CATEGORIZACIÓN DE LAS FORMAS DE RELACIONARSE LAS EXPLICACIONES DEL PRACTICANTE CON LA ARGUMENTACIÓN DE LAS ALUMNAS EN LA RESOLUCIÓN DE TALLERES DE MATEMÁTICA ESCOLAR

HERNAN FELIPE BECERRA VALENCIA

UNIVERSIDAD DEL CAUCA

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES EXACTAS Y DE LA EDUCACIÓN

LICENCIATURA DE MATEMÁTICAS

2023

CATEGORIZACIÓN DE LAS FORMAS DE RELACIONARSE LAS EXPLICACIONES DEL PRACTICANTE CON LA ARGUMENTACIÓN DE LAS ALUMNAS EN LA RESOLUCIÓN DE TALLERES DE MATEMÁTICA ESCOLAR

HERNAN FELIPE BECERRA VALENCIA

Sistematización de práctica pedagógica, requisito parcial para optar por el título de Licenciado en Matemáticas

Director.

Mg. ANGEL HERNAN ZUÑIGA SOLARTE

UNIVERSIDAD DEL CAUCA

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES EXACTAS Y DE LA EDUCACIÓN

LICENCIATURA DE MATEMÁTICAS

2023

AGRADECIMIENTOS

A Dios, al apoyo constante de mis padres, mis hermanos y a la orientación de mi director para llevar a cabo este logro

CONTENIDO

Contenido

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABLAS

LISTAS DE IMÁGENES

LISTA DE COMPOSICIONES

RESUMEN

El presente trabajo da cuenta de la sistematización de la práctica pedagógica que nace a partir de las asesorías brindadas en el entorno de aprendizaje virtual causado por la emergencia sanitaria del Covid-19 en el área de Matemáticas en la Institución Educativa San Agustín de la ciudad de Popayán. El problema que direccionó la presente sistematización tiene que ver con la elaboración de la solución de los ejercicios por parte de las alumnas del grado Octavo en relación con lo explicado por el docente titular puesto que según su estrategia no dispone espacios para categorizar las formas de cómo se están relacionando sus explicaciones con las argumentaciones de las alumnas frente a las resoluciones de los talleres, de esta manera; ante ello, el practicante consideró importante establecer como objetivo general: categorizar las formas en que se relacionan las explicaciones brindadas por el practicante y/o docente titular a temas de la matemática escolar pertenecientes al de plan de área, con la argumentación ofrecida por las alumnas en el desarrollo de los talleres propuestos.

Por último, dado que la práctica se circunscribió únicamente a explicar procedimientos que involucran propiedades, reglas, condiciones y, por consiguiente, la resolución de ejercicios involucrados en ese entorno matemático, las argumentaciones de las alumnas se encontraban limitadas, es decir, debían estar únicamente apoyadas bajo dichos procedimientos para dar solución a las hojas de ejercicios propuestas por el docente titular; en ese orden de ideas, a las alumnas se les impedía dar su punto de vista, hacer análisis y expresar razonamientos lógicos para dar sus respuestas.

Palabras clave: Relación, argumentación, sistematización, categorización.

SUMMARY

The present work accounts for the systematization of the teaching practice that arises from the advice provided in the virtual learning environment caused by the Covid-19 health emergency in the area of Mathematics at the San Agustín Educational Institution in

the city of Popayan. The problem that directed the present systematization has to do with the solution of the exercises elaborated by the eighth grade students in relation to what was explained by the main teacher; Given this, the practitioner considered it important to categorize the relationships given within the explanations. In this way, the general objective of this systematization was to categorize the ways in which the explanations provided by the practitioner and/or head teacher are related to mathematical topics of the area plan, with the argumentation offered by the students in the development of the workshops. proposed. For the support of this systematization was Adam's explanatory scheme, which proposes a series of sequences to execute the explanation of a topic.

Lastly, since the practice was confined solely to explaining procedures that involve properties, rules, conditions and, consequently, the resolution of exercises involved in that mathematical environment, the arguments of the students were limited, that is, they had to be only supported under said procedures to solve the exercise sheets proposed by the titular teacher; In this order of ideas, the students were prevented from giving their point of view, making analyzes and expressing logical reasoning to give their answers.

Keywords: Relationship, argumentation, systematization, categorization.

INTRODUCCIÓN

La práctica pedagógica es considerada como la piedra angular de la licenciatura en matemáticas de la Universidad del Cauca dado que en esta se ejecutan los conocimientos adquiridos en el transcurso de la carrera profesional en un contexto real como lo es el aula de clase; de este modo, dicha práctica brinda un conjunto de experiencias para una futura labor docente. La presente sistematización categoriza las formas de relacionamiento que existen entre lo que explica el practicante con las argumentaciones que ofrecen las estudiantes ante las resoluciones de los talleres propuestos por el docente titular. Es por ello que, para dar cuenta de dicha categorización de relacionamiento es importante tener presente primero que, al ejercer la práctica pedagógica en el aula, independientemente de los propósitos que se tengan, se estará acudiendo repetidas veces a la explicación, de esta manera en lo que respecta a los fines que se tienen proyectados en la práctica, pueden llegar a contribuir para estos; es decir, al ejecutar el proyecto que se tiene en consideración, estará de por medio en las actividades bien sea de manera explícita o implícita la y como consecuencia en contribución hacia la enseñanza.

De acuerdo con Eder, M (2005):

Explicación y enseñanza están íntimamente relacionadas, aunque sus vínculos pueden ser diversos. En algunos casos la explicación es el sentido de la enseñanza, en otros es una herramienta para favorecer la comprensión. Puede pensarse desde la psicología, la epistemología y la didáctica y, sin duda, todas las miradas permiten mostrar la complejidad de los procesos de enseñar y aprender un saber (…)

Además, Leinhardt (citado por Eder, M, 2005) “El corazón de cada episodio de enseñanza es la explicación de una idea o fenómeno... Independientemente de cuál tipo de enseñanza uno está describiendo, las explicaciones dadas o la construcción de una explicación son fundamentales para el proceso de aprendizaje”. Y segundo que las alumnas al manifestar las argumentaciones de sus resoluciones permiten manifestar la categorización.

Para efectos de la categorización de relacionamiento, debido a las limitaciones a las que estuvo sujeta esta práctica pedagógica, solo se contó con la participación real y activa de dos alumnas del grado Octavo-Noveno B. las cuales estuvieron dispuestas a argumentar las resoluciones de los talleres propuestos por el docente titular en todo el transcurso del segundo periodo a cargo del practicante.

El presente trabajo se desarrolla en cinco capítulos. El primer capítulo describe algunas características de la institución y el rol que cumplió el practicante en la inmersión. En el segundo capítulo se da a conocer la problemática, la pregunta de investigación, los objetivos, además del marco conceptual donde se presentan los conceptos matemáticos y los autores que aportaron para este trabajo de sistematización.

En el tercer capítulo se describe cómo se llevó a cabo la docencia en dos momentos. En la virtualidad y en la presencialidad; además de realizar la discusión de resultados que se obtuvieron dentro del marco del segundo momento. Y, en el cuarto capítulo se presentan las conclusiones generales que se presentaron al categorizar las formas de relacionamiento y recomendaciones.

ESCENARIO E INMERSIÓN

Escenario de la práctica pedagógica

La Institución Educativa San Agustín —sede principal— fue fundada por las hermanas Vicentinas en 1888 como una pequeña escuela; posteriormente, dieron continuidad a sus labores académicas con el nivel de bachillerato. En 1995 con apoyo del gobierno, la Ssecretaría de Educación y los impuestos de la Lotería del Cauca se dio el aval para la ampliación del inmueble. En 1998 por carencia de hermanas para continuar con la labor educativa entregaron la dirección a una docente seglar.

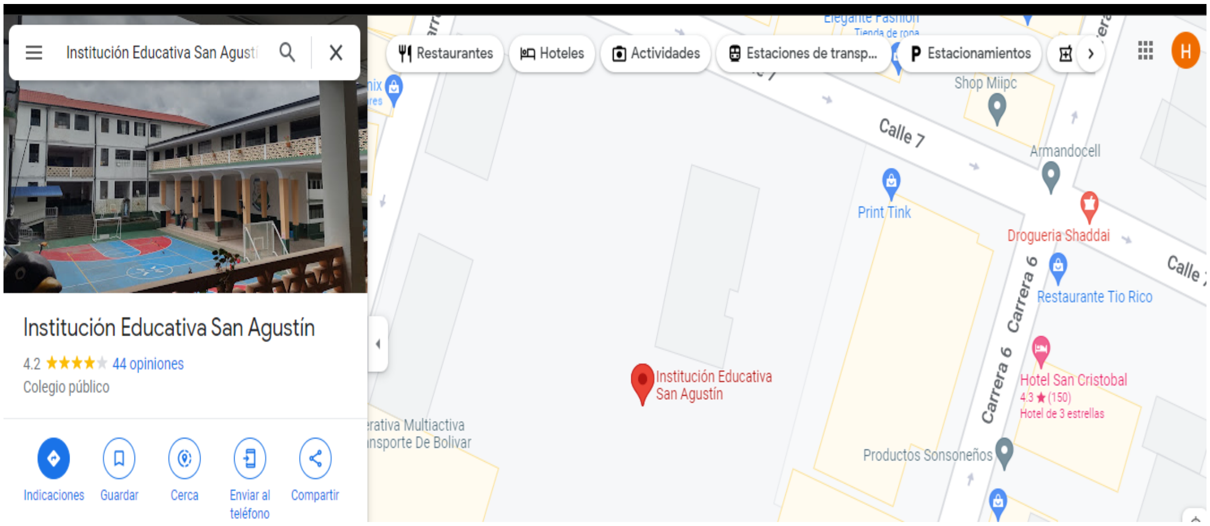
> La Institución bajo la dirección de las Hermanas de la Caridad de Santa Ana tiene un cometido prioritario: Ayudar a contemplar la vida, la cultura y la historia con perspectiva Cristiana y el gran reto de representar el proyecto de Jesús como fundamento y eje de convicciones y comprometidas.[1]

La sede principal de la Institución San Agustín se encuentra ubicada en el centro histórico de la ciudad de Popayán, más exactamente en la Cra. 7 # 7-33; la institución está conformada por dos sedes más: Colegio Madre Laura (jornada tarde) y la Institución Educativa El Libertador. Tanto la IE San Agustín y el Colegio Madre Laura cuentan con los niveles Preescolar, Básica Primaria, Básica Secundaria y Media educativa, a diferencia de la sede El Libertador que cuenta con los niveles Preescolar y Básica Primaria. Por otro lado, las dos primeras instituciones son de carácter oficial y solo atienden a población femenina en su jornada diurna.

Ahora bien, uno de los motivos por los cuales se escogió la Institución Educativa San Agustín para realizar la práctica pedagógica se debe a que el practicante estuvo en un entorno educativo de población mixta, y en el consecuencia, se despertó su interés por conocer la educación en una población femenina y laica , además de al realizar la visita en la práctica pedagógica los directivos y docentes, en particular la rectora de ese momento Luz Dary Suarez, y los docentes Efrén Parra Ordoñez y Fabian Martínez, hicieron un buen recibimiento para iniciar el proceso de intervención pedagógica en la sede principal.

[1] Historia. Disponible en: https://sanagustinpopayan.wordpress.com/historia/

Figura 1. Ubicación de la Institución Educativa San Agustín.



Fuente: Google Maps.

Proceso de inmersión

Al ejecutar la inmersión en Institución Educativa San Agustín, se llevaron a cabo los trámites pertinentes hasta obtener el aval. No obstante, antes de ello, se realizó un proceso de inmersión a mediados del año 2021; es importante destacar que para la fecha el mundo se encontraba atravesando la emergencia sanitaria provocada por el Covid-19, motivo por el cual el proceso de inmersión en el área de Álgebra con los grados —para ese entonces, 8A y 8B— fue de manera virtual. Esta área es dirigida por el docente titular.

Para establecer comunicación con las alumnas, el docente titular utilizaba la plataforma Google Meet como herramienta de contacto. De esta manera, en la inmersión el docente titular abrió el espacio al practicante para hacer el acompañamiento pedagógico por la misma plataforma con la finalidad de aclarar dudas en los talleres que él proponía de los temas. Cabe resaltar que estos no tenían ningún valor cuantitativo de evaluación, sino que servían como una estrategia de repaso. Así mismo, los grados 8 contaban con 41 alumnas y el otro con 42, a las cuales se les brindaba asesoría virtual el día lunes en la tarde.

Considerando que la suma de los dos cursos 8-A y 8-B era de 83 alumnas, asistían al espacio del acompañamiento entre 4 a 7 alumnas. En cuanto a la participación, normalmente se manifestaban entre 2 a 3 niñas,

Metodología del docente y del practicante

En la presencialidad, el docente titular al dar inicio al periodo académico escribía los temas a desarrollar en el transcurso del periodo académico sobre el tablero. Posteriormente, al impartir el tema planeado el docente daba alguna introducción, la respectiva teoría, luego daba las ejemplificaciones y, seguidamente, los ejercicios. En las clases siguientes les pedía el cuaderno para revisar si habían trabajado sobre el taller que les dejaba, y si alguna lo llevaba incompleto le hacía anotación; por el contrario, sumaba algunos puntos si cumplían con los ejercicios que había propuesto del taller.

Ahora bien, al iniciar la intervención, el practicante decidió continuar con las alumnas del grado 8° B que aprobaron el año académico. En ese punto, se tuvo un encuentro con el director Ángel Zúñiga, el docente titular y el practicante con la finalidad de presentarle la propuesta que se iba a ejecutar en la docencia directa; Ante este hecho, el docente acepto, y acto seguido se acordó una fecha para dar comienzo con la docencia. Sin embargo, en la semana que finalmente se daba inicio a la práctica pedagógica, el docente se retrató respecto a la ejecución de la propuesta por parte del practicante y procedió a asignarle el rol de acompañante pedagógico en los talleres en horas curriculares e impartir las clases en todo el segundo periodo académico. En esta docencia, el practicante se hizo cargo de temas como la *Radicación* y los *Números complejos.* Estas temáticas fueron desarrolladas durante el segundo periodo académico con la metodología análoga a la del docente titular en un tiempo de 11 semanas académicas, es decir, del 27 de mayo hasta el 12 de agosto del año lectivo 2022.

PROBLEMÁTICA DE ESTUDIO, OBJETIVOS, ANTECEDENTES Y MARCO CONCEPTUAL

Debido a la emergencia sanitaria provocada por el Covid-19, hizo que la enseñanza de las instituciones educativas se trasladara y ejecutara en entornos virtuales o remotos, lo cual condujo a que la institución educativa San Agustín continuara con los procesos de enseñanza-aprendizaje. En ese espacio el docente titular de la clase de Álgebra de la Institución Educativa San Agustín le permitía al practicante hacer presencia de sus clases y realizar las asesorías extracurriculares, espacio último que le permitía al docente titular la participación de las alumnas del grado 9° en la solución de los ejercicios de los talleres o presentar las soluciones de estos.

Posteriormente en la presencialidad, antes de realizar la docencia directa, al participar en sus clases como asistente, el practicante observaba que el docente titular cuando trabajaba sobre las dudas de los talleres que proponía a las alumnas, brindaba pequeños espacios para que algunas salieran al tablero a expresar sus respuestas de manera escrita y en ocasiones oral (oral con el fin de indagar sobre sus pasos o procesos) y de esta manera le permitía dar cuenta del aprendizaje en ellas y a su vez incentivar la participación. En ese mismo orden de ideas, las alumnas al transcribir sus respuestas en el tablero, el docente cuando detectaba errores en sus soluciones, los señalaba y luego procedía a indicar los pasos a seguir. Por el contrario, cuando las soluciones de las alumnas se encontraban correctas, las dejaba escritas en el tablero con el fin de que sus compañeras procedieran a copiarlas. Además de ello, les pedía una breve argumentación general de estas y posteriormente el docente terminaba por explicar la solución al resto de sus compañeras. Sin embargo, las argumentaciones al cumplir con esta característica; es decir, no ser expresadas con detalle, no permitía conocer de parte de las alumnas todas las razones que las conllevaban a realizar cada paso de las soluciones de los ejercicios.

El motivo que le impedía al docente brindar un espacio suficiente o adecuado con el cual pudieran contar las alumnas para expresar sus argumentaciones con plenitud, era que debía de hacer lo posible por cumplir con el plan de área en el tiempo estipulado, lo cual, si él les bridaba ese espacio, podría generarle retrasos con dicho cumplimiento.

Por esta razón en la docencia directa, se dedicó un importante tiempo; particularmente en una actividad extracurricular con el fin de fijar su atención y detallar en las argumentaciones que manifiestan verbalmente las alumnas de sus soluciones a los talleres. En esta actividad, surge la necesidad de reconocer las distintas maneras que brindan las alumnas de sus argumentaciones. Una de estas maneras tiene que ver con el modo en que fueron explicados los contenidos matemáticos y que, a su vez, estos son necesarios para resolver los ejercicios.

Ahora, con lo mencionado anteriormente, considerando este acontecimiento o proceso cabe preguntarse: ¿De qué forma las argumentaciones que brindan las alumnas al resolver los talleres propuestos por el docente titular, se relacionan con las explicaciones de las temáticas dadas por el practicante?

Objetivo general

Categorizar las formas en que se relacionan las explicaciones brindadas por el practicante a temas (de la matemática escolar) pertenecientes al de plan de área, con la argumentación ofrecida por las estudiantes en el desarrollo de los talleres propuestos por el docente titular

Objetivos específicos

Analizar las explicaciones proporcionadas por el profesor (practicante) en relación con los temas abordados.

Analizar la argumentación ofrecida por las alumnas en el desarrollo de los talleres para el (o en dirección al) reconocimiento de patrones y relaciones entre las explicaciones del practicante y las argumentaciones de las alumnas.

Generar categorías o tipologías que describan las formas en que se relacionan las explicaciones y argumentaciones

Antecedentes

En miras de los diferentes modos de argumentar en el aula de clase. Referido a las ciencias sociales.

Cubero, M, Santamaría A & Barragán A (2017) tienen por objetivo “realizar propuesta de análisis que identifique y describa los distintos modos de pensamiento verbal ejecutando ciertos indicadores discursivos que manifiesten sus características”. Esta propuesta se sustenta en dos pensamientos básicos. El primero consta de las diversas maneras de pensar en un mismo individuo; el segundo es la interpretación de dichas formas de pensar en términos de diferentes modos de argumentación. Todo ello tiene cabida en una visión instrumental del pensamiento verbal, para la que éste está mediado a través del lenguaje (Vygotski, 1934/1986, citado en Cubero, M, Santamaría A & Barragán A, 2017)

La población que se tuvo en cuenta fue una profesora y 13 alumnas (de entre 63 a 72 años) que pertenecen a un aula de Educación de Personas Adultas con las cuales se describe y analiza las características de los diferentes modos de argumentación teniendo en consideración los marcos primitivos

Este trabajo de investigación posee carácter analítico con el cual estudia los modos utilizando como instrumento para identificar y describir los distintos modos de argumentar las funciones primitivas del acto discursivo propuestas por Jerome Bruner: intersubjetividad, instrumentalidad y normatividad.

En consecuencia, en cada uno de los dos modos de argumentación los primitivos adoptan formas bien diferenciadas las cuales son: Argumentación proposicional, argumentación narrativa, argumentaciones narrativas con generalización y argumentaciones proposicionales con particularización.

Las argumentaciones propisonales se presentaron en la docente puesto que corresponden a modos de conocer, convencer y construir la realidad (…) Así, la argumentación o el pensamiento paradigmático o proposicional persigue formular enunciados en los que se expresan las causas generales de los eventos, a partir del uso de términos descontextualizados.

Las argumentaciones narrativas se hicieron evidentes en las alumnas dado que se ocupa de construir relatos utilizando personajes y situaciones cotidianas o concretas, buscando la validez en la verosimilitud de los relatos, en el parecido de éstos con la realidad

Respecto a la generalizaciones y particularizaciones de estos argumentos (narrativo y proposicional) son consecuencia, por un lado, del dominio que un individuo tenga de las mismas y, por otro, del reconocimiento de cuáles sean más adecuadas o tengan más poder.

En cuento a la aportación de este trabajo a nuestra sistematización, las conclusiones son pertinentes con el tema porque reside en las diferentes maneras que se presenta de argumentar en el aula basándose en los recursos que cuenta un individuo, por un lado el docente presentando argumentos teóricos para asegurándose de convencer, hacer comprender y por ende facilitar el aprendizaje a su auditorio (alumnos) y el alumno presentando sus argumentaciones basadas en su experiencia del aprendizaje.

Enfocado a destinar la argumentación como estrategia de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas

Aldana, E en el presente artículo tiene por objetivo dar a conocer la importancia de la argumentación como estrategia de enseñanza y de aprendizaje de las matemáticas.

Para ello se ha puesto de manifiesto un enfoque teórico de comprensión matemática, y una metodología de tipo cualitativo con un estudiante universitario, a quien se le plantearon algunas tareas con las cuales, más que el procedimiento se tiene por propósito analizar los argumentos que utiliza y la relación que establece entre ellos. Para ello, como instrumentos utilizados son algunos cuestionarios que ponen en evidencia lo que el estudiante sabe hacer con lo que conoce, una entrevista para complementar la información obtenida a partir del cuestionario mediante la argumentación que hace el estudiante de la forma como ha resuelto la tarea, y un mapa conceptual que muestra la imagen del concepto que tiene el estudiante del concepto de integral definida Aldana, E (2014)

Para el análisis se considera una de las tareas

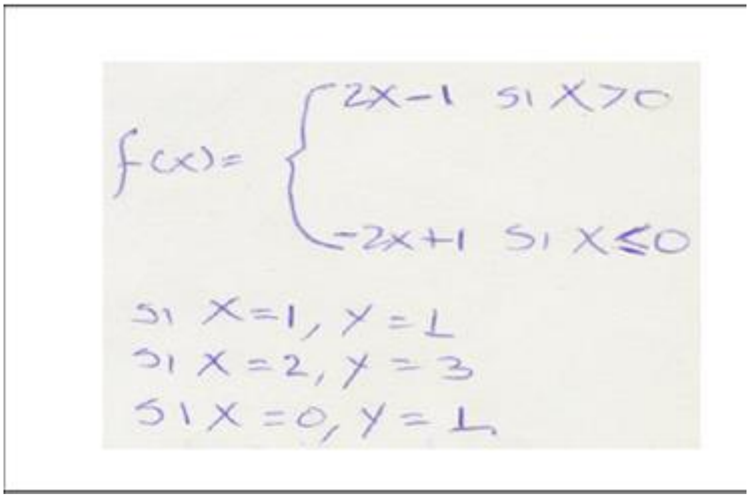
Figura 2. “Tarea 2”.

Calcular el área limitada por la gráfica de la función $f(x)=|2x-1|$, en el intervalo $[0, 2]$ y el eje x. Justificar la respuesta.

Fuente: Aldana, E (2014)

Este alumno analiza los valores que toma según sea positiva o negativa la función 2x -1, aunque en el planteamiento se confunde entre las abscisas y las ordenadas y considera los casos en que x sea positivo o negativo.

Figura 3. “A7, representación G de la tarea 2 en el cuestionario y durante la entrevista”.



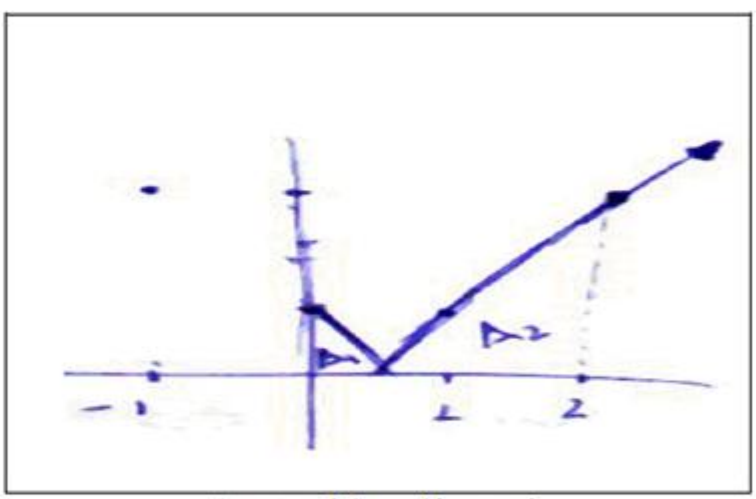
Fuente: Aldana, E (2014)

Esto mismo lo expresa durante la entrevista. Está trasfiriendo directamente lo que recuerda del valor absoluto de x, al valor absoluto de 2x -1.

A pesar de ello, para poder representar gráficamente la función, tiene que dar valores a x para obtener valores de y.

Finalmente representa la gráfica correctamente.

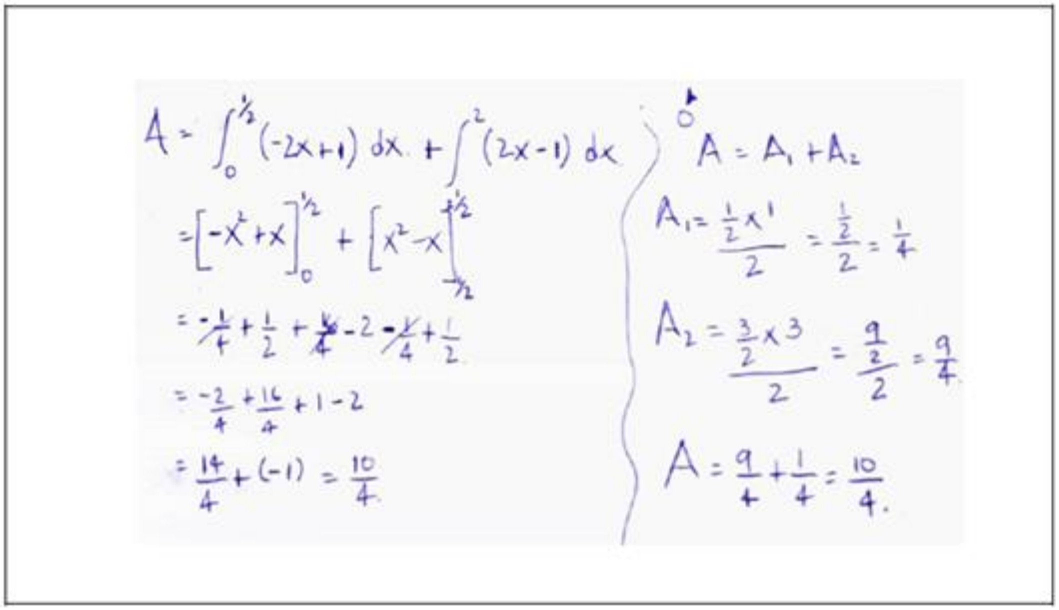
Figura 4. “A7, representación G de la tarea 4 del cuestionario.



Fuente: Aldana, E (2014)

Una vez representada gráficamente la función, el estudiante calcula el área limitada por la gráfica relacionando varios elementos matemáticos de forma A.

Figura 5.”A7, resolución A de la tarea 4 del cuestionario”.



Fuente: Aldana, E (2014)

En la columna de la derecha se puede ver cómo aplica el elemento matemático el área como aproximación ACA. A partir del gráfico calcula el área de los triángulos que conforman el área total, las suma y obtiene el área que se le pide. En la columna de la izquierda utiliza los elementos matemáticos: la integral definida (LID), propiedades de la integral definida (PID) y el teorema fundamental del cálculo (TFV). Cuando se le preguntó por la solución mediante el cálculo de las áreas de los triángulos lo justifica de la siguiente forma:

Figura 6. A7, justificación de la tarea 4.

A7: —Calculando dos integrales, una de 0 a $\frac{1}{2}$ de la función, más otra de $\frac{1}{2}$ a 2.

I: — ¿Qué figuras bajo la gráfica se formaron?

A7: —2 triángulos.

I: — ¿Cómo calcularía el área de esos 2 triángulos?

A7: —Tenemos dos triángulos, vamos a llamarlos a_1 y a_2, el triángulo a_1 tiene de base $\frac{1}{2}$ y de altura 1.

I: — ¿De dónde obtiene la altura, cómo obtiene la altura de ese triángulo?

A7: —Evaluando la función en $x = 0$, obtengo un punto.

I: — ¿Por qué en $x = 0$?

A7: —Porque el intervalo de integración es $[0,2]$, entonces necesito saber de dónde a dónde va la gráfica, y los puntos para evaluar son cuando x vale 0 y cuando x vale 2.

I: —Continué el procedimiento.

A7: — el segundo triángulo tiene de base $\frac{3}{2}$ y de altura 3, entonces el área es $\frac{9}{4}$, y el área del primer triángulo es $\frac{1}{4}$ (hace cálculos).

I: — ¿Cuál sería el área total?

