

BIFURCACIÓN DE HOPF EN UN SISTEMA AUTÓNOMO  
PRESA-PREDADOR CON CRECIMIENTO LOGÍSTICO Y  
RESPUESTA FUNCIONAL DE HOLLING TIPO II



Universidad  
del Cauca

DANNY ESTEFANY PAZ VIDAL  
JOAN ESTEBAN SALAZAR GORDILLO

UNIVERSIDAD DEL CAUCA  
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES, EXACTAS Y DE LA EDUCACIÓN  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS  
POPAYÁN, CAUCA  
2023

BIFURCACIÓN DE HOPF EN UN SISTEMA AUTÓNOMO  
PRESA-PREDADOR CON CRECIMIENTO LOGÍSTICO Y  
RESPUESTA FUNCIONAL DE HOLLING TIPO II

DANNY ESTEFANY PAZ VIDAL  
JOAN ESTEBAN SALAZAR GORDILLO

Director  
Dr. JHON JAIRO PÉREZ

TRABAJO DE GRADO  
Para la obtención del título de matemático

UNIVERSIDAD DEL CAUCA  
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES, EXACTAS Y DE LA EDUCACIÓN  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS  
POPAYÁN, CAUCA  
2023

Nota de aceptación

---

---

---

---

---

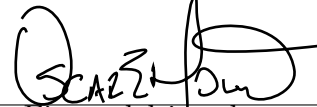
Firma del director

Dr. Jhon Jairo Pérez

---

Firma del jurado

Mg. Wilmer Molina



---

Firma del jurado

Mg. Oscar Molina

---

Firma del Coordinador de Matemáticas

Dr. Carlos Arias

Lugar y fecha de sustentación:

Auditorio Jesus María Otero (La  
palomera), 8 de septiembre de 2023.

# DEDICATORIA

## **Dedicatoria por Danny**

Dedico este trabajo con una sonrisa y sentimiento a mis padres, Wilson y Janeth, por haberme apoyado en todo este proceso y desde muy pequeña haberme inculcado el estudio y la humildad como fuente de sabiduría y prosperidad en la vida. Con su dedicación, consejos y correcciones hasta el momento de hoy he podido con motivación y amor a mi carrera terminar esta etapa y espero poder seguir contando con su compañía para continuar en este bonito mundo del aprendizaje. También quiero dedicar este trabajo a mis hermanos que han querido ver alcanzado con esfuerzo y dedicación este trabajo y me han brindado bonitas palabras de perseverancia. A mis amigos cercanos con los que he llegado a compartir tiempos de estudio, inquietud y de alegría, gracias a nuestras horas de estudio y encuentros hoy en día vemos ya casi por terminada esta primer etapa de conocimiento. Dedico este trabajo también a mi novio que me ha inspirado en ser una mejor persona y me ha dado aliento y palabras de amor y valentía, y a mis profesores, por haberme compartido su conocimiento, libros y motivarme a seguir estudiando.

## **Dedicatoria por Esteban**

Dedico este trabajo a mis amados padres, Janeth Gordillo y Jovanny, quienes han inculcado valores, principios y, sobre todo, una educación sólida a lo largo de todas las etapas de mi vida. Su apoyo incondicional, amor y enseñanzas han sido fundamentales en el transcurso de este proceso. Dedico este trabajo a Angie quien ha estado a mi lado en todo momento y ha sido una voz de aliento durante los momentos más difíciles. Su apoyo incondicional ha significado mucho para mí y ha sido una fuente de inspiración invaluable. A mis familiares y amigos, quienes de diversas maneras han respaldado mi educación y mis proyectos.

# AGRADECIMIENTOS

## **Agradecimientos de Danny**

Agradezco en primer lugar a mi familia por el apoyo brindado en mi vida, gracias a ello he culminado esta etapa, orgullosa de lo que he podido lograr. Agradezco especialmente a mis profesores Jhon Jairo Pérez, Wilmer Molina y Freddy Bustos por compartirme su conocimiento, por brindarme motivación para continuar en el mundo del aprendizaje y correr el riesgo de aventurarme a nuevas experiencias. Confirmando con esto que las matemáticas son un mundo inmenso donde los navegantes se aventurarán a un mar de preguntas, incertidumbres y certezas, pero que con el conocimiento y el anhelo el camino tomará forma y la vida tendrá un sentido, inspiración suficiente para continuar. Agradezco a Dios y a la vida, por la salud dada para terminar este proyecto.

## **Agradecimientos de Esteban**

En primer lugar, deseo expresar mi más profundo agradecimiento a Dios, quien ha sido mi guía constante a lo largo de mi vida. También quiero aprovechar esta oportunidad para agradecer a mis padres, Janeth Gordillo y Jovanny Salazar, han sido mis pilares fundamentales, guiándome con amor y dedicación. Gracias por inculcarme valores, principios y una educación sólida que me han permitido crecer y desarrollarme como persona. Agradezco de corazón a Angie, quien ha estado a mi lado en cada paso de este camino. Tu apoyo constante, aliento y palabras de motivación me han dado la fuerza necesaria para superar los momentos más difíciles. No puedo dejar de agradecer a mis familiares y amigos, quienes han estado presentes en cada etapa de mi vida. También quiero expresar mi gratitud a mis profesores y mentores, cuya sabiduría y orientación han sido fundamentales para mi crecimiento académico y personal. Gracias por su dedicación y paciencia al compartir sus conocimientos y experiencias conmigo.

# ÍNDICE GENERAL

---

<b>ÍNDICE DE SÍMBOLOS</b>	<b>8</b>
<b>ÍNDICE DE FIGURAS</b>	<b>9</b>
<b>ÍNDICE DE TABLAS</b>	<b>10</b>
<b>GLOSARIO</b>	<b>11</b>
<b>INTRODUCCIÓN</b>	<b>14</b>
<b>1. PRELIMINARES</b>	<b>17</b>
1.1. Sistemas lineales y no lineales . . . . .	17
1.2. Sistemas dinámicos . . . . .	20
1.2.1. Flujo de un sistema dinámico . . . . .	21
1.2.2. Puntos de equilibrio del sistema dinámico . . . . .	24
1.2.3. El teorema de Hartman-Grobman . . . . .	24
1.2.4. Función de Lyapunov . . . . .	26
1.2.5. Órbitas . . . . .	27
1.2.6. Criterios de estabilidad . . . . .	31
1.2.7. Equivalencia en sistemas dinámicos . . . . .	35
<b>2. BIFURCACIÓN DE ANDRONOV-HOPF</b>	<b>38</b>
2.1. Forma normal de la bifurcación de Hopf . . . . .	40
2.1.1. Bifurcación de Hopf supercrítica . . . . .	40
2.1.2. Bifurcación de Hopf subcrítica . . . . .	43
2.2. Teorema de la forma normal de la bifurcación de Hopf . . . . .	44
2.3. Bifurcación de Hopf genérica . . . . .	45
2.4. Primer coeficiente de Lyapunov . . . . .	62

2.5. Teorema de la bifurcación de Hopf . . . . .	63
2.6. Teorema de Poincaré, Andronov, Hopf . . . . .	63
<b>3. BIFURCACIÓN DE HOPF EN UN SISTEMA AUTÓNOMO PRESA-PREDADOR CON CRECIMIENTO LOGÍSTICO Y RESPUESTA FUNCIONAL DE HO- LLING TIPO II</b>	<b>64</b>
3.1. Introducción al sistema . . . . .	64
3.2. Sistema orbitalmente equivalente . . . . .	71
3.3. Puntos de equilibrio del sistema . . . . .	71
3.4. Matriz jacobiana y clasificación topológica de cada punto de equilibrio .	73
3.5. Caso I: Se considera a $c$ parámetro de bifurcación y $\delta, k$ parámetros reales	76
3.5.1. Primer coeficiente de Lyapunov . . . . .	79
3.5.2. Retrato de fase, bifurcación de Hopf supercrítica . . . . .	82
3.6. Caso II: Se considera a $k$ parámetro de bifurcación y $\delta, c$ parámetros reales	84
3.6.1. Primer coeficiente de Lyapunov . . . . .	86
3.6.2. Retrato de fase, bifurcación de Hopf supercrítica . . . . .	89
3.7. Caso III: Se considera a $\delta$ parámetro de bifurcación y $c, k$ parámetros reales	91
3.7.1. Primer coeficiente de Lyapunov . . . . .	93
3.7.2. Retrato de fase, bifurcación de Hopf supercrítica . . . . .	96
3.8. Ciclos límites en el sistema . . . . .	98
<b>TRABAJOS FUTUROS</b>	<b>101</b>
<b>CONCLUSIONES</b>	<b>103</b>
<b>BIBLIOGRAFÍA</b>	<b>105</b>

## ÍNDICE DE SÍMBOLOS

---

$i$	—	Unidad imaginaria.
$t$	—	Tiempo.
$\mathbb{R}, \mathbb{Z}, \mathbb{C}$	—	Conjunto de: Números reales, enteros, complejos, respec.
$\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n$	—	N-tuplas de números reales, n-tuplas de números complejos.
$\mathbf{x}, \mathbf{y}$	—	Vectores en $\mathbb{R}^n$ .
$\mathbf{x}^*$	—	Punto de equilibrio en $\mathbb{R}^n$ .
$I, I(\mathbf{x})$	—	Intervalo en $\mathbb{R}$ , intervalo maximal de la solución $\mathbf{x}$ .
$E, K, U, V$	—	Conjuntos abiertos de $\mathbb{R}^n$ .
$F = (F_1, \dots, F_n)$	—	Campo vectorial en $\mathbb{R}^n$ .
$\frac{\partial F_i}{\partial x_i}$	—	Derivada parcial de $F_i$ respecto a la variable $x_i$ .
$DF = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_i}{\partial x_i} \end{bmatrix}$	—	Matriz jacobiana de $F$ .
$F \in C^r(E)$	—	$F$ tiene derivadas parciales continuas de orden $r$ en $E$ .
$F \in C^\infty(E)$	—	$F$ es suave; derivadas parciales continuas de todo orden en $E$ .
$\sigma = \text{tr}(A)$	—	Traza de la matriz $A$ .
$\Delta = \det(A)$	—	Determinante de la matriz $A$ .
$\alpha, \beta, \delta, c, k$	—	Parámetros reales.
$\mathbf{p}, \mathbf{q}, \bar{\mathbf{p}}, \bar{\mathbf{q}}$	—	Vectores en $\mathbb{C}^n$ y sus conjugados.
$\mathbf{p}^T, A^T$	—	Vector y matriz transpuesta, respectivamente.
$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$	—	Condición inicial: En el instante $t_0$ hay una cantidad $\mathbf{x}_0$ .
$L, \nabla(L)$	—	Función de Lyapunov, gradiente de $L$ .
$B(\mathbf{x}, r) \sim B_r(\mathbf{x})$	—	Bola abierta con centro en $\mathbf{x}$ y radio $r$ .
$\frac{dx}{dt} = \dot{x}(t)$	—	Tasa de cambio de $x$ respecto a la variable $t$ .
$z, \ z\ $	—	Número complejo y su módulo.
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	—	Producto interno en $\mathbb{C}^n$ .



# ÍNDICE DE FIGURAS

---

1.1. Órbita en un sistema dinámico continuo . . . . .	29
1.2. Ciclo límite asintóticamente estable . . . . .	30
1.3. Punto silla-nodo, punto centro . . . . .	33
1.4. Punto foco estable, punto foco inestable . . . . .	34
1.5. Punto nodo estable, punto nodo inestable . . . . .	34
1.6. Punto nodo estrella estable, punto nodo estrella inestable . . . . .	34
1.7. Sistemas topológicamente equivalentes en el origen . . . . .	37
2.1. Bifurcación de Hopf supercrítica . . . . .	42
2.2. Diagrama de bifurcación de Hopf supercrítica [4] . . . . .	43
2.3. Bifurcación de Hopf subcrítica . . . . .	43
2.4. Diagrama de bifurcación de Hopf subcrítica [4] . . . . .	44
3.1. Crecimiento exponencial y logístico en las presas . . . . .	66
3.2. Respuesta funcional de Holling tipo II . . . . .	67
3.3. Proporción de presas consumidas vs presas disponibles . . . . .	68
3.4. Modelo malthusiano en predadores con ausencia de presas . . . . .	68
3.5. Crecimiento cíclico de presas y predadores . . . . .	70
3.6. Caso I, $P_1 = (0, 0)$ <i>silla-nodo</i> . . . . .	82
3.7. Caso I, $P_2 = (3, 0)$ <i>silla-nodo</i> . . . . .	82
3.8. Bifurcación de Hopf supercrítica en $c = c_0$ y con $P_3$ trasladado al origen	83
3.9. Caso II, $P_1 = (0, 0)$ <i>silla-nodo</i> . . . . .	89
3.10. Caso II, $P_2 = (5, 0)$ <i>silla-nodo</i> . . . . .	89
3.11. Bifurcación de Hopf supercrítica en $k = k_0$ y con $P_3$ trasladado al origen	90
3.12. Caso III, $P_1 = (0, 0)$ <i>silla-nodo</i> . . . . .	96
3.13. Caso III, $P_2 = (3, 5, 0)$ <i>silla-nodo</i> . . . . .	96
3.14. Bifurcación de Hopf supercrítica en $\delta = \delta_0$ y con $P_3$ trasladado al origen	97

## ÍNDICE DE TABLAS

---

3.1. Descripción de las variables de estado del sistema (3.2) . . . . .	65
3.2. Descripción de los parámetros del sistema (3.2) . . . . .	65
3.3. Puntos de equilibrio del sistema (3.2) . . . . .	73
3.4. Clasificación topológica de los puntos de equilibrio de (3.2) . . . . .	75
3.5. Valores de bifurcación con $P_3$ trasladado al origen en el sistema (3.2) .	98

# GLOSARIO

---

## CONJUNTO ABIERTO

$E$  es abierto en  $\mathbb{R}^n$  si para todo  $\mathbf{x} \in E$  existe un  $\epsilon > 0$  tal que  $B(\mathbf{x}, \epsilon) \subset E$ .

## CONJUNTO COMPACTO

Un espacio  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  es compacto si de cada cubrimiento abierto  $V$  de  $M$  se puede extraer una subcolección finita que también cubre a  $M$  [15].

## ECUACIÓN DIFERENCIAL ORDINARIA

Una ecuación diferencial es ordinaria (E.D.O) si la ecuación involucra las derivadas de una función con respecto a una única variable independiente.

## HOMEOMORFISMO

La función biyectiva  $H$  es un homeomorfismo si es continua con inversa continua.

## MATRIZ SIMÉTRICA

Una matriz cuadrada de orden  $n$   $A$  es simétrica si  $A = A^T$ .

## TRANSFORMACIÓN LINEAL

Una transformación lineal  $T$  es una función entre dos espacios vectoriales donde se preserva la operación de adición de vectores y producto escalar por un vector.

## RESUMEN

---

El sistema autónomo presa-predador con crecimiento logístico y respuesta funcional de Holling tipo II describe la dinámica poblacional de dos especies (presa-predador) y es modelado por el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = F_1(x_1, x_2) = x_1 \left(1 - \frac{x_1}{k}\right) - \frac{cx_1x_2}{1+x_1} \\ \dot{x}_2 = F_2(x_1, x_2) = -\delta x_2 + \frac{cx_1x_2}{1+x_1}, \end{cases} \quad (1)$$

donde  $c, k, \delta$  son parámetros positivos y  $x_1(t), x_2(t)$  representan las densidades poblacionales de presas y predadores, respectivamente, en el instante  $t$ .

En este estudio se identifican los puntos de equilibrio del sistema (1), encontrando dos puntos silla-nodo y un punto de equilibrio  $P_3$  no trivial. Se determina las condiciones para que la matriz jacobiana de (1), evaluada en  $P_3$ , tenga un par de valores propios complejos puros que es la condición necesaria para la ocurrencia de la bifurcación de Hopf; lo cual permite encontrar los valores  $c_0, k_0, \delta_0$  que cumplen esta condición. Se considera cada uno de estos valores como parámetro de bifurcación, y bajo las hipótesis del teorema de la forma normal de la bifurcación de Hopf, se concluye que para cada uno de los valores  $c_0, k_0, \delta_0$  el sistema (1) es topológicamente equivalente a la forma normal de la bifurcación de Hopf. Por último, se calcula el primer coeficiente de Lyapunov para determinar el tipo de bifurcación de Hopf (supercrítica, subcrítica y degenerada) que admite el sistema en cada uno de los casos.

Para respaldar los resultados teóricos encontrados se usa MAPLE y MATLAB, los cuales permiten confrontar los resultados. En particular, el uso de MATLAB permitió visualizar los resultados de forma gráfica.

**Palabras clave:** Sistema dinámico, bifurcación de Hopf, punto de equilibrio, teorema de Hartman-Grobman, retrato fase, curva logística, respuesta funcional de Holling tipo II.

# ABSTRACT

---

The autonomous prey-predator system with logistic growth and Holling type II functional response describes the population dynamics of two species (prey-predator) and is modeled by the system of ordinary differential equations:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = F_1(x_1, x_2) = x_1 \left(1 - \frac{x_1}{k}\right) - \frac{cx_1x_2}{1+x_1} \\ \dot{x}_2 = F_2(x_1, x_2) = -\delta x_2 + \frac{cx_1x_2}{1+x_1}, \end{cases} \quad (2)$$

where  $c, k, \delta$  are positive parameters, and  $x_1(t), x_2(t)$  represent the population densities of prey and predators, respectively, at time  $t$ .

This study identifies the equilibrium points of the system (2), finding two saddle-node points and one non-trivial equilibrium point  $P_3$ . The conditions are determined for the jacobian matrix of (2), evaluated at  $P_3$ , to have a pair of purely complex eigenvalues, which is a necessary condition for the occurrence of the Hopf bifurcation. This allows finding the values  $c_0, k_0, \delta_0$  that satisfy this condition. Each of these values is considered as a bifurcation parameter, and under the assumptions of the normal form theorem for the Hopf bifurcation, it is concluded that for each of the values  $c_0, k_0, \delta_0$  the system (2) is topologically equivalent to the normal form of the Hopf bifurcation. Finally, the first Lyapunov coefficient is calculated to determine the type of Hopf bifurcation (supercritical, subcritical, and degenerate) that the system admits in each of the cases.

To support the theoretical results found, MAPLE and MATLAB are used, which allow the comparison of the results. In particular, the use of MATLAB allowed visualizing the results graphically.

**Keywords:** Dynamical system, Hopf bifurcation, equilibrium point, Hartman-Grobman theorem, phase portrait, logistic curve, Holling type II functional response.

# INTRODUCCIÓN

---

Desde el siglo XX las matemáticas empezaron a ser aplicadas en diversos campos, especialmente en la biología, despertando gran interés en la comunidad científica [5]. Los modelos matemáticos son la descripción matemática de un fenómeno de la vida real, y teniendo en cuenta las relaciones e hipótesis que gobiernan el fenómeno se construye la ecuación o sistema de ecuaciones matemáticas que lo determinan, las cuales pueden ser algebraicas o diferenciales. Un caso particular son los sistemas dinámicos que modelan fenómenos que evolucionan con el tiempo. Estos sistemas pueden clasificarse como discretos ( $t \in \mathbb{Z}$ ) o continuos ( $t \in \mathbb{R}$ ), estos últimos son modelados por ecuaciones diferenciales ordinarias que con frecuencia involucran parámetros reales.

La bifurcación de Hopf es aplicada en la física, biología, química y en otras áreas. Es un tipo de bifurcación que se caracteriza por el cambio de estabilidad de un punto de equilibrio (atractor o repulsor), dando lugar a un ciclo límite conocido como órbita periódica cuando se perturba un parámetro (de bifurcación) del sistema. Es decir, cuando un sistema sufre bifurcación de Hopf, se pasa de un comportamiento estable a un comportamiento oscilatorio. Un ejemplo de este fenómeno particularmente es el sistema autónomo presa-predador con crecimiento logístico y respuesta funcional de Holling tipo II. Dicho modelo descrito en (3) consta de un par de ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales de primer orden

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = F_1(x_1, x_2) = x_1 \left(1 - \frac{x_1}{k}\right) - \frac{cx_1x_2}{1 + x_1} \\ \dot{x}_2 = F_2(x_1, x_2) = -\delta x_2 + \frac{cx_1x_2}{1 + x_1}, \end{cases} \quad (3)$$

donde  $c, k, \delta$  son parámetros positivos y  $x_1(t), x_2(t)$  representan las densidades poblacionales de presas y predadores respectivamente en el instante  $t$ . En este sistema  $k$  es la capacidad de carga del entorno para la presa,  $\delta$  es la tasa natural de muerte del

predador,  $c$  es la eficiencia de la caza de los predadores y  $\frac{x_1}{1+x_1}$  representa la respuesta funcional del predador respecto a la densidad de presas (Ver [16] y [3]).

Los parámetros  $c$ ,  $k$  y  $\delta$  son parámetros críticos en un sistema presa-predador y pueden influir significativamente en la ocurrencia de la bifurcación de Hopf en dicho sistema. El parámetro  $c$  representa la capacidad de los predadores para capturar y consumir presas, y está relacionada con la tasa de encuentro y la tasa de consumo de presas por parte de los predadores, si los predadores son altamente eficientes en la caza, pueden mantener la población de presas bajo control, si la eficiencia de la caza es baja, las presas pueden crecer sin control y provocar presión sobre los predadores y su disminución. La eficiencia de caza es importante porque determina la tasa a la cual los predadores pueden reducir la población de presas. El parámetro  $k$  representa el tamaño máximo de la población de presas que el ecosistema puede mantener en equilibrio a largo plazo teniendo en cuenta todos los recursos disponibles; si la población de presas excede la capacidad de carga, los recursos pueden escasear y las presas pueden morir por falta de alimento generado por la competencia entre ellas, afectando a la población de predadores. Por último, si el parámetro  $\delta$  que representa la tasa de mortalidad del predador es baja entonces los predadores tienen más tiempo para cazar y consumir, lo que lleva a un agotamiento de las presas y a su vez a una disminución de la población de predadores debido a la falta de alimento.

El estudio de (3) puede revelar comportamientos interesantes, como la existencia de ciclos límites, la estabilidad de los puntos de equilibrio y la posibilidad de cambios cualitativos del sistema cuando uno o más parámetros son ligeramente alterados, lo que facilita comprender la dinámica de los ecosistemas y dar sugerencias para la conservación de las especies. El objetivo de este documento es realizar un estudio del comportamiento de las poblaciones en (3), realizando un análisis cualitativo de este. Además se establecen las condiciones bajo las cuales (3) experimenta una bifurcación de Hopf, para lograr esto, se considera  $c, k$  y  $\delta$  como parámetro de bifurcación, y se encuentran las condiciones suficientes para que en cada caso este sistema esté sujeto a dicha bifurcación. El estudio cualitativo de este modelo proporciona información valiosa para comprender

cómo las perturbaciones en el entorno y los cambios en los parámetros pueden afectar a las poblaciones de presas y predadores. Estudiar la presencia y estabilidad de estos ciclos es esencial para comprender los patrones de oscilación y cómo pueden influir en la dinámica del ecosistema, lo cuál permitirá hacer mejores predicciones sobre la evolución de las poblaciones del sistema en cuestión.

A lo largo de este trabajo se calculan puntos de equilibrio, su clasificación topológica, y se hace un estudio de la bifurcación de Hopf; se usan los software MAPLE y MATLAB para facilitar la verificación de los resultados encontrados a través de los retratos de fases sobre la dinámica de este sistema. Las figuras encontradas en el documento son de nuestra autoría a excepción de las figuras 2.2 y 2.4 que fueron obtenidas del libro Kuznetsov [4]. Para llevar a cabo los objetivos propuestos se expondrán conceptos de la teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias, sistemas dinámicos y bifurcación de Hopf.

En el **Capítulo 1**, se presentan los conceptos teóricos necesarios de ecuaciones diferenciales ordinarias, sistemas lineales, no lineales y sistemas dinámicos continuos.

En el **Capítulo 2**, se exponen algunos resultados fundamentales en el estudio de la bifurcación de Hopf, y las condiciones suficientes para que un sistema autónomo sea topológicamente equivalente a la forma normal de la bifurcación de Hopf.

En el **Capítulo 3**, se encuentran los puntos de equilibrio triviales y no triviales de (3), los cuales son hiperbólicos permitiendo la linealización del sistema en cada caso. Se considera el punto de equilibrio no trivial y se hallan los valores de los parametros  $c, k$  y  $\delta$  para que la matriz jacobiana evaluada en él posea un par de valores propios complejos puros, que es la condición suficiente para la bifurcación de Hopf y, a través de las hipótesis del teorema de la forma normal, se demuestra la equivalencia topológica en cada valor del parámetro con la forma norma de la bifurcación de Hopf, y por último, se calcula el primer coeficiente de Lyapunov para mostrar qué tipo de bifurcación de Hopf admite el sistema.



# Capítulo 1

## PRELIMINARES

---

### 1.1. Sistemas lineales y no lineales

El sistema autónomo presa-predador con crecimiento logístico y respuesta funcional de Holling tipo II es un sistema dinámico continuo, por tanto, el estudio de ecuaciones diferenciales ordinarias, tanto en sistemas lineales como no lineales, resulta fundamental para la comprensión de este trabajo. Muchos de los resultados y definiciones que se mostrarán en los capítulos 1 y 2 han sido obtenidos principalmente de los libros *Elements of Applied Bifurcation Theory* [4] y *Differential Equations and Dynamical Systems* [8].

**Definición 1.** (*Sistemas autónomos y no autónomos*)

Si se considera a  $X = \mathbb{R}^n$  como un espacio de estados,  $E$  un conjunto abierto en  $X$ ,  $\mathbf{x} \in E$  y  $t \in \mathbb{R}$ , se puede definir un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias no autónomo por:

$$\dot{\mathbf{x}} = F(\mathbf{x}, t) \quad \text{ó} \quad \frac{d\mathbf{x}}{dt} = F(\mathbf{x}, t), \quad (1.1)$$

donde  $F : E \times \mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$  es un campo vectorial de clase  $C^1(E)$ . Dicho sistema es *autónomo* si la variable  $t$  no aparece explícitamente en el sistema, es decir viene dado por:

$$\dot{\mathbf{x}} = F(\mathbf{x}) \quad \text{ó} \quad \frac{d\mathbf{x}}{dt} = F(\mathbf{x}), \quad (1.2)$$

donde  $F : E \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

Si la variable  $t$  representa el tiempo los sistemas (1.1) y (1.2) se llaman *sistemas dinámico no autónomo* y *autónomo* respectivamente. Si en (1.2)  $F$  es una transformación lineal de  $\mathbb{R}^n$  en  $\mathbb{R}^n$ , el sistema es llamado un *sistema autónomo lineal* y es representado por  $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$ , donde  $A$  es la matriz de representación de  $F$ .

Para el caso lineal y para cada  $\mathbf{x}_0 \in E$  el problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \end{cases}$$

tiene solución única para todo  $t \in \mathbb{R}$  y está dada por

$$\mathbf{x}(t) = e^{At} \mathbf{x}_0. \quad (1.3)$$

Si  $\det(A) \neq 0$ , entonces  $A$  es diagonalizable, es decir, existen matrices  $J, P$  tales que

$$P^{-1}AP = J,$$

donde  $J$  es una matriz diagonal y  $P$  es una matriz real invertible. Así la solución (1.3) también se puede representar de la forma

$$\mathbf{x}(t) = Pe^{Jt}P^{-1}\mathbf{x}_0.$$

Según la naturaleza de los valores propios  $\lambda_{1,2}$  de la matriz cuadrada de orden 2  $A$ ,  $J$  es equivalente a alguna de estas formas:

1. Si  $\lambda_1\lambda_2 < 0$ , entonces

$$J = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}.$$

2. Si  $\lambda_1 \leq \lambda_2 < 0$  o  $\lambda_1 \geq \lambda_2 > 0$ , entonces

$$J = \begin{bmatrix} \lambda_1 & k \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix},$$

con  $k \in \{0, 1\}$ .

3. Si  $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta, \beta > 0$ , entonces

$$J = \begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}.$$

(Ver a detalle en [8]).

Una solución constante de (1.2) se denomina *solución de equilibrio* y las variables  $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$  de la solución  $\mathbf{x}(t)$  son las *variables de estado* del sistema.

**Teorema 1.** (*Teorema fundamental de existencia y unicidad*)

Sea el problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = F(\mathbf{x}) \\ \mathbf{x}(\mathbf{t}_0) = \mathbf{x}_0, \quad t_0 \in I(\mathbf{x}_0) \subseteq \mathbb{R}, \quad \mathbf{x}_0 \in E \end{cases} \quad (1.4)$$

donde  $E$  es un abierto en  $X = \mathbb{R}^n$ . Si  $F \in C^1(E)$ , se garantiza la existencia y unicidad de la solución de (1.4) en  $[t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon]$  para algún  $\epsilon > 0$ .

**Definición 2.** (*Curva integral*)

La gráfica de la solución de una ecuación diferencial se llama *curva integral*. Así para el sistema autónomo no lineal (1.2) donde  $F \in C^1(E)$ , dado cualquier punto  $\mathbf{x}$  de  $E$  o es una solución constante o por ahí pasa una única curva integral.

**Teorema 2.** (*De los valores propios*)

El polinomio característico de una matriz cuadrada de orden  $n$  de coeficientes reales  $A$  es dado por

$$P(\lambda) = \lambda^n - (\text{tr}(A))\lambda^{n-1} + \dots + (-1)^n \det(A),$$

donde los valores propios de  $A$  son los números  $\lambda$  tales que  $P(\lambda) = 0$ .

