 13$, luego el número de triángulos pitagóricos que tienen a 65 como hipotenusa es:

$$\sum_{n=1}^{2} 2^{n-1}\left[\frac{2}{n}\right] = 4.$$

Estos triángulos son los formados por las siguientes ternas:

$$(25, 60, 65), (16, 63, 65), (33, 56, 65), (39, 52, 65).$$

Además notemos que $mcd(16, 63, 65) = 1 = \text{mcd}(33, 56, 65)$, $\text{mcd}(25, 60, 65) = 5$, $\text{mcd}(39, 52, 65) = 13$, por lo tanto hay 2 ternas pitagóricas no primitivas que tienen a 65 como hipotenusa y 2 ternas pitagóricas primitivas que tienen a 65 como hipotenusa, lo que coincide con la fórmula 2^{k-1} dada también por Gauss para ternas pitagóricas primitivas.

- O. Meissner afirmó que el número P de triángulos pitagóricos con un cateto $x = 2^m p_1^{m_1} \cdots p_n^{m_n}$ (x factorizado como producto de potencias de primos distintos) dado es:

$$P = P_2 + \frac{m-1}{\left[1 + \frac{1}{m}\right]}(2P_2 + 1), \quad P_2 = \frac{1}{2}\{\prod_{v=1}^{n}(2m_v + 1) - 1\}, \tag{3.1}$$

donde $[a]$ es el mayor entero $\leq a$.

Ejemplo 3.1.2 Sea $x = 60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$, luego el número de triángulos pitagóricos que tienen a 60 como cateto es

$$\begin{aligned} P &= P_2 + \frac{m-1}{\left[1 + \frac{1}{m}\right]}(2P_2 + 1), \quad P_2 = \frac{1}{2}\{\prod_{v=1}^{n}(2m_v + 1) - 1\}, \\ P = &\ \frac{1}{2}\{(2+1)(2+1) - 1\} + \frac{2-1}{\left[1 + \frac{1}{2}\right]}(2 \cdot \frac{1}{2}\{(2+1)(2+1) - 1\} + 1), \\ &= 13. \end{aligned}$$

Simplificando un poco la Ecuación (3.1).

$$\begin{aligned} P &= P_2 + \frac{m-1}{\left[1 + \frac{1}{m}\right]}(2P_2 + 1), \quad P_2 = \frac{1}{2}\{\prod_{v=1}^{n}(2m_v + 1) - 1\}, \\ P = &\ P_2 + (m-1)(2P_2 + 1), \\ &= P_2 + 2(m-1)P_2 + (m-1), \\ &= P_2(2m-1) + (m-1), \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
P &= \frac{1}{2}\{\prod_{v=1}^{n}(2m_v+1)-1\}(2m-1)+(m-1),\\
&= \frac{2m-1}{2}\{\prod_{v=1}^{n}(2m_v+1)\}-\frac{1}{2}(2m-1)+(m-1),\\
&= \frac{2m-1}{2}\{\prod_{v=1}^{n}(2m_v+1)\}-\frac{1}{2},\\
&= \frac{1}{2}\{(2m-1)\prod_{v=1}^{n}(2m_v+1)-1\},\\
&= \frac{1}{2}\{\prod_{v=1}^{n}(2m-1)(2m_v+1)-1\}.
\end{aligned}
$$

En conclusión tenemos que,

$$
P = \frac{1}{2}\{\prod_{v=1}^{n}(2m-1)(2m_v+1)-1\}. \tag{3.2}
$$

Más adelante veremos que la Ecuación (3.2) es la solución para el problema número 2 para el caso par.

• E. Bahier afirmó que si la factorización de x como producto de potencias de primos distintos es $x = p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}p_3^{\alpha_3}\cdots p_n^{\alpha_n}$ con $p_i \neq 2$ para todo i, el número N de triángulos rectángulos con un cateto x dado es

$$
N = 2^0\sum\alpha_i + 2^1\sum_{i\neq j}\alpha_i\alpha_j + 2^2\sum_{i\neq j\neq k}\alpha_i\alpha_j\alpha_k + \cdots + 2^{n-1}\prod\alpha_i \tag{3.3}
$$

Ejemplo 3.1.3 Sea $x = 1105 = 5\cdot 13\cdot 17$, entonces

$$
\begin{aligned}
N =& \; 2^0\sum\alpha_i + 2^1\sum_{i\neq j}\alpha_i\alpha_j + 2^2\sum_{i\neq j\neq k}\alpha_i\alpha_j\alpha_k + 2^{n-1}\prod\alpha_i\\
N =& \; 2^0(1+1+1)+2^1(1\cdot 1+1\cdot 1+1\cdot 1)+2^2(1\cdot 1\cdot 1)\\
=& \; 3+6+4\\
=& \; 13.
\end{aligned}
$$

Ejemplo 3.1.4 Sea $x = 3^2 \cdot 5^3 \cdot 7^4 \cdot 11^2$, es claro que para este caso $n = 4$, $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = 3$, $\alpha_3 = 4$, $\alpha_4 = 2$, reemplacemos estos valores en la siguiente ecuación

$$N = \ 2^0 \sum \alpha_i + 2^1 \sum_{i \neq j} \alpha_i \alpha_j + 2^2 \sum_{i \neq j \neq k} \alpha_i \alpha_j \alpha_k + 2^{n-1} \prod \alpha_i$$

tenemos que

$N = (2+3+4+2) + 2^1(2 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 4 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 2) + 2^2(2 \cdot 3 \cdot 4 + 2 \cdot 3 \cdot 2 + 3 \cdot 4 \cdot 2) + 2^3(2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 2) = 787$, este resultado se puede verificar con la Ecuación (3.4).

Si $p_i = 2$, para algún i sólo tenemos que reemplazar α_i por $\alpha_i - 1$ en la Ecuación (3.3).

Ejemplo 3.1.5 Sea $x = 2250 = 2^1 \cdot 3^2 \cdot 5^3$, luego el número N de triángulos pitagóricos que tienen a 2250 como cateto es

$$\begin{aligned} N = & \ 2^0(0+2+3) + 2^1(0 \cdot 2 + 0 \cdot 3 + 2 \cdot 3) + 2^2(0 \cdot 2 \cdot 3) \\ = & \ 17. \end{aligned}$$

En relación con la pregunta planteada al inicio de esta sección en [1] se encuentran los siguientes problemas:

1. Si a es un entero positivo dado, ¿cuántos triángulos pitagóricos primitivos pueden tenerlo como un cateto?

2. Si a es un entero positivo dado, ¿cuántos triángulos pitagóricos, primitivos o no primitivos, pueden tenerlo como un cateto?

3. ¿Qué forma debe tener un entero para que sea la hipotenusa de un triángulo pitagórico, primitivo o no primitivo?, y ¿de cuántos de triángulos pitagóricos, puede ser la hipotenusa en cada caso?

4. Si a es un entero dado, ¿de cuántos triángulos pitagóricos puede ser o la hipotenusa o un cateto?

5. Encontrar un número, digamos el menor, que pueda ser el cateto de un número especificado de triángulos pitagóricos, por ejemplo 1000 de ellos.

6. Encontrar un número que pueda ser una hipotenusa solamente, o de nuevo, cateto o hipotenusa, de quizás exactamente 1000000 de triángulos pitagóricos.

La solución a estos problemas se presenta a continuación.

3.2. Triángulos pitagóricos con un cateto dado

Problema 1. Si a es un entero dado, ¿cuántos triángulos pitagóricos primitivos pueden tenerlo como un cateto?.

Solución.

Si la descomposición de a en factores primos es

$$a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r},$$

entonces puede ser cateto de 2^{r-1} triángulos pitagóricos primitivos, exceptuando el caso en que el número sea par y de la forma $4x + 2$.

Demostración. Por casos,

- Caso a par. La descomposición de a en factores primos es

$$a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r}, \quad p_i = 2, \quad para \quad algun \quad i \in \mathbb{Z}$$

en este caso sabemos que a es múltiplo de 4 (Teorema 2.1) luego no es posible que a sea de la forma $4x + 2$. Por otro lado por teorema de Euclides tenemos que si (a, b, c) es una terna pitagórica primitiva, existen enteros m, n de distinta paridad, $\text{mcd}(m, n) = 1$ y $m > n$ tales que

$$\begin{aligned} a &= 2mn, \\ b &= m^2 - n^2, \\ c &= m^2 + n^2, \end{aligned}$$

luego

$$a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r} = 2mn,$$

sin perdida de generalidad supongamos que $p_1 = 2$, luego se tendría que

$$\begin{aligned} 2mn &= 2^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r}, \quad \alpha_1 \geq 2, \\ \frac{a}{2} &= mn = 2^{\alpha_1 - 1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r}, \quad \alpha_1 \geq 2, \end{aligned}$$

sea

$$N = \{(m, n) : m, n \in \mathbb{Z}^+, \quad mn = a/2, \quad \text{mcd}(m, n) = 1\},$$

claramente $N \neq \varnothing$ puesto que $(a/2, 1) \in N$. La solución a nuestro problema nos la da el cardinal de N, el cual es igual a 2^r pero como para nuestro caso las parejas $(m_1, n_1), (n_1, m_1) \in N$ solo se cuentan una vez por la propiedad conmutativa del producto, por lo tanto dividimos a 2^r entre 2. Así obtenemos la ecuación 2^{r-1} deseada.

Probemos que el cardinal de N es 2^r. Notemos que $\frac{a}{2} = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r}$, con $\text{mcd}(p_j^{\alpha_j}, p_i^{\alpha_i}) = 1, \quad para \quad i \neq j.$

Reordenando y renombrando los productos de primos $p_i^{\alpha_i}$, construimos m agrupando los k primeros primos $(0 \leq k \leq r)$ y tenemos

$$m = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}, \quad n = p_{k+1}^{\alpha_{k+1}} p_{k+2}^{\alpha_{k+2}} \cdots p_r^{\alpha_r}.$$

Como m se construye usando k de los r primos, el número de formas en que se puede obtener m para cada k es $\binom{r}{k}$ (Análogamente, n se puede construir de $\binom{r}{r-k}$ maneras y sabemos que $\binom{r}{k} = \binom{r}{r-k}$).

Haciendo variar k entre 0 y r obtenemos el total de posibilidades para obtener m,

$$\binom{r}{0} + \binom{r}{1} + \cdots + \binom{r}{r} = 2^r.$$

Así el número de combinaciones de los r primos es igual 2^r y esto finaliza la prueba.

- Caso a impar. La descomposición de a en factores primos es

$$a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r}, \quad p_i \neq 2.$$

Por teorema de Euclides tenemos que si a es el cateto impar entonces tiene la forma $a = m^2 - n^2$ con $m + n \equiv 1 \pmod 2$, luego

$$a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r} = m^2 - n^2 = (m-n)(m+n).$$

Considerando

$$A = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{Z}^+, \quad xy = a, \quad \text{mcd}(x, y) = 1\},$$

y tratándolo como al conjunto N de la primera parte, llegamos al resultado deseado. Q.E.D.

Ejemplo 3.2.1 Sea $a = 60$, podemos observar que es el producto de potencias de tres primos $(60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5)$. Entonces 60 puede ser cateto de $2^{3-1} = 4$ triángulos pitagóricos primitivos.

