EL PROBLEMA DE CAUCHY PERIÓDICO PARA UNA ECUACIÓN TIPO BOUSSINESQ

ANYI PAOLA MUÑOZ CASTRO

UNIVERSIDAD DEL CAUCA
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES, EXACTAS Y DE LA EDUCACIÓN
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
PROGRAMA DE MATEMÁTICAS
POPAYÁN

2023

EL PROBLEMA DE CAUCHY PERIÓDICO PARA UNA ECUACIÓN TIPO BOUSSINESQ

TRABAJO DE GRADO
EN MODALIDAD INVESTIGACIÓN, PRESENTADO COMO REQUISITO PARCIAL PARA OPTAR AL TÍTULO DE MATEMÁTICA

ANYI PAOLA MUÑOZ CASTRO

DIRECTOR: DR. ALEX MANUEL MONTES PADILLA

UNIVERSIDAD DEL CAUCA
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES, EXACTAS Y DE LA EDUCACIÓN
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
PROGRAMA DE MATEMÁTICAS
POPAYÁN
2023

Nota de aceptación

Alex M. Montes P.

Director: ______________________

Dr. Alex Manuel Montes Padilla.

Jurado: ______________________

Dr. Gerardo Arturo Loaiza Motato.

Jurado: ______________________

Dr. Ricardo Córdoba Gómez.

Fecha de sustentación: 20 de abril de 2023.

Índice

Introducción

Las ecuaciones diferenciales parciales de evolución, surgen no sólo de campos de las matemáticas, sino también de otras ramas de la ciencia como la física, la mecánica y la ciencia de los materiales. Por ejemplo, las ecuaciones de Navier-Stokes y Euler que surgen de la mecánica de fluidos, las ecuaciones de reacción-difusión no lineales que surgen de las ciencias biológicas y del estudio del fenómeno de la transferencia de calor, las ecuaciones no lineales de Klein-Gordon y las ecuaciones no lineales de Schrödinger que nacen de la mecánica cuántica, son ecuaciones especiales de este tipo. En particular, ecuaciones diferenciales parciales no lineales son usadas para modelar la evolución de ondas de agua de gran elongación y pequeña amplitud. Es conocido que estas ecuaciones o sistemas de ecuaciones no lineales relacionados con modelos de ondas de agua son derivados del "problema completo de ondas de agua" (full problem of water waves) mediante un proceso de aproximación y bajo la imposición de algunas restricciones para los parámetros que afectan la propagación de las ondas (ver Crapper [6]).

Joseph Boussinesq en investigaciones realizadas entre 1871 y 1877, las cuales incluyen su tesis doctoral, dio los primeros pasos para entender el fenómeno de la propagación de ondas en un fluido. Este físico-matemático probó que bajo algunas consideraciones especiales, la situación se puede modelar mediante la ecuación diferencial no lineal,

$$u_{tt} - u_{xx} + u_{xxxx} + (u^2)_{xx} = 0,$$

donde $u(t,x)$ representa la elevación superficial de la onda. Además, demostró matemáticamente la existencia de ondas viajeras con velocidad $c > 0$, es decir, mostró la existencia de soluciones de la forma

$$u(t,x) = v(x - ct).$$

En las siguientes referencias se pueden encontrar diferentes estudios sobre esta ecuación: Bona-Sachs [2], Clarkson [5], Hirota [8], Kalantarov-Ladyzhenskaya [10], Lai-Wu [12], Linares- Scialom [13], Linares [15], Liu [16].

Los matemáticos Diederik Johannes Korteweg y Gustav de Vries en 1895 presentaron el modelo uno-dimensional más simple para ondas de agua de pequeña amplitud y gran elongación, en el caso de ausencia de tensión superficial. Este modelo se conoce como la ecuación Korteweg-de Vries (KdV) (ver [7], [11], [21]) la cual posee soluciones de onda viajera. El modelo KdV tiene la forma

$$u_t - uu_x + u_{xxx} = 0,$$

y las soluciones de onda viajera $u(t,x) = \psi(x - ct)$ (con velocidad de onda $c > 0$) son de la forma $\psi(x) = Asech^2(Bx)$, con A y B constantes apropiadas.

Hoy en día se conocen diversos modelos uno-dimensionales de ecuaciones diferenciales que describen la evolución de ondas en un fluido en términos de la elevación superficial de la onda bajo diferentes consideraciones, entre los cuales destacamos, además de la ecuación Korteweg-de Vries y la ecuación Boussinesq, la ecuación Benjamin-Bona-Mahony (ver [1])

$$u_t - u_{xxt} + u_x + uu_x = 0,$$

y la ecuación Camassa-Holm (ver [4]),

$$u_t - u_{xxt} + u_x + 3uu_x - 2u_xu_{xx} - uu_{xxx} = 0.$$

Además, la ecuación Benney-Luke (ver [17])

$$\Phi_{tt} - \Phi_{xx} + a\Phi_{xxxx} - b\Phi_{xxtt} + \Phi_t\Phi_{xx} + 2\Phi_x\Phi_{xt} = 0,$$

se destaca como un modelo en términos de la velocidad potencial. En todos estos modelos se ha probado la existencia de soluciones de onda solitaria, y se ha establecido la existencia de soluciones para el problema de Cauchy.

En el trabajo [18], G. Schneider y C. Eugene mostraron que el fenómeno de la evolución de una onda de agua en presencia de tensión superficial se puede modelar con la siguiente ecuación tipo Boussinesq

$$u_{tt} - u_{xx} - u_{xxtt} + \mu u_{xxxx} + u_{xxxxtt} = (u^2)_{xx}, \tag{1}$$

done μ es el parámetro relacionado con la tensión superficial.

Ahora bien, cuando se estudia una ecuación diferencial relacionada con un modelo físico es importante mostrar la existencia y unicidad de solución para el problema de valor inicial asociado, así como es importante mostrar la existencia de soluciones especiales como las denominadas soluciones de onda viajera. En este sentido, en el artículo [20] S. Wang y H. Xue consideraron el problema de valor inicial asociado con la ecuación generalizada

$$u_{tt} - u_{xx} - u_{xxtt} + \mu u_{xxxx} + u_{xxxxtt} = (f(u))_{xx}, \tag{2}$$

con las condiciones iniciales

$$u(0,x) = \varphi(x) \;\; u_t(0,x) = \psi(x), \quad x \in \mathbb{R}, \tag{3}$$

donde $f(u) = \beta|u|^p$, $\mu > 0$, $\beta > 0$ (β es un parámetro que depende de la profundidad del fluido y de la velocidad de la onda) y $p > 1$. Ellos demostraron la existencia y unicidad de solución para el problema de valor inicial (2) - (3) con condiciones iniciales en el espacio de Sobolev H^s para $1 \leq s < p$. Aquí $H^s = H^s(\mathbb{R})$ es el espacio de Sobolev usual de orden s definido con respecto a la norma

$$\|w\|_{H^s} = \left(\int_{\mathbb{R}} (1 + |\xi|)^{2s} |\widehat{w}(\xi)|^2 \, d\xi\right)^{1/2},$$

donde $\widehat{w}$ es la transformada de Fourier de w en la variable espacial x,

$$\widehat{w}(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} w(x) \, dx.$$

En el trabajo [3], M. Bruzón estudió la existencia de soluciones de onda viajera para el modelo (1). En este trabajo de grado consideramos el estudio del problema de Cauchy periódico para la ecuación de tipo Boussinesq (1) en el caso especial de $\mu = 1$ (para el método que usaremos no es relevante el valor de μ). Específicamente, estudiamos la existencia y la unicidad de la solución local del problema de valor inicial asociado a la ecuación

$$u_{tt} - u_{xx} - u_{xxtt} + u_{xxxx} + u_{xxxxtt} = (u^2)_{xx}, \tag{4}$$

con las condiciones iniciales

$$u(0,x) = u_0(x), \quad u_t(0,x) = v_0(x), \tag{5}$$

donde u_0 y v_0 son funciones periódicas, que por comodidad consideramos de periodo 2π. Específicamente consideramos u_0 y v_0 en el espacio de Sobolev periódico de orden s, $H^s_{per}[-\pi,\pi]$, definido con respecto a la norma

$$\|f\|_{H^s_{per}} = \Big(2\pi \sum_{k\in\mathbb{Z}} (1+|k|^2)^s |\widehat{f}(k)|^2\Big)^{1/2},$$

donde $\widehat{f}(k)$ es el coeficiente de Fourier de f (ver Definición 1.1 y Definición 2.5).

Notemos que la ecuación (4) se puede escribir en la forma equivalente

$$\partial_{tt}u - (I - \partial_x^2 + \partial_x^4)^{-1}(I - \partial_x^2)\partial_x^2 u = (I - \partial_x^2 + \partial_x^4)^{-1}\partial_x^2(u^2),$$

donde el operador $(I - \partial_x^2 + \partial_x^4)^{-1}$ se le puede dar sentido vía serie de Fourier para funciones periódicas. Entonces la ecuación en consideración se puede escribir de la forma

$$\partial_{tt}u = M(u) + F(u), \tag{6}$$

donde M es el operador lineal definido por

$$M(u) = A^{-1}(I - \partial_x^2)\partial_x^2 u, \quad A(u) = (I - \partial_x^2 + \partial_x^4)(u),$$

y F corresponde a la parte no lineal,

$$F(u) = A^{-1}\partial_x^2(u^2).$$

Ahora, realizando la sustitución $v = \partial_t u$, vemos que el problema de Cauchy (4) - (5) es equivalente al siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \partial_t u = v \\ \partial_t v = M(u) + F(u), \end{cases} \tag{7}$$

con las condiciones iniciales

$$u(0,x) = u_0(x), \quad v(0,x) = v_0(x). \tag{8}$$

Es conocido del Principio de Duhamel que si $S(t)(u_0, v_0)$ es la solución en t del problema lineal asociado con (7),

$$\begin{cases} \partial_t u = v, \\ \partial_t v = M(u), \\ u(0,x) = u_0(x), \; v(0,x) = v_0(x), \end{cases} \tag{9}$$

entonces el problema de Cauchy (7) - (8) puede reformularse por medio de la ecuación integral

$$(u(t), v(t)) = S(t)(u_0, v_0) + \int_0^t S(t-\tau)H(u(\tau))\,d\tau, \tag{10}$$

donde $H(u(\tau)) = (0, F(u(\tau)))$ y $S(t)$ es el semigrupo asociado con el problema lineal (9). Ahora, supongamos que existen dos espacios de Banach $Y \hookrightarrow X$, donde la inclusión es continua, tales que M y F son funciones continuas. Supongamos además que para cada $(u_0, v_0) \in Y$ existe un número real $T > 0$ y una única función

$$(u, v) \in C\left([0, T], Y\right)$$

que satisface la ecuación integral (10). Además, supongamos que la aplicación dato solución $(u_0, v_0) \mapsto (u, v)$ es continua de Y en $C([0, T], Y)$. En este caso diremos que el problema de Cauchy posee *solución local* en Y. Si T puede elegirse arbitrariamente grande, el problema de Cauchy se dice que posee *solución global* en Y. Recordemos que si E es un espacio de Banach entonces $C([0, T], E\ )$ denota el espacio de funciones continuas definidas en $[0, T]$ con valores en E.

En este trabajo mostraremos la existencia de soluciones locales para el sistema de ecuaciones (7) con las condiciones iniciales (8) en un espacio de Banach de funciones periódicas. Para esto notamos que si definimos, en un espacio adecuado, el operador Φ :

$$\Phi(u(t), v(t)) = S(t)(u_0, v_0) + \int_0^t S(t-\tau)H(u(\tau))\,d\tau,$$

entonces mostrar la existencia de soluciones para esta ecuación integral (10) es equivalente a mostrar la existencia de un punto fijo para el operador Φ.

Este trabajo de grado se desarrolló en la modalidad trabajo de investigación, adscrito al proyecto de investigación "Controlabilidad interna para una ecuación Boussinesq generalizada", proyecto inscrito en Vicerrectoría de Investigaciones de la Universidad del Cauca con el código I.D. 5846, y está dividido en los siguientes tres capítulos: Series de Fourier, donde estudiamos algunas propiedades de la serie y la transformada de Fourier de una función continua periódica; usamos como referencia entre otros el texto [9] de R. Iorio.

Espacios de Sobolev periódicos, donde estudiamos este tipo de espacios desde el punto de vista de las funciones generalizadas; aquí usamos como referencia el texto [14] de F. linares. Existencia de soluciones periódicas, donde mostramos que el problema de Cauchy periódico asociado a la ecuación (4) con condiciones iniciales (5) tiene soluciones locales de tipo periódico. Para esto utilizamos un estimativo bilineal en específico llamado Ley multiplicativa de Sobolev (ver Teorema 3.4) y el Teorema de punto fijo de Banach (ver Teorema 3.1).

1. Serie de Fourier

En este capítulo estudiamos algunas propiedades de la transformada y de la serie de Fourier de una función continua y periódica con periodo 2π. Denotamos por $C^n_{per}[-\pi,\pi]$, $n \in \mathbb{N}$, la colección de todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de clase C^n que son $2\pi-$periódicas. En el caso $n = 0$ simplemente escribimos $C_{per}[-\pi,\pi]$, también usaremos la notación $\mathscr{P} = C^{\infty}_{per}[-\pi,\pi]$ para el conjunto de las funciones infinitamente diferenciables periódicas con periodo 2π. Asumiremos familiar la teoría básica de los espacios ℓ^p y L^p en $\mathbb{C}$.