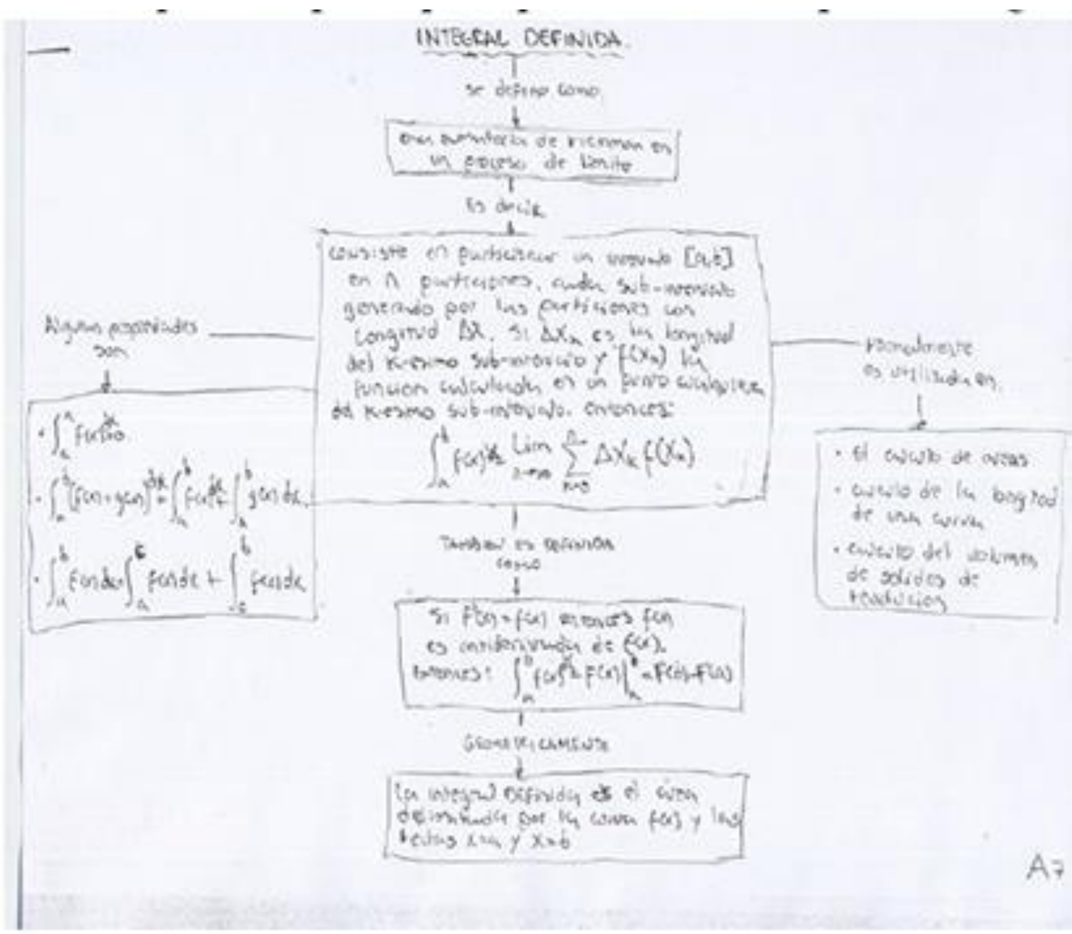
A7: —El área total seria $\frac{1}{4}+\frac{9}{4}$, la suma de las áreas de los dos triángulos esto es $\frac{10}{4}$ (A7E4).

Fuente: Aldana, E (2014)

El estudiante describe los procedimientos utilizados en el desarrollo de la tarea, y compara los valores obtenidos a partir del uso del elemento ACA y del elemento LID

en el siguiente mapa conceptual que se presenta a continuación se ponen de manifiesto los elementos matemáticos gráficos, algebraicos y analíticos que este alumno recuerda.

Figura 7. “A7, mapa conceptual que representa el concepto de integral definida”.



Fuente: Aldana, E (2014)

El aporte que genera este documento es que el estudiante al solicitarle las argumentaciones, logra relacionar

La argumentación es una forma de comunicación y diálogo para evaluar, definir y estimular producciones. De esta forma, da cuenta del aprendizaje del alumno

No todos los temas de estudio son ideales para un estudio argumentativo; un motivo es que en ocasiones se tratan de temas matemáticos que limitan los diferentes puntos de vista que puede dar el alumno; en particular, si se tratan de procedimientos o algoritmos.

La argumentación surge si se explican las actividades en clase, y los criterios del ejercicio argumentativo consistente con las metas pedagógicas. En gran parte, esto se hace evidente en las explicaciones que ofrece el docente o las ayudas externas que consigue el alumno para afianzar sus conocimientos

Orientado a la clasificación de argumentos de los estudiantes

Antolínez, L y Palacios M tienen por propósito en este artículo clasificar los argumentos logrados por estudiantes de carreras técnicas al resolver una tarea de generalización con números 4-estelares Antolínez, L y Palacios M(2013)

Se tuvo presente una población objeto de estudio de 30 estudiantes, quienes se encontraban cursando primer semestre de Educación Técnica en Ingeniería Industrial de la jornada nocturna.

Como instrumento de estudio se recolectaron los datos a través de medios audiovisuales y registros escritos de los estudiantes, posteriormente se realizó un análisis que permitió clasificar los argumentos logrados por los estudiantes durante el desarrollo de la tarea.

La propuesta de intervención se desarrolló en tres etapas: en la primera etapa se seleccionó la población objeto de estudio y se diseñaron los instrumentos de recolección de la información; en la segunda etapa, se aplicaron los instrumentos de recolección de la información en cuatro fases y en la tercera etapa, se diseñaron las categorías de análisis y se realizó el análisis de la información recolectada.

Antolínez, L y Palacios M para el proceso de generalización se apoyaron en el modelo de Toulmin, el cual según los autores de este articulo plantea que cualquier argumento debe estar conformado por una conclusión, unos datos, un garante, un respaldo, cualificadores modales y reservas. Sin embargo, ellos en pro de su trabajo únicamente se basaron en la unidad mínima de este modelo, la cual está conformada por los datos, la conclusión y el garante.

Para definir las categorías de análisis de la información es necesario previamente detallar las clases de hipótesis y de garantes que aparecen en los argumentos propuestos por los estudiantes.

De esta forma, Toulmin (2003), citado por Antolínez, L y Palacios M (2013) la hipótesis o conclusión corresponde a una afirmación que se hace con base en unos hechos observados. Para el análisis de los argumentos producidos por los estudiantes, en este trabajo se consideran las hipótesis o conclusiones desde dos tipos de casos: el particular y el general.

Por otro lado, Toulmin (2003), citado por Antolínez, L y Palacios M (2013) el garante corresponde a las proposiciones que permiten el paso de los datos a la hipótesis. Para el análisis de los argumentos producidos por los estudiantes en este trabajo, se consideran los siguientes garantes: el uso de patrón gráfico, el producido por una generalización algebraica, el producido por experimentación con ayuda de ejemplos, el producido por "observación" y el producido por manipulación algebraica.

De acuerdo con las clasificaciones establecidas anteriormente para las diferentes formas de representar los argumentos, se presentan cinco categorías de análisis: Modelo de argumento Modelo de argumento I, Modelo de argumento II, Modelo de argumento III, Modelo de argumento IV y Modelo de argumento V.

La manera en la que contribuye este trabajo es que, mediante un determinado modelo, le permite categorizar las maneras en las que los estudiantes argumentas sus respuestas con una actividad propuesta

Enfocado a los efectos del actuar docente la generación de oportunidades de aprendizaje matemático

En esta investigación Ferrer, M, Fortuni, J & Morrera, L determina cómo afecta la actuación docente en la generación de oportunidades de aprendizaje matemático. Esta investigación determina cómo afecta la actuación docente en la generación de oportunidades de aprendizaje matemático. Se realiza un estudio de dos casos que caracterizan el tipo de actuación de dos profesores en la gestión de las discusiones en gran grupo de un problema de semejanza en el plano resuelto por estudiantes de 14 y 15 años y se estudia el efecto del tipo de actuación en la generación de oportunidades de aprendizaje.

La investigación muestra un estudio experimental de casos docentes que se evidencian diferencias relevantes en la forma en la que cada profesor ha preparado las discusiones en gran grupo y se presenta una caracterización de sus episodios según dos dimensiones: instrumental y discursiva. Un análisis detallado de los episodios, mediante el estudio de las acciones que se producen en ellos, posibilita la determinación de oportunidades de aprendizaje, hecho que permite constatar una relación directa entre la preparación de la discusión en gran grupo y la generación de oportunidades de aprendizaje.

En cuanto al aporte a esta sistematización, se refiere al hecho que

La manera en la que se ejerza la labor docente, (dentro de estas labores, la explicación y lo que se involucra en ella) se verá reflejado en los resultados de los alumnos (para nuestros fines, la manera en la que ellos tengan la capacidad de argumentar) como fue uno de los casos que se evidenciaron en las conclusiones de este artículo.

Hemos evidenciado diferencias relevantes en la distribución de las acciones de participación en las dos discusiones, y hemos observado que las realizadas por los estudiantes de Luis son, mayoritariamente, observaciones empíricas y exposiciones sin argumentación utilizadas por el profesor para efectuar explicaciones más extensas. En cambio, los alumnos de Pilar desarrollan exposiciones más elaboradas porque la profesora intenta que los estudiantes construyan su propio conocimiento matemático. Además, hemos determinado que el efecto de las acciones dentro de la discusión es susceptible de generar tres tipos de aprendizaje matemático: técnico, instrumental y conceptual. (Ferrer, M, Fortuni, J & Morrera, L., 2014, pp. 401)

Enfocado al efecto del rol docente en pensamiento critico

Salas, ll. en El efecto del rol docente en la presencia del pensamiento crítico de los foros en línea en este artículo presenta los resultados de una investigación realizada (…) y su objetivo es determinar si existe una correlación entre el rol docente y la presencia del pensamiento crítico en las argumentaciones de los estudiantes en los foros de discusión. La muestra fue elegida de manera no probabilística y por conveniencia, incluyó dos grupos en diferentes períodos académicos. El curso seleccionando correspondió a uno ofertado en el nivel de maestría en la Universidad Estatal a Distancia de Costa Rica. Los foros pertenecieron a la oferta 2009 y 2010 de este curso

El enfoque metodológico utilizado en este estudio fue el análisis cuantitativo de contenidos. Este es un estudio predominantemente descriptivo.

. A partir del análisis de contenidos se clasificaron 382 extractos de los mensajes de los estudiantes y 67 extractos de los mensajes del profesor. El análisis de los mensajes de los estudiantes se fundamentó en el modelo bidimensional de Garrison, Anderson y Archer (2001) y los indicadores del pensamiento crítico de Ennis (1993). La categorización de los mensajes del profesor se basó en los roles que este puede asumir en entornos virtuales de aprendizaje, según la revisión de literatura. La investigación responde a tres preguntas: a) ¿con qué frecuencia hay presencia del pensamiento crítico en las argumentaciones de los foros en línea?; b) ¿cuál es el rol que asume el profesor al participar en los foros de discusión en línea? y c) ¿cuál es el efecto del rol docente sobre el desarrollo del pensamiento crítico en las participaciones de los estudiantes de posgrado en los foros de discusión en línea?

Como aporte a esta sistematización, en esta investigación que cuando el profesor acudió a estrategias que conllevaran a procesos de pensamiento de orden superior, como la presentación de un caso, los estudiantes buscaron argumentos dentro de la teoría y dentro del contexto cotidiano que les proveyeran las respuestas; por lo tanto, se manifestó un proceso más reflexivo y crítico (Salas, Ll, 2013, pp. 94) lo cual nos indica que según la acción docente o el rol que cumpla el docente potencia, contribuye al pensamiento crítico lo que implica en el alumno razonar y considerar evidencia que tenga disponible para solucionar problemas

Marco Conceptual

En esta sistematización estarán presentes tres unidades de análisis. La primera es referente a los temas matemáticos tales como: Radicación y números complejos la segunda corresponde a las explicaciones de los temas y la argumentación. Para cada una de las unidades de análisis se darán sus respectivos conceptos apoyados en autores

Radicación

Antes de conceptualizar la radicación, es pertinente dar cuenta del surgimiento del símbolo de la *raíz*. El símbolo que hoy utilizamos con el nombre de operador radical es introducido en 1525 por el matemático alemán Christof Rudolff, concibiendo una *r* minúscula alargada (inicial de la palabra latina *radix* que significa raíz) (Guedj, 1998). Se utiliza sin problemas de ambigüedad, pues el contexto numérico correspondía a números no negativos, pues con toda seguridad al efectuar el cálculo de 25 se obtenía 5, concibiendo el signo (u otro según la localidad geográfica) como aquel que es propio de la extracción de raíz, que como operación aritmética es llamada *radicación* (Vidal, *s.f.*).

La radicación de orden de un número es cualquier número tal que . A se le llama el índice u orden, a se le denomina radicando, y a la raíz enésima. Simbólicamente, se tiene que $\Leftrightarrow$. En esta fórmula, es un entero positivo y son reales positivos (Duarte, *s.f.*).

La radicación es una operación binaria la cual se compone de tres partes: índice ( ), radicando ( ) y raíz ( ):

Esta operación da solución a problemas que se relacionan directamente con las potencias. Para ello, es evidente que se debe considerar las propiedades y reglas que satisfacen a la radicación.

Antes de dar inicio a las reglas y propiedades de los radicales se recuerda la definición de *potenciación*: $a^n = \underbrace{a.a.a.....a}_{n-veces}$

Para n número natural y *a* número real se define la *n*- Potencia de *a* como el producto de *a* por sí misma *n*- veces; es decir, El número *a* se conoce como la base y *n* como el exponente.

Ahora, si se considera la misma base *a* y exponente de la forma con ≥ 0 y ∈ entonces en este caso se hará referencia a la operación inversa de la potenciación, siendo esta operación, la radicación.

Reglas de los radicales. Se presentan a través de la siguiente lista:

Si , a es una raíz enésima de b.

Si es par, ≥ 0 , por lo que un número negativo no puede tener raíz enésima.

Si n es par y también , así que tiene dos raíces enésimas, y - .

Si es impar, todo número real tiene exactamente una raíz enésima.

Si ≥ 0, hay una única raíz enésima no negativa de b representada por

Si ≥ 0 ∈ N a ley de exponentes fraccionarios establece que:

En el caso particular, si se tiene que: .[2]

Propiedades de los radicales. A continuación, daremos las propiedades con las cuales nos permitirán solucionar los radicales:

Raíz de un producto. El producto de dos radicales de un mismo índice es igual a la raíz del producto de los subradicales. Esto es si >0, >0 ∈ N En palabras, la raíz de un producto es igual al producto de las raíces.

Raíz de un cociente. El cociente de dos radicales de un mismo índice es igual a la raíz del cociente de los subradicales. Esto es: >0, >0, ∈ N en palabras,

---

[2] Matemáticas básicas. Radicales. http://132.248.164.227/publicaciones/docs/apuntes_matematicas/09.%20Radicales.pdf

la raíz de una fracción o cociente es igual al cociente de la raíz del numerador dividida entre la raíz del denominador (Duarte, *s.f.*).

Un radical de índice *n* elevado a una potencia m equivale a una raíz de índice y de subradical elevado a la potencia . Esto es: , >0, ∈ N

Operaciones con radicales. Las operaciones con radicales son operaciones binarias las cuales únicamente se pueden operar bajo la suma y la resta cuando los índices y los radicandos son iguales, es decir, cuando los radicales son semejantes.

Radicales semejantes. Decimos que dos radicales son semejantes si tienen el mismo índice y el mismo radicando

Simplificación de radicales. La simplificación del radical la distingue en dos casos: cuando la cantidad subradical contiene factores cuyos exponentes son divisibles por el índice, caso en que la simplificación se basa en la propiedad de “raíz de un producto” y cuando la cantidad subradical contiene factores cuyos exponentes tienen divisores comunes con el índice del radical (Vidal, nd.)

Racionalización. Racionalizar una expresión fraccionaria en la que el denominador contiene uno o varios radicales, consiste en expresarla como una fracción equivalente sin radicales en el denominador (Herrera Ruiz, 2004, pp. 47).

Racionalización de monomios para realizar el denominador, se busca que en él quede una raíz exacta. Para ello se multiplica el numerador por un radical seleccionado previamente (p. 47).

Expresión conjugada. dos expresiones con dos términos cada una, se dice que son conjugadas, si y sólo si, difieren del signo del segundo término (pp. 48).

Números complejos

Un número complejo se define como una expresión de la forma:

donde e son números reales.

Este tipo de expresión, se denomina forma binómica.

Se llama parte real de al número real , que se denota , y parte imaginaria de , al número real y, que se denota , por lo que se tiene entonces que: (Wallis, n.d.).

De los números complejos identificamos dos partes: la real y la imaginaria y con base a los siguientes casos:

Si y entonces . Por lo tanto, todo número real es un número complejo. Luego

Si y $\neq 0$ entonces . Es decir; todo número imaginario es un número complejo en el que la parte real es 0 (Herrera Ruiz, 2004, p. 60).

Igualdad de complejos. Dados dos números complejos y definimos la igualdad de y como:

$$z = w \Leftrightarrow \begin{cases} a = c \\ b = d \end{cases}$$

Operaciones con complejos. Las operaciones de suma y producto definidas en los números reales se pueden extender a los números complejos. Para la suma y el producto de dos números complejos escritos en la forma binómica: , y se tienen en cuenta las propiedades usuales del Álgebra con lo que se definen (Molero et al., s.f.).

Adición. $\in$ tal que y la adición está dada por:

en notación cartesiana (Herrera Ruiz, 2004, p. 64).

Sustracción. Si son dos números complejos,

entonces

en notación cartesiana (p. 65).

Producto.

Se comprueba que el cuadrado del número complejo es un número real negativo, –1, pues: (Molero et al., s.f.).

Explicación

Para comenzar, ¿qué se entiende por explicaciones en esta sistematización? Con relación a las explicaciones del practicante sobre temas de la matemática escolar, en esta sistematización las explicaciones se pueden entender como una serie de pasos o etapas por las cuales deben de pasar una serie de enunciados matemáticos correspondientes a los temas antes mencionados para ser expuestos de manera posiblemente más clara y concisa a los alumnas en aras de su aprendizaje .Para ello es necesario ser específico en los requerimientos que exige el tema, realizar indagaciones a los alumnas en el transcurso de la explicación, así como la utilización de ejemplificaciones y talleres para afianzar los contenidos matemáticos de manera precisa.

En el siguiente esquema representa un objeto desconocido que genera confusiones a primera vista y para ser explicado debe pasar por una secuencia de pasos para su comprensión.

Esquema prototípico de secuencia explicativa por Adam.

Figura 8. Esquema prototípico de secuencia explicativa por Adam (1992).

Fuente: Adaptado de Calsamiglia y Tusón (2001)

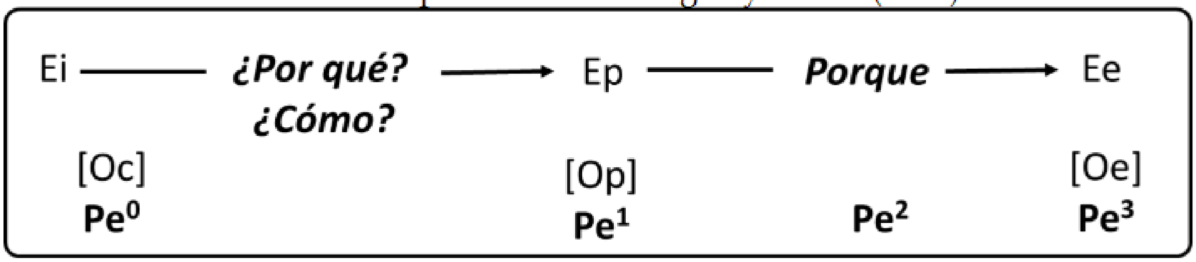


Figura 2. Esquematización discursiva Adam (1992)

Fuente: Mahecha, 2021.

"Ei es un Esquema inicial que hace referencia a un Objeto complejo [Oc]" del cual se desconoce por completo. A raíz de este, surgen interrogantes que lo convierten en un Objeto problemático [Op]; el esquema problemático [Ep] conlleva al esquema explicativo, que tiene como fin hacer comprender, conocer o explicar, es decir mediante [Ee] el Objeto complejo deberá convertirse en [Oe]: Objeto explicado (Calsamiglia y Tusón, 2001).

Dado que no se encontraron referentes que estuvieran acordes a esta sistematización, se consideró suficiente con el esquema explicativo que se acaba de

Argumentación

A continuación, se presenta algunos conceptos de distintos autores para referirse a la argumentación

Según Sarda (2003, como se citó en Gamboa, G 2009)

La argumentación es una actividad social, intelectual y verbal que sirve para justificar o refutar una opinión, y que consiste en hacer declaraciones teniendo en cuenta al receptor y la finalidad con la cual se emiten. Para argumentar hace falta elegir entre diferentes opciones o explicaciones y razonar los criterios que permiten evaluar como más adecuada la opción elegida.

Verbigracia, cuando una persona toma una determinada decisión y esta es cuestionada por otra, ella expondrá sus razones lógicas —desde su punto de vista—

considerándolas como los referentes idóneos; es decir, las premisas que le permitirán dar a conocer sus argumentos. Es de aclarar que no necesariamente la parte contraria debe estar de acuerdo y por consiguiente podría ser objeto de discusión Esto puede ser evidente en un contexto educativo cuando el docente solicita a la alumna justificar las respuestas, con lo cual la alumna tiene como propósito convencer al docente o satisfacer su requerimiento y, a su vez, el docente espera con estas dar cuenta de su aprendizaje

La argumentación es inherente de los seres humanos cuando este posee razones que para él tienen sentido su accionar frente a una determinada situación; en ese mismo sentido, esas razones las considera como las premisas que le sirven como los referentes para su razonamiento y por ende se convierte en la pieza clave para tomar su decisión. Esto puede ser evidente en un contexto educativo cuando el docente solicita justificar las respuestas de los ejercicios planteados en un parcial o taller.

Para Toulmin (1954) la función argumentativa del lenguaje y la acción de argumentar coloca de presente la racionalidad humana. Participar de una interacción comunicativa en donde se plantean y critican argumentos con un propósito definido es un rasgo característico de los seres humanos y lo razonable se evidencia en la capacidad para atender los argumentos de la parte contraria y evaluar con criterio la fuerza de una argumentación. Plantear pretensiones, someterlas a debate, ofrecer razones y datos para respaldarlas, objetar y refutar esas críticas, etc., es la actividad característica de los seres humanos (como se citó en Trujillo, 2007).

Al relacionar la argumentación con el lenguaje, en particular con el lenguaje común, podría conceptualizarse como: “Es aquel tipo de razonamiento que se halla intrínsecamente ligado al uso del lenguaje común, y su funcionamiento es congruente con el de la práctica espontánea del discurso” (Duval, en Jiménez y Pineda,2012, pp. 111).

En ese orden de ideas al conceptualizar la argumentación, menciona la importancia del lenguaje verbal en ella, y cómo este influye en la creación del discurso persuasivo

> Argumentar es hacer uso del lenguaje verbal para formar un discurso que dé cuenta de nuestras convicciones acerca de un asunto. Este discurso tiene como función fundamental convencer o persuadir, en forma razonada, a otros de las creencias personales; exige, entonces, realizar, a partir de la premisa que se tiene por cierta, construcciones que expliquen, justifiquen, relacionen y concluyan convincentemente la tesis supuesta (pp. 42).

La argumentación es un proceso que hace referencia al porqué de lo que hace el estudiante mediante la exposición de razonamientos para justificar un procedimiento matemático y ello parte de la identificación de una situación para llegar a juicios de razonamientos y análisis desde el saber matemático (Aldana, E 2014, pp. 39).

Aldana, E. (2014),[3] afirma que:

> En el ámbito de la Educación Matemática, la argumentación como estrategia de aprendizaje colaborativo *en la solución de problemas* tiene sentido para construir significado de las estructuras conceptuales para relacionar estos significados con escenarios donde potencialmente se puede utilizar la estructura matemática para leer la estructura de la matemática escolar. (pp.40)

Por otro lado, podría considerarse que, en parte, las argumentaciones se construyen creando significado de las estructuras conceptuales que son concebidas por el estudiante a raíz de las explicaciones de los temas que imparte el docente además de los conocimientos previos, y a partir de ese significado que construye obtiene las herramientas para elegir las más propicias para lograr sus fines.

Podría existir la posibilidad de realizar una analogía sobre la relación del significado que implican las argumentaciones como estrategia de aprendizaje planteada por Aldana, E. (2014) con respecto a la relación que existe entre las explicaciones y las argumentaciones que manifiesta el alumna frente a la resolución de los ejercicios del taller puesto que en ambos casos las argumentaciones surgen de unas bases conceptuales que el alumna ha adquirido y que le permiten respaldar lo que justifica en el proceso para llegar a la respuesta.

Los procesos argumentativos son importantes en relación con los procesos educativos y de formación; desde el enfoque de Toulmin (1954), la argumentación aporta diferentes formas de una definición formal, ejemplos, relaciones de un concepto con otros conceptos, contra-ejemplos y refutaciones (Toulmin, citado por Aldana, 2014, pp.40).

Entonces, podemos decir que, desde los diferentes puntos de vista de los autores existe un punto de intersección el cual la argumentación es manifestar razones o una serie

[3] Quien toma como referencia a Toulmin (1954).

de justificaciones de tipo teóricas, prácticas o ideológicas ejecutadas ya sea de manera escrita o verbal que respaldan sus respuestas según sea el contexto en el cual vive el individuo, y que para los fines de la presente sistematización estaría enfocada en las alumnas del grado 9° de la Institución Educativa San Agustín.

Argumentación y dos tipos de variantes argumentativas según Gamboa

Según Gamboa (2009) tipifica dos tipos de argumentaciones; las que se rigen sobre una base teórica y las que no lo hacen. Además de ello, apoyado en la propuesta de Duval (1999) afirma que Duval a este tipo de argumentaciones las denomina como: argumentación retórica y argumentación heurística, y que su diferenciación está en el que la primera estriba su validez en el contenido de las proposiciones y la segunda, para lograr su validez epistémica, requiere de un sustento teórico. (Gamboa, G, 2009, pp.9-10)

Teoría fundamentada

La metodología de la Teoría Fundamentada fue desarrollada por los sociólogos Barney Glaser y Anselm Strauss en 1967. Esta teoría es un método cualitativo que permite emerger una teoría o a partir del análisis de los datos recolectados por el investigador. De acurdo con Hernández R (2014) “El planteamiento básico del diseño de la teoría fundamentada es que las proposiciones teóricas surgen de los datos obtenidos en la investigación, más que de los estudios previos. Es el procedimiento el que genera el entendimiento de un fenómeno”. (pp. 493)

Ahora, al tener presente la teoría que emerge de la Teoría Fundamentada según Restrepo A (2013) “consiste en un conjunto de categorías, subcategorías, propiedades y dimensiones relacionadas entre sí, que dan cuenta de un fenómeno determinado, mediante un proceso de descripción, comparación y conceptualización de los datos” (pp. 126)

Estas categorías surgen de “identificar unidades de significado, categorizarlas y asignarles códigos a las categorías” Hernández R (2014) Adicionalmente, Para codificarlas, a parte del procedimiento de actuación del análisis de los datos, requieren de llevarlos metodológicamente a compararlos (pp. 448)

Según Barrios B (2015) en Glaser (1992) desde el punto de vista de este último:

la Teoría Fundamentada es una metodología general que utiliza el método de comparación constante, en la cual se lleva a cabo de manera simultánea la recolección de datos y la aplicación sistemática de un conjunto de métodos para generar una teoría inductiva sobre un área sustantiva

Como explica Hernández R (2014) “El investigador considera dos segmentos de contenido, los analiza y compara. Si son distintos en términos de significado y concepto, de cada uno induce una categoría, si son similares, induce una categoría común” (pp. 448)

Por otro lado, aunque la teoría fundamentada fue creada por Glaser y Strauss, según Hernández R (2014) a raíz de sus diferencias conceptuales se abrió paso a dos diseños en esta teoría: el diseño sistemático y el diseño emergente. (pp-493)

Donde el diseño sistemático, fue creado por Corbin y Strauss (2007) y presenta una determinada estructura y como proceso de análisis que incluye la codificación y la categorización. Durante en análisis se abordan codificaciones de tres tipos: codificación abierta, codificación axial y codificación selectiva. Por otro lado, considerando las diferencias entre Glaser y Strauss acerca de la concepción de la teoría fundamentada, Glaser (1992) por su parte, presenta su diseño emergente el cual tiene que ver con la recolección de los datos y con su comparación cuando éstos van surgiendo. Esa comparación de datos (análisis teórico) permite construir relaciones entre categorías para explicarlas, lo cual es en sí mismo la generación de una teoría. (Bonilla M & López A, 2016, pp-309)

En los dos diseños, se evidencia que estos autores están de acuerdo que, a partir de la codificación abierta, se generan categorías que aportan en el surgimiento de una teoría. Sin embargo, a pesar de que esta sistematización no tenga por objeto crear teoría, si tiene por objetivo hallar subcategorías que den relación con las maneras de relacionamiento entre lo que explica el practicante y las argumentaciones que ofrecen las alumnas. Por esta razón fue suficiente con implementar la codificación abierta.

Codificación abierta

Según Charmaz, (2007) “La codificación abierta resulta del examen minucioso de los datos para identificar y conceptualizar los significados que el texto contiene. Los datos son segmentados, examinados y comparados en términos de sus similitudes y diferencias” (citado en San Martin, D, 2014). En este proceso, se trata de abordar el texto, con el fin de escudriñarlo y “desnudar conceptos, ideas y sentidos” (San Martin, D,2014) que nos vayan aportando a construir categorías y subcategorías

En ese miso orden de idea, al referirnos a la codificación abierta, este tipo de codificación sistemática tras realizar el análisis de los datos, elimina las redundancias que se presentan en estos para proceder a generar categorías. (Hernández R ,2014, pp.494)

Adicionalmente, en según (Bonilla M & López A, 2016) la codificación abierta se generan códigos a partir de dos fuentes: la pre-codificación y los códigos *in vivo*. La pre-codificación son los códigos o subcategorías que se generan gracias a la subjetividad inductiva del investigador, mientras que los códigos *in vivo* son las expresiones y el lenguaje de los participantes, encontradas en las frases literales que emplearon y cuya riqueza se perdería al ubicarlas dentro de un código o porque simplemente no existe un rótulo que la abrevie. (pp.308)

Para esta sistematización los códigos *in vivo* se hicieron presentes en las entrevistas que se les realizaron a las alumnas por cada una de las temáticas.

METODOLOGIA

La metodología de esta sistematización tiene un enfoque cualitativo porque para poder identificar las relaciones existentes entre las explicaciones del practicante y las argumentaciones que ofrecen las alumnas al resolver los talleres propuestos, se requiere interpretar los datos obtenidos tanto del practicante como de las alumnas del grado noveno. Para ello se realiza una recolección de datos que se obtuvieron de dos alumnas que cumplían con la característica que favorece la recolección de los datos la cual es que mostraban disposición al argumentar sus resoluciones de los talleres. Además de ello, se tuvo en cuenta la participación real y activa en las clases.