Además se cumple

$$\text{tr}(A) = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n, \quad \det(A) = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n.$$

**Teorema 3.** (*Función implícita*)

Sea  $U$  un abierto en  $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m$ ,  $F : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  un campo vectorial de clase  $C^1(U)$ ,  $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (a_1, \dots, a_k, b_1, \dots, b_m) \in U$ ,  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k$ ,  $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_m) \in \mathbb{R}^m$  tal que  $F(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \mathbf{0}$ . Si

$$\det \left[ \frac{\partial F_i}{\partial y_i}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \right] \neq 0, \quad i = 1, \dots, m$$

entonces existe un abierto  $V \subseteq \mathbb{R}^k$  tal que  $\mathbf{a} \in V$  y una única función continua  $G : V \rightarrow \mathbb{R}^m$  tales que:  $\mathbf{b} = G(\mathbf{a})$ ,  $F(\mathbf{x}, G(\mathbf{x})) = \mathbf{0}$  para  $\forall \mathbf{x} \in V$  y  $G \in C^1(V)$ .

**Teorema 4.** (*De la función inversa*)

Sea  $U$  un abierto en  $\mathbb{R}^n$ ,  $F : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  un campo vectorial de clase  $C^1(U)$  y  $\mathbf{a} \in U$ . Si

$$\det \left[ \frac{\partial F_i}{\partial y_i}(\mathbf{a}) \right] \neq 0, \quad i = 1, \dots, n$$

entonces existen abiertos  $V$  y  $W$  en  $\mathbb{R}^n$  tales que:  $V \subset U$ ,  $W \subset F(U)$ ,  $\mathbf{a} \in V$ ,  $\mathbf{b} = F(\mathbf{a}) \in W$ ,  $W = F(V)$ ,  $F$  es inyectiva en  $V$ , existe  $G : W \rightarrow V$  tales que  $G(F(\mathbf{x})) = \mathbf{x}$  para todo  $\mathbf{x} \in V$  y  $G \in C^1(W)$ .

## 1.2. Sistemas dinámicos

La palabra *dinámico* se refiere al movimiento o evolución en el tiempo de un sistema. Así, un *sistema dinámico* es un proceso determinista de un fenómeno que evoluciona con el tiempo, donde el término *determinista* hace referencia a que el estado actual del sistema determina su estado futuro. Si el tiempo toma valores reales ( $t \in \mathbb{R}$ ), se trata de un *sistema dinámico continuo* y es el de interés en este trabajo, ya que este suele ser modelado por ecuaciones diferenciales ordinarias. De aquí la importancia del capítulo 1.

El sistema autónomo presa-predador con crecimiento logístico y respuesta funcional de Holling tipo II es un sistema dinámico continuo, descrito por un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias, cuyo estudio cualitativo se enfoca en comprender el comportamiento y estabilidad de las soluciones del sistema a medida que el tiempo avanza.

Este análisis se reduce a examinar conceptos claves como: punto de equilibrio, flujo, órbitas y la clasificación topológica de los puntos de equilibrio en el espacio de definición del sistema. En este trabajo se tomará a este espacio de definición como subconjunto de  $\mathbb{R}^n$ , que es el conjunto de todos los estados posibles que puede tomar el sistema.

### 1.2.1. Flujo de un sistema dinámico

Sea el sistema autónomo

$$\dot{\mathbf{x}} = F(\mathbf{x}) \tag{1.5}$$

con  $F \in C^1(E)$ , donde  $E$  es un abierto en  $X = \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{x} \in E$ .

**Definición 1.** (*Espacio de estados*)

El *espacio de estados* o *espacio de fase* de (1.5) es un conjunto de todos los posibles estados del sistema en el espacio  $E$ ; es decir las variables (de estado) que muestran el comportamiento del sistema cuando  $t$  incrementa. La solución  $\mathbf{x}(t)$  de (1.5) describe un estado evolución del sistema, es decir, se puede establecer el comportamiento y evolución del sistema por un cambio con respecto al tiempo  $t$ .

**Definición 2.** (*Estado evolución*)

El estado de evolución  $\mathbf{x}(t)$  del sistema (1.5) en el tiempo  $t \in I(\mathbf{x}) \subseteq \mathbb{R}$  está determinado por un *operador evolución*  $\varphi_t : E \rightarrow E$  en el conjunto de todos los posibles estados del sistema, para el cual, dado un punto  $\mathbf{x}_0 \in E$ , con  $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ , este operador lo transforma en algún estado  $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0) \in E$

$$\mathbf{x}_0 \longrightarrow \varphi_t(\mathbf{x}_0) = \mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0).$$

**Definición 3.** (*Flujo*)

Sea el sistema (1.5) con  $F \in C^1(E)$  y  $E$  un abierto en  $X = \mathbb{R}^n$ . Si  $\mathbf{x} \in E$  y  $\varphi_t(\mathbf{x})$  es la solución del sistema (1.5) en el intervalo  $I(\mathbf{x}) \subseteq \mathbb{R}$ , entonces el *flujo* del sistema dinámico (1.5) es la familia

$$\{\varphi_t(\mathbf{x})\}$$

para cada  $\mathbf{x} \in E$  y para todo  $t \in I(\mathbf{x})$ . Es decir, el flujo es el conjunto de todas las curvas solución del sistema. Formalmente una curva que pasa por el punto  $\mathbf{x}_0 \in E$  se define como:

$$C(\mathbf{x}_0) = \{(t, \mathbf{x}) : \mathbf{x} = \mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0); t \in I(\mathbf{x}_0)\}.$$

Para el problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = F(\mathbf{x}) \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, t_0 \in I(\mathbf{x}_0) \subseteq \mathbb{R}, \mathbf{x}_0 \in E, \end{cases} \quad (1.6)$$

se define el flujo  $\varphi_t(\mathbf{x}_0) : I(\mathbf{x}_0) \times E \rightarrow E$  como una única curva solución; describe una trayectoria en el espacio de estados.

Si se considera un tiempo continuo positivo ( $t \in I(\mathbf{x}_0) \subseteq \mathbb{R}, t \geq 0$ ), entonces se dice que la solución de (1.6) es un *semiflujo*. Puede suceder también que el sistema dinámico sólo se defina localmente en el tiempo, es decir para  $0 < t_0 \leq t$ . Para sistemas dinámicos continuos ( $t \in \mathbb{R}$ ),  $\varphi_t$  es llamado *operador evolución invertible*. Permitiendo de esta manera, dado un punto  $\mathbf{x} \in E$  del presente, estudiar el comportamiento del sistema en el pasado y futuro.

El operador evolución invertible satisface que  $\varphi_{-t}$  es el inverso de  $\varphi_t$ , donde

$$(\varphi_{-t} \circ \varphi_t)(\mathbf{x}) = \mathbf{x}, \mathbf{x} \in E.$$

El operador evolución  $\varphi_t$  verifica las propiedades que modelan el comportamiento del sistema dinámico:

$$\varphi_0(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \quad (1.7)$$

$$\varphi_{t+s}(\mathbf{x}) = (\varphi_t \circ \varphi_s)(\mathbf{x}) \quad (1.8)$$

para todo  $\mathbf{x} \in E$  y todo  $t, s \in \mathbb{R}$  tal que  $0, s \in I(\mathbf{x})$  y  $t \in I(\varphi_s(\mathbf{x}))$ .

En (1.7) se indica que el sistema no cambia su estado de forma espontánea (invarianza temporal). En (1.8) se indica que el resultado de la evolución en el sistema en  $t + s$  unidades de tiempo, dado un punto inicial  $\mathbf{x} \in E$ , es equivalente primero a un cambio del estado del sistema en  $s$  unidades de tiempo, y después, con  $\varphi_s(\mathbf{x})$  como estado inicial, una evolución en  $t$  unidades de tiempo. Es decir el sistema no cambia en el tiempo.

Bajo estas dos propiedades en (1.5) se dice que este es un sistema autónomo.

Ahora se dará una definición más formal de un sistema dinámico.

**Definición 4.** (*Sistema dinámico*)

Un *sistema dinámico* se define como la terna  $\{X, I, \varphi_t\}$ , donde  $X = \mathbb{R}^n$  es el espacio de estados,  $I \subseteq \mathbb{R}$  es un conjunto de tiempos  $t$  y  $\varphi_t : X \rightarrow X$  es el flujo parametrizado por el tiempo  $t \in I$ .

Sea el sistema autónomo continuo

$$\dot{\mathbf{x}} = F(\mathbf{x}), \tag{1.9}$$

con  $F \in C^1(E)$  donde  $E$  es un abierto en  $X$  y  $\mathbf{x} \in E$ , su flujo está dado por  $\varphi_t : E \rightarrow E$ . Este sistema dinámico se puede representar como un campo vectorial, donde cada vector en (1.9) es un vector de tangentes de cada punto del espacio de estados  $E$ .

**Definición 5.** (*Conjunto invariante*)

Sea el sistema dinámico (1.9) con flujo  $\varphi_t(\mathbf{x}) : E \rightarrow E$ . Se dice que  $K \subset E$  es *invariante* con respecto a  $\varphi_t$  si cumple que  $\varphi_t(K) \subset K$ , para todo  $t \in I(\mathbf{x})$ . Las soluciones de equilibrio, periódicas, y el mismo espacio de estados son ejemplos de conjuntos invariantes.

**Definición 6.** (*Conjunto atractor*)

Un conjunto cerrado e invariante  $K'$  de  $E$  es *atractor* en (1.9), si existe para  $K'$  una vecindad  $U$  tal que  $\varphi_t(\mathbf{x}) \in U$  para todo  $t \geq 0$  y  $\varphi_t(\mathbf{x}) \rightarrow K'$  cuando  $t \rightarrow \infty$ , para todo  $\mathbf{x} \in U$ .

### 1.2.2. Puntos de equilibrio del sistema dinámico

Para estudiar el sistema autónomo (1.9), dada la dificultad de encontrar la solución del sistema, se considera el análisis cualitativo, es decir, estudiar cómo son las soluciones alrededor de una solución constante que corresponde a un punto de equilibrio  $\mathbf{x}^*$  de dicho sistema, de aquí la importancia de estudiar este concepto y otros conceptos como el de punto de equilibrio hiperbólico y la clasificación topológica de estos puntos, que son fundamentales para dicho análisis. Teniendo en cuenta ciertas condiciones del sistema (1.9), el teorema de Hartman-Grobman (que se enunciará un poco más adelante) y dependiendo de la naturaleza de los valores propios de la matriz jacobiana del sistema, se determinará de manera local cómo es el flujo alrededor de un punto de equilibrio.

Es importante recordar que en un sistema lineal el origen es el único punto de equilibrio.

**Definición 1.** (*Punto de equilibrio*)

Considere el sistema autónomo (1.9) y  $\mathbf{x}^* \in E$ . Se dice que  $\mathbf{x}^*$  es un *punto de equilibrio* del sistema si  $F(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}$ . En consecuencia satisface que  $\varphi_t(\mathbf{x}^*) = \mathbf{x}^*$ , para todo  $t \in I \subseteq \mathbb{R}$ . Esto es,  $\mathbf{x}^*$  es una *solución de equilibrio* del sistema.

### 1.2.3. El teorema de Hartman-Grobman

El teorema de Hartman-Grobman muestra que bajo ciertas condiciones, dado el problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = F(\mathbf{x}) \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, t_0 \in I(\mathbf{x}_0), \mathbf{x}_0 \in U \end{cases} \quad (1.10)$$

tiene el mismo comportamiento cualitativo (local) del sistema

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = [DF(\mathbf{x}^*)]\mathbf{x} \\ \mathbf{x}(t_0) = H(\mathbf{x}_0), t_0 \in I, \mathbf{x}_0 \in U, \end{cases} \quad (1.11)$$



con  $F \in C^1(U)$ , donde  $DF(\mathbf{x}^*) : V \rightarrow \mathbb{R}^n$  es una transformación lineal,  $U, V$  abiertos en  $\mathbb{R}^n$  que contienen a  $\mathbf{x}^*$  y a  $\mathbf{0}$  respectivamente y  $H : U \rightarrow V$  es un homeomorfismo tal que  $H(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}$  (Ver[9]).

(1.11) es la linealización del sistema (1.10) en el punto de equilibrio  $\mathbf{x}^*$  esto es

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}; \quad A = DF(\mathbf{x}^*), \quad (1.12)$$

donde  $A$  es la matriz jacobiana del sistema en el punto  $\mathbf{x}^*$ .

**Definición 1.** (*Punto de equilibrio hiperbólico*)

Sean  $X = \mathbb{R}^n$ ,  $E$  un abierto en  $X$ ,  $\mathbf{x}^* \in E$  un punto de equilibrio de (1.10) y  $A = DF(\mathbf{x}^*)$ . El punto  $\mathbf{x}^*$  es *hiperbólico* si ninguno de los valores propios de  $A$  tiene parte real nula y es *no hiperbólico* si no satisface lo anterior.

**Teorema 1.** (*De Hartman-Grobman*)

Sea el sistema (1.10), con  $F \in C^1(E)$  donde  $E$  es un abierto de  $X = \mathbb{R}^n$ , y  $\varphi_t$  es el flujo del sistema. Supóngase que  $\mathbf{x}^* \in E$  es un punto de equilibrio hiperbólico del sistema, entonces existe un homeomorfismo  $H : U \rightarrow V$ , definido en los entornos abiertos  $U, V$  de  $\mathbf{x}^*$  y del origen respectivamente, tal que para todo  $\mathbf{x}_0 \in U$ , existe un intervalo abierto  $I(\mathbf{x}_0) \subseteq \mathbb{R}$ ,  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ , que contiene al origen tal que

$$H \circ \varphi_t(\mathbf{x}_0) = e^{At}H(\mathbf{x}_0); \quad t \in I(\mathbf{x}_0).$$

(Ver demostración en [9]).

Lo que significa que el estudio cualitativo del sistema (1.10) se reduce al estudio del sistema lineal (1.12) en el punto de equilibrio  $\mathbf{x}^*$ , donde la clasificación topológica de los valores propios de  $A$  muestran el comportamiento asintótico de las curvas integrales cercanas al punto  $\mathbf{x}^*$ , suficiente para un estudio cualitativo local del comportamiento del sistema, siempre que este punto no tengan en su matriz jacobiana algún valor propio nulo o con parte real cero, es decir, sea un punto hiperbólico.

El teorema de Hartman-Grobman permite establecer la igualdad de estabilidad del equilibrio en el sistema lineal y no lineal siempre que este sea punto de equilibrio hiperbólico. A continuación para el estudio de la estabilidad de un punto de equilibrio no hiperbólico se introducirá la función de Lyapunov, que permite estudiar la estabilidad tanto de un punto de equilibrio hiperbólico y la de un equilibrio no hiperbólico.

### 1.2.4. Función de Lyapunov

Sea el sistema autónomo

$$\dot{\mathbf{x}} = F(\mathbf{x}), \tag{1.13}$$

con  $F \in C^1(E)$ , donde  $E$  es un abierto en  $X = \mathbb{R}^n$ . Si existe un punto de equilibrio no hiperbólico  $\mathbf{x}^*$ , el teorema de Hartman-Grobman no determina la estabilidad o inestabilidad de ese punto, por tanto es necesario el problema desde otro punto de vista, es así como la función de Lyapunov del sistema juega un papel importante.

A continuación se enunciará la definición de función de Lyapunov y su teorema de estabilidad. (Ver [8])

**Definición 1.** (*Función de Lyapunov*)

Sea el sistema (1.13),  $F \in C^1(E)$  y  $\mathbf{x}^* \in E$  un punto de equilibrio. Se dice que  $L : E \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $L \in C^1(E)$  es una *función de Lyapunov* si

1.  $L(\mathbf{x}^*) = 0$ ,
2.  $L(\mathbf{x}) > 0$ ,  $E - \{\mathbf{x}^*\}$ .

**Teorema 1.** (*De estabilidad de Lyapunov*)

Sea el sistema (1.13),  $F \in C^1(E)$ ,  $\mathbf{x}^*$  un punto de equilibrio del sistema y una función de Lyapunov  $L : E \rightarrow \mathbb{R}$

1. Si  $\dot{L}(\mathbf{x}) \leq 0$  en  $E$ , entonces  $\mathbf{x}^*$  es estable,
2. Si  $\dot{L}(\mathbf{x}) < 0$  en  $E - \{\mathbf{x}^*\}$ , entonces  $\mathbf{x}^*$  es asintóticamente estable,

3. Si  $\dot{L}(\mathbf{x}) > 0$  en  $E - \{\mathbf{x}^*\}$ , entonces  $\mathbf{x}^*$  es inestable.

**Observación:** Por la regla de la cadena se tiene

$$\dot{L}(\mathbf{x}) = \nabla L(\mathbf{x})F(\mathbf{x}) = \nabla L(\mathbf{x})\dot{\mathbf{x}}.$$

### 1.2.5. Órbitas

La representación geométrica de las curvas solución de un sistema brindan una estimación sobre el comportamiento a largo plazo del sistema autónomo (1.13). El interés del estudio cualitativo de un sistema dinámico está centrado en las órbitas y puntos de equilibrio, donde estas primeras no son más que la representación geométrica en el espacio de estados de las soluciones del sistema.

**Definición 1.** (*Órbita*)

Sea el sistema (1.13), con  $F \in C^1(E)$ , una *órbita* o *trayectoria* es la parametrización de una curva solución (curva integral) del sistema en el espacio de estados  $E \subseteq X = \mathbb{R}^n$ . Así dada una condición inicial  $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \in E$ ,  $t_0 \in I(\mathbf{x}_0) \subseteq \mathbb{R}$ , una única *órbita*  $\Gamma$  pasa por ese punto. Por tanto, cada órbita representa una curva  $\Gamma$  de las infinitas curvas del sistema.

Formalmente, dada la condición inicial  $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$  para el sistema (1.13)

$$\Gamma_{\mathbf{x}_0} = \{\mathbf{y} \in E : \mathbf{y} = \varphi_t(\mathbf{x}_0), t \in I(\mathbf{x}_0) \subseteq \mathbb{R}\}.$$

Para tiempos positivos y negativos, se define respectivamente la trayectoria que pasa por el punto  $\mathbf{x}_0$  como:

$$\Gamma_{\mathbf{x}_0}^+ = \{\mathbf{y} \in E : \mathbf{y} = \varphi_t(\mathbf{x}_0), t \in I(\mathbf{x}_0), t \geq 0\},$$

$$\Gamma_{\mathbf{x}_0}^- = \{\mathbf{y} \in E : \mathbf{y} = \varphi_t(\mathbf{x}_0), t \in I(\mathbf{x}_0), t \leq 0\}.$$

La trayectoria que pasa por el punto  $\mathbf{x}_0$  satisface que  $\Gamma_{\mathbf{x}_0} = \Gamma_{\mathbf{x}_0}^+ \cup \Gamma_{\mathbf{x}_0}^-$ ,  $t \in I(\mathbf{x}_0)$ .

**Definición 2.** ( $\alpha$  y  $\omega$ -límite de una órbita)

Sea  $E$  un abierto en  $X = \mathbb{R}^n$  con  $\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{x} \in E$  y  $\varphi_t$  el flujo del sistema (1.13),

1.  $\mathbf{p}$  es un punto  $\omega$ -límite de  $\varphi_t$  si existe una sucesión  $t_n \rightarrow \infty$ , tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_{t_n}(\mathbf{x}) = \mathbf{p},$$

2.  $\mathbf{q}$  es un punto  $\alpha$ -límite de  $\varphi_t$  si existe una sucesión  $t_n \rightarrow -\infty$ , tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_{t_n}(\mathbf{x}) = \mathbf{q}.$$

Los conjuntos  $\omega, \alpha$ - se denotan  $\omega(\Gamma), \alpha(\Gamma)$ , respectivamente y se definen como el conjunto de todos los puntos  $\omega, \alpha$ -límite de una curva  $\Gamma$  de  $\varphi_t$ , respectivamente y  $\alpha(\Gamma) \cup \omega(\Gamma)$  es *conjunto límite* de  $\Gamma$ . Se tiene que si  $\mathbf{p}$  es punto  $\omega$ -límite de  $\Gamma$ , luego todos los demás puntos de la trayectoria  $\varphi_t(\mathbf{p})$  son también puntos  $\omega$ -límite de  $\Gamma$ , esto es,  $\Gamma_{\mathbf{p}} \subseteq \omega(\Gamma)$ . De manera análoga, si  $\mathbf{q} \in \alpha(\Gamma)$ , entonces  $\Gamma_{\mathbf{q}} \subseteq \alpha(\Gamma)$ . Es así que los puntos  $\mathbf{p}, \mathbf{q}$ -límite son invariantes bajo el flujo  $\varphi_t$ , puesto que se cumple que si  $\mathbf{p} \in \omega(\Gamma)$ , entonces  $\varphi_t(\mathbf{p}) \subseteq \omega(\Gamma)$ , análogamente se tiene que  $\varphi_t(\mathbf{q}) \subseteq \alpha(\Gamma)$ , siempre que  $\mathbf{q} \in \alpha(\Gamma)$  ([6]).

Las órbitas del sistema (1.13) son esenciales para el estudio de la estabilidad (local) del sistema y se clasifican dependiendo de su evolución en el tiempo, es decir, del comportamiento de las demás órbitas en sus cercanías y/o alrededor de un punto de equilibrio  $\mathbf{x}^*$ , en *periódicas, asintóticamente estables, parcialmente estables e inestables*. Las órbitas más simples de un sistema dinámico son los puntos de equilibrio.

Una órbita es *periódica o cíclica* si para un punto  $\mathbf{x} \in B(\mathbf{x}^*, \epsilon)$  y para algún  $\epsilon > 0$  se cumple que

$$\varphi_t(\mathbf{x}) = \varphi_{t+T_0}(\mathbf{x}),$$

para  $T_0 > 0$ , la órbita tiene un comportamiento periódico alrededor de  $\mathbf{x}^*$ . El mínimo valor  $T_0$  que satisface lo anterior se denomina *periodo*. Se genera una curva cerrada.

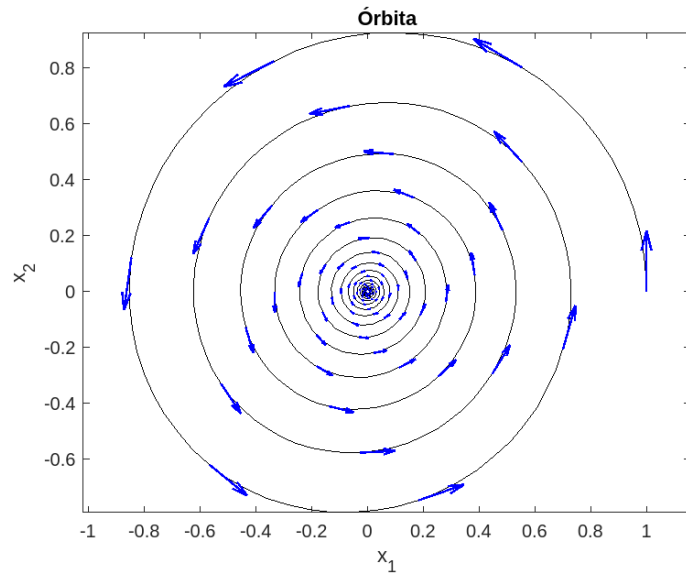


Figura 1.1: Órbita en un sistema dinámico continuo

**Definición 3.** (*Ciclo límite*)

Un *ciclo límite*  $\Gamma$  de (1.13) es una órbita periódica y aislada a nivel local, es decir, es la única trayectoria cerrada en las proximidades de un punto de equilibrio y es el  $\omega, \alpha$ -conjunto límite de otras trayectorias; las soluciones del sistema tienden a aproximarse o alejarse de ella. Dependiendo del comportamiento de las trayectorias cercanas al ciclo límite, este puede ser *asintóticamente estable*, *inestable* o *parcialmente estable*.

1. Un ciclo límite  $\Gamma$  es *asintóticamente estable* si las demás órbitas del sistema tienden a acercarse a ella. Esto es, es el  $\omega$ -conjunto límite de cada trayectoria en su cercanía.
2. Un ciclo límite  $\Gamma$  es *inestable* si todas las soluciones cercanas se alejan de ella. Esto es,  $\Gamma$  es el  $\alpha$ -conjunto límite de cada trayectoria del sistema.
3. Un ciclo límite  $\Gamma$  es *parcialmente estable* si existe al menos una órbita inestable y al menos una órbita estable en su cercanía. Es decir, es  $\alpha, \omega$ -conjunto límite de órbitas cercanas.

El siguiente teorema presenta un criterio para un análisis cualitativo del ciclo límite en un sistema autónomo planar.

**Teorema 1.** (*Estabilidad de las órbitas periódicas*)

Sea el sistema (1.13),  $E$  un abierto en  $X = \mathbb{R}^2$ ,  $F \in C^1(E)$  y  $\Gamma(t)$  una solución periódica con periodo  $T_0$ ,

1.  $\Gamma(t)$  es *estable* si

$$\int_0^{T_0} \nabla * F(\Gamma(t)) dt < 0,$$

2.  $\Gamma(t)$  es *inestable* si

$$\int_0^{T_0} \nabla * F(\Gamma(t)) dt > 0.$$

**Observación:**  $\nabla * F = \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2}$ .

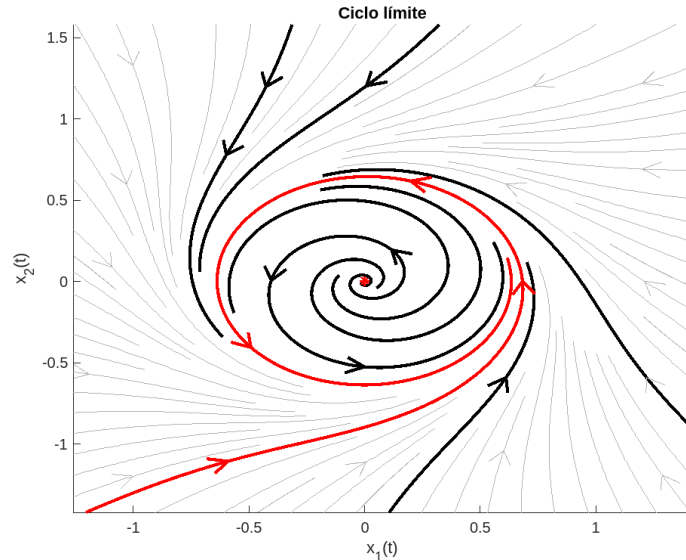


Figura 1.2: Ciclo límite asintóticamente estable

De todo lo mencionado se concluye que los conjuntos atractores, como los puntos de equilibrio y ciclos límites son  $\alpha, \omega$ - conjuntos límites de (1.13).

**Teorema 2.** (*De Poincaré-Bendixson*)

Sea el sistema (1.13),  $E$  un abierto en  $X = \mathbb{R}^n$  con una órbita  $\Gamma$ , donde  $\Gamma^+$  está contenida en un subconjunto compacto  $M \subset E$ . Entonces si  $\omega(\Gamma)$  no contiene puntos de equilibrio de (1.13),  $\omega(\Gamma)$  es una órbita periódica de (1.13) (Ver[15]).

De este teorema que clasifica los posibles estados de las soluciones acotadas en un conjunto invariante, se tiene que el caos no ocurre para (1.13) si  $E = \mathbb{R}^2$  (Ver[13]).

Existe un teorema conocido como el *criterio de Bendixson* que permite identificar la inexistencia de una órbita periódica para el sistema autónomo (1.13), con  $E \subseteq \mathbb{R}^2$ .

**Teorema 3.** (*Criterio de Bendixson*)

Si  $D \subset \mathbb{R}^2$  es una región simplemente conexa (es decir,  $D$  no posee agujeros) y la expresión  $\frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2}$  no se anula ni cambia de signo en  $D$ , entonces el sistema (1.13) no tiene órbitas periódicas completamente contenidas en  $D$ . (Ver demostración en [17]).

Es importante tener claro que si una de estas hipótesis no se cumple, entonces no se puede asegurar la existencia de una órbita periódica.

### 1.2.6. Criterios de estabilidad

El estudio local de la estabilidad del sistema autónomo (1.13), con  $F \in C^1(E)$  y flujo  $\varphi_t$  se reduce al estudio del comportamiento de los puntos de equilibrio y de las soluciones del sistema en cercanías de estos. Se definirá la estabilidad en los puntos de equilibrio.

**Definición 1.** (*Estabilidad en los puntos de equilibrio*)

Un punto de equilibrio  $\mathbf{x}^* \in E$  del sistema (1.13) es localmente *estable* si las órbitas de las soluciones cercanas a él, tienden a permanecer cerca de él (en una vecindad), cuando  $t \rightarrow \infty$ . Es *inestable* si no satisface lo anterior, es decir, las órbitas en su cercanía tienden a alejarse de él con el paso del tiempo. <sup>1</sup>

De manera formal, sea  $\mathbf{x}^*$  un punto de equilibrio del sistema dinámico (1.13) donde  $\mathbf{x}^* = \varphi_t(\mathbf{x}^*)$ . Sea  $r > 0$  el radio de una bola con centro en el punto  $\mathbf{x}^*$ .

<sup>1</sup> $E$  con la norma usual es un espacio de Banach, de aquí la buena definición en las distancias.

1.  $\mathbf{x}^*$  es estable si  $\forall \epsilon \in (0, r), \exists \delta = \delta(t_0, \epsilon) \in (0, r)$  tal que si

$$\mathbf{x} \in B_\delta(\mathbf{x}^*), \quad \text{entonces} \quad \|\varphi_t(\mathbf{x}) - \varphi_t(\mathbf{x}^*)\| < \epsilon$$

para todo  $t \in [t_0, +\infty), t_0 \in \mathbb{R}$ . Si no lo satisface se dice que  $\mathbf{x}^*$  es inestable (*repulsor*).

2.  $\mathbf{x}^*$  es *atractor* si es estable y es *asintóticamente estable* si y sólo si es estable y satisface que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi_t(\mathbf{x}) = \varphi_t(\mathbf{x}^*).$$

(Ver[9])

**Teorema 1.** (*Linealización de Liapunov y Poincaré*)

Sea  $\mathbf{x}^*$  un punto de equilibrio del sistema (1.13), con  $B_r(\mathbf{x}^*)$ ,  $r \in (0, \infty)$  y la matriz jacobiana  $A = DF(\mathbf{x}^*)$ .