Definición 1.1. La *transformada de Fourier* de una función $f \in C_{per}[-\pi,\pi]$ se define como la sucesión compleja $\widehat{f} = (\widehat{f}(k))_{k\in\mathbb{Z}}$ dada por

$$\widehat{f}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}\,dx.$$

Los números $\widehat{f}(k)$ se denominan los *coeficientes de la serie de Fourier* de f y la serie $\sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(k)e^{ikx}$, se dice que es la *serie de Fourier generada por f*.

El objetivo principal de este capítulo es mostrar bajo que condiciones la serie de Fourier generada por f converge uniformemente a f. Primero tenemos los siguientes resultados.

Teorema 1.1. *La aplicación $\mathscr{F} : f \to \widehat{f}$ que envía f en su transformada de Fourier $\widehat{f}$ es una aplicación lineal continua de $\left(C_{per}[-\pi,\pi], \|.\|_{L^1[-\pi,\pi]}\right)$ en $\ell^{\infty}(\mathbb{C})$.*

Demostración. La linealidad de la aplicación se sigue de las propiedades de linealidad de la integral. Ahora,

$$|\widehat{f}(k)| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|\,dx = \frac{1}{2\pi}\|f\|_{L^1[-\pi,\pi]},\ \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Por tanto, obtenemos que

$$\|\widehat{f}\|_{\ell^{\infty}(\mathbb{C})} = \sup_{k\in\mathbb{Z}}|\widehat{f}(k)| \leq \frac{1}{2\pi}\|f\|_{L^1[-\pi,\pi]}.$$

Así, $\mathscr{F}$ es una transformación lineal continua. ∎

Teorema 1.2. *Si $f \in C_{per}[-\pi,\pi]$, entonces la serie $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\widehat{f}(k)|^2$ converge. Además, se satisface la desigualdad de Bessel,*

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\widehat{f}(k)|^2 \leq \frac{1}{2\pi}\|f\|^2_{L^2[-\pi,\pi]},$$

y la propiedad de Riemman-Lebesgue,

$$\lim_{|k|\to\infty} \widehat{f}(k) = 0. \tag{1.1}$$

Demostración. Primero introducimos las funciones:

$$\Omega_k(x) = e^{ikx},\ x\in\mathbb{R},\ k\in\mathbb{Z}.$$

Entonces dado que

$$(\Omega_k,\Omega_j)_{L^2[-\pi,\pi]} = \int_{-\pi}^{\pi} e^{ikx}\overline{e^{ijx}}\,dx = \begin{cases} 0, & si \quad j\neq k \\ 2\pi, & si \quad j = k \end{cases}$$

tenemos que

$$\begin{aligned} 0 &\leq \Big\|f - \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k)\Omega_k\Big\|^2_{L^2[-\pi,\pi]} \\ &= \Big\langle f - \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k)\Omega_k, f - \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k)\Omega_k\Big\rangle_{L^2[-\pi,\pi]} \\ &= \|f\|^2_{L^2[-\pi,\pi]} - 2\pi\sum_{k=-n}^{n}|\widehat{f}(k)|^2. \end{aligned}$$

Por tanto, para cualquier $n\in\mathbb{Z}^+$,

$$S_n = \sum_{k=-n}^{n}|\widehat{f}(k)|^2 \leq \frac{1}{2\pi}\|f\|^2_{L^2[-\pi,\pi]}.$$

De ahí que $(S_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ es una sucesión creciente y acotada, por tanto, es convergente. Así, la serie $\sum_{k\in\mathbb{Z}}|\widehat{f}(k)|^2$ converge y satisface que

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\widehat{f}(k)|^2 \leq \frac{1}{2\pi}\|f\|^2_{L^2[-\pi,\pi]}.$$

Entonces tenemos la convergencia de la serie $\sum_{k\in\mathbb{Z}}|\widehat{f}(k)|^2$. Por tanto, de esta convergencia tenemos que $\lim_{|k|\to\infty} \widehat{f}(k) = 0$, y por consiguiente obtenemos la propiedad (1.1). ∎

Teorema 1.3. *Si $f\in C^1_{per}[-\pi,\pi]$, entonces*

$$\widehat{f'}(k) = ik\widehat{f}(k),\ k\in\mathbb{Z}.$$

Demostración. Dado que $f \in C^1_{per}[-\pi,\pi]$, entonces usando la definición de transformada de Fourier, integrando por partes y usando que $f(-\pi) = f(\pi)$ obtenemos que

$$\begin{aligned}
\widehat{f'}(k) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)e^{-ikx}\,dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\left(f(x)e^{-ikx}|_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} ikf(x)e^{-ikx}\,dx \right) \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} ikf(x)e^{-ikx}\,dx = ik\widehat{f}(k).
\end{aligned}$$

■

Observación 1.1. *Si $f \in C^m_{per}[-\pi,\pi]$, entonces usando un argumento de inducción obtenemos que para $n = 0, 1, ..., m$,*

$$\widehat{f^{(n)}}(k) = (ik)^n \widehat{f}(k), \ k \in \mathbb{Z}.$$

donde $f^{(n)}$ denota la derivada n-ésima de f.

Los siguientes teoremas garantizan la convergencia uniforme y la convergencia puntual de la serie de Fourier generada por una función f en $C^1_{per}[-\pi,\pi]$. Para demostrar la convergencia uniforme usaremos el *Criterio de Weierstrass* que indica que si $(g_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ es una sucesión de funciones en $C[a,b]$ de valor complejo y existe una sucesión de constantes no negativas $(P_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ tal que

$$|g_k(x)| \leq P_k, \text{ para } k \in \mathbb{Z} \text{ y para todo } x \in [a,b],$$

entonces si $\sum_{k=1}^{\infty} P_k$ converge, la serie $\sum_{k=1}^{\infty} g_k(x)$ converge uniformemente en $[a,b]$.

Teorema 1.4. *Si $f \in C^1_{per}[-\pi,\pi]$, entonces la serie de Fourier generada por f converge uniformemente. En general, si $f \in C^m_{per}[-\pi,\pi]$ entonces la serie*

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} (ik)^n \widehat{f}(k)e^{ikx}, \ n = 0, 1, ..., m-1,$$

converge uniformemente.

Demostración. Teniendo en cuenta la propiedad de periodicidad podemos mostrar que la serie de Fourier generada por una función $f \in C^1_{per}[-\pi,\pi]$ converge uniformemente en $[-\pi,\pi]$. Note que

$$\Big|\sum_{k=-N}^{N} \widehat{f}(k)e^{ikx}\Big| \leq \sum_{k=-N}^{N} |\widehat{f}(k)|.$$

Así, por el criterio de Weierstrass es suficiente demostrar que

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\widehat{f}(k)| < \infty.$$

Dado que $\widehat{f'}(k) = ik\widehat{f}(k)$ entonces para $k \neq 0$, $|\widehat{f}(k)| = \frac{|\widehat{f'}(k)|}{|k|}$. Además, usando la desigualdad de Cauchy-Schwartz y la desigualdad de Bessel concluimos que

$$\begin{aligned}
\sum_{k=-N}^{N} |\widehat{f}(k)| &= |\widehat{f}(0)| + \sum_{0<|k|\leq N} \frac{|\widehat{f'}(k)|}{|k|} \\
&\leq |\widehat{f}(0)| + \Big(\sum_{0<|k|\leq N} |\widehat{f'}(k)|^2\Big)^{1/2}\Big(\sum_{0<|k|\leq N} \frac{1}{k^2}\Big)^{1/2} \\
&\leq |\widehat{f}(0)| + C\ \|f'\|_{L^2[-\pi,\pi]},
\end{aligned}$$

donde $C^{\,2} = \frac{1}{2\pi}\sum\limits_{0<|k|\leq N} \frac{1}{k^2}$. Así, tomando $N \to \infty$ tenemos que $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} |\widehat{f}(k)|$ es convergente y, por tanto, la serie de Fourier de f converge uniformemente. Por otra parte, si $f \in C^m_{per}[-\pi,\pi]$ entonces $f^{(n)} \in C^1_{per}[-\pi,\pi]$ para $n = 0,1,...,m-1$, por consiguiente la serie de Fourier generada por $f^{(n)}$ converge uniformemente y esta serie es $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} (ik)^n \widehat{f}(k)e^{ikx}$ por la Observación 1.1. ■

Teorema 1.5. *Si $f \in C^1_{per}[-\pi,\pi]$, entonces para cualquier $x_0 \in \mathbb{R}$, la serie de Fourier de f converge puntualmente a $f(x_0)$, esto es,*

$$f(x_0) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(k)e^{ikx_0}.$$

Demostración. Supongamos que f es tal que $f(0) = 0$. Además, consideremos la función g definida de la siguiente manera

$$g(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{e^{ix}-1}, & si \quad x \neq 0 \\ -if'(0), & si \quad x = 0. \end{cases}$$

Note que g es periódica y continua, luego por la propiedad de Riemman-Lebesgue

$$\lim_{|k|\to\infty} \widehat{g}(k) = 0. \tag{1.2}$$

Como $f(x) = (e^{ix} - 1)g(x)$, entonces la transformada de Fourier de f satisface que

$$\begin{aligned}\widehat{f}(k) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(e^{ix}g(x) - g(x))e^{-ikx}\,dx\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)e^{-ix(k-1)}\,dx - \widehat{g}(k)\\ &= \widehat{g}(k-1) - \widehat{g}(k).\end{aligned}$$

Por tanto, tenemos que

$$\sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k) = \widehat{g}(-n-1) - \widehat{g}(n).$$

De donde usando (1.2) vemos que

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(k) = 0 = f(0).$$

Ahora bien, para probar el caso general modificaremos la función f de tal manera que satisfaga el caso que se probó anteriormente, para ello sea $x_0 \in [-\pi, \pi]$ y definamos la siguiente función auxiliar

$$h(x) = f(x + x_0) - f(x_0),\ x \in \mathbb{R}.$$

Observe que por construcción h es una función continua y 2π-periódica, por tanto, la serie de Fourier de h converge a 0, esto es,

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{h}(k) = 0.$$

Por otra parte, los coeficientes de Fourier de h están dados por

$$\widehat{h}(k) = \begin{cases} \widehat{f}(k)e^{ikx_0}, & si \quad k \neq 0\\ \widehat{f}(0) - f(x_0), & si \quad k = 0,\end{cases}$$

luego

$$\sum_{k=-n}^{n} \widehat{h}(k) = \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k)e^{ikx_0} - f(x_0).$$

De ahí que

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(k)e^{ikx_0} = f(x_0).$$

■

Como consecuencia inmediata del teorema anterior y de la Observación 1.1 obtenemos el siguiente corolario.

Corolario 1.1. *Si $f \in \mathscr{P}$, entonces para todo $x \in \mathbb{R}$ y cada $n \in \mathbb{Z}^+$ tenemos que*

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} (ik)^n \widehat{f}(k)e^{ikx}. \tag{1.3}$$

En el siguiente teorema resumimos los resultados anteriores y mostramos la conocida *identidad de Parseval*.

Teorema 1.6. *Si $f \in C^1_{per}[-\pi,\pi]$, entonces la serie de Fourier generada por f converge uniformemente a f. Además, se satisface la identidad de Parseval,*

$$\frac{1}{2\pi}\|f\|^2_{L^2[-\pi,\pi]} = \|\widehat{f}\|^2_{\ell^2(\mathbb{C})}.$$

Demostración. Dado que la serie de Fourier de f converge uniformemente y además converge puntualmente a f, entonces dicha serie de Fourier converge uniformemente a f. Además, por el Teorema 1.2 tenemos que $\widehat{f} \in \ell^2(\mathbb{C})$. Por otra parte, para probar la identidad de Parseval consideremos

$$S_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k)e^{ikx}.$$

Como en la prueba de la desigualdad de Bessel, tenemos que

$$\|f - S_n\|^2_{L^2[-\pi,\pi]} = \|f\|^2_{L^2[-\pi,\pi]} - 2\pi \sum_{k=-n}^{n} |\widehat{f}(k)|^2.$$

De otro lado, dado que $S_n \to f$ uniformemente vemos que

$$\|f - S_n\|_\infty = \sup_{x\in[-\pi,\pi]} |f(x) - S_n(x)| \to 0.$$

Pero

$$\|f - S_n\|^2_{L^2[-\pi,\pi]} = \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - S_n(x)|^2\, dx \le 2\pi\|f - S_n\|^2_\infty,$$

por tanto

$$\begin{aligned}
0 &\leq \|f - S_n\|^2_{L^2[-\pi,\pi]} \\
&= \|f\|^2_{L^2[-\pi,\pi]} - 2\pi \sum_{k=-n}^{n} |\widehat{f}(k)|^2 \\
&\leq 2\pi \|f - S_n\|^2_{\infty}.
\end{aligned}$$

Entonces, tomando el límite cuando $n \to \infty$ obtenemos que

$$0 \leq \|f\|^2_{L^2[-\pi,\pi]} - 2\pi \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\widehat{f}(k)|^2 \leq 0.$$

Finalmente,

$$\frac{1}{2\pi}\|f\|^2_{L^2[-\pi,\pi]} = \|\widehat{f}\|^2_{\ell^2(\mathbb{C})}.$$

■

A continuación demostraremos que la aplicación $\mathscr{F} : C^1_{per}[-\pi,\pi] \to \ell^\infty(\mathbb{C})$ es inyectiva.