La recolección de los datos consistió en cinco horas y media en las que hubo interacción con las participantes en un periodo de 4 meses en jornada extracurricular. Para dicha recolección, se utilizaron materiales audiovisuales; en particular, entrevistas y grabaciones de audio (con la duración antes mencionada) las cuales fueron transcritas.

Para esta sistematización se acudió a la teoría fundamentada la cual es uno de los métodos de la investigación cualitativa y que según De la Espriella R, y Gómez C (2020) "busca en los datos conceptualizaciones emergentes en patrones integrados y categorizados analizando, a través de patones rigurosos, en un proceso de constante comparación". Para el procesos analítico únicamente se consideró de la Teoría Fundamentada, la codificación abierta la cual de acuerdo con Hernández R, Fernández C & Baptista P (2003) "trata intensivamente, unidad por unidad, con la identificación de categorías que pudieran ser interesantes"; para el caso de esta sistematización la unidad fueron segmentos pertenecientes a las entrevistas realizadas a las alumnas, con las cuales en cada de estos segmentos (dotados de significado) a través de la comparación constante se indujo a categorizar y posteriormente se le asignó un código por medio de la codificación cualitativa.

Al ejecutar el procedimiento analítico de la codificación abierta, resultaron fragmentos que determinaron las categorías emergentes tras el análisis de las entrevistas realizadas por cada temática, además se determinaron o identificaron subcategorías que corresponden a las maneras de argumentación de las alumnas. Estas categorías, subcategorías y sus respectivos segmentos se ubicaron en las tablas correspondientes a cada una de las temáticas para una mejor comprensión.

DOCENCIA Y DISCUSIÓN DE RESULTADOS

En este apartado se describen dos momentos que tuvieron lugar durante la práctica pedagógica: en primer lugar, el ejercicio docente en los entornos de trabajo virtual y remoto, como una de las consecuencias del aislamiento preventivo provocado por la emergencia sanitaria del Covid-19 y, en segundo lugar, la docente de forma tradicional desde los entornos escolares presenciales.

Respecto a la inmersión en virtualidad, el rol que desempeñaba el practicante era de ser un acompañante pedagógico; con el cual trabajaba sobre el desarrollo de los talleres a través de una asesoría virtual extra jornada escolar, con el fin de contribuir en la aclaración de dudas en los procedimientos o en la verificación de lo realizado para hacer las correcciones correspondientes

En dicho acompañamiento cuando se presentaban las circunstancias u ocasiones se llevaban a cabo explicaciones adicionales cuando se manifestaban errores en la resolución de los ejercicios. Estas explicaciones estaban dirigidas únicamente a quienes estuvieran presentes en la asesoría virtual. Por último, se pudo observar que las niñas que participaban le dieron valor a ese acompañamiento porque encontraban la oportunidad para clarificar el desarrollo de la solución de los talleres planteados por el profesor titular.

Posteriormente, en el retorno a la presencialidad la actividad como practicante giró en torno a la obtención de los permisos adicionales para poder estar en interacción con las alumnas; corroborar de nuevo por el cambio de año lectivo escolar las nuevas condiciones y el grupo con el cual seguiría interactuando; las evidencias de los ejercicios resueltos por las alumnas para posteriormente solicitarles la argumentación mediante las entrevistas; además,

En ese orden de ideas, en el segundo momento de la docencia en *la presencialidad* se seleccionaron dos alumnas que se caracterizaban por estar atentas a las explicaciones, a solucionar los talleres y en ocasiones a participar en las salidas al tablero cuando se les solicitaba; con dicha disposición por parte de ellas, se procede a recolectar evidencias sobre las resoluciones de los talleres con la finalidad de poder realizar las entrevistas y reconocer las relaciones entre lo explicado por el practicante con las argumentaciones de sus resoluciones y por ende proceder a categorizar. Para identificar a las dos alumnas antes mencionadas, les asignaremos las letras y . Hay que considerar que el curso de 9°B, el cual fue elegido por el practicante para llevar a cabo la docencia en presencialidad; lo tildaban de ser indisciplinado.

El conjunto de la docencia en sus dos momentos se presentará en el primero de manera descriptiva y en el segundo además de la descripción de lo realizado se hará la discusión de los resultados.

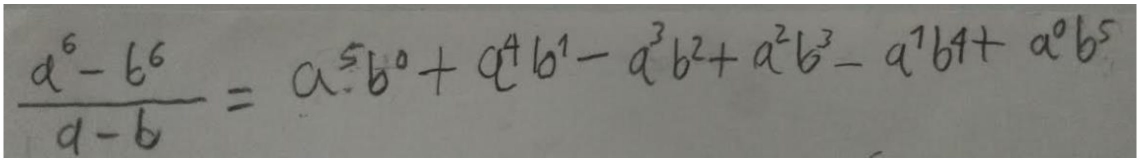
Momento de la iinmersión en la virtualidad

En las siguientes imágenes se mostrará parte de las evidencias que se recolectaron en la virtualidad con el fin de rescatar algunas de las relaciones que se presentaban entre las explicaciones y las resoluciones de las alumnas. Es importante mencionar que las argumentaciones de las soluciones no se expondrán debido a que el practicante se encontraba en la inmersión y no ejerciendo la docencia directa; además de esto, ellas solo estaban dispuestas a dar las respuestas y no a argumentar, o en ocasiones las argumentaban, pero no eran lo sufrientemente sólidas; además, cuando se les pedían aclarar o precisar lo que decían, apagaban el micrófono; esto probablemente por ser un orientador nuevo en su entorno. Por otro lado, las algunas alumnas tenían dificultades con sus cámaras y, por tanto, fue necesario solicitarles que dictarán las respuestas para transcribirlas en papel y discutir sus resultados; además, se debe aclarar que las alumnas que aportaron con sus respuestas no son las mismas con las cuales se decidió realizar la sistematización puesto que una de ellas se retiró y las otras alumnas pertenecían a distintos cursos.

Los siguientes ejercicios evidencian las respuestas de las alumnas , y frente al tema de cocientes notables. Los dos primeros ejercicios pertenecen a la alumna

Ejercicio:

Imagen 1. Ejercicio resuelto incorrectamente por

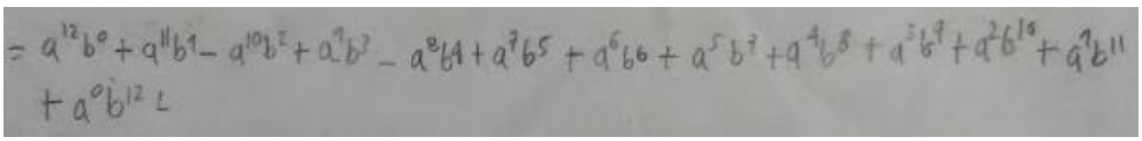


Fuente: notas de cuaderno.

Se puede observar que, de acuerdo a la explicación por parte de profesor, resuelve el ejercicio de manera correcta, es decir, disminuye correctamente los exponentes de la variable e incrementa los exponentes de la variable

Ejercicio:

Imagen 2. Ejercicio resuelto incorrectamente por

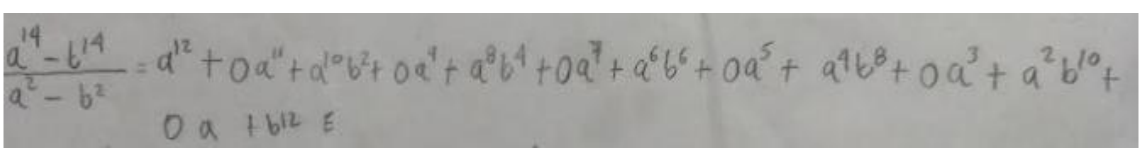


Fuente: notas de cuaderno.

Para el ejercicio del mismo taller de cocientes notables, disminuye el exponente de la variable y la variable de uno en uno, sin tener presente el valor del exponente del denominador, con lo cual incurre en un error.

El siguiente ejercicio corresponde a la alumna (Imagen 3).

Imagen 3. Ejercicio resuelto incorrectamente por la alumna



Fuente: notas de cuaderno.

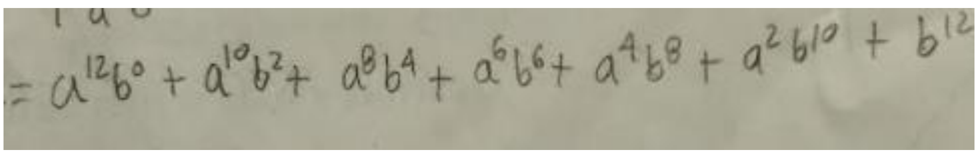
Como se puede observar en el mismo ejercicio, la alumna E en el primer monomio ausentó la segunda variable , en el segundo, cuarto, sexto, octavo, décimo y doceavo monomio les asignaba el valor de cero a la variable

Después de aclarar las confusiones que tenían, se evidencia con más claridad cómo debía ir descendiendo correctamente el exponente en el caso de la primera variable para cada término; sin embargo, respecto a la segunda variable, aunque ya tenían claro cómo debía incrementar el exponente no lograban percibir como debían inicializarlo de manera correcta.

Aunque la alumna se manifestó después que el practicante realizara las aclaraciones, menciona que mientras estaba atenta a las explicaciones, iba realizando el ejercicio por su cuenta.

El siguiente ejercicio corresponde a la alumna (Imagen 4).

Imagen 4. Ejercicio resuelto incorrectamente por la alumna



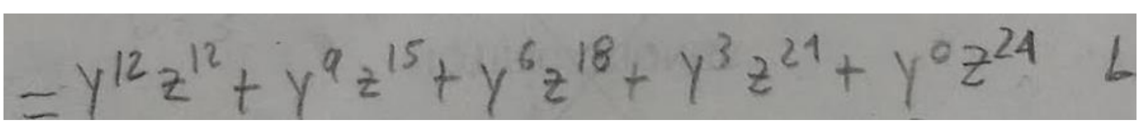
Fuente: notas de cuaderno.

En este caso, la alumna J responde de manera correcta, descendiendo y ascendiendo los exponentes de a y b.

El siguiente ejercicio corresponde a la alumna L (Imagen 5).

Ejercicio:

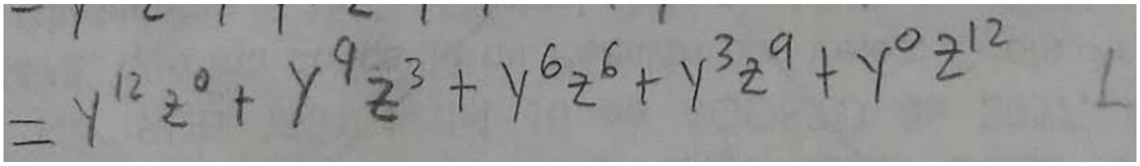
Imagen 5. Ejercicio resuelto incorrectamente por la alumna



Fuente: notas de cuaderno.

La alumna L, respecto a los exponentes de la primera variable los descendía de manera correcta, sin embargo, con los exponentes de segunda variable tenía la noción que debían ir ascendiendo, pero lo hacía de incorrectamente (Imagen 6).

Imagen 6. Evidencia del ejercicio resuelto correctamente por L.

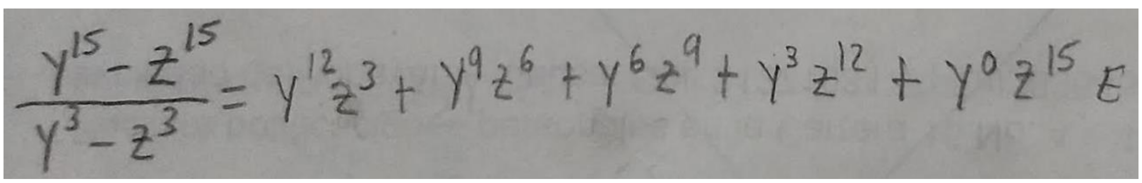


Fuente: elaboración propia.

En el mismo ejercicio, con algunas indicaciones, la alumna  logra captar su error y lo soluciona correctamente.

Ejercicio:  (Imagen 7).

Imagen 7. Evidencia del ejercicio resuelto correctamente por 



Fuente: notas de cuaderno.

La alumna E logró evidenciar de manera correcta cómo debían ir descendiendo los exponentes de la primera variable y cómo debían ir ascendiendo los exponentes de la segunda variable.

Podemos evidenciar que, con respecto a las explicaciones brindadas —en ocasiones por el practicante y en mayor medida por el docente titular — existía relación con las resoluciones que presentaban las alumnas. A raíz de las explicaciones del practicante se presentan mejoras en sus respuestas, bien sea para tener una idea más clara del tema o para la resolución total y correcta del ejercicio. Se debe aclarar que, tanto para el docente como para el practicante, la virtualidad no era el medio más propicio para generar un aprendizaje adecuado en las alumnas, puesto que, a pesar de las explicaciones por parte de los dos, en oportunidades seguían presentando dificultades; sin embargo, en un entorno educativo normalmente siempre se presentan puesto que hay algunas circunstancias como las cognitivas, económicas que afectan de manera negativa el aprendizaje y la disposición por parte del alumna.

Momento de la docencia en la presencialidad

En este apartado se describe cómo se llevó a cabo la explicación de los temas de radicación y números complejos; luego se describen las soluciones dadas por las alumnas, se expondrá sus argumentaciones y, por último, se discutirán los resultados. No obstante, antes de ello, se exhibirán algunas de las propiedades que fueron explicadas anteriormente por el docente titular de los radicales y potencias que se podrían considerar propicias para explicar los temas circundantes a estos.

1. .: producto de potencias con igual base
2. producto elevado a una potencia
3. : raíz -ésima de un número elevado a la
4. : producto de radicales con igual índice
5. : división de radicales con igual índice
6. potencia de una raíz

Temática: simplificación de radicales

Explicación

En primer lugar, se mostraron los elementos que conforman un radical. Luego, se les indaga cuál es el resultado de y el porqué de ese resultado; posteriormente, en palabras sencillas se les indicaba a las alumnas que simplificar un radical es extraer el radicando fuera del radical; y, para ello, es necesario que dividan el exponente que tiene el radicando, entre el índice de la radical. Sin embargo, resulta importante tener presente que:

- El exponente del radicando coincida o sea igual que el índice del radical
- El exponente del radicando sea mayor que el índice del radical

- En caso de que se cumpla la segunda condición, pero a su vez no sea divisible entre el índice; el exponente se debe descomponer en factores divisibles entre dicho índice.

Por otro lado, se presentan dos ejemplos con sus pasos tomados del libro guía:

1. Dado que los radicandos se están multiplicando, implica que comparten la misma raíz, por consiguiente, se procede por aplicar la propiedad de raíz de un producto.

Como tienen índice tres, se descomponen los exponentes en factores divisibles en tres.

Ahora, con lo que resulta se aplica nuevamente la propiedad de raíz de un producto.

Se simplifican los términos posibles.

Se asocia y se conmutan los términos ya simplificados.

Para concluir, nuevamente por propiedad del producto de dos radicales de igual índice, los radicandos y se adjunta en un mismo radical.

Se solucionó el primer ejercicio con explicaciones dadas por el practicante.

Para el segundo ejercicio, se indagó entre las alumnas los pasos que se deben seguir para la resolución del ejemplo. Si había disposición, se les solicitaba salir al tablero con lo cual se dio cuenta de cómo se estaba entendiendo el tema; al mismo tiempo se preguntó a las demás compañeras si se encentraban de acuerdo con tal solución y escuchar o ver si salían al tablero otro tipo de soluciones.

1. propiedad de la potencia de una raíz.

producto elevado a una potencia.

producto de potencias de igual base.

resultado simplificado.

Para determinados ejercicios de simplificación de radicales fue necesario orientar su solución con ejemplificaciones; un caso trabajado es el siguiente ejercicio que contenía el producto notable

En el anterior ejercicio , de simplificación de radicales, fue necesario recordar que el producto notable es equivalente a . Es decir, debían considerar las variables y del producto notable y reemplazar y en la equivalencia.

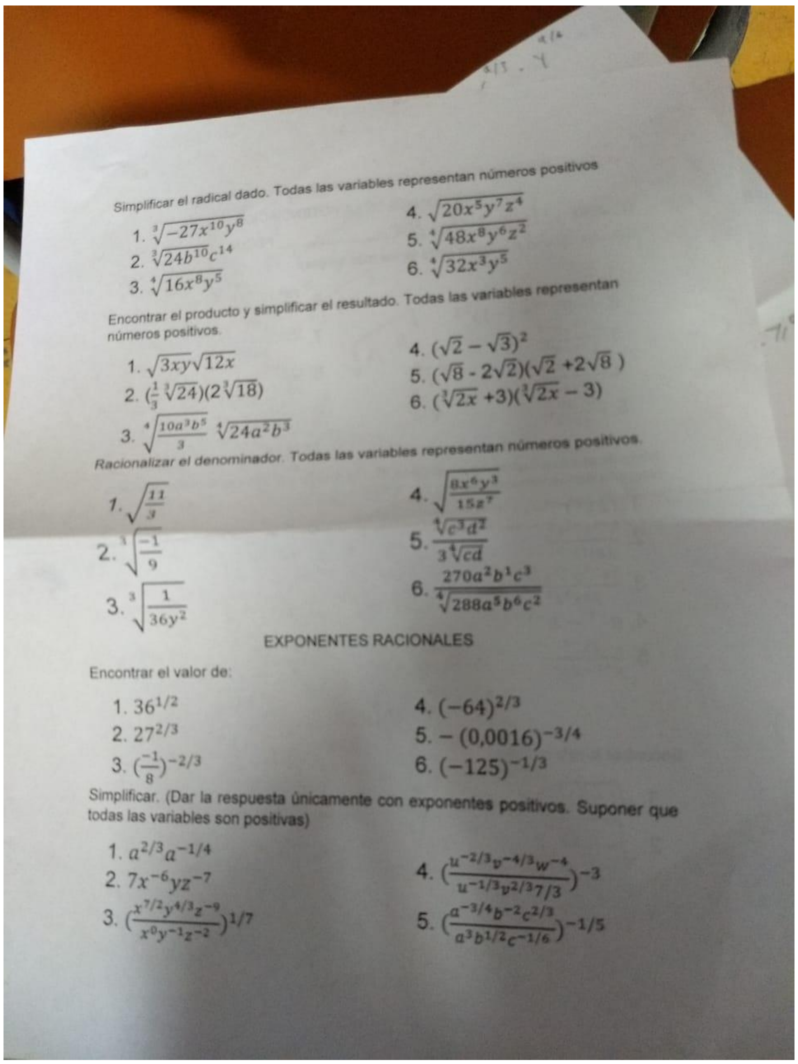
El mismo ejercicio anterior puede ser solucionado de la siguiente manera: , aplicamos la propiedad del producto de exponentes con igual base, dado que la expresión algebraica o el factor es una de ellas . , aplicando la ley distributiva con cada término de los factores. Obteniendo . Lo que sigue es operar términos semejantes, que son:

Respecto a los ejemplos, el practicante se hacía a cargo totalmente del primer ejemplo de manera detallada y posteriormente para el siguiente ejemplo, solicitaba la participación de las alumnas para resolverlo. Esta metodología se llevaba a cabo para todas las temáticas que se abordaron en el segundo periodo académico a cargo del practicante

Por otro lado, considerando el esquema secuencial elaborado por Grize (1997), la simplificación de radicales, como título ocupa la posición , o también es lo que hace referencia al objeto complejo . Los posibles interrogantes que se pueden generar como: ¿por qué recuerda las partes del radical? ¿cuál es motivo que ?¿cuál es la relación o que tiene que ver las partes del radical, para la solucionar una simplificación de radicales? ocupan la posición lo que significa que el objeto complejo pasa a ser un objeto problemático . Partiendo de todos los procesos que se ejecutan en cada explicación y las indagaciones que se les hacen a las alumnas en el transcurso de estos, ocupan la posición , es decir con estas acciones se da lugar a la explicación. Finalmente, con base a lo anterior en la posición el objeto complejo [Oc] se convierte en un objeto explicado [Oe], es decir comprensible.

En la Imagen 8 se observa la hoja de ejercicios de los temas de simplificación de radicales y racionalización de monomios.

Imagen 8. Hoja de ejercicios. Simplificación y racionalización.



Simplificar el radical dado. Todas las variables representan números positivos

1. $\sqrt[3]{-27x^{10}y^8}$
2. $\sqrt[3]{24b^{10}}c^{14}$
3. $\sqrt[4]{16x^8y^5}$
4. $\sqrt{20x^5y^7z^4}$
5. $\sqrt[4]{48x^8y^6z^2}$
6. $\sqrt[4]{32x^3y^5}$

Encontrar el producto y simplificar el resultado. Todas las variables representan números positivos.

1. $\sqrt{3xy}\sqrt{12x}$
2. $(\frac{1}{3}\sqrt[3]{24})(2\sqrt[3]{18})$
3. $\sqrt[4]{\frac{10a^3b^5}{3}}\sqrt[4]{24a^2b^3}$
4. $(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2$
5. $(\sqrt{8}-2\sqrt{2})(\sqrt{2}+2\sqrt{8})$
6. $(\sqrt[3]{2x}+3)(\sqrt[3]{2x}-3)$

Racionalizar el denominador. Todas las variables representan números positivos.

1. $\sqrt{\frac{11}{3}}$
2. $\sqrt[3]{\frac{-1}{9}}$
3. $\sqrt[3]{\frac{1}{36y^2}}$
4. $\sqrt{\frac{8x^6y^3}{15z^7}}$
5. $\frac{\sqrt[4]{c^3d^2}}{3\sqrt[4]{cd}}$
6. $\frac{270a^2b^1c^3}{\sqrt[4]{288a^5b^6c^2}}$

EXPONENTES RACIONALES

Encontrar el valor de:

1. $36^{1/2}$
2. $27^{2/3}$
3. $(\frac{-1}{8})^{-2/3}$
4. $(-64)^{2/3}$
5. $-(0{,}0016)^{-3/4}$
6. $(-125)^{-1/3}$

Simplificar. (Dar la respuesta únicamente con exponentes positivos. Suponer que todas las variables son positivas)

1. $a^{2/3}a^{-1/4}$
2. $7x^{-6}yz^{-7}$
3. $(\frac{x^{7/2}y^{4/3}z^{-9}}{x^0y^{-1}z^{-2}})^{1/7}$
4. $(\frac{u^{-2/3}v^{-4/3}w^{-4}}{u^{-1/3}v^{2/3}7/3})^{-3}$
5. $(\frac{a^{-3/4}b^{-2}c^{2/3}}{a^3b^{1/2}c^{-1/6}})^{-1/5}$

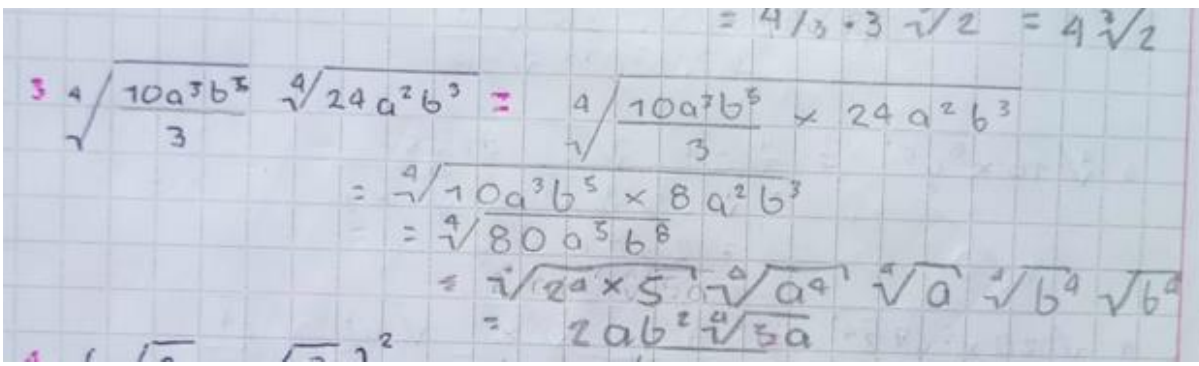
Fuente: taller elaborado por el docente titular.

De la hoja de ejercicios se presentan las soluciones del tema simplificación de radicales. Las siguientes soluciones pertenecen a la alumna que son descritas por el practicante, luego se dan a conocer las argumentaciones de la alumna a raíz de una serie de indagaciones y, con base a ellas, se reconocerán las relaciones que existan con las explicaciones dadas por el practicante. De manera análoga, se hará el mismo proceso con los ejercicios de y esta misma estructura de discusión de resultados se realizará para cada tema enseñado.

Discusión de los resultados obtenidos de la primera hoja de ejercicios.

Ejercicio a: (Imagen 9).

Imagen 9. Evidencia de



Fuente: notas del cuaderno de la alumna D_1.

En la primera línea, procede a usar la propiedad del producto de radicales para expresar todos los términos en un solo radical de igual índice, luego en la segunda fila simplifica 24 con 3; de esta manera en la tercera igualdad, por la propiedad conmutativa, ha obtenido el producto de 10 con 8, además por la propiedad del producto de potencias de igual base, realiza el producto de las variables y . En la cuarta línea, separa cada radicando con su respectiva raíz por la propiedad del producto de radicales y al mismo tiempo en el primer radical, 80 lo descompone en factores primos, y los exponentes de los radicandos y los descompone en factores divisibles entre 4 con la finalidad que en la última igualdad puedan ser simplificados; de esta manera obtiene

Se presentan una serie de indagaciones a la alumna para conocer los argumentos que tiene frente a la simplificación del ejercicio propuesto.

R1 - F: Por favor, me puedes explicar cómo realizaste cada paso.

R2 – **:** en el primer igual, multiplico las letras dejándolas en una misma raíz.

R3 -F: ¿Recuerdas cómo se llaman esas "letras?

R4 – **:** radicandos

R5 - F: ¿Cómo sé que puedo aplicar la propiedad que tú me mencionas?

R6 – **:** porque primero deben haber dos raíces que se multiplican y estas deben tener el mismo número que tiene la raíz.

R7 - F: la propiedad de la cual hablamos se llama producto de radicales y "el número que tiene la raíz" se le denomina índice, además que cuando hablamos de raíz nos referimos al resultado y radical se le llama al símbolo. ¿Ahora, que ocurre en la segunda igualdad?

R8 – **:** le saco tercera a 24 que se encuentra en la parte de arriba para obtener  y así en la siguiente parte tengo 

R9 - F: ¿Cómo llegas a la tercera fila?

R10 – **:** multiplicó 10 por 8,  con  y  con  y así logro llegar a la respuesta.

R11 - F: ¿Cómo o por qué obtienes ?

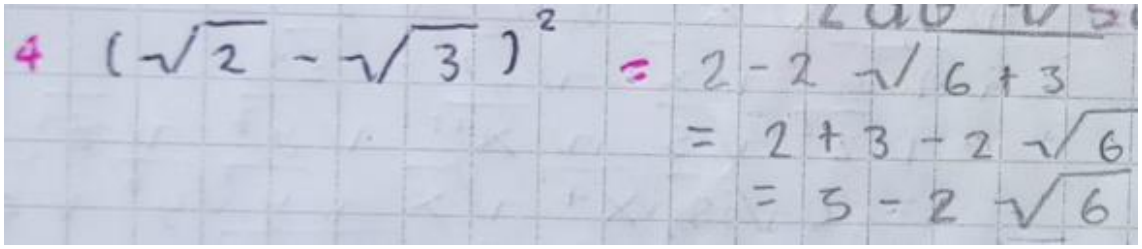
R12 -**:** Porque el profesor Efrén nos explicó que cuando se tenían iguales bases y estas se están multiplicando, los exponentes se suman.

R13 - F: ¿Cómo obtienes en la cuarta igualdad  y porque separas  y ?¿Cuál es el fin?

R14 – **:** Descompongo en factores primos 80 y separo las raíces por la propiedad de la multiplicación de los radicales y para simplificar un radical, el exponente del radicando debe ser mayor que el índice del radical, y si es así, se divide el exponente entre el índice, debíamos de descomponer el exponente del radicando en factores divisibles de acuerdo al índice. Así , , y el otro son divisibles entre 4. Que es el índice de la raíz. Y los demás quedan por dentro de la raíz.

Ejercicio b:

Imagen 10. Evidencia de



Fuente: notas de cuaderno de la alumna D1.

Inicialmente toma como primer factor y como segundo factor y posteriormente desarrolla la equivalencia. En la primera igualdad se evidencia que ya ha obtenido el resultado del cuadro del primer término que es 2, resuelve el producto de resultándole y, por último, en la misma igualdad le adiciona el cuadrado del segundo término que es 3. Las potencias 2 y 3 han sido obtenidas de la propiedad de potencia de una raíz. En la segunda igualdad aplica la propiedad conmutativa para tomar como sumandos las dos potencias obtenidas y sustraerles . Por último, obtiene la suma de las dos potencias y deja expresado la diferencia .

Se presentan una serie de indagaciones a la alumna para conocer los argumentos que tiene frente a la simplificación del ejercicio propuesto.

R1 - F: Por favor, puedes argumentarme como realizaste cada paso.

R2 – : según lo que he entendido, elevó a la dos y me da . Le resto y le sumo 3.

R3 - F: ¿Por qué elevas al cuadrado y como obtienes ¿¿cómo obtienes ? Y por último ¿de qué procedimiento resulta 3?

R4 – [redacted]: según lo que nos dijo es que [redacted] y [redacted] y al otro lado de la igualdad se tiene que elevar a la dos, a [redacted] y de último a [redacted]. Y de una de las propiedades de los radicales que vimos, el dos que está elevado por fuera de la raíz, se mete dentro de la raíz para quedar como exponente del número que está ahí dentro y como ese dos coincide con el índice, se simplifica y queda 2; y el [redacted] me da 3 porque la potencia dos ingresa como exponente al radicando 3 y es por eso que me queda 2 y 3, además como 2, [redacted] y [redacted] se están multiplicando según esa fórmula, entonces me queda [redacted]

R5 – F: Muy bien, puedes continuar por favor.