Como a es par entonces,

$$\begin{aligned} a &= 2mn = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 60, \\ 30 &= mn = 2 \cdot 3 \cdot 5. \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} N &= \{(m,n) : mn = \frac{a}{2} = 30, \mathrm{mcd}(m,n) = 1\}, \\ &= \{(30,1), (15,2), (10,3), (6,5)\}. \end{aligned}$$

Luego,

- Para $m = 30, n = 1$ se genera la terna pitagórica primitiva $(60, 899, 901)$.
- Para $m = 15, n = 2$ se genera la terna pitagórica primitiva $(60, 221, 229)$.
- Para $m = 10, n = 3$ se genera la terna pitagórica primitiva $(60, 91, 109)$.
- Para $m = 6, n = 5$ se genera la terna pitagórica primitiva $(60, 11, 61)$.

Por lo tanto estas son las 4 ternas pitagóricas primitivas que tienen a 60 como cateto.

Ejemplo 3.2.2 Sea $a = 15$ podemos observar que es el producto de potencias de dos primos $(15 = 3 \cdot 5)$. Entonces 15 puede ser cateto de $2^{2-1} = 2$ triángulos pitagóricos primitivos.

Como 15 es el cateto impar, por teorema de Euclides tenemos que:

$$\begin{aligned} a &= m^2 - n^2 = 3 \cdot 5, \\ 15 &= (m-n)(m+n) = 3 \cdot 5. \end{aligned}$$

Llamando $m + n = x$, $m - n = y$, tenemos que $\mathrm{mcd}(x, y) = 1$ puesto que m, n son relativamente primos. Entonces

$$\begin{aligned} N &= \{(x,y) : xy = a, \mathrm{mcd}(x,y) = 1, \}, \\ &= \{(5,3), (15,1)\}, \end{aligned}$$

para la primer pareja tenemos $m + n = 5$, $m - n = 3$, por lo tanto $m = 4$ y $n = 1$, que generan la terna pitagórica primitiva $(8, 15, 17)$.

Luego para la segunda pareja tenemos $m + n = 15$, $m - n = 1$, así $m = 8$ y $n = 7$ que generan la terna pitagórica primitiva $(15, 112, 113)$.

En conclusión las ternas pitagóricas primitivas que tienen a 15 como cateto son: $(8, 15, 17)$ y $(15, 112, 113)$.

Ejemplo 3.2.3 Sea $a = 5040$, ¿cuántos triángulos pitagóricos primitivos lo tiene como cateto?.

Como $5040 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$ hay 4 primos luego tenemos $2^{4-1} = 8$ triángulos pitagóricos primitivos que tienen a 5040 como cateto. Para encontrar los triángulos procederíamos de la misma manera como en el Ejemplo 3.2.1.

Problema 2. Si a es un entero dado, ¿cuántos triángulos pitagóricos, primitivos o no primitivos, pueden tenerlo como un cateto?.

Solución.

Supongamos que tenemos el entero 10 y deseamos saber de cuántos triángulos pitagóricos es cateto. Es decir, necesitamos saber cuántas soluciones tiene la ecuación

$$a^2 + 10^2 = c^2.$$

Para hallar las soluciones podemos hacer lo siguiente:

$$\begin{aligned} 10^2 &= c^2 - a^2, \\ 100 &= (c - a)(c + a), \end{aligned}$$

lo anterior nos quiere decir que $(c - a)$ y $(c + a)$ pertenecen al conjunto de los divisores de 100. Por lo tanto calculemos todos los divisores de 100, haciendo la descomposición de 100 en factores primos,

$$100 = 5^2 \cdot 2^2 = (c - a)(c + a),$$

sabemos que 100 tendrá $(2 + 1)(2 + 1) = 9$ divisores, los cuales son:

$$A = \{1, 100, 2, 50, 4, 25, 5, 20, 10\};$$

como queremos darle solución a la ecuación

$$100 = (c - a)(c + a)$$

tomemos parejas de números de tal manera que el producto de sus componentes nos de 100 estas son $(1,100),(2,50),(4,25),(5,20),(10,10)$ y planteemos el sistemas de ecuaciones 2×2

$$\begin{aligned}(c-a) &= x\\ (c+a) &= y,\end{aligned}$$

donde $x,y\in A$ y $xy=100$, además $x\equiv y \pmod 2$ puesto que $y-x=(c+a)-(c-a)=2a$.

En términos conjuntistas definamos el conjunto P así. Sea

$$\begin{aligned}P &= \{(x,y) : x,y\in A,\quad xy=100,\quad x\equiv y \pmod 2\},\\ &= \{(d,\frac{100}{d}) : d\in A,\quad \frac{100}{d}\equiv d \pmod 2\}.\end{aligned}$$

luego los únicos divisores de 100 para que el sistema tenga soluciones enteras son $x=2, y=50$ por tanto,

$$\begin{aligned}(c-a) &= 2\\ (c+a) &= 50.\end{aligned}$$

La solución es $a=24$ y $c=26$, luego la única terna pitagórica que tiene a 10 como cateto es $(24,10,26)$.

Ahora en general,

- Si a es impar y la descomposición de a en factores primos es

$$a=p_0^{a_0}\cdot p_1^{a_1}\cdot p_2^{a_2}\dots p_n^{a_n},$$

el número L^* de triángulos pitagóricos en que a puede ser cateto nos lo da la siguiente fórmula,

$$L^*=\frac{(2a_0+1)(2a_1+1)(2a_2+1)\dots(2a_n+1)-1}{2}. \tag{3.4}$$

Para probar la anterior afirmación notemos que el número k de divisores de a es

$$k=(a_0+1)(a_1+1)\cdots(a_n+1),$$

por lo tanto el número de divisores de a^2 es

$$(2a_0+1)(2a_1+1)\cdots(2a_n+1).$$

Denotemos por $D(a^2)$ todos los divisores de a^2. Por otro lado como a es un cateto de una terna pitagórica, entonces existen $b, c \in \mathbb{Z}$ tales que:

$$\begin{aligned} c^2 &= b^2+a^2, \\ a^2 &= c^2-b^2=(c-b)(c+b)=p_0^{2a_0}\cdot p_1^{2a_1}\cdot p_2^{2a_2}\dots p_n^{2a_n}, \end{aligned}$$

luego planteemos el siguiente sistemas de ecuaciones 2×2

$$\begin{aligned} (c-b) &= x \\ (c+b) &= y, \end{aligned}$$

donde $x, y \in D(a^2)$, $xy=a^2$ y $x \equiv y \pmod 2$ puesto que $y-x=(c+b)-(c-b)=2b$.

Definamos el conjunto P. Así,

$$\begin{aligned} P &= \{(x,y) : x, y \in D(a^2), \quad xy=a^2, \quad x\equiv y \pmod 2\}, \\ &= \{(d, \frac{a^2}{d}) : d \in D(a^2), \quad \frac{a^2}{d}\equiv d \pmod 2\}. \end{aligned}$$

El cardinal del conjunto P es igual al número de divisores de a^2 puesto que al ser a^2 impar todos sus factores son impares. Además en la solución de nuestro problema las parejas $(x,y),(y,x)$ solo las contaremos una vez y la solución (a,a) no sirve (la solución (a,a) conduce a una terna trivial). Por lo tanto el número L^* de triángulos rectángulos que tienen a a como cateto es

$$L^*=\frac{(2a_0+1)(2a_1+1)(2a_2+1)\dots(2a_n+1)-1}{2}.$$

Además, para cada pareja (x,y) en la correspondiente terna pitagórica tenemos que $b=\frac{y-x}{2}$ y $c=\frac{y+x}{2}$. Q.E.D.

Ejemplo 3.2.4 Dado el entero 45 ¿cuántos triángulos pitagóricos, primitivos o no primitivos, pueden tenerlo como un cateto?. La solución es 7, puesto que: $45=3^2\cdot 5$, luego

$$L^*=\frac{(2\cdot 2+1)\cdot(2\cdot 1+1)-1}{2}=7.$$

Por lo tanto hay 7 triángulos pitagóricos, primitivos o no primitivos que lo tienen como un cateto.

- Si a es par y la descomposición de a en factores primos es

$$a = 2^{a_0} \cdot p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \ldots p_n^{a_n},$$

el número de triángulos en que a puede ser cateto nos lo da la siguiente fórmula,

$$L = \frac{(2a_0 - 1)(2a_1 + 1)(2a_2 + 1) \ldots (2a_n + 1) - 1}{2}, \tag{3.5}$$

la cual coincide con la Fórmula (3.2) dada por O. Meissner. En efecto, denotemos nuevamente por $D(a^2)$ a todos los divisores de a^2. Por otro lado como a es cateto de una terna pitagórica, entonces existen $b, c \in \mathbb{Z}$, tales que:

$$\begin{aligned} c^2 &= b^2 + a^2, \\ a^2 &= c^2 - b^2 = (c-b)(c+b) = 2^{2a_0} \cdot p_1^{2a_1} \cdot p_2^{2a_2} \ldots p_n^{2a_n}. \end{aligned}$$

Planteemos el sistema de ecuaciones 2×2

$$\begin{aligned} (c - a) &= x, \\ (c + a) &= y, \end{aligned}$$

donde $x, y \in D(a^2)$, $xy = a^2$ y $x \equiv y \pmod 2$, puesto que $y - x = (c + a) - (c - a) = 2a$.

Definamos nuevamente el conjunto P. Así,

$$\begin{aligned} P &= \{(x, y) : x, y \in D(a^2), \quad xy = a^2, \quad x \equiv y \pmod 2\}, \\ &= \{(d, \frac{a^2}{d}) : d \in D(a^2), \quad \frac{a^2}{d} \equiv d \pmod 2\}. \end{aligned}$$

Es claro que el único par en la descomposición de a^2 es 2^{2a_0} por lo tanto ninguna potencia $p_i^{u_j}$ con $1 < i < n$, $1 < u_j < a_i$ hace parte de una pareja que esté en P. Luego el conjunto P es:

$$\begin{aligned} P &= \{(x, y) : x, y \in D(a^2), \quad xy = a^2, \quad x, y \quad pares\}, \\ &= \{(d, \frac{a^2}{d}) : d \in D(a^2), \quad \frac{a^2}{d}, d \quad pares\}, \end{aligned}$$

luego el cardinal del conjunto P es igual al número de divisores de a^2 menos el número de parejas que se pueden construir tomando un factor de $p_1^{2a_1} \cdot$

$p_2^{2a_2} \dots p_n^{2a_n}$ el cual se cuenta dos veces. Además la solución (a, a) no nos interesa y las parejas $(x, y), (y, x)$ solo se contaran una vez suponiendo $x < y$. Por lo tanto el número L de triángulos rectángulos que tienen a a como cateto es.

$$\begin{aligned}
L &= \frac{(2a_0+1)(2a_1+1)\dots(2a_n+1) - 2(2a_1+1)\dots(2a_n+1) - 1}{2} \\
&= \frac{(2a_0+1-2)(2a_1+1)\dots(2a_n+1) - 1}{2} \\
&= \frac{(2a_0-1)(2a_1+1)\dots(2a_n+1) - 1}{2}.
\end{aligned}$$

Además, para cada pareja (x, y) en la correspondiente terna pitagórica tenemos que $b = \frac{y-x}{2}$ y $c = \frac{y+x}{2}$. Q.E.D.

Ejemplo 3.2.5 Dado el entero 60, ¿cuántos triángulos pitagóricos, primitivos o no primitivos, pueden tenerlo como un cateto?. La solución es 13, puesto que: $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$ luego,

$$L = \frac{(2 \cdot 2 - 1)(2 \cdot 1 + 1)(2 \cdot 1 + 1) - 1}{2} = \frac{(3 \cdot 3 \cdot 3) - 1}{2} = 13.$$

Por lo tanto hay 13 triángulo pitagórico que tienen a 60 como cateto.