1. El punto  $\mathbf{x}^*$  es *asintóticamente estable* (sumidero), en  $B_r(\mathbf{x}^*)$ , si todos los valores propios de  $A$  tienen parte real negativa.
2. El punto  $\mathbf{x}^*$  es *estable*, en  $B_r(\mathbf{x}^*)$ , si los valores propios de  $A$  tienen parte real no positiva.
3. El punto  $\mathbf{x}^*$  es *inestable* (fuente), en  $B_r(\mathbf{x}^*)$ , si  $A$  tiene al menos dos valores propios con signo opuesto.

A continuación se dará un teorema para la clasificación topológica del punto de equilibrio  $\mathbf{x}^*$  del sistema lineal (1.12) para sistemas  $2 \times 2$  (Ver[8]).



**Teorema 2.** (*Traza-determinante*)

Sea  $X = \mathbb{R}^2$  y el sistema lineal

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}, \quad \mathbf{x} \in X \quad (1.14)$$

con  $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$  punto de equilibrio del sistema,  $\Delta = \det(A)$  y  $\sigma = \text{tr}(A)$ . La ecuación característica de  $A$  está dada por:

$$\lambda^2 - \sigma\lambda + \Delta = 0, \quad \text{con valores propios} \quad \lambda_{1,2} = \frac{\sigma \pm \sqrt{\sigma^2 - 4\Delta}}{2}.$$

De  $\sigma = \lambda_1 + \lambda_2$  y  $\Delta = \lambda_1\lambda_2$ ,

1. Si  $\Delta < 0$ , entonces (1.14) tiene un punto silla-nodo en el origen.
2. Si  $\Delta > 0$  y  $\sigma^2 - 4\Delta \geq 0, \sigma \neq 0$ , entonces (1.14) tiene un nodo en el origen.
3. Si  $\Delta > 0, \sigma^2 - 4\Delta \geq 0, \sigma \neq 0$  y  $\lambda_1 = \lambda_2$ , (1.14) tiene un nodo estrella en el origen.
4. Si  $\Delta > 0$  y  $\sigma^2 - 4\Delta < 0, \sigma \neq 0$  entonces (1.14) tiene un foco en el origen.
5. Si  $\Delta > 0$  y  $\sigma = 0$ , entonces (1.14) tiene un centro (estable) en el origen.

Se tiene en 2, 3 y 4 estabilidad (resp. inestabilidad) en  $\mathbf{x}^*$  si  $\sigma < 0$  (resp.  $\sigma > 0$ ).

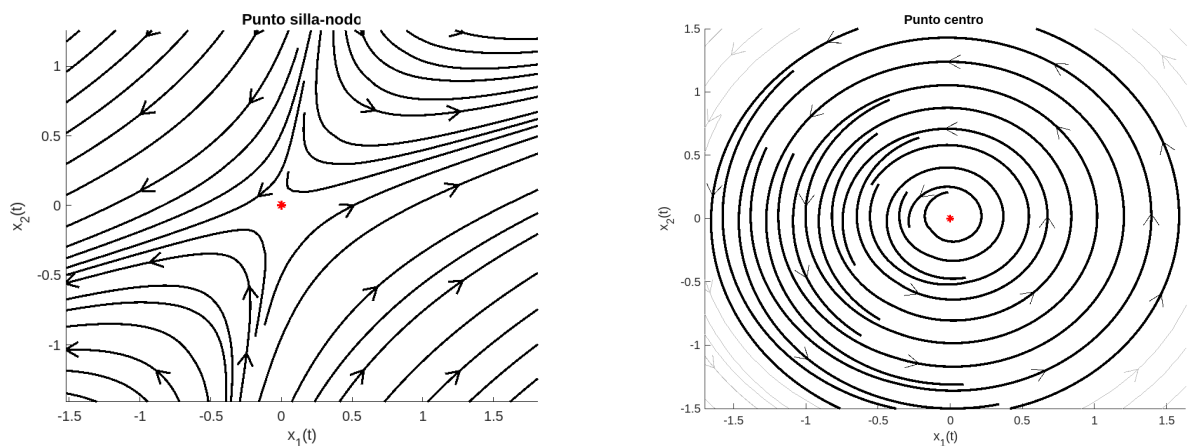


Figura 1.3: Punto silla-nodo, punto centro

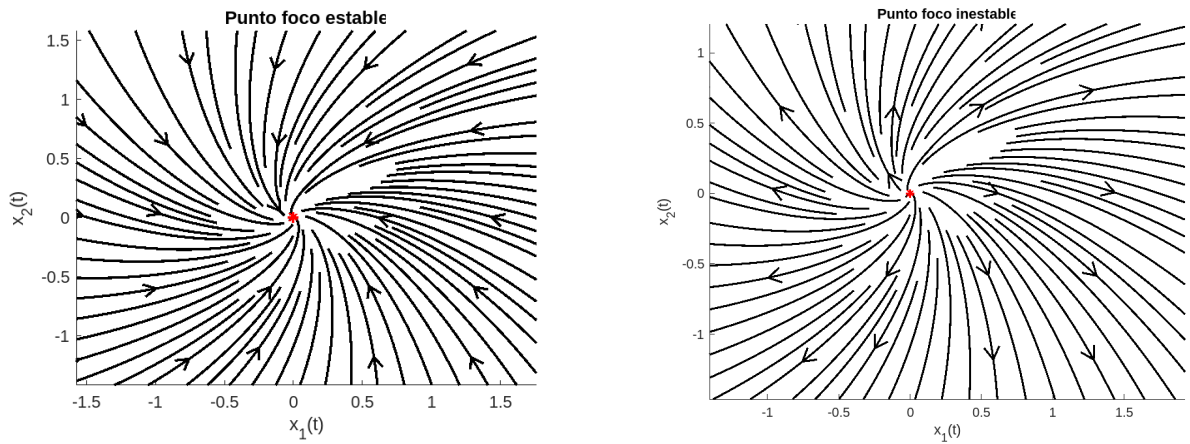


Figura 1.4: Punto foco estable, punto foco inestable

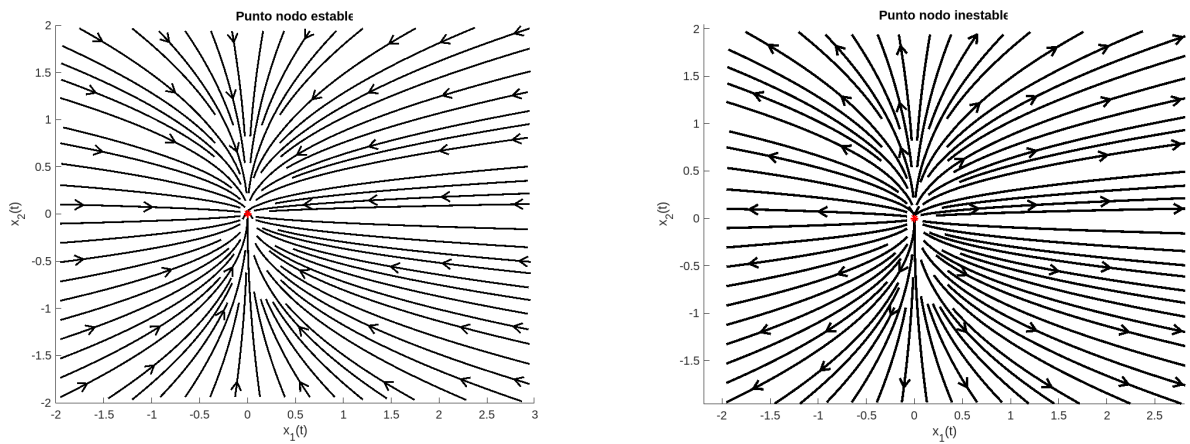


Figura 1.5: Punto nodo estable, punto nodo inestable

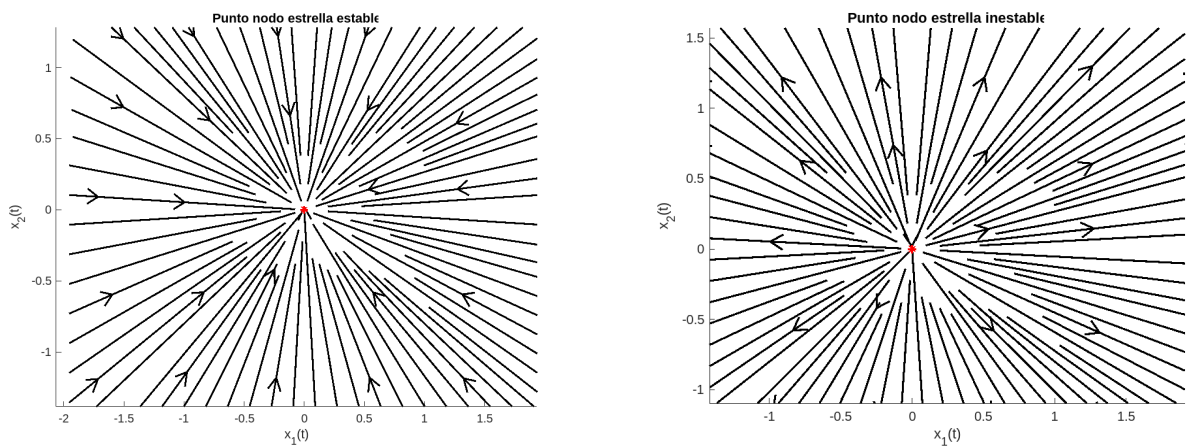


Figura 1.6: Punto nodo estrella estable, punto nodo estrella inestable

**Teorema 3.** (*Estabilidad de Lyapunov*)

Sea  $F \in C^1(E)$  y  $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$  es un punto de equilibrio hiperbólico del sistema (1.13),  $\mathbf{x}^*$  es asintóticamente estable en (1.13) si y sólo si  $\mathbf{x}^*$  es asintóticamente estable en el sistema lineal (1.14),  $A = DF(\mathbf{x}^*)$ . De manera análoga para los puntos de equilibrio inestables.

### 1.2.7. Equivalencia en sistemas dinámicos

El concepto de equivalencia en sistemas dinámicos es fundamental al momento de definir la bifurcación de Hopf (que se hará en el siguiente capítulo). Es de esperarse que sistemas dinámicos topológicamente equivalentes preserven conjuntos invariantes, cantidad de puntos de equilibrio y órbitas periódicas. Así, dado el sistema dinámico  $\{X, I, \phi_t\}$ , se dice que es topológicamente equivalente al sistema  $\{X, I, \varphi_t\}$  si existe un homeomorfismo  $H : X \rightarrow X$  que envía órbitas del primer sistema a órbitas del segundo, preservando la dirección u orientación en el tiempo. Es decir, el retrato de fase de este último sistema puede ser obtenido por una transformación continua en el primer sistema.

**Definición 1.** (*Sistemas topológicamente equivalentes*)

Sea  $E$  abierto en  $X = \mathbb{R}^n$  y los sistemas autónomos

$$\dot{\mathbf{x}} = F(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in E \tag{1.15}$$

$$\dot{\mathbf{x}} = G(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in E, \tag{1.16}$$

con  $F, G \in C^1(E)$  y  $\varphi_t, \phi_t$  flujos de los sistemas (1.15), (1.16) respectivamente, sin pérdida de generalidad con punto de equilibrio  $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$  en cada sistema. Se dice que (1.15) y (1.16) son *topológicamente equivalentes* en  $\mathbf{0}$  si existe un homeomorfismo  $H : U \rightarrow V$ , donde  $U, V$  son abiertos en  $E$  que contienen al origen, tal que  $H(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$  y los dos sistemas dinámicos conservan la dirección de las órbitas alrededor del punto de equilibrio. Es decir, si una trayectoria se dirige de  $x_1$  a  $x_2$  en  $U$ , entonces su imagen bajo  $H$  se dirige de  $H(x_1)$  a  $H(x_2)$  en  $V$ .

$$H(\varphi(\mathbf{x}_0)) = \phi(H(\mathbf{x}_0)), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \in U; t_0 \in I(\mathbf{x}_0).$$

En otras palabras, las curvas solución de los sistemas, parametrizadas por el tiempo, conservan la dirección de flujo. Si el homeomorfismo  $H$  preserva la parametrización en el tiempo, entonces estos sistemas son *topológicamente conjugados* en cercanías del origen.

Se puede definir en sistemas dinámicos topológicamente equivalentes una relación de equivalencia, es decir, dados dos o más sistemas con mismo comportamiento cualitativo, estos son topológicamente reflexivos, simétricos y transitivos. (Ver a detalle en [11])

**Definición 2.** (*Sistemas paramétricos topológicamente equivalentes*)

Sea  $E$  un abierto en  $X = \mathbb{R}^n$  y los sistemas suaves ( $C^\infty(E)$ )  $m$ -paramétricos

$$\dot{\mathbf{x}} = F(\mathbf{x}, \boldsymbol{\alpha}), \quad \mathbf{x} \in E, \boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^m \quad (1.17)$$

$$\dot{\mathbf{x}} = G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\beta}), \quad \mathbf{x} \in E, \boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}^m. \quad (1.18)$$

Se dice que (1.17) y (1.18) son *topológicamente equivalentes* si existe un homeomorfismo en el espacio de parámetros

$$p(\boldsymbol{\alpha}) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m : \quad \boldsymbol{\beta} = p(\boldsymbol{\alpha}),$$

y un homeomorfismo en el espacio de estados

$$H_\alpha : E \rightarrow E : \quad \mathbf{y} = H_\alpha(\mathbf{x}), \mathbf{y} \in E$$

que envía órbitas del sistema (1.17) con valor de parámetros  $\alpha$  en órbitas del sistema (1.18) con valor de parámetro  $\boldsymbol{\beta} = p(\boldsymbol{\alpha})$ , preservando la dirección del tiempo. La equivalencia local, sin pérdida de generalidad en el equilibrio  $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$  hace que  $H_\alpha(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ .

Con intención de evitar realizar cálculos tediosos en el análisis cualitativo de sistemas autónomos, como por ejemplo, el cálculo de la matriz jacobiana, es útil estudiar un sistema simplificado que sea cualitativamente equivalente.

**Definición 3.** (*Sistemas orbitalmente equivalentes*)

Los sistemas autónomos (1.17) y (1.18) con  $\mathbf{x} \in E$ , son orbitalmente equivalentes si existe una función  $u : E \rightarrow \mathbb{R}$  suave ( $C^\infty(E)$ ) y positiva ( $u(\mathbf{x}) > 0$ ), tal que

$$F(\mathbf{x}) = u(\mathbf{x})G(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in E.$$

**Definición 4.** (*Retrato de fase*)

El *retrato de fase* es la representación geométrica en el plano  $XY$  (*plano de fase*) o en el espacio ( $\mathbb{R}^n, n \geq 3$ ) (*espacio de fase*) de todos los posibles estados del sistema (1.15). Es decir, representa las órbitas y puntos de equilibrio del sistema.

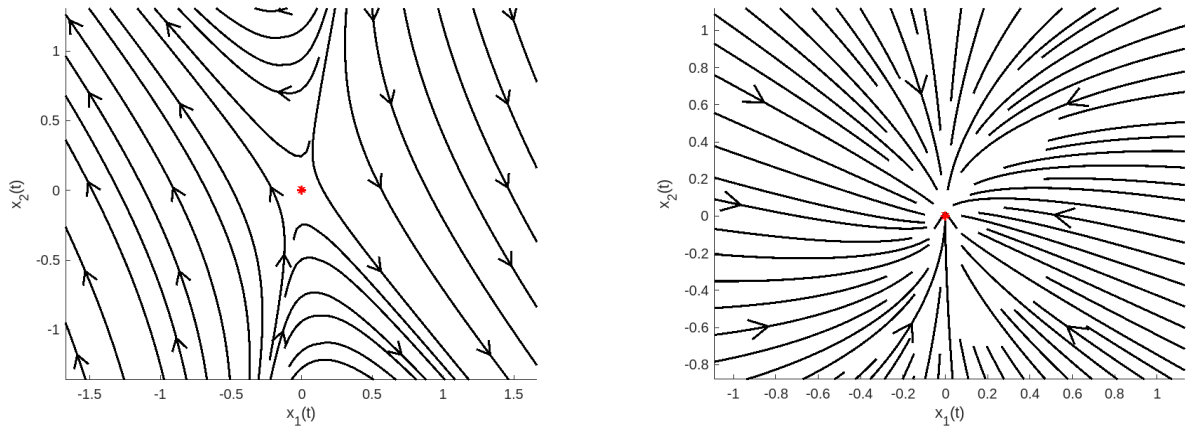


Figura 1.7: Sistemas topológicamente equivalentes en el origen

**Teorema 1.** (*Retrato de fase topológicamente equivalente*)

Los retratos de fase del sistema (1.17) cerca de dos puntos de equilibrio hiperbólicos,  $\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^* \in X = \mathbb{R}^n$  son topológicamente equivalentes (localmente) si y sólo si  $DF(\mathbf{x}^*)$  y  $DF(\mathbf{y}^*)$  tienen el mismo número de valores propios con parte real negativa y positiva.

**Definición 5.** (*Sistema estructuralmente estable*)

El sistema (1.15) es  $C^1$ -*estructuralmente estable* en una región  $U \subseteq \mathbb{R}^n$ , si cualquier sistema (1.16) que sea  $C^1$ -cercano en  $U$  a (1.15) es topológicamente equivalente en  $U$  a (1.15). (Ver [2])

## Capítulo 2

### BIFURCACIÓN DE ANDRONOV-HOPF

---

Existen sistemas dinámicos continuos modelados por ecuaciones diferenciales ordinarias donde juegan un papel muy importante los parámetros. Una ligera variación en uno de estos parámetros puede desencadenar un comportamiento impredecible y significativo en las soluciones del sistema. Este fenómeno se conoce como *bifurcación* y es un concepto matemático que pertenece a una rama joven de las matemáticas, conocida como teoría de las bifurcaciones. Esta rama fue introducida por Henri Poincaré (1854-1912) y ha sido estudiada por muchos otros científicos destacados como E. Lorenz, Lyapunov, Newton. La comprensión de la bifurcación es fundamental para el análisis y la predicción del comportamiento de muchos sistemas dinámicos continuos en la naturaleza.

**Definición 1.** (*Bifurcación*)

Considere el sistema autónomo no lineal

$$\dot{\mathbf{x}} = F(\mathbf{x}, \alpha), \tag{2.1}$$

con  $F \in C^1(E)$  donde  $E$  es un abierto en  $X = \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{x} \in E$  y  $\alpha$  es un parámetro real. Una *bifurcación* es una variación en la estructura cualitativa del sistema: creación o destrucción de puntos de equilibrio y/o en el cambio de estabilidad de esos puntos y de las órbitas, cuando el parámetro  $\alpha$  es alterado ligeramente. De manera formal, es la aparición de un retrato de fase de (2.1) no topológicamente equivalente por la variación del parámetro  $\alpha$ . En otras palabras, como se menciona en [14], si el comportamiento cualitativo de (2.1) es el mismo para campos vectoriales cercanos a  $F$ , se dice que el sistema (2.1) es estructuralmente estable y si un campo vectorial  $F \in C^1(E)$  no es estructuralmente estable, entonces éste presenta una *bifurcación*.

Un resultado establece que cualquier sistema lineal con sólo puntos hiperbólicos es estructuralmente estable.

El parámetro donde surge una bifurcación en el sistema dinámico se llama *parámetro de bifurcación*. La *codimensión* de una bifurcación es la cantidad de condiciones independientes para que ocurra la bifurcación y esta es la misma en todos los sistemas genéricos (formas normales) que exhiben alguna bifurcación.

Existen dos tipos de bifurcaciones: *bifurcación local* y *bifurcación global*. En este trabajo se estudiará la bifurcación local.

**Definición 2.** (*Bifurcación local*)

Una *bifurcación local* es aquella que ocurre en un punto de equilibrio y muestra la estabilidad en las proximidades de este punto.

Las bifurcaciones que se producen por una variación suave o significativa de un parámetro pueden ser *estables* o *inestables*. La *bifurcación estable* se presenta cuando pese a la modificación de estos parámetros, el sistema puede regresar “fácilmente” a su estado inicial. La *bifurcación inestable* se presenta cuando la estabilidad de todo el sistema se ve afectado y resulta “caótico” su comportamiento.

**Definición 3.** (*Bifurcación de Hopf*)

En un sistema autónomo paramétrico  $2 \times 2$ , un punto de equilibrio es asintóticamente estable si la matriz jacobiana en ese punto tiene valores propios complejos conjugados con parte real negativa, el cual se conoce como un “foco estable” (Teoremas 1,2, Pág.32). Si al variar un parámetro, los valores propios en el punto de equilibrio se convierten en un par de complejos conjugados puros, entonces se trata de un “centro estable”. Por otro lado, si los valores propios de la matriz jacobiana en el equilibrio son complejos conjugados con parte real positiva, entonces se considera un “foco inestable”. Esta pérdida o cambio de estabilidad local al cruzar la parte real de los valores propios desde el eje negativo al eje positivo se conoce como *bifurcación de Hopf*. Este fenómeno se

caracteriza por la aparición o destrucción de una órbita periódica aislada, es decir, un ciclo límite, al atravesar el umbral determinado por los valores propios en la parte real.

La bifurcación de Hopf es clasificada en subcrítica, supercrítica y degenerada, dependiendo del lugar donde se origina un ciclo límite en relación al valor de bifurcación. En la subcrítica, el ciclo límite aparece para valores menores al de bifurcación, en la supercrítica, el ciclo se genera para valores mayores al de bifurcación, y en la degenerada, hay presencia de órbitas periódicas justo en el punto de bifurcación.

**Definición 4.** (*Diagrama de bifurcación*)

Es una representación gráfica en  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$  de cómo cambia el comportamiento de un sistema dinámico en función de un parámetro. Es la misma para sistemas equivalentes.

## 2.1. Forma normal de la bifurcación de Hopf

Sea el sistema autónomo planar ( $E = \mathbb{R}^2$ ) con  $\alpha$  un parámetro real:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = F_1(x_1, x_2) = \alpha x_1 - x_2 \pm (x_1^2 + x_2^2)x_1 \\ \dot{x}_2 = F_2(x_1, x_2) = x_1 + \alpha x_2 \pm (x_1^2 + x_2^2)x_2. \end{cases} \quad (2.2)$$

### 2.1.1. Bifurcación de Hopf supercrítica

Se analizará el sistema (2.2) con signo  $(-)$  antes de sus términos no lineales, esto es

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = F_1(x_1, x_2) = \alpha x_1 - x_2 - (x_1^2 + x_2^2)x_1 \\ \dot{x}_2 = F_2(x_1, x_2) = x_1 + \alpha x_2 - (x_1^2 + x_2^2)x_2. \end{cases} \quad (2.3)$$

#### 1. Puntos de equilibrio

Si se considera

$$F_1(x_1, x_2) = 0, \quad F_2(x_1, x_2) = 0$$

se ve claramente que el punto  $P_1 = (0, 0)$  es un equilibrio (trivial) de (2.3). Se procede al estudio del comportamiento de los valores propios de la matriz jacobiana del sistema.



## 2. Matriz jacobiana

$$DF(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \begin{bmatrix} \alpha - 3x_1^2 - x_2^2 & -1 - 2x_1x_2 \\ 1 - 2x_1x_2 & \alpha - x_1^2 - 3x_2^2 \end{bmatrix},$$

evaluada en el punto  $P_1 = (0, 0)$

$$DF(0, 0) = \begin{bmatrix} \alpha & -1 \\ 1 & \alpha \end{bmatrix}$$

tiene valores propios

$$\lambda_1 = \alpha + i, \quad \lambda_2 = \alpha - i.$$

Teniendo en cuenta los valores posibles para el parámetro  $\alpha$  se tiene:

- i) Si  $\alpha < 0$ , entonces  $P_1 = (0, 0)$  es un punto atractor (*foco estable*).
- ii) Si  $\alpha = 0$ , entonces  $P_1 = (0, 0)$  es un punto centro estable.
- iii) Si  $\alpha > 0$ , entonces  $P_1 = (0, 0)$  es un punto repulsor (*foco inestable*).

Introduciendo la variable compleja  $z = x_1 + ix_2$ ,

$$z = re^{i\theta}, \quad \dot{z} = \dot{x}_1 + i\dot{x}_2, \quad |z|^2 = x_1^2 + x_2^2$$

y reemplazando en (2.3) se tiene,

$$\begin{aligned} \dot{z} &= \alpha x_1 - x_2 - (x_1^2 + x_2^2)x_1 + i(x_1 + \alpha x_2 - (x_1^2 + x_2^2)x_2) \\ &= \alpha(x_1 + ix_2) + i(x_1 + ix_2) - |z|^2(x_1 + ix_2) \\ &= (\alpha + i)z - z|z|^2, \\ &= \lambda_1 z - g(z, \bar{z}, \alpha); \quad g(z, \bar{z}, \alpha) = z|z|^2, \end{aligned}$$

luego

$$\dot{z} = \lambda_1(z) - z|z|^2.$$

Es posible que el sistema (2.3) tenga más puntos de equilibrio, usando las coordenadas polares:

$$x_1 = r \cos(\theta), \quad x_2 = r \sin(\theta), \quad r, \theta > 0$$

donde

$$x_1^2 + x_2^2 = r^2 \quad \text{y} \quad \theta = \tan^{-1} \left( \frac{x_2}{x_1} \right), x_1 \neq 0,$$

derivando implícitamente ambas igualdades con respecto a  $t$  se obtiene

$$\dot{r} = \frac{x_1 \dot{x}_1 + x_2 \dot{x}_2}{r}, \quad \dot{\theta} = \frac{\dot{x}_2 x_1 - x_2 \dot{x}_1}{x_1^2 + x_2^2} \quad (2.4)$$

y reemplazando las ecuaciones  $\dot{x}_1, \dot{x}_2$  de (2.3) en (2.4), se tiene un sistema topológicamente equivalente:

$$\begin{cases} \dot{r} = r(\alpha - r^2) \\ \dot{\theta} = 1 \end{cases}.$$

Si  $\dot{r} = 0$  se obtiene  $r = 0, r = \pm\sqrt{\alpha}$ , lo que implica que los puntos de equilibrio son:

$$P_1 = (0, 0), \quad P_2 = (\sqrt{\alpha}, \theta), \quad P_3 = (-\sqrt{\alpha}, \theta).$$

De donde  $(\sqrt{\alpha}, \theta)$ ,  $(\alpha > 0)$  es una circunferencia de radio  $\sqrt{\alpha}$ . Se presenta una bifurcación de Hopf supercrítica, dado que para  $\alpha < 0$ , las órbitas tienden a acercarse (local) al punto de equilibrio  $P_1 = (0, 0)$  (atractor), en  $\alpha = 0$  hay órbitas que convergen débilmente a  $P_1$  (centro), en  $\alpha > 0$  la estabilidad de  $P_1$  se pierde (repulsor), donde las órbitas se acercan por dentro y por fuera a la circunferencia de radio  $\sqrt{\alpha}$  (órbita estable).

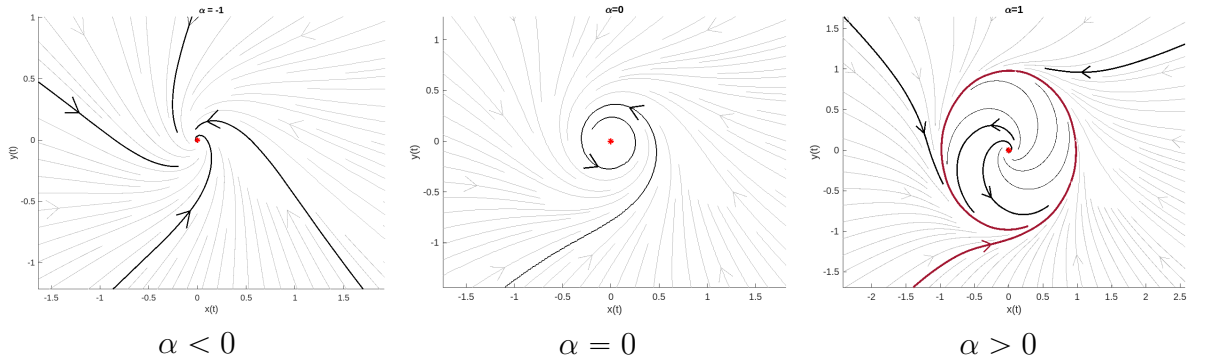


Figura 2.1: Bifurcación de Hopf supercrítica

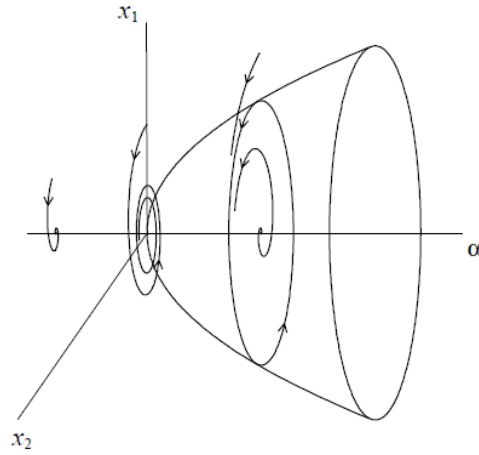


Figura 2.2: Diagrama de bifurcación de Hopf supercrítica [4]

### 2.1.2. Bifurcación de Hopf subcrítica

Este tipo de bifurcación se presenta en el sistema

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = F_1(x_1, x_2) = \alpha x_1 - x_2 + (x_1^2 + x_2^2)x_1 \\ \dot{x}_2 = F_2(x_1, x_2) = x_1 + \alpha x_2 + (x_1^2 + x_2^2)x_2. \end{cases}$$

Su estudio se hace de manera análoga al anterior, de donde se obtiene un ciclo límite inestable para  $\alpha < 0$ , véase la figura 2.3.