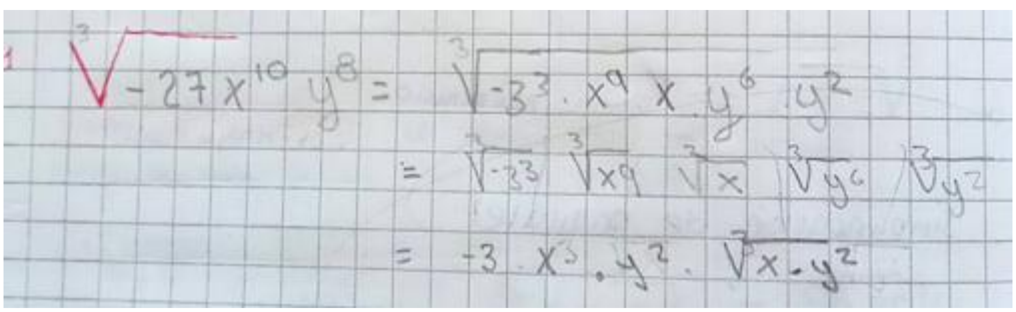
R6 – [redacted]: en el siguiente paso, el tres lo pasó a sumar con el dos y dejó [redacted] y luego me queda [redacted]

Las siguientes respuestas corresponden a la alumna [redacted].

Ejercicio c: [redacted]

Análisis de resultados

Imagen 11. Evidencia de [redacted]



Fuente: notas de cuaderno de la alumna D_2.

En el primer paso identifica la equivalencia de -27 es [redacted], luego la alumna descompone los exponentes en factores divisibles en 3, puesto que es el valor del índice del radical. En ese orden de ideas, el factor divisible para la variable [redacted] es 9 y 6 para la variable [redacted], además que son los valores más cercanos a su respectivo exponente. Posteriormente, en la segunda fila, separa los radicales por la propiedad del producto de radicales de igual índice y de esta manera en la última igualdad, realiza la simplificación con los radicandos que se han podido simplificar.

Se presentan una serie de indagaciones a la alumna [redacted] para conocer los argumentos que tiene la alumna frente a la simplificación del ejercicio propuesto.

R1 - F: Cuéntame por favor, dime como hiciste cada paso.

R2 – [redacted]: descompongo el -27 en factores primos, para que me quede -[redacted], también descompongo el exponente de [redacted] en un número divisible entre 3 más grande y cercano a 10 porque a eso es lo que está elevado [redacted], o sea en [redacted] y lo mismo hago con [redacted] y me queda [redacted] .

R3 - F: ¿por qué realizas este procedimiento?

R4 – [redacted]: lo hago porque el exponente 3 de -27, el exponente 9 de [redacted] y el exponente 6 de [redacted], se pueden dividir entre el índice de la raíz que es tres y así, más adelante puedo simplificar estos números

R5 - F: ¿Qué ocurre con la segunda igualdad?

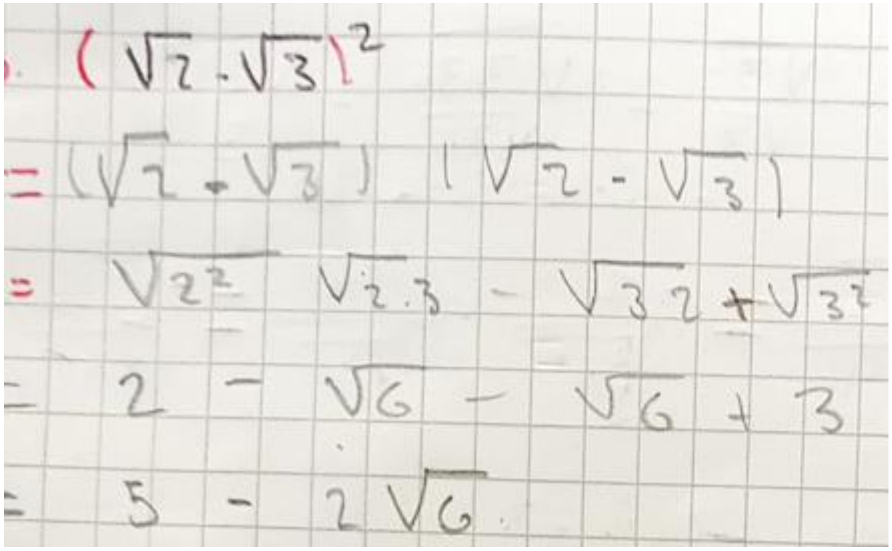
R6 – [redacted]: Separo las raíces por lo que cada radicando se está multiplicando. En el siguiente paso, simplificó el exponente tres de menos tres, el exponente 9 de [redacted] y el exponente de 6 de [redacted] con el índice de la raíz.

R7 - F: Cuando concluyes tu respuesta, ¿por qué no extraes los demás radicandos, además, porque la raíz cúbica de -27 es -3?

R8 – [redacted]: en clase nos dijo que para poder simplificar un radical, el índice de la raíz debía ser menor que el exponente del radicando y en el caso de x, una de ellas tenía exponente 1, y para [redacted], una de ellas tenía exponente 2 y la raíz de -27 es -3 porque al descomponer en factores primos -27 me da [redacted] es igual a [redacted]

Ejercicio b: [redacted]

Imagen 12. Evidencia de [redacted]



Fuente: notas de cuaderno de la alumna D_2.

Para este ejercicio, en la primera igualdad [redacted] ejecuta la propiedad de potencias con igual base, considera evidentemente una de las bases [redacted]. En la segunda fila, utiliza la ley distributiva con los términos del binomio. En esta igualdad con el primer monomio y el cuarto monomio, emplea la ley de los radicales. Raíz de una potencia, el segundo y tercer monomio por existir un producto de dos radicales de igual índice, los radicandos 2 y 3 ingresan a la misma raíz a operar bajo la multiplicación. En la tercera igualdad, ha simplificado el primer y cuarto monomio y al mismo tiempo ha obtenido el producto que se genera en el segundo y tercer monomio. En la última igualdad, asocia las raíces 2 y 3 para sumarlas y conseguir 5 y simultáneamente opera bajo la resta [redacted] finalmente obtener [redacted]

Se presentan una serie de indagaciones a la alumna para conocer los argumentos que tiene la alumna frente a la simplificación del ejercicio propuesto.

R1 - F: Por favor, puedes explicarme cómo realizas cada paso.

R2 – [redacted]: Según su explicación, [redacted] era como si se tratara de una sola variable con exponente uno, entonces como estaba al cuadrado significa que se estaba multiplicando por el mismo. En el siguiente paso, distribuí multiplicando [redacted], con el otro [redacted], otra vez el [redacted] con [redacted]. Luego [redacted] con el segundo [redacted] y por último [redacted] con [redacted]. Así, al tener los índices del radical iguales, se multiplican los radicandos y me queda [redacted].

R3 - F: ¿Qué ocurre con la tercera igualdad?

R4 – [redacted]: me queda 2 porque el exponente de él coincide con el índice del radical y así se simplifica, [redacted] de la multiplicación que dije y me queda [redacted] por la misma razón que me dio 2 y así, al final me queda [redacted].

A raíz del conjunto de los anteriores registros, los cuales están constituidos de tres ejercicios resueltos por dos alumnas y las entrevistas que dan cuenta de las argumentaciones que ellas dan de estos, se presenta la siguiente tabla que contiene algunos fragmentos seleccionados de las entrevistas que dieron paso a categorías emergentes. Para obtener estas categorías se ejecuta únicamente para el análisis de los resultados, la codificación abierta que hace parte del procedimiento de análisis de la teoría fundamentada, con la finalidad de evidenciar la relación existente entre lo que explica el practicante en relación con las argumentaciones que brindan las alumnas.

En las filas de la tabla, se ubican las dos categorías emergentes y en las columnas se ubican algunas líneas o fragmentos seleccionados de las entrevistas.

Tabla 1. Tabla de codificación abierta- simplificación de radicales

<table>
<tr><td colspan="4">Argumentaciones</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Categorías</td><td colspan="2">Resoluciones</td><td rowspan="2">Subcategorías</td></tr>
<tr><td>Alumna [redacted]</td><td>Alumna [redacted]</td></tr>
<tr><td>Con sustento teórico</td><td>R2–[redacted]: en el primer igual, multiplico las letras dejándolas en una misma raíz.

R4-[redacted]: Y de una de las propiedades de los radicales que</td><td>R6 – [redacted]: Separo las raíces por lo que cada radicando se está multiplicando.

R1-[redacted]al tener los índices del radical iguales, se multiplican los radicandos y me</td><td>Jdp: justifica o describe lo que se involucra en la resolución; es decir propiedades y/o el proceso que realizo en el paso.</td></tr>
</table>

	vimos**, el dos que está elevado por fuera de la raíz, se mete dentro de la raíz para quedar como exponente del número que está ahí dentro** **R12 - :** Porque el profesor Efrén nos explicó **que cuando se tenían iguales bases y estas se están multiplicando, los exponentes se suman.** **R6 – :** porque primero **deben haber dos raíces que se multiplican y estas deben tener el mismo número que tiene la raíz**. **R8 – :** le saco tercera a 24 que se encuentra en la parte de arriba para obtener y así en la siguiente parte tengo **R10 – :** multiplicó 10 por 8, con y con y así logro llegar a la respuesta. **R14 – :** Descompongo en factores primos 80 y separo las raíces por(…)	queda . **R4 –** : me queda 2 porque el exponente de él coincide con el índice del radical y así se simplifica, **R4 –** : se pueden dividir entre el índice de la raíz que es tres y así, más adelante puedo simplificar estos números **R6 –** : simplificó el exponente tres de menos tres, el exponente 9 de y el exponente de 6 de con el índice de la raíz	

	R4 – : y como ese dos coincide con el índice, se simplifica y queda 2; y el me da 3		
	R14–: para simplificar un radical, el exponente del radicando debe ser mayor que el índice del radical, y si es así, se divide el exponente entre el índice, debíamos de descomponer el exponente del radicando en factores divisibles de acuerdo al índice.		Etg: expresa en términos generales de que consta el tema recientemente explicado
	R14 – -para simplificar un radical, el exponente del radicando debe ser mayor que el índice del radical, y si es así, se divide el exponente entre el índice, debíamos de descomponer el exponente del radicando en factores divisibles de acuerdo al índice. Así , , y el otro son divisibles entre 4. Que es el índice de la raíz. Y los demás quedan por dentro de la raíz. **R2 –** : según lo que he entendido,	**R2 –** : descompongo el -27 en factores primos, para que me quede -, también descompongo el exponente de en un número divisible entre 3 más grande y cercano a 10 porque a eso es lo que está elevado , o sea en y lo mismo hago con y me queda . **R8 –** : en clase nos dijo que para poder simplificar un radical, el índice de la raíz debía ser menor que el exponente del	Asve: argumenta de forma similar como se expresó verbalmente el practicante en la explicación del objeto de estudio

	elevó a la dos y me da . Le resto y le sumo 3. **R4 –** : según lo que nos dijo es que y y al otro lado de la igualdad se tiene que elevar a la dos, a y de último a . **R6 –** : en el siguiente paso, el tres lo pasó a sumar con el dos y dejó y luego me queda	radicando y en el caso de x, una de ellas tenía exponente 1, y para , una de ellas tenía exponente 2 **R2 –** : Según su explicación, era como si se tratara de una sola variable con exponente uno, entonces como estaba al cuadrado significa que se estaba multiplicando por el mismo. En el siguiente paso, distribuí multiplicando , con el otro , otra vez el con . Luego con el segundo y por último con .	
	R12 – : se tenían **iguales bases** y estas se están multiplicando, los **exponentes** se suman. **R14 –** : para simplificar un radical, **el exponente del radicando** debe ser mayor que **el índice del radical.** **R4 –** : porque la potencia dos ingresa como exponente	**R4 –** **: el exponente** 9 de y el exponente 6 de , se pueden dividir entre **el índice del radical** que es tres **R6 –** : por lo que cada **radicando** se está multiplicando. **R2 –** : como si se tratara de una **sola variable** con **exponente** uno	Cdom: le concede las denominaciones correctas a los objetos matemáticos

Sin sustento teórico	**R2 –** :en el primer igual, multiplico **las letras** dejándolas (…) **R6 –** :porque primero deben haber dos raíces que se multiplican y estas deben tener **el mismo número que tiene la raíz.** **R4 –** : el dos que está elevado por fuera de la raíz, se mete dentro de la raíz para quedar como exponente **del número que está ahí dentro**.		Ndom: no le concede las denominaciones correctas a los objetos matemáticos

Las dos categorías emergentes están constituidas por dos tipos de argumentaciones: argumentación heurística y argumentación retorica; argumentaciones que están especificadas en el marco teórico. Con respecto a la argumentación heurística hizo posible verificar que las alumnas se apoyan en un sustento teórico cuando dan sus argumentaciones que provienen de las explicaciones dadas por el practicante.

Al examinar las argumentaciones clasificadas en el tabla, se pueden reconocer subcategorías que corresponden a las maneras de argumentar las alumnas y ; subcategorías que están relacionadas con la argumentación heurística.

Temática: racionalización de monomios.

Explicación

En el tema de racionalización de monomios se acude a recordar la propiedad de producto de radicales y división de radicales. Luego se señala que racionalizar una fracción consiste en obtener un equivalente sin radicales en el denominador y de igual manera es válido para el caso que se sugiera racionalizar el numerador. En palabras sencillas se les indica que consiste en dejar expuesto el numerador o denominador sin radicales o “desaparecer la raíz” siempre y cuando, de una manera matemáticamente adecuada. Y para ello debían de multiplicar el numerador y el denominador por el factor racionalizante

Para la clarificación del tema, se presentan dos ejemplos propios, los cuales son:

1.
2.

Solución de:

se tiene presente que el factor racionalizante es y con él, se debe multiplicar el numerador y denominador.

Por la propiedad del producto de fracciones y radicales de igual índice, además del producto de potencias de igual base, en particular, en el denominador resulta con radicando .

luego, el exponente de valor 2 de la variable , se simplifica con el índice del radical, lo cual permite racionalizar el denominador.

Se solucionó el primer ejercicio con explicaciones dadas por el practicante.

Para el segundo se les indagó acerca de los pasos que se deben seguir para la resolución del ejemplo.

Solución de:

el factor racionalizante es ; porque al radical al que vamos a racionalizar tiene como radicandos 2 y la variable ; donde el radicando 2 tiene como exponente 1 y la variable tiene como exponente 3, y por parte del 2 le haría falta un exponente con valor de tres; y por parte de la variable le haría falta un exponente con valor de uno. De esta manera al obtener el producto de ellos sus exponentes coincidirán con el índice 4 del radical a racionalizar, por esta razón , se debe multiplicar el numerador y denominador por

se empleó el producto de fracciones y la propiedad del producto de dos radicales con igual índice, además del producto de potencias de igual base, de lo cual el radicando del denominador queda como .

, luego, el exponente de valor 4 del coeficiente numérico 3 y el de la variable con ese mismo valor, se simplifica con el índice del radical, lo cual permite racionalizar el denominador.

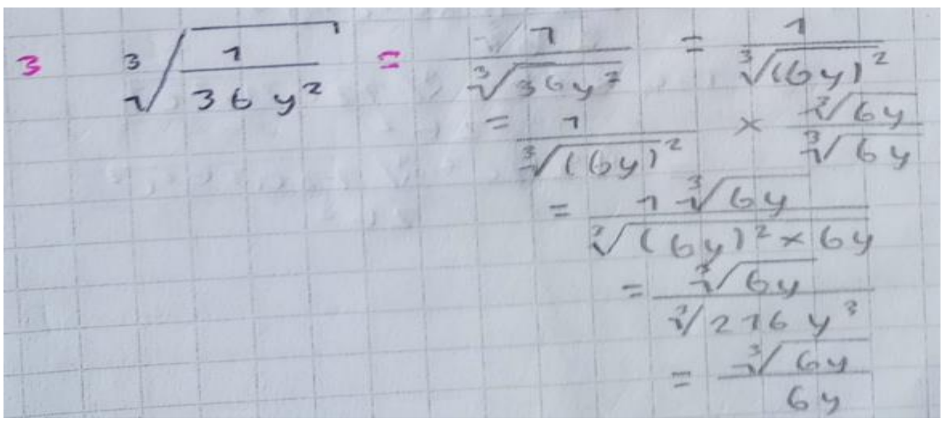
Por otro lado, considerando el esquema secuencial elaborado por Grize (1997) racionalización de monomios, como título ocupa la posición o también es lo que hace referencia al objeto complejo . Los posibles interrogantes que se pueden generar de ¿Por qué recuerda las propiedades de los radicales y los exponentes? ¿Qué es racionalizar? ¿Qué es el factor racionalizante? ¿Qué función tiene para racionalizar monomios?, ocupan la posición lo que significa que el objeto complejo pasa a ser un objeto problemático . Partiendo de todos los procesos que se ejecutan en cada explicación y las indagaciones que se les hacen a las alumnas en el transcurso de estos, ocupan la posición es decir con estas acciones se da lugar a la explicación. Finalmente, con base a lo anterior en la posición el objeto complejo [Oc] se convierte en un objeto explicado [Oe] , es decir *comprensible.*

Los siguientes ejercicios abarcarán las soluciones y las argumentaciones del presente tema y pertenecerán a la alumna . Por otro lado, se les harán sus respectivos análisis y en seguida la justificación de la alumna. De manera análoga, se hará el mismo proceso con los ejercicios de la alumna

Los siguientes ejercicios pertenecen a la alumna y se hará su respectivo análisis (Imagen 13).

Ejercicio a:

Imagen 13. Evidencia de



Fuente: notas de cuaderno de la alumna D_1.

La alumna de antemano sabe que la raíz cúbica de 1 es 1 y no ve la necesidad en la primera igualdad de continuar simbolizando con la radical. En la segunda línea emplea la propiedad del producto de distintas bases e igual exponente, con la cual reemplaza el radicando del denominador por con la finalidad que en la tercera y cuarta fila al multiplicar al numerador y denominador por con el objetivo que mediante las propiedades de producto de radicales y producto de potencias de igual base, pueda resultarle en la quinta igualdad como radicando y posteriormente identificar que la raíz cúbica de 216 es 6 y simplificar en el denominador para concluir la racionalización de este.

Se presentan una serie de indagaciones a la alumna para conocer los argumentos que tiene la alumna frente a la racionalización del monomio:

R1 - F: ¿para ti, que significa racionalizar?

R2 - :para racionalizar la idea es que el radical desaparezca de manera conveniente.

R3 - F: ¿cuál sería esa manera?

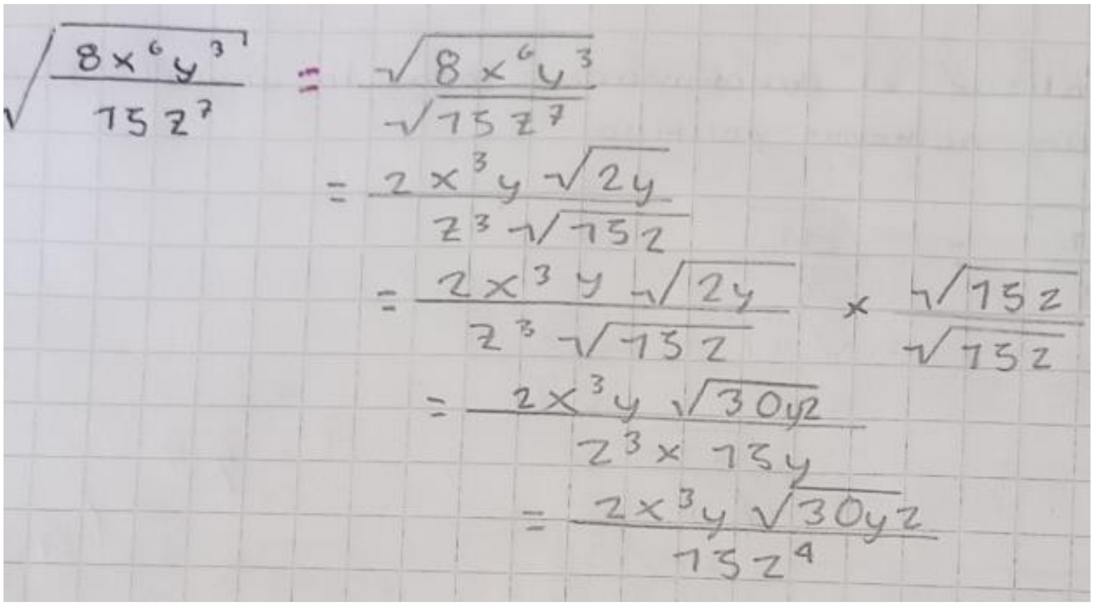
R4 – : Multiplicar por un radical en el numerador y denominador que permita que el exponente del radicando coincida con el índice del radical y de esta manera que se pueda desaparecer el radical.

R6 - F: Muy bien. Recuerda que el radical que tu mencionas se llama factor racionalizante. Continua, por favor.

R7 – : La verdad para este ejercicio le pedí ayuda a mi hermana. Para ello decía que era igual a 36, entonces en el radical me iba a quedar y que por una propiedad de los exponentes era lo mismo que . Con esto solo haría falta multiplicarlo por en el numerador y denominador. Con esa idea ya le dije a mi hermana que podía continuar sola con el ejercicio. Así, en el igual . Descompuse 216 y me dio , pero en la última igualdad decidí no ponerlo y pasar directamente a la respuesta simplificando el exponente 3 de en el denominador y por tanto ha quedado racionalizado, y en el numerador queda lo mismo.

Ejercicio b:

Imagen 14. Evidencia de .

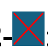


Fuente: notas de cuaderno de la alumna D_1.

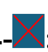
En la primera igualdad, emplea la propiedad de división de radicales para separar los radicandos con su respectiva raíz. Luego, en la segunda línea, simplifica el radical del numerador y el radical del numerador con el fin de que en la siguiente tercera igualdad toma como factor racionalizante , de esta manera en la cuarta línea ha realizado el respectivo producto de radicales con la finalidad de obtener la racionalización. Sin embargo, en esa misma línea en el denominador ya ha racionalizado, por descuido en vez de colocar  coloca , sin embargo, al finalizar la respuesta, lo hace de manera correcta.

Se presentan una serie de indagaciones a la alumna para conocer los argumentos que tiene la alumna frente a la racionalización del monomio.

R1-F: ¿Cómo realizaste los pasos para obtener la respuesta?

R2-: separo las raíces.

R3-F: ¿Qué te permite separar las raíces?

R4-**:** por una propiedad que vimos en clase que cuando se trata de un fraccionario si el numerador y denominador tienen igual índice, se puede separar los radicales. Después, como sabía que  es igual a 8, que también que [redacted] es igual a [redacted] y que [redacted] es igual a [redacted]entonces así, para la siguiente igualdad he simplificado los exponentes con el índice de la raíz y, luego, en la siguiente igualdad multiplico al fraccionario arriba y abajo por [redacted] .

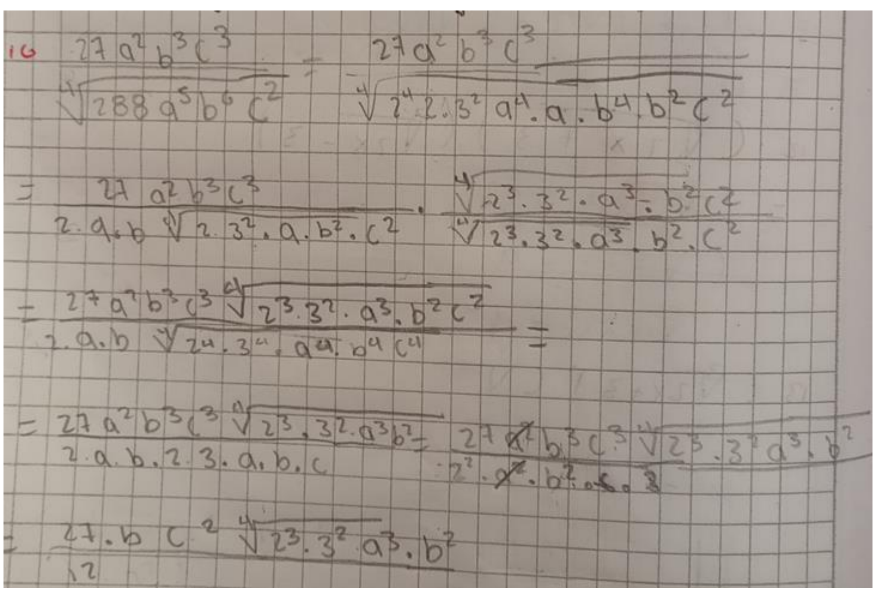
R5-F: ¿Por qué al factor racionalizante su radicando no lo elevas a otro exponente distinto de uno?

R6-[redacted]: porque cuando multiplico los dos denominadores, me quedaria [redacted] y así se simplifica el número que esta elevada la raíz con el exponente y ya queda libre de radical [redacted] que es lo que ocurre en la antepenúltima igualdad y ya finalmente multiplicó [redacted] con [redacted] y me da esa última respuesta.

Las siguientes respuestas corresponden a la alumna [redacted] (Imagen 15).

Ejercicio c: [redacted]

Imagen 15. Evidencia de [redacted]



Fuente: notas de cuaderno de la alumna D_2.

En la primera igualdad descompone en factores primos 288 y halla los factores divisibles entre 4 de [redacted] y [redacted]. Para la segunda igualdad ha simplificado los exponentes del radicando y simultáneamente toma como factor racionalizante con el fin que, en la tercera línea al realizar el producto de radicales tanto en el numerador como en el denominador, los exponentes del radicando de este último tomen el valor de 4. De manera que en la cuarta igualdad ha racionalizado el radical solicitado. Posteriormente en la quinta fila consigue el producto de entre las variables mediante el producto de potencias de igual base, al mismo tiempo simplifica los , con , con y sincrónicamente obtiene el producto de 4 y 3 para concluir con la última igualdad obtenida

Se presentan una serie de indagaciones a la alumna para conocer los argumentos que tiene la alumna frente a la racionalización del monomio

R1 - F: Explícame por favor que realizaste.

R2 – : primero, descompongo en factores primos 288, hallo los factores divisibles entre 4 de los exponentes y para poder simplificarlos con el índice del radical.

R3 - F: ¿Por qué haces este procedimiento?

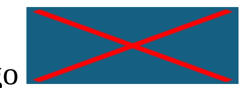
R4 – : porque solo vi que podía simplificar cosas de la raíz y así cuando la tuve totalmente simplificada, tome el radical nuevo y con las indicaciones que me dio termine por encontrar el radical que me servía para poder hacer el proceso de racionalización.

R5 - F: En esta segunda igualdad, el "radical nuevo" que dices que te sirve, se llama factor racionalizante y recuerda que "las cosas de la raíz" se denominan radicando, ahora ¿porque el radicando del factor racionalizante tiene exponentes diferentes a los que contiene el radicando del radical a racionalizar?

R6 – : Lo hago porque la idea es que con el factor racionalizante. Como usted le dice, es multiplicarlo con el otro radical y hacer que coincidan con el índice del radical y así se desaparezca. En este caso y el ejemplo, entonces según esto, es completar lo que le hacía falta a los exponentes que tiene el radical a racionalizar con ese factor racionalizante. Entonces observe los exponentes del radicando del denominador y vi que el exponente de 2 le hace falta 3 para que llegar a la 4, al exponente de 3 le hace falta un 2 para que quede a la 4, a  le hace falta un 3 para que quede a la 4 y para los exponentes de b y c les hace falta dos para que llegue a cuatro

R7 – : Ahora multiplicó el factor racionalizante con el otro fraccionario y los exponentes del radicando todos me quedan elevados a la cuatro y en la siguiente igualdad ya queda racionalizado el denominador.

R8 - F: Ahora en la tercera igualdad que tú has “eliminado la raíz” ¿consideras que ya se ha racionalizado el denominador?

R9 – : si, y ya eliminada la raíz, procedo en la siguiente igualdad a multiplicar todo lo del denominador y al mismo tiempo a simplificar los términos de arriba con los de abajo y finalmente obtengo 

Para esta temática de racionalización de monomios, el contenido de la tabla de codificación abierta, se adjuntará en la tabla de codificación que le corresponde a la temática de racionalización de binomios.

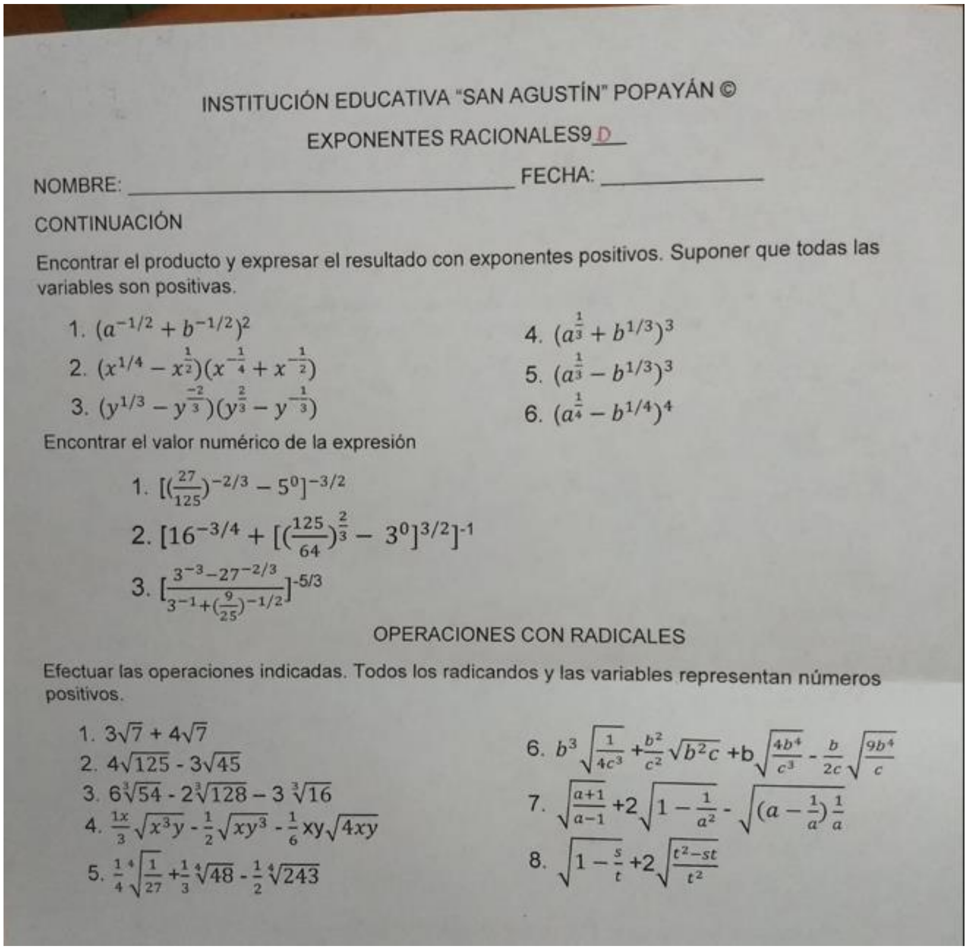
Temática: operaciones con radicales

Explicación

Para ello, se les recuerda la descomposición de factores primos para ser aplicada con los radicandos y agrupar los términos semejantes, como las raíces con igual índice y operar.