3.3. Triángulos pitagóricos con hipotenusa dada

Problema 3. ¿Qué forma debe tener un entero para que sea la hipotenusa de un triángulo pitagórico, primitivo o no primitivo y de cuántos de tales triángulos puede ser la hipotenusa en cada caso?.

Solución.

Para el problema 3, únicamente son los números enteros positivos c que podemos escribir en la forma,

$$c = K \cdot (m^2 + n^2) \tag{3.6}$$

tales hipotenusas pueden ser $5, 10, 13, 15$, etc.

Estos enteros son hipotenusas de triángulos pitagóricos primitivos o no primitivos. Este problema fue resuelto y su primera solución satisfactoria fue dada por Euler en 1747. [3].

Como es usual comenzamos investigando el caso de los primos. Pero antes necesitamos algunos resultados de la teoría de números que serán de mucha utilidad a la hora de la prueba. El siguiente teorema nos cuenta que el conjunto cuyos elementos tienen la propiedad de ser la suma de dos cuadrados de números naturales es cerrado bajo el producto.

Teorema 3.3.1 *Si un entero* $\boldsymbol{x}$ *puede ser escrito como la suma de dos cuadrados de números naturales y un entero* $\boldsymbol{y}$ *puede ser escrito como la suma de dos cuadrados de números naturales, entonces* $\boldsymbol{xy}$ *puede ser escrito como la suma de dos cuadrados de números naturales.*

Demostración. Es suficiente con chequear la siguiente identidad

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac + bd)^2 + (bc - ad)^2.$$

Q.E.D.

Teorema 3.3.2 *Sea* p *un primo. Entonces* p *puede ser escrito como la suma de dos cuadrados de números naturales si y sólo si* $p = 2$ *o* $p \equiv 1 \pmod 4$.

Demostración.

Sea p un primo tal que $p = a^2 + b^2$ para algunos números naturales a y b y probemos que $p = 2$ o $p \equiv 1 \pmod 4$.

Dado un entero n, se tiene $n^2 \equiv 0, 1 \pmod 4$. Supongamos que $p = a^2 + b^2$, como $a^2, b^2 \equiv 0, 1 \pmod 4$, entonces $a^2 + b^2 \equiv 0, 1, 2 \pmod 4$. Pero ningún primo es congruente con $0 \pmod 4$ y como 2 es el único primo congruente con $2 \pmod 4$, se sigue que $p = 2$ o $p \equiv 1 \pmod 4$.

Ahora probemos la otra implicación, supongamos que p es un primo tal que $p = 2$ o $p \equiv 1 \pmod 4$ y probemos que $p = a^2 + b^2$ para algunos números naturales a y b. Si $p = 2$ basta con tomar $a = b = 1$, entonces p es suma de cuadrados.

Si $p \equiv 1 \pmod 4$ entonces desde la teoría de residuos cuadráticos tenemos que -1 es un cuadrado módulo p, por lo tanto existe un $x \in \mathbb{Z}$, tal que:

$$x^2 \equiv -1 \pmod p, \quad 1 \leq x \leq p - 1$$

es decir existe $m \in \mathbb{Z}^+$ tal que $x^2 + 1 = mp$.

Sea,

$$M = \{k \in \mathbb{Z}^+ : kp = x^2 + y^2, \quad para \quad algunos \quad x, y \in \mathbb{Z}^+, 1 \leq k \leq p - 1\},$$

claramente $M \neq \varnothing$ puesto que $m \in M$.

Sea m_0 el menor entero en M y mostraremos que $m_0 = 1$ por lo tanto p es la suma de dos cuadrados.

Por contradicción supongamos que $m_0 > 1$ y escribamos $m_0 p = x^2 + y^2$ donde,

$$\begin{aligned} x &= cm_0 + x_1, \\ y &= dm_0 + y_1, \end{aligned}$$

con $c, d \in \mathbb{Z}$ y $\frac{-m_0}{2} < x_1,\, y_1 \leq \frac{m_0}{2}$, observemos que x_1, y_1 son distintos de cero,

$$m_0 p = x^2 + y^2 = m_0^2(c^2 + d^2)$$

no es posible. Por otro lado tenemos que,

$$0 < x_1^2 + y_1^2 \leq \frac{m_0^2}{4} + \frac{m_0^2}{4} = \frac{m_0^2}{2} < m_0^2$$

y

$$x_1^2 + y_1^2 \equiv x^2 + y^2 \equiv 0 \pmod{m_0}$$

así $x_1^2 + y_1^2 = m_0 m_1$, $1 \leq m_1 < m_0$ pero $x^2 + y^2 = pm_0$ así

$$m_0^2 m_1 p = (x_1^2 + y_1^2)(x^2 + y^2),$$

luego por Teorema (3.3.1) tenemos que,

$$m_0^2 m_1 p = (xx_1 + yy_1)^2 + (xy_1 - yx_1)^2, \tag{3.7}$$

y también tenemos que

$$\begin{aligned} xx_1 + yy_1 &= x(x - cm_0) + y(y - dm_0), \\ &= (x^2 + y^2) - m_0(xc + yd), \\ &= m_0 p - m_0(xc + yd), \\ &= m_0(p - (xc + yd)), \\ &= m_0 t \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} xy_1 - yx_1 &= x(y - dm_0) - y(x - cm_0), \\ &= xy - xdm_0 - xy + ycm_0, \\ &= m_0(yc - xd), \\ &= m_0 u. \end{aligned}$$

Luego por la Ecuación (3.7) y los anteriores resultados se tiene que:

$$\begin{aligned} m_0^2 m_1 p &= (m_o t)^2 + (m_o u)^2, \\ m_1 p &= t^2 + u^2, \quad t, u \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Por lo tanto existen t, u, enteros tales que $m_1 p = t^2 + u^2$ con $1 \leq m_1 < m_0$ lo cual contradice que m_0 era el mínimo. Por lo tanto $m_0 = 1$ y con ello termina la demostración.

Para ser la hipotenusa de un triángulo pitagórico primitivo el valor de K en la Fórmula (3.6) debe ser restringido a la unidad y m, n deben ser enteros relativamente primos y de distinta paridad. Ahora estudiemos un teorema importante de las ternas pitagóricas primitivas, pero antes de esto daremos a conocer dos teoremas que serán de importancia en la prueba y sus demostraciones pueden ser vistas en [4].

Teorema 3.3.3 *Si* $\operatorname{mcd}(r, s) = d$ *entonces la congruencia* $rx \equiv l \pmod{s}$ *tiene solución si y sólo si* $d \mid l$. *Además tiene* d *soluciones. En particular, si* $\operatorname{mcd}(r, s) = 1$ *la congruencia tiene una solución.*

Teorema 3.3.4 *El número -1 es un residuo cuadrático de primos de la forma* $4k + 1$ *y no es un residuo cuadrático de primos de la forma* $4k + 3$.

Teorema 3.3.5 *Si* $p = 4k + 3$ *y* $p \mid c$, *entonces* c *no es hipotenusa de ninguna terna pitagórica primitiva.*

Demostración. Si (a, b, c) es una terna pitagórica primitiva, entonces existen enteros positivos m, n de distinta paridad además relativamente primos tales que $c = m^2 + n^2$. Si p es un primo impar tal que $p \mid c$ entonces $p \mid (m^2 + n^2)$ y como n, m son relativamente primos entonces $p \nmid m$ y $p \nmid n$. Por Teorema 3.3.3 existe un número l talque $ml \equiv n \pmod{p}$; elevando al cuadrado y sumando m^2 llegamos a

$$m^2(1 + l^2) \equiv m^2 + n^2 \equiv 0 \pmod{p}$$

y por consiguiente

$$(1 + l^2) \equiv 0 \pmod{p}$$

luego -1 es un residuo cuadrático módulo p y por Teorema 3.3.4. p es de la forma $4k + 1$. Q.E.D.

Teorema 3.3.6 *Si un entero no tiene ningún divisor primo de la forma $4k + 1$ entonces su cuadrado no puede ser escrito como la suma de dos cuadrados de números enteros positivos (es decir, el número no es hipotenusa de ningún triángulo pitagórico).*

Demostración. La demostración es inmediata por el Teorema 3.3.5 puesto que toda terna pitagórica se puede calcular a partir de una terna pitagórica primitiva.Q.E.D.

Luego para triángulos pitagóricos primitivos la hipotenusa será igual a un entero en donde sus divisores primos son todos de la forma $4x + 1$ tales como $5, 13, 65, 85$, etc.

Teorema 3.3.7 *Un número natural n es la suma de dos cuadrados enteros si y sólo si todo factor primo p de n de la forma $p \equiv 3 \pmod{4}$ aparece elevado a un exponente par en la descomposición de n en factores primos.*

Demostración.

Supongamos $n = 2^{k_0} p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_j^{k_j}$ luego

$$n = 2^{k_0} p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_j^{k_j} = 2^{k_0} n_1 \cdot n_2$$

donde n_1 es producto de factores primos congruentes con 1 módulo 4, por Teorema 3.3.2 cada factor de n_1 es suma de dos cuadrados en consecuencia n_1 es suma de dos cuadrados por Teorema 3.3.1, y n_2 es producto de factores primos congruentes con 3 módulo 4 y que están elevados a un exponente par así $n_2 = p_i^{2\alpha_i} \cdots p_r^{2\alpha_r} = (p_i^{\alpha_i} \cdots p_r^{\alpha_r})^2 = \beta^2$, además 2 es suma de dos cuadrados luego

$$\begin{aligned} n &= 2^{k_0} n_1 \cdot n_2, \\ &= (1^2 + 1^2)^{k_0} (x^2 + y^2) \beta^2, \\ &= (1^2 + 1^2)^{k_0} ((x\beta)^2 + (y\beta)^2), \end{aligned}$$

aplicando nuevamente el Teorema 3.3.1 se llega a que n es suma de dos cuadrados. En el caso que $k_0 = 0$ la demostración no se altera. Q.E.D.

La demostración de la otra implicación del teorema 3.3.7 se encuentra en [4] como Teorema 366 en la pagina 395, no presentamos la demostración porque nos aleja un poco del tema.

Por lo tanto números como $15, 21$ y 39 no son suma de dos cuadrados por que al menos uno de los divisores es 3 que es de la forma $4x + 3$ y no está elevado a un exponente par. Ahora estamos listos para darle solución a la segunda parte del problema 3.

• Si un número N tiene un total de n divisores primos distintos y cada uno es de la forma $4x + 1$ o sea:

$$N = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdots p_n^{a_n},$$

entonces N puede ser la hipotenusa de 2^{n-1} triángulos pitagóricos primitivos.