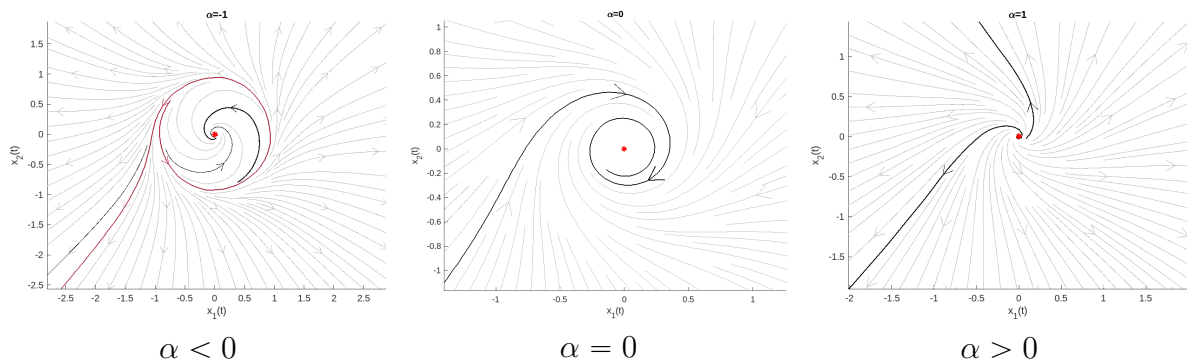


Figura 2.3: Bifurcación de Hopf subcrítica

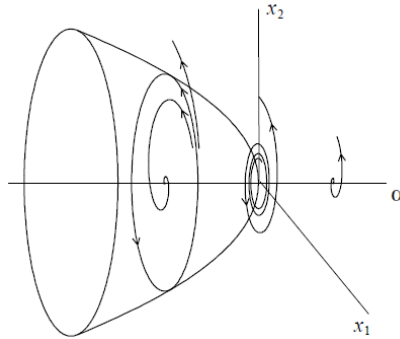


Figura 2.4: Diagrama de bifurcación de Hopf subcrítica [4]

A continuación se mencionarán varios resultados importantes que permitirán determinar bajo qué condiciones el sistema autónomo no lineal (2.1) es topológicamente equivalente al sistema (forma normal) que presenta la bifurcación de Hopf.

## 2.2. Teorema de la forma normal de la bifurcación de Hopf

Se considera el sistema autónomo

$$\dot{\mathbf{x}} = F(\mathbf{x}, \alpha), \quad \mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \alpha \in \mathbb{R}, \quad (2.5)$$

con  $F \in C^\infty(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R})$ , y se supone que existe un punto  $\mathbf{x}^* \in \mathbb{R}^2$  y un valor de parámetro  $\alpha_0$  tal que:

**H.1)** (Condición de equilibrio)

$$F(\mathbf{x}^*, \alpha_0) = \mathbf{0}.$$

**H.2)** (Condición de bifurcación)

$$A(\alpha_0) = DF(\mathbf{x}^*, \alpha_0)$$

tiene un par de valores propios imaginarios puros.

**H.3)** (Condición de transversalidad)

$$\frac{d}{d\alpha}(Re(\lambda(\alpha)))|_{\alpha=\alpha_0} \neq 0,$$

donde  $\lambda(\alpha)$  es un valor propio de  $DF(\mathbf{x}^*)$ ,

entonces existe un cambio de coordenadas y parámetros que transforma al sistema en

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = F_1(x_1, x_2) = \beta x_1 - x_2 \pm (x_1^2 + x_2^2)x_1 \\ \dot{x}_2 = F_2(x_1, x_2) = x_1 + \beta x_2 \pm (x_1^2 + x_2^2)x_2. \end{cases}$$

### 2.3. Bifurcación de Hopf genérica

Se considera el sistema autónomo (2.5) con  $F \in C^\infty(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R})$ , punto de equilibrio  $\mathbf{x}^* = 0$  y en  $\alpha = 0$  su matriz jacobiana  $A(\alpha) = DF(\mathbf{x}^*, \alpha)$  posee valores propios  $\lambda_{1,2} = \pm i\omega_0$  con  $\omega_0 > 0$ . Por el teorema de la función implícita, si  $\lambda = 0$  no es un valor propio de  $A(\alpha)$ , el sistema tiene un único equilibrio  $\mathbf{x}^*(\alpha)$  en algún entorno al origen para todo  $|\alpha|$  lo suficiente pequeño. A través de un cambio de coordenadas se puede llevar ese punto  $\mathbf{x}^*(\alpha)$  al origen. Así el sistema ya linealizado puede ser escrito por

$$\dot{\mathbf{x}} = A(\alpha)\mathbf{x} + \widehat{F}(\mathbf{x}, \alpha), \quad (2.6)$$

donde  $\widehat{F}$  es una función en  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$  suave cuyas componentes  $\widehat{F} = (\widehat{F}_1, \widehat{F}_2)$  tiene expansión de Taylor en  $\mathbf{x}^*$  iniciando con términos cuadráticos,  $\widehat{F} = O(\|\mathbf{x}\|^2)$ .

La ecuación característica de la matriz jacobiana  $A(\alpha) = DF(\mathbf{x}^*, \alpha)$  es

$$\lambda^2 - \sigma\lambda + \Delta = 0$$

donde

$$\sigma = \sigma(\alpha) = \text{tr}(A(\alpha)), \quad \Delta = \Delta(\alpha) = \det(A(\alpha)),$$

así los valores propios de  $A(\alpha)$  son

$$\lambda_{1,2}(\alpha) = \frac{1}{2} \left( \sigma(\alpha) \pm \sqrt{\sigma^2(\alpha) - 4\Delta(\alpha)} \right).$$

La condición suficiente para la bifurcación de Hopf es la existencia de un par de valores propios imaginarios puros. Así, para  $|\alpha|$  suficientemente pequeño se puede introducir

$$\mu(\alpha) = \frac{1}{2}\sigma(\alpha), \quad \omega(\alpha) = \frac{1}{2}\sqrt{4\Delta(\alpha) - \sigma^2(\alpha)}$$

y obtener los valores propios

$$\lambda_1(\alpha) = \mu(\alpha) + \omega(\alpha)i, \quad \lambda_2(\alpha) = \overline{\lambda_1(\alpha)}, \quad \mu(0) = 0, \quad \omega(0) = \omega_0 > 0.$$

A continuación se mencionan algunos lemas importantes para determinar el tipo de bifurcación de Hopf que admite un sistema autónomo. De aquí en adelante se denotará  $\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle = \sum_{i=1}^n \overline{p_i} q_i$ . donde  $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n)$ ,  $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_n) \in \mathbb{C}^n$ .

**Lema 1**

Al introducir la variable compleja  $z = x_1(t) + ix_2(t)$ , el sistema (2.6) puede ser escrito para  $|\alpha|$  lo suficientemente pequeño, como una sola ecuación

$$\dot{z} = \lambda(\alpha)z + g(z, \bar{z}, \alpha),$$

donde  $g = o(\|z\|^2)$  es una función suave ( $C^\infty$ ) de  $(z, \bar{z}, \alpha)$ , dada por

$$g(z, \bar{z}, \alpha) = \langle \mathbf{p}(\alpha), \hat{F}(z\mathbf{q}(\alpha) + \bar{z}\overline{\mathbf{q}}(\alpha), \alpha) \rangle$$

y  $\mathbf{q}, \mathbf{p}$  son vectores propios asociados a los valores propios  $\lambda(\alpha), \overline{\lambda}(\alpha)$  de  $A(\alpha), A^T(\alpha)$  respectivamente.

### **Demostración**

Sea la matriz jacobiana  $A(\alpha)$  en (2.6) con valores propios complejos

$$\lambda_1(\alpha) = \lambda(\alpha), \quad \lambda_2(\alpha) = \bar{\lambda}(\alpha).$$

Sea  $\mathbf{q}(\alpha) \in \mathbb{C}^2$  el vector propio de  $A(\alpha)$  correspondiente al valor propio  $\lambda(\alpha)$ , esto es

$$A(\alpha)\mathbf{q}(\alpha) = \lambda(\alpha)\mathbf{q}(\alpha), \quad (2.7)$$

y también  $\bar{\mathbf{q}}(\alpha)$  es un vector propio de  $A(\alpha)$  correspondiente al valor propio  $\bar{\lambda}(\alpha)$ , es decir

$$A(\alpha)\bar{\mathbf{q}}(\alpha) = \bar{\lambda}(\alpha)\bar{\mathbf{q}}(\alpha). \quad (2.8)$$

Sea  $\mathbf{p}(\alpha) \in \mathbb{C}^2$  el vector propio de  $A^T(\alpha)$  correspondiente al valor propio  $\bar{\lambda}(\alpha)$ , esto es

$$A^T(\alpha)\mathbf{p}(\alpha) = \bar{\lambda}(\alpha)\mathbf{p}(\alpha), \quad (2.9)$$

y también  $\bar{\mathbf{p}}(\alpha)$  es un vector propio de  $A^T(\alpha)$  correspondiente al valor propio  $\lambda(\alpha)$ , es decir

$$A^T(\alpha)\bar{\mathbf{p}}(\alpha) = \lambda(\alpha)\bar{\mathbf{p}}(\alpha). \quad (2.10)$$

Como  $A(\alpha)$  y  $A^T(\alpha)$  tienen el mismo determinante y la misma traza entonces  $\lambda(\alpha)$  y  $\bar{\lambda}(\alpha)$  son valores propios tanto de  $A$  como de  $A^T$ .

Se denotará  $A = A(\alpha)$ ,  $A^T = A^T(\alpha)$ . Si se supone que  $\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle = 0$ , entonces  $\mathbf{p}$  es vector propio de  $A$  correspondiente al valor propio  $\bar{\lambda}(\alpha)$ , así se tendría entonces que

$$A\mathbf{p}(\alpha) = \bar{\lambda}(\alpha)\mathbf{p}(\alpha), \quad (2.11)$$

de sumar (2.9) y (2.11) se tiene que

$$(A + A^T)\mathbf{p}(\alpha) = 2\bar{\lambda}(\alpha)\mathbf{p}(\alpha).$$

Como  $A + A^T$  es una matriz simétrica de coeficientes reales, entonces sus valores propios son reales, y esto es una contradicción, dado que  $2\bar{\lambda} \in \mathbb{C}$ , así  $\langle \mathbf{p}(\alpha), \mathbf{q}(\alpha) \rangle \neq 0$  y en consecuencia es posible normalizar  $\mathbf{p}$  respecto a  $\mathbf{q}$ , esto es

$$\langle \mathbf{p}(\alpha), \mathbf{q}(\alpha) \rangle = 1.$$

Ahora, cualquier vector  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$  puede ser representado de manera única, para todo  $|\alpha|$  suficientemente pequeño como  $\mathbf{x} = z\mathbf{q}(\alpha) + \bar{z}\bar{\mathbf{q}}(\alpha)$  con  $z = \langle \mathbf{p}(\alpha), \mathbf{x} \rangle \in \mathbb{C}$ .

En efecto

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{p}(\alpha), z\mathbf{q}(\alpha) + \bar{z}\bar{\mathbf{q}}(\alpha) \rangle &= \langle \mathbf{p}(\alpha), z\mathbf{q}(\alpha) \rangle + \langle \mathbf{p}(\alpha), \bar{z}\bar{\mathbf{q}}(\alpha) \rangle \\ &= z\langle \mathbf{p}(\alpha), \mathbf{q}(\alpha) \rangle + \bar{z}\langle \mathbf{p}(\alpha), \bar{\mathbf{q}}(\alpha) \rangle, \end{aligned}$$

como  $\langle \mathbf{p}(\alpha), \mathbf{q}(\alpha) \rangle = 1$ , entonces

$$\langle \mathbf{p}(\alpha), z\mathbf{q}(\alpha) + \bar{z}\bar{\mathbf{q}}(\alpha) \rangle = z + \bar{z}\langle \mathbf{p}(\alpha), \bar{\mathbf{q}}(\alpha) \rangle.$$

Ahora se verificará que  $\langle \mathbf{p}(\alpha), \bar{\mathbf{q}}(\alpha) \rangle = 0$ . En efecto, de (2.9) y (2.8) se tiene que

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{p}(\alpha), \bar{\mathbf{q}}(\alpha) \rangle &= \left\langle \frac{A^T(\alpha)\mathbf{p}(\alpha)}{\bar{\lambda}(\alpha)}, \frac{A(\alpha)\bar{\mathbf{q}}(\alpha)}{\bar{\lambda}(\alpha)} \right\rangle \\ &= \frac{1}{\bar{\lambda}(\alpha)} \langle A^T(\alpha)\mathbf{p}(\alpha), \bar{\mathbf{q}}(\alpha) \rangle \\ &= \frac{1}{\bar{\lambda}(\alpha)} \langle \bar{\lambda}(\alpha)\mathbf{p}(\alpha), \bar{\mathbf{q}}(\alpha) \rangle \\ &= \frac{\bar{\lambda}(\alpha)}{\bar{\lambda}(\alpha)} \langle \mathbf{p}(\alpha), \bar{\mathbf{q}}(\alpha) \rangle \\ &= \frac{\lambda}{\bar{\lambda}(\alpha)} \langle \mathbf{p}(\alpha), \bar{\mathbf{q}}(\alpha) \rangle \end{aligned}$$

y por tanto

$$\left(1 - \frac{\lambda(\alpha)}{\bar{\lambda}(\alpha)}\right) \langle \mathbf{p}(\alpha), \bar{\mathbf{q}}(\alpha) \rangle = 0.$$



Como  $\lambda(\alpha) \neq \bar{\lambda}(\alpha)$ , para  $|\alpha|$  suficientemente pequeño, entonces

$$\langle \mathbf{p}(\alpha), \bar{\mathbf{q}}(\alpha) \rangle = 0, \quad \text{luego} \quad \langle \mathbf{p}(\alpha), z\mathbf{q}(\alpha) + \bar{z}\bar{\mathbf{q}}(\alpha) \rangle = z, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Finalmente de (2.6) y  $z = \langle \mathbf{p}(\alpha), \mathbf{x} \rangle$  se tiene entonces

$$\begin{aligned} \dot{z} &= \langle \mathbf{p}(\alpha), \dot{\mathbf{x}} \rangle \\ &= \langle \mathbf{p}(\alpha), A(\alpha)\mathbf{x} + \widehat{F}(\mathbf{x}, \alpha) \rangle \\ &= \langle \mathbf{p}(\alpha), A(\alpha)\mathbf{x} \rangle + \langle \mathbf{p}(\alpha), \widehat{F}(\mathbf{x}, \alpha) \rangle. \end{aligned}$$

Ahora

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{p}(\alpha), A(\alpha)\mathbf{x} \rangle &= \langle \mathbf{p}(\alpha), A(\alpha)[z\mathbf{q}(\alpha) + \bar{z}\bar{\mathbf{q}}(\alpha)] \rangle \\ &= \langle \mathbf{p}(\alpha), A(\alpha)z\mathbf{q}(\alpha) + A(\alpha)\bar{z}\bar{\mathbf{q}}(\alpha) \rangle \\ &= \langle \mathbf{p}(\alpha), A(\alpha)z\mathbf{q}(\alpha) \rangle + \langle \mathbf{p}(\alpha), A(\alpha)\bar{z}\bar{\mathbf{q}}(\alpha) \rangle \\ &= z\langle \mathbf{p}(\alpha), A(\alpha)\mathbf{q}(\alpha) \rangle + \langle \mathbf{p}(\alpha), \bar{z}\bar{\lambda}\bar{\mathbf{q}}(\alpha) \rangle \\ &= z\langle \mathbf{p}(\alpha), A(\alpha)\mathbf{q}(\alpha) \rangle \\ &= z\langle \mathbf{p}(\alpha), \lambda(\alpha)\mathbf{q}(\alpha) \rangle \\ &= z\lambda(\alpha)\langle \mathbf{p}(\alpha), \mathbf{q}(\alpha) \rangle \\ &= \lambda(\alpha)z. \end{aligned}$$

Así se tiene que

$$\dot{z} = \lambda(\alpha)z + g(z, \bar{z}, \alpha), \quad g(z, \bar{z}, \alpha) = \langle \mathbf{p}(\alpha), \widehat{F}(z\mathbf{q}(\alpha) + \bar{z}\bar{\mathbf{q}}(\alpha), \alpha) \rangle \blacksquare$$

Ahora la expansión de Taylor de  $g(z, \bar{z}, \alpha)$  alrededor de  $(0, 0, \alpha)$  es dada por

$$\begin{aligned} g(z, \bar{z}, \alpha) &= \sum_{k+l \geq 2} \frac{1}{k!l!} g_{kl}(\alpha) z^k \bar{z}^l = \frac{1}{2!} g_{20}(\alpha) z^2 + g_{11}(\alpha) z\bar{z} + \frac{1}{2!} g_{02}(\alpha) \bar{z}^2 + \\ &\quad \frac{1}{3!} g_{30}(\alpha) z^3 + \frac{1}{2!} g_{21}(\alpha) z^2 \bar{z} + \frac{1}{2!} g_{12}(\alpha) z \bar{z}^2 + \frac{1}{3!} g_{03}(\alpha) \bar{z}^3 + O(\|z\|^4) \end{aligned}$$

donde

$$g_{kl}(\alpha) = \frac{\partial^{k+l}}{\partial_{z^k} \partial_{\bar{z}^l}} \langle \mathbf{p}(\alpha), F(z\mathbf{q}(\alpha) + \bar{z}\bar{\mathbf{q}}(\alpha), \alpha) \rangle|_{z=0}, \quad \text{para } k+l \geq 2, \quad k, l = 0, 1, \dots$$

Suponiendo que en  $\alpha = 0$ ,  $\mathbf{x}^* = 0$  la función  $\widehat{F}(\mathbf{x}, \alpha) = (\widehat{F}_1(\mathbf{x}, \alpha), \widehat{F}_2(\mathbf{x}, \alpha))^T$  en (2.6) se puede representar de la forma

$$\widehat{F}(\mathbf{x}, 0) = \frac{1}{2}B(\mathbf{x}, \mathbf{x}) + \frac{1}{6}C(\mathbf{x}, \mathbf{x}, \mathbf{x}) + O(\|\mathbf{x}\|^4) \quad (2.12)$$

con  $B(\mathbf{x}, \mathbf{x})$  y  $C(\mathbf{x}, \mathbf{x}, \mathbf{x})$  funciones multilineales simétricas de  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ ,

$$B : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2,$$

$$C : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2.$$

En coordenadas

$$\begin{aligned} B_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \sum_{j,k=1}^2 \frac{\partial^2 \widehat{F}_i(\xi, 0)}{\partial \xi_j \partial \xi_k} \Big|_{\xi=0} x_j y_k \quad i = 1, 2 \\ &= \frac{\partial^2 \widehat{F}_i(\xi, 0)}{\partial \xi_1^2} \Big|_{\xi=0} x_1 y_1 + \frac{\partial^2 \widehat{F}_i(\xi, 0)}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} \Big|_{\xi=0} x_1 y_2 \\ &\quad + \frac{\partial^2 \widehat{F}_i(\xi, 0)}{\partial \xi_2 \partial \xi_1} \Big|_{\xi=0} x_2 y_1 + \frac{\partial^2 \widehat{F}_i(\xi, 0)}{\partial \xi_2^2} \Big|_{\xi=0} x_2 y_2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{u}) &= \sum_{j,k,l=1}^2 \frac{\partial^3 \widehat{F}_i(\xi, 0)}{\partial \xi_j \partial \xi_k \partial \xi_l} \Big|_{\xi=0} x_j y_k u_l, \quad i = 1, 2 \\ &= \frac{\partial^3 \widehat{F}_i(\xi, 0)}{\partial \xi_1^3} \Big|_{\xi=0} x_1 y_1 u_1 + \frac{\partial^3 \widehat{F}_i(\xi, 0)}{\partial \xi_1^2 \partial \xi_2} \Big|_{\xi=0} x_1 y_1 u_2 + \frac{\partial^3 \widehat{F}_i(\xi, 0)}{\partial \xi_1 \partial \xi_2 \partial \xi_1} \Big|_{\xi=0} x_1 y_2 u_1 \\ &\quad + \frac{\partial^3 \widehat{F}_i(\xi, 0)}{\partial \xi_1 \partial \xi_2^2} \Big|_{\xi=0} x_1 y_2 u_2 + \frac{\partial^3 \widehat{F}_i(\xi, 0)}{\partial \xi_2 \partial \xi_1^2} \Big|_{\xi=0} x_2 y_1 u_1 + \frac{\partial^3 \widehat{F}_i(\xi, 0)}{\partial \xi_2 \partial \xi_1 \partial \xi_2} \Big|_{\xi=0} x_2 y_1 u_2 \\ &\quad + \frac{\partial^3 \widehat{F}_i(\xi, 0)}{\partial \xi_2^2 \partial \xi_1} \Big|_{\xi=0} x_2 y_2 u_1 + \frac{\partial^3 \widehat{F}_i(\xi, 0)}{\partial \xi_2^3} \Big|_{\xi=0} x_2 y_2 u_2, \quad i = 1, 2. \end{aligned}$$

De este modo, según el lema, la función  $g$  se puede escribir así

$$g(z, \bar{z}, 0) = \left\langle \mathbf{p}, \frac{1}{2}B(\mathbf{b}, \mathbf{b}) + \frac{1}{6}C(\mathbf{b}, \mathbf{b}, \mathbf{b}) + \dots \right\rangle$$

donde  $\mathbf{b} = z\mathbf{q} + \bar{z}\bar{\mathbf{q}}$  y se denota  $\mathbf{p} = \mathbf{p}(0)$  y  $\mathbf{q} = \mathbf{q}(0)$ .

Ahora

$$\begin{aligned} B(z\mathbf{q} + \bar{z}\bar{\mathbf{q}}, z\mathbf{q} + \bar{z}\bar{\mathbf{q}}) &= B(z\mathbf{q}, z\mathbf{q} + \bar{z}\bar{\mathbf{q}}) + B(\bar{z}\bar{\mathbf{q}}, z\mathbf{q} + \bar{z}\bar{\mathbf{q}}) \\ &= B(z\mathbf{q}, z\mathbf{q}) + B(z\mathbf{q}, \bar{z}\bar{\mathbf{q}}) + B(\bar{z}\bar{\mathbf{q}}, z\mathbf{q}) + B(\bar{z}\bar{\mathbf{q}}, \bar{z}\bar{\mathbf{q}}) \\ &= z^2B(\mathbf{q}, \mathbf{q}) + z\bar{z}B(\mathbf{q}, \bar{\mathbf{q}}) + \bar{z}zB(\bar{\mathbf{q}}, \mathbf{q}) + \bar{z}^2B(\bar{\mathbf{q}}, \bar{\mathbf{q}}). \end{aligned}$$

Como  $B$  es simétrica se tiene que  $B(\mathbf{q}, \bar{\mathbf{q}}) = B(\bar{\mathbf{q}}, \mathbf{q})$ . Luego,

$$\begin{aligned} g(z, \bar{z}, 0) &= \left\langle \mathbf{p}, \frac{1}{2} [z^2B(\mathbf{q}, \mathbf{q}) + 2z\bar{z}B(\mathbf{q}, \bar{\mathbf{q}}) + \bar{z}^2B(\bar{\mathbf{q}}, \bar{\mathbf{q}})] + \dots \right\rangle \\ &= \frac{1}{2}z^2\langle \mathbf{p}, B(\mathbf{q}, \mathbf{q}) \rangle + z\bar{z}\langle \mathbf{p}, B(\mathbf{q}, \bar{\mathbf{q}}) \rangle + \frac{1}{2}\bar{z}^2\langle \mathbf{p}, B(\bar{\mathbf{q}}, \bar{\mathbf{q}}) \rangle + \dots \end{aligned}$$

donde  $z\bar{z} = |z|^2$ . De este modo, los términos cuadráticos en

$$g(z, \bar{z}, 0) = g_{11}(0)z\bar{z} + \frac{1}{2!} [g_{20}(0)z^2 + g_{02}(0)\bar{z}^2] + \frac{1}{2!} [g_{21}(0)z^2\bar{z} + g_{12}(0)z\bar{z}^2] + \dots$$

pueden ser expresados por las fórmulas

$$g_{20} = \langle \mathbf{p}, B(\mathbf{q}, \mathbf{q}) \rangle, \quad g_{11} = \langle \mathbf{p}, B(\mathbf{q}, \bar{\mathbf{q}}) \rangle, \quad g_{02} = \langle \mathbf{p}, B(\bar{\mathbf{q}}, \bar{\mathbf{q}}) \rangle.$$

Cálculos similares con

$$C(z\mathbf{q} + \bar{z}\bar{\mathbf{q}}, z\mathbf{q} + \bar{z}\bar{\mathbf{q}}, z\mathbf{q} + \bar{z}\bar{\mathbf{q}}) = z^3C(\mathbf{q}, \mathbf{q}, \mathbf{q}) + 3z^2\bar{z}C(\mathbf{q}, \mathbf{q}, \bar{\mathbf{q}}) + 3z\bar{z}^2C(\mathbf{q}, \bar{\mathbf{q}}, \bar{\mathbf{q}}) + \bar{z}^3C(\bar{\mathbf{q}}, \bar{\mathbf{q}}, \bar{\mathbf{q}})$$

muestran que

$$g_{21} = \langle \mathbf{p}, C(\mathbf{q}, \mathbf{q}, \bar{\mathbf{q}}) \rangle.$$

**Lema 2**

El sistema autónomo plano con  $\beta \in \mathbb{R}$  y punto de equilibrio  $\mathbf{x}^* = 0$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = F_1(x_1, x_2) = \beta x_1 - x_2 \pm (x_1^2 + x_2^2)x_1 + O(\|x\|^4) \\ \dot{x}_2 = F_2(x_1, x_2) = x_1 + \beta x_2 \pm (x_1^2 + x_2^2)x_2 + O(\|x\|^4) \end{cases}$$

es topológicamente equivalente (localmente) cerca del origen al sistema

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = F_1(x_1, x_2) = \beta x_1 - x_2 \pm (x_1^2 + x_2^2)x_1 \\ \dot{x}_2 = F_2(x_1, x_2) = x_1 + \beta x_2 \pm (x_1^2 + x_2^2)x_2. \end{cases}$$

Es decir, los términos de orden cuatro y superiores no afectan el comportamiento de la bifurcación del sistema.

(Ver demostración detallada en [2]).

**Lema 3**

La ecuación

$$\dot{z} = \lambda z + \frac{g_{20}}{2} z^2 + g_{11} z \bar{z} + \frac{g_{02}}{2} \bar{z}^2 + O(\|z\|^3) \quad (2.13)$$

donde  $\lambda = \lambda(\alpha) = \mu(\alpha) + i\omega(\alpha)$ ,  $\mu(0) = 0$ ,  $\omega(0) = \omega_0 > 0$  y  $g_{ij} = g_{ij}(\alpha)$  puede ser transformada mediante el cambio invertible de coordenada compleja (que depende del parámetro)

$$z = w + \frac{h_{20}}{2} w^2 + h_{11} w \bar{w} + \frac{h_{02}}{2} \bar{w}^2 \quad (2.14)$$

para todo  $|\alpha|$  suficientemente pequeño, en una ecuación sin términos cuadráticos

$$\dot{w} = \lambda w + O(\|w\|^3).$$

### Demostración

El cambio inverso de variables está dado por la expresión

$$w = z - \frac{h_{20}z^2}{2} - h_{11}z\bar{z} - \frac{h_{02}\bar{z}^2}{2} + O(\|z\|^3),$$

al derivar esta expresión y por regla de la cadena se tiene que

$$\dot{w} = \dot{z} - h_{20}(z\dot{z}) - h_{11}(\dot{z}\bar{z} + z\dot{\bar{z}}) - h_{02}\bar{z}\dot{\bar{z}} + \dots, \quad (2.15)$$

sustituyendo  $\dot{z}, \dot{\bar{z}}$  de (2.13) en (2.15) se tiene que

$$\begin{aligned} \dot{w} = & \lambda z + \frac{g_{20}z^2}{2} + g_{11}z\bar{z} + \frac{g_{02}\bar{z}^2}{2} - h_{20}z \left[ \lambda z + \frac{g_{20}z^2}{2} + g_{11}z\bar{z} + \frac{g_{02}\bar{z}^2}{2} \right] \\ & - h_{11} \left[ \bar{z} \left( \lambda z + \frac{g_{20}z^2}{2} + g_{11}z\bar{z} + \frac{g_{02}\bar{z}^2}{2} \right) + z \left( \bar{\lambda}\bar{z} + \frac{\bar{g}_{20}\bar{z}^2}{2} + \bar{g}_{11}\bar{z}z + \frac{\bar{g}_{02}z^2}{2} \right) \right] \\ & - h_{02}\bar{z} \left[ \bar{\lambda}\bar{z} + \frac{\bar{g}_{20}\bar{z}^2}{2} + \bar{g}_{11}\bar{z}z + \frac{\bar{g}_{02}z^2}{2} \right] + \dots, \end{aligned}$$

agrupando términos semejantes se tiene que

$$\dot{w} = \lambda z + \left[ \frac{g_{20}}{2} - \lambda h_{20} \right] z^2 + [g_{11} - \lambda h_{11} - \bar{\lambda} h_{11}] z\bar{z} + \left[ \frac{g_{02}}{2} - \bar{\lambda} h_{02} \right] \bar{z}^2 + \dots,$$

de sustituir  $z, \bar{z}$  de (2.14) en esta última igualdad se tiene que

$$\begin{aligned} \dot{w} = & \lambda \left( w + \frac{h_{20}}{2}w^2 + h_{11}w\bar{w} + \frac{h_{02}}{2}\bar{w}^2 \right) \\ & + \left[ \frac{g_{20}}{2} - \lambda h_{20} \right] \left( w + \frac{h_{20}}{2}w^2 + h_{11}w\bar{w} + \frac{h_{02}}{2}\bar{w}^2 \right)^2 \\ & + [g_{11} - \lambda h_{11} - \bar{\lambda} h_{11}] \left( w + \frac{h_{20}}{2}w^2 + h_{11}w\bar{w} + \frac{h_{02}}{2}\bar{w}^2 \right) \left( \bar{w} + \frac{\bar{h}_{20}}{2}\bar{w}^2 + \bar{h}_{11}\bar{w}w + \frac{\bar{h}_{02}}{2}w^2 \right) \\ & + \left[ \frac{g_{02}}{2} - \bar{\lambda} h_{02} \right] \left( \bar{w} + \frac{\bar{h}_{20}}{2}\bar{w}^2 + \bar{h}_{11}\bar{w}w + \frac{\bar{h}_{02}}{2}w^2 \right)^2 + \dots, \end{aligned}$$

del desarrollo de esta expresión y de agrupar términos semejantes se obtiene que

$$\dot{w} = \lambda w + \frac{1}{2}(g_{20} - \lambda h_{20})w^2 + (g_{11} - \bar{\lambda}h_{11})w\bar{w} + \frac{1}{2}(g_{20} - h_{02}(2\bar{\lambda} - \lambda))\bar{w}^2 + \dots, \quad (2.16)$$

si se considera

$$h_{20} = \frac{g_{20}}{\lambda}, \quad h_{11} = \frac{g_{11}}{\lambda}, \quad h_{02} = \frac{g_{20}}{2\bar{\lambda} - \lambda},$$

con  $\lambda = \lambda(0) = \omega_0 i \neq 0$ ,  $\omega_0 > 0$ , y para  $|\alpha|$  lo suficientemente pequeño se tiene que  $2\bar{\lambda} - \lambda \neq 0$ , y sustituyéndolos en (2.16), los términos cuadráticos se cancelan, es así que la igualdad (2.16) se puede transformar a

$$\dot{w} = \lambda w + O(\|w\|^3) \blacksquare$$

(Ver a detalle en [2])

#### **Lema 4**

La ecuación

$$\dot{z} = \lambda z + \frac{g_{30}}{6}z^3 + \frac{g_{21}}{2}z^2\bar{z} + \frac{g_{12}}{2}z\bar{z}^2 + \frac{g_{03}}{6}\bar{z}^3 + O(\|z\|^4) \quad (2.17)$$

donde  $\lambda = \lambda(\alpha) = \mu(\alpha) + i\omega(\alpha)$ ,  $\mu(0) = 0$ ,  $\omega(0) = \omega_0 > 0$  y  $g_{ij} = g_{ij}(\alpha)$  puede ser transformada mediante el cambio invertible de coordenada compleja (que depende del parámetro)

$$z = w + \frac{h_{30}}{6}w^3 + \frac{h_{21}}{2}w^2\bar{w} + \frac{h_{12}}{2}w\bar{w}^2 + \frac{h_{03}}{6}\bar{w}^3 \quad (2.18)$$

para todo  $|\alpha|$  suficientemente pequeño, en una ecuación con un único término cúbico

$$\dot{w} = \lambda w + c_1 w^2 \bar{w} + O(\|w\|^4),$$

donde  $c_1 = c_1(\alpha)$ .