En la Imagen 16 se observa la segunda hoja de ejercicios, con la cual se trabajó para los temas de operaciones con radicales

Imagen 16. Hoja de ejercicios de operaciones con radicales.



INSTITUCIÓN EDUCATIVA "SAN AGUSTÍN" POPAYÁN ©

EXPONENTES RACIONALES9 D

NOMBRE: ________________ FECHA: ________

CONTINUACIÓN

Encontrar el producto y expresar el resultado con exponentes positivos. Suponer que todas las variables son positivas.

1. $(a^{-1/2} + b^{-1/2})^2$
2. $(x^{1/4} - x^{\frac{1}{2}})(x^{-\frac{1}{4}} + x^{-\frac{1}{2}})$
3. $(y^{1/3} - y^{\frac{-2}{3}})(y^{\frac{2}{3}} - y^{-\frac{1}{3}})$
4. $(a^{\frac{1}{3}} + b^{1/3})^3$
5. $(a^{\frac{1}{3}} - b^{1/3})^3$
6. $(a^{\frac{1}{4}} - b^{1/4})^4$

Encontrar el valor numérico de la expresión

1. $[(\frac{27}{125})^{-2/3} - 5^0]^{-3/2}$
2. $[16^{-3/4} + [(\frac{125}{64})^{\frac{2}{3}} - 3^0]^{3/2}]^{-1}$
3. $[\frac{3^{-3} - 27^{-2/3}}{3^{-1} + (\frac{9}{25})^{-1/2}}]^{-5/3}$

OPERACIONES CON RADICALES

Efectuar las operaciones indicadas. Todos los radicandos y las variables representan números positivos.

1. $3\sqrt{7} + 4\sqrt{7}$
2. $4\sqrt{125} - 3\sqrt{45}$
3. $6\sqrt[3]{54} - 2\sqrt[3]{128} - 3\sqrt[3]{16}$
4. $\frac{1x}{3}\sqrt{x^3y} - \frac{1}{2}\sqrt{xy^3} - \frac{1}{6}xy\sqrt{4xy}$
5. $\frac{1}{4}\sqrt[4]{\frac{1}{27}} + \frac{1}{3}\sqrt[4]{48} - \frac{1}{2}\sqrt[4]{243}$
6. $b^3\sqrt{\frac{1}{4c^3}} + \frac{b^2}{c^2}\sqrt{b^2c} + b\sqrt{\frac{4b^4}{c^3}} - \frac{b}{2c}\sqrt{\frac{9b^4}{c}}$
7. $\sqrt{\frac{a+1}{a-1}} + 2\sqrt{1 - \frac{1}{a^2}} - \sqrt{(a - \frac{1}{a})\frac{1}{a}}$
8. $\sqrt{1 - \frac{s}{t}} + 2\sqrt{\frac{t^2 - st}{t^2}}$

Fuente: taller elaborado por el docente titular.

Los siguientes ejercicios pertenecen a la alumna  y se hará su respectivo análisis.

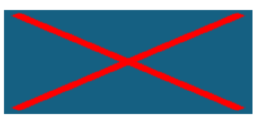
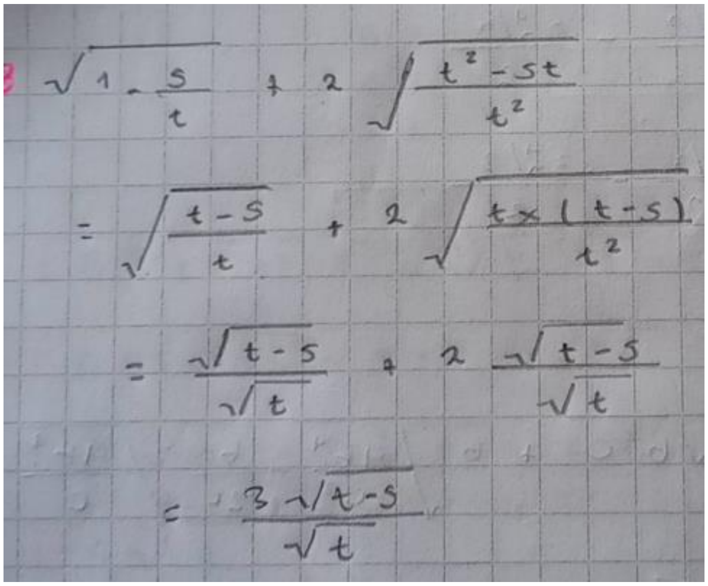
Ejercicio a: 

Figura 19. Evidencia de 



Fuente: notas de cuaderno de la alumna D_1.

En el primer miembro de la expresión, resuelve la fracción que se encuentra como radicando, conjuntamente al segundo miembro de la misma expresión toma como factor común la variable . En la segunda fila, por propiedad de división de radicales, divide los radicales del primer miembro y segundo miembro de la expresión. En la misma línea, ha simplificado la variable t del numerador con que se encuentra como denominador y finalmente, en la última igualdad por ser términos semejantes suma los dos términos y obtiene

Se presentan una serie de indagaciones a la alumna para conocer los argumentos que tiene la alumna frente a las operaciones con radicales.[4]

De esta manera es como argumenta la solución:

R1 -F: por favor, explícame como hiciste cada paso.

R2 -: Primero, como usted me oriento, realice el fraccionario que está en la primer radical y en el segundo radical saco factor común de . Para la otra

[4] En el primer denominador, al preguntarle que, si se podía dividir sin realizar la fracción, ella respondía que si.

igualdad, divido en dos radicales a cada uno de los dos radicales. Y para el segundo radical, ya simplifiqué la [illegible] de arriba con una de las dos [illegible] de abajo y luego sumo los dos radicales

R3 -F: ¿Qué te permite poder dividir los radicales?

R4-[redacted]**:** Porque tiene los índices iguales los radicales.

R5-F: ¿Por qué pudo sumar al final estos dos radicales?

R6 -[redacted]: Porque creo que al ser dos términos semejantes y es porque siempre que tienen igual radicando con igual índice del radical. Es por esto que los sumo

.

Las siguientes respuestas corresponden a la alumna [redacted] .

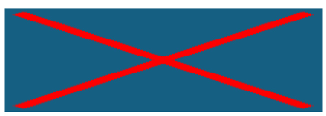
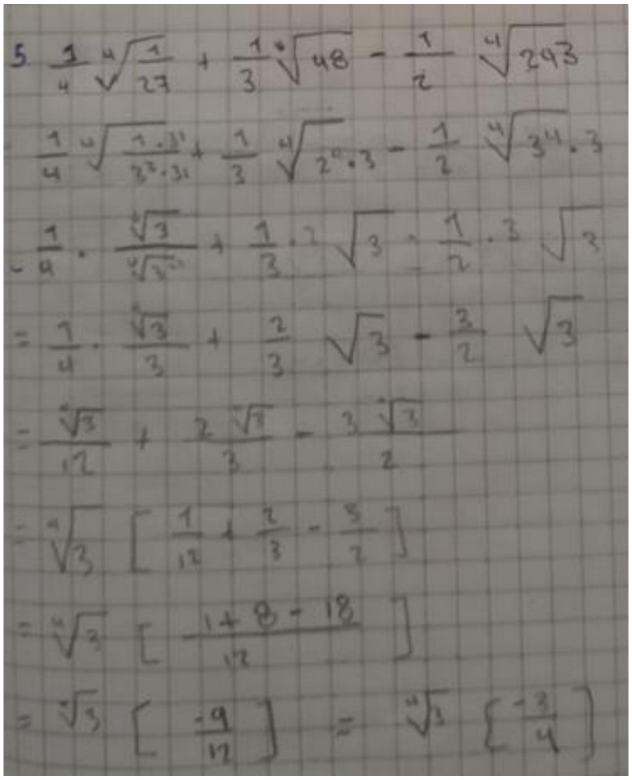
Ejercicio b: 

Imagen 17. Evidencia de [redacted]



Fuente: notas de cuaderno de la alumna D_2.

Las argumentaciones que presenta la alumna son las siguientes:

En la primera igualdad del primer monomio en un solo paso, ya ha identificado el factor racionalizante y lo multiplica por el radical a racionalizar. En esa misma igualdad descompone en factores primos el radicando 48 y 293. En seguida, en la segunda línea, obtiene el producto del primer monomio, además que ha simplificado el exponente de los radicandos  y . Posteriormente, para la tercera fila, ha racionalizado el primer monomio, y obtiene parte del producto de los coeficientes numéricos de cada radical. Se aclara que en estas dos líneas ha olvidado colocar el índice 4 de los radicales. Después, en la cuarta igualdad, consigue el producto del primer monomio y culmina también el de los otros dos monomios. En seguida, en la quinta línea, identifica el factor común  en el trinomio. Y finalmente en la última igualdad ha realizado las operaciones para concluir con .

Se presentan una serie de indagaciones a la alumna para conocer los argumentos que tiene la alumna frente a las operaciones con radicales.

Ante el ejercicio la alumna justifica lo siguiente:

R1 -F: Por favor, dime cómo realizas cada paso

R2 -: Se qué y por consiguiente le haría falta multiplicarlo por un .

Así, para racionalizar este radical multiplico el numerador y denominador por y sé que al hacer esto, puedo meter los dentro del radical para ser multiplicados dentro arriba y abajo. Y descompongo el 48 y 243 en factores primos.

R3 -F: Pero antes de llevar a cabo los procesos, debiste hacer algo más para pensar en racionalizar el denominador. ¿Qué hiciste para ello?

R4 -: No, simplemente ese mismo radical le multiplique en el numerador y en el denominador.

R5-F: ¿O sea, tú a ese radical no le aplicaste la propiedad de la división para poder dividir el numerador y denominador entre radicales con igual índice?

R6 -**:** No profe, lo deje tal y como estaba.

R7 -F: Ah ya. Ten presente que para ello antes debías de aplicar la propiedad de división de radicales con igual índice. Y con ello, en el numerador resulta uno, por lo que raíz cuarta de uno es uno. Y en el numerador resultaría . Es decir, uno sobre raíz cuarta de tres al cubo. Con este resultado ya puedes considerar cuál sería el factor racionalizante más conveniente.

R8 -: Para el siguiente igual, en el primer fraccionario, multiplicó en el denominador por y me da y en el numerador multiplico por me queda Y en los otros radicales he simplificado lo que se puede. Así en la otra igualdad racionalice el denominador y en los otros radicales multiplico los números que están fuera del radical.

R9 -F: Muy bien, recuerda que "los números que están fuera del radical" se les llama coeficiente numérico.

R10-: Luego más adelante, como se repite en los tres radicales, saco factor común. En la siguiente igualdad saco máximo común divisor de los tres fraccionarios y opero y ya finalmente me da .

A raíz del conjunto de los anteriores registros, los cuales están constituidos de dos ejercicios resueltos por dos alumnas y las entrevistas que dan cuenta de las argumentaciones que ellas dan de estos, se presenta la siguiente tabla que contiene algunos fragmentos seleccionados de las entrevistas que dieron paso a categorías emergentes. Para obtener estas categorías se ejecuta únicamente para el análisis de los resultados, la codificación abierta que hace parte del procedimiento de análisis de la teoría fundamentada, con la finalidad de evidenciar la relación existente entre lo que explica el practicante en relación con las argumentaciones que brindan las alumnas.

En las filas de la tabla, se ubican las dos categorías emergentes y en las columnas se ubican algunas líneas o fragmentos seleccionados de las entrevistas.

Tabla 2. Tabla de codificación abierta- operaciones con radicales

Argumentaciones			
Categorías	Resoluciones		Subcategorías
	Alumna	Alumna	
Con sustento teórico	**R2 -**: divido en dos radicales a cada uno de los dos radicales. **R4-:** Y para el segundo radical, ya simplifiqué la de arriba con una de las dos del denominador y	**R2 -**: para racionalizar este radical multiplico el numerador y denominador por y sé que al hacer esto, puedo meter los dentro del radical para ser multiplicados dentro arriba y abajo.	Justifica o describe lo se involucra en la resolución; es decir propiedades y/o el proceso que realizo en el paso.

	luego sumo los dos radicales	**R10-:** Luego más adelante, como se repite en los tres radicales, saco factor común. En la siguiente igualdad saco máximo común divisor de los tres fraccionarios y opero y ya finalmente me da .	
	R6 -: Porque creo que al ser dos términos semejantes y es porque siempre que tienen igual radicando con igual índice del radical. Es por esto que los sumo.		Etg: expresa en términos generales de que consta el tema recientemente explicado
	R6 -: Porque creo que al ser **términos semejantes** y es porque tienen igual radicando con igual índice del radical. Es por esto que los sumo	**R2-**: para racionalizar este radical multiplico el **numerador y denominador** por	Cdom: le concede las denominaciones correctas a los objetos matemáticos
Sin sustento teórico	**R6 -**: ya simplifiqué la de **arriba** con una de las dos de **abajo**	**R2 -**: para ser multiplicados dentro arriba y abajo. **R8 -**: multiplico **los números que están fuera** del radical.	Ndom: no le concede las denominaciones correctas a los objetos matemáticos

Las dos categorías emergentes están constituidas por dos tipos de argumentaciones: argumentación heurística y argumentación retorica; argumentaciones que están especificadas en el marco teórico. Con respecto a la argumentación heurística hizo posible verificar que las alumnas se apoyan en un sustento teórico cuando dan sus argumentaciones que provienen de las explicaciones dadas por el practicante.

Al examinar las argumentaciones clasificadas en el tabla, se pueden reconocer subcategorías que corresponden a las maneras de argumentar las alumnas y ; subcategorías que están relacionadas con la argumentación heurística.

Temática: racionalización de binomios

Explicación

Se explica que para la racionalización de binomios se maneja un proceso similar a racionalizar monomios, sin embargo, el factor racionalizante ahora se *denomina expresión conjugada*. Pero para poder denominarse así —basado en Herrera Ruiz (2004, p. 48)— deben existir dos expresiones matemáticas con dos términos cada una necesariamente. Luego que existan estas dos expresiones, se puede denominar expresión conjugada si estas difieren en el signo de la segunda expresión. Además de ello, se acude a recordar el producto notable enseñado antes por el docente titular.

Se acude a presentar dos ejemplificaciones

1.

2.

solución de: 1.

Primero se observa el denominador y con base a él, identificamos su expresión conjugada, la cual es .

Procedemos a multiplicar al numerador y denominador por dicha expresión, y con el producto se consigue la equivalencia del producto notable

y obtenemos:

Luego aplicamos ley distributiva en el numerador y simultáneamente empleamos la propiedad de potencia de una raíz.

Resolvemos y simplificamos el exponente 2 de la base 2 con el índice del radical.

y resolvemos la operación del denominador y se da por hecho la racionalización del denominador.

Se solucionó el primer ejercicio con explicaciones dadas por el practicante.

Para el segundo se les indagó de los pasos que se deben seguir para la resolución del ejemplo. Y si hay disposición de parte de las niñas, se les solicita salir al tablero con lo cual se pudo dar cuenta de cómo se está entendiendo el tema; al mismo tiempo se preguntó a las demás compañeras si se encentraban de acuerdo con tal solución y escuchar o ver, si salían al tablero, otro tipo de soluciones.

Solución de: 2.

Se realiza de manera análoga al ejercicio anterior

multiplicamos al numerador y denominador por el conjugado .

adaptamos la equivalencia del producto notable

.

En el numerador aplicamos ley distributiva y simultáneamente en el primer y segundo término se ejecuta la propiedad del producto de radicales de igual índice. En el caso del denominador, al primer término aplicamos la propiedad de potencias de distinta base e igual exponente y potencia de una raíz y está última, es aplicada al segundo término.

tanto en el numerador como en el denominador simplificamos los exponentes de cada término.

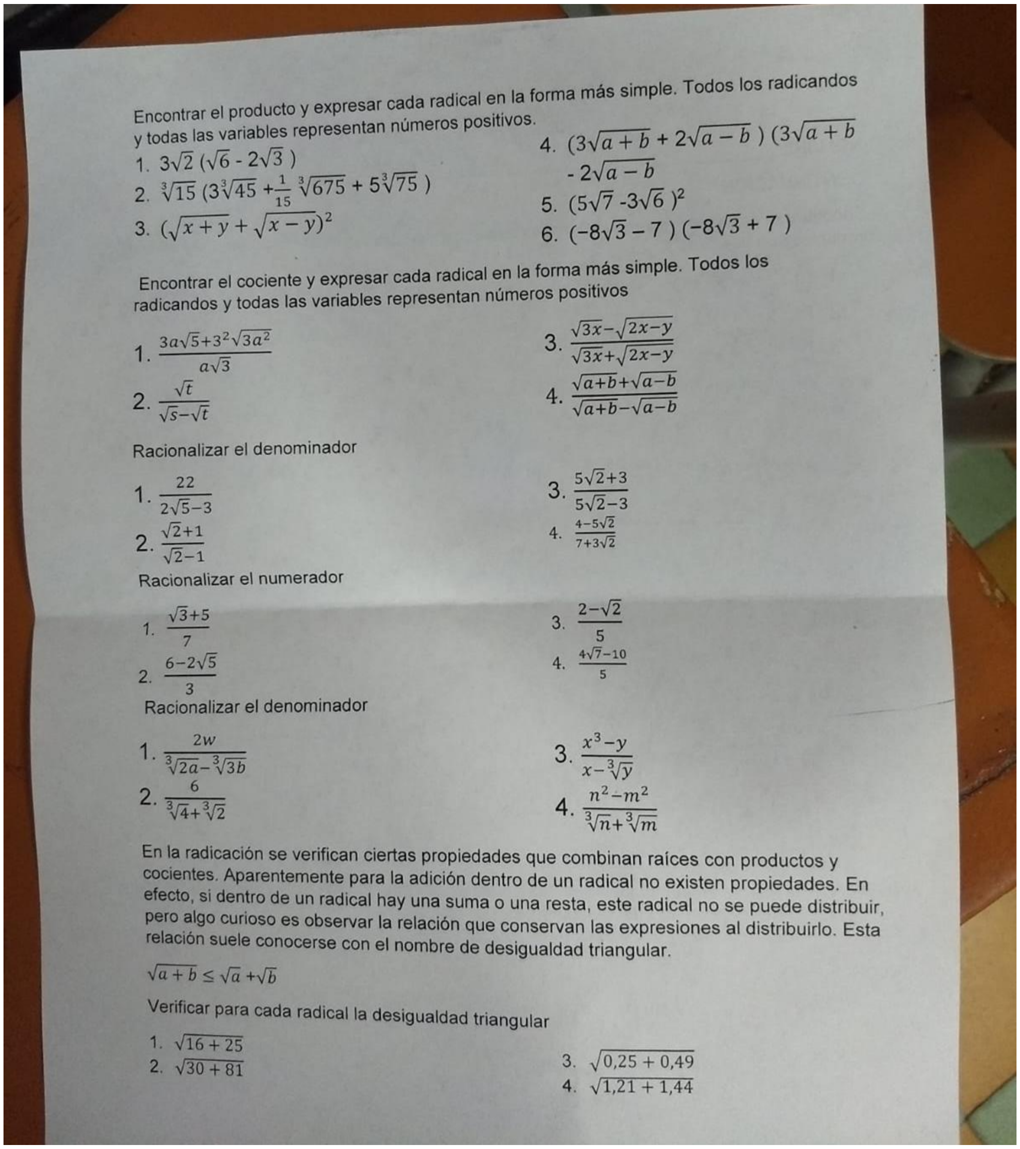
Respecto al denominador, obtenemos el producto del primer término y conjuntamente se distribuye el signo a la expresión.

y, por último, se resuelve la diferencia que queda pendiente

Por otro lado, considerando el esquema secuencial elaborado por Grize (1997) la racionalización de binomios, como título ocupa la posición , o también es lo que hace referencia al objeto complejo [Oc]. Los posibles interrogantes que se pueden generar como: ¿Qué es la expresión conjugada? ¿Qué función tiene la expresión conjugada? ¿Por qué nos recuerda el producto notable ? ¿Qué relación tiene la expresión conjugada con ese producto notable? ocupan la posición lo que significa que el objeto complejo pasa a ser un objeto problemático [Op]. Partiendo de todos los procesos que se ejecutan en cada explicación y las indagaciones que se les hacen a las alumnas en el transcurso de estos, ocupan la posición , es decir con estas acciones se da lugar a la explicación. Finalmente, con base a lo anterior en la posición el objeto complejo [Oc] se convierte en un objeto explicado [Oe], es decir comprensible.

En la Imagen 18 se observa la tercera hoja de ejercicios, con la cual se trabajó para los temas de racionalización de binomios.

Imagen 18. Hoja de ejercicios de racionalización de binomios.



Encontrar el producto y expresar cada radical en la forma más simple. Todos los radicandos y todas las variables representan números positivos.

1. $3\sqrt{2}\,(\sqrt{6} - 2\sqrt{3}\,)$
2. $\sqrt[3]{15}\,(3\sqrt[3]{45} + \frac{1}{15}\sqrt[3]{675} + 5\sqrt[3]{75}\,)$
3. $(\sqrt{x+y} + \sqrt{x-y})^2$
4. $(3\sqrt{a+b} + 2\sqrt{a-b}\,)\,(3\sqrt{a+b} - 2\sqrt{a-b}$
5. $(5\sqrt{7} - 3\sqrt{6}\,)^2$
6. $(-8\sqrt{3} - 7\,)\,(-8\sqrt{3} + 7\,)$

Encontrar el cociente y expresar cada radical en la forma más simple. Todos los radicandos y todas las variables representan números positivos

1. $\frac{3a\sqrt{5}+3^2\sqrt{3a^2}}{a\sqrt{3}}$
2. $\frac{\sqrt{t}}{\sqrt{s}-\sqrt{t}}$
3. $\frac{\sqrt{3x}-\sqrt{2x-y}}{\sqrt{3x}+\sqrt{2x-y}}$
4. $\frac{\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b}}$

Racionalizar el denominador

1. $\frac{22}{2\sqrt{5}-3}$
2. $\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$
3. $\frac{5\sqrt{2}+3}{5\sqrt{2}-3}$
4. $\frac{4-5\sqrt{2}}{7+3\sqrt{2}}$

Racionalizar el numerador

1. $\frac{\sqrt{3}+5}{7}$
2. $\frac{6-2\sqrt{5}}{3}$
3. $\frac{2-\sqrt{2}}{5}$
4. $\frac{4\sqrt{7}-10}{5}$

Racionalizar el denominador

1. $\frac{2w}{\sqrt[3]{2a}-\sqrt[3]{3b}}$
2. $\frac{6}{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}}$
3. $\frac{x^3-y}{x-\sqrt[3]{y}}$
4. $\frac{n^2-m^2}{\sqrt[3]{n}+\sqrt[3]{m}}$

En la radicación se verifican ciertas propiedades que combinan raíces con productos y cocientes. Aparentemente para la adición dentro de un radical no existen propiedades. En efecto, si dentro de un radical hay una suma o una resta, este radical no se puede distribuir, pero algo curioso es observar la relación que conservan las expresiones al distribuirlo. Esta relación suele conocerse con el nombre de desigualdad triangular.

$\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$

Verificar para cada radical la desigualdad triangular

1. $\sqrt{16+25}$
2. $\sqrt{30+81}$
3. $\sqrt{0{,}25+0{,}49}$
4. $\sqrt{1{,}21+1{,}44}$

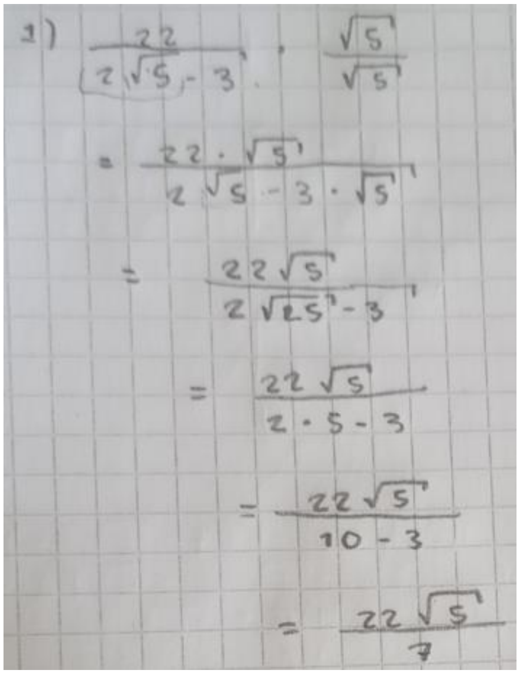
Fuente: taller elaborado por el docente titular.

A continuación, se presentaron los ejercicios del presente tema; se hará el respectivo análisis y en seguida la justificación de las alumnas D_1 y D_2.

Los siguientes ejercicios pertenecen a la alumna  se hará su respectivo análisis (Imagen 19).

Ejercicio a: 

Imagen 19. Evidencia de .



Fuente: notas de cuaderno de la alumna D_1.

La alumna considera que es apto para el proceso de racionalizar el denominador, En la segunda línea, multiplica por factor racionalizante al numerador y parte del denominador. Así, en la tercera línea, en el denominador multiplica únicamente al primer término de ese binomio y de este modo obtiene como producto . Posteriormente, en la cuarta fila del denominador le resulta .

Finalmente, en la última igualdad, tras unas operaciones obtiene .

Se presentan una serie de indagaciones a la alumna para conocer los argumentos que tiene la alumna frente a la racionalización de binomios.

R1 -F: Por favor, puedes explicarme todos los pasos.

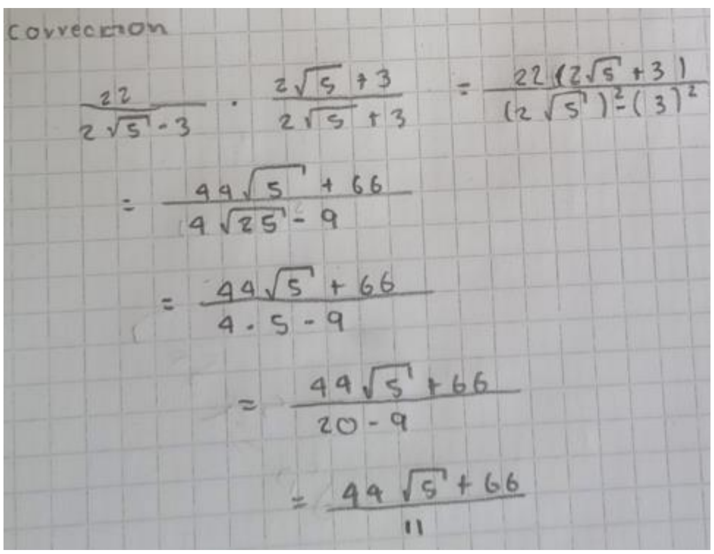
R2 - Como debo racionalizar el denominador, debo multiplicar por

R3 -F: ¿Por qué crees que hay que multiplicar ?

R4 -: Como se va racionalizar el denominador entonces, necesito racionalizar el denominador, y para eso multiplicó por al numerador y denominador.

R5 - :Luego multiplico 22 por y multiplicó por el mismo al denominador. En el siguiente paso como debo agrupar términos semejantes. Y en este caso el término es ; multiplicó por y eso me da 25, pero se que al descomponerlo me queda . Entonces para la siguiente igualdad, simplifico el exponente con el índice y me queda en el numerador . Después, en la siguiente igualdad me queda 10-3, pero el numerador queda igual que antes. Y por último, de esa resta me queda 7 en el denominador.

Imagen 20. Corrección de ejercicio a por .



Fuente: e notas de cuaderno de la alumna .

Después de re-explicar y aclarar ciertas dudas, se obtuvo por parte ella lo siguiente:

R1 -F: Ahora teniendo en cuenta las aclaraciones del tema, puedes por favor argumentar los pasos que realizaste.

R2 -: Según lo que ha explicado, entonces el conjugado que es lo mismo que cambiar de signo a la segunda parte, entonces para de , seria [redacted], y por esto debo multiplicar el numerador y el denominador para racionalizar el denominador. Entonces me queda arriba 22 multiplicando a todo el [redacted] y en la parte de abajo según la fórmula la variable [redacted] seria [redacted] y la variable [redacted] seria 3 entonces me queda [redacted]. En el siguiente igual, distribuyó el 22 multiplicandolo con [redacted] y también con 3 y me da [redacted]. Y en el denominador me qué [redacted].

R3 -F: En la segunda igualdad, ¿cómo consigues en el denominador [redacted] ?