Ejemplo 3.3.1 El entero $1105 = 5 \cdot 13 \cdot 17$ puede ser la hipotenusa de $2^{3-1} = 4$ triángulos pitagóricos primitivos. Los cuales son:

$$\begin{aligned}
1105 &= [(1^2 + 2^2)(2^2 + 3^2)](1^2 + 4^2), \\
&= [(2 + 6)^2 + (4 - 3)^2)](1^2 + 4^2), \\
&= (8^2 + 1^2)(1^2 + 4^2), \\
&= [(8 + 4)^2 + (1 - 32)^2)], \\
&= (12)^2 + (31)^2,
\end{aligned}$$

luego $m = 31$ y $n = 12$ entonces la terna pitagórica primitiva es $(744, 817, 1105)$. Por otro lado

$$\begin{aligned}
1105 &= [(2^2 + 1^2)(2^2 + 3^2)](1^2 + 4^2), \\
&= [(4 + 3)^2 + (2 - 6)^2)](1^2 + 4^2), \\
&= (7^2 + 4^2)(1^2 + 4^2), \\
&= [(7 + 16)^2 + (4 - 28)^2)], \\
&= (23)^2 + (24)^2,
\end{aligned}$$

así $m = 24$ y $n = 23$ entonces la terna pitagórica primitiva es $(1104, 49, 1105)$. continuando este proceso tenemos que,

$$\begin{aligned}
1105 &= [(2^2 + 1^2)(2^2 + 3^2)](4^2 + 1^2), \\
&= [(3 + 4)^2 + (2 - 6)^2)](1^2 + 4^2), \\
&= (7^2 + 4^2)(1^2 + 4^2), \\
&= [(28 + 4)^2 + (16 - 7)^2)], \\
&= (32)^2 + (9)^2,
\end{aligned}$$

entonces $m = 32$ y $n = 9$ luego la terna pitagórica primitiva es $(576, 943, 1105)$. Y por último

$$\begin{aligned}
1105 &= [(1^2 + 2^2)(2^2 + 3^2)](4^2 + 1^2), \\
&= [(2 + 6)^2 + (4 - 3)^2)](1^2 + 4^2), \\
&= (8^2 + 1^2)(4^2 + 1^2), \\
&= [(32 + 1)^2 + (4 - 8)^2)], \\
&= (33)^2 + (4)^2,
\end{aligned}$$

así $m = 33$ y $n = 4$ entonces la terna pitagórica primitiva es $(264, 1073, 1105)$. Las demás combinaciones posibles siempre caerán en una de las soluciones ya encontradas.

En conclusión las ternas pitagóricas primitivas que tienen a 1105 como hipotenusa son: $(744, 817, 1105)$, $(1104, 49, 1105)$, $(576, 943, 1105)$, $(264, 1073, 1105)$.

Ahora analicemos cuándo un número N puede ser hipotenusa de triángulos pitagóricos.

- Si la descomposición de N en factores primos es:

$$N = 2^{a_0} \cdot p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdots p_n^{a_n} \cdot q_1^{b_1} \cdot q_2^{b_2} \cdots q_r^{b_r},$$

donde los p_s son primos de la forma $4x + 3$ y los q_s son primos de la forma $4x + 1$, N puede ser hipotenusa de,

$$H = \frac{(2b_1 + 1)(2b_2 + 1) \cdots (2b_r + 1) - 1}{2}, \tag{3.8}$$

triángulos pitagóricos.

En efecto, ya que $2^{a_0} \cdot p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdots p_n^{a_n}$ se toma como una constante k y todos los $q_i^{a_i}$ son suma de dos cuadrados por Teorema 3.3.2 y por Teorema 3.3.1 el producto de los $q_i^{a_i}$ es suma de dos cuadrados luego

$$\begin{aligned}
N &= 2^{a_0} \cdot p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdots p_n^{a_n} \cdot q_1^{b_1} \cdot q_2^{b_2} \cdots q_r^{b_r}, \\
N &= k \cdot q_1^{b_1} \cdot q_2^{b_2} \cdots q_r^{b_r}, \\
N^2 &= k^2 \cdot q_1^{2b_1} \cdot q_2^{2b_2} \cdots q_r^{2b_r}, \\
N^2 &= k^2 \cdot M,
\end{aligned}$$

donde cada uno de los factores de M es una suma de dos cuadrados. Definamos el conjunto C. Así,

$$C = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{Z}^+, \quad xy = M = \frac{N^2}{k^2}\}.$$

El cardinal del conjunto C es igual al número de divisores de M el cual es $(2b_1+1)(2b_2+1)\cdots(2b_r+1)$ de acuerdo con el problema 2 caso impar, además en la solución de nuestro problema la solución (a,a) no se cuenta (la solución (a,a) ya esta incluida en la solución $(M,1)$) y las parejas $(x,y),(y,x)$ solo las contaremos una vez. Por lo tanto el número H de triángulos pitagóricos de los cuales N puede ser hipotenusa es

$$H = \frac{(2b_1+1)(2b_2+1)\cdots(2b_r+1)-1}{2} \tag{3.9}$$

Q.E.D.

Ejemplo 3.3.2 Si $N = 1105 = 5\cdot 13\cdot 17$ calculemos de cuántos triángulos pitagóricos es hipotenusa.

Considerando los exponentes de 5, 13 y 17 tenemos,

$$H = \frac{(2\cdot 1+1)(2\cdot 1+1)(2\cdot 1+1)-1}{2} = 13.$$

Así que N puede ser hipotenusa de 13 triángulos pitagóricos.

Para calcular las ternas pitagóricas no primitivas que tiene a 1105 como hipotenusa procedemos de la siguiente forma.

Como $1105 = 5\cdot 13\cdot 17$ entonces dividimos $\frac{1105}{5} = 13\cdot 17 = 221$. Así 221 está como hipotenusa en $2^{2-1} = 2$ ternas pitagóricas primitivas entonces,

$$\begin{aligned} 221 &= (2^2+3^2)(1^2+4^2), \\ &= (2+12)^2+(3-8)^2), \\ &= 14^2+5^2 \end{aligned}$$

así $m = 14$ y $n = 5$ que genera la terna pitagórica primitiva $(140, 171, 221)$ que al multiplicada por 5 (cabe aclarar que no sirve multiplicar la terna $(140, 171, 221)$ por 2^2+1^2 porque caemos en las ternas pitagóricas primitivas calculadas en el ejemplo anterior) nos genera la terna pitagórica $(700, 855, 1105)$ que tiene a 1105 como hipotenusa, por otro lado

$$\begin{aligned} 221 &= (3^2+2^2)(1^2+4^2), \\ &= (3+8)^2+(2-12)^2), \\ &= 11^2+10^2. \end{aligned}$$

por lo tanto tenemos que $m = 11$ y $n = 10$ que genera la terna pitagórica primitiva $(220, 21, 221)$ que al multiplicada por 5 (cabe aclarar que no sirve multiplicar la terna $(220, 21, 221)$ por $2^2 + 1^2$ porque caemos en las ternas pitagóricas primitivas calculadas en el ejemplo anterior) resulta la terna pitagórica $(1100, 105, 1105)$ que tiene a 1105 como hipotenusa.

Por otro lado se generan cuatro ternas más dividiendo 1105 entre 13 y 17 y haciendo el proceso anterior, para encontrar las que faltan se divide 1105 entre $13 \cdot 17$, $13 \cdot 5$, $5 \cdot 17$ y así se obtienen tres ternas más para un total de 9 triángulos pitagóricos no primitivos que tienen a 1105 como hipotenusa y por el Ejemplo (3.3.1) tenemos cuatro triángulos pitagóricos primitivos para un total de 13 triángulos pitagóricos.

En la Tabla 4.5 se listan todas las ternas pitagóricas que tienen a 1105 como hipotenusa con $a < b < c$.

a	b	c
744	817	1105
49	1104	1105
576	943	1105
264	1073	1105
700	855	1105
105	1100	1105
561	952	1105
272	1071	1105
468	1001	1105
169	1092	1105
663	884	1105
520	975	1105
425	1020	1105

Tabla 4.5 Triángulos pitagóricos que tienen a 1105 como hipotenusa

Ejemplo 3.3.3 Si $N = 2^5 \cdot 3^5 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 11^3 \cdot 13^2$, calculemos de cuántos triángulos pitagóricos es hipotenusa.

Descartemos los primos $2, 3, 7, 11$ y consideremos los exponentes de 5 y 13 únicamente, tenemos,

$$H = \frac{(2 \cdot 1 + 1)(2 \cdot 2 + 1) - 1}{2} = 7,$$

así que N puede ser hipotenusa únicamente de siete triángulos pitagóricos.

3.4. Triángulos pitagóricos con un lado dado

Problema 4. Si a es un entero dado, ¿de cuántos triángulos pitagóricos puede ser la hipotenusa o un cateto?.

Solución.

Para darle solución al problema 4 veremos la forma que tiene el entero a

• Si a tiene un total de n divisores primos distintos esto es,

$$a = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdots p_n^{a_n},$$

entonces a puede ser cateto de 2^{n-1} triángulos pitagóricos primitivos por problema 1. Además si cada uno de los p_i es de la forma $4x+1$, entonces a puede ser hipotenusa de 2^{n-1} triángulos pitagóricos primitivos por la primera parte del problema 3.

Luego para saber de cuántos triángulos pitagóricos primitivos a puede ser la hipotenusa o un cateto, sumamos la cantidad de veces en las que a puede ser cateto con la cantidad de veces en las que a puede ser hipotenusa para un total de 2^n formas en las que a puede ser lado de un triángulo pitagórico primitivo.

• Si a tiene la siguiente descomposición en factores primos

$$a = 2^{a_0} \cdot p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdots p_n^{a_n} \cdot q_1^{b_1} \cdot q_2^{b_2} \cdots q_r^{b_r},$$

entonces a puede ser cateto de

$$C = \frac{(2a_0-1)(2a_1+1)(2a_2+1)\ldots(2a_n+1)(2b_1+1)\cdots(2b_r+1)-1}{2}$$

triángulos pitagóricos primitivos o no primitivos por problema dos, además si los p_s son primos de la forma $4x+3$ y los q_s son primos de la forma $4x+1$, entonces por la segunda parte del problema tres a puede ser la hipotenusa de:

$$H = \frac{(2b_1+1)(2b_2+1)\cdots(2b_r+1)-1}{2}$$

triángulos pitagóricos.

Luego para saber de cuántos triángulos pitagóricos un número entero a puede ser la hipotenusa o un cateto, sumamos la cantidad de maneras en que a puede ser cateto con la cantidad de formas en que a puede ser hipotenusa de un triángulo pitagórico.

Ejemplo 3.4.1 Si $N = 2^5 \cdot 3^5 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 11^3 \cdot 13^2$, calculemos de cuántos triángulos pitagóricos es hipotenusa o cateto.

Descartemos los primos $2, 3, 7, 11$ y consideremos los exponentes de 5 y 13 únicamente, tenemos,

$$H = \frac{(2 \cdot 1 + 1)(2 \cdot 2 + 1) - 1}{2} = 7.$$

Así que N puede ser hipotenusa únicamente de siete triángulos pitagóricos no primitivos y N puede ser cateto de

$$\begin{aligned} C &= \frac{(2 \cdot 5 - 1)(2 \cdot 5 + 1)(2 \cdot 1 + 1)(2 \cdot 1 + 1)(2 \cdot 3 + 1)(2 \cdot 2 + 1) - 1}{2}, \\ &= 15592 \end{aligned}$$

triángulos pitagóricos primitivos o no primitivos, para un total de 15599 formas en las que $2^5 \cdot 3^5 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 11^3 \cdot 13^2$ puede ser lado de triángulos pitagóricos.

3.5. Dos problemas relacionados

Problema 5. Encontrar el menor número que pueda ser el cateto de una cantidad dada de triángulos pitagóricos, por ejemplo 1000 de ellos.

Solución.