Teorema 1.7. *Sean $f, g \in C^1_{per}[-\pi,\pi]$, si $\widehat{f}(k) = \widehat{g}(k)$ para todo $k \in \mathbb{Z}$, entonces $f(x) = g(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.*

Demostración. Sabemos que para $f \in C^1_{per}[-\pi,\pi]$ la serie de Fourier de f converge puntualmente a f, entonces

$$f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(k)e^{ikx}.$$

De igual manera

$$g(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{g}(k)e^{ikx}.$$

Ahora, dado que $\widehat{f}(k) = \widehat{g}(k)$ para todo $k \in \mathbb{Z}$ concluimos que

$$f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(k)e^{ikx} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{g}(k)e^{ikx} = g(x).$$

■

2. Espacios de Sobolev periódicos

En este capítulo estudiamos los espacios de Sobolev de tipo periódico, desde el punto de vista de las distribuciones. Primero presentamos el concepto de función periódica generalizada o distribución periódica, luego estudiamos la transformada y la serie de Fourier de una distribución periódica, para finalizar con la definición y algunas propiedades de los espacios de Sobolev $H^s_{per}[-\pi,\pi]$.

Definición 2.1. Un funcional lineal continuo definido en $\mathscr{P}$, $T:\mathscr{P}\to\mathbb{C}$, se denomina una *distribución periódica* si existe una sucesión $(\Theta_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ en $\mathscr{P}$ tal que

$$T(\phi)=\langle T,\phi\rangle=\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}\Theta_n(x)\phi(x)\,dx,\ \forall\phi\in\mathscr{P}.$$

El conjunto de todas las distribuciones periódicas será denotado por $\mathscr{P}'$.

Observación 2.1. *Si $f\in C^1_{per}[-\pi,\pi]$, entonces la fórmula*

$$\langle f,\phi\rangle=\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\phi(x)\,dx,\ \phi\in\mathscr{P},$$

define una distribución periódica.

Probemos este resultado. Consideremos la n-ésima suma parcial de la serie de Fourier generada por f, esto es

$$S_n(x)=\sum_{k=-n}^{n}\widehat{f}(k)e^{ikx}.$$

Por lo tanto,

$$\|f-S_n\|_\infty\to 0,\ \textit{cuando } n\to\infty.$$

De donde obtenemos que

$$\begin{aligned}\langle f,\phi\rangle&=\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\phi(x)\,dx=\int_{-\pi}^{\pi}\lim_{n\to\infty}S_n(x)\phi(x)\,dx\\&=\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}S_n(x)\phi(x)\,dx.\end{aligned}$$

Notando que $S_n\in\mathscr{P}$ tenemos que f es una distribución periódica.

Definición 2.2. Diremos que una sucesión $(T_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ en $\mathscr{P}'$ converge a $T\in\mathscr{P}'$, si

$$\lim_{n\to\infty}\langle T_n,\phi\rangle=\langle T,\phi\rangle,\ \text{para todo }\phi\in\mathscr{P}.$$

En este caso escribiremos $T_n\to T$ en $\mathscr{P}'$.

Definición 2.3. La *derivada distribucional de un funcional* $f \in \mathscr{P}'$, denotada por f', se define de la siguiente forma

$$f'(\phi) = \langle f', \phi \rangle = -\langle f, \phi' \rangle, \ \phi \in \mathscr{P}. \tag{2.1}$$

De la misma manera definimos $f^{(n)}$ con $n \in \mathbb{Z}^+$ por

$$f^{(n)}(\phi) = \langle (f^{(n-1)})', \phi \rangle = -\langle f^{(n-1)}, \phi' \rangle.$$

A continuación, mostramos un ejemplo de derivada distribucional.

Ejemplo 2.1. *Considere la función*

$$u(x) = \begin{cases} |x|, & si \ -\pi \leq x \leq \pi \\ u(x+2\pi) = u(x). \end{cases}$$

La derivada de u *en* $\mathscr{P}'$ *se puede calcular como*

$$\begin{aligned} \langle u', \phi \rangle &= -\langle u, \phi' \rangle = -\int_{-\pi}^{\pi} |x| \phi'(x)\, dx = -\int_{-\pi}^{0} x\phi'(x)\, dx - \int_{0}^{\pi} x\phi'(x)\, dx \\ &= x\phi(x)\Big|_{-\pi}^{0} + \int_{-\pi}^{0} (-1)\phi(x)\, dx - x\phi(x)\Big|_{0}^{\pi} + \int_{0}^{\pi} (1)\phi(x)\, dx \\ &= \int_{-\pi}^{0} (-1)\phi(x)\, dx + \int_{0}^{\pi} (1)\phi(x)\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} g(x)\phi(x)\, dx, \end{aligned}$$

donde

$$g(x) = \begin{cases} -1, & si \quad -\pi \leq x \leq 0 \\ 1, & si \quad 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

Por tanto, g *es la derivada distribucional de* u.

Observación 2.2. *De la definición anterior notamos que* $f^{(n)}$ *es un funcional lineal continuo definido en* $\mathscr{P}$, *es decir* $f^{(n)} \in \mathscr{P}'$. *Además, toda distribución periódica es infinitamente diferenciable. Más aún,*

$$\langle f^{(n)}, \phi \rangle = (-1)^n \langle f, \phi^{(n)} \rangle, \ \phi \in \mathscr{P}.$$

A continuación extendemos la teoría de la transformada y la serie de Fourier a funciones generalizadas en $\mathscr{P}'$. Seguiremos usando la notación:

$$\Omega_k(x) = e^{ikx}, \ x \in \mathbb{R}, \ k \in \mathbb{Z}.$$

Definición 2.4. La *transformada de Fourier de una distribución periódica* $f \in \mathscr{P}'$ se define como la sucesión $\widehat{f} = (\widehat{f}(k))_{k\in\mathbb{Z}}$ dada por

$$\widehat{f}(k) = \frac{1}{2\pi}\langle f, \Omega_{-k}\rangle, \ k \in \mathbb{Z}.$$

Además,

$$(S_n f)(x) = \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k)\Omega_k(x),$$

se denomina la *n-ésima suma parcial de la serie de Fourier asociada a f.*

Teorema 2.1. *Si $f \in \mathscr{P}'$, entonces $S_n(f) \in \mathscr{P}$ para todo $n \in \mathbb{Z}^+$ y $S_n(f) \to f$ en $\mathscr{P}'$.*

Demostración. Sea $f_n = S_n(f)$, $n \in \mathbb{Z}^+$, note que $f_n \in \mathscr{P}$ ya que es un polinomio trigonométrico. Por otra parte,

$$\widehat{f_n}(k) = \begin{cases} \widehat{f}(k), & si \ \ |k| \leq n \\ 0, & si \ \ |k| > n. \end{cases}$$

Entonces usando la identidad de Parseval y la fórmula

$$\widehat{\overline{\phi}}(k) = \overline{\widehat{\phi}(-k)}, \ \phi \in \mathscr{P}$$

obtenemos que para todo $\phi \in \mathscr{P}$,

$$\begin{aligned} \langle f_n, \phi\rangle &= \langle f_n, \overline{\phi}\rangle_{L^2[-\pi,\pi]} \\ &= 2\pi \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{f_n}(k)\widehat{\phi}(-k) \\ &= 2\pi \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k)\widehat{\phi}(-k) \\ &= \sum_{k=-n}^{n} \langle f, \Omega_{-k}\rangle\widehat{\phi}(-k). \end{aligned}$$

Pero para alguna $(\Theta_m)_{m\in\mathbb{Z}^+}$ en $\mathscr{P}$ tenemos que

$$\begin{aligned} \sum_{k=-n}^{n} \langle f, \Omega_{-k}\rangle\widehat{\phi}(-k) &= \sum_{k=-n}^{n} \Big(\lim_{m\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \Theta_m(x)\Omega_{-k}(x)\, dx\Big)\widehat{\phi}(-k) \\ &= \lim_{m\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \Theta_m(x) \sum_{k=-n}^{n} \widehat{\phi}(-k)\Omega_{-k}(x)\, dx \\ &= \langle f, S_n(\phi)\rangle. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\langle f_n, \phi \rangle = 2\pi \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k)\widehat{\phi}(-k) = \langle f, S_n(\phi) \rangle. \tag{2.2}$$

Como $S_n(\phi) \to \phi$ en $\mathscr{P}$ y $f \in \mathscr{P}'$, se sigue que

$$\lim_{n\to\infty} \langle f_n, \phi \rangle = \lim_{n\to\infty} \langle f, S_n(\phi) \rangle = \langle f, \phi \rangle.$$

Luego $f_n \to f$ en $\mathscr{P}'$. ■

Como una consecuencia del teorema anterior, obtenemos la siguiente generalización de la identidad de Parseval.

Corolario 2.1. *Si $f \in \mathscr{P}'$ y $\phi \in \mathscr{P}$, entonces tenemos que*

$$\langle f, \phi \rangle = 2\pi \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(k)\widehat{\phi}(-k).$$

Demostración. Usando el teorema anterior y la igualdad en (2.2), tenemos que

$$\langle f, \phi \rangle = \lim_{n\to\infty} \langle f, S_n(\phi) \rangle = \lim_{n\to\infty} 2\pi \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k)\widehat{\phi}(-k) = 2\pi \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(k)\widehat{\phi}(-k).$$

■

Otra consecuencia del Teorema 2.1 es la siguiente caracterización de $\mathscr{P}'$.

Corolario 2.2. *$\mathscr{P}'$ es el dual topológico de $\mathscr{P}$.*

Demostración. Sabemos que toda distribución periódica define un funcional lineal continuo, luego toda distribución periódica es un elemento del dual de $\mathscr{P}$. Ahora, si $f : \mathscr{P} \to \mathbb{C}$ es un funcional lineal continuo, entonces podemos definir su transformada de Fourier en $\mathscr{P}'$ y por tanto, la correspondiente suma parcial de la serie generada por f que denotaremos por $S_n(f)$. Sea $\phi \in \mathscr{P}$, razonando como en la prueba de (2.2) tenemos que

$$\left\langle f, \sum_{k=-n}^{n} \widehat{\phi}(k)\Omega_k \right\rangle = \sum_{k=-n}^{n} \widehat{\phi}(k)\langle f, \Omega_k \rangle.$$

Ahora, dado que $S_n(f) \in \mathscr{P}$ y además $S_n(f) \to f$ en $\mathscr{P}'$, vemos que

$$\begin{aligned}
\langle f, \phi\rangle &= \lim_{n\to\infty} \langle f, S_n(\phi)\rangle = \lim_{n\to\infty} \left\langle f, \sum_{k=-n}^{n} \widehat{\phi}(k)\Omega_k \right\rangle \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{n} \widehat{\phi}(k)\langle f, \Omega_k\rangle = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{n} \left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \phi(x)\Omega_{-k}(x)\,dx\right]\langle f, \Omega_k\rangle \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \phi(x)\Big[\frac{1}{2\pi}\sum_{k=-n}^{n} \Omega_{-k}(x)\langle f, \Omega_k\rangle\Big]\,dx \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \phi(x)\Big[\frac{1}{2\pi}\sum_{k=-n}^{n} \Omega_{k}(x)\langle f, \Omega_{-k}\rangle\Big]\,dx \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \phi(x)\left[\sum_{k=-n}^{n} \Omega_k(x)\widehat{f}(k)\right]\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \phi(x) S_n(f)\,dx.
\end{aligned}$$

De esta manera, tomando $\Theta_n = S_n(f)$ tenemos que f satisface la definición de distribución periódica. ∎

Ahora tenemos la siguiente fórmula para la transformada de Fourier de la derivada de una función en $\mathscr{P}'$.

Teorema 2.2. *Si $f \in \mathscr{P}'$, entonces para $n \in \mathbb{Z}^+$*

$$\widehat{f^{(n)}}(k) = (ik)^n \widehat{f}(k).$$

Demostración. Sea $f \in \mathscr{P}'$, tenemos que

$$\begin{aligned}
\widehat{f'}(k) &= \frac{1}{2\pi}\langle f', \Omega_{-k}\rangle = -\frac{1}{2\pi}\langle f, (\Omega_{-k})'\rangle \\
&= -\frac{1}{2\pi}\langle f, -ik\Omega_{-k}\rangle = \frac{ik}{2\pi}\langle f, \Omega_{-k}\rangle \\
&= ik\widehat{f}(k),
\end{aligned}$$

y razonando de manera inductiva podemos ver que para todo $n \in \mathbb{Z}^+$,

$$\widehat{f^{(n)}}(k) = (ik)^n \widehat{f}(k).$$

∎

A continuación comenzamos el estudio del tema central de este capítulo.

Definición 2.5. Sea $s \in \mathbb{R}$, el *espacio de Sobolev periódico* $H^s_{per} = H^s_{per}[-\pi, \pi]$ es definido por

$$H^s_{per}[-\pi, \pi] = \left\{ f \in \mathscr{P}' : \sum_{k \in \mathbb{Z}} (1 + |k|^2)^s |\widehat{f}(k)|^2 < \infty \right\}.$$

A continuación, mostramos un ejemplo de una función que pertenece al espacio de Sobolev periódico.