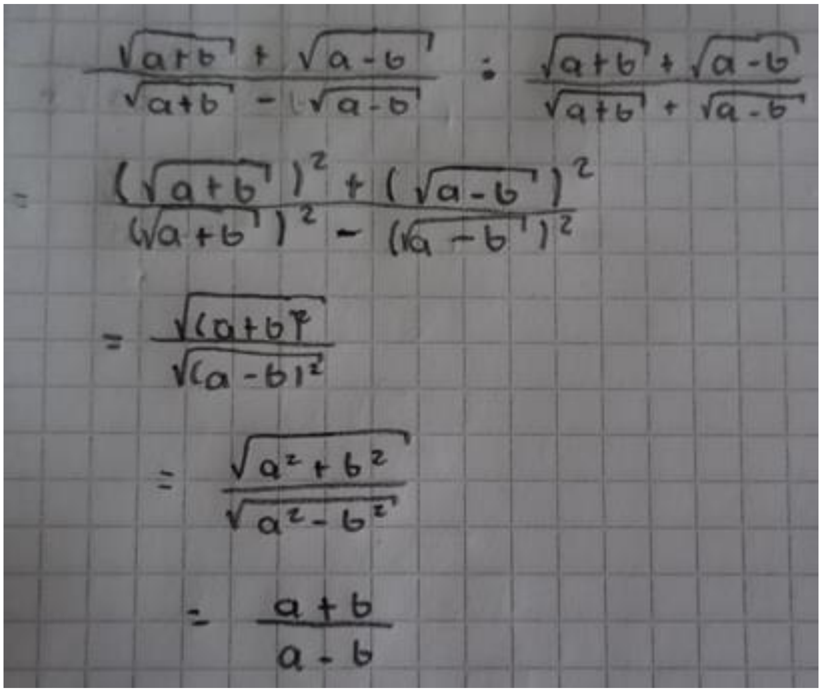
R4 -[redacted]: Porque cuando se están multiplicando dos variables y estas están elevadas a un mismo exponente, el exponente se distribuye.

R5 -[redacted]: Después de esto, ya he logrado racionalizar el denominador y me queda [redacted]. Así, me queda 20-9 y de esa resta, me queda 11 en el denominador.

Nuevamente, se debe racionalizar el denominador para el siguiente ejercicio (Imagen 21).

Ejercicio b: [redacted].

Imagen 21. Evidencia de [redacted].



Fuente: notas de cuaderno de la alumna [redacted]..

Identifica, que el conjugado del denominador es [redacted] y con este, procede a multiplicar al numerador y al denominador. De manera errónea, en la segunda igualdad, considera que puede aplicar en el numerador, la equivalencia de la diferencia al cuadrado [redacted], sin embargo, lo hace de manera correcta para el denominador. En la tercera fila, se puede deducir que simplifica el binomio [redacted] que se halla en el numerador y denominador. Con idea en mente, para la cuarta línea, incurre al error de la resolución de un binomio al cuadrado, el cual es la distribución de los exponentes a cada término del binomio y concluye con su respuesta simplificando los exponentes del numerador con el radical del numerador y de manera análoga, el mismo proceso con el radical del denominador.

Se presentan una serie de indagaciones a la alumna para conocer los argumentos que tiene la alumna frente a la racionalización de binomios.

R1 -F: Puedes por favor, explicarme cada paso.

R2 -[redacted]: cómo voy a racionalizar el denominador y este entre sus dos radicales tiene un signo negativo, su conjugado sería [redacted] , por consiguiente, multiplico al numerador y denominador por este conjugado. Luego, aplicando la fórmula, en el numerador me queda los dos radicales al cuadrado con signo positivo y en el denominador ocurre lo mismo, pero con signo negativo

R3 -F: ¿Por qué en la segunda igualdad tiene signo positivo el numerador y signo negativo el denominador?

R4 -[redacted]: Porque arriba el signo no se toca, mientras el de abajo es por la fórmula.

R5 -[redacted]: Después para la otra igualdad, como en el numerador y en el denominador es el mismo [redacted] puedo simplificarlos, entonces por esa razón me queda [redacted]

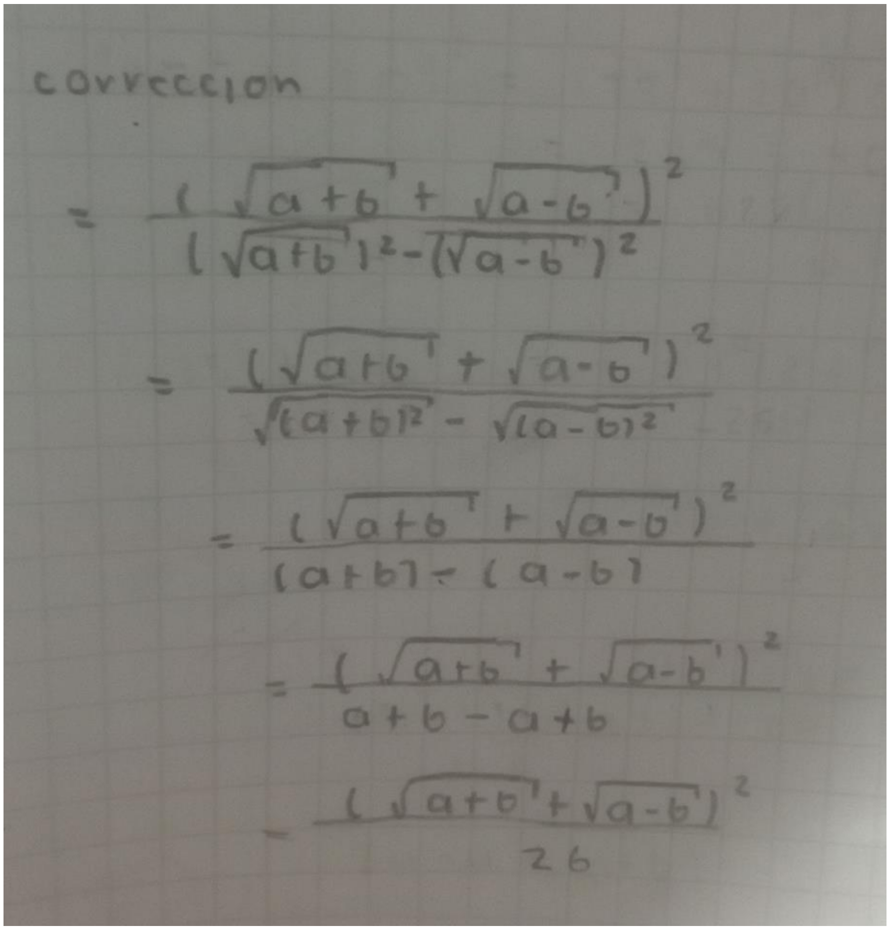
R6 -F: ¿Por qué no puedes simplificar esa fracción que acabas de mencionar, además, por qué ingresas el exponente 2 dentro del radical?

R7 – [redacted]**:** porque aparentemente son las mismas, pero su signo es diferente. E ingresa por una propiedad de los radicales que usted nos enseñó en clase.

R8 -[redacted]: Luego, en el numerador distribuyó el exponente 2 para la variable [redacted] y para la variable [redacted], y lo mismo hago para el denominador y, por último, simplifico los exponentes con el índice de la raíz.

[redacted] incurre al error de considerar que en el numerador puede existir cierta semejanza con el último paso hecho en el denominador, y procede a elevar al cuadrado las dos expresiones algebraicas del numerador, además de otros errores procedimentales, en consecuencia, erra en el resultado; lo que condujo realzarle una re-explicación del tema (Imagen 22).

Imagen 22. Ejercicio b , corrección.



Fuente: notas de cuaderno de la alumna D_1.

En la primera igualdad ya ha obtenido el producto del factor racionalizante. En esa misma igualdad, como la expresión algebraica del numerador coincide con el factor racionalizante obtiene como resultado un binomio al cuadrado perfecto; respecto al denominador adapta la diferencia de cuadrados para poder racionalizar el denominador. En la tercera línea, en el denominador distribuye el exponente dentro del radical a cada uno de sus dos términos; simplifica sus exponentes con el índice del radical. Y así en la cuarta línea, en el denominador ya lo ha racionalizado quedando con un signo negativo queda por fuera de la raíz del segundo término de ese binomio. Luego, distribuye el signo negativo y finalmente opera términos para concluir con su respuesta

Después de realizarle aclaraciones a la alumna, se le indaga y se obtiene lo siguiente:

R1 -F: Puedes por favor explicarme cada paso.

R2 -: en el primer igual, ya se que el conjugado de es .Y por ese conjugado multiplico al numerador y denominador. Y así, en cada radical del denominador se elevan al cuadrado, pero quedando con signo negativo en el medio debido a la fórmula de la diferencia de cuadrados. Y en el numerador, según lo que usted me dijo, como son el producto de dos bases iguales, por la propiedad del producto de radicales de igual base, entonces quedará al cuadrado.

En el siguiente igual, puedo distribuir el exponente de cada radical en el denominador.

R3 -F: En esa segunda igualdad, ¿qué te permite realizar ese paso?

R4 – : por la propiedad de radicales que cuando una raíz tiene un exponente por fuera, este puede pasar a elevar a lo que está dentro del radical.

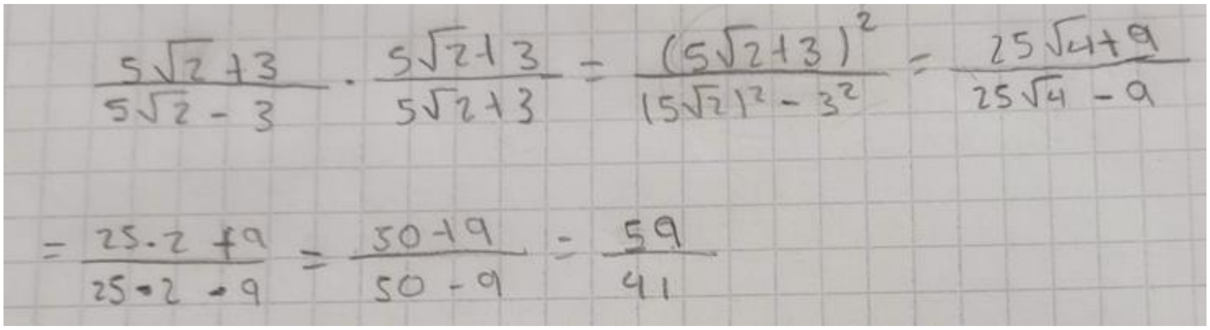
R6 -F: Muy bien, recuerda que es la propiedad de potencia de una raíz. Vale, continúa con la tercera igualdad.

R7 -: Como en cada radical del denominador tiene exponente 2 y el índice del radical es 2, se pueden simplificar. Así, en el siguiente igual, el menos se distribuye para y para . Y ya en el último paso las se desaparecen porque con se están restando, pero las se están sumando, entonces me queda y en el numerador si me queda igual.

Las siguientes respuestas corresponden a la alumna

Ejercicio c: 

Imagen 23. Evidencia de [redacted]



Fuente: notas de cuaderno de la alumna D_2.

La alumna [redacted] identifica que el conjugado del término a racionalizar es 5[redacted] por ende realiza la multiplicación a la fracción. En la segunda igualdad, el numerador como coincide con el conjugado, al realizar la multiplicación, por propiedad de los exponentes, le resulta [redacted]. Por otro lado, adapta la equivalencia del producto notable [redacted] al denominador. En la segunda igualdad emplea la propiedad de los exponentes del producto de distintas bases elevadas al mismo exponente de manera errónea teniendo como resultado 25[redacted]. Sin embargo, por la misma propiedad y por la propiedad de potencia de una raíz, le resulta 25[redacted] correctamente. De esta manera, en la cuarta igualdad, ha racionalizado el denominador de lo cual consigue [redacted]. Al realizar esta operación, concluye con [redacted].

Se presentan una serie de indagaciones a la alumna [redacted] para conocer los argumentos que tiene la alumna frente a la racionalización de binomios.

R1 -F: Puedes por favor explicarme cada paso, por favor.

R2 -[redacted]: Como se debe racionalizar un binomio, entonces hay que multiplicar el numerador y denominador por el conjugado. 5[redacted], es el conjugado de 5[redacted]

R3 -F: ¿Cuál es el objetivo de multiplicar por el conjugado en la primera igualdad?

R4 -: porque al hacer eso, podemos aplicar la fórmula que nos explicó y así, se pueden elevar al cuadrado los radicales y se puede racionalizar.

R5 -F: Muy bien, continua por favor, continua con la segunda igualdad.

R6-: En el numerador, con lo que dije hace un ratito, al aplicar la fórmula quedan elevados los radicales al cuadrado, y arriba en el numerador, como 5 se está multiplicando con el mismo, queda todo elevado al cuadrado.

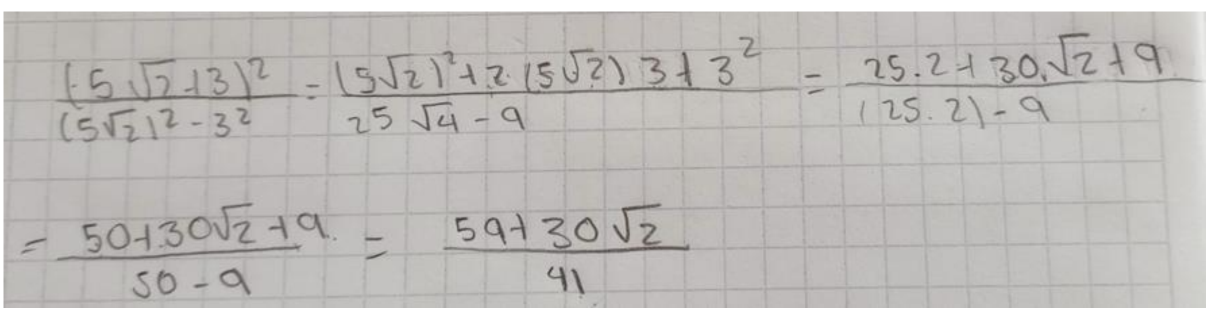
R7-F: continúa por favor con la tercera igualdad.

R8-: En el numerador, distribuyo el exponente 2 a 5 y me queda 25 y así mismo para 3 y me da 9. Y en el denominador ocurre lo mismo, pero cambia el signo a negativo. En el siguiente igual, arriba por un lado como la raíz de 4 es 2, entonces me queda y por el otro lado me da 9. Y en el denominador, me queda lo mismo, pero con signo negativo. Y ya, por último, hago esas operaciones y queda racionalizado el denominador.

A continuación, se presentará la corrección del ejercicio (Imagen 24).

:, corrección

Imagen 24. Ejercicio c, corrección.



Fuente: notas del cuaderno de la alumna D_2.

Se presentan una serie de indagaciones después de realizarle ciertas aclaraciones a la alumna y se obtienen lo siguiente:

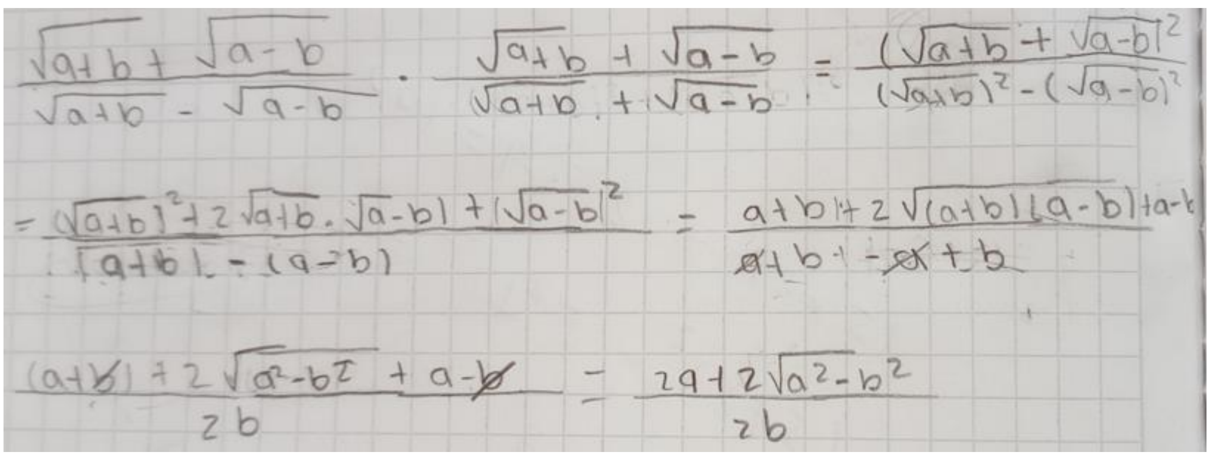
R1-F: Por favor, me explicas nuevamente los pasos.

R2-[redacted]**:** Como 5[redacted] es el mismo que el conjugado, al multiplicarlos me quedan elevados al cuadrado, y con base a la explicación de la otra fórmula [redacted] entonces me queda en el numerador [redacted] y abajo como si estaba bien, lo dejo igual siempre. Luego, como se está multiplicando 5 y [redacted] y los dos tienen exponente dos, puedo distribuir el exponente y me da [redacted]; para la otra parte como 2, 5 y 3 se están multiplicando, me queda 30[redacted] y el 9. En el otro igual, de la multiplicación de 25 y 2 me da 50, y ya con eso me da 50+30[redacted]+9 y con eso arriba me queda 59+30[redacted].

Por último, la racionalización del denominador (Imagen 25).

Ejercicio b: [redacted]

Imagen 25. Evidencia de [redacted]



$$\frac{\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b}} \cdot \frac{\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b}} = \frac{(\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b})^2}{(\sqrt{a+b})^2-(\sqrt{a-b})^2}$$

$$= \frac{(\sqrt{a+b})^2+2(\sqrt{a+b}\cdot\sqrt{a-b})+(\sqrt{a-b})^2}{(a+b)-(a-b)} = \frac{a+b+2\sqrt{(a+b)(a-b)}+a-b}{\cancel{a}+b-\cancel{a}+b}$$

$$\frac{(a+\cancel{b})+2\sqrt{a^2-b^2}+a-\cancel{b}}{2b} = \frac{2a+2\sqrt{a^2-b^2}}{2b}$$

Fuente: notas del cuaderno de la alumna D_2.

Identifica el conjugado del denominador, el cual es: [redacted]; con este realiza la multiplicación con la fracción. En la segunda igualdad, por parte del numerador por la propiedad de exponentes, al tener el producto entre iguales bases, obtiene [redacted]. Por otro lado, adapta la equivalencia del producto notable al denominador, rresultándole . Para la tercera igualdad del numerador resuelve el binomio al cuadrado y por parte del denominador a los dos términos del binomio les emplea la propiedad de potencia de una raíz resultándole ; para la siguiente equivalencia ha resuelto el binomio al cuadrado y simultáneamente cancela las variables . Por último, tanto en el numerador y denominador opera términos semejantes y da por finalizado el ejercicio.

Se presentan una serie de indagaciones a la alumna para conocer los argumentos que tiene la alumna frente a la racionalización de binomios.

R1-F: Por favor, me explicas cada paso.

R2-: como debo racionalizar el denominador, entonces tengo que multiplicarlo por su conjugado que es el mismo denominador, pero con signo positivo en la segunda parte, y este conjugado también debo multiplicárselo al numerador.

R3-F: Muy bien, continúa por favor con la segunda igualdad.

R4-: Como el numerador y el conjugado son los mismos y se están multiplicando entonces, todo eso queda al cuadrado y en el denominador los dos radicales se elevan al cuadrado según la fórmula.

R-5-F: Bien, continúa por favor con la tercera igualdad.

R-6-: Guiándome con la formula, en la parte de arriba del siguiente igual, y y pongo eso en cada parte de esa igualdad, mientras abajo, el exponente dos se distribuye a cada radical al que están elevados y por consiguiente se simplifica el índice del radical con el exponente dos y ya quedan libres del radical.

R-7-F: ¿Consideras que, en ese caso, el denominador ya queda racionalizado?

R-8-: Si profe, porque como le decía, los radicales se han desaparecido con la simplificación.

R-9- F: Continua, por favor.

R-10-[redacted]: Después en el numerador, simplifico los radicales que están al cuadrado y multiplico [redacted], [redacted] y [redacted] y en el denominador elimino las a.

R-11-F: ¿Por qué en el denominador eliminar las a?

R-12-[redacted]: Porque el negativo se distribuye a la [redacted]y quedaría negativa y la [redacted]positiva entonces se va la [redacted]con la otra [redacted]y se suman las [redacted]y ya después de hacer todas esas operaciones me queda [redacted].

A raíz del conjunto de los anteriores registros, los cuales están constituidos de seis ejercicios resueltos por dos alumnas y las entrevistas que dan cuenta de las argumentaciones que ellas dan de estos, se presenta la siguiente tabla que contiene algunos fragmentos seleccionados de las entrevistas que dieron paso a categorías emergentes. Para obtener estas categorías se ejecuta únicamente para el análisis de los resultados, la codificación abierta que hace parte del procedimiento de análisis de la teoría fundamentada, con la finalidad de evidenciar la relación existente entre lo que explica el practicante en relación con las argumentaciones que brindan las alumnas.

En las filas de la tabla, se ubican las dos categorías emergentes y en las columnas se ubican algunas líneas o fragmentos seleccionados de las entrevistas.

Tabla 3. Tabla de codificación abierta- racionalización de monomios y racionalización binomios

Argumentaciones			
Categorías	Resoluciones		Subcategorías
	Alumna [redacted]	Alumna [redacted]	
Con sustento teórico	**R4-[redacted]:** por una propiedad que vimos en clase que **cuando se trata de un fraccionario si el numerador y denominador tienen igual**	**R2-[redacted]:** . Luego, como se está multiplicando 5 y [redacted] y **los dos comparten el exponente dos, puedo distribuir el exponente** y me da [redacted]	Justifica o describe lo se involucra en la resolución; es decir propiedades y/o el proceso que realizo en el paso.

	índice, se puede separar los radicales **R4-:** luego, en la siguiente igualdad multiplico al fraccionario arriba y abajo por el **R6-**: porque cuando multiplico los dos denominadores, me quedaria y así se simplifica el número que esta elevada la raíz con el exponente y ya queda libre de radical **R4 -**: **Porque cuando se están multiplicando dos variables y estas están elevadas a un mismo exponente, el exponente se distribuye.** (…) En el siguiente igual, distribuyó el 22 multiplicándolo con y también con 3 y me da . Y en el denominador me qué . **R5 -**: Después de esto, ya he logrado racionalizar el denominador y me queda . Así, me queda 20-9 y de	**R2 –**: primero, descompongo en factores primos 288, hallo los factores divisibles entre 4 de los exponentes y para poder simplificarlos con el índice de la raíz. **R4 –**: porque solo vi que podía simplificar cosas de la raíz y así cuando la tuve totalmente simplificada, tome el radical nuevo y con las indicaciones que me dio termine por encontrar el radical que me servía para poder hacer el proceso de racionalización. **R6 –**: observe los exponentes del radicando del denominador y vi que el exponente de 2 le hace falta 3 para que llegar a la 4, al exponente de 3 le hace falta un 2 para que quede a la 4, a le hace falta un 3 para que quede a la 4 y para los exponentes de b y c les hace falta dos para que llegue a cuatro **R7 –**: Ahora multiplicó el factor racionalizante con el otro fraccionario y los exponentes	

	esa resta, me queda 11 en el denominador	del radicando todos me quedan elevados a la cuatro y en la siguiente igualdad ya queda racionalizado el denominador. **R2 -**: Como se debe racionalizar un binomio, entonces hay que multiplicar el numerador y denominador por el conjugado. 5 , es el conjugado de 5 **R4 -**: porque al hacer eso, podemos aplicar la fórmula que nos explicó y así, se pueden elevar al cuadrado los radicales y se puede racionalizar	
	R4 – : Multiplicar por un radical en el numerador y denominador que permita que el exponente del radicando coincida con el índice del radical y de esta manera que se pueda desaparecer el radical. **R2 -**: Según lo que ha explicado, entonces el conjugado que es lo mismo que	**R6 –** : Lo hago porque la idea es que con el factor racionalizante. Como usted le dice, es multiplicarlo con el otro radical y hacer que coincidan con el índice del radical y así se desaparezca. En este caso, entonces según esto y el ejemplo, es completar lo que le hacía falta a los exponentes que tiene el radical a racionalizar con ese factor racionalizante.	Etg: expresa en términos generales de que consta el tema recientemente explicado

	cambiar de signo a la segunda parte, entonces para , seria , y por esto debo multiplicar el numerador y el denominador para racionalizar el denominador.	**R2-:** como debo racionalizar el denominador, entonces tengo que multiplicarlo por su conjugado que es el mismo denominador, pero con signo positivo en la segunda parte,	
	R2 -:para racionalizar la idea es que el radical desaparezca de manera conveniente **R4-:** Después, como sabía que es igual a 8, que también que es igual a y que es igual a entonces así, para la siguiente igualdad he simplificado los exponentes con el índice de la raíz y, (…)en la parte de abajo según la fórmula la variable seria y la variable seria 3 entonces me queda **R2 -**: Y en el numerador, según lo que usted me dijo,	**R6 –** : Lo hago porque la idea es que con el factor racionalizante. Como usted le dice, es multiplicarlo con el otro radical y hacer que coincidan con el índice del radical y así se desaparezca. En este caso, entonces según esto y el ejemplo, es completar lo que le hacía falta a los exponentes que tiene el radical a racionalizar con ese factor racionalizante. **R2-:** como debo racionalizar el denominador, entonces tengo que multiplicarlo por su conjugado que es el mismo denominador, pero con signo positivo en la segunda parte, y este conjugado también	Amve: se argumenta de forma similar a como lo hizo el practicante al explicar la temática objeto de estudio

	como son el producto de dos bases iguales,	debo multiplicárselo al numerador.	
	R4-: para eso multiplicó por al **numerador** y **denominador (…)** **R** **R2 -:** **el conjugado** de , es , y **(…) la variable** seria y **la variable** seria 3	**R6 –** : la idea es que con el factor **racionalizante** (…) **R2 -**: Como se debe racionalizar **un binomio** entonces (…) 5, que es el **conjugado**	Cdom: le concede las denominaciones correctas a los objetos matemáticos
Sin sustento teórico		**R4 –** : simplificar **cosas de la raíz**	Ndom: no le concede las denominaciones correctas a los objetos matemáticos

Las dos categorías emergentes están constituidas por dos tipos de argumentaciones: argumentación heurística y argumentación retorica; argumentaciones que están especificadas en el marco teórico. Con respecto a la argumentación heurística hizo posible verificar que las alumnas se apoyan en un sustento teórico cuando dan sus argumentaciones que provienen de las explicaciones dadas por el practicante.

Al examinar las argumentaciones clasificadas en el tabla, se pueden reconocer subcategorías que corresponden a las maneras de argumentar las alumnas y ; subcategorías que están relacionadas con la argumentación heurística.

Temática: algunos elementos de los números complejos (explicación)

Los elementos explicados por el practicante fueron:

Números imaginarios puros

Potencias de

Grafica de números complejos

Opuesto y conjugado de un numero complejo

Grafica del número complejo y su conjugado

A continuación, se presentan las explicaciones de estos elementos

Números imaginarios puros

Explicación

Se les explico a las alumnas que los números imaginarios surgen de la inexistencia de una solución real cuando el índice del radical es par y radicando negativo.

Por otro lado, se les señaló que estás soluciones siempre están acompañadas de una letra ***i*,** la cual se le denomina *unidad imaginaria*, además debían de asimilar que , es decir, que es la raíz enésima de un numero negativo con índice par. En ese orden de ideas, dichas soluciones son el producto entre un número real y un número imaginario, es decir, y se les denomina números imaginarios puros.

Para clarificar el tema, se toman los siguientes ejemplos:

1.
2.

Solución de

= como sabemos que cuando un número es negativo, esto quiere decir que dicho número se está multiplicando por .

= por la propiedad del producto de radicales de igual índice, separamos las raíces con el mismo índice, teniendo en cuenta que existe la operación de la multiplicación entre ellos

= como entonces sustituimos por

Para el segundo se les indago sobre los pasos que se deben seguir para la resolución del ejemplo

Solución para

restamos 9 a los miembros de igualdad, para despejar la variable .

De lo anterior resulta .

Luego, aplicamos raíz cuadrada a ambos miembros de la igualdad con el fin de simplificar el exponente de y obtenemos .

aplicamos la propiedad de producto de radicales con igual índice, con la finalidad de identificar la unidad imaginaria

Como sabemos y que entonces reemplazamos en la ecuación y nos resulta

Adicionalmente a este tema, se les explica cómo usar potencias de basándose en los valores de la Tabla 4.

Potencias de

Tabla 4. Equivalencias que toma las potencias de .

Las potencias de la unidad imaginaria i, se obtienen a partir de su definición.

Dado que $i = -1$ entonces:

$i^1 = i$ $\qquad$ $i^3 = i^2 \cdot i = (-1)i = -i$

$i^2 = (\sqrt{-1})^2 = -1$ $\qquad$ $i^4 = i^3 \cdot i = (-i) \cdot i = -i^2 = -(-1) = 1$

Estas cuatro potencias se denominan potencias básicas de i, ya que a partir de i^5 se repiten en períodos de a 4.

Así,

$$i^5 = i^4 \cdot i^1 = 1 \cdot i^1 = i$$

$$i^6 = i^5 \cdot i^1 = i \cdot i = -1$$

SANTILLANA

Fuente: Herrera Ruiz (2004, p.58).

Explicacion

Primero, se les indica el primer valor que toma con exponente , es decir, , de manera similar con exponente 2, es decir , luego cuando se considera el exponente 3, por el producto de potencias con igual base, permite que pueda expresarse como: , y como ya conocen los valores de y de , puede reemplazarlos en esa igualdad, ,es decir de manera análoga se realiza el procedimiento con ; como acaban de conocer el valor de y ya saben el valor de reemplazan en la igualdad , es decir . A modo de ejercicio, el practicante les da cierto tiempo para que sigan el procedimiento hasta llegar al exponente 8. Después de la actividad, el practicante completa las potencias de hasta llegar a el exponente 12, mostrando el valor de la potencia con ese exponente, es decir, . Para concluir se les indica a las alumnas que el valor de la potencia siempre toma el valor de 1 siempre y cuando, el exponente sea múltiplo de 4 o dicho de otro modo, cada cuatro potencias se repite el ciclo tomando el valor de 1. Entonces, con base a lo que se acaba de explicar, se les detalla que cuando se solicita hallar la potencia de , deben dividir entre 4 el exponente que tenga y de esta manera obtienen el resultado.