### Demostración

El cambio inverso de variables está dado por la expresión

$$w = z - \frac{h_{30}}{6}z^3 - \frac{h_{21}}{2}z^2\bar{z} - \frac{h_{12}}{2}z\bar{z}^2 - \frac{h_{03}}{6}\bar{z}^3 + O(\|z\|^4),$$

al derivar esta expresión y por regla de la cadena se tiene que

$$\dot{w} = \dot{z} - \frac{h_{30}}{2}z^2\dot{z} - \frac{h_{21}}{2}(2z\dot{z}\bar{z} + z^2\dot{\bar{z}}) - \frac{h_{12}}{2}(\dot{z}\bar{z}^2 + 2z\bar{z}\dot{\bar{z}}) - \frac{h_{03}}{2}\bar{z}^2\dot{\bar{z}} + \dots,$$

de sustituir  $\dot{z}, \dot{\bar{z}}$  de (2.17) en esta última igualdad se tiene

$$\begin{aligned} \dot{w} &= \lambda z + \frac{g_{30}}{6}z^3 + \frac{g_{21}}{2}z^2\bar{z} + \frac{g_{12}}{2}z\bar{z}^2 + \frac{g_{03}}{6}\bar{z}^3 \\ &\quad - \frac{h_{30}}{2}z^2 \left( \lambda z + \frac{g_{30}}{6}z^3 + \frac{g_{21}}{2}z^2\bar{z} + \frac{g_{12}}{2}z\bar{z}^2 + \frac{g_{03}}{6}\bar{z}^3 \right) \\ &\quad - h_{21}z\bar{z} \left( \lambda z + \frac{g_{30}}{6}z^3 + \frac{g_{21}}{2}z^2\bar{z} + \frac{g_{12}}{2}z\bar{z}^2 + \frac{g_{03}}{6}\bar{z}^3 \right) \\ &\quad - \frac{h_{21}}{2}z^2 \left( \bar{\lambda}\bar{z} + \frac{\bar{g}_{30}}{6}\bar{z}^3 + \frac{\bar{g}_{21}}{2}\bar{z}^2z + \frac{\bar{g}_{12}}{2}\bar{z}z^2 + \frac{\bar{g}_{03}}{6}z^3 \right) \\ &\quad - \frac{h_{12}}{2}\bar{z}^2 \left( \lambda z + \frac{g_{30}}{6}z^3 + \frac{g_{21}}{2}z^2\bar{z} + \frac{g_{12}}{2}z\bar{z}^2 + \frac{g_{03}}{6}\bar{z}^3 \right) \\ &\quad - h_{12}z\bar{z} \left( \bar{\lambda}\bar{z} + \frac{\bar{g}_{30}}{6}\bar{z}^3 + \frac{\bar{g}_{21}}{2}\bar{z}^2z + \frac{\bar{g}_{12}}{2}\bar{z}z^2 + \frac{\bar{g}_{03}}{6}z^3 \right) \\ &\quad - \frac{h_{03}}{2}\bar{z}^2 \left( \bar{\lambda}\bar{z} + \frac{\bar{g}_{30}}{6}\bar{z}^3 + \frac{\bar{g}_{21}}{2}\bar{z}^2z + \frac{\bar{g}_{12}}{2}\bar{z}z^2 + \frac{\bar{g}_{03}}{6}z^3 \right) + \dots, \end{aligned}$$

agrupando términos semejantes se tiene que

$$\begin{aligned} \dot{w} &= \lambda z + \left( \frac{g_{30}}{6} - \lambda \frac{h_{30}}{2} \right) z^3 + \left( \frac{g_{21}}{2} - \lambda h_{21} - \bar{\lambda} \frac{h_{21}}{2} \right) z^2\bar{z} \\ &\quad + \left( \frac{g_{12}}{2} - \lambda \frac{h_{12}}{2} - \bar{\lambda} h_{12} \right) z\bar{z}^2 + \left( \frac{g_{03}}{6} - \bar{\lambda} \frac{h_{03}}{2} \right) \bar{z}^3 + \dots, \end{aligned}$$

de sustituir  $z$  de (2.18) en esta última igualdad se tiene que

$$\dot{w} = \lambda \left( w + \frac{h_{30}}{6}w^3 + \frac{h_{21}}{2}w^2\bar{w} + \frac{h_{12}}{2}w\bar{w}^2 + \frac{h_{03}}{6}\bar{w}^3 \right)$$

$$\begin{aligned}
& + \left( \frac{g_{30}}{6} - \lambda \frac{h_{30}}{2} \right) \left( w + \frac{h_{30}}{6} w^3 + \frac{h_{21}}{2} w^2 \bar{w} + \frac{h_{12}}{2} w \bar{w}^2 + \frac{h_{03}}{6} \bar{w}^3 \right)^3 \\
& + \left( \frac{g_{21}}{2} - \lambda h_{21} - \bar{\lambda} \frac{h_{21}}{2} \right) \left( w + \frac{h_{30}}{6} w^3 + \frac{h_{21}}{2} w^2 \bar{w} + \frac{h_{12}}{2} w \bar{w}^2 + \frac{h_{03}}{6} \bar{w}^3 \right)^2 \bar{z} \\
& + \left( \frac{g_{12}}{2} - \lambda \frac{h_{12}}{2} - \bar{\lambda} h_{12} \right) \left( w + \frac{h_{30}}{6} w^3 + \frac{h_{21}}{2} w^2 \bar{w} + \frac{h_{12}}{2} w \bar{w}^2 + \frac{h_{03}}{6} \bar{w}^3 \right) \bar{z}^2 \\
& \quad + \left( \frac{g_{03}}{6} - \bar{\lambda} \frac{h_{03}}{2} \right) \bar{z}^3 + \dots,
\end{aligned}$$

de sustituir

$$\bar{z} = \bar{w} + \frac{\bar{h}_{30}}{6} \bar{w}^3 + \frac{\bar{h}_{21}}{2} \bar{w}^2 \bar{w} + \frac{\bar{h}_{12}}{2} \bar{w} \bar{w}^2 + \frac{\bar{h}_{03}}{6} \bar{w}^3$$

y de agrupar términos semejantes se tiene

$$\begin{aligned}
\dot{w} & = \lambda w + \frac{1}{6} (g_{30} - 2\lambda h_{30}) w^3 + \frac{1}{2} (g_{21} - (\lambda + \bar{\lambda}) h_{21}) w^2 \bar{w} \\
& \quad + \frac{1}{2} (g_{12} - 2\bar{\lambda} h_{12}) w \bar{w}^2 + \frac{1}{6} (g_{03} + (\lambda - 3\bar{\lambda}) h_{03}) \bar{w}^3 + \dots,
\end{aligned}$$

si se considera

$$h_{30} = \frac{g_{30}}{2\lambda}, \quad h_{12} = \frac{g_{12}}{2\bar{\lambda}}, \quad h_{03} = \frac{g_{03}}{3\bar{\lambda} - \lambda}, \quad h_{21} = 0,$$

con  $\lambda = \lambda(0) = \omega_0 i \neq 0$ ,  $\omega_0 > 0$ , y para  $|\alpha|$  lo suficientemente pequeño se tiene que  $3\bar{\lambda} - \lambda \neq 0$ , y sustituyéndolos en la última expresión todos los términos cúbicos se eliminan, excepto el término  $w^2 \bar{w}$ , es así que esa expresión se puede transformar en

$$\dot{w} = \lambda w + c_1 w^2 \bar{w} + O(\|w\|^4),$$

donde  $c_1 = c_1(\alpha) = \frac{g_{21}(\alpha)}{2}$  ■



**Lema 5 (Forma normal de Poincaré para la bifurcación de Hopf)**

La ecuación

$$\dot{z} = \lambda z + \sum_{2 \leq k+l \leq 3} \frac{1}{k!l!} g_{kl} z^k \bar{z}^l + O(\|z\|^4)$$

donde  $\lambda = \lambda(\alpha) = \mu(\alpha) + i\omega(\alpha)$ ,  $\mu(0) = 0$ ,  $\omega(0) = \omega_0 > 0$  y  $g_{ij} = g_{ij}(\alpha)$  puede ser transformada mediante el cambio invertible de coordenada compleja (que depende del parámetro)

$$z = w + \frac{h_{20}}{2} w^2 + h_{11} w \bar{w} + \frac{h_{02}}{2} \bar{w}^2 + \frac{h_{30}}{6} w^3 + \frac{h_{12}}{2} w \bar{w} + \frac{h_{03}}{6} \bar{w}^3$$

para todo  $|\alpha|$  suficientemente pequeño, en una ecuación con sólo el término resonante cúbico ( $w^2 \bar{w}$ )

$$\dot{w} = \lambda w + c_1 w^2 \bar{w} + O(\|w\|^4)$$

donde  $c_1 = c_1(\alpha)$ .

La demostración se hace de manera análoga y es resultado de las demostraciones expuestas anteriormente. (Ver demostración detallada en [4], Pág. 97)

El coeficiente  $c_1(\alpha)$  es importante para determinar el tipo de bifurcación de Hopf que presenta el sistema (2.6), (ver [2]). En  $\alpha = 0$ , con  $g_{ij} = g_{ij}(\alpha)$ , se tiene que

$$c_1(0) = \frac{i}{2\omega_0} \left[ g_{20}g_{11} - 2|g_{11}|^2 - \frac{1}{3}|g_{02}|^2 \right] + \frac{g_{21}}{2},$$

con  $\omega_0 > 0$ .

**Desarrollo**

Del lema 3 y 5 se considera a

$$\dot{z} = \lambda z + \frac{g_{20}}{2} z^2 + g_{11} z \bar{z} + \frac{g_{02}}{2} \bar{z}^2 + O(\|z\|^3), \quad (2.19)$$

$$z = w + \frac{h_{20}}{2}w^2 + h_{11}w\bar{w} + \frac{h_{20}}{2}\bar{w}^2, \quad (2.20)$$

$$\dot{w} = \lambda w + c_1 w^2 \bar{w} + O(\|w\|^4), \quad (2.21)$$

de derivar (2.20) y por la regla de la cadena se obtiene

$$\dot{z} = \dot{w} + h_{20}w\dot{w} + h_{11}(\dot{w}\bar{w} + w\dot{\bar{w}}) + h_{02}\dot{\bar{w}}\bar{w}, \quad (2.22)$$

de reemplazar (2.21) en (2.22) se tiene

$$\dot{z} = \lambda w + c_1 w^2 \bar{w} + h_{20}w[\lambda w + c_1 w^2 \bar{w}] \quad (2.23)$$

$$+ h_{11}[(\lambda w + c_1 w^2 \bar{w})\bar{w} + w\dot{\bar{w}}] + h_{02}\bar{w}\dot{\bar{w}} + \dots, \quad (2.24)$$

de sustituir  $z, \bar{z}$  de (2.20) en (2.19) se tiene

$$\begin{aligned} \dot{z} = & \lambda \left[ w + \frac{h_{20}}{2}w^2 + h_{11}w\bar{w} + \frac{h_{20}}{2}\bar{w}^2 \right] + \frac{g_{20}}{2} \left[ w + \frac{h_{20}}{2}w^2 + h_{11}w\bar{w} + \frac{h_{20}}{2}\bar{w}^2 \right]^2 \\ & + g_{11} \left[ w + \frac{h_{20}}{2}w^2 + h_{11}w\bar{w} + \frac{h_{20}}{2}\bar{w}^2 \right] \left[ \bar{w} + \frac{\bar{h}_{20}\bar{w}^2}{2} + \bar{h}_{11}\bar{w}w + \frac{\bar{h}_{20}w^2}{2} \right] \\ & + \frac{g_{02}}{2} \left[ \bar{w} + \frac{\bar{h}_{20}\bar{w}^2}{2} + \bar{h}_{11}\bar{w}w + \frac{\bar{h}_{20}w^2}{2} \right]^2 + \dots, \end{aligned}$$

de desarrollar y agrupar términos semejantes se tiene que el coeficiente de  $w^2\bar{w}$  es

$$\frac{g_{20}}{2}(2h_{11}) + g_{11} \left( \frac{h_{20}}{2} + \bar{h}_{11} \right) + \frac{g_{02}}{2}(\bar{h}_{02}) + \frac{g_{21}}{2}, \quad (2.25)$$

si se considera

$$h_{20} = \frac{g_{20}}{\lambda}, \quad h_{11} = \frac{g_{11}}{\lambda}, \quad h_{02} = \frac{g_{20}}{2\lambda - \lambda},$$

con  $\lambda = \lambda(\alpha)$ ,  $\bar{\lambda} = \overline{\lambda(\alpha)}$ , donde además

$$\bar{h}_{02} = \frac{\overline{g_{02}}}{2\lambda - \bar{\lambda}}, \quad \bar{h}_{11} = \frac{\overline{g_{11}}}{\lambda},$$

reemplazando estas expresiones en el coeficiente de  $w^2\bar{w}$  en (2.25) se obtiene

$$\begin{aligned} c_1(\alpha) &= \frac{g_{20}(\alpha)g_{11}(\alpha)}{\bar{\lambda}(\alpha)} + \frac{g_{20}(\alpha)g_{11}(\alpha)}{2\lambda(\alpha)} + \frac{|g_{11}(\alpha)|^2}{\lambda(\alpha)} + \frac{g_{02}(\alpha)\overline{g_{02}(\alpha)}}{2(2\lambda(\alpha) - \bar{\lambda}(\alpha))} + \frac{g_{21}(\alpha)}{2} \\ &= \frac{g_{20}(\alpha)g_{11}(\alpha)[2\lambda(\alpha) + \bar{\lambda}(\alpha)]}{2[\lambda(\alpha)]^2} + \frac{[g_{11}(\alpha)]^2}{\lambda(\alpha)} + \frac{[g_{02}(\alpha)]^2}{2(2\lambda(\alpha) - \bar{\lambda}(\alpha))} + \frac{g_{21}(\alpha)}{2}, \end{aligned}$$

y para  $\alpha = 0$ ,  $\lambda(0) = +\omega_0 i$ , se tiene

$$\begin{aligned} c_1(0) &= \frac{g_{20}(0)g_{11}(0)[2\omega_0 i - \omega_0 i]}{2\omega_0^2} + \frac{|g_{11}(0)|^2}{\omega_0 i} + \frac{|g_{02}(0)|^2}{2(2\omega_0 i + \omega_0 i)} + \frac{g_{21}(0)}{2} \\ &= \frac{i}{2\omega_0} \left[ g_{20}(0)g_{11}(0) - 2|g_{11}(0)|^2 - \frac{1}{3}|g_{02}(0)|^2 \right] + \frac{g_{21}(0)}{2}. \end{aligned}$$

(Ver a detalle en [2])

### **Teorema**

Sea la ecuación

$$\frac{dw}{dt} = \lambda(\alpha)w + c_1(\alpha)w|w|^2 + O(\|w\|^4), \quad (2.26)$$

donde  $\lambda(\alpha) = \mu(\alpha) + i\omega(\alpha)$ ,  $\mu(0) = 0 > 0$ ,  $\omega(0) = \omega_0 > 0$ , si  $\dot{\mu}(0) \neq 0$  y  $Re(c_1(0)) \neq 0$ , entonces la ecuación puede ser transformada mediante un cambio de coordenada (que depende del parámetro) y una parametrización no lineal del tiempo, en una ecuación de la forma

$$\frac{du}{d\theta} = (\beta + i)\mu + su|u|^2 + O(\|u\|^4),$$

donde  $u$  es una nueva coordenada compleja,  $\theta$  es el nuevo tiempo,  $\beta$  es el nuevo parámetro, y  $s = \text{signo}[Re(c_1(0))] = \pm 1$ .

## Demostración

### 1. Escalamiento lineal del tiempo

Al introducir la nueva variable de tiempo  $\gamma = \omega(\alpha)t$ , como  $\omega(\alpha) > 0$  para todo  $|\alpha|$  lo suficientemente pequeño, la dirección del tiempo se preserva, ahora

$$\frac{dw}{d\gamma} = \frac{dw}{dt} * \frac{dt}{d\gamma} = \frac{dw}{dt} * \frac{1}{\frac{d\gamma}{dt}} = \frac{1}{\omega(\alpha)} * \frac{dw}{dt},$$

de sustituir (2.26) en esta última igualdad se tiene

$$\frac{dw}{d\gamma} = \frac{1}{\omega(\alpha)} [(\mu(\alpha) + i\omega(\alpha))w + c_1(\alpha)w|w|^2 + O(\|w\|^4)] \quad (2.27)$$

$$= \left( \frac{\mu(\alpha)}{\omega(\alpha)} + i \right) w + \frac{c_1(\alpha)}{\omega(\alpha)} w|w|^2 + O(\|w\|^4), \quad (2.28)$$

al hacer

$$\beta = \beta(\alpha) = \frac{\mu(\alpha)}{\omega(\alpha)}, \quad d_1(\beta) = \frac{c_1(\alpha)}{\omega(\alpha)},$$

localmente  $\alpha = \alpha(\beta)$ ,  $\beta(0) = 0$  y  $\dot{\beta}(0) = \frac{\dot{\mu}(0)}{\omega_0} \neq 0$  (por hipótesis), luego, por el teorema de la función inversa se tiene que

$$d_1(\beta) = d_1(\alpha(\beta)) = \frac{c_1(\alpha(\beta))}{\omega(\alpha(\beta))},$$

así en (2.31) se tiene

$$\frac{dw}{d\gamma} = (\beta + i)w + d_1(\beta)w|w|^2 + O(\|w\|^4).$$

### 2. Reparametrización no lineal del tiempo

Al introducir para las órbitas el nuevo tiempo  $\theta = \theta(\gamma, \beta)$  donde

$$d\theta = (1 + e_1(\beta)|w|^2)d\gamma, \quad \text{con } e_1(\beta) = \text{Im}(d_1(\beta)),$$

este cambio es una transformación próxima a la identidad en una vecindad pequeña del

origen ( $|w|^2 \approx 0$ ), así

$$\frac{dw}{d\theta} = \frac{dw}{d\gamma} * \frac{d\gamma}{d\theta} = [(\beta + i)w + d_1(\beta)w|w|^2 + O(\|w\|^4)][(1 + e_1(\beta)|w|^2)]^{-1}, \quad (2.29)$$

de series de potencias se tiene

$$\frac{1}{1 + e_1(\beta)|w|^2} = 1 - e_1(\beta)|w|^2 + (e_1(\beta)|w|^2)^2 - (e_1(\beta)|w|^2)^3 + \dots, \quad (2.30)$$

de sustituir (2.30), distribuir y agrupar términos semejantes en (2.32) se obtiene

$$\frac{dw}{d\theta} = (\beta + i)w + (d_1(\beta) - \beta Im(d_1(\beta)) - ie_1(\beta))w|w|^2 + O(\|w\|^4). \quad (2.31)$$

Como

$$d_1(\beta) = Re(d_1(\beta)) + iIm(d_1(\beta)),$$

entonces

$$Re(d_1(\beta)) = d_1(\beta) - iIm(d_1(\beta)),$$

así en (2.31)

$$\frac{dw}{d\theta} = (\beta + i)w + l_1(\beta)w|w|^2 + O(|w|^4),$$

con  $l_1(\beta) = Re(d_1(\beta)) - \beta Im(d_1(\beta))$ , donde  $l_1(\beta)$  es conocido como *el primer coeficiente de Lyapunov*, además

$$l_1(0) = \frac{Re(c_1(0))}{\omega(0)}.$$

### 3. Escalamiento lineal de coordenadas

Como  $Re(c_1(0)) \neq 0$ , luego  $l_1(0) \neq 0$ , y al introducir la nueva variable compleja  $u$  con

$$w = \frac{u}{\sqrt{|l_1(\beta)|}},$$

ahora

$$\frac{du}{d\theta} = \sqrt{|l_1(\beta)|} \frac{dw}{d\theta},$$

así de sustituir  $\frac{dw}{d\theta}$  se obtiene

$$\frac{du}{d\theta} = (\beta + i)u + su|u|^2 + O(\|u\|^4), \quad s = \text{sign}(l_1(0)) = \frac{l_1(\beta)}{|l_1(\beta)|} = \pm 1 \blacksquare$$

(Ver a detalle en [2]).

De lo expuesto anteriormente se observa la relevancia del coeficiente  $c_1(0)$  para determinar el tipo de bifurcación de Hopf que admite un sistema autónomo. A continuación se introduce una definición que permite hacer esa clasificación, donde se involucran los coeficientes cuadráticos y cúbicos de la expansión de  $g(z, \bar{z}, \alpha)$  del lema 1.

## 2.4. Primer coeficiente de Lyapunov

Sea el sistema autónomo (2.6), donde  $\widehat{F}(\mathbf{x}, \alpha)$  tiene una expansión de Taylor en  $\mathbf{x}^* = 0$  de la forma (2.12) con valores propios  $\lambda_{1,2} = \pm i\omega_0, \omega_0 > 0$  en el valor de bifurcación  $\alpha = 0$ . La función real  $l_1(\alpha)$  es llamada *primer coeficiente de Lyapunov*, donde este coeficiente real en el valor de bifurcación  $\alpha$  es calculado por la fórmula

$$l_1(0) = \frac{1}{2\omega_0} \text{Re}(ig_{2,0}g_{1,1} + \omega_0 g_{2,1}).$$

El primer coeficiente de Lyapunov ( $l_1$ ) permitirá establecer, la clasificación de la bifurcación de Hopf en supercrítica, subcrítica y degenerada de (2.5).

1. Si  $l_1(0) = 0$ , entonces se produce una *bifurcación de Hopf degenerada*.
2. Si  $l_1(0) < 0$ , entonces se produce una *bifurcación de Hopf supercrítica*.
3. Si  $l_1(0) > 0$ , se produce una *bifurcación de Hopf subcrítica*.

## 2.5. Teorema de la bifurcación de Hopf

Se considera el sistema no lineal (2.5) que tiene para todo  $|\alpha|$  suficientemente pequeño el equilibrio  $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$  los valores propios

$$\lambda_{1,2}(\alpha) = \mu(\alpha) \pm w(\alpha)i, \quad \mu(0) = 0, \omega(0) = \omega_0 > 0.$$

**H.1.** (Condición de transversalidad)

$$\frac{d}{d\alpha} \operatorname{Re}(\lambda_{1,2}, \alpha)|_{\alpha=0} = \dot{\mu}(0) \neq 0$$

**H.2.** (Condición de no degeneración)

$$l_1(0) \neq 0,$$

entonces (2.5) es topológicamente equivalente en cerca del origen a una de las formas del sistema (2.2) (Ver[4], Pág. 100).

## 2.6. Teorema de Poincaré, Andronov, Hopf

Si el sistema (2.5) de clase  $C^\infty(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R})$  con  $\mathbf{x}^*$  un punto de equilibrio y  $A = DF(\mathbf{x}^*, \alpha)$ , satisface que,

**H.1.** (Condición de bifurcación)

Los valores propios de  $A$  son imaginarios puros en  $\alpha = \alpha_0$ ,

**H.2.** (Condición de transversalidad)

$$\frac{d}{d\alpha} \operatorname{Re}(\lambda_{1,2}, \alpha)|_{\alpha=\alpha_0} > 0,$$

**H.3.** El punto  $\mathbf{x}^*$  es asintóticamente estable cuando  $\alpha = \alpha_0$ ,

entonces (2.5) tiene un ciclo límite para todo  $\alpha \in (\alpha_0, \alpha_0 + \epsilon)$ , para algún  $\epsilon > 0$  (Ver[10]).

## Capítulo 3

# BIFURCACIÓN DE HOPF EN UN SISTEMA AUTÓNOMO PRESA-PREDADOR CON CRECIMIENTO LOGÍSTICO Y RESPUESTA FUNCIONAL DE HOLLING TIPO II

---

### 3.1. Introducción al sistema

Se considera el sistema autónomo presa-predador con crecimiento logístico y respuesta funcional de Holling tipo II para la iteración de presas y predadores con densidad poblacional  $x_1(t), x_2(t)$  en el instante  $t$ , respectivamente, descrito por

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = F_1(x_1, x_2) = x_1 \left(1 - \frac{x_1}{k}\right) - \frac{cx_1x_2}{1+x_1} \\ \dot{x}_2 = F_2(x_1, x_2) = -\delta x_2 + \frac{cx_1x_2}{1+x_1}. \end{cases} \quad (3.1)$$

Este sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de clase  $C^\infty(\mathbb{R}^2)$  modela el comportamiento poblacional de las dos especies mencionadas en un ambiente casi ideal, dado a algunas restricciones del medio. Los parámetros  $\delta, c, k$  son reales positivos:  $k$  es la capacidad de carga del ambiente para las presas,  $\delta$  es la tasa de muerte natural del predador,  $c$  es la eficiencia de la caza de los predadores y  $\frac{x_1}{1+x_1}$  representa la respuesta funcional del depredador a la densidad de presas: El consumo de presas por predador no puede continuar creciendo linealmente con el número de presas disponibles, sino que debe saturarse [16] y [3].



<b>Variable de estado</b>	<b>Descripción</b>
$x_1(t)$	Densidad poblacional de las presas
$x_2(t)$	Densidad poblacional de los predadores

Cuadro 3.1: Descripción de las variables de estado del sistema (3.2)

<b>Parámetro</b>	<b>Descripción</b>
$c$	Eficiencia de la caza de los predadores
$\delta$	Tasa de muerte natural del predador
$k$	Capacidad de carga del ambiente para las presas

Cuadro 3.2: Descripción de los parámetros del sistema (3.2)

La primera ecuación ( $\dot{x}_1$ ) describe la tasa de cambio de la población de presas, el término logístico  $\left(1 - \frac{x_1}{k}\right)$  modela la capacidad de carga del entorno para esta especie: Indica que a medida que la población de presas se acerca a la capacidad de carga  $k$ , el crecimiento de la población va disminuyendo, sin esto, se consideraría un aumento exponencial “irreal”. El crecimiento de las presas también se ve afectado por el número de encuentros con los predadores ( $-cx_1x_2$ ).

El encuentro entre presas y predadores tiene un impacto significativo en las poblaciones de ambos; la densidad de las presas se ve reducida, mientras que la densidad de los predadores tiende a aumentar. Existen dos tipos principales de respuestas de los predadores ante los cambios en la densidad de las presas: la respuesta funcional y la respuesta numérica. En este caso, el enfoque está en la primera.

La respuesta funcional es crucial en la dinámica de las poblaciones predador-presa, esta respuesta se refiere al incremento en el número de presas capturadas por un predador o a una captura más temprana a medida que la densidad de presas aumenta: a medida que la densidad de presas crece, los predadores capturan más presas en un período de tiempo más corto. Sin embargo, esta tasa de depredación no sigue una relación lineal, sino que se satura y alcanza un valor máximo conocido como tasa de saturación media. Este valor indica la máxima cantidad de presas que el predador puede capturar. Cuando la densidad de presas tiende a infinito, la tasa de captura se estabiliza en el valor máximo

1. Esto refleja el hecho de que los predadores no pueden depredar indefinidamente a un ritmo constante, ya que su capacidad de depredación se satura a medida que la densidad de presas se vuelve muy alta. Una vez que se alcanza el nivel máximo de captura, la tasa de captura de presas no aumenta más, sin importar cuánto se incremente la densidad de presas.