Ejemplo 2.2. *Considere la función*

$$H(x) = \begin{cases} 0, & si \quad -\pi \leq x \leq 0 \\ 1, & si \quad 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

donde, $H(x + 2\pi) = H(x)$.

Se tiene que,

$$\widehat{H}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & si \quad k = 0 \\ \frac{-i}{\pi(2k+1)}, & si \quad k \neq 0. \end{cases}$$

Entonces,

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} (1 + |k|^2)^s |\widehat{f}(k)|^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{\pi^2} \sum_{k \neq 0} (1 + |k|^2)^s \left| \frac{1}{2k+1} \right|^2 \approx \frac{1}{\pi^2} \sum_{k \neq 0} (1 + |k|^2)^s \left| \frac{1}{2k+1} \right|^2$$

La serie converge para $2 - 2s > 1$. *Así,* $H(x) \in H^s_{per}$ *con* $s < \frac{1}{2}$.

El siguiente resultado muestra que los espacios de Sobolev de tipo periódico son espacios completos.

Teorema 2.3. *Sea* $s \in \mathbb{R}$, *entonces el espacio* $H^s_{per}[-\pi, \pi]$ *es un espacio de Hilbert con respecto a la norma inducida por el producto interno dado por*

$$\langle f, g \rangle_{H^s_{per}} = 2\pi \sum_{k \in \mathbb{Z}} (1 + |k|^2)^s \widehat{f}(k) \overline{\widehat{g}(k)}.$$

Demostración. Verifiquemos que $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H^s_{per}}$ es un producto interno en $H^s_{per}[-\pi, \pi]$. Notemos primero que si $f, g, h \in \mathscr{P}'$ y $\alpha \in \mathbb{C}$ entonces

$$\begin{aligned} \widehat{\alpha f + g}(k) &= \frac{1}{2\pi} \langle \alpha f + g, \Omega_{-k} \rangle = \frac{\alpha}{2\pi} \langle f, \Omega_{-k} \rangle + \frac{1}{2\pi} \langle g, \Omega_{-k} \rangle \\ &= (\alpha \widehat{f} + \widehat{g})(k). \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}
\langle \alpha f+g,h\rangle_{H^s_{per}} &= 2\pi\sum_{k\in\mathbb{Z}}(1+|k|^2)^s\widehat{(\alpha f+g)}(k)\overline{\widehat{h}(k)}\\
&= 2\pi\sum_{k\in\mathbb{Z}}(1+|k|^2)^s(\alpha\widehat{f}(k)+\widehat{g}(k))\overline{\widehat{h}(k)}\\
&= 2\pi\alpha\sum_{k\in\mathbb{Z}}(1+|k|^2)^s\widehat{f}(k)\overline{\widehat{h}(k)}+2\pi\sum_{k\in\mathbb{Z}}(1+|k|^2)^s\widehat{g}(k)\overline{\widehat{h}(k)}\\
&= \alpha\langle f,h\rangle_{H^s_{per}}+\langle g,h\rangle_{H^s_{per}}.
\end{aligned}$$

También tenemos que

$$\langle f,g\rangle_{H^s_{per}}=2\pi\sum_{k\in\mathbb{Z}}(1+|k|^2)^s\widehat{f}(k)\overline{\widehat{g}(k)}=\overline{\langle g,f\rangle}_{H^s_{per}}.$$

Además,

$$\langle f,f\rangle_{H^s_{per}}=2\pi\sum_{k\in\mathbb{Z}}(1+|k|^2)^s|\widehat{f}(k)|^2\geq 0.$$

Finalmente, $\langle f,f\rangle_{H^s_{per}}=0$ si y solo si $f\equiv 0$. Por tanto, $\langle\cdot,\cdot\rangle_{H^s_{per}}$ es un producto interno en $H^s_{per}[-\pi,\pi]$. De lo anterior, tenemos que $\langle\cdot,\cdot\rangle_{H^s_{per}}$ induce una norma en $H^s_{per}[-\pi,\pi]$ dada por

$$\|f\|_{H^s_{per}}=\langle f,f\rangle^{1/2}_{H^s_{per}}=\Big(2\pi\sum_{k\in\mathbb{Z}}(1+|k|^2)^s|\widehat{f}(k)|^2\Big)^{1/2}.$$

Probemos entonces que el espacio de Sobolev $H^s_{per}[-\pi,\pi]$ es un espacio completo con respecto a la norma $\|\cdot\|_{H^s_{per}}$. En efecto, si $(f_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ es una sucesión de Cauchy en $H^s_{per}[-\pi,\pi]$, entonces

$$\|f_m-f_n\|^2_{H^s_{per}}\to 0,\ \text{cuando } n,m\to\infty.$$

Pero

$$\|f_m-f_n\|^2_{H^s_{per}}=2\pi\sum_{k\in\mathbb{Z}}(1+|k|^2)^s|\widehat{f_m}(k)-\widehat{f}_n(k)|^2.$$

De aquí que si $g_n(k)=(1+|k|^2)^{s/2}\widehat{f}_n(k)$ entonces $(g_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ es una sucesión de Cauchy en $\ell^2(\mathbb{C})$ que es un espacio completo, por tanto, existe $g\in\ell^2(\mathbb{C})$ tal que

$$\|g_n-g\|_{\ell^2(\mathbb{C})}\to 0,\ \text{cuando } n\to\infty.$$

Luego, si definimos $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ por

$$f(x)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\frac{g(k)}{(1+|k|^2)^{s/2}}e^{ikx},$$

tenemos que $f \in H^s_{per}[-\pi,\pi]$ y además

$$\begin{aligned}
\|f_n - f\|^2_{H^s_{per}} &= 2\pi \sum_{k\in\mathbb{Z}} (1+|k|^2)^s \Big| \widehat{f}_n(k) - \frac{g(k)}{(1+|k|^2)^{s/2}} \Big|^2 \\
&= 2\pi \sum_{k\in\mathbb{Z}} |(1+|k|^2)^{s/2} \widehat{f}_n(k) - g(k)|^2 \\
&= 2\pi \|g_n - g\|^2_{\ell^2(\mathbb{C})} \ \to 0, \text{ cuando } n \to \infty.
\end{aligned}$$

De esta manera hemos demostrado que $H^s_{per}[-\pi,\pi]$ es un espacio de Hilbert con respecto a la norma dada por $\|\cdot\|_{H^s_{per}}$. ■

A continuación presentamos otras propiedades del espacio $H^s_{per}[-\pi,\pi]$.

Lema 2.1. *Sean $a, b \geq 0$ y $s \geq 0$. Entonces existen constantes positivas c_s y C_s tales que*

$$c_s(a^s + b^s) \leq (a+b)^s \leq C_s(a^s + b^s).$$

Teorema 2.4. *Si $s \in \mathbb{R}$, entonces $\mathscr{P}$ es denso en $H^s_{per}[-\pi,\pi]$.*

Demostración. Recordemos que $f \in \mathscr{P}$ define una distribución periódica dada por

$$\langle f, \phi\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\phi(x)\, dx, \ \phi \in \mathscr{P}.$$

De aquí que $\mathscr{P} \subset \mathscr{P}'$. Además, para $f \in \mathscr{P}$ se tiene que $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\widehat{f}(k)|^2 < \infty$, por lo tanto $f \in H^0_{per}[-\pi,\pi]$. Ahora, si $s < 0$ entonces

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} (1+|k|^2)^s |\widehat{f}(k)|^2 \leq \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\widehat{f}(k)|^2 < \infty,$$

por tanto, $f \in H^s_{per}[-\pi,\pi]$ para $s < 0$. Por otro lado, si $f \in \mathscr{P}$, $s > 0$ y usando el Lema 2.1 tenemos que

$$\begin{aligned}
\sum_{k\in\mathbb{Z}} (1+|k|^2)^s |\widehat{f}(k)|^2 &\leq C_s \sum_{k\in\mathbb{Z}} (1+|k|^{2s}) |\widehat{f}(k)|^2 \\
&\leq C_s \Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\widehat{f}(k)|^2 + \sum_{k\in\mathbb{Z}} |k|^{2s} |\widehat{f}(k)|^2 \Big) \\
&\leq C_s \Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\widehat{f}(k)|^2 + \sum_{k\in\mathbb{Z}} |k|^{m} |\widehat{f}(k)|^2 \Big) \\
&= C_s \Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\widehat{f}(k)|^2 + \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\widehat{f^{(m)}}(k)|^2 \Big),
\end{aligned}$$

donde $m \in \mathbb{Z}^+$ es tal que $2s \leq m$. Luego $\mathscr{P} \subset H^s_{per}[-\pi,\pi]$ para todo $s \in \mathbb{R}$. Ahora, probaremos que $\mathscr{P}$ es denso en $H^s_{per}[-\pi,\pi]$. Si $g \in H^s_{per}[-\pi,\pi]$ definamos la sucesión $(g_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ por

$$g_n(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{g_n}(k)\Omega_k(x),$$

donde

$$\widehat{g_n}(k) = \begin{cases} \widehat{g}(k), & si \quad |k| \leq n \\ 0, & si \quad |k| > n, \end{cases}$$

por tanto,

$$g_n(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{g_n}(k)\Omega_k(x) = \sum_{k=-n}^{n} \widehat{g}(k)\Omega_k(x).$$

Note que $g_n \in H^s_{per}[-\pi,\pi]$ y además

$$\|g - g_n\|^2_{H^s_{per}} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} (1+|k|^2)^s |\widehat{g}(k) - \widehat{g_n}(k)|^2 = \sum_{|k|>n} (1+|k|^2)^s |\widehat{g}(k)|^2.$$

Puesto que $g \in H^s_{per}[-\pi,\pi]$, tenemos que $\|g - g_n\|_{H^s_{per}} \to 0$, cuando $n \to \infty$. ■

Teorema 2.5. *Sean $s, r \in \mathbb{R}$ tales que $s \geq r$, entonces $H^s_{per}[-\pi,\pi] \hookrightarrow H^r_{per}[-\pi,\pi]$, es decir que $H^s_{per}[-\pi,\pi]$ está continua y densamente incluido en $H^r_{per}[-\pi,\pi]$. Además,*

$$\|f\|_{H^r_{per}} \leq \|f\|_{H^s_{per}}, \ f \in H^s_{per}[-\pi,\pi].$$

Demostración. Note que $(1+|k|^2)^r \leq (1+|k|^2)^s$ si $s \geq r$. De ahí que

$$\|f\|^2_{H^r_{per}} = 2\pi \sum_{k\in\mathbb{Z}} (1+|k|^2)^r |\widehat{f}(k)|^2 \leq 2\pi \sum_{k\in\mathbb{Z}} (1+|k|^2)^s |\widehat{f}(k)|^2 = \|f\|^2_{H^s_{per}}.$$

Así obtenemos que $H^s_{per}[-\pi,\pi] \subset H^r_{per}[-\pi,\pi]$ y la inclusión es continua. Además, como $\mathscr{P}$ es denso en $H^s_{per}[-\pi,\pi]$ entonces $H^s_{per}[-\pi,\pi]$ es denso en $H^r_{per}[-\pi,\pi]$. ■

Ahora identificaremos los espacios de Sobolev $H^s_{per}[-\pi,\pi]$ para $s > \frac{1}{2}$ a través de funciones continuas y periódicas, de periodo 2π; este resultado es conocido como Lema de inmersión de Sobolev.

Teorema 2.6. *Si $s > \frac{1}{2}$, entonces $H^s_{per}[-\pi,\pi] \hookrightarrow C_{per}[-\pi,\pi]$ y además,*

$$\|f\|_\infty \leq \|\widehat{f}\|_{\ell^1(\mathbb{C})} \leq C\|f\|_{H^s_{per}}, \ f \in H^s_{per}[-\pi,\pi]. \tag{2.3}$$

Demostración. Sea $s > \frac{1}{2}$ y $f \in H^s_{per}[-\pi,\pi]$, entonces usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz tenemos que

$$\begin{aligned}
\sum_{k\in\mathbb{Z}}|\widehat{f}(k)| &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{(1+|k|^2)^{s/2}|\widehat{f}(k)|}{(1+|k|^2)^{s/2}} \\
&\leq \Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}}(1+|k|^2)^s|\widehat{f}(k)|^2\Big)^{1/2}\Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}}(1+|k|^2)^{-s}\Big)^{1/2} \qquad (2.4)\\
&= C\|f\|_{H^s_{per}},
\end{aligned}$$

donde $C = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\Big(\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}}(1+|k|^2)^{-s}\Big)^{1/2}$. Por tanto, $(\widehat{f}(k))_{k\in\mathbb{Z}} \in \ell^1(\mathbb{C})$ y por lo cual

$$g(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(k)e^{ikx}, \qquad (2.5)$$

converge uniformemente. Además, vemos que $f \equiv g$ en $\mathscr{P}'$, ya que si $\phi \in \mathscr{P}$,

$$\begin{aligned}
\langle g,\phi\rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} g(x)\phi(x)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi}\Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}}\widehat{f}(k)e^{ikx}\Big)\phi(x)\,dx \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}}\widehat{f}(k)\int_{-\pi}^{\pi} e^{ikx}\phi(x)\,dx = 2\pi\sum_{k\in\mathbb{Z}}\widehat{f}(k)\widehat{\phi}(-k) \\
&= \langle f,\phi\rangle.
\end{aligned}$$

De (2.4) tenemos que para todo $x \in \mathbb{R}$,

$$|f(x)| = |g(x)| \leq \sum_{k\in\mathbb{Z}}|\widehat{f}(k)| \leq C\|f\|_{H^s_{per}}.$$

Por tanto

$$\|f\|_\infty \leq \|\widehat{f}\|_{\ell^1(\mathbb{C})} \leq C\|f\|_{H^s_{per}}.$$

■

Observación 2.3. *Del Lema de inmersión de Sobolev vemos que si $f \in H^s_{per}[-\pi,\pi]$, $s > \frac{1}{2}$, entonces f "tiene un representante en $C_{per}[-\pi,\pi]$" dado por (2.5), el cual denotaremos también por f. A continuación vamos a definir el producto de f y g de la siguiente manera.*

Definición 2.6. Sean $s > \frac{1}{2}$ y $f, g \in H^s_{per}[-\pi,\pi]$. El *producto fg* se define por

$$\langle fg,\phi\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\phi(x)\,dx,\ \phi \in \mathscr{P}.$$

El objetivo a continuación es mostrar que $H^s_{per}[-\pi,\pi]$, $s > \frac{1}{2}$, es una *álgebra de Banach*. Para establecer este resultado, usaremos el concepto de convolución de sucesiones y la desigualdad de Young para la convolución.