Para clarificar, se presenta el siguiente ejemplo:

1.

Solución

27 | 4   Con base a lo anterior, se divide entre 4 al exponete
3   6

Como , entonces , y se sabe qué y entonces se reemplaza estos valores en la igualdad, , es decir,

Números complejos

Explicación

Teniendo en cuenta lo anterior, se les presento el conjunto de los números complejos con sus respectivas características, las cuales son: poseer una parte real y una parte imaginaria, con y reales. Por consiguiente, se les presento la notación de este conjunto.

y con base a este conjunto se les da un pequeño ejemplo: , donde es la parte real y la parte imaginaria , también se les explico los siguientes casos según Herrera Ruiz (2004, p. 60):

Si y entonces . Por lo tanto, todo número real es un numero complejo. Luego

Por ejemplo, . Entonces es un numero complejo en el que la parte imaginaria es

Si y entonces . Es decir, todo número imaginario es un numero complejo, en el que la parte real es cero.

Así, las cantidades y son números complejos.

El último concepto a mencionar es los *números complejos conjugados*. Para ello se les explica que “Dos números complejos se denominan conjugados si difieren únicamente del signo de la parte imaginaria”.

Si , el conjugado de se escribe y es igual a (Herrera Ruiz, 2004, p. 60).

Y a modo de clarificar, se les ejemplifica con: y su conjugado seria

Forma cartesiana de un numero complejo

Explicación

Para ello, se les explica que un numero complejo se encuentra expresado de forma binomial y que, dicho número también se puede representar de forma cartesiana o como una pareja ordenada, es decir, donde es la parte real y el coeficiente de la parte imaginaria, que a su vez también es un número real.

A modo de clarificar el tema, se presentan tres números complejos para ser representados en su forma cartesiana

1. y su forma cartesiana es:

Se solucionó el primer ejercicio con explicaciones dadas por el practicante.

Para el segundo se les indago acerca de cuál sería su forma cartesiana.

2. y su forma cartesiana es:
3. Se realiza el mismo proceso con el tercer ejercicio

y su forma cartesiana es:

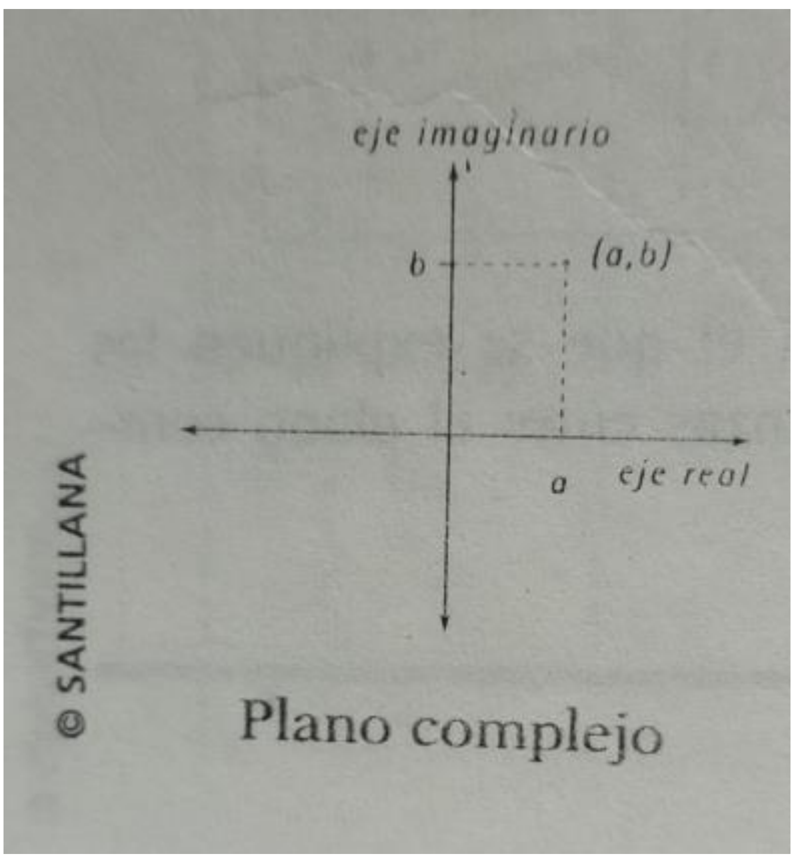
Por otro lado, considerando el esquema secuencial elaborado por Grize (1997) números complejos, como título ocupa la posición , o también es lo que hace referencia al objeto complejo [Oc]. Los posibles interrogantes que se pueden generar como: ¿Qué es un número imaginario? ¿Qué es un complejo? ¿Qué diferencia hay entre un numero imaginario y un complejo? ocupan la posición lo que significa que el objeto complejo pasa a ser un objeto problemático [Op]. Partiendo de [Op] todos los procesos que se ejecutan en cada explicación y las indagaciones que se les hacen a las alumnas en el transcurso de estos, ocupan la posición ,es decir con estas acciones se da lugar a la explicación. Finalmente, con base a lo anterior en la posición el objeto complejo [Oc] se convierte en un objeto explicado [Oe], es decir comprensible.

A continuación, se presenta la explicación para graficar números complejos.

Representación en el plano complejo de números complejos

Teniendo en cuenta los anteriores ejemplos, se explica que para proceder a ubicar en el plano complejo los números complejos , debe hacerse de manera análoga como cuando se ubican puntos en el plano real; es decir, debían "deslizarse o desplazarse" sobre el eje horizontal la cantidad veces que indique el número , teniendo en cuenta que ahora, este eje representa todos los números reales, y posteriormente subir pero de manera paralela al eje vertical las cantidades que indique el número , teniendo en cuenta que ahora este eje representa los números imaginarios.

Imagen 26. Plano complejo.



Fuente: Herrera Ruiz (2004, p.61).

Donde el eje de la ordenada corresponde a los números imaginarios y el eje de la abscisa a los números reales.

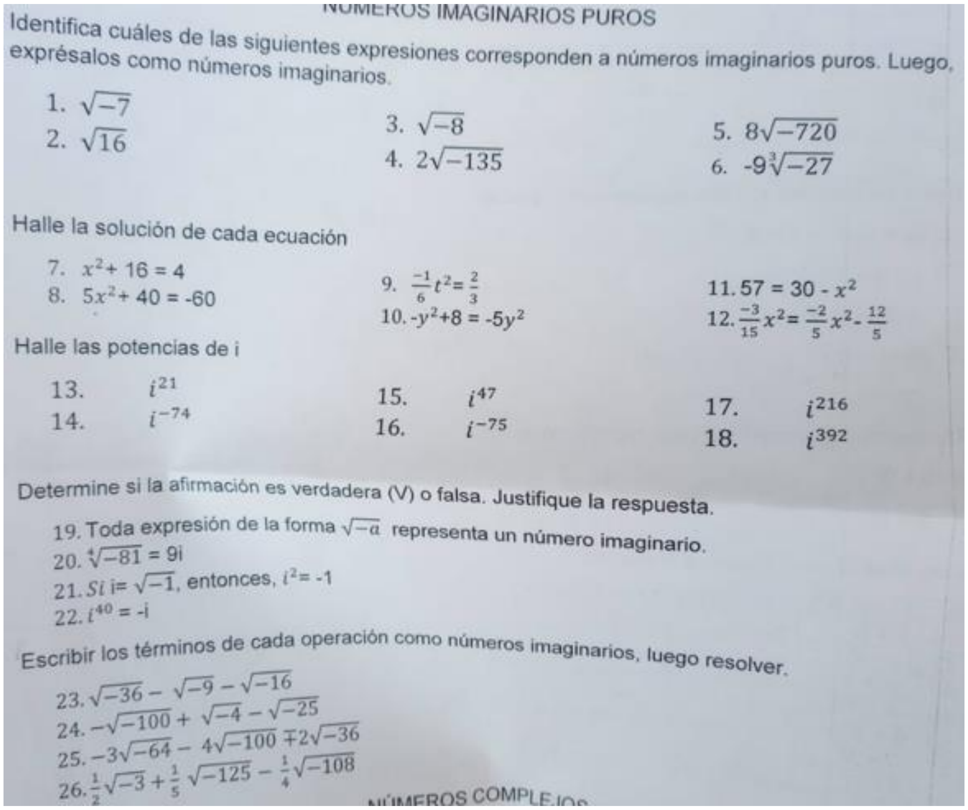
Por otro lado, considerando el esquema secuencial elaborado por Grize (1997) sobre los números complejos, como título ocupa la posición , o también es lo que hace referencia al objeto complejo [Oc]. Los posibles interrogantes que se pueden generar como: ¿Cómo se grafican los números complejos? y ¿Cuál es la diferencia de graficar un numero complejo y un número real? ocupan la posición lo que significa que el objeto complejo pasa a ser un objeto problemático [Op]. Partiendo de [Op] todos los procesos que se ejecutan en cada explicación y las indagaciones que se les hacen a las alumnas en el transcurso de estos, ocupan la posición ,es decir con estas acciones se da lugar a la explicación. Finalmente, con base a lo anterior en la posición el objeto complejo [Oc] se convierte en un objeto explicado [Oe], es decir comprensible.

En la Imagen 27 se observa la cuarta hoja de ejercicios, con la cual se trabajó para los temas de números imaginarios puros, potencias de y operaciones con números imaginarios.

Por otra parte, para esta ocasión, primero se presentará el conjunto de soluciones de la alumna que se relacionan únicamente con los ejercicios de esta hoja con los elementos de los números complejos que se acaban de mencionar. Posteriormente se seguirá ese mismo orden con la alumna .

Temática: números imaginarios puros y potencias de

Imagen 27. Hoja de ejercicios números imaginarios y potencias de



NÚMEROS IMAGINARIOS PUROS

Identifica cuáles de las siguientes expresiones corresponden a números imaginarios puros. Luego, exprésalos como números imaginarios.

1. $\sqrt{-7}$
2. $\sqrt{16}$
3. $\sqrt{-8}$
4. $2\sqrt{-135}$
5. $8\sqrt{-720}$
6. $-9\sqrt[3]{-27}$

Halle la solución de cada ecuación

7. $x^2 + 16 = 4$
8. $5x^2 + 40 = -60$
9. $\frac{-1}{6}t^2 = \frac{2}{3}$
10. $-y^2 + 8 = -5y^2$
11. $57 = 30 - x^2$
12. $\frac{-3}{15}x^2 = \frac{-2}{5}x^2 - \frac{12}{5}$

Halle las potencias de i

13. i^{21}
14. i^{-74}
15. i^{47}
16. i^{-75}
17. i^{216}
18. i^{392}

Determine si la afirmación es verdadera (V) o falsa. Justifique la respuesta.

19. Toda expresión de la forma $\sqrt{-a}$ representa un número imaginario.
20. $\sqrt[4]{-81} = 9i$
21. Si $i = \sqrt{-1}$, entonces, $i^2 = -1$
22. $i^{40} = -i$

Escribir los términos de cada operación como números imaginarios, luego resolver.

23. $\sqrt{-36} - \sqrt{-9} - \sqrt{-16}$
24. $-\sqrt{-100} + \sqrt{-4} - \sqrt{-25}$
25. $-3\sqrt{-64} - 4\sqrt{-100} \mp 2\sqrt{-36}$
26. $\frac{1}{2}\sqrt{-3} + \frac{1}{5}\sqrt{-125} - \frac{1}{4}\sqrt{-108}$

NÚMEROS COMPLEJOS

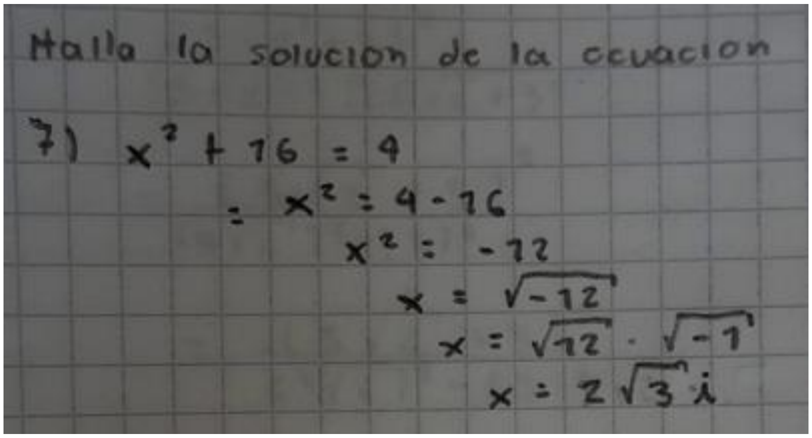
Fuente: elaborado por el docente titular

Los siguientes ejercicios abarcaran las soluciones del presente tema. Primeramente, pertenecerán a la alumna [redacted]; se describirán sus soluciones, adicionalmente se dan a conocer las las argumentaciones de la alumna a raíz de una serie de indagaciones y con base a ellas se reconocerá las relaciones que existan con las explicaciones por parte del practicante. De manera análoga, se hará el mismo proceso con los ejercicios de [redacted].

Los siguientes ejercicios pertenecen a la alumna [redacted] y se hará su respectivo análisis (Imagen 28).

Ejercicio a: [redacted].

Imagen 28. Evidencia de [redacted]



Fuente: notas del cuaderno de la alumna D_1.

Para la segunda igualdad, "16 lo pasa al lado derecho de la igualdad con su operación inversa", de lo cual le resulta , después en la tercera igualdad aplica raíz cuadrada a ambos miembros de la igualdad. Posteriormente en la cuarta línea, dado a que comparten igual índice, aplica la propiedad del producto de radicales con la finalidad de separar los radicales y así . Así, en la quinta línea escribe la equivalencia de = y conjuntamente reduce , por tanto, resulta

Se presentan una serie de indagaciones a la alumna para conocer los argumentos.

R1-F: por favor, dime ¿cómo realizaste cada paso?

R2-:como 16 está sumando pasa al otro lado a restar a 4. Luego, al hacer la resta, me queda , después le saco raíz cuadrada a y a y como , no es un número real, es un número complejo.

R3-F: ¿Por qué aseguras que no es un número real?

R4-: Porque como no tiene índice el radical, eso quiere decir que es dos y como dos es un número par y su radicando es negativo, entonces no tiene solución en los números reales.

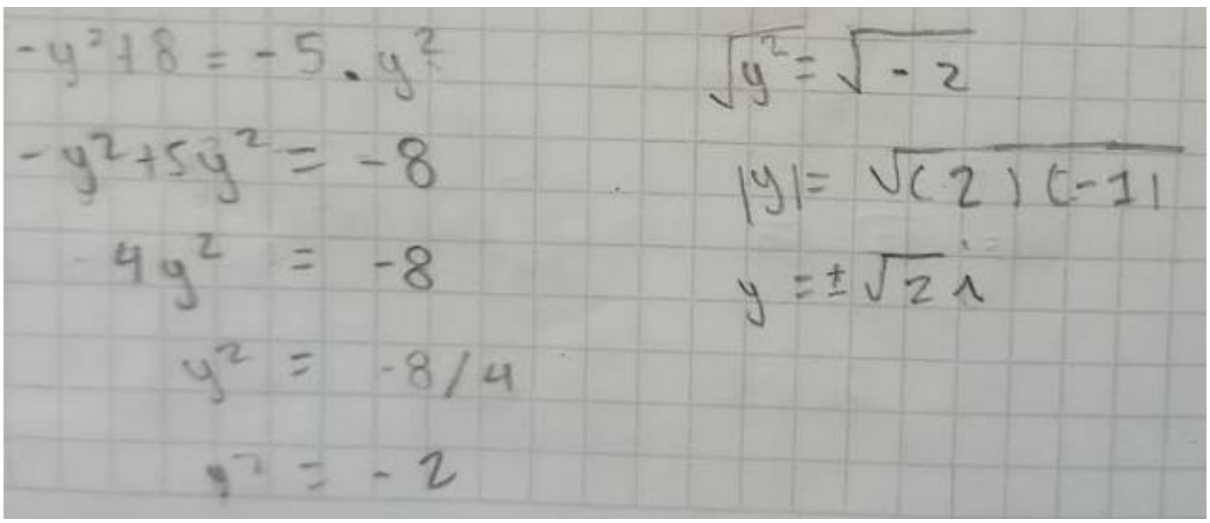
R5-F: Muy bien, continua.

R6-[redacted]: Entonces como nos explicó, [redacted] y por la propiedad del producto de radicales me queda [redacted], y ya por último, como sé que al descomponer en factores primos 12, me queda como [redacted], entonces simplificó el exponente 2 con el 2 del índice del radical, además como nos decía que [redacted], entonces me queda [redacted]

Las siguientes respuestas corresponden a la alumna [redacted].

Ejercicio e: [redacted]

Imagen 29. Evidencia de [redacted]



Fuente: notas del cuaderno de la alumna D_2.

Traspone el término [redacted] con su operación inversa al lado izquierdo de la igualdad simultáneamente, de manera análoga lo hace con 8. Para la tercera igualdad, al operar el lado izquierdo, le resulta [redacted] y del lado derecho -8. Posteriormente, en la cuarta fila traspone el coeficiente numérico 4 con su operación inversa al lado derecho de la igualdad, de esta manera, en la quinta línea obtiene [redacted]. Luego en la sexta igualdad, ejecuta raíz cuadrada en ambos miembros de la igualdad, para obtener [redacted]; para finalizar, considera la equivalencia de [redacted] y con concluye con [redacted]

Se presentan una serie de indagaciones a la alumna para conocer los argumentos.

R1-F: Por favor, puedes explicarme cada paso del ejercicio.

R2-: como lo ideal es que la variable quede positiva, paso el al otro lado de la igualdad y 8 lo paso para el mismo lado donde estaba antes . En el siguiente igual, me queda =-8. Como 4 está multiplicando, entonces pasa a dividir a -8. De esto me da . Ahora, lo que hago es sacar la raíz en los dos lados, quedandome), pero como sé que puedo separar los radicales por tener igual índice, entonces y es por eso que al final me queda =

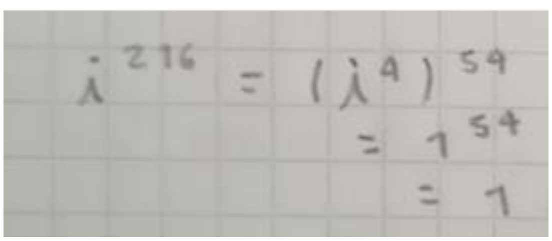
R3-F: ¿Por qué ?

R4-: porque no existe en los números reales, entonces como el índice es dos, y tiene como radicando , entonces eso un imaginario.

A continuación, se le solicita hallar las potencias de (Imagen 29).

Ejercicio b:

Imagen 30. Evidencia de



Fuente: notas del cuaderno de la alumna D_1.

Se infiere que ha realizado la división de 216 entre 4, de lo cual multiplica el divisor 4 por el cociente 54, y como tiene residuo cero, no lo considera. De esta forma, por la propiedad de potencia de una potencia, toma 4 como exponente de la base y 54 como el exponente que abarca a toda la expresión . De esta forma, en la segunda igualdad como tiene el valor de 1, entonces y este tiene como exponente 98, concluye que su resultado es 1

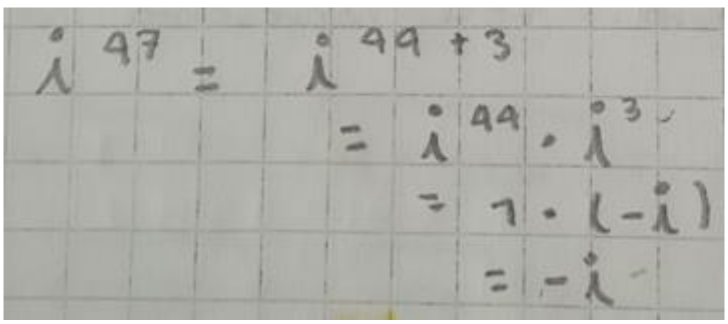
Se presentan una serie de indagaciones a la alumna para conocer los argumentos.

R1-F: por favor, me explicas cómo realizaste cada paso

R2:- Como usted nos explicó en la tabla, que el ciclo se repite cada cuatro potencias, entonces debo dividir entre 4 a los exponentes. Así dividí 216 entre 4 y me da 54, entonces lo elevo a la 4 y vuelvo a elevarlo a 54. Entonces, como es igual a 1, entonces me queda uno elevado a 54, y como no importa al número al cual este elevado 1 y siempre valdrá 1 según usted, entonces me queda como respuesta 1.

Ejercicio c:

Imagen 31. Evidencia de



Fuente: notas del cuaderno de la alumna D_1.

Se puede inferir que ha dividido 47 entre 4, de lo cual obtiene como cociente 11 y como residuo 3, entonces por propiedad de los exponentes al tener el producto de dos bases iguales, suma 44 y 3 en la primera igualdad, donde 44 es el producto que se obtiene al multiplicar el divisor con el cociente. Por otro lado, ejecuta la equivalencia de la propiedad que se acaba de mencionar en la segunda línea. Por otro lado, en la tercera línea ha dividido 44 entre 4 de lo cual le resulta como cociente 11. De esta forma, por la propiedad de potencia de una potencia, toma 4 como exponente de la base i y 54 como el exponente que abarca a toda la expresión .

Se presentan una serie de indagaciones a la alumna para conocer los argumentos.

R1-F: Por favor, me explicas cada paso.

R2-:divido 47 entre 4, y eso me da 44 más 3.

R3-F: ¿Por qué te da ese resultado?

R4-[redacted]**:**porque al dividir, no recuerdo como se llama la parte donde está el 4 y en la que está el 11 en la división, pero [redacted] y el 3 es lo que sobra de la división, entonces al sumar [redacted] más [redacted] me da [redacted].

Luego, me queda [redacted]

R5-F: recuerda que donde está ubicado el 4 se llama divisor y en la que está el 11 se llama cociente y el 3 residuo .

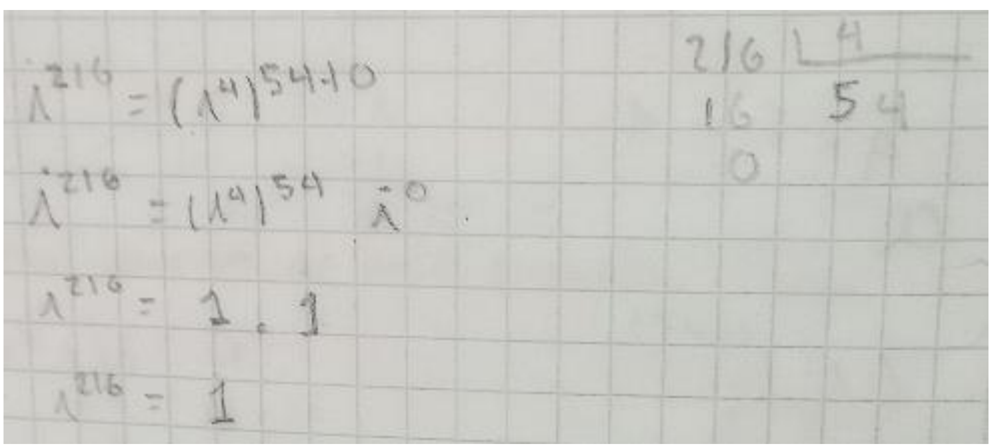
R6-F: ¿Cómo obtienes en la tercera igualdad [redacted]?

R7-[redacted]: sé que [redacted] y [redacted], según la tabla entonces pongo en el otro igual [redacted], que esto es igual a [redacted].

Las siguientes respuestas corresponden a la alumna [redacted].

Ejercicio b: [redacted]

Imagen 32. Evidencia de [redacted]



Fuente: notas del cuaderno de la alumna D_2.

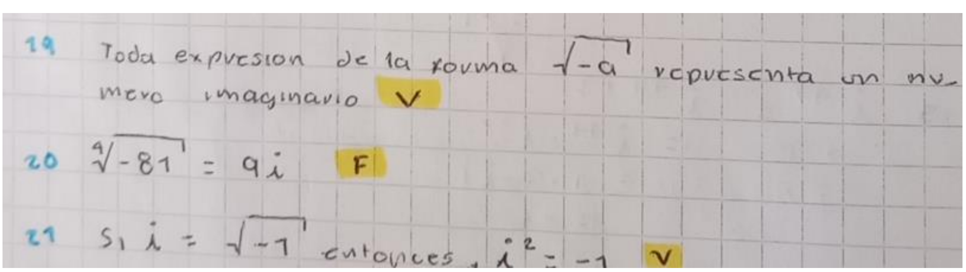
Se observa en la parte derecha que realiza la división de 216 entre 4. En ese mismo orden de ideas, multiplica el divisor por el cociente. En la misma parte, por la propiedad de potencia de una potencia, toma 4 como exponente de la base [redacted] y 54 como el exponente que abarca a toda la expresión i4, además, aunque de la misma división le resulta cero como residuo, [redacted] lo tomo para expresar su resultado en la primera igualdad. Con base al resultado anterior, en la segunda fila por la propiedad del producto de potencias de igual base, escribe su equivalencia. Teniendo en cuenta la siguiente igualdad, como [redacted] y [redacted], entonces concluye que [redacted].

Se presentan una serie de indagaciones a la alumna para conocer los argumentos.

> **R1:** por favor cuéntame, ¿qué hiciste en cada proceso?
>
> **R2-**[redacted]**:** porque cada 4 se repite el ciclo según la tabla, entonces dividí 216 entre 4 y me da 54 y le sumo cero. Que es el residuo, es decir, [redacted] Y precisamente a eso es lo que me queda elevado el [redacted]. Después de eso, separó la potencia, entonces [redacted]por [redacted].
>
> **R3-F:** ¿Qué te permite pasar de [redacted]
>
> **R4-**[redacted]**:** No, lo se profe.
>
> **R5-F:** Bueno, ese paso se debe a la propiedad del producto de potencias iguales, y como [redacted] es una de ellas, se pueden sumar solo sus exponentes o si quieres puedes separar las bases con un producto de por medio y les dejas sus respectivos exponentes como lo has hecho en la segunda igualdad.
>
> **R6-** [redacted]**:** como [redacted] es igual a [redacted], entonces me queda uno elevado a 54, y por la parte de a la cero, como [redacted]esta elevado a cero, entonces todo número elevado a la cero da 1, entonces al final me da 1.

Las siguientes respuestas corresponden a la alumna [redacted].

Imagen 33. Evidencia de [redacted]



Fuente: notas del cuaderno de la alumna D_1.

En estos ejercicios se solicita analizar el valor de verdad de cada enunciado.

Ejercicio 19. Toda expresión de la forma representa un numero imaginario. Se puede deducir que, interpreta que cualquier cantidad negativa y con índice par, resulta ser un numero imaginario, esto basado en el valor de verdad que le ha asignado al enunciado.

Se presentan una serie de indagaciones a la alumna para conocer los argumentos.

> **R1-F:** Por favor dime cuales son las justificaciones que tienes para haber respondido cada ítem
>
> **R2-**: En el punto 19, es verdadero porque como la variable puede ser cualquier número negativo y el radical tiene índice dos y dos es par, entonces me daría como resultado un numero imaginario.

Ejercicio 20. Se solicita el valor de verdad o falsedad del término

Es evidente que mediante el valor de falsedad que le asigna a la expresión, reconoce que la raíz cuarta de –81 no es .

Se presentan una serie de indagaciones a la alumna para conocer los argumentos.

> **R1-F:** ¿Por qué es falso?
>
> **R2-F:** En el punto 20, es falso porque la raíz cuarta de 81 no es 9.
>
> **R3-F**: ¿En ese punto 20, suponiendo que estuviera otro número negativo el cual tuviera raíz cuarta? ¿Es posible que me resulte un numero imaginario?
>
> **R4-**: Si profe, porque 4 es un número par y al ser par y teniendo un número negativo dentro del radical, nos da un número imaginario.

Ejercicio 21. Si entonces .

Ante su valor de verdad, se interpreta que la alumna asimila correctamente que, de la raíz cuadrada de menos uno, resulta la unidad imaginaria y que la operación inversa de raíz cuadrada resulta menos uno

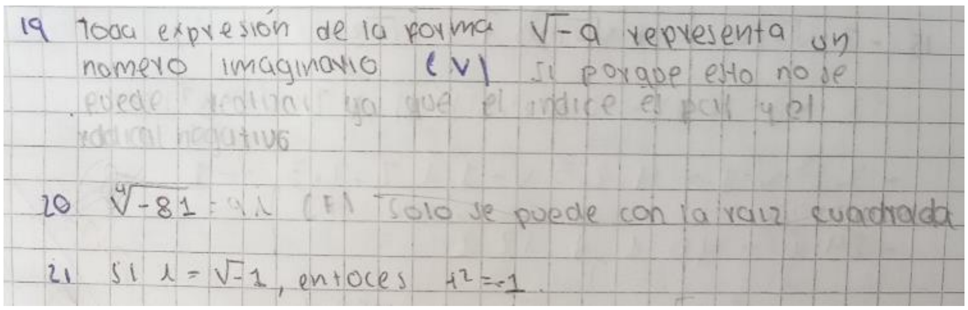
Se presentan una serie de indagaciones a la alumna para conocer los argumentos.

R5-[redacted]: es verdadero porque es lo mismo que haberle sacado raíz cuadrada a [redacted] y a [redacted], entonces el dos al que esta elevado [redacted] se simplifica con el radical y ya nos queda [redacted]

Las siguientes respuestas corresponden a la alumna [redacted].

Conjunto de ejercicios del 19 al 21

Imagen 34. Ejercicios del 19 al 21 resueltos [redacted].

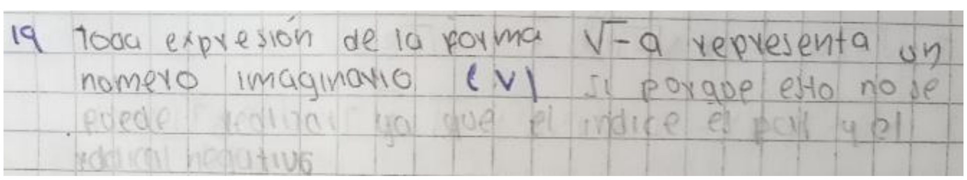


Fuente: Fuente: notas del cuaderno de la alumna [redacted].