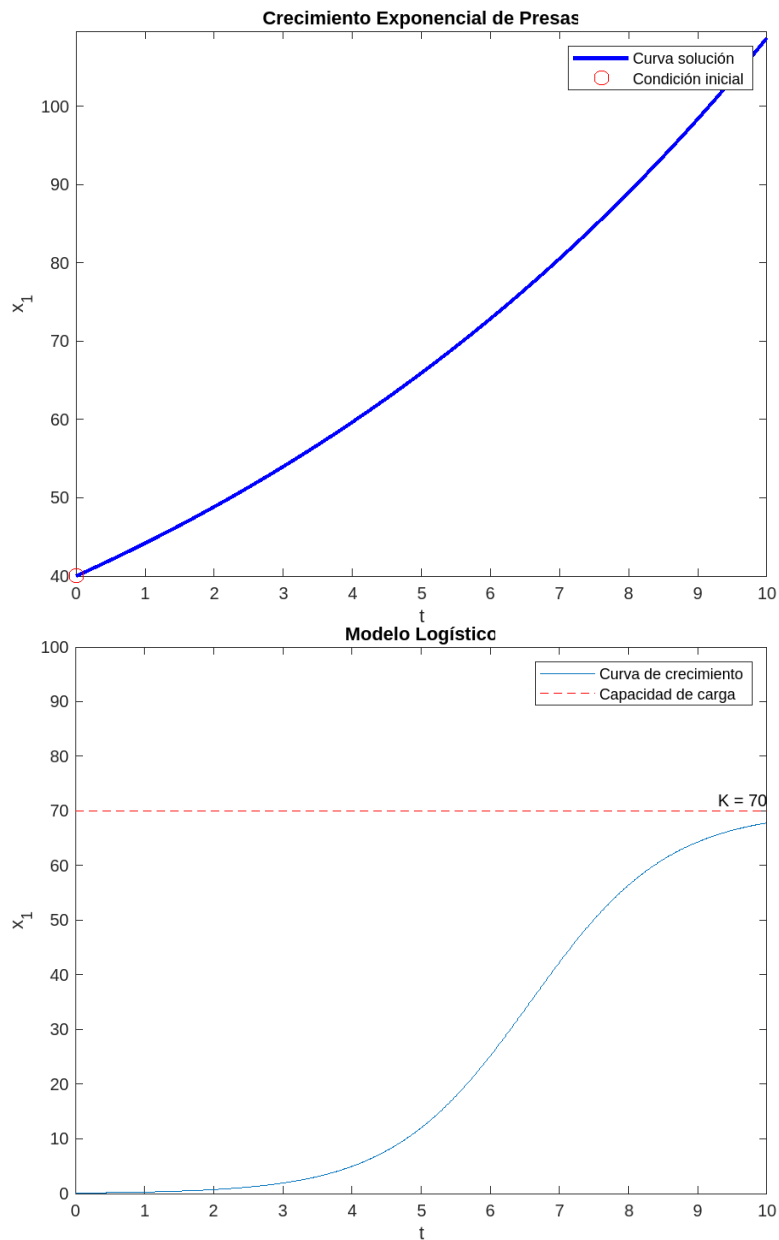


Figura 3.1: Crecimiento exponencial y logístico en las presas

La capacidad de los predadores para manejar las presas es un factor importante en esta respuesta funcional. El tiempo de manejo incluye la persecución, sometimiento, consumo y digestión de las presas. Este tiempo limita la cantidad de presas que un predador puede procesar por unidad de tiempo y reduce el tiempo disponible para buscar nuevas presas. Como resultado, el número de presas consumidas por unidad de tiempo disminuye progresivamente a medida que aumenta la densidad de presas, hasta alcanzar un valor estable.

En resumen, la respuesta funcional es un mecanismo crucial para regular la población de presas y mantener el equilibrio ecológico en el ecosistema, ya que establece límites a la capacidad de depredación de los predadores y evita un aumento ilimitado en la tasa de captura de presas.

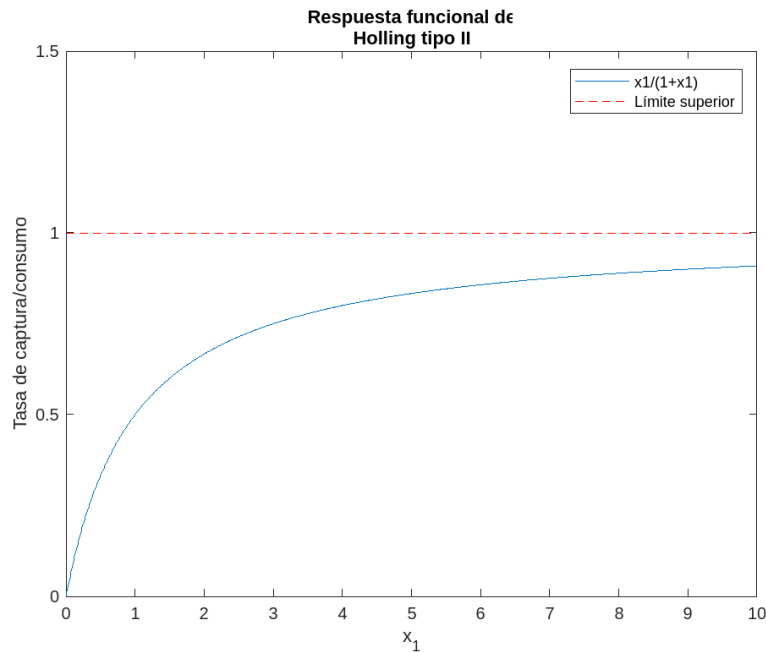


Figura 3.2: Respuesta funcional de Holling tipo II

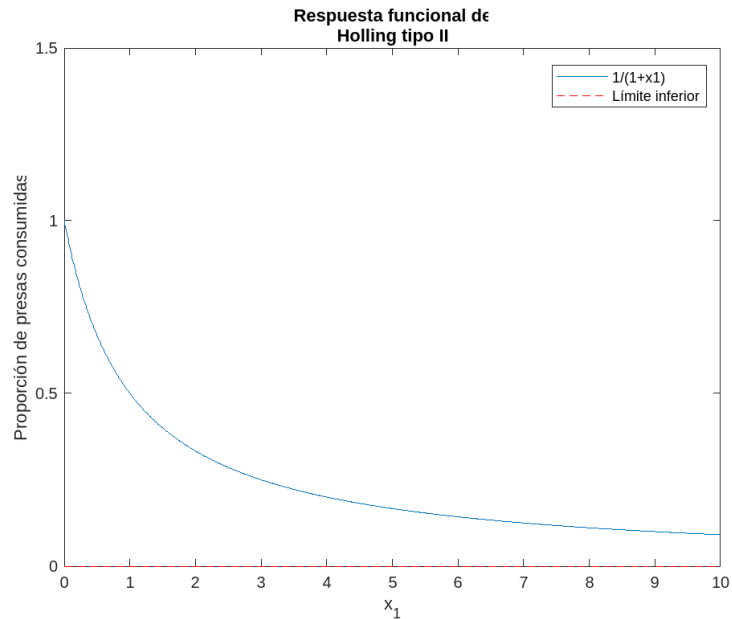


Figura 3.3: Proporción de presas consumidas vs presas disponibles

La segunda ecuación ( $\dot{x}_2$ ) describe la tasa de cambio de la población de predadores. El término  $-\delta x_2$  representa la tasa natural de mortalidad de los predadores, es decir, su disminución natural sin la influencia de las presas, y en interacción con estas, su densidad incrementa, debido a la caza de presas, viéndose esto reflejado en el término  $+\frac{cx_1x_2}{1+x_1}$ .

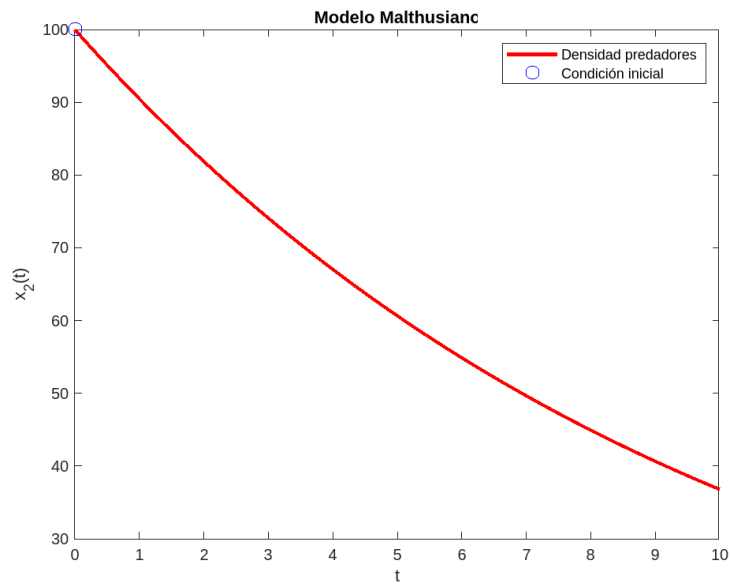


Figura 3.4: Modelo malthusiano en predadores con ausencia de presas

El interés de este trabajo está en hallar para qué valores de los parámetros del sistema hay formación de órbitas periódicas y un cambio cualitativo de los puntos de equilibrio tras la variación de los parámetros. Las soluciones periódicas aisladas del sistema indicarían un comportamiento periódico y cíclico de las poblaciones, que corresponden a ciclos límites (Cap. 2) y esto es lo esperado en un ecosistema, el nacimiento de una solución periódica que indicaría una estabilidad en la convivencia de las especies.

En la dinámica del sistema,  $c$ ,  $\delta$ ,  $k$  son los parámetros que controlan el comportamiento evolutivo de este y son claves. En particular, el parámetro  $k$  representa la capacidad de carga del ambiente para las presas, lo cual indica que las presas pueden soportar el medio sin que la especie colapse o se produzca un comportamiento catastrófico. En un estudio cualitativo, es razonable suponer que un punto de equilibrio del sistema debería tener su coordenada  $x_1$  (presas) igual a esta capacidad de carga  $k$ , ya que si las presas alcanzan dicho nivel, es claro que la tasa de crecimiento comenzará a disminuir. Esto es válido siempre y cuando no haya otros factores limitantes para el crecimiento de las presas, como la interacción con predadores, enfermedades, entre otros. Por lo tanto, el punto  $(k, 0)$  es un candidato a ser un punto de equilibrio estable en el sistema. Para encontrar un valor  $k_0$  de la capacidad de carga tal que al variarlo ligeramente el sistema presente una bifurcación de Hopf, específicamente una solución periódica estable, se debe buscar el punto crítico en cual el comportamiento cíclico de las especies se produce a medida que el tiempo aumenta.

La eficiencia de caza de los predadores hacia las presas juega un papel fundamental en el crecimiento evolutivo de ambas especies. Estos encuentros entre predadores y presas emergen negativamente a las últimas. Por lo tanto, encontrar un valor adecuado para el parámetro  $c$  que pueda provocar una bifurcación de Hopf sería de gran importancia, ya que revelaría en qué punto se produciría una solución periódica estable o inestable. Determinar este valor crítico de  $c$  permitiría identificar un punto en el cual ambas especies pueden coexistir en un comportamiento cíclico y estable. Esto implicaría que la tasa de encuentros entre predadores y presas está equilibrada de tal manera que ninguna especie prevalece sobre la otra. Sería un escenario en el cual las especies interactúan de

manera sostenible a lo largo del tiempo.

Por otro lado, también es posible que se presente una solución periódica inestable en cierto valor de  $c$ . Esto indicaría un comportamiento negativo, en el cual una de las especies prevalecería sobre la otra y podría llevar a la extinción de la especie más débil.

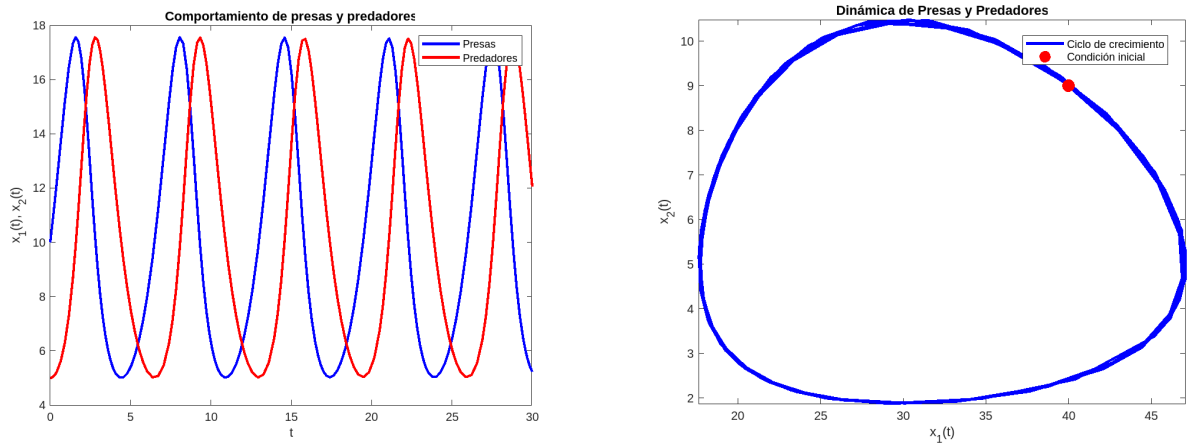


Figura 3.5: Crecimiento cíclico de presas y predadores

Es fundamental tener en cuenta que este modelo es una simplificación de la realidad y no abarca todos los factores e interacciones biológicas posibles, pero permite obtener ideas y conceptos fundamentales sobre las dinámicas de las interacciones entre predadores y presas. Al estudiar este modelo simplificado, se puede obtener conocimientos valiosos que pueden ser útiles para comprender y abordar problemas más complejos en la ecología y en la biología.

En un análisis cualitativo de (3.2), el estudio se resume al cálculo y clasificación topológica de los puntos de equilibrio. Para simplificar los cálculos, se presenta un sistema orbitalmente equivalente que conserve las propiedades esenciales del sistema original.

## 3.2. Sistema orbitalmente equivalente

Multiplicando por  $(1 + x_1)$ ,  $x_1 > 0$ , a derecha y a izquierda de cada ecuación de (3.1) y haciendo la sustitución en la variación en el tiempo  $dt = (1 + x_1)d\tau$  y regresando a la variable original se obtiene el sistema orbitalmente equivalente

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = F_1(x_1, x_2) = x_1(1 + x_1) \left(1 - \frac{x_1}{k}\right) - cx_1x_2 \\ \dot{x}_2 = F_2(x_1, x_2) = -\delta(1 + x_1)x_2 + cx_1x_2. \end{cases} \quad (3.2)$$

Para garantizar que la interacción de las poblaciones en un contexto de depredación tenga sentido biológico, se deben cumplir ciertas condiciones. En particular, se considerarán los valores  $c > \delta$ ,  $k > 1$  y  $k > \frac{\delta}{c - \delta}$ , con el fin de asegurar que las densidades poblacionales  $x_1$  y  $x_2$  sean siempre mayores o iguales que cero. Además, se busca evitar la existencia de puntos de equilibrio y parámetros negativos, ya que estos no tienen una interpretación biológica adecuada en este tipo de interacción, es así que se considera el espacio de estados

$$\Omega = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}.$$

Dicho esto, se clasificará topológicamente cada punto de equilibrio del sistema, seguidamente en un punto de equilibrio no trivial se hallarán las condiciones (valores en los parámetros) para que la matriz jacobiana posea al evaluarse en él un par de valores propios complejos puros; se estudiarán los casos donde cada parámetro  $\delta, c, k$  será parámetro de bifurcación y los restantes serán parámetros reales. Por último, se calculará el valor de cada parámetro para que exista una bifurcación de Hopf, y el primer coeficiente de Lyapunov para clasificar su tipo.

## 3.3. Puntos de equilibrio del sistema

En primer lugar se debe hallar los puntos de equilibrio del sistema (3.2), igualando cada una de las ecuaciones diferenciales a cero.

$$F_1(x_1, x_2) = x_1(1 + x_1) \left(1 - \frac{x_1}{k}\right) - cx_1x_2 = 0 \quad (3.3)$$

$$F_2(x_1, x_2) = -\delta(1 + x_1)x_2 + cx_1x_2 = 0. \quad (3.4)$$

De (3.3) se obtiene que

$$x_1 \left[ 1 - cx_2 + x_1 \left( 1 - \frac{1}{k} \right) - \frac{x_1^2}{k} \right] = 0$$

$$\Leftrightarrow x_1 = 0 \quad \vee \quad \left[ 1 - cx_2 + x_1 \left( 1 - \frac{1}{k} \right) - \frac{x_1^2}{k} \right] = 0.$$

Se tiene:

1. Si  $x_1 = 0$  entonces en (3.4) se tiene que  $x_2 = 0$ .

2. Ahora

$$1 - cx_2 + x_1 \left( 1 - \frac{1}{k} \right) - \frac{x_1^2}{k} = 0 \Leftrightarrow x_1 = \frac{1 - \frac{1}{k} \pm \sqrt{\left( 1 - \frac{1}{k} \right)^2 - 4 \left( \frac{1}{k} \right) (cx_2 - 1)}}{\frac{2}{k}}. \quad (3.5)$$

De (3.4) se obtiene que

$$x_2(-\delta - \delta x_1 + cx_1) = 0 \Leftrightarrow x_2 = 0 \quad \vee \quad x_1 = \frac{\delta}{c - \delta}.$$

3. Sustituyendo  $x_2 = 0$  en (3.5) se tiene que

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{k}{2} \left[ 1 - \frac{1}{k} \pm \sqrt{1 + \frac{2}{k} + \frac{1}{k^2}} \right] \\ &= \frac{k}{2} \left[ 1 - \frac{1}{k} \pm \sqrt{\frac{(k+1)^2}{k^2}} \right] \\ &= \frac{k}{2} \left[ 1 - \frac{1}{k} \pm \frac{k+1}{k} \right] \\ &\implies x_1 = k, x_1 = -1. \end{aligned}$$

Se conserva la solución  $x_1 = k$  y se descarta la solución  $x_1 = -1$ , por lo considerado



anteriormente.

4. De (3.3) y con  $x_1 = \frac{\delta}{c - \delta}$  se tiene que

$$x_2 = \frac{(1 + x_1)(k - x_1)}{kc} = \frac{k(c - \delta) - \delta}{k(c - \delta)^2}, \quad x_2 > 0 \quad \text{si} \quad k > \frac{\delta}{c - \delta}.$$

Así se obtienen que los puntos de equilibrio están dados en la siguiente tabla por

$P_1 = (0, 0)$	$P_2 = (k, 0)$	$P_3 = \left( \frac{\delta}{c - \delta}, \frac{1}{c - \delta} - \frac{\delta}{k(c - \delta)^2} \right)$
----------------	----------------	---

Cuadro 3.3: Puntos de equilibrio del sistema (3.2)

Los puntos de equilibrio  $P_1, P_2$  y  $P_3$  representan las soluciones constantes del sistema:  $P_1$  representa la ausencia de predadores y presas en un entorno natural,  $P_2$  una desaceleración de la tasa de crecimiento de las presas hasta su estabilización en ausencia de predadores; si  $x_1 = k$  se tiene que  $\dot{x}_1 = 0$ , si  $k \rightarrow \infty$  y  $x_1 < k$  entonces las presas pueden prosperar en un ambiente favorable con abundantes recursos, y si  $x_1 > k$  la densidad de presas empieza a decrecer, y  $P_3$  representa un equilibrio en la que las dos especies coexisten establemente.

Dado que el sistema (3.2) es suave (esto es,  $C^\infty(\mathbb{R}^2)$ ), se garantiza la existencia de las soluciones dada cualquier condición inicial.

### 3.4. Matriz jacobiana y clasificación topológica de cada punto de equilibrio

La matriz jacobiana del sistema (3.2) está dada por

$$DF(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} 1 - cx_2 + 2x_1 \left(1 - \frac{1}{k}\right) - 3x_1^2 \left(\frac{1}{k}\right) & -cx_1 \\ x_2(c - \delta) & x_1(c - \delta) - \delta \end{bmatrix}.$$

1. Al evaluar el punto  $P_1 = (0, 0)$  en  $DF(x_1, x_2)$  se tiene

$$DF(0, 0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\delta \end{bmatrix},$$

con valores propios

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = -\delta < 0, \quad \delta > 0.$$

Así el punto  $P_1$  es un punto silla-nodo y por tanto no ocurre una bifurcación de Hopf.

El resultado se resume en la proposición:

**Proposición 3.4.1:** El punto  $P_1 = (0, 0)$  es un punto silla-nodo.

2. Al evaluar el punto  $P_2 = (k, 0)$  en  $DF(x_1, x_2)$  se tiene

$$DF(k, 0) = \begin{bmatrix} -1 - k & -ck \\ 0 & k(c - \delta) - \delta \end{bmatrix},$$

con valores propios

$$\lambda_1 = -(1 + k) < 0, \quad \lambda_2 = k(c - \delta) - \delta.$$

Como  $k > \frac{\delta}{c - \delta}$  se tiene que el punto de equilibrio  $P_2$  es un punto silla-nodo y por tanto no ocurre una bifurcación de Hopf. El resultado se resume en la proposición:

**Proposición 3.4.2:** Si se satisface que  $k > \frac{\delta}{c - \delta}$ ,  $P_2 = (k, 0)$  es silla-nodo.

3. Al evaluar el punto  $P_3 = \left( \frac{\delta}{c - \delta}, \frac{1}{c - \delta} - \frac{\delta}{k(c - \delta)^2} \right)$  en  $DF(x_1, x_2)$  se tiene

$$A = DF(P_3) = \begin{bmatrix} \frac{\delta(kc - \delta k - \delta - c)}{k(c - \delta)^2} & \frac{-c\delta}{c - \delta} \\ 1 - \frac{\delta}{k(c - \delta)} & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.6)$$

Si se denota  $(\sigma) = tr(A)$  y  $(\Delta) = det(A)$ , entonces los valores propios de  $A$  son

$$\lambda_{1,2} = \frac{\sigma \pm \sqrt{\sigma^2 - 4\Delta}}{2} \quad (3.7)$$

donde

$$\sigma = \frac{\delta(kc - \delta k - \delta - c)}{k(c - \delta)^2}, \quad (3.8)$$

$$\Delta = \frac{c\delta}{(c - \delta)^2} \frac{[k(c - \delta) - \delta]}{k}. \quad (3.9)$$

Si

$$\sigma = tr(A) = 0, \quad y \quad \Delta = det(A) > 0, \quad \text{con} \quad k > \frac{\delta}{c - \delta}, \quad c > \delta$$

se garantiza la existencia de valores propios imaginarios puros.

Luego, de (3.8),  $\sigma = 0$  implica que  $kc - \delta k - \delta - c = 0$ , de aquí se tiene que

$$c = \frac{\delta(k + 1)}{k - 1} \quad \text{o} \quad \delta = \frac{c(k - 1)}{k + 1} \quad \text{o} \quad k = \frac{c + \delta}{c - \delta}. \quad (3.10)$$

Ahora se estudiarán tres casos en donde en cada uno de estos se tomará cada valor del parámetro obtenido en (3.10) como valor de bifurcación y se demostrará la existencia de la bifurcación de Hopf al variar estos.

<b>Punto de equilibrio</b>	<b>Condición</b>	<b>Clasificación</b>
$P_1 = (0, 0)$	$\delta > 0$	Punto silla-nodo (inestable)
$P_2 = (k, 0)$	$k > \frac{\delta}{c - \delta}$	Punto silla-nodo (inestable)
$P_3 = \left( \frac{\delta}{c - \delta}, \frac{1}{c - \delta} - \frac{\delta}{k(c - \delta)^2} \right)$	$c > \delta$	Punto hiperbólico

Cuadro 3.4: Clasificación topológica de los puntos de equilibrio de (3.2)

### 3.5. Caso I: Se considera a $c$ parámetro de bifurcación y $\delta, k$ parámetros reales

El análisis empieza considerando a  $c$  parámetro de bifurcación y a  $\delta, k$  como los parámetros reales del sistema.

De (3.10) se considera a

$$c = c_0 = \frac{\delta(k+1)}{(k-1)}, \quad k > 1.$$

De (3.7) se tienen los valores propios en términos del parámetro  $c$

$$\lambda_{1,2}(c) = \frac{\sigma(c) \pm \sqrt{\sigma^2(c) - 4\Delta(c)}}{2}.$$

Se considera a

$$\mu(c) = \frac{\sigma(c)}{2} = 0, \quad \omega(c) = \frac{\sqrt{4\Delta(c) - \sigma^2(c)}}{2}.$$

Se empieza demostrando que en el punto  $P_3$  y en el valor del parámetro  $c = c_0$  la matriz jacobiana  $A(c_0)$  en (3.6) tiene valores propios imaginarios puros, como condición suficiente para la bifurcación de Hopf (*condición de equilibrio y de bifurcación*), luego, para el análisis de la bifurcación de Hopf en el sistema se verifica que se cumple la *condición de transversalidad* (Teorema forma normal de la bifurcación de Hopf, Cap. 2).

#### H.1. (*Condición de equilibrio*)

Para  $\mathbf{x}^* = P_3$  y  $c = c_0 = \frac{\delta(k+1)}{k-1}$  se tiene que

$$F(\mathbf{x}^*, c_0) = \mathbf{0}.$$

## H.2. (Condición de bifurcación)

La matriz jacobiana en el punto  $P_3$  con  $c = c_0$  es

$$A(c_0) = DF(\mathbf{x}^*, c_0) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{-\delta(1+k)}{2} \\ \frac{k+1}{2k} & 0 \end{bmatrix},$$

con valores propios

$$\lambda_{1,2}(c_0) = \pm\omega(c_0)i, \quad \omega(c_0) = \frac{(k+1)}{2}\sqrt{\frac{\delta}{k}} > 0.$$

## H.3. (Condición de transversalidad)

Al derivar a  $\mu(c) = \frac{\sigma(c)}{2}$  respecto al parámetro  $c$  se obtiene

$$\dot{\mu}(c) = \frac{\delta}{2} \left[ \frac{k(\delta - c) + 3\delta + c}{k(c - \delta)^3} \right],$$

y evaluada en  $c = c_0$

$$\dot{\mu}(c_0) = \frac{(k-1)^3}{8\delta k} > 0, \quad k > 1.$$

Así, con  $c = c_0$  el sistema (3.2) es topológicamente equivalente a la forma normal de la bifurcación de Hopf (Cap.2). Esto se resume en la siguiente proposición:

**Proposición 3.5.1:** Para el punto  $P_3$  y valor del parámetro  $c_0 = \frac{\delta(k+1)}{k-1}; k > 1$  el sistema (3.2) exhibe una bifurcación de Hopf.

Ahora en  $c = c_0$  el punto de equilibrio  $P_3$  toma el valor

$$P_3(c_0) = \left( \frac{k-1}{2}, \frac{k^2-1}{4k\delta} \right).$$

De (3.8)

$$\sigma(c) = \frac{\delta[c(k-1) - \delta(k+1)]}{k(c-\delta)^2},$$

se tiene que  $\sigma(c) < 0$  para  $c < c_0$  y  $\sigma(c) > 0$  para  $c > c_0$ , así  $P_3(c_0)$  es inestable para  $c > c_0$  y es asintóticamente estable para  $c < c_0$ .  $P_3(c_0)$  es punto de bifurcación.

Ahora, trasladando el punto de equilibrio  $P_3 = \left( \frac{\delta}{c-\delta}, \frac{1}{c-\delta} - \frac{\delta}{k(c-\delta)^2} \right)$  al punto en el origen ( $\boldsymbol{\xi} = (0, 0)$ ) por el cambio de variables

$$x_1 = \xi_1 + \frac{\delta}{c-\delta}, \quad x_2 = \xi_2 + \frac{1}{c-\delta} - \frac{\delta}{k(c-\delta)^2}$$

se transforma el sistema (3.2) en

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = \left( \frac{\delta[k(c-\delta) - c - \delta]}{k(c-\delta)^2} \right) \xi_1 - \left( \frac{c\delta}{c-\delta} \right) \xi_2 + \left( \frac{k(c-\delta) - c - 2\delta}{k(c-\delta)} \right) \xi_1^2 \\ \quad - \left( \frac{1}{k} \right) \xi_1^3 - (c)\xi_1\xi_2 \\ \dot{\xi}_2 = \left( 1 - \frac{\delta}{k(c-\delta)} \right) \xi_1 + (c-\delta)\xi_1\xi_2. \end{cases} \quad (3.11)$$

Sustituyendo  $c = c_0 = \frac{\delta(k+1)}{k-1}$  en (3.11) se obtiene

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = \left( \frac{-\delta(k+1)}{2} \right) \xi_2 + \left( \frac{1-k}{2k} \right) \xi_1^2 - \left( \frac{1}{k} \right) \xi_1^3 - \left( \frac{\delta(k+1)}{k-1} \right) \xi_1\xi_2 \\ \dot{\xi}_2 = \left( \frac{k+1}{2k} \right) \xi_1 + \left( \frac{2\delta}{k-1} \right) \xi_1\xi_2. \end{cases} \quad (3.12)$$

Así el sistema (3.12) se puede ver como  $\dot{z} = \lambda(c)z + g(z, \bar{z}, c)$  y de la forma

$$\dot{\boldsymbol{\xi}} = A(c_0)\boldsymbol{\xi} + \widehat{F}(\boldsymbol{\xi}, c_0), \quad \widehat{F}(\boldsymbol{\xi}, c_0) = (\widehat{F}_1(\boldsymbol{\xi}, c_0), \widehat{F}_2(\boldsymbol{\xi}, c_0))^T$$

donde

$$\widehat{F}_1(\boldsymbol{\xi}, c_0) = \left( \frac{1-k}{2k} \right) \xi_1^2 - \left( \frac{1}{k} \right) \xi_1^3 - \left( \frac{\delta(k+1)}{k-1} \right) \xi_1\xi_2$$

$$\widehat{F}_2(\boldsymbol{\xi}, c_0) = \left( \frac{2\delta}{k-1} \right) \xi_1 \xi_2.$$

El sistema (3.12) se puede representar además como

$$\dot{\boldsymbol{\xi}} = A(c_0)\boldsymbol{\xi} + \frac{1}{2}B(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi}) + \frac{1}{6}C(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi})$$

donde las funciones multilineales  $B, C$  toman en  $\boldsymbol{\xi} = \mathbf{0}$  y los vectores bidimensionales

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2)^T, \quad \mathbf{y} = (y_1, y_2)^T, \quad \mathbf{z} = (z_1, z_2)^T$$

los valores

$$B(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{bmatrix} B_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ B_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left( \frac{1-k}{k} \right) x_1 y_1 - \left( \frac{\delta(k+1)}{k-1} \right) (x_1 y_2 + x_2 y_1) \\ \left( \frac{2\delta}{k-1} \right) (x_1 y_2 + x_2 y_1) \end{bmatrix}$$

$$C(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = \begin{bmatrix} C_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \\ C_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\left( \frac{6}{k} \right) x_1 y_1 z_1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

### 3.5.1. Primer coeficiente de Lyapunov

Ya con el parámetro  $c = c_0$  como valor de bifurcación del sistema, se procede a determinar qué tipo de bifurcación de Hopf admite, por ello se procede a calcular el primer coeficiente de Lyapunov. Esta parte del trabajo es muy constructiva y los cálculos se basan en aplicar el lema y siguiendo lo estudiado en el capítulo 2 (Pág.42, Pág. 61).