Definición 2.7. Sean $\alpha = (\alpha_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ y $\beta = (\beta_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ dos sucesiones de números complejos. Entonces la *convolución* de α y β se define como la sucesión $\alpha * \beta$ dada por

$$(\alpha * \beta)_k = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \alpha_j \beta_{k-j}.$$

Teorema 2.7. *Sean $\alpha \in \ell^1(\mathbb{C})$ y $\beta \in \ell^2(\mathbb{C})$, entonces $\alpha * \beta \in \ell^2(\mathbb{C})$ y además*

$$\|\alpha * \beta\|_{\ell^2(\mathbb{C})} \leq \|\alpha\|_{\ell^1(\mathbb{C})} \|\beta\|_{\ell^2(\mathbb{C})}.$$

Demostración. Consideremos $\alpha \in \ell^1(\mathbb{C})$ y $\beta \in \ell^2(\mathbb{C})$ entonces aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwartz obtenemos que para todo $k \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned}
|(\alpha * \beta)_k| &\leq \sum_{j\in\mathbb{Z}} |\alpha_j \beta_{k-j}| \\
&\leq \Big(\sum_{j\in\mathbb{Z}} |\alpha_j|\Big)^{1/2} \Big(\sum_{j\in\mathbb{Z}} |\alpha_j||\beta_{k-j}|^2\Big)^{1/2} \\
&\leq \|\alpha\|^{1/2}_{\ell^1(\mathbb{C})} \Big(\sum_{j\in\mathbb{Z}} |\alpha_j||\beta_{k-j}|^2\Big)^{1/2}.
\end{aligned}$$

Por tanto

$$\begin{aligned}
\|\alpha * \beta\|^2_{\ell^2(\mathbb{C})} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |(\alpha * \beta)_k|^2 &\leq \|\alpha\|_{\ell^1(\mathbb{C})} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \sum_{j\in\mathbb{Z}} |\alpha_j||\beta_{k-j}|^2 \\
&= \|\alpha\|_{\ell^1(\mathbb{C})} \sum_{j\in\mathbb{Z}} |\alpha_j| \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\beta_{k-j}|^2 \\
&\leq \|\alpha\|_{\ell^1(\mathbb{C})} \Big(\sum_{j\in\mathbb{Z}} |\alpha_j|\Big) \Big(\sum_{m\in\mathbb{Z}} |\beta_m|^2\Big) \\
&= \|\alpha\|^2_{\ell^1(\mathbb{C})} \|\beta\|^2_{\ell^2(\mathbb{C})}.
\end{aligned}$$

■

Definición 2.8. Un *álgebra de Banach* es un espacio de Banach X junto con un producto $(x, y) \in X \times X \mapsto xy \in X$ tal que, para todo $x, y, z \in X$ y para todo $s, r \in \mathbb{C}$

1. $(xy)z = x(yz)$,

2. $r(xy) = (rx)y = x(ry)$,

3. $(x + y)z = xz + yz$ y $x(y+z) = xy + xz$,

4. $\|xy\|_X \leq \|x\|_X \|y\|_X$.

Teorema 2.8. *Si $s > \frac{1}{2}$, entonces existe una constante positiva C_s que depende únicamente de s tal que para todo $f, g \in H^s_{per}[-\pi, \pi]$,*

$$\|fg\|_{H^s_{per}} \leq C_s \|f\|_{H^s_{per}} \|g\|_{H^s_{per}}.$$

Lo anterior indica que $H^s_{per}[-\pi, \pi]$ es un álgebra de Banach.

Demostración. Por Lema de inmersión de Sobolev, tenemos que para $s > \frac{1}{2}$, la serie de Fourier de una función en $H^s_{per}[-\pi, \pi]$ converge uniformemente. Por tanto, si $f, g \in H^s_{per}[-\pi, \pi]$ se tiene que

$$\begin{aligned}
\widehat{fg}(k) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) g(x) e^{-ikx}\, dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Big(\sum_{j\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(j) e^{ijx} \Big) g(x) e^{-ikx}\, dx \\
&= \frac{1}{2\pi} \sum_{j\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(j) \int_{-\pi}^{\pi} g(x) e^{-i(k-j)x}\, dx = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(j) \widehat{g}(k-j).
\end{aligned}$$

Usando el Lema 2.1, tenemos que

$$(1 + |k|^2)^{s/2} \Big| \sum_{j\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(j) \widehat{g}(k-j) \Big| \leq C_s \Big| \sum_{j\in\mathbb{Z}} (1 + |k-j|^s + |j|^s) \widehat{f}(j) \widehat{g}(k-j) \Big|$$

$$\begin{aligned}
&= C_s \Big| \sum_{j\in\mathbb{Z}} (\widehat{f}(j)\widehat{g}(k-j) + |k-j|^s \widehat{f}(j)\widehat{g}(k-j) + |j|^s \widehat{f}(j)\widehat{g}(k-j)) \Big| \\
&\leq C_s (|(\widehat{f} * \widehat{g})(k)| + |(\widehat{f} * \widehat{r})(k)| + |(\widehat{h} * \widehat{g})(k)|),
\end{aligned}$$

donde $\widehat{r}(k) = k^s \widehat{g}(k)$ y $\widehat{h}(k) = k^s \widehat{f}(k)$. Notemos que

$$\|\widehat{r}\|^2_{\ell^2(\mathbb{C})} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |k^s \widehat{g}(k)|^2 \leq \sum_{k\in\mathbb{Z}} (1 + |k|^2)^s |\widehat{g}(k)|^2 = \frac{1}{2\pi} \|g\|^2_{H^s_{per}}.$$

Análogamente, tenemos que $\widehat{h} \in \ell^2(\mathbb{C})$ y $\|\widehat{h}\|^2_{\ell^2(\mathbb{C})} \leq \frac{1}{2\pi}\|f\|^2_{H^s_{per}}$. Ahora, usando la desigualdad de Young entonces

$$\begin{aligned}
\|fg\|^2_{H^s_{per}} &= 2\pi \sum_{k\in\mathbb{Z}} (1+|k|^2)^s |\widehat{fg}(k)|^2 \\
&= 2\pi \sum_{k\in\mathbb{Z}} (1+|k|^2)^s \Big| \sum_{j\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(j)\widehat{g}(k-j) \Big|^2 \\
&\leq 2\pi C_s^2 \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} |(\widehat{f} * \widehat{g})(k)|^2 + \sum_{k\in\mathbb{Z}} |(\widehat{f} * \widehat{r})(k)|^2 + \sum_{k\in\mathbb{Z}} |(\widehat{h} * \widehat{g})(k)|^2 \right) \\
&\leq 2\pi C_s^2 \left(\|\widehat{f} * \widehat{g}\|^2_{\ell^2(\mathbb{C})} + \|\widehat{f} * \widehat{r}\|^2_{\ell^2(\mathbb{C})} + \|\widehat{h} * \widehat{g}\|^2_{\ell^2(\mathbb{C})} \right) \\
&\leq 2\pi C_s^2 \left(\|\widehat{f}\|^2_{\ell^1(\mathbb{C})} \|\widehat{g}\|^2_{\ell^2(\mathbb{C})} + \|\widehat{f}\|^2_{\ell^1(\mathbb{C})} \|\widehat{r}\|^2_{\ell^2(\mathbb{C})} + \|\widehat{g}\|^2_{\ell^1(\mathbb{C})} \right) \\
&\leq C_s^2 C^2 \left(\|f\|^2_{H^s_{per}} \|g\|^2_{H^s_{per}} + \|f\|^2_{H^s_{per}} \|g\|^2_{H^s_{per}} + \|f\|^2_{H^s_{per}} \|g\|^2_{H^s_{per}} \right) \\
&\leq 3C_s^2 C^2 \|f\|^2_{H^s_{per}} \|g\|^2_{H^s_{per}}.
\end{aligned}$$

Así, existe $C = C(s)$ tal que $\|fg\|_{H^s_{per}} \leq C\|f\|_{H^s_{per}}\|g\|_{H^s_{per}}$, siempre que $s > \frac{1}{2}$. ■

3. Existencia de soluciones periódicas

En este capítulo estudiamos el problema de Cauchy periódico asociado con la ecuación tipo Boussinesq de orden superior,

$$\partial_{tt}u - (I - \partial_x^2 + \partial_x^4)^{-1}(I - \partial_x^2)\partial_x^2 u = (I - \partial_x^2 + \partial_x^4)^{-1}\partial_x^2(u^2), \tag{3.1}$$

con las condiciones iniciales

$$u(0,x) = u_0(x), \quad u_t(0,x) = v_0(x), \tag{3.2}$$

donde $u_0, v_0 \in H^s_{per}[-\pi,\pi]$.

En este trabajo mostraremos que el problema de Cauchy periódico (3.1) - (3.2) posee soluciones locales en el espacio de $H^s_{per}[-\pi,\pi]$, con $s \geq 0$. Para ello utilizaremos algunos estimativos lineales, algunos estimativos no lineales y el Teorema de punto fijo de Banach que enunciamos a continuación.

Definición 3.1. Sea X un espacio normado. Un operador $\Phi : X \to X$, se dice una *contracción* si existe k, $0 < k < 1$, tal que

$$\|\Phi u - \Phi v\| \leq k\|u - v\|, \quad \text{para todo} \quad u, v \in X.$$

Teorema 3.1. *Si X un espacio de Banach y $\Phi : X \to X$ una contracción, entonces Φ tiene un único punto fijo, es decir, existe un único $u \in X$ tal que*

$$\Phi u = u.$$

Demostración. Sea $u_0 \in X$ un punto arbitrario. Definamos u_n por

$$u_{n+1} = \Phi u_n, \quad n = 0, 1, 2, ...,$$

y probamos que $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ es una sucesión de Cauchy en X. Como Φ es una contracción, existe $0 < k < 1$ tal que

$$\begin{aligned}\|u_{n+1} - u_n\| &= \|\Phi(u_n) - \Phi(u_{n-1})\| \leq k\|u_n - u_{n-1}\| \\ &= k\|\Phi(u_{n-1}) - \Phi(u_{n-2})\| \leq k^2\|u_{n-1} - u_{n-2}\| \\ &\leq \cdots \leq k^n\|u_1 - u_0\|.\end{aligned}$$

Entonces, utilizando la desigualdad triangular y la fórmula de la suma de la serie geométrica, tenemos que

$$\begin{aligned}
\|u_n - u_{n+m}\| &= \|(u_n - u_{n+1}) + (u_{n+1} - u_{n+2}) + \cdots + (u_{n+m-1} - u_{n+m})\| \\
&\leq \|u_n - u_{n+1}\| + \|u_{n+1} - u_{n+2}\| + \cdots + \|u_{n+m-1} - u_{n+m}\| \\
&\leq (k^n + k^{n+1} + \cdots + k^{n+m-1})\|u_1 - u_0\| \\
&\leq k^n(1 + k + k^2 + \cdots + k^{m-1} + \dots)\|u_1 - u_0\| \\
&= k^n(1-k)^{-1}\|u_1 - u_0\|,
\end{aligned}$$

de donde,

$$\|u_n - u_{n+m}\| \to 0, \text{ cuando } n \to \infty.$$

Por tanto, $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ es una sucesión de Cauchy en X; además, como X es un espacio de Banach, existe $u \in X$ tal que

$$u_n \to u, \text{ cuando } n \to \infty.$$

Veamos que u es un punto fijo de Φ. Como

$$\|\Phi u_n - \Phi u\| \leq k\|u_n - u\| \to 0, \text{ cuando } n \to \infty,$$

entonces

$$\lim_{n\to\infty} \Phi u_n = \Phi u.$$

Luego,

$$\Phi u = \lim_{n\to\infty} \Phi u_n = \lim_{n\to\infty} u_{n+1} = u.$$

Por otra parte, si u y u' son puntos fijos de Φ entonces

$$\|u - u'\| = \|\Phi u - \Phi u'\| \leq k\|u - u'\|,$$

y como $0 < k < 1$ concluimos que $\|u - u'\| = 0$, de donde $u = u'$. Por tanto, hemos probado que Φ tiene un único punto fijo en X. ■

Ahora, notemos que si definimos el operador $A : H^s_{per}[-\pi,\pi] \to H^{s-4}_{per}[-\pi,\pi]$, $s \in \mathbb{R}$, mediante la fórmula

$$Au = (I - \partial_x^2 + \partial_x^4)u,$$

entonces tenemos que $\widehat{Au}(k) = (1 + k^2 + k^4)\widehat{u}(k)$ por tanto,

$$Au = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{Au}(k)e^{ikx} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} (1 + k^2 + k^4)\widehat{u}(k)e^{ikx}.$$

Por consiguiente definimos el operador $A^{-1} : H^s_{per}[-\pi, \pi] \to H^{s+4}_{per}[-\pi, \pi]$, $s \in \mathbb{R}$, por medio de la fórmula

$$A^{-1}(u) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{\widehat{u}(k)}{1 + k^2 + k^4} e^{ikx},$$

entonces

$$\widehat{A^{-1}u}(k) = \frac{\widehat{u}(k)}{1 + k^2 + k^4}.$$

Así la ecuación (3.1) se puede escribir en la forma equivalente

$$\partial_{tt}u = M(u) + F(u), \tag{3.3}$$

donde M es el operador lineal definido por

$$M(u) = A^{-1}(I - \partial_x^2)\partial_x^2 u$$

y F corresponde a la parte no lineal,

$$F(u) = A^{-1}\partial_x^2(u^2).$$

A continuación, tenemos el siguiente resultado.