En estos ejercicios se solicita analizar el valor de verdad de cada enunciado.

Ejercicio 19 (Imagen 36).

Imagen 35. Resolución del ejercicio 19.



Fuente: Fuente: notas del cuaderno de la alumna [redacted].

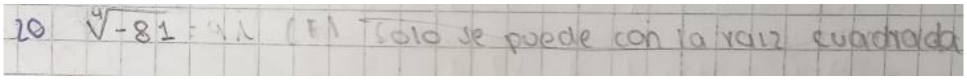
Se puede deducir que, interpreta que cualquier cantidad negativa y con índice par resulta ser un número imaginario, esto basado en el valor de verdad que le ha asignado al enunciado.

Se presentan una serie de indagaciones a la alumna para conocer los argumentos.

R1-F: ¿Por qué consideras el valor de verdad para este punto?

R2-[redacted]: es verdadero por lo que el índice es par y el radicando negativo.

Imagen 36. Resolución del ejercicio 20.



Fuente: notas del cuaderno de la alumna [redacted].

Es evidente que mediante el valor de falsedad que le asigna a la expresión, reconoce que la raíz cuarta de –81 no es 9i.

Se presentan una serie de indagaciones a la alumna para conocer los argumentos:

R1-F: ¿Cuál es el motivo de asignarle el valor de falsedad a la expresión?

R2-[redacted]: es falsa porque para que dé [redacted] solo se puede con raíz cuadrada

R3-F ¿De dónde surge el [redacted] acompañado con el [redacted]?

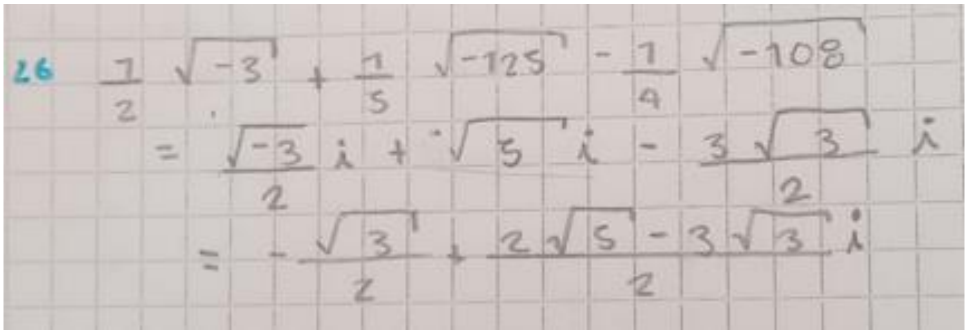
R4-[redacted]: el nueve sería si hubiera sido raíz cuadrada de 81 y el [redacted] porque como el nueve esta negativo y el índice 4 es par.

En la Imagen 38 se observa la cuarta hoja de ejercicios, con la cual se trabajó los temas de números complejos, grafica de números complejos, opuesto y conjugado de número complejo y gráfica de un numero complejo y su conjugado.

En el siguiente ejercicio, se les pide realizar operaciones con números complejos (Imagen 36).

Ejercicio d: [redacted]

Imagen 37. Evidencia de [redacted]



Fuente: notas del cuaderno de la alumna [redacted]..

Obtiene el producto entre cada coeficiente numérico que posee cada término de la expresión aritmética, simultáneamente en el tercer termino de lo ha reducido a su máxima expresión, conjuntamente, se infiere que ha simplificado el coeficiente numérico 6 del término [redacted] con 4; posteriormente a cada término de la expresión ha separado la unidad imaginaria utilizando la propiedad del producto de radicales con igual índice.

Se presentan una serie de indagaciones a la alumna para conocer los argumentos.

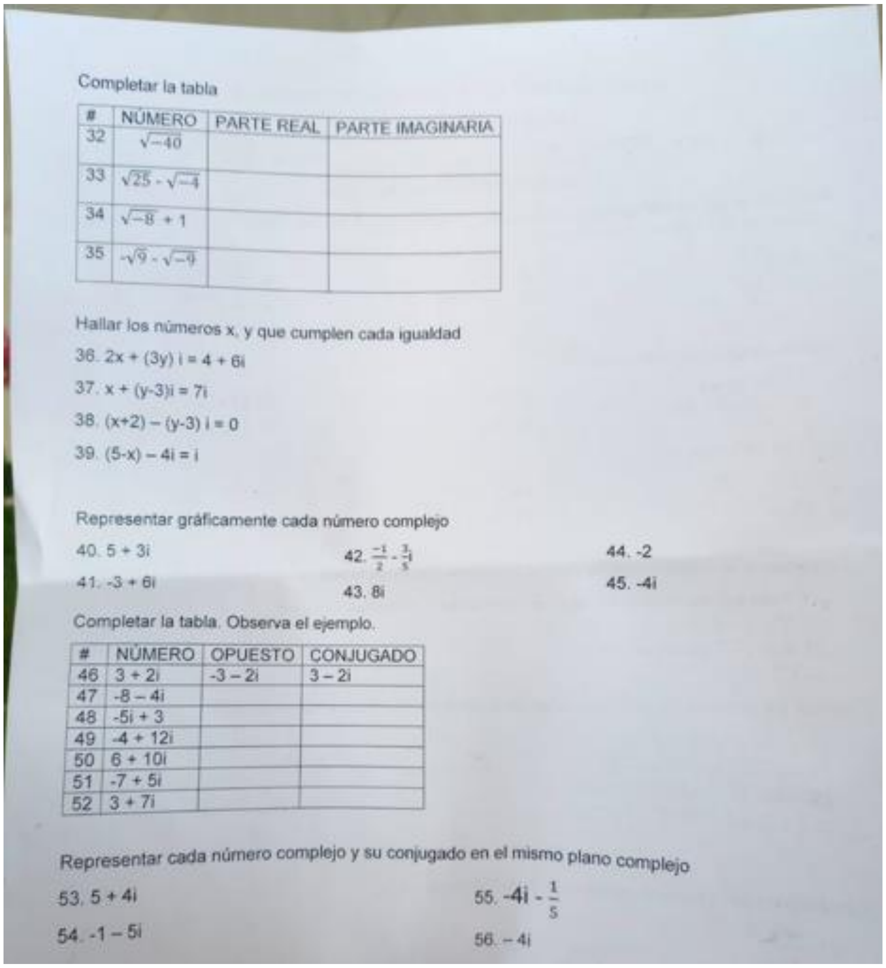
> **R1-F:** por favor, procede a explicar cada paso.
>
> **R2-[redacted]:** multiplico a cada número que está ahí fuera de los radicales, con cada radical y en el último radical, descompongo –108 y me quedo [redacted], pero 6 lo simplifique con 4 que estaba de denominador, y me queda [redacted]; además cuando hice la descomposición el resultado me quedo negativo y aproveche a sacarle la unidad imaginaria [redacted]; que es igual a [redacted]. Y para el otro igual, realizo los dos fraccionarios y me da eso.

Para estas temáticas de números imaginarios puros, potencias de [redacted] y las temáticas siguientes que también abarca los números complejos, el contenido que le corresponde a cada temática, será adjuntado al final de los resultados en una única tabla de codificación abierta. .

Temática: números complejos.

Los siguientes ejercicios pertenecen a la alumna [redacted].

Imagen 38. Hoja correspondiente a los ejercicios de números complejos.



Completar la tabla

#	NÚMERO	PARTE REAL	PARTE IMAGINARIA
32	$\sqrt{-40}$		
33	$\sqrt{25} - \sqrt{-4}$		
34	$\sqrt{-8} + 1$		
35	$-\sqrt{9} - \sqrt{-9}$		

Hallar los números x, y que cumplen cada igualdad

36. $2x + (3y)\,i = 4 + 6i$

37. $x + (y-3)i = 7i$

38. $(x+2) - (y-3)\,i = 0$

39. $(5-x) - 4i = i$

Representar gráficamente cada número complejo

40. $5 + 3i$

41. $-3 + 6i$

42. $\frac{-1}{2} - \frac{3}{5}i$

43. $8i$

44. -2

45. $-4i$

Completar la tabla. Observa el ejemplo.

#	NÚMERO	OPUESTO	CONJUGADO
46	$3 + 2i$	$-3 - 2i$	$3 - 2i$
47	$-8 - 4i$		
48	$-5i + 3$		
49	$-4 + 12i$		
50	$6 + 10i$		
51	$-7 + 5i$		
52	$3 + 7i$		

Representar cada número complejo y su conjugado en el mismo plano complejo

53. $5 + 4i$

54. $-1 - 5i$

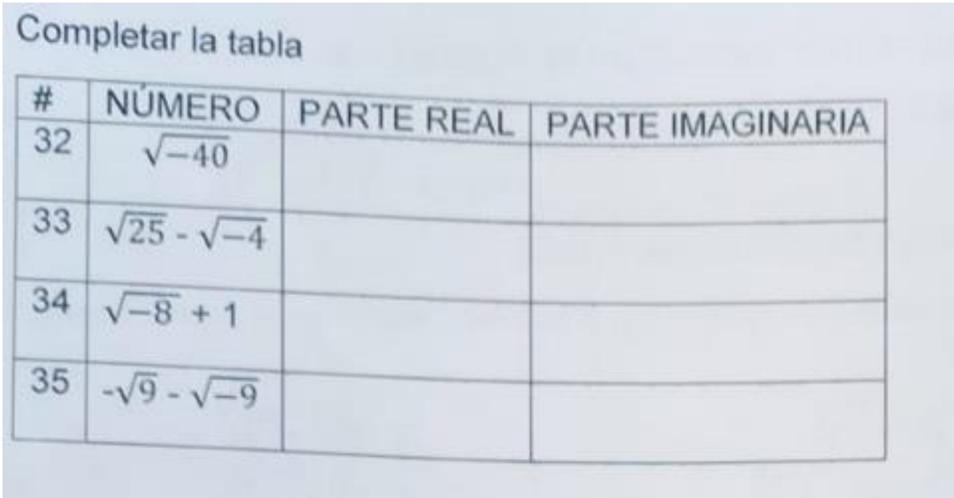
55. $-4i - \frac{1}{5}$

56. $-4i$

Fuente: taller elaborado por el docente titular.

De la hoja de ejercicios, en la tabla se les solicita identificar la parte real y la parte imaginaria (Tabla 6).

Tabla 5. Identificación de números reales e imaginarios.

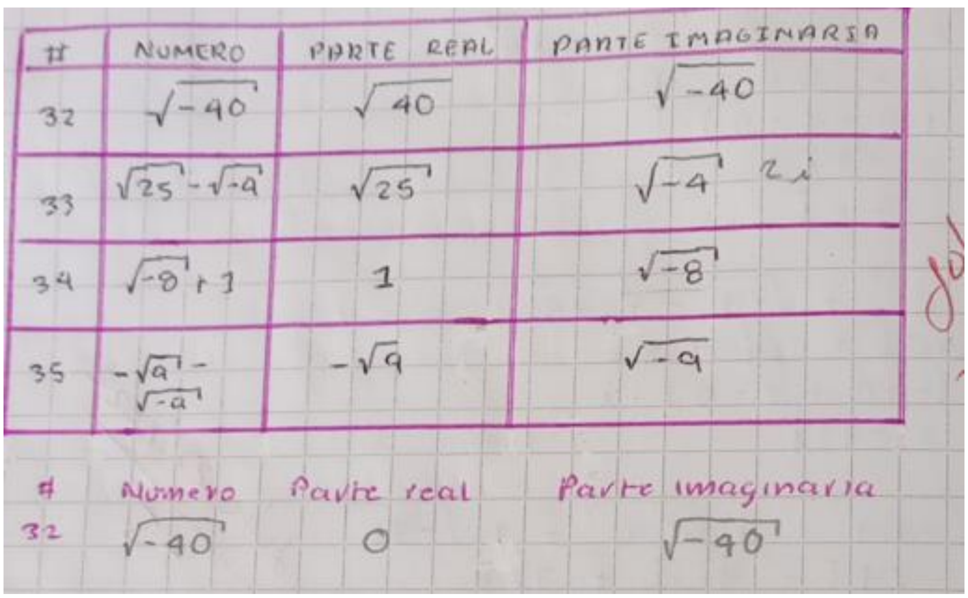


Completar la tabla

#	NÚMERO	PARTE REAL	PARTE IMAGINARIA
32	$\sqrt{-40}$		
33	$\sqrt{25}$ - $\sqrt{-4}$		
34	$\sqrt{-8}$ + 1		
35	-$\sqrt{9}$ - $\sqrt{-9}$		

Fuente: elaborado por el docente titular.

Imagen 39. Respuestas de la 32 y 33 por la alumna [redacted].



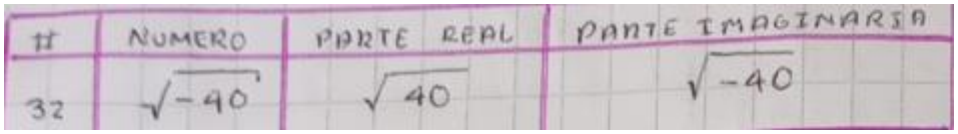
#	NUMERO	PARTE REAL	PARTE IMAGINARIA
32	$\sqrt{-40}$	$\sqrt{40}$	$\sqrt{-40}$
33	$\sqrt{25} - \sqrt{-9}$	$\sqrt{25}$	$\sqrt{-4}$ 2i
34	$\sqrt{-8} + 1$	1	$\sqrt{-8}$
35	$-\sqrt{9} - \sqrt{-9}$	$-\sqrt{9}$	$\sqrt{-9}$

#	Numero	Parte real	Parte imaginaria
32	$\sqrt{-40}$	0	$\sqrt{-40}$

Fuente: notas del cuaderno de la alumna [redacted].

Composición 1. Ejercicio 32

#	numero	Parte real	Parte imaginaria
[redacted]	[redacted]	[redacted]	[redacted]



#	NUMERO	PARTE REAL	PARTE IMAGINARIA
32	$\sqrt{-40}$	$\sqrt{40}$	$\sqrt{-40}$

Fuente: elaboración propia.

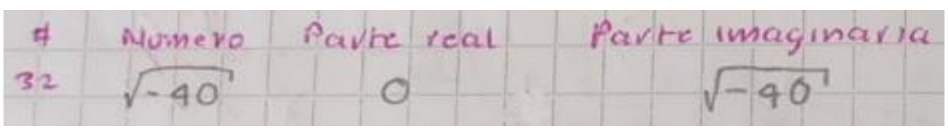
Se observa que, por parte de la alumna considera que el número [redacted] es la parte real y, por consiguiente, la parte imaginaria [redacted], lo cual es incorrecto.

Con base en la tabla, se presentan una serie de indagaciones a la alumna para conocer los argumentos que tiene la alumna frente a la identificación de la parte real y la parte imaginaria.

R1-F: Por favor, ¿cuál es la justificación de haber ubicado cada número en la tabla?

R2-[redacted]: [redacted] es la parte real y como cuarenta es negativo y está dentro de un radical con índice dos, sería la parte imaginaria.

Imagen 40. Corrección del ejercicio 32.



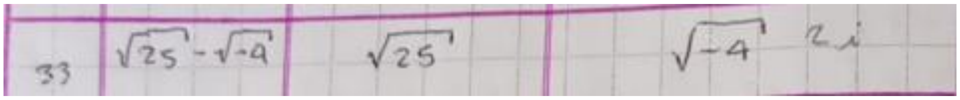
#	Numero	Parte real	Parte imaginaria
32	$\sqrt{-40}$	0	$\sqrt{-40}$

Fuente: notas del cuaderno de la alumna [redacted]

R1[redacted]:Como usted me indicó, en este caso la parte real es [redacted] y la parte imaginaria es [redacted] .

Composición 2. Ejercicio 3.

#	numero	Parte real	Parte imaginaria
33	[redacted]	[redacted]	[redacted]



Fuente: notas del cuaderno de la alumna [redacted].

Se observa que la alumna identifica como la parte real [redacted] y la parte imaginaria [redacted]

Continuando con las indagaciones se obtiene que:

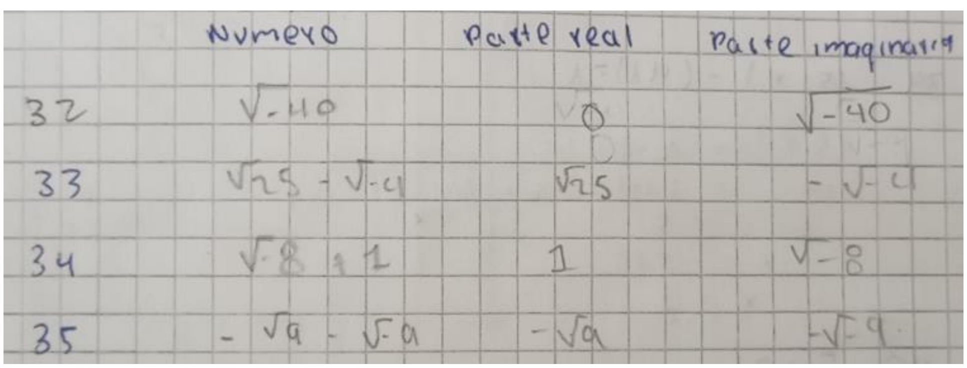
R1-F: ahora, para este ejercicio ¿cuáles son las correspondientes partes imaginaria y real?

R2-[redacted]: [redacted] es la parte real por lo que el radicando es positivo y [redacted] es la imaginaria, bueno este caso si resuelvo ese [redacted] seria [redacted].

Continúa argumentando de manera análoga para los puntos 34 y 35.

A continuación, se presentarán los ejercicios argumentados por la alumna D_2.

Imagen 41. Respuestas de 32 y 34 por la alumna [redacted]



Fuente: notas del cuaderno de la alumna D_2.

Composición 3. Ejercicio 32.

#	numero	Parte real	Parte imaginaria
32	[redacted]	0	[redacted]

Fuente: notas del cuaderno de la alumna [redacted].

Se presenta una serie de indagaciones para conocer las argumentaciones de la alumna D2 frente al tema de los números complejos.

R1-F: Por favor, puedes explicarme cada paso.

R2- [redacted]: en el punto 32, la parte real es cero, aunque no esté escrita y la parte imaginaria es [redacted].

Composición 4. Ejercicio 34.

#	número	Parte real	Parte imaginaria
34	[redacted]	1	[redacted]

Fuente: notas del cuaderno de la alumna [redacted].

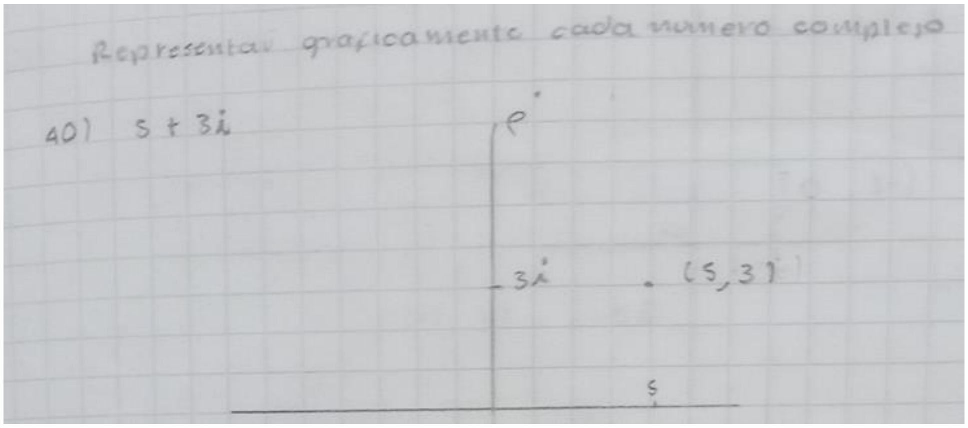
Aunque el orden del binomio se encuentra alterado, no le impide identificar la parte real y la parte imaginaria; continuando con las indagaciones a la alumna se tiene que:

R1-[redacted]**:** en el punto 34, la parte real es 1 y la parte imaginaria es -8

Temática: Representación en el plano complejo de números complejos.

Los siguientes ejercicios pertenecen a [redacted] .

Imagen 42. Ejercicio 40: [redacted]



Fuente: notas del cuaderno de la alumna D_1.

La alumna ubicó en el eje real el valor 5 y, a su vez, ubicó en el eje imaginario el valor 3, además sobre el plano complejo, en su parte negativa marca el punto y le asigna coordenadas en el lenguaje cartesiano .

Se presentan una serie de indagaciones a la alumna para conocer los argumentos que tiene frente a la representación geométrica de los números complejos:

R1-F: dime ¿cómo ubicas el número complejo en el plano complejo?

R2-: como esta en la forma binomial, en el plano lo paso a su forma cartesiana y de ahí como nos decía, me deslizo sobre el eje real hasta llegar a 5; de ahí subo hacia el eje de los imaginarios hasta el número 3 y ubico la pareja

R3-F: ¿Por ejemplo, es lo mismo ubicar que ?

R4-: No

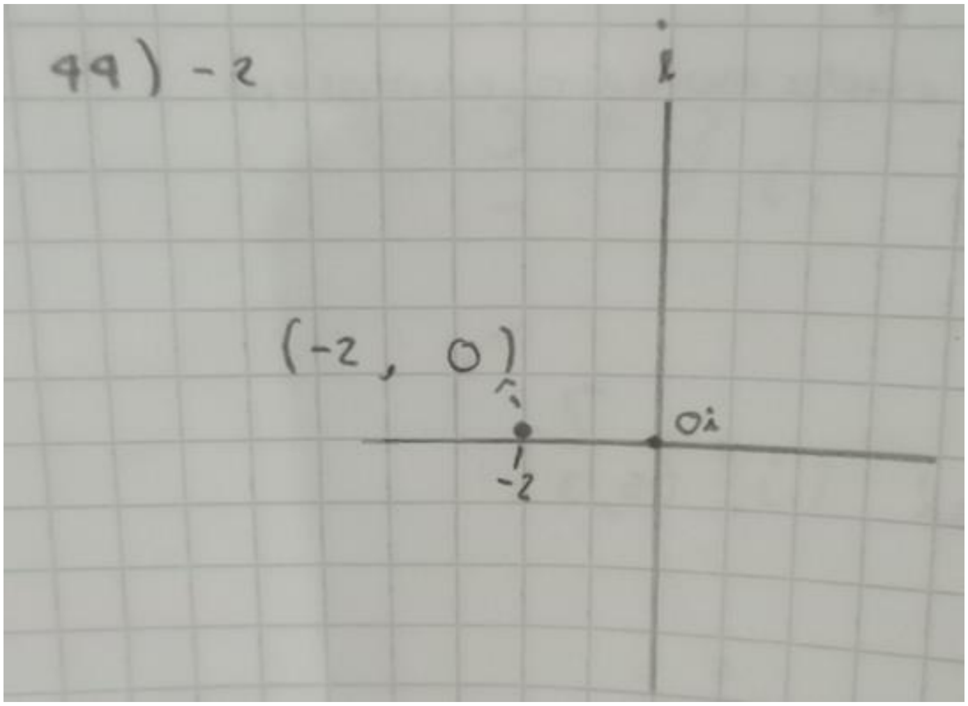
R5-F:¿Por qué?

R6-: Porque 5 corresponde al eje real y 3 al eje imaginario

R7-F: ¿en ese caso, 5 a que conjunto de números pertenece y 3 a que conjunto de números pertenece?

R8-: 5 pertenece a los reales y 3 a los complejos.

Imagen 43. Ejercicio 44:



Fuente: notas del cuaderno de la alumna D_1.

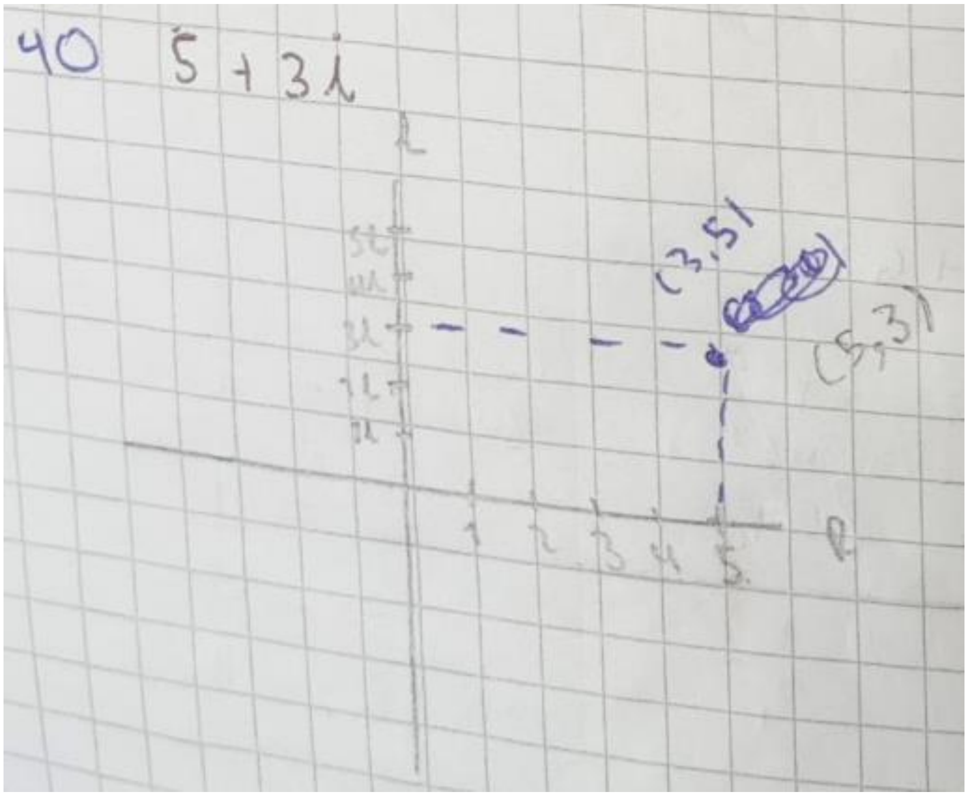
La alumna se desplaza únicamente sobre el eje real hasta el valor –2 puesto que reconoce la inexistencia de la parte imaginaria, de esta manera sitúa el punto sobre la parte negativa del eje real, y en consecuencia le asigna la coordenada en el lenguaje cartesiano .

Se continua con las indagaciones con base a las gráficas:

> **R1-F**: cuéntame cómo ubicas este número complejo
>
> **R2-**: Como es cero, no puedo subir nada por el eje , pero si puedo deslizarme por el eje y así ubico , entonces en el plano queda
>
> **R3-F:** ¿cómo representarías ese número complejo en la forma binomial?
>
> **R4-**: Aah lo haría como: , es que recuerdo que en la tabla me corrigió cuando el error que tenía con

Las siguientes respuestas corresponden a la alumna (Imagen 44).

Imagen 44. Ejercicio 40: [redacted]



Fuente: notas del cuaderno de la alumna D_2.

Se evidencia que, primeramente, al ubicar la coordenada [redacted] en la parte positiva del plano complejo, erra en la posición de los elementos de la pareja ordenada escribiéndolo como [redacted], sin embargo, posteriormente enmienda la ubicación de la coordenada, es decir, toma el valor 5 para desplazarse sobre el eje real y el valor 3 para desplazarse sobre el eje imaginario, situando así, el punto en la parte positiva del plano complejo y a su vez le asigna la coordenada [redacted].

Se presentan una serie de indagaciones a la alumna [redacted] para conocer los argumentos que tiene la alumna frente a ubicar los números complejos en el plano complejo.

R1-F: por favor, dime como ubicas este número complejo

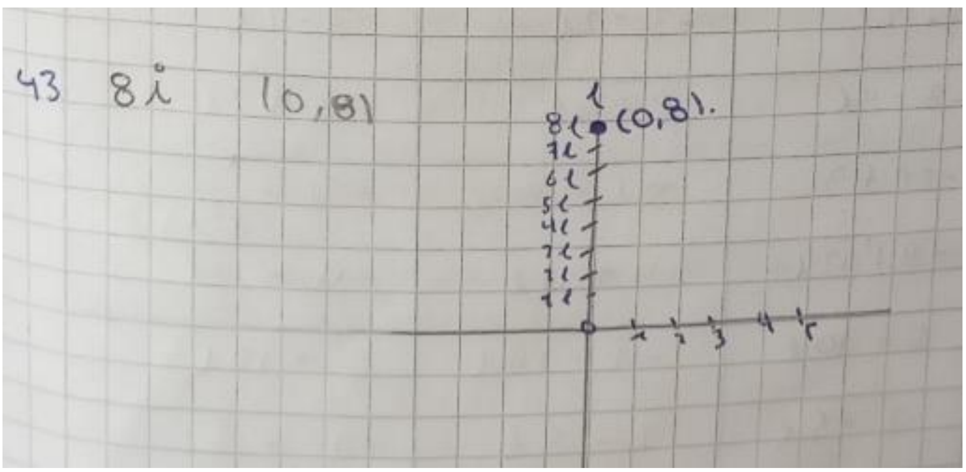
R2-[redacted]**:** Profe, creo que está mal ubicados 3 y 5; porque primero deben estar los reales y luego los imaginarios ¿cierto?

R3-F: Si, tienes toda la razón, pero entonces... ¿cómo lograste ubicar los puntos si no lo hiciste convenientemente?

R4--: Porque si tenía en mente que debía desplazarme sobre el eje real llegando hasta 5 y de ahí subir hasta , es algo parecido a lo que se hace para ubicar un punto en el otro plano, pero fue que me confundí al pasarlo de la forma binomial creo es que asi como se le llama a esa parejita.

R5-F: Correcto, se llama forma binomial y también en la forma cartesiana y […] si, es semejante a ubicar los puntos en el plano cartesiano.

Imagen 45. Ejercicio 43:



Fuente: notas del cuaderno de la alumna D_2.

La alumna reconoce la inexistencia de la parte real y en consecuencia se desplaza únicamente sobre el eje imaginario situando el punto en la parte positiva del eje, además, le asigna la coordenada en el lenguaje cartesiano .