Para el cálculo de vectores propios se plantea

$$A(c_0)\mathbf{q} = \lambda_1\mathbf{q} \quad \text{y} \quad A^T(c_0)\mathbf{p} = \lambda_2\mathbf{p}$$

donde

$$A^T(c_0) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{k+1}{2k} \\ \frac{-\delta(k+1)}{2} & 0 \end{bmatrix}.$$

Un vector propio  $\mathbf{q} \in \mathbb{C}^2$  asociado a

$$\lambda_1 = i\omega(c_0) = \frac{(k+1)}{2} \sqrt{\frac{\delta}{k}} i$$

de  $A(c_0)$  es

$$\mathbf{q} = (q_1, q_2) = \left( \sqrt{\delta k} i, 1 \right)$$

y un vector propio  $\mathbf{p} \in \mathbb{C}^2$  asociado a

$$\lambda_2 = -i\omega(c_0) = -\frac{(k+1)}{2} \sqrt{\frac{\delta}{k}} i$$

de  $A^T(c_0)$  es

$$\mathbf{p} = (p_1, p_2) = \left( \sqrt{\frac{1}{k\delta}} i, 1 \right).$$

Si se considera a

$$\mathbf{p} = \left( \frac{1}{2} \right) \left( \sqrt{\frac{1}{k\delta}} i, 1 \right)$$

se tiene que

$$\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle = 1, \quad \langle \mathbf{p}, \bar{\mathbf{q}} \rangle = 0.$$

Ahora en los vectores  $\mathbf{p}, \mathbf{q}, \bar{\mathbf{p}}, \bar{\mathbf{q}}$  se obtiene

$$B(\mathbf{q}, \mathbf{q}) = \begin{bmatrix} B_1(\mathbf{q}, \mathbf{q}) \\ B_2(\mathbf{q}, \mathbf{q}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta(k-1) - \frac{2\delta(k+1)\sqrt{\delta k} i}{k-1} \\ \left( \frac{4\delta}{k-1} \right) \sqrt{\delta k} i \end{bmatrix},$$



$$B(\mathbf{q}, \bar{\mathbf{q}}) = \begin{bmatrix} B_1(\mathbf{q}, \bar{\mathbf{q}}) \\ B_2(\mathbf{q}, \bar{\mathbf{q}}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta(1-k) \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$C(\mathbf{q}, \mathbf{q}, \bar{\mathbf{q}}) = \begin{bmatrix} C_1(\mathbf{q}, \mathbf{q}, \bar{\mathbf{q}}) \\ C_2(\mathbf{q}, \mathbf{q}, \bar{\mathbf{q}}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6\sqrt{\delta^3 k}i \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$g_{2,0} = \langle \mathbf{p}, B(\mathbf{q}, \bar{\mathbf{q}}) \rangle = \frac{-\delta(k+1)}{k-1} + \left( \frac{2\delta\sqrt{\delta k}}{k-1} - \frac{\delta(k-1)}{2\sqrt{k\delta}} \right) i,$$

$$g_{1,1} = \langle \mathbf{p}, B(\mathbf{q}, \bar{\mathbf{q}}) \rangle = \frac{\delta(k-1)}{2\sqrt{k\delta}} i,$$

$$g_{2,1} = \langle \mathbf{p}, C(\mathbf{q}, \mathbf{q}, \bar{\mathbf{q}}) \rangle = -3\delta,$$

$$\omega_0 = \omega(c_0) = \left( \frac{k+1}{2} \right) \sqrt{\frac{\delta}{k}},$$

$$ig_{2,0}g_{1,1} = \frac{\delta^2(k+1)}{2\sqrt{\delta k}} + \delta^2 \left( \frac{(k-1)^2}{4k\delta} - 1 \right) i,$$

$$\omega_0 g_{2,1} = \frac{-3\delta(k+1)}{2} \sqrt{\frac{\delta}{k}}.$$

El primer coeficiente de Lyapunov está dado por

$$L_1(c_0) = \frac{1}{2\omega_0} \operatorname{Re}(ig_{2,0}g_{1,1} + \omega_0 g_{2,1}) = -\delta < 0; \quad \delta > 0.$$

Se tiene que  $L_1(c_0) < 0$ , así ocurre una *bifurcación de Hopf supercrítica* al variar  $c = c_0$ .

### 3.5.2. Retrato de fase, bifurcación de Hopf supercrítica

1. Puntos de equilibrio  $P_1 = (0, 0)$ ,  $P_2 = (k, 0)$

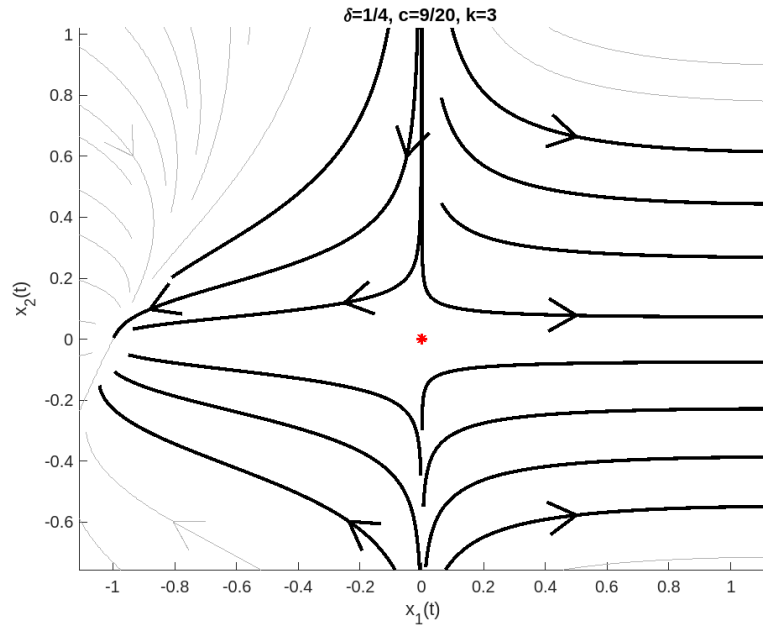


Figura 3.6: Caso I,  $P_1 = (0, 0)$  silla-nodo

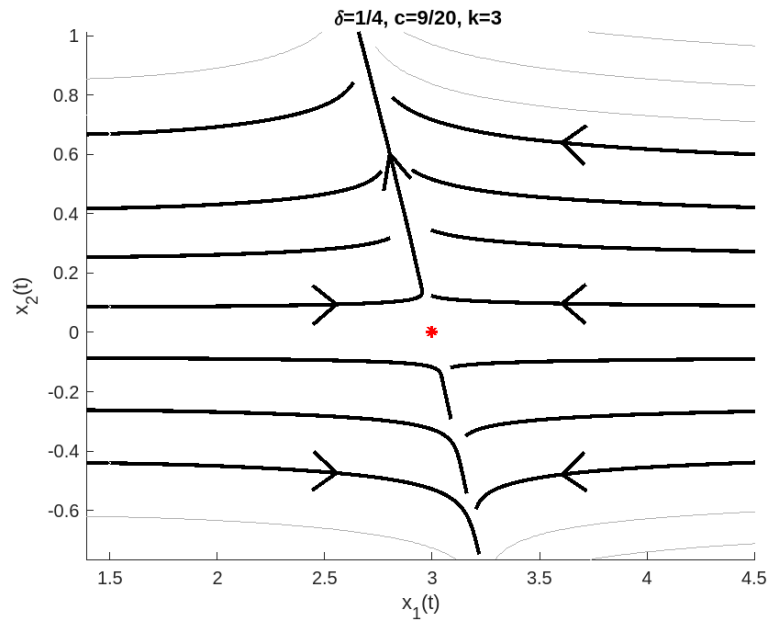


Figura 3.7: Caso I,  $P_2 = (3, 0)$  silla-nodo

## 2. Bifurcación de Hopf supercrítica

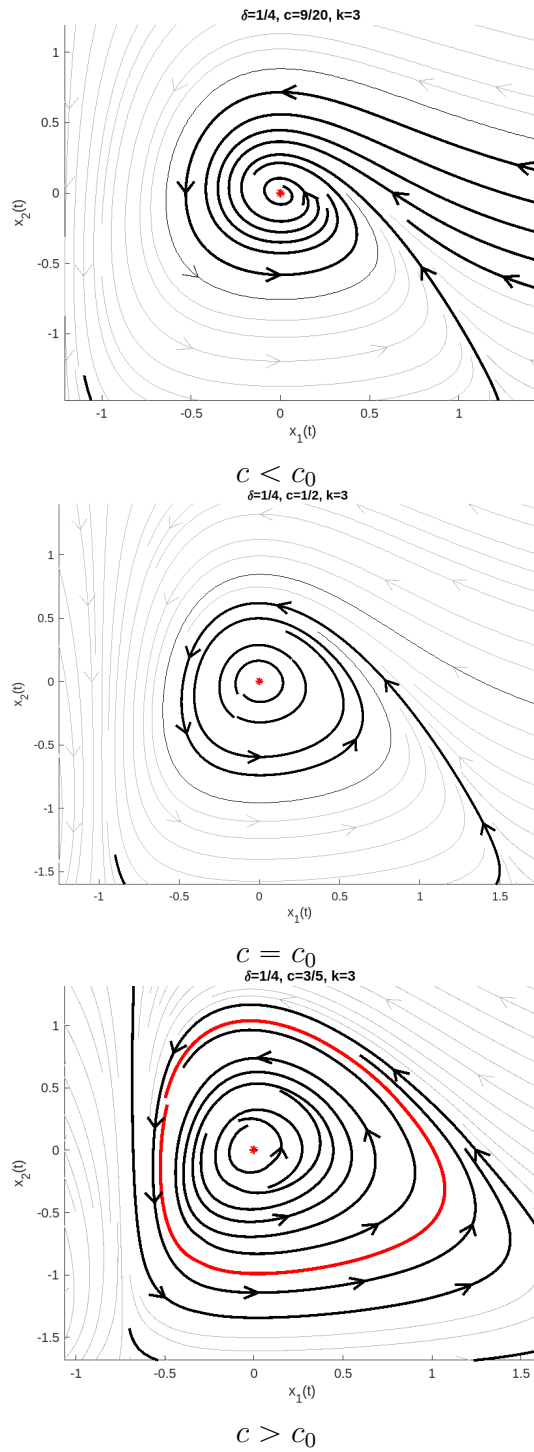


Figura 3.8: Bifurcación de Hopf supercrítica en  $c = c_0$  y con  $P_3$  trasladado al origen

### 3.6. Caso II: Se considera a $k$ parámetro de bifurcación y $\delta, c$ parámetros reales

De (3.10) se considera a

$$k = k_0 = \frac{c + \delta}{c - \delta}; \quad c > \delta.$$

De manera análoga al caso I se empieza demostrando que en el punto  $P_3$  y en  $k = k_0$  se cumplen las hipótesis del teorema de la forma normal de la bifurcación de Hopf.

**H.1.** (*Condición de equilibrio*)

En  $\mathbf{x}^* = P_3$  y  $k = k_0 = \frac{c + \delta}{c - \delta}$  se verifica que

$$F(\mathbf{x}^*, k_0) = \mathbf{0}.$$

**H.2.** (*Condición de bifurcación*)

La matriz jacobiana  $A$  con  $k = k_0$  es

$$A(k_0) = DF(\mathbf{x}^*, k_0) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{-c\delta}{c - \delta} \\ \frac{c}{c + \delta} & 0 \end{bmatrix},$$

con valores propios

$$\lambda_{1,2}(k_0) = \pm \omega(k_0)i \quad \text{donde} \quad \omega(k_0) = \sqrt{\frac{c^2\delta}{c^2 - \delta^2}} > 0.$$

**H.3.** (*Condición de transversalidad*)

Al derivar  $\mu(k) = \frac{\sigma(k)}{2}$  respecto a  $k$  se tiene

$$\dot{\mu}(k) = \frac{\delta(\delta + c)}{2k^2(c - \delta)^2},$$

en  $k = k_0$ ,

$$\dot{\mu}(k_0) = \frac{\delta}{2(c + \delta)} > 0.$$

Así el sistema (3.2) con  $k = k_0$  es topológicamente equivalente a la forma normal de la bifurcación de Hopf. Esto se resume en la siguiente proposición:

**Proposición 3.6.1:** Para el punto  $P_3$  y valor del parámetro  $k_0 = \frac{c + \delta}{c - \delta}$ ;  $c > \delta$  el sistema (3.2) exhibe una bifurcación de Hopf.

En  $k = k_0 = \frac{c + \delta}{c - \delta}$  el equilibrio  $P_3$  toma el valor

$$P_3(k_0) = \left( \frac{\delta}{c - \delta}, \frac{c}{c^2 - \delta^2} \right).$$

De (3.8)

$$\sigma(k) = \frac{\delta[k(c - \delta) - (c + \delta)]}{k(c - \delta)^2},$$

se tiene que  $\sigma(k) < 0$  para  $k < k_0$  y  $\sigma(k) > 0$  para  $k > k_0$ , así  $P_3(k_0)$  es inestable para  $k > k_0$  y asintóticamente estable para  $k < k_0$ .  $P_3(k_0)$  es punto de bifurcación.

De sustituir  $k = k_0 = \frac{c + \delta}{c - \delta}$  en (3.11) se obtiene el sistema

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = - \left( \frac{c\delta}{c - \delta} \right) \xi_2 - \left( \frac{\delta}{c + \delta} \right) \xi_1^2 - \left( \frac{c - \delta}{c + \delta} \right) \xi_1^3 - (c)\xi_1\xi_2 \\ \dot{\xi}_2 = \left( \frac{c}{c + \delta} \right) \xi_1 + (c - \delta) \xi_1\xi_2. \end{cases} \quad (3.13)$$

Así el sistema (3.13) se representa de la forma

$$\dot{\boldsymbol{\xi}} = A(k_0)\boldsymbol{\xi} + \widehat{F}(\boldsymbol{\xi}, k_0), \quad \widehat{F}(\boldsymbol{\xi}, k_0) = (\widehat{F}_1(\boldsymbol{\xi}, k_0), \widehat{F}_2(\boldsymbol{\xi}, k_0))^T$$

donde

$$\widehat{F}_1(\boldsymbol{\xi}, k_0) = - \left( \frac{\delta}{c + \delta} \right) \xi_1^2 - \left( \frac{c - \delta}{c + \delta} \right) \xi_1^3 - (c) \xi_1 \xi_2$$

$$\widehat{F}_2(\boldsymbol{\xi}, k_0) = (c - \delta) \xi_1 \xi_2$$

El sistema (3.13) se puede representar además como

$$\dot{\boldsymbol{\xi}} = A(k_0)\boldsymbol{\xi} + \frac{1}{2}B(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi}) + \frac{1}{6}C(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi})$$

donde las funciones multilineales  $B, C$ , en  $\boldsymbol{\xi} = (0, 0)$ , toman en los vectores bidimensionales

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2)^T, \quad \mathbf{y} = (y_1, y_2)^T, \quad \mathbf{z} = (z_1, z_2)^T$$

los valores

$$B(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{bmatrix} B_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ B_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} - \left( \frac{2\delta}{c + \delta} \right) x_1 y_1 - c(x_1 y_2 + x_2 y_1) \\ (c - \delta)(x_1 y_2 + x_2 y_1) \end{bmatrix}$$

$$C(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = \begin{bmatrix} -\frac{6(c - \delta)}{c + \delta} x_1 y_1 z_1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

### 3.6.1. Primer coeficiente de Lyapunov

Ya con el parámetro  $k = k_0$  como valor de bifurcación, se procede a determinar qué tipo de bifurcación de Hopf admite. De manera análoga al caso (1), se procede a calcular el primer coeficiente de Lyapunov.

Para el cálculo de los vectores propios se plantea

$$A(k_0)\mathbf{q} = \lambda_1 \mathbf{q} \quad \text{y} \quad A^T(k_0)\mathbf{p} = \lambda_2 \mathbf{p}$$

donde

$$A^T(k_0) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{c}{c+\delta} \\ -c\delta & 0 \\ \frac{c-\delta}{c-\delta} & 0 \end{bmatrix}.$$

Un vector propio  $\mathbf{q} \in \mathbb{C}^2$  asociado a

$$\lambda_1 = i\omega(k_0) = \sqrt{\frac{c^2\delta}{c^2 - \delta^2}}i$$

en  $A(k_0)$  es

$$\mathbf{q} = (q_1, q_2) = \left( (c + \delta)\sqrt{\frac{\delta}{c^2 - \delta^2}}i, 1 \right)$$

y un vector  $\mathbf{p}$  asociado a

$$\lambda_2 = -i\omega(k_0) = -\sqrt{\frac{c^2\delta}{c^2 - \delta^2}}i$$

de  $A^T(k_0)$  es

$$\mathbf{p} = (p_1, p_2) = \left( \sqrt{\frac{c - \delta}{\delta(c + \delta)}}i, 1 \right).$$

Si se considera a

$$\mathbf{p} = \frac{1}{2} \left( \sqrt{\frac{c - \delta}{\delta(c + \delta)}}i, 1 \right)$$

se tiene que

$$\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle = 1, \quad \langle \mathbf{p}, \bar{\mathbf{q}} \rangle = 0.$$

Así en los vectorios propios  $\mathbf{p}, \mathbf{q}, \bar{\mathbf{p}}, \bar{\mathbf{q}}$  se obtiene

$$B(\mathbf{q}, \mathbf{q}) = \begin{bmatrix} B_1(\mathbf{q}, \mathbf{q}) \\ B_2(\mathbf{q}, \mathbf{q}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2\delta^2}{c - \delta} - 2c\sqrt{\frac{\delta(c + \delta)}{c - \delta}}i \\ 2\sqrt{\delta(c^2 - \delta^2)}i \end{bmatrix},$$

$$B(\mathbf{q}, \bar{\mathbf{q}}) = \begin{bmatrix} B_1(\mathbf{q}, \bar{\mathbf{q}}) \\ B_2(\mathbf{q}, \bar{\mathbf{q}}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2\delta^2}{c - \delta} \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$C(\mathbf{q}, \mathbf{q}, \bar{\mathbf{q}}) = \begin{bmatrix} C_1(\mathbf{q}, \mathbf{q}, \bar{\mathbf{q}}) \\ C_2(\mathbf{q}, \mathbf{q}, \bar{\mathbf{q}}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6\delta\sqrt{\frac{\delta(c+\delta)}{c-\delta}}i \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$g_{2,0} = \langle \mathbf{p}, B(\mathbf{q}, \mathbf{q}) \rangle = -c + \left( \sqrt{\delta(c^2 - \delta^2)} - \sqrt{\frac{\delta^3}{c^2 - \delta^2}} \right) i,$$

$$g_{1,1} = \langle \mathbf{p}, B(\mathbf{q}, \bar{\mathbf{q}}) \rangle = \frac{\delta^2 i}{\sqrt{\delta(c^2 - \delta^2)}},$$

$$g_{2,1} = \langle \mathbf{p}, C(\mathbf{q}, \mathbf{q}, \bar{\mathbf{q}}) \rangle = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{c-\delta}{\delta(c+\delta)}} i \left( -6\delta\sqrt{\frac{\delta(c+\delta)}{c-\delta}} i \right) = -3\delta,$$

$$\omega_0 = \omega(k_0) = c\sqrt{\frac{\delta}{c^2 - \delta^2}},$$

$$ig_{2,0}g_{1,1} = \frac{c\delta^2}{\sqrt{\delta(c^2 - \delta^2)}} - \delta^2 i + \frac{\delta^3 i}{c^2 - \delta^2},$$

$$\omega_0 g_{2,1} = -3\delta c \sqrt{\frac{\delta}{c^2 - \delta^2}},$$

$$Re(ig_{2,0}g_{1,1} + \omega_0 g_{2,1}) = \frac{c\delta^2}{\sqrt{\delta(c^2 - \delta^2)}} - 3\delta c \sqrt{\frac{\delta}{c^2 - \delta^2}}.$$

El primer coeficiente de Lyapunov está dado por

$$L_1(k_0) = \frac{1}{2\omega_0} Re(ig_{2,0}g_{1,1} + \omega_0 g_{2,1}) = -\delta < 0, \quad \delta > 0.$$

Como  $L_1(k_0) < 0$ , una *bifurcación de Hopf supercrítica* ocurre al variar  $k = k_0$ .



### 3.6.2. Retrato de fase, bifurcación de Hopf supercrítica

1. Puntos de equilibrio  $P_1 = (0, 0)$ ,  $P_2 = (k, 0)$

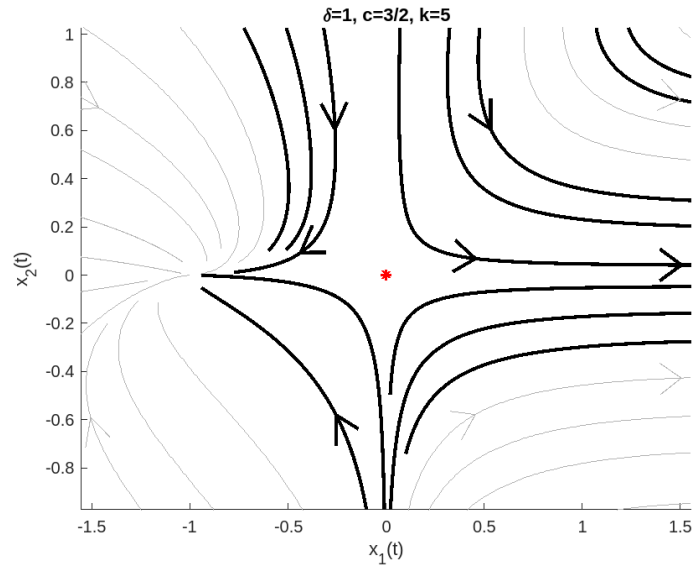


Figura 3.9: Caso II,  $P_1 = (0, 0)$  *silla-nodo*

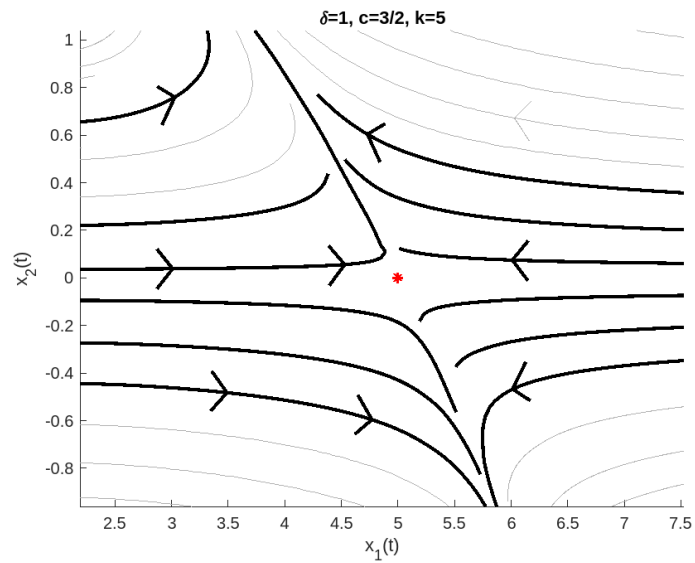


Figura 3.10: Caso II,  $P_2 = (5, 0)$  *silla-nodo*

## 2. Bifurcación de Hopf supercrítica

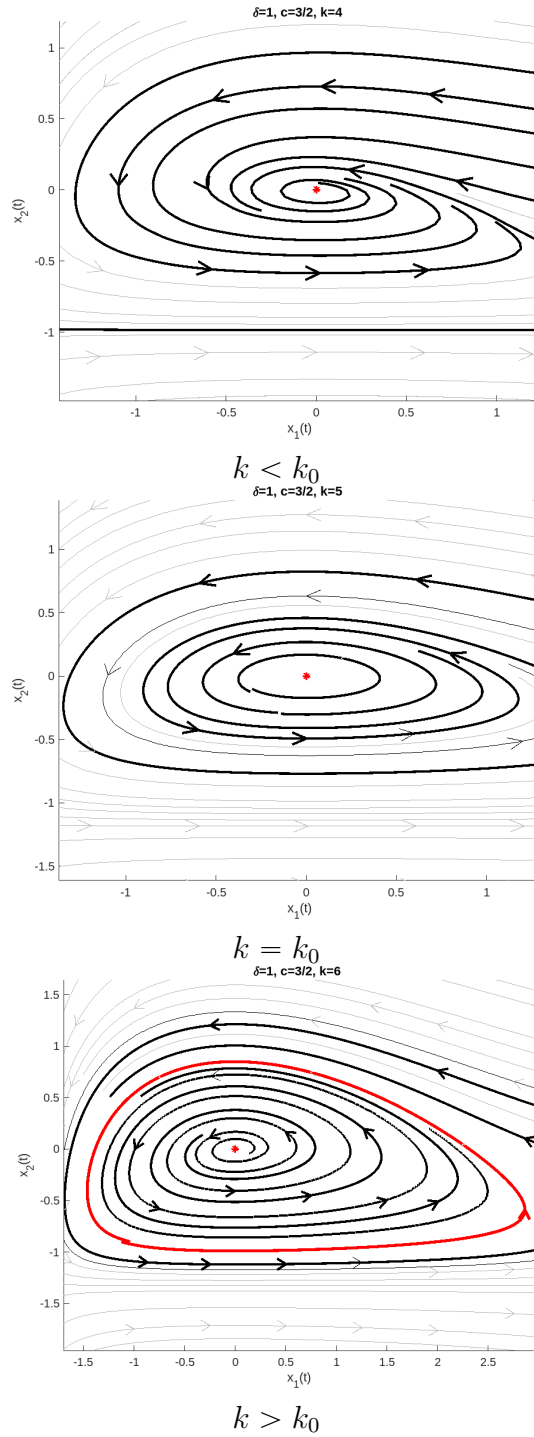


Figura 3.11: Bifurcación de Hopf supercrítica en  $k = k_0$  y con  $P_3$  trasladado al origen

### 3.7. Caso III: Se considera a $\delta$ parámetro de bifurcación y $c, k$ parámetros reales

Se demuestra que en el punto  $P_3$  y en el valor del parámetro

$$\delta = \delta_0 = \frac{c(k-1)}{k+1}; \quad k > 1$$

se satisfacen las hipótesis del teorema de la forma normal de la bifurcación de Hopf.

**H.1.** (*Condición de equilibrio*)

En  $\mathbf{x}^* = P_3$  y  $\delta = \delta_0 = \frac{c(k-1)}{k+1}$  se cumple que

$$F(\mathbf{x}^*, \delta_0) = \mathbf{0}.$$

**H.2.** (*Condición de bifurcación*)

La matriz jacobiana en el punto  $P_3$  con  $\delta = \delta_0$  es

$$A(\delta_0) = DF(\mathbf{x}^*, \delta_0) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{c(1-k)}{2} \\ \frac{1+k}{2k} & 0 \end{bmatrix},$$

con valores propios

$$\lambda_{1,2} = \pm i\omega(\delta_0), \quad \omega(\delta_0) = \sqrt{\frac{c(k^2-1)}{4k}} > 0.$$

**H.3.** (*Condición de transversalidad*)

Al derivar  $\mu(\delta) = \frac{\sigma(\delta)}{2}$  respecto a  $\delta$  se tiene

$$\dot{\mu}(\delta) = \frac{(c-\delta)[c(k-1) - \delta(k+1) - \delta(k+1)] + 2\delta[c(k-1) - \delta(k+1)]}{2k(c-\delta)^3},$$

evaluada en  $\delta = \delta_0$

$$\dot{\mu}(\delta_0) = -\frac{(k+1)^2(k-1)}{8kc} \neq 0, \quad k > 1.$$

Así el sistema (3.2) con  $\delta = \delta_0 = \frac{c(k-1)}{k+1}$  es topológicamente equivalente al sistema de la forma normal de la bifurcación de Hopf. Esto se resume en la siguiente proposición:

**Proposición 3.7.1:** Para el punto  $P_3$  y valor del parámetro  $\delta_0 = \frac{c(k-1)}{k+1}$ ;  $k > 1$  el sistema (3.2) exhibe una bifurcación de Hopf.