Teorema 3.2. *$M : H^s_{per}[-\pi, \pi] \to H^s_{per}[-\pi, \pi]$ es un operador lineal acotado para $s \in \mathbb{R}$.*

Demostración. Para $u \in H^s_{per}[-\pi, \pi]$ tenemos que

$$\begin{aligned}
\|(A^{-1}\partial_x^2)u\|^2_{H^s_{per}} &= 2\pi \sum_{k\in\mathbb{Z}} (1 + |k|^2)^s |\widehat{A^{-1}\partial_x^2 u}(k)|^2 \\
&= 2\pi \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{(1 + |k|^2)^s}{(1 + k^2 + k^4)^2} |\widehat{\partial_x^2 u}(k)|^2 \\
&= 2\pi \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{k^4(1 + |k|^2)^s}{(1 + k^2 + k^4)^2} |\widehat{u}(k)|^2 \\
&\leq 2\pi \sum_{k\in\mathbb{Z}} (1 + |k|^2)^s |\widehat{u}(k)|^2 \\
&= \|u\|^2_{H^s_{per}}.
\end{aligned}$$

Análogamente vemos que

$$\begin{aligned}\|(A^{-1}\partial_x^4)u\|_{H^s_{per}}^2 &= 2\pi\sum_{k\in\mathbb{Z}}(1+|k|^2)^s|\widehat{A^{-1}\partial_x^4 u}(k)|^2\\ &= 2\pi\sum_{k\in\mathbb{Z}}\frac{(1+|k|^2)^s}{(1+k^2+k^4)^2}|\widehat{\partial_x^4 u}(k)|^2\\ &= 2\pi\sum_{k\in\mathbb{Z}}\frac{k^8(1+|k|^2)^s}{(1+k^2+k^4)^2}|\widehat{u}(k)|^2\\ &\leq 2\pi\sum_{k\in\mathbb{Z}}(1+|k|^2)^s|\widehat{u}(k)|^2\\ &= \|u\|_{H^s_{per}}^2.\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}\|M(u)\|_{H^s_{per}} &= \|A^{-1}(\partial_x^2-\partial_x^4)u\|_{H^s_{per}}\\ &\leq \|(A^{-1}\partial_x^2)u\|_{H^s_{per}}+\|(A^{-1}\partial_x^4)u\|_{H^s_{per}}\\ &\leq 2\|u\|_{H^s_{per}}.\end{aligned}$$

Entonces de lo anterior se ha demostrado que M es un operador lineal acotado. ■

Realizando la sustitución

$$v=\partial_t u,$$

vemos que

$$\partial_t v=\partial_{tt}u,$$

y por tanto, de la ecuación (3.3),

$$\partial_t v = M(u)+F(u).$$

Entonces el problema de valor inicial (3.1) - (3.2) se puede ver como el siguiente sistema de ecuaciones equivalente

$$\begin{cases}\partial_t u = v\\ \partial_t v = A^{-1}(I-\partial_x^2)\partial_x^2 u + A^{-1}\partial_x^2(u^2),\end{cases}\tag{3.4}$$

con las condiciones iniciales

$$u(0,x)=u_0(x),\quad v(0,x)=v_0(x).\tag{3.5}$$

A continuación hallaremos la solución $(u,\ v)$ del siguiente sistema de ecuaciones lineal

$$\begin{cases} \partial_t u = v, \\ \partial_t v = A^{-1}(I-\partial_x^2)\partial_x^2 u, \\ u(0,x) = u_0(x),\ v(0,x) = v_0(x). \end{cases} \tag{3.6}$$

Tomando transformada de Fourier en la segunda ecuación del sistema de ecuaciones (3.6) con respecto a la variable espacial x, tenemos que

$$\begin{aligned} \widehat{\partial_t v}(t,k) &= \frac{\widehat{\partial_x^2 u}(t,k) - \widehat{\partial_x^4 u}(t,k)}{1+k^2+k^4} \\ &= \frac{((ik)^2-(ik)^4)\widehat{u}(t,k)}{1+k^2+k^4} \\ &= \frac{-(k^2+k^4)\widehat{u}(t,k)}{1+k^2+k^4}. \end{aligned}$$

Además, usando la regla de Leibniz dado que tanto $v(t,x)$ como su derivada parcial $v_t(t,x)$ son continuas en t y x, vemos que

$$(\partial_t\widehat{v})(t,k) = \partial_t\Big(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} v(t,x)e^{-ikx}\,dx\Big) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\partial_t v(t,x)e^{-ikx}\,dx = \widehat{\partial_t v}(t,k).$$

De modo que

$$(\partial_{tt}\widehat{u})(t,k) = (\partial_t\widehat{v})(t,k) = \frac{-(k^2+k^4)\widehat{u}(t,k)}{1+k^2+k^4},\ \ \widehat{u}(0,k)=\widehat{u_0}(k),\ \ \widehat{u_t}(0,k)=\widehat{v}_0(x).$$

Lo anterior es una EDO lineal de orden 2 tipo $z''+cz=0$, por tanto

$$\widehat{u}(t,k) = cos(\phi(k)t)\widehat{u}_0(k) + \frac{1}{\phi(k)}sin(\phi(k)t)\widehat{v}_0(k),$$

donde $\phi(k):\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ está dada por

$$\phi(k) = \sqrt{\frac{k^2+k^4}{1+k^2+k^4}}$$

Ahora, como $\widehat{v}(t,k) = \partial_t\widehat{u}(t,k)$,

$$\widehat{v}(t,k) = -\phi(k)sin(\phi(k)t)\widehat{u}_0(k) + cos(\phi(k)t)\widehat{v}_0(k).$$

Así,

$$(u(t),v(t)) = S(t)(u_0,v_0) = (S_1(t)(u_0,v_0), S_2(t)(u_0,v_0)),$$

donde

$$S_1(t)(u,v) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \Big(cos(\phi(k)t)\widehat{u}(k) + \frac{1}{\phi(k)} sin(\phi(k)t)\widehat{v}(k)\Big) e^{ikx}, \tag{3.7}$$

$$S_2(t)(u,v) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left(-\phi(k) sin(\phi(k)t)\widehat{u}(k) + cos(\phi(k)t)\widehat{v}(k)\right) e^{ikx}. \tag{3.8}$$

Por tanto, si (u, v) es solución del sistema (3.6) con las condiciones iniciales

$$u(0,x) = u_0(x),\ v(0,x) = v_0(x),$$

entonces $(u(t), v(t)) = S(t)(u_0, v_0)$, donde S está definido por (3.7) - (3.8). Inversamente, a través de algunos cálculos como calcular las diferentes derivadas parciales a $u(t, x)$ con respecto a t o x y reemplazar dichos resultados en el sistema (3.6), podemos ver que si $(u(t), v(t)) = S(t)(u_0, v_0)$, entonces (u, v) es solución del sistema (3.6). Por consiguiente tenemos el siguiente teorema.

Teorema 3.3. *La única solución del problema (3.6) está dada por*

$$(u(t), v(t)) = S(t)(u_0, v_0),$$

donde $S(t)(u,v) = (S_1(u,v), S_2(u,v))$ está definida por

$$S_1(t)(u,v) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \Big(cos(\phi(k)t)\widehat{u}(k) + \frac{1}{\phi(k)} sin(\phi(k)t)\widehat{v}(k)\Big) e^{ikx},$$
$$S_2(t)(u,v) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left(-\phi(k) sin(\phi(k)t)\widehat{u}(k) + cos(\phi(k)t)\widehat{v}(k)\right) e^{ikx},$$

y la función $\phi(k) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ está dada por

$$\phi(k) = \sqrt{\frac{k^2 + k^4}{1 + k^2 + k^4}}.$$

A continuación presentamos algunos estimativos. El operador $S(t)$ cumple con la siguiente propiedad.

Lema 3.1. *Sea $s \in \mathbb{R}$, entonces para todo $t \in \mathbb{R}$, $S(t)$ es un operador lineal acotado de $H^s_{per}[-\pi,\pi] \times H^s_{per}[-\pi,\pi]$ en sí mismo. Más aún, para todo $t \in \mathbb{R}$, tenemos que*

$$\|S(t)(u,v)\|_{H^s_{per}\times H^s_{per}} \le C\|(u,v)\|_{H^s_{per}\times H^s_{per}}.$$

Demostración. Primero notemos que existen constantes $c_1, c_2 > 0$ tales que

$$c_1 \leq \phi \leq c_2,$$

entonces tenemos que

$$\begin{aligned}
\|S_1(t)(u,v)\|^2_{H^s_{per}} &= 2\pi \sum_{k\in\mathbb{Z}} (1+|k|^2)^s \left| \widehat{S_1(t)(u,v)}(k) \right|^2 \\
&= 2\pi \sum_{k\in\mathbb{Z}} (1+|k|^2)^s \left| cos(\phi(k)t)\widehat{u}(k) + \frac{1}{\phi(k)} sin(\phi(k)t)\widehat{v}(k) \right|^2 \\
&\leq C_1 \sum_{k\in\mathbb{Z}} (1+|k|^2)^s \Big(|cos(\phi(k)t)\widehat{u}(k)|^2 + \left| \frac{1}{\phi(k)} sin(\phi(k)t)\widehat{v}(k) \right|^2 \Big) \\
&\leq C_1 \sum_{k\in\mathbb{Z}} (1+|k|^2)^s \Big(|\widehat{u}(k)|^2 + \left| \frac{\widehat{v}(k)}{\phi(k)} \right|^2 \Big) \\
&= C_1 \Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}} (1+|k|^2)^s |\widehat{u}(k)|^2 + \sum_{k\in\mathbb{Z}} (1+|k|^2)^s \left| \frac{\widehat{v}(k)}{\phi(k)} \right|^2 \Big) \\
&\leq C_2 \Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}} (1+|k|^2)^s |\widehat{u}(k)|^2 + \sum_{k\in\mathbb{Z}} (1+|k|^2)^s |\widehat{v}(k)|^2 \Big) \\
&= C_2 (\|u\|^2_{H^s_{per}} + \|v\|^2_{H^s_{per}}) \\
&\leq C(\|u\|_{H^s_{per}} + \|v\|_{H^s_{per}})^2.
\end{aligned}$$

Luego, existe una constante $C > 0$ tal que

$$\|S_1(t)(u,v)\|_{H^s_{per}} \leq C\|(u,v)\|_{H^s_{per}\times H^s_{per}}.$$

Además,

$$\begin{aligned}
\|S_2(t)(u,v)\|^2_{H^s_{per}} &= 2\pi \sum_{k\in\mathbb{Z}} (1+|k|^2)^s \left| \widehat{S_2(t)(u,v)}(k) \right|^2 \\
&= 2\pi \sum_{k\in\mathbb{Z}} (1+|k|^2)^s \left| -\phi(k) sin(\phi(k)t)\widehat{u}(k) + cos(\phi(k)t)\widehat{v}(k) \right|^2 \\
&\leq C_1 \sum_{k\in\mathbb{Z}} (1+|k|^2)^s \left(|\phi(k) sin(\phi(k)t)\widehat{u}(k)|^2 + |cos(\phi(k)t)\widehat{v}(k)|^2 \right) \\
&\leq C_1 \sum_{k\in\mathbb{Z}} (1+|k|^2)^s \left(|\phi(k)|^2 |\widehat{u}(k)|^2 + |\widehat{v}(k)|^2 \right) \\
&= C_1 \Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}} (1+|k|^2)^s |\phi(k)|^2 |\widehat{u}(k)|^2 + \sum_{k\in\mathbb{Z}} (1+|k|^2)^s |\widehat{v}(k)|^2 \Big)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq C_2\Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}}(1+|k|^2)^s\,|\widehat{u}(k)|^2+\sum_{k\in\mathbb{Z}}(1+|k|^2)^s\,|\widehat{v}(k)|^2\Big)\\
&= C_2(\|u\|^2_{H^s_{per}}+\|v\|^2_{H^s_{per}})\\
&\leq C(\|u\|_{H^s_{per}}+\|v\|_{H^s_{per}})^2.
\end{aligned}
$$

Luego, existe una constante $C>0$ tal que

$$\|S_2(t)(u,v)\|_{H^s_{per}}\leq C\|(u,v)\|_{H^s_{per}\times H^s_{per}}.$$

De lo anterior concluimos que

$$
\begin{aligned}
\|S(t)(u,v)\|_{H^s_{per}\times H^s_{per}} &= \|S_1(t)(u,v)\|_{H^s_{per}}+\|S_2(t)(u,v)\|_{H^s_{per}}\\
&\leq C\|(u,v)\|_{H^s_{per}\times H^s_{per}}.
\end{aligned}
$$

■

A continuación estableceremos un estimativo para el operador F. Usaremos un estimativo bilineal denominado *Ley Multiplicativa de Sobolev*. No presentaremos la prueba de este resultado porque se deben usar herramientas avanzadas del análisis funcional, y el estudio de este tema está por encima del nivel del presente trabajo, sin embargo la prueba puede verse en el artículo [19].