El Problema 5 es el recíproco del problema 2. De la Fórmula (3.5) tenemos que si un número N tiene factorización como producto de primos,

$$N = 2^{a_0} \cdot p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdots p_n^{a_n}$$

y L es el número de triángulos pitagóricos en los cuales puede ser cateto, entonces

$$2L + 1 = (2a_0 - 1)(2a_1 + 1)(2a_2 + 1) \cdots (2a_n + 1).$$

Luego dado un número L, podemos encontrar un número N que puede ser el cateto de L triángulos pitagóricos. Como la idea es encontrar la menor solución por lo tanto expresemos $2L+1$ como producto de factores primos con repeticiones, $2L + 1 = c_o \cdot c_1 \cdot c_2 \cdot c_3 \cdots c_k$ con $c_o \geq c_1 \geq c_2 \geq c_3 \geq \cdots \geq c_k$, y tomemos

$$a_o = (c_o + 1)/2, a_1 = (c_1 - 1)/2, a_3 = (c_3 - 1)/2, \cdots, a_k = (c_k - 1)/2$$

entonces

$$N = 2^{a_0} \cdot p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdots p_k^{a_k}$$

es solución, donde los primos p_i los seleccionaremos de forma creciente. Generalmente este método nos da la menor solución, pero no siempre; hay unos casos en que el método falla, más adelante veremos un ejemplo.

Ejemplo 3.5.1 Encontrar el menor número N que sea el cateto de $L = 52$ triángulos pitagóricos.

Expresemos $2L + 1 = 105$ en factores primos $105 = 7 \cdot 5 \cdot 3$, luego

$$a_0 = (7+1)/2 = 4, \quad a_1 = (5-1)/2 = 2, \quad a_2 = (3-1)/2 = 1,$$

así $N = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^1 = 720$ por lo tanto hay 52 triángulos pitagóricos con un cateto de longitud 720

Si queremos que N sea impar entonces a_0 lo tomamos como cero y

$$a_1 = (7-1)/2 = 3, \quad a_2 = (5-1)/2 = 2, \quad a_3 = (3-1)/2 = 1,$$

luego $N = 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7^1 = 4725$, por lo tanto hay 52 triángulos pitagóricos con un cateto de longitud 4725 (podemos notar que la solución par es menor que la solución impar).

Cabe notar que 5 es uno de los factores de $N = 720$ y como 5 es de la forma $4k+1$ entonces N puede ser también hipotenusa de un triángulo pitagórico, o sea 720 es el lado de 53 triángulos pitagóricos en 52 de ellos como cateto y en uno de ellos como hipotenusa (ver Figura 3.1). Si deseamos el menor número que sea cateto en 52 triángulos pitagóricos y que no sea hipotenusa, este es $N = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 7 = 1008$, el cual también aparece indicado en la Figura 3.1.

El siguiente ejemplo muestra que al construir N como se había indicado no siempre se da el menor resultado con la solución par.

Ejemplo 3.5.2 Encontrar un número N tal que sea el cateto de $L = 121$ triángulos pitagóricos.

Expresemos $2L + 1 = 243$ en factores primos $2L + 1 = 243 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$ así

$$a_0 = (3+1)/2 = 2, \quad a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 1,$$

luego nuestro número sería $N = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$. Pero si tomamos a $2L+1 = 243$ como $9 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$, entonces

$$a_0 = (9+1)/2 = 5, \quad a_1 = a_2 = a_3 = 1$$

T	N	L	H	T	N	L	H
1	$3 = 3$	1	0	51	$2^4 \cdot 5^6 = 250000$	45	6
2	$5 = 5$	1	1	52	$2^4 \cdot 3^2 \cdot 7 = 1008$	52	0
3	$2^4 = 16$	3	0	53	$2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 = 720$	52	1
4	$2^2 \cdot 3 = 12$	4	0	54	$2^4 \cdot 3 \cdot 5^2 = 1200$	52	2
5	$3 \cdot 5 = 15$	4	1	55	$2^3 \cdot 3 \cdot 5^3 = 3000$	52	3
6	$5^3 = 125$	3	3	56	$2^{19} \cdot 5 =$	55	1
7	$2^3 \cdot 3 = 24$	7	0	57	$2^{12} \cdot 3^2 = 36864$	57	0
8	$2^3 \cdot 5 = 40$	7	1	58	$2^7 \cdot 3 \cdot 7 = 2688$	58	0
9	$3 \cdot 5^2 = 75$	7	2	59	$2^7 \cdot 3 \cdot 5 = 1920$	58	1
10	$2^4 \cdot 3 = 48$	10	0	60	$2^6 \cdot 3^5 = 15552$	60	0
11	$2^4 \cdot 5 = 80$	10	1	61	$2^{21} \cdot 3 =$	61	0
12	$2^3 \cdot 3^2 = 72$	12	0	62	$2^3 \cdot 3^2 \cdot 7^2 = 3528$	62	0
13	$2^2 \cdot 3 \cdot 7 = 84$	13	0	63	$2^{64} =$	63	0
14	$2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$	13	1	64	$2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2 = 1800$	62	2
15	$2^{15} = 32768$	15	0	65	$3 \cdot 5^5 \cdot 13 = 121875$	49	16
16	$2^6 \cdot 3 = 192$	16	0	66	$2^{10} \cdot 3^3 = 27648$	66	0
17	$2^4 \cdot 3^2 = 144$	17	0	67	$2^3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11 = 1848$	67	0
18	$2^{19} = 524288$	18	0	68	$2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 840$	67	1
19	$2^7 \cdot 3 = 384$	19	0	69	$2^2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7 = 2100$	67	2
20	$2^7 \cdot 5 = 640$	19	1	70	$2^{24} \cdot 3 =$	70	0
21	$3 \cdot 5^5 = 9375$	16	5	71	$2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 13 = 1560$	67	4
22	$2^3 \cdot 3 \cdot 7 = 168$	22	0	72	$2^{15} \cdot 3^2 = 294912$	72	0
23	$2^3 \cdot 3 \cdot 5 = 120$	22	1	73	$2^4 \cdot 3^3 \cdot 7 = 3024$	73	0
24	$2^2 \cdot 3 \cdot 5^2 = 300$	22	2	74	$2^4 \cdot 3^3 \cdot 5 = 2160$	73	1
25	$2^9 \cdot 3 = 1536$	25	0	75	$2^4 \cdot 5^9 =$	66	9
26	$2^3 \cdot 5 \cdot 13 = 520$	22	4	76	$2^4 \cdot 3 \cdot 5^3 = 6000$	73	3
27	$2^6 \cdot 3^2 = 576$	27	0	77	$2^9 \cdot 3 \cdot 5 = 7680$	76	1
28	$2^{10} \cdot 3 = 3072$	28	0	78	$2^{79} =$	78	0
29	$3 \cdot 5^2 \cdot 13 = 975$	22	7	79	$2^{16} \cdot 5^2 =$	77	2
30	$2^{31} =$	30	0	80	$2^3 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 17 = 8840$	67	13
31	$2^4 \cdot 3 \cdot 7 = 336$	31	0	81	$3 \cdot 5^{20} =$	61	20
32	$2^4 \cdot 3 \cdot 5 = 240$	31	1	82	$2^6 \cdot 3^2 \cdot 7 = 4032$	82	0
33	$3 \cdot 5^8 =$	25	8	83	$2^6 \cdot 3^2 \cdot 5 = 2880$	82	1
34	$2^2 \cdot 3 \cdot 5^3 = 1500$	31	3	84	$2^6 \cdot 3 \cdot 5^2 = 4800$	82	2
35	$2^4 \cdot 5 \cdot 13 = 1040$	31	4	85	$2^{10} \cdot 3 \cdot 7 = 21504$	85	0
36	$2^{37} =$	36	0	86	$2^{10} \cdot 3 \cdot 5 = 15360$	85	1
37	$2^3 \cdot 3^2 \cdot 7 = 504$	37	0	87	$2^4 \cdot 3^2 \cdot 7^2 = 7056$	87	0
38	$2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 = 360$	37	1	88	$2^{30} \cdot 3 =$	88	0
39	$2^3 \cdot 3 \cdot 5^2 = 600$	37	2	89	$2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^2 = 3600$	87	2
40	$2^2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11 = 924$	40	0	90	$2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^3 = 9000$	87	3
41	$2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 420$	40	1	91	$2^4 \cdot 5^{11} =$	80	11
42	$2^9 \cdot 3^2 = 4608$	42	0	92	$2^{19} \cdot 3^2 =$	92	0
43	$2^4 \cdot 5^5 = 50000$	38	5	93	$2^9 \cdot 3^5 = 124416$	93	0
44	$2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 13 = 780$	40	4	94	$2^4 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11 = 3696$	94	0
45	$2^7 \cdot 3^3 = 3456$	45	0	95	$2^4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 1680$	94	1
46	$2^{16} \cdot 3 = 196608$	46	0	96	$2^{97} =$	96	0
47	$2^{10} \cdot 3^2 = 9216$	47	0	97	$2^7 \cdot 3^2 \cdot 7 = 8064$	97	0
48	$2^7 \cdot 5^3 = 16000$	45	3	98	$2^4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 13 = 3120$	94	4
49	$2^6 \cdot 3 \cdot 7 = 1344$	49	0	99	$2^7 \cdot 3 \cdot 5^2 = 9600$	97	2
50	$2^6 \cdot 3 \cdot 5 = 960$	49	1	100	$2^{34} \cdot 3 =$	100	0

Figura 3.1: El menor entero N tal que puede ser lado de un número T de triángulos pitagóricos tomado de [1]

luego $N = 2^5 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$, que es la menor solución.

Esto podría suceder en un caso especial que es presentado en [1] sin demostración: para saber si una solución N es la menor procedemos de la siguiente manera, sea

$$2L + 1 = c_o \cdot c_1 \cdot c_2 \cdot c_3 \cdots c_k$$

un producto de $k+1$ primos con exponente 1 con $c_o \geq c_1 \geq c_2 \geq c_3 \geq \cdots \geq c_k$ y tomemos

$$a_o = (c_o + 1)/2, a_1 = (c_1 - 1)/2, a_3 = (c_3 - 1)/2, \cdots, a_k = (c_k - 1)/2$$

luego

$$N = 2^{a_0} \cdot p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdots p_k^{a_k}.$$

Si $2^{(c_1 \cdot c_2 - c_1)/2}$ es menor que $p_k^{(c_k-1)/2}$ entonces N no es la menor solución.

En el ejemplo anterior tenemos $2L + 1 = 243 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$, así

$$N = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$$

luego $c_1 = c_2 = 3$; $p_k = 11$ y $2^{(c_1 \cdot c_2 - c_1)/2} = 2^3$ es menor que $p_k^{(c_k-1)/2} = 11$ lo cual nos indica que la solución $N = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$ no es la menor.

Ejemplo 3.5.3 Encontrar el menor número N que sea cateto de $L = 1000$ triángulos pitagóricos.

Expresemos $2L + 1$ en factores primos $2L + 1 = 2001 = 29 \cdot 23 \cdot 3$ luego $a_0 = 15$, $a_1 = 11$, $a_2 = 1$ entonces la solución está dada por $N = 2^{15} \cdot 3^{11} \cdot 5$.

Problema 6. Encontrar el menor número que pueda ser cateto solamente, o cateto o hipotenusa de un número dado de triángulos pitagóricos.

Solución. La primera parte del problema 6 es solucionada en el problema 5 si tenemos un número que no tiene factores primos de la forma $4k + 1$.