En  $\delta = \delta_0 = \frac{c(k-1)}{k+1}$  se tiene el punto de equilibrio

$$P_3(\delta_0) = \left( \frac{k-1}{2}, \frac{(k+1)^2}{4ck} \right).$$

De

$$\sigma(\delta) = \frac{\delta[c(k-1) - \delta(k+1)]}{k(c-\delta)^2},$$

se tiene que  $\sigma(\delta) > 0$  para  $\delta < \delta_0$  y  $\sigma(\delta) < 0$  para  $\delta > \delta_0$ , así  $P_3(\delta_0)$  es inestable para  $\delta < \delta_0$  y asintóticamente estable para  $\delta > \delta_0$ .  $P_3(\delta_0)$  es punto de bifurcación.

De sustituir  $\delta = \delta_0 = \frac{c(k-1)}{k+1}$  en (3.11) se obtiene

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = \left( \frac{-c(k-1)}{2} \right) \xi_2 + \left( \frac{1-k}{2k} \right) \xi_1^2 - \left( \frac{1}{k} \right) \xi_1^3 - (c)\xi_1\xi_2 \\ \dot{\xi}_2 = \left( \frac{k+1}{2k} \right) \xi_1 + \left( \frac{2c}{k+1} \right) \xi_1\xi_2. \end{cases} \quad (3.14)$$

Así el sistema (3.14) se representa de la forma

$$\dot{\boldsymbol{\xi}} = A(\delta_0)\boldsymbol{\xi} + \widehat{F}(\boldsymbol{\xi}, c_0), \quad \widehat{F}(\boldsymbol{\xi}, c_0) = (\widehat{F}_1(\boldsymbol{\xi}, \delta_0), \widehat{F}_2(\boldsymbol{\xi}, \delta_0))^T$$

donde

$$\widehat{F}_1(\boldsymbol{\xi}, \delta_0) = \left(\frac{1-k}{2k}\right) \xi_1^2 - \left(\frac{1}{k}\right) \xi_1^3 - (c)\xi_1\xi_2$$

$$\widehat{F}_2(\boldsymbol{\xi}, \delta_0) = \left(\frac{2c}{k+1}\right) \xi_1\xi_2.$$

El sistema (3.14) se puede representar además como

$$\dot{\boldsymbol{\xi}} = A(\delta_0)\boldsymbol{\xi} + \frac{1}{2}B(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi}) + \frac{1}{6}C(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi})$$

donde las funciones multilineales  $B, C$ , con  $\boldsymbol{\xi} = 0$ , toman en los vectores bidimensionales

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2)^T, \quad \mathbf{y} = (y_1, y_2)^T, \quad \mathbf{z} = (z_1, z_2)^T$$

los valores

$$B(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{bmatrix} B_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ B_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\frac{1-k}{k}\right) x_1 y_1 - c(x_1 y_2 + x_2 y_1) \\ \left(\frac{2c}{k+1}\right) (x_1 y_2 + x_2 y_1) \end{bmatrix}$$

$$C(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = \begin{bmatrix} \left(-\frac{6}{k}\right) x_1 y_1 z_1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

### 3.7.1. Primer coeficiente de Lyapunov

Para el cálculo de vectores propios se plantea

$$A(\delta_0)\mathbf{q} = \lambda_1\mathbf{q} \quad \text{y} \quad A^T(\delta_0)\mathbf{p} = \lambda_2\mathbf{p}$$

donde

$$A^T(\delta_0) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1+k}{2k} \\ \frac{c(1-k)}{2} & 0 \end{bmatrix}.$$

Un vector propio  $\mathbf{q} \in \mathbb{C}^2$  asociado a

$$\lambda_1 = i\omega(\delta_0) = i\sqrt{\frac{c(k^2 - 1)}{4k}}$$

de  $A(\delta_0)$  es

$$\mathbf{q} = (q_1, q_2) = \left( \sqrt{\frac{ck(k-1)}{k+1}}i, 1 \right)$$

y un vector propio  $\mathbf{p} \in \mathbb{C}^2$  asociado a

$$\lambda_2 = -i\omega(\delta_0) = -i\sqrt{\frac{c(k^2 - 1)}{4k}}$$

de  $A^T(\delta_0)$  es

$$\mathbf{p} = (p_1, p_2) = \left( \sqrt{\frac{k+1}{ck(k-1)}}i, 1 \right).$$

Si se considera a

$$\mathbf{p} = \frac{1}{2} \left( \sqrt{\frac{k+1}{ck(k-1)}}i, 1 \right)$$

se tiene que

$$\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle = 1, \quad \langle \mathbf{p}, \bar{\mathbf{q}} \rangle = 0.$$

Ahora en los vectores propios  $\mathbf{p}, \mathbf{q}, \bar{\mathbf{p}}, \bar{\mathbf{q}}$  se tiene

$$B(\mathbf{q}, \mathbf{q}) = \begin{bmatrix} B_1(\mathbf{q}, \mathbf{q}) \\ B_2(\mathbf{q}, \mathbf{q}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{c(k-1)^2}{k+1} - 2c\sqrt{\frac{ck(k-1)}{k+1}}i \\ \left(\frac{4c}{k+1}\right)\sqrt{\frac{ck(k-1)}{k+1}}i \end{bmatrix},$$

$$B(\mathbf{q}, \bar{\mathbf{q}}) = \begin{bmatrix} B_1(\mathbf{q}, \bar{\mathbf{q}}) \\ B_2(\mathbf{q}, \bar{\mathbf{q}}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{c(k-1)(1-k)}{k+1} \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$C(\mathbf{q}, \mathbf{q}, \bar{\mathbf{q}}) = \begin{bmatrix} C_1(\mathbf{q}, \mathbf{q}, \bar{\mathbf{q}}) \\ C_2(\mathbf{q}, \mathbf{q}, \bar{\mathbf{q}}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6\sqrt{\frac{c^3 k(k-1)^3}{(k+1)^3}} i \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$g_{2,0} = \langle \mathbf{p}, \mathbf{B}(\mathbf{q}, \mathbf{q}) \rangle = -c + \frac{c}{k+1} \left[ 2\sqrt{\frac{ck(k-1)}{k+1}} - \frac{(k-1)^2}{2} \sqrt{\frac{k+1}{ck(k-1)}} \right] i,$$

$$g_{1,1} = \langle \mathbf{p}, \mathbf{B}(\mathbf{q}, \bar{\mathbf{q}}) \rangle = \frac{(k-1)}{2} \sqrt{\frac{c(k-1)}{k(k+1)}} i,$$

$$g_{2,1} = \langle \mathbf{p}, \mathbf{C}(\mathbf{q}, \mathbf{q}, \bar{\mathbf{q}}) \rangle = \frac{-3c(k-1)}{k+1},$$

$$\omega_0 = \omega(\delta_0) = \sqrt{\frac{c(k^2-1)}{4k}},$$

$$ig_{2,0}g_{1,1} = \frac{c(k-1)}{2} \sqrt{\frac{c(k-1)}{k(k+1)}} - \sqrt{\frac{c^3(k-1)^3}{4k(k+1)^3}} \left[ 2\sqrt{\frac{ck(k-1)}{k+1}} - \frac{(k-1)^2}{2} \sqrt{\frac{k+1}{ck(k-1)}} \right] i,$$

$$\omega_0 g_{2,1} = -3\sqrt{\frac{c^3(k-1)^3}{4k(k+1)}}.$$

El primer coeficiente de Lyapunov está dado por

$$L_1(\delta_0) = \frac{1}{2\omega_0} \text{Re}(ig_{2,0}g_{1,1} + \omega_0 g_{2,1}) = \frac{-c(k-1)}{k+1} < 0, \quad k > 1.$$

Como  $L_1(\delta_0) < 0$ ,  $k > 1$ , una *bifurcación de Hopf supercrítica* ocurre al variar  $\delta = \delta_0$ .

### 3.7.2. Retrato de fase, bifurcación de Hopf supercrítica

1. Puntos de equilibrio  $P_1 = (0, 0)$ ,  $P_2 = (k, 0)$

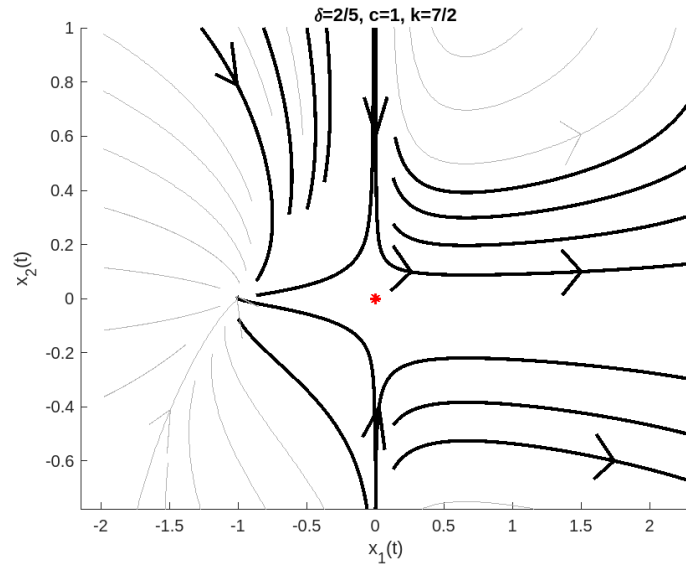


Figura 3.12: Caso III,  $P_1 = (0, 0)$  silla-nodo

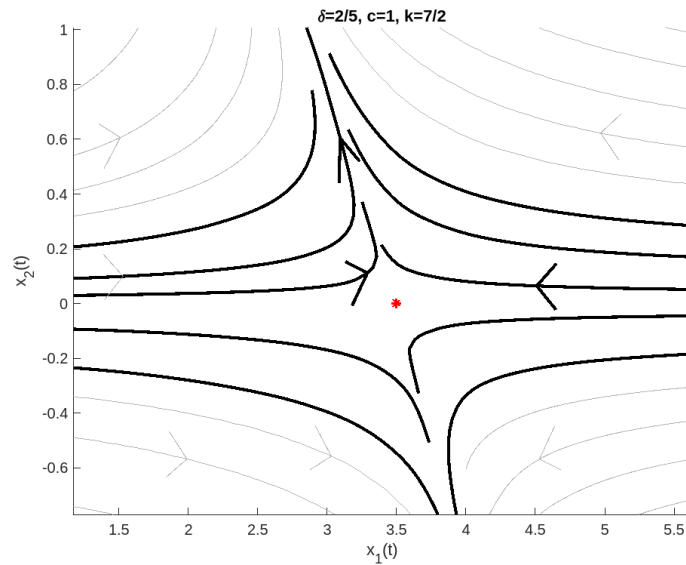


Figura 3.13: Caso III,  $P_2 = (3, 5, 0)$  silla-nodo



## 2. Bifurcación de Hopf Supercrítica

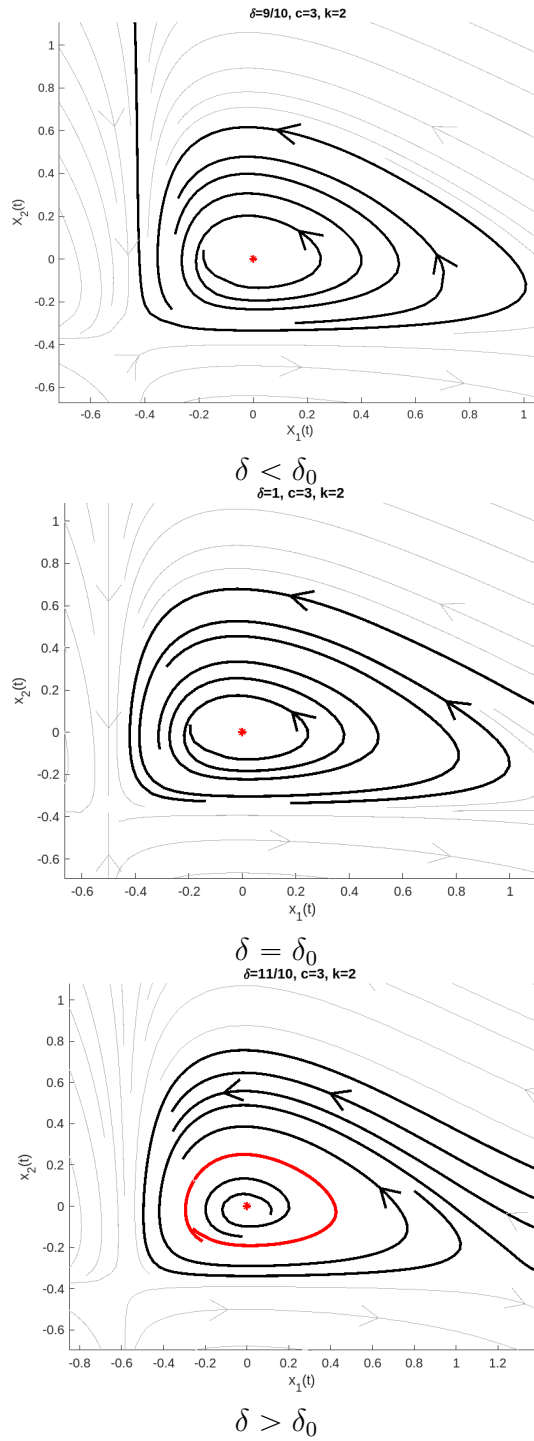


Figura 3.14: Bifurcación de Hopf supercrítica en  $\delta = \delta_0$  y con  $P_3$  trasladado al origen

La siguiente tabla presenta un resumen de los resultados obtenidos. En ella se detallan los valores de bifurcación, la estabilidad del punto de equilibrio en relación con valores menores y mayores respecto al valor de bifurcación, respectivamente, así como el tipo de bifurcación de Hopf asociado en cada uno de los tres escenarios analizados.

Parámetro	Valor de bifurcación	Estabilidad		Tipo de bifurcación
		$c < c_0$	$c > c_0$	
$c$	$c_0 = \frac{\delta(k+1)}{k-1}$	Asintótico	Inestable	Supercrítica
$k$	$k_0 = \frac{c+\delta}{c-\delta}$	Asintótico	Inestable	Supercrítica
$\delta$	$\delta_0 = \frac{c(k-1)}{k+1}$	Inestable	Asintótico	Supercrítica

Cuadro 3.5: Valores de bifurcación con  $P_3$  trasladado al origen en el sistema (3.2)

A continuación, se ofrece una visión alternativa acerca de la existencia de ciclos límite en el sistema (3.2), abordando tanto el teorema de Poincaré (Pág. 63) como la aplicación de una transformación a coordenadas polares en el sistema (3.2).

### 3.8. Ciclos límites en el sistema

Sea  $F = (F_1(x_1, x_2), F_2(x_1, x_2))$  el campo vectorial asociado al sistema (3.2) y el punto de equilibrio no trivial

$$P_3 = \left( \frac{\delta}{c-\delta}, \frac{1}{c-\delta} - \frac{\delta}{k(c-\delta)^2} \right); \quad c > \delta.$$

**Proposición 3.8.1:** El campo  $F$  asociado al sistema posee un ciclo límite en una vecindad de  $P_3$  para todo  $c \in (c_0, c_0 + \epsilon)$  con  $\epsilon > 0$  y valor de parámetro  $c_0 = \frac{\delta(k+1)}{k-1}$ ;  $k > 1$ .

## Demostración

### H.1. (Condición de bifurcación)

Del (Caso I) los valores propios de  $A(c_0) = DF(P_3, c_0)$  son

$$\lambda_{1,2}(c_0) = \pm\omega(c_0)i, \quad \omega(c_0) = \frac{(k+1)}{2} \sqrt{\frac{\delta}{k}} > 0; \quad c > \delta$$

### H.2. (Condición de transversalidad)

$$Re(\lambda_{1,2}) = \frac{\delta[c(k-1) - \delta(k+1)]}{2k(c-\delta)^2} \quad \text{luego} \quad \frac{d}{dc} Re(\lambda_{1,2})|_{c=c_0} = \frac{(k-1)^3}{8\delta k} > 0.$$

### H.3. ( $P_3$ trasladado al origen es asintóticamente estable)

Considerando  $x_1 = \xi_1, x_2 = \xi_2$  el sistema (3.11) que tiene a  $(0,0)$  como punto de equilibrio, de (2.4) el sistema es equivalente en coordenadas polares a

$$\begin{cases} \dot{r} = r \cos(\theta) \left[ \frac{\delta[k(c-\delta) - c - \delta] \cos(\theta)}{k(c-\delta)^2} - \left( \frac{c\delta}{c-\delta} \right) \sin(\theta) + \frac{k(c-\delta) - c - 2\delta}{k(c-\delta)} r \cos^2(\theta) \right] \\ + r \cos(\theta) \left[ -\frac{1}{k} r^2 \cos^3(\theta) - cr \sin(\theta) \cos(\theta) + \sin(\theta) \left( 1 - \frac{\delta}{k(c-\delta)} \right) + r(c-\delta) \sin^2(\theta) \right] \\ \dot{\theta} = \cos^2(\theta) \left[ \left( 1 - \frac{\delta}{k(c-\delta)} \right) + (c-\delta) r \sin(\theta) \right] - \sin(\theta) \left[ \cos(\theta) \frac{\delta[k(c-\delta) - c - \delta]}{k(c-\delta)^2} \right] + \\ - \sin(\theta) \left[ \frac{-c\delta \sin(\theta)}{c-\delta} + r \cos^2(\theta) \left( \frac{k(c-\delta) - c - 2\delta}{k(c-\delta)} \right) - \frac{1}{k} r^2 \cos^3(\theta) - cr \sin(\theta) \cos(\theta) \right] \end{cases} \quad (3.15)$$

Para  $\theta = 0$  se tiene que

$$\dot{r} = \frac{r\delta[k(c-\delta) - c - \delta]}{k(c-\delta)^2} + \frac{r^2[k(c-\delta) - c - 2\delta]}{k(c-\delta)} - \frac{r^3}{k}. \quad (3.16)$$

En  $c = c_0 = \frac{\delta(k+1)}{k-1}$  se tiene que

$$\dot{r}|_{c=c_0} = \frac{r^2}{k} \left[ \frac{1-k}{2} - r \right] < 0; \quad k > 1$$

siempre que  $r \neq 0$ , así el origen es asintóticamente estable. De (Teo. 2.6, Cap 2) se tiene que para  $c_0 < c$ , próximo de  $c_0$ , el campo  $F$  posee un ciclo límite ■

**Proposición 3.8.2:** El campo  $F$  asociado al sistema posee un ciclo límite en una vecindad de  $P_3$  para todo  $k \in (k_0, k_0 + \epsilon)$  con  $\epsilon > 0$  y valor de parámetro  $k_0 = \frac{c + \delta}{c - \delta}$ ;  $c > \delta$ .

**Demostración**

**H.1.** (*Condición de bifurcación*)

Del (Caso II) se tiene que los valores propios en  $A(k_0) = DF(P_3, k_0)$  son

$$\lambda_{1,2}(k_0) = \pm\omega(k_0)i \quad \text{donde} \quad \omega(k_0) = \sqrt{\frac{c^2\delta}{c^2 - \delta^2}} > 0.$$

**H.2.** (*Condición de transversalidad*)

$$Re(\lambda_{1,2}) = \frac{\delta[k(c - \delta) - (c + \delta)]}{2k(c - \delta)^2} \quad \text{luego} \quad \frac{d}{dk}Re(\lambda_{1,2})|_{k=k_0} = \frac{\delta}{2(c + \delta)} > 0.$$

**H.3.** ( $P_3$  es asintóticamente estable)

Sustituyendo en (3.16) el valor  $k = k_0 = \frac{c + \delta}{c - \delta}$  se tiene que

$$\dot{r}|_{k=k_0} = \frac{-r^2[\delta + (c - \delta)r]}{c + \delta} < 0$$

siempre que  $r \neq 0$ , así el origen es asintóticamente estable y se tiene que para  $k_0 < k$ , próximo de  $k_0$ , el campo  $F$  posee un ciclo límite ■

## TRABAJOS FUTUROS

---

Las herramientas matemáticas estudiadas en este documento se aplican:

- En *biología*, investigar sistemas de presa-predador más complejos, que incluyan múltiples niveles tróficos (organismos productores, consumidores, descomponedores).
- En *ecología*, explorar cómo la introducción de factores ambientales cambiantes o la inclusión de múltiples especies en el sistema pueden afectar la estabilidad y el comportamiento del sistema.
- En *economía*, modelar sistemas económicos que involucren la interacción entre empresas competidoras y consumidores utilizando la bifurcación de Hopf. Por ejemplo, investigar cómo la competencia y la demanda del mercado pueden generar ciclos económicos y fluctuaciones de precios.
- En *matemáticas*, extender el análisis a sistemas con derivadas parciales, como ecuaciones de reacción-difusión, para estudiar patrones espaciales y fenómenos de inestabilidad en sistemas dispersivos. Por ejemplo, analizar cómo la difusión afecta la estabilidad y el tipo de bifurcaciones que pueden ocurrir.
- En *ingeniería*, aplicar el concepto de bifurcación de Hopf para analizar la estabilidad de sistemas de ingeniería complejos, como redes eléctricas, sistemas de control y circuitos electrónicos. Esto puede ayudar a prevenir fallos inesperados o mejorar el rendimiento de sistemas dinámicos.
- En *neurociencia*, utilizar modelos basados en la bifurcación de Hopf para estudiar la actividad neuronal y las oscilaciones en el cerebro. Por ejemplo, investigar cómo diferentes parámetros afectan la generación de patrones de actividad neuronal y cómo estas oscilaciones pueden estar relacionadas con funciones cognitivas.

- En *climatología*, investigar la dinámica de sistemas climáticos utilizando modelos basados en la bifurcación de Hopf. Por ejemplo, analizar cómo la interacción entre el clima, la atmósfera y los océanos puede dar lugar a oscilaciones climáticas periódicas, como el fenómeno del niño y de la niña.
- En *química*, estudiar la estabilidad de reacciones químicas y la formación de patrones espaciales en sistemas reactivos no lineales mediante el análisis de la bifurcación de Hopf. Esto puede proporcionar información sobre la aparición de oscilaciones químicas y la generación de patrones de concentración.
- En *medicina*, aplicar modelos de presa-predador con bifurcaciones de Hopf a la dinámica de interacciones entre células cancerosas y el sistema inmunitario. Investigar cómo la inestabilidad en el equilibrio entre estas poblaciones celulares puede estar relacionada con la progresión del cáncer y las respuestas inmunitarias. También es posible estudiar la afectación de algunos virus, como por ejemplo el dengue y el chikungunya en las personas.
- En *astronomía*, estudiar la estabilidad de sistemas dinámicos astrofísicos, como sistemas de estrellas binarias o sistemas planetarios, utilizando la bifurcación de Hopf. Esto puede proporcionar información sobre la evolución y el comportamiento a largo plazo de estos sistemas.
- En *computación y redes*, estudiar la dinámica de redes complejas, como redes de comunicación o redes neuronales artificiales, utilizando conceptos de bifurcación de Hopf. Esto puede ayudar a comprender cómo se forman y propagan oscilaciones en sistemas de redes complejas.
- En *psicología*, analizar el comportamiento de sistemas cognitivos utilizando modelos de bifurcación de Hopf. Por ejemplo, investigar cómo los cambios en los estados emocionales y cognitivos pueden estar asociados con oscilaciones en la actividad cerebral y cómo esto afecta la toma de decisiones.

## CONCLUSIONES

---

La complejidad generada por la no linealidad entre las variables de estado en ciertos sistemas dinámicos descritos por ecuaciones diferenciales ordinarias dificulta la obtención de su solución explícita y su estudio. Por consiguiente, la teoría de los sistemas dinámicos y bifurcaciones juega un papel crucial en el análisis cualitativo de estos sistemas, proporcionando información sobre la evolución de sus órbitas, puntos de equilibrio y las posibilidades de que las órbitas se acerquen o se alejen de estos. La bifurcación de Hopf muestra para qué valores de los parámetros del sistema se presentan soluciones periódicas, en qué momento las poblaciones tienden a converger a dichas soluciones y bajo qué condiciones estas especies podrían desaparecer o perpetuarse. Biológicamente, la bifurcación de Hopf puede interpretarse como un cambio en la dinámica de la relación presa-predador o el sistema podría estar en un estado de equilibrio, donde las poblaciones de presas y predadores se mantienen constantes. Sin embargo, cuando los parámetros de bifurcación toman valores mayores o menores al valor de bifurcación, el sistema exhibe oscilaciones en las poblaciones.

En este trabajo se presentó un sistema autónomo presa-predador con crecimiento logístico y respuesta funcional Holling tipo II y se determinó tres puntos de equilibrio del sistema, dos triviales y uno no trivial, dados por  $P_1 = (0, 0)$ ,  $P_2 = (k, 0)$  y  $P_3 = \left( \frac{\delta}{c - \delta}, \frac{1}{c - \delta} - \frac{\delta}{k(c - \delta)^2} \right)$ . Gracias al teorema traza-determinante los puntos de equilibrio triviales  $P_1$  y  $P_2$  se clasifican topológicamente como puntos silla-nodo, matemáticamente estos dos puntos tienen órbitas cercanas que tienden a acercarse y a alejarse de estos respectivamente. Para el punto no trivial  $P_3$  se encontró que para cada valor  $c_0 = \frac{\delta(k + 1)}{k - 1}$ ,  $k_0 = \frac{c + \delta}{c - \delta}$  y  $\delta_0 = \frac{c(k - 1)}{k + 1}$  se satisface el teorema de la forma normal de la bifurcación de Hopf, es decir, son valores de bifurcación. El primer coeficiente de Lyapunov determinó que para cada uno de estos valores el sistema exhibe una bifurcación de Hopf supercrítica.

En conclusión cuando  $c > c_0$ ,  $k > k_0$  el sistema autónomo presa-predador garantiza la coexistencia sostenible de las especies. Para  $\delta > \delta_0$  se evidencia un comportamiento interesante, puesto que se forma una órbita repulsora.



## BIBLIOGRAFÍA

---

- [1] FERNANDEZ-ARHEX, Valeria y CORLEY, Juan C. *La respuesta funcional: una revisión y guía experimental*. Ecol. austral [online]. 2004, vol.14, n.1 [citado 2023-06-10], pp.83-93. Disponible en: [http://www.scielo.org.ar/scielo.php?script=sci\\_arttext&pid=S1667-782X2004000100010&lng=es&nrm=iso](http://www.scielo.org.ar/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1667-782X2004000100010&lng=es&nrm=iso) .ISSN1667-782X.
- [2] BETANCURT, Héctor. *Bifurcaciones básicas y formas normales*. Trabajo final de maestría. Universidad Nacional de Colombia. Bogotá. 2010.
- [3] GÁLVEZ GARCÍA, Miriam. *Estudio y comparación de diversos modelos de depredador-presa*. Trabajo de fin de grado de Matemáticas. Universidad de Sevilla. 20 de junio de 2018.
- [4] KUZNETSOV, Yuri. *Elements of Applied Bifurcation Theory*. Second Edition. Springer. Vol. 112. Columbia University. 1998.
- [5] MODELOS MATEMÁTICOS en biología [Anónimo]. Universidad de Jaén. Departamento de Matemáticas. 8 de enero de 2009. 360 p.
- [6] MORRIS, Hirsch, STEPHEN, Smale y DEVANEY, Robert. *Differential Equation, Dynamical Systems, and an Introduction to Chaos*. Academic Press is an imprint of Elsevier. 2013.
- [7] OGANICIAN, Jorge Asencio. *Modelo Depredador-Presa de Lotka-Volterra*. Trabajo de fin de grado de Biología. Facultad de Ciencias. Universidad de La Laguna. 2017.
- [8] PERKO, Lawrence. *Differential Equations and Dynamical Systems*. Third edition. Estados Unidos. Springer-Verlag; 2001.

- [9] PLAZA, Adrián. *El Teorema de Hartman-Grobman*. Trabajo de grado de Matemáticas. España. Universidad de Sevilla. 2020.
- [10] PUCHURI, Liliana. *Ciclos límites en modelos depredador-presa*. Perú. Universidad Nacional de Trujillo. 2017.
- [11] REMEDIOS, Leonardo. *Bifurcación de Andronov Hopf en la dinámica neuronal*. Trabajo de matemáticas aplicadas. México. Benemerita Universidad Autónoma de Puebla. 2013.
- [12] RESTREPO, Carlos Julio. *Teoría del Caos: Sistemas dinámicos y series de tiempo*. Colombia. Editorial Académica Española. 2011.
- [13] ROBINSON, Clark. *Dynamical Systems*. Second edition. CRC Press. 1999.
- [14] SALAZAR TRUJILLO, Carlos Andrés. *Modelo Presa-Depredador que inclute Efecto Allee y que presenta Bifurcación de Hopf*. Trabajo de Maestría en Biomatemáticas. Colombia. Universidad del Quindío. 2009.
- [15] VILLABÓN BORJA, David Augusto. *TEOREMA DE POINCARÉ - BENDIXON EN EL PLANO*. Proyecto Curricular de Matemáticas. Colombia. Universidad Distrital Francisco José de Caldas. 2017.
- [16] WEI, J y YI, Fengqi. *Bifurcation and Spatiotemporal Patterns in a Homogeneous Diffusive Predator-Prey System*. Harbin Institute of Technology Harbin.
- [17] WIGGINGS, Stephen. *Introduction to applied nonlinear dynamical systems and chaos*. USA. Springer Science and Business Media, 2003.
- [18] M.H, Baddi, LANDEROS, J, RODRIGUEZ, H, CERNA, E, VALENZUELA, J y OCHOA, Y. *Algunos Aspectos de Depredación*. International Journal of Good Conscience. Marzo, 2013. Disponible en: [http://www.spentamexico.org/v8-n1/A12.8\(1\)148-158.pdf](http://www.spentamexico.org/v8-n1/A12.8(1)148-158.pdf).