Teorema 3.4. (*Ley Multiplicativa de Sobolev*) *Sean s_1, $s_2\in\mathbb{R}$, tales que*

$$s_1+s_2\geq 0,\quad s\leq s_1,s_2,\quad s<s_1+s_2-\frac{1}{2}$$

ó

$$s_1+s_2>0,\quad s<s_1,s_2,\quad s\leq s_1+s_2-\frac{1}{2},$$

entonces existe $C>0$ tal que

$$\|\phi\varphi\|_{H^s_{per}}\leq C\|\phi\|_{H^{s_1}_{per}}\|\varphi\|_{H^{s_2}_{per}}.$$

Lema 3.2. *Sea $s\geq 0$, entonces existen constantes C_1, $C_2>0$ tales que*

1. $\|F(u)\|_{H^s_{per}}\leq C_1\|u\|^2_{H^s_{per}}$.

2. $\|F(u)-F(v)\|_{H^s_{per}}\leq C_2\|u-v\|_{H^s_{per}}(\|u\|_{H^s_{per}}+\|v\|_{H^s_{per}})$.

Demostración. De la definición del espacio $H^s_{per}[-\pi,\pi]$ vemos que

$$\begin{aligned}
\|F(u)\|^2_{H^s_{per}} &= \|A^{-1}\partial_x^2(u^2)\|^2_{H^s_{per}}\\
&= 2\pi\sum_{k\in\mathbb{Z}}(1+|k|^2)^s|\widehat{A^{-1}\partial_x^2(u^2)}(k)|^2\\
&= 2\pi\sum_{k\in\mathbb{Z}}\frac{(1+|k|^2)^s}{(1+k^2+k^4)^2}|\widehat{\partial_x^2(u^2)}(k)|^2\\
&= 2\pi\sum_{k\in\mathbb{Z}}\frac{(1+|k|^2)^s k^4}{(1+k^2+k^4)^2}|\widehat{u^2}(k)|^2\\
&= 2\pi\sum_{k\in\mathbb{Z}}(1+|k|^2)^{s-2}\frac{(1+|k|^2)^2 k^4}{(1+k^2+k^4)^2}|\widehat{u^2}(k)|^2\\
&\leq 2\pi\sum_{k\in\mathbb{Z}}(1+|k|^2)^{s-2}|\widehat{u^2}(k)|^2\\
&= \|u^2\|^2_{H^{s-2}_{per}}.
\end{aligned}$$

Entonces usando el estimativo del Teorema 3.4 con $s_1 = s$ y $s_2 = s$ tenemos que para $s \geq 0$,

$$\|u^2\|_{H^{s-2}_{per}} = \|uu\|_{H^{s-2}_{per}} \leq C_1\|u\|_{H^s_{per}}\|u\|_{H^s_{per}}.$$

Así,

$$\|F(u)\|_{H^s_{per}} \leq \|u^2\|_{H^{s-2}_{per}} \leq C_1\|u\|^2_{H^s_{per}}.$$

Finalmente, observemos que

$$F(u)-F(v) = A^{-1}\partial_x^2(u^2) - A^{-1}\partial_x^2(v^2) = A^{-1}\partial_x^2(u^2-v^2).$$

Por tanto, usando argumentos similares a los anteriores, usando de nuevo el Teorema 3.4 con $s_1 = s$ y $s_2 = s$ tenemos que para $s \geq 0$,

$$\begin{aligned}
\|F(u)-F(v)\|_{H^s_{per}} &= \|A^{-1}\partial_x^2(u^2-v^2)\|_{H^s_{per}}\\
&\leq C_1\|u^2-v^2\|_{H^{s-2}_{per}}\\
&= C_1\|(u-v)(u+v)\|_{H^{s-2}_{per}}\\
&\leq C_2\|u-v\|_{H^s_{per}}\|u+v\|_{H^s_{per}}\\
&\leq C_2\|u-v\|_{H^s_{per}}\left(\|u\|_{H^s_{per}}+\|v\|_{H^s_{per}}\right).
\end{aligned}$$

Luego, existe una constante $C_2 > 0$ tal que

$$\|F(u) - F(v)\|_{H^s_{per}} \leq C_2 \|u - v\|_{H^s_{per}} \left(\|u\|_{H^s_{per}} + \|v\|_{H^s_{per}} \right).$$

$\blacksquare$

A continuación establecemos el resultado principal de este trabajo.

Teorema 3.5. *Suponga $s \geq 0$, entonces para todo $(u_0, v_0) \in H^s_{per} \times H^s_{per}$ existe $T > 0$, que depende solamente de $\|(u_0, v_0)\|_{H^s_{per} \times H^s_{per}}$, tal que el problema (3.4) - (3.5) tiene una única solución que satisface*

$$(u, v) \in C\big([0, T], H^s_{per} \times H^s_{per}\big)$$

Además, para todo $0 < T' < T$ existe una vecindad $\mathbb{V}$ de (u_0, v_0) en $H^s_{per} \times H^s_{per}$ tal que la correspondencia $(\widetilde{u}_0, \widetilde{v}_0) \to (\widetilde{u}(\cdot), \widetilde{v}(\cdot))$, que asocia a $(\widetilde{u}_0, \widetilde{v}_0)$ la solución $(\widetilde{u}(\cdot), \widetilde{v}(\cdot))$ de la ecuación (3.4) con la condición inicial $(\widetilde{u}_0, \widetilde{v}_0)$ es una función Lipschitz de $\mathbb{V}$ en $C\big([0, T'], H^s_{per} \times H^s_{per}\big)$.

Demostración. Dado $T > 0$, definamos el espacio

$$X^s(T) = C\left([0, T], H^s_{per}[-\pi, \pi] \times H^s_{per}[-\pi, \pi]\right)$$

dotado con la norma dada por

$$\|(u, v)\|_{X^s(T)} = \max_{t \in [0,T]} \{\|u(t, \cdot)\|_{H^s_{per}[-\pi,\pi]} + \|v(t, \cdot)\|_{H^s_{per}[-\pi,\pi]}\}.$$

Entonces dado que $H^s_{per}[-\pi, \pi]$ es un espacio de Banach, se sigue que $H^s_{per} \times H^s_{per}$ también lo es, por tanto $X^s(T)$ es un espacio de Banach. Ahora, sea $B_R(T)$ la bola cerrada de radio R centrada en el origen en el espacio $X^s(T)$, esto es

$$B_R(T) = \{(u, v) \in X^s(T) : \|(u, v)\|_{X^s(T)} \leq R\}.$$

Fijada $(u_0, v_0) \in H^s_{per}[-\pi, \pi] \times H^s_{per}[-\pi, \pi]$, definimos el operador

$$\Psi(u(t), v(t)) = (\Psi_1(u(t), v(t)), \Psi_2(u(t), v(t))), \text{ con } (u, v) \in X^s(T).$$

donde

$$\Psi_1(u(t),v(t)) = S_1(t)(u_0,v_0) + \int_0^t S_1(t-\tau)(0,F(u(\tau)))\,d\tau,$$

$$\Psi_2(u(t),v(t)) = S_2(t)(u_0,v_0) + \int_0^t S_2(t-\tau)(0,F(u(\tau)))\,d\tau.$$

Mostremos que la correspondencia $(u(t),v(t)) \to \Psi(u(t),v(t))$ envía a $B_R(T)$ en sí mismo y es una contracción si R y T son escogidos adecuadamente. En efecto, si $t \in [0,T]$ y $(u,v) \in B_R(T)$, entonces usando el Lema 3.1 y el Lema 3.2 tenemos que

$$\begin{aligned}
\|\Psi_1(u(t),v(t))\|_{H^s_{per}} &\le \|S_1(t)(u_0,v_0)\|_{H^s_{per}} + \Big\|\int_0^t S_1(t-\tau)(0,F(u(\tau)))\,d\tau\Big\|_{H^s_{per}} \\
&\le K\|(u_0,v_0)\|_{H^s_{per}\times H^s_{per}} + \int_0^t \|S_1(t-\tau)(0,F(u(\tau)))\|_{H^s_{per}}\,d\tau \\
&\le K\|(u_0,v_0)\|_{H^s_{per}\times H^s_{per}} + K\int_0^t \|(0,F(u(\tau))\|_{H^s_{per}\times H^s_{per}}\,d\tau \\
&\le K\|(u_0,v_0)\|_{H^s_{per}\times H^s_{per}} + K\int_0^t \|F(u(\tau))\|_{H^s_{per}}\,d\tau \\
&\le K\|(u_0,v_0)\|_{H^s_{per}\times H^s_{per}} + KK_1\int_0^t \|u(\tau)\|^2_{H^s_{per}}\,d\tau \\
&\le K\|(u_0,v_0)\|_{H^s_{per}\times H^s_{per}} + KK_1T\|(u,v)\|^2_{X^s(T)} \\
&\le K\|(u_0,v_0)\|_{H^s_{per}\times H^s_{per}} + KK_1TR^2.
\end{aligned}$$

Análogamente, vemos que

$$\|\Psi_2(u(t),v(t))\|_{H^s_{per}} \le K\|(u_0,v_0)\|_{H^s_{per}\times H^s_{per}} + KK_1TR^2.$$

Así,

$$\begin{aligned}
\|\Psi(u(t),v(t))\|_{H^s_{per}\times H^s_{per}} &= \|\Psi_1(u(t),v(t))\|_{H^s_{per}} + \|\Psi_2(u(t),v(t))\|_{H^s_{per}} \\
&\le 2K\|(u_0,v_0)\|_{H^s_{per}\times H^s_{per}} + 2KK_1TR^2.
\end{aligned}$$

Escogiendo $R = 4K\|(u_0, v_0)\|_{H^s_{per}\times H^s_{per}}$ y $T > 0$ tal que

$$16K^2K_1T\|(u_0, v_0)\|_{H^s_{per}\times H^s_{per}} \leq 1, \tag{3.9}$$

obtenemos que

$$\begin{aligned}\|\Psi(u(t), v(t))\|_{H^s_{per}\times H^s_{per}} &= 2K\|(u_0, v_0)\|_{H^s_{per}\times H^s_{per}}(1 + 16K^2K_1T\|(u_0, v_0)\|_{H^s_{per}\times H^s_{per}})\\ &\leq 4K\|(u_0, v_0)\|_{H^s_{per}\times H^s_{per}} = R.\end{aligned}$$

De manera que Ψ aplica $B_R(T)$ en sí mismo. Probemos ahora que Ψ es una contracción. Si (u_1, v_1), $(u_2, v_2) \in B_R(T)$, entonces de la definición de Ψ tenemos que

$$\begin{aligned}&\Psi(u_1(t), v_1(t)) - \Psi(u_2(t), v_2(t))\\ &= \left(\int_0^t S_1(t-\tau)(0, F(u_1(\tau)) - F(u_2(\tau)))\,d\tau, \int_0^t S_2(t-\tau)(0, F(u_1(\tau)) - F(u_2(\tau)))\,d\tau\right).\end{aligned}$$

Entonces, usando el ítem (2) del Lema 3.2 vemos que para toda $t \in [0, T]$,

$$\begin{aligned}&\|\Psi(u_1(t), v_1(t)) - \Psi(u_2(t), v_2(t))\|_{H^s_{per}\times H^s_{per}}\\
&= \Big\|\int_0^t S_1(t-\tau)(0, F(u_1(\tau)) - F(u_2(\tau)))\,d\tau\Big\|_{H^s_{per}}\\
&+ \Big\|\int_0^t S_2(t-\tau)(0, F(u_1(\tau)) - F(u_2(\tau)))\,d\tau\Big\|_{H^s_{per}}\\
&\leq 2K\int_0^t \|(0, F(u_1(\tau)) - F(u_2(\tau)))\|_{H^s_{per}\times H^s_{per}}\,d\tau\\
&\leq 2K\int_0^t \|F(u_1(\tau)) - F(u_2(\tau))\|_{H^s_{per}}\,d\tau\\
&\leq 2KK_2\int_0^t \|u_1(\tau) - u_2(\tau)\|_{H^s_{per}}(\|u_1(\tau)\|_{H^s_{per}} + \|u_2(\tau)\|_{H^s_{per}})\,d\tau\\
&\leq 2KK_2\|(u_1, v_1) - (u_2, v_2)\|_{X^s(T)}\int_0^t (\|u_1(\tau)\|_{H^s_{per}} + \|u_2(\tau)\|_{H^s_{per}})\,d\tau\\
&\leq 2KK_2\|(u_1, v_1) - (u_2, v_2)\|_{X^s(T)}\int_0^t (\|(u_1, v_1)\|_{X^s(T)} + \|(u_2, v_2)\|_{X^s(T)})\,d\tau\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq 4KK_2RT\|(u_1,v_1)-(u_2,v_2)\|_{X^s(T)}\\
&= 16K^2K_2T\|(u_0,v_0)\|_{H^s_{per}\times H^s_{per}}\|(u_1,v_1)-(u_2,v_2)\|_{X^s(T)}.
\end{aligned}
$$

Ahora, escogemos T lo suficiente pequeño para que se cumpla (3.9) y además se cumpla que

$$
16K^2K_2T\|(u_0,v_0)\|_{H^s_{per}\times H^s_{per}} \leq \frac{1}{2}. \tag{3.10}
$$

De donde concluimos que

$$
\|\Psi(u_1(t),v_1(t))-\Psi(u_2(t),v_2(t))\|_{X^s(T)} \leq \frac{1}{2}\|(u_1,v_1)-(u_2,v_2)\|_{X^s(T)}.
$$

Así, Ψ es una contracción, por tanto, usando el Teorema de punto fijo de Banach tenemos que existe un único punto fijo (u,v) de Ψ en $B_R(T)$, el cual es una solución de la ecuación integral

$$
u(t)=\Psi_1(u(t),v(t))=S_1(t)(u_0,v_0)+\int_0^t S_1(t-\tau)(0,F(u(\tau)))\,d\tau, \tag{3.11}
$$

$$
v(t)=\Psi_2(u(t),v(t))=S_2(t)(u_0,v_0)+\int_0^t S_2(t-\tau)(0,F(u(\tau)))\,d\tau. \tag{3.12}
$$

Note que si (u,v) es solución de esta ecuación integral, entonces (u,v) satisface el problema (3.4) - (3.5).