Para encontrar un número que pueda ser cateto o hipotenusa de un número dado de triángulos pitagóricos consideremos

$$N = 2^{a_0} \cdot p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdots p_m^{a_m} \cdot q_1^{b_1} \cdot q_2^{b_2} \cdots q_s^{b_s}.$$

Usando las Fórmulas (3.5) y (3.8) tenemos que

$$\begin{aligned} 2L + 1 &= (2a_0 - 1)(2a_1 + 1) \cdots (2a_n + 1)(2b_1 + 1)(2b_2 + 1) \cdots (2b_r + 1), \\ 2H + 1 &= (2b_1 + 1)(2b_2 + 1)(2b_3 + 1) \cdots (2b_r + 1). \end{aligned}$$

Si Q es la proporción de estas dos expresiones y $T = L + H$ es el número requerido de triángulos en los cuales N puede ser cateto o hipotenusa entonces $(2L + 1) = Q(2H + 1)$, así:

$$(2H + 1)(Q + 1) = 2(T + 1). \tag{3.10}$$

Es claro que $(2H + 1)$ es impar, así $(Q + 1)$ debe ser par y por lo tanto Q es impar luego $2(T+1)$ es el producto de un par de factores A, B con $A = 2H+1$ y $B = Q + 1$. En general la factorización de $2(T + 1)$ como producto de un número par por un impar se puede hacer de varias maneras y cada factorización podría suministrar un tipo de solución diferente.

Expresemos A como producto de factores primos con repeticiones, esto es $A = d_1 \cdot d_2 \cdot d_3 \cdots d_r$ con $d_1 \geq d_2 \geq d_3 \geq \cdots \geq d_r$ y tomemos

$$b_1 = (d_1 - 1)/2, b_2 = (d_2 - 1)/2, b_3 = (d_3 - 1)/2, \cdots , b_r = (d_r - 1)/2$$

como los exponentes a aplicar a los primos q_i de la forma $4k + 1$.

Por otro lado expresemos Q como producto de factores primos con repeticiones, esto es $Q = c_0 \cdot c_1 \cdot c_2 \cdot c_3 \cdots c_n$ con $c_0 \geq c_1 \geq c_2 \geq c_3 \geq \cdots \geq c_n$ y tomemos

$$a_0 = (c_0 + 1)/2, a_1 = (c_1 - 1)/2, a_2 = (c_2 - 1)/2, \cdots , a_n = (c_n - 1)/2,$$

el término a_0 será el exponente para el primo 2 y el resto de los $a_1, a_2, \cdots , a_n$ serán los exponentes para los primos p_i de la forma $4k + 3$. Así un número N que puede ser cateto o hipotenusa de T triángulos pitagóricos es

$$N = 2^{a_0} \cdot p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdots p_n^{a_n} \cdot q_1^{b_1} \cdot q_2^{b_2} \cdots q_r^{b_r}.$$

Este N es cateto en C triángulos pitagóricos e hipotenusa en H triángulos pitagóricos

Si $Q = 1$ la cantidad de triángulos pitagóricos donde N es cateto es igual a la cantidad de triángulos pitagóricos en donde N es hipotenusa $(L = H)$, entonces a_0 debe ser 1 y $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$ luego $N = 2 \cdot q_1^{b_1} \cdot q_2^{b_2} \cdots q_r^{b_r}$. En conclusión, si $N = q_1^{b_1} \cdot q_2^{b_2} \cdots q_r^{b_r}$ entonces N es cateto o hipotenusa de exactamente el mismo número de triángulos pitagóricos.

Ejemplo 3.5.4 Encontrar un número que sea cateto o hipotenusa de exactamente 1000 triángulos pitagóricos.

Aquí $T = 1000$, expresemos $2(T+1)$ como un producto de dos factores de distinta paridad por ejemplo $2(T+1) = 2002 = 1001 \cdot 2$ luego

$$2(T+1) = 1001 \cdot 2 = (2H+1)(Q+1)$$

así $A = 2H + 1 = 1001$ y $B = Q + 1 = 2$.

Expresemos A como producto de factores primos con repeticiones esto es $1001 = 13 \cdot 11 \cdot 7$ luego $b_1 = 6, b_2 = 5, b_3 = 3$.

Por otro lado como $Q + 1 = B = 2$ luego $Q = 1$ por tanto $L = H$ en consecuencia $a_0 = 1$. Finalmente una solución N que es lado de 1000 triángulos pitagóricos (en 500 es cateto y en 500 es hipotenusa) es $N = 5^6 \cdot 13^5 \cdot 17^3$.

En la Tabla 4.6 en la quinta fila se encuentra el menor número N que es lado de 1000 triángulos pitagóricos.

La tabla que aparece a continuación fue tomada de [1], en ella se indican los pasos a seguir cuando queremos encontrar un número N que sea el lado de T ternas pitagóricas.

Tabla 4.6 Números que pueden ser el lado de $T = 1000$ triángulos pitagóricos

$2(T+1)$	$A = 2H+1$	$d_1, \cdots, d_r$	$b_1, \cdots, b_r$	$B-1=Q$	$c_0, \cdots, c_n$	$a_1, \cdots, a_n$	*Sol. Menor*
$1001 \cdot 2$	1001	$13 \cdot 11 \cdot 7$	6,5,3	1	1	1	$5^6 \cdot 13^5 \cdot 17^3$
$77 \cdot 26$	77	$11 \cdot 7$	5,3	25	$5 \cdot 5$	3,2	$2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^5 \cdot 13^3$
$91 \cdot 22$	91	$13 \cdot 7$	6,3	21	$7 \cdot 3$	4,1	$2^4 \cdot 3 \cdot 5^6 \cdot 13^3$
$143 \cdot 14$	143	$13 \cdot 11$	6,5	13	13	7	$2^7 \cdot 5^6 \cdot 13^5$
$7 \cdot 286$	7	7	3	285	$19 \cdot 5 \cdot 3$	10,2,1	$2^{10} \cdot 3^2 \cdot 5^3 \cdot 7$
$11 \cdot 182$	11	11	5	181	181	91	$2^{91} \cdot 5^5$
$13 \cdot 154$	13	13	6	153	$17 \cdot 3 \cdot 3$	9,1,1	$2^9 \cdot 3 \cdot 5^6 \cdot 7$

Números que pueden ser el lado de $T = 1000000$ triángulos pitagóricos

$2(T+1)$	$A = 2H+1$	$d_1, \cdots, d_r$	$b_1, \cdots, b_r$	$B-1=Q$	$c_0, c_1 \cdots, c_n$	$a_1, \cdots, a_n$	*Sol. Menor*
$1000001 \cdot 2$	1000001	$9901 \cdot 101$	4950,50	1	1	1	$5^{4950} \cdot 13^{50}$
$9901 \cdot 202$	9901	9901	4950	201	$67 \cdot 3$	34,1	$2^{34} \cdot 3 \cdot 5^{4950}$
$101 \cdot 154$	101	101	50	19801	19801	9901	$2^{9901} \cdot 5^{50}$

En el caso que $T+1$ sea una potencia de 2 este no tiene divisores impares distintos de uno, por lo tanto $H=0$ a continuación mostraremos un ejemplo.

Ejemplo 3.5.5 Encontrar el menor número N que sea cateto o hipotenusa de 63 triángulos pitagóricos.

Aquí $T=63$ y por Ecuación (3.10) tenemos

$$2(T+1) = 128 = 1 \cdot 2^7 = (2H+1)(Q+1)$$

luego $2H+1=1$ esto es $H=0$ luego $T=L=63$ por lo tanto $Q+1=2^7=128$ así $2L+1=Q=127$ como 127 es un número primo entonces $N=2^{64}$ o $N=p_1^{63}$ donde p_1 tiene la forma $4x+3$, la primera es la menor solución. Por lo tanto $N=2^{64}$ es el menor número que es cateto de 63 triángulos pitagóricos.

3.6. Triángulos rectángulos cuyos lados difieren por la unidad

Teniendo en cuenta que existen ternas pitagóricas primitivas donde dos de sus lados difieren por la unidad $((9,40,41),(20,21,29))$, algunos matemáticos se interesaron en: *encontrar triángulos pitagóricos cuyos catetos difieren por la unidad y derivar fórmulas para obtenerlos sistemáticamente*.

Sus aportes fueron los siguientes: • A. Girard dio catorce de dichos triángulos en los que el menor de los lados es $3, 20, 119, 696, 4059, 23660, 137903, 803760, \cdots, 31509019100$.

• Fermat, de un triángulo rectángulo $(x, x+1, z)$ cuyos catetos son números enteros consecutivos, deduce un segundo triángulo $(X, X+1, Z)$, donde

$$X = 2z + 3x + 1, \quad Z = 3z + 4x + 2. \tag{3.11}$$

En efecto,

$$\begin{aligned}
X^2 + Y^2 &= (2z+3x+1)^2 + (2z+3x+2)^2 \\
&= 4z^2 + 4z(3x+1) + (3x+1)^2 + 4z^2 + 4z(3x+2) + (3x+2)^2 \\
&= 4z^2 + 12xz + 4z + 9x^2 + 6x + 1 + 4z^2 + 12xz + 8z + 9x^2 + 12x + 4 \\
&= 8z^2 + 24xz + 12z + 18x^2 + 18x + 5
\end{aligned}$$

por otro lado tenemos que

$$\begin{aligned}
Z^2 &= (3z+4x+2)^2 \\
&= 9z^2+6z(4x+2)+(4x+2)^2 \\
&= 9z^2+24xz+12z+16x^2+16x+4 \\
&= z^2+8z^2+24xz+12z+16x^2+16x+4 \\
&= x^2+(x+1)^2+8z^2+24xz+12z+16x^2+16x+4 \\
&= 8z^2+24xz+12z+18x^2+18x+5
\end{aligned}$$

así queda demostrada la afirmación de Fermat; por ejemplo, partiendo de la terna pitagórica $(3,4,5)$ obtenemos las ternas pitagóricas $(20,21,29)$, $(119,120,169)$, $(696,697,985)$, $(4059,4060,5741)$, $(23660,23661,33461)\cdots$.

Fermat además afirmó que si (x_0,y_0,z_0) es una terna pitagórica donde sus catetos difieren por la unidad entonces las ternas de la Fórmula 3.11 se pueden describir mediante:

$$x_1 = 2(x_0+y_0+z_0)-x_0, \quad y_1 = 2(x_0+y_0+z_0)-y_0, \quad z_1 = 2(x_0+y_0+z_0)+z_0.$$

• J. Ozanam dio seis triángulos cuyos catetos difieren por la unidad. Si un triángulo cuyos catetos difieren por la unidad se forma a partir de m,n con $m>n$ (Teorema de Euclides), podemos generar un nuevo triángulo a partir $m, 2m+n$.

En efecto, por teorema de Euclides sabemos que los enteros m,n, con $m>n$ generan la terna pitagórica $(2mn, m^2-n^2, m^2+n^2)$, luego la terna

$$(2m(2m+n), (2m+n)^2-m^2, (2m+n)^2+m^2)$$

generada por los enteros $m, 2m+n$ es también pitagórica y sus catetos difieren por la unidad teniendo en cuenta que $2mn+1=m^2-n^2$ o $2mn=m^2-n^2+1$.

Ejemplo 3.6.1 Tomemos la terna $(3,4,5)$ luego $m=2$, $n=1$ en consecuencia una nueva terna pitagórica de catetos consecutivos se forma a partir de $m=2$, $2m+n=5$ la cual es $(20,21,29)$.

La regla dada por J. Ozanam se puede generalizar de la siguiente manera, los triángulos pitagóricos cuyos catetos difieren por la unidad se forman a partir de cualquier par de términos consecutivos de la siguiente sucesión de enteros $1,2,5,12,29,70,\cdots,k$ donde k es tal que uno de los dos números $2k^2\pm 1$ es un cuadrado, por ejemplo tomemos $m=5$ y $n=2$ luego por el Teorema de

Euclides sabemos que ellos generan la terna pitagórica $(20, 21, 29)$ y es claro que sus catetos difieren por la unidad.

• G. H. Hopkins y M. Jenkins reducen este problema a solucionar la siguiente ecuación $x^2 - 2y^2 = \pm 1$, y dieron fórmulas de recurrencia para las soluciones.