La unicidad de la solución es consecuencia del siguiente argumento. Sean $U(t)=(u(t),v(t))$, $\widetilde{U}(t)=(\widetilde{u}(t),\widetilde{v}(t))$ dos soluciones de la ecuación (3.11) - (3.12) con condición inicial $U_0=(u_0,v_0)$ y $\widetilde{U}_0=(\widetilde{u}_0,\widetilde{v}_0)$ respectivamente, tales que

$$
U,\widetilde{U}\in C\left([0,T],H^s_{per}\times H^s_{per}\right).
$$

Entonces, si $t\in[0,T]$ tenemos que

$$
\begin{aligned}
\|U(t)-\widetilde{U}(t)\|_{H^s_{per}\times H^s_{per}} &= \|(u(t)-\widetilde{u}(t),v(t)-\widetilde{v}(t))\|_{H^s_{per}\times H^s_{per}}\\
&= \|u(t)-\widetilde{u}(t)\|_{H^s_{per}}+\|v(t)-\widetilde{v}(t)\|_{H^s_{per}}\\
&= 2K\|(U_0-\widetilde{U}_0)\|_{H^s_{per}\times H^s_{per}}\\
&\quad + 2KK_2\int_0^t \|u(\tau)-\widetilde{u}(\tau)\|_{H^s_{per}}(\|u(\tau)\|_{H^s_{per}}+\|\widetilde{u}(\tau)\|_{H^s_{per}})\,d\tau
\end{aligned}
$$

$$\leq K\|(U_0 - \widetilde{U}_0)\|_{H^s_{per}\times H^s_{per}} + 4KK_2N \int_0^t \|U(\tau) - \widetilde{U}(\tau)\|_{H^s_{per}\times H^s_{per}}\, d\tau,$$

donde asumimos que

$$\|U\|_{X^s(T)}, \|\widetilde{U}\|_{X^s(T)} \leq N.$$

Entonces, tomando $K_3 = 4KK_2$ y usando la desigualdad de Gronwall[1], tenemos que para todo $t \in [0, T]$ se satisface

$$\|U(t) - \widetilde{U}(t)\|_{H^s_{per}\times H^s_{per}} \leq Ke^{K_3NT}\|U_0 - \widetilde{U}_0\|_{H^s_{per}\times H^s_{per}}. \tag{3.13}$$

Ahora, si $U_0 = \widetilde{U}_0$ entonces concluimos que $\|U - \widetilde{U}\|_{X^s(T)} = 0$, lo cual implica la unicidad de la solución en el espacio $X^s(T)$. Por tanto, de la discusión de la existencia de soluciones para el problema (3.4) - (3.5), para $(u_0, v_0) \in H^s_{per} \times H^s_{per}$ tenemos garantizada la existencia de un tiempo T para la solución asociada, caracterizada por las desigualdades (3.9) y (3.10).

Además, si $0 < T' < T$ definamos

$$\mathbb{V} = \{\widetilde{U}_0 \in H^s_{per} \times H^s_{per} : \|\widetilde{U}_0 - U_0\|_{H^s_{per}\times H^s_{per}} < \epsilon\},$$

con $\epsilon = \left(\frac{1}{T'} - \frac{1}{T}\right)\epsilon'$ y $0 < \epsilon' < \text{mín}\left\{\frac{1}{16K^2K_1}, \frac{1}{32K^2K_2}\right\}$. Note que si $\widetilde{U}_0 \in \mathbb{V}$,

$$\|\widetilde{U}_0\|_{H^s_{per}\times H^s_{per}} \leq \|\widetilde{U}_0 - U_0\|_{H^s_{per}\times H^s_{per}} + \|U_0\|_{H^s_{per}\times H^s_{per}} \leq \epsilon + \|U_0\|_{H^s_{per}\times H^s_{per}}. \tag{3.14}$$

Por tanto, tenemos que

$$16K^2K_1\|\widetilde{U}_0\|_{H^s_{per}\times H^s_{per}}T' \leq 1,\ 32K^2K_2\|\widetilde{U}_0\|_{H^s_{per}\times H^s_{per}}T' \leq 1. \tag{3.15}$$

En efecto, usando (3.9) tenemos que

$$\begin{aligned}
16K^2K_1\|\widetilde{U}_0\|_{H^s_{per}\times H^s_{per}} &\leq 16K^2K_1(\epsilon + \|U_0\|_{H^s_{per}\times H^s_{per}}) \\
&\leq 16K^2K_1\Big(\frac{1}{T'} - \frac{1}{T}\Big)\epsilon' + 16K^2K_1\|U_0\|_{H^s_{per}\times H^s_{per}} \\
&\leq 16K^2K_1\Big(\frac{1}{T'} - \frac{1}{T}\Big)\epsilon' + \frac{1}{T} \\
&< \frac{1}{T'}.
\end{aligned}$$

[1] Sean $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $x_0 \in I$ tales que, $0 \leq f(x) \leq A + B\int_{x_0}^{x} f(s)\, ds$ para todo $x \in I$, con $A, B \geq 0$. Entonces $f(x) \leq Ae^{B(x-x_0)}$

Similarmente, usando (3.10)

$$
\begin{aligned}
32K^2K_2\|\widetilde{U}_0\|_{H^s_{per}\times H^s_{per}} &\leq 32K^2K_2(\epsilon + \|U_0\|_{H^s_{per}\times H^s_{per}}) \\
&\leq 32K^2K_2\Big(\frac{1}{T'} - \frac{1}{T}\Big)\epsilon' + 32K^2K_2\|U_0\|_{H^s_{per}\times H^s_{per}} \\
&\leq 32K^2K_1\Big(\frac{1}{T'} - \frac{1}{T}\Big)\epsilon' + \frac{1}{T} \\
&< \frac{1}{T'}.
\end{aligned}
$$

Entonces de (3.15) concluimos que para cualquier $\widetilde{U}_0 \in \mathbb{V}$ existe una única solución $\widetilde{U}(t) \in C([0,T'], H^s_{per} \times H^s_{per})$ de la ecuación (3.4) con condición inicial $\widetilde{U}_0$. Además, $\widetilde{U} \in B_R(T')$ con $R = 4K\|\widetilde{U}_0\|_{H^s_{per}\times H^s_{per}}$. Entonces usando (3.14), para $\widetilde{U}_0, \widetilde{W}_0 \in \mathbb{V}$ con soluciones asociadas $\widetilde{U}$ y $\widetilde{W}$ respectivamente, tenemos que

$$
\begin{aligned}
\|\widetilde{U}\|_{X^s(T)} + \|\widetilde{W}\|_{X^s(T)} &\leq 4K\left(\|\widetilde{U}_0\|_{H^s_{per}\times H^s_{per}} + \|\widetilde{W}_0\|_{H^s_{per}\times H^s_{per}}\right) \\
&\leq 8K\left(\epsilon + \|U_0\|_{H^s_{per}\times H^s_{per}}\right) \\
&\leq 8K\left(\frac{1}{16K^2K_1}\Big(\frac{1}{T'} - \frac{1}{T}\Big) + \frac{1}{16K^2K_1T}\right) \\
&\leq \frac{1}{2K^2K_1T'}.
\end{aligned}
$$

Entonces usando (3.13) con $N = (2K^2K_1T')^{-1}$ obtenemos que para todo $t \in [0,T']$,

$$
\|\widetilde{U}(t) - \widetilde{W}(t)\|_{H^s_{per}\times H^s_{per}} \leq Ke^{NK_4T'}\|\widetilde{U}_0 - \widetilde{W}_0\|_{H^s_{per}\times H^s_{per}} \leq C\|\widetilde{U}_0 - \widetilde{W}_0\|_{H^s_{per}\times H^s_{per}},
$$

con $C = Ke^{K_2(KK_1)^{-1}}$. Así, la correspondencia $(\widetilde{u}_0, \widetilde{v}_0) \to (\widetilde{u}(\cdot), \widetilde{v}(\cdot))$, que asocia a $(\widetilde{u}_0, \widetilde{v}_0)$ la solución de (3.4) con la condición inicial (3.5) es una función Lipschitz de $\mathbb{V}$ en $C\left([0,T'], H^s_{per} \times H^s_{per}\right)$, y esto completa la prueba. ■

Bibliografía

[1] T. B. Benjamin, J. L. Bona, J. J. Mahony. Model equations for long waves in nonlinear dispersive systems. *Philos. Trans. R. Soc. Lond. A.* 227 (1972), 47-78.

[2] J. Bona, R. Sachs. Global existence of smooth solution and stability waves for a generalized Boussinesq equation. *Phys.* 118 (1988), 12–29.

[3] M. Bruzón. Exact solutions of a generalized Boussinesq equation, Theoretical and Mathematical. *Physics.* 160 (1) (2009), 894-904.

[4] R. Camassa, D. D. Holm. An integrable shallow water equation with peaked solitons. *Phys. Rev. Lett.* 71, (1993), 1661-1664.

[5] P. Clarkson. New exact solution of the Boussinesq equation. *Eur. J. Appl.* Maths 1 (1990), 279–300.

[6] G. D. Crapper. Introduction to water waves. *Ellis Horwood Series: Mathematics and its Applications. Ellis Horwood Ltd.* Chichester, 1984.

[7] J. Hammack, H. Segur. The Korteweg-de Vries equation and water waves. II. Comparison with experiments. *J. Fluid Mech.* 65 (1974), 289-313.

[8] R. Hirota. Solutions of the classical Boussinesq equation and the spherical Boussinesq equation: the Wronskian Technique. *J. Phys. Soc.* Japan 55 (1986), 2137–2150.

[9] R. Iorio. Fourier Analysis and partial differencial equations. Cambridge university press. 2001.

[10] V. K. Kalantarov, O.A. Ladyzhenskaya. The occurrence of collapse for quasilinear equation of parabolic and hyperbolic types. *J. Sov. Maths.* 10 (1978), 53–70.

[11] D. Korteweg, G. de Vries. On the chance of form of long waves advancing in a rectangular canal and on a new type of long stationary waves. *Phil. Mag.* 39 (1895), 422-433.

[12] S. Y. Lai, Y.H. Wu. The asymptotic solution of the Cauchy problem for a generalized Boussinesq equation. *Discrete and Continuous Dynamical System.* 3 (2003), 401–408.

[13] F. Linares, M. Scialom. Asymptotic behavior of solutions of a generalized Boussinesq type equation. *Nonlinear Anal.* 25 (1995), 1147–1158.

[14] F. Linares. Ecuaciones dispersivas no lineales. Caso periódico. Escuela Venezolana de Matemáticas. 2007.

[15] F. Linares. Global existence of small solutions for a generalized Boussinesq equation. *J. Differen. Equat.* 106 (1993), 257–293.

[16] Y. Liu. Instability of solitary waves for generalized Boussinesq equations. *J. Dyn. Differen. Equat.* 5 (1993), 537–558.

[17] R. Pego, J. Quintero. Two-dimensional solitary waves for a Benney-Luke equation. *Phys. D.* 132 (1999), 476-496.

[18] G. Schneider, C. Eugene. Kawahara dynamics in dispersive media. *Physica D.* 152-153 (2001), 384-394.

[19] T. Tao. Multilinear weighted convolution of L^2 functions and applications to nonlinear dispersive equations. *Am. J. Math.* 122 (2001), 839-908.

[20] S. Wang, H. Xue. Global solution for a generalized Boussinesq equation. *Applied Mathematics and Computation*, 204 (1) (2008), 130-136.

[21] N. Zabusky. C. Galvin. Shallow-water waves, the Korteweg-de Vries equation and solitons. *J. Fluid Mech.* 47 (1971), 811-824.