En efecto para que los lados de un triángulo pitagórico sus catetos difieran por la unidad se debe cumplir que,

$$m^2 - n^2 + 1 = 2mn \quad o \quad 2mn + 1 = m^2 - n^2$$

de la primera relación tenemos que $(m-n)^2 = 2n^2 - 1$ y de la segunda relación tenemos que $(m-n)^2 = 2n^2+1$ luego podemos concluir que $(m-n)^2 = 2n^2 \pm 1$ de modo que $(m-n)^2 - 2n^2 = \pm 1$. Si llamamos a $m-n = x$ y $n = y$, obtenemos la ecuación obtenida por G. H. Hopkins y M. Jenkins.

Los anteriores matemáticos estaban en el camino correcto, ya que la solución de *encontrar triángulos pitagóricos cuyos catetos difieren por la unidad y derivar fórmulas para obtenerlos sistemáticamente*, se encuentra en [1] y se basa en la solución de la ecuación de *Pell* y es la siguiente.

Problema 7. Encontrar triángulos pitagóricos cuyos catetos difieren por la unidad y derivar fórmulas para obtenerlos sistemáticamente.

En este problema se impone la condición de que los catetos de un triángulo pitagórico sean enteros consecutivos, obviamente el triángulo dado por la terna $(3, 4, 5)$ cumple con esta condición, en este caso en particular los tres lados son enteros consecutivos.

Para que los catetos de un triángulo pitagórico sean enteros consecutivos se debe cumplir que $m^2 - n^2 + 1 = 2mn \quad o \quad 2mn + 1 = m^2 - n^2$, luego $(m-n)^2 = 2n^2 - 1$ o $(m-n)^2 = 2n^2 + 1$ al relacionar estas dos igualdades obtenemos que $(m-n)^2 = 2n^2 \pm 1$ así que $(m-n)^2 - 2n^2 = \pm 1$, una ecuación de este tipo es llamada una *Ecuación de Pell.*

La ecuación de Pell es una ecuación diofántica, es decir, con coeficientes enteros y para la que las soluciones pedidas son enteras también. Tiene la forma:

$$x^2 - ny^2 = a$$

donde n es un entero que no es cuadrado perfecto y a es un entero no nulo.

Para nuestro problema $a = \pm 1$ y $n = 2$, la solución de esta ecuación está dada por las convergentes del desarrollo en fracciones continuas de $\sqrt{2}$.

En la Tabla 4.7 son tabuladas algunas de las soluciones, además los catetos e hipotenusa de 10 triángulos pitagóricos con catetos consecutivos

r	n	$m-n$	m	X	Y	Z
1	1	1	2	3	4	5
2	2	3	5	20	21	29
3	5	7	12	119	120	169
4	12	17	29	696	697	985
5	29	41	70	4059	4060	5741
6	70	99	169	23660	23661	33461
7	169	239	408	137903	137904	195025
8	408	577	985	803760	803761	1113689
9	985	1393	2378	4684659	4684660	6625109
10	2378	3363	5741	27304196	27304197	38613965

Tabla 4.7 Triángulos pitagóricos con catetos consecutivos, tomado de [1]

Varias relaciones se pueden observar entre los números de la Tabla 4.7, por ejemplo $Z_r = m_{2r}$, $m_r = n_{r+1}$ y partiendo de la tercera fila se puede notar que $n_r = 2n_{r-1} + n_{r-2}$.

Fórmulas más útiles se pueden calcular de la siguiente manera sabiendo que $X + 1 = Y$; entonces se listan en una tabla sólo los valores X y de la hipotenusa Z, así:

Orden r	X	Z
1	3	5
2	20	29
3	119	169
4	696	985
5	4059	5741
6	23660	33461
7	137903	195025
8	803760	1113689

Tabla 4.8 Triángulos pitagóricos con catetos consecutivos, sólo se escribe el menor de los catetos, tomado de [1].

Se puede observar las siguientes relaciones entre los números de la Tabla 4.8 las cuales son consecuencia de las relaciones de recurrencia entre las soluciones de la ecuación de Pell $(m-n)^2 - 2n^2 = \pm 1$

$$X_r = 6X_{r-1} - X_{r-2} + 2 \quad y \quad Z_r = 6Z_{r-1} - Z_{r-2}.$$

Por ejemplo $X_5 = 4059$, $X_4 = 696$, $X_3 = 119$ luego $4059 = 6 \cdot 696 - 119 + 2$, por otro lado $Z_5 = 5741$, $Z_4 = 985$ y $Z_3 = 169$ de donde $5741 = 6 \cdot 985 - 169$.

Nuestro siguiente problema es demostrar que el área de un triángulo pitagórico no puede ser un cuadrado. Para su demostración utilizaremos el método del *Descenso al infinito,* el cual presentamos en el siguiente capítulo.

Capítulo 4

Método del descenso al infinito y el Último Teorema de Fermat

4.1. Método del descenso al infinito

En el momento de demostrar que una proposición es verdadera, en el campo de la matemática, contamos con distintos métodos que nos permiten hacerlo como: demostración directa, reducción al absurdo, inducción, contraejemplo, entre otros.

La preferencia de un método depende de la naturaleza del problema, pero en principio todos los métodos son perfectamente válidos siempre que los argumentos lógicos que utilicemos dentro de ellos sean correctos.

En relación con este tema queremos presentar un método de demostración denominado *descenso al infinito*; Pierre de Fermat introdujo este método de prueba en el siglo $XVII$ y afirmó usarlo en todos sus descubrimientos en Teoría de Números, en particular lo usó para demostrar el último Teorema de Fermat el caso $n = 4$.

Este método está basado en la siguiente afirmación: *una sucesión decreciente de números naturales no puede continuar indefinidamente.*

Con esto Fermat fue capaz de establecer algunos de sus resultados más relevantes referentes a propiedades de los números enteros. Supongamos, como el caso de inducción matemática, que son dadas una cantidad infinita de afirmaciones $P_1, P_2, P_3, \cdots P_n, \cdots$, y deseamos probar que todas ellas son verdaderas. Eso se puede hacer mostrando que al suponer que una afirmación P_n es falsa, entonces otra afirmación P_m puede ser encontrada, con $m < n$, la cual también es falsa como n fue arbitrario, la aplicación repetida de este argumento nos lleva a otro valor $k < m$ para el cual P_k es falsa; así sucesivamente se puede continuar indefinidamente. Pero esto no es posible, pues existe sólo una cantidad finita de números enteros positivos menores que n y concluimos por reducción al absurdo que las afirmaciones deben ser verdaderas. Veamos un ejemplo.

Ejemplo 4.1.1 Demostración de la irracionalidad de $\sqrt{2}$ usando el método de descenso al infinito.

Supongamos que existe una fracción racional positiva a/b para la que se cumple $(a/b)^2 = 2$, es decir, $a^2 = 2b^2$. De esto se sigue que a^2 es par así a debe ser par. Luego, podemos escribir $a = 2c$, en consecuencia $4c^2 = a^2 = 2b^2$, de donde $b^2 = 2c^2$. Pero claramente, b es menor que a y hemos encontrado otra fracción b/c, igual a $\sqrt{2}$, pero que tiene denominador menor. Esto es el inicio del descenso al infinito, lo cual nos lleva a una contradicción. Q.E.D.

Otro resultado que se puede demostrar con este método (y que parece que el propio Fermat demostró con él) es, *ningún triángulo pitagórico puede tener como área un cuadrado.* Apliquemos este método de demostración para probar el siguiente teorema sobre ternas pitagóricas.

Teorema 4.1.1 *El área de un triángulo pitagórico no puede ser un cuadrado.*

Demostración. La prueba consiste en mostrar que si el área de un triángulo es un cuadrado, entonces existe un triángulo menor con la misma propiedad y así sucesivamente hasta el infinito, lo cual es imposible.

Supongamos que existen enteros positivos a, b, c tales que

$$a^2 + b^2 = c^2$$

y que el área del triángulo pitagórico asociado, $\frac{ab}{2}$ es un cuadrado. Sin pérdida de generalidad supongamos que el triángulo dado es primitivo, luego por Teorema de Euclides a, b y c tienen la siguiente forma

$$a = m^2 - n^2, \quad b = 2mn, \quad c = m^2 + n^2,$$

donde m y n son relativamente primos con m impar n par.

Así el área del triángulo es $mn(m^2 - n^2)$, notemos que m y n son relativamente primos por lo tanto m, n y $(m^2 - n^2)$ son relativamente primos. Pero la única manera que un producto de números relativamente primos sea un cuadrado es que cada uno de ellos sea un cuadrado. Por lo tanto $(m^2 - n^2)$ es un cuadrado, el cual llamamos p^2, luego

$$p^2 + n^2 = m^2,$$

donde p y m son impares y n es par (recuerde que $a = p^2$ es impar).

El nuevo triángulo con lados p, n y m es también primitivo y podemos escribir

$$p = m_1^2 - n_1^2, \quad n = 2m_1n_1, \quad m = m_1^2 + n_1^2,$$

donde m_1 y n_1 son relativamente primos y de distinta paridad. Pero n es un cuadrado, puesto que mn es un cuadrado con m, n relativamente primos y por lo tanto m_1 o bien n_1 debe ser un cuadrado impar mientras que el otro debe ser el doble de un cuadrado. Finalmente, m es también un cuadrado por el mismo análisis.

Tomemos $m = u^2$ y como $m = m_1^2 + n_1^2$, entonces

$$m_1^2 + n_1^2 = u^2.$$

Luego, m_1, n_1, y u son los lados de un triangulo pitagórico primitivo cuya área $(m_1n_1)/2$ es un cuadrado perfecto con hipotenusa menor que la hipotenusa del triángulo original, pues

$$u = \sqrt{m} < m < m^2 < m^2 + n^2 = c.$$

Esto completa la prueba por descenso al infinito. Por lo tanto el área de un triángulo pitagórico no puede ser un cuadrado. Q.E.D.

4.2. Último teorema de Fermat

En teoría de números, el último teorema de Fermat es uno de los teoremas más famosos en la matemática. Utilizando la notación moderna, se puede enunciar de la siguiente manera: *La ecuación*

$$x^n + y^n = z^n \tag{4.1}$$

no tiene soluciones enteras positivas si $n \geq 3$.

El teorema fue conjeturado por Pierre de Fermat en 1637, pero no fue demostrado hasta 1993. En inicios de los 90 (siglo pasado) la conjetura de Fermat, cómo pasó a llamarse este resultado, fue verificado para todo n conteniendo un factor primo impar menor que 10^6 usando computadoras. En junio de 1993, Andrew Wiles anunció que tenía una prueba del teorema de Fermat, pero su prueba original contenía algunas lagunas, esas fueron corregidas por Andrew Wiles y Richard Taylor, y finalmente la conjetura de Fermat fue probada y pasó a ser un teorema.

Por más de tres siglos y medio un gran número de matemáticos trataron infructuosamente de probar éste teorema. La búsqueda de una demostración estímulo el desarrollo de la teoría de números en el siglo XIX y la demostración del teorema de modularidad en el siglo XX.

Se cree que Fermat tenía una prueba de este resultado para $n = 4$ y creyó que su argumento podría ser generalizado. Daremos la prueba del teorema de Fermat para $n = 4$, pero antes demostremos el siguiente resultado que será utilizado en la prueba.

Teorema 4.2.1 *La ecuación de Fermat* $x^4 + y^4 = z^2$ *no tiene soluciones enteras con* $x \cdot y \cdot z \neq 0$ La prueba que presentamos se debe a Euler.

Demostración. Supongamos que existen enteros positivos x, y, z tal que,

$$x^4 + y^4 = z^2,$$

y sin pérdida de generalidad supongamos que x, y y z son relativamente primos (si no es así, cancelamos los divisores comunes). Luego la terna (x^2, y^2, z) es pitagórica primitiva en consecuencia z es impar y x^2, y^2 de distinta paridad, por lo tanto x, y son de distinta paridad.

Supongamos que y es par y x es impar. Luego

$$x^4 + y^4 = z^2 \quad \textit{entonces} \quad y^4 = (z - x^2)(z + x^2),$$

como la suma y diferencia de dos números tienen la misma paridad y además como y es par se tiene que $(z - x^2)$ y $(z + x^2)$ son pares, así $2 \mid (z - x^2)$ y $2 \mid (z + x^2)$ luego 2 divide al máximo común divisor de $z - x^2$ y $z + x^2$. Por otro lado sea d el máximo común divisor de $z - x^2$ y $z + x^2$ luego d divide la suma y su diferencia por lo tanto $d \mid 2z$ y $d \mid 2x^2$, y como $\mathrm{mcd}(z, x^2) = 1$ se obtiene que $d = 2$.

Sea

$$R = \frac{1}{2}(z - x^2) \quad y \quad S = \frac{1}{2}(z + x^2)$$

R y S son relativamente primos, y además de distinta paridad puesto que $RS = \frac{1}{4}(y^4)$ con y par.

Notemos que si R es impar entonces R y $4S$ son relativamente primos o si S es impar entonces $4R$ y S son relativamente primos.

• Supongamos que R es impar luego R y $4S$ son relativamente primos además $4S \cdot R = y^4$ es una cuarta potencia entonces R y $4S$ son cuartas potencias así

$$2R = z - x^2 = 2a^4 \quad y \quad 4S = 2(z + x^2) = (2b)^4,$$

esto es $z + x^2 = 8b^4$ para algunos enteros positivos a, b con a impar.

Restando las ecuaciones obtenemos $4b^4 - a^4 = x^2$, lo cual es imposible módulo 4, pues la ecuación nos da $a^4 \equiv -x^2 \pmod 4$ con a y x impares.

• Supongamos que S es impar luego S y $4R$ son relativamente primos además $4R \cdot S = y^4$ es una cuarta potencia entonces S y $4R$ son cuartas potencias así

$$2R = z - x^2 = 8a^4 \quad y \quad 2S = z + x^2 = 2b^4.$$

para algunos enteros positivos a, b con b impar.

Restando las anteriores ecuaciones obtenemos que $b^4 - 4a^4 = x^2$, luego

$$4a^4 = (b^2 - x)(b^2 + x) \tag{4.2}$$

además $b^2 - x$ y $b^2 + x$ tienen la misma paridad (en este caso son pares). Luego 2 divide al máximo común divisor de $b^2 - x$ y $b^2 + x$. Por otro lado sea d el máximo común divisor de $b^2 - x$ y $b^2 + x$ luego d divide la suma y su diferencia por lo tanto $d \mid 2x$ y $d \mid 2b^2$ en consecuencia $d = 2$. Por lo tanto $(b^2 - x)/2$ y

$(b^2+x)/2$ son primos relativos y por la Ecuación (4.2) se tiene que $(b^2-x)/2$ y $(b^2+x)/2$ son cuartas potencias, esto es:

$$b^2 - x = 2r^4, \quad b^2 + x = 2s^4.$$

Sumando estas ecuaciones obtenemos $b^2 = r^4 + s^4$. Hemos encontrado una nueva solución (r, s, b) a nuestra ecuación $z^2 = x^4 + y^4$, con $0 < b < x < z$. Por lo tanto esto significa que para cada solución (x, y, z) en los números enteros positivos existe otra solución con un z más pequeño, lo cual es imposible por descenso al infinito. Q.E.D.

Corolario 4.2.1 *La ecuación $x^4 + y^4 = z^4$ no tiene soluciones enteras positivas.*

Demostración. Si (x, y, z) es una tal solución, entonces (x, y, z^2) es una solución de la ecuación del teorema anterior. Esto es una contradicción. Q.E.D.

Si el exponente n en (4.1) es divisible por 4, se puede escribir $n = 4m$ y la ecuación de Femat toma la forma

$$(x^m)^4 + (y^m)^4 = (z^m)^4$$

y esta ecuación es imposible como acabamos de demostrar. Por una observación similar se puede reducir el caso general al caso en que el exponente en (4.1) es un primo impar. Supongamos que $n = pm$ donde $p > 2$ es un número primo, luego la Ecuación (4.1) puede escribirse

$$(x^m)^p + (y^m)^p = (z^m)^p$$

de modo que es suficiente demostrar que la Ecuación (4.1) es imposible para exponentes primos $p > 2$. Por otro lado la cuestión de si Fermat poseía una demostración de su último problema seguirá siendo un enigma por siempre [6].

Conclusión

El tema que se abordó en este trabajo ha sido uno de los más influyentes en la matemática por su contribución en la geometría, álgebra y teoría de números; por esta razón consideramos que este análisis fue importante porque nos ayudó a entender su naturaleza y a comprender uno de los problemas más antiguos y famosos de la teoría de números elemental. Además con este trabajo observamos que algunos o la mayoría de resultados matemáticos han sido producto de varios años de trabajo de grandes matemáticos, como se pudo notar con el teorema de Euclides que se utiliza para encontrar todas las ternas pitagóricas o el último teorema de Fermat el cual es la generalización de terna pitagórica.

Además este trabajo nos ayudó a afianzar algunos conceptos del álgebra y de la teoría de números y sus aplicaciones los cuales fueron de bastante utilidad a la hora de entender las demostraciones y a la hora de resolver los 7 problemas que se presentan en el capítulo 3, al igual nos ayudó a entender las posibles respuestas a estos problemas dadas por algunos matemáticos y aficionados a la matemática tales como Pitágoras, Platón, los hindúes Baudhayana y Apastamba, Euclides, Marcos Junius Nipsus, Diofanto, Leonardo Pisano, Euler y Gauss, entre otros. Por último se logró entender el método del *descenso al infinito*, el cual lo utilizamos para demostrar el último teorema de Fermat para el caso $n = 4$.

Queda mucho por profundizar y explorar en este tema como por ejemplo; demostrar que la terna $(3, 4, 5)$ genera todas las ternas pitagóricas además queda por estudiar varias propiedades de ternas pitagóricas que se pueden encontrar en [8]. Por otro lado logramos entender cuándo un número es suma de dos cuadrados pero lo que aún no se puede determinar de forma inmediata es como encontrar esos dos números, por ejemplo sabemos que existen infinitos números primos de la forma $(4k + 1)$ y por Teorema 3.3.2 sabemos que todo número de esa forma es suma de dos cuadrados (o sea es hipotenusa). Además estos cuadrados son únicos (sólo existe un triángulo rectángulo cuya hipotenusa sea ese número primo), la demostración de este resultado desgraciadamente no es constructiva, es decir no se encuentran los catetos, sino que se utiliza el método de reducción al absurdo, por lo tanto queda aún por resolver la pregunta ¿cuales son los catetos?.

Por último presentamos algunos comentarios sobre el problema de encontrar un *cuboide perfecto.* Primero demos la definición de una caja de Euler (o Brick de Euler) antes de explicar el problema. Una caja de Euler es un cuboide en donde las aristas y las diagonales de las caras son números enteros (ver Figura 4.1).

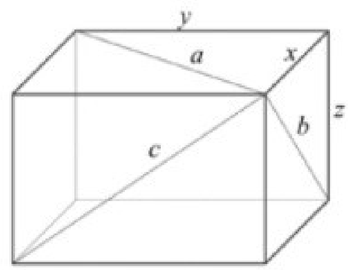

Figura 4.1: El brick de Euler

Basta un vistazo al brick de Euler para darnos cuenta que la relación existente entre diagonales y aristas se puede fácilmente traducir a ecuaciones haciendo uso de las ternas pitagóricas. Por lo tanto algebraicamente, las aristas y diagonales de un brick de Euler deben ser solución del siguiente sistema de ecuaciones diofánticas (solo buscamos soluciones enteras) de segundo grado

$$\begin{aligned} a^2 &= x^2 + y^2, \\ b^2 &= x^2 + z^2, \\ c^2 &= y^2 + z^2, \end{aligned}$$

Existen infinitas cajas con estas características, además se conocen soluciones paramétricas que nos dan siempre cajas de Euler (del estilo de las de ternas pitagóricas), pero no las dan todas.

Ahora sí planteemos el problema, un cuboide perfecto (también llamada caja perfecta) es una caja de Euler que cumple que la longitud de su diagonal principal es también un número entero. En términos algebraicos se trata de adicionarle la siguiente condición al sistema de ecuaciones anterior, suponiendo que la diagonal principal es d

$$d^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

Es fácil notar que el anterior sistema junto con la última condición es equivalente al siguiente

$$\begin{aligned} a^2 &= x^2 + y^2, \\ d^2 &= a^2 + z^2, \\ d^2 &= b^2 + y^2, \\ d^2 &= c^2 + x^2, \end{aligned}$$

es decir, el cuadrado de la diagonal principal de la caja se deberá poder expresar al menos de tres formas como suma de dos cuadrados, anteriormente en el Capítulo 3 hemos encontrado números que tienen esta propiedad tales como 65, 1105 y se podrían encontrar muchos mas. Pero ahora la descomposición en suma de dos cuadrados no puede ser cualquiera, para que sea una caja perfecta deberá cumplir además que $a^2 = x^2 + y^2$ que relaciona entre si tres de los cuadrados de estas descomposiciones, esta fortísima simetría algebraica es la causa de la dificultad para encontrar una caja perfecta.

Como hemos visto antes, encontrar cajas de Euler es posible y además sencillo a partir de una dada, pero el problema del cuboide perfecto es un problema no resuelto en Matemáticas. Es decir: nadie ha encontrado ningún cuboide perfecto ni ha conseguido demostrar que no existen. Lo máximo que se ha conseguido es encontrar alguna de las propiedades que deben cumplir las longitudes de sus lados o cuboides semiperfectos, es decir, cuboides que aún teniendo diagonal principal de longitud entera no cumplen alguna de las propiedades de las cajas de Euler. Con estas inquietudes damos por terminado este trabajo de grado.

Bibliografía

[1] Beiler, Albert H. *Recreations in the Theory of Numbers: The Queen of Mathematics Entertains*. Dover Publications, New York, 1964.

[2] Dickson, Leonard E. *History of the Theory of Numbers: Diophantine Analysis*. Carnegie Institution of Washington, 1920.

[3] García Pulgarín, Gilberto. *Ternas Pitagóricas: Matemáticas Enseñanza Universitaria*. No 41, pp 12-21, 1987.

[4] G. H. Hardy, And E. M. Wright. *An Introduction to the Theory of Numbers*. Oxford University Press. Sixth edition, 2008.

[5] K.Ríbnikov. *Historia de las Matemáticas*. Editorial Mir Moscú, 1987.

[6] Oystein Ore *Number Theory and its History*. Dover Publications, New York, 1988.

[7] Wade, Peter W. and Wade, William R. *Recursions That Produce Pythagorean Triples*. The College Mathematics Journal, Vol. 31 No.2, pp 98-101, 2000.

[8] http://www.xtec.cat/sgfp/llicencies/200304/memories/teoremapitagores.pdf. Visitada en octubre de 2013.

[9] Pythagorean triple, http://en.wikipedia.org/wiki/Pythagorean triple. Visitada en agosto de 2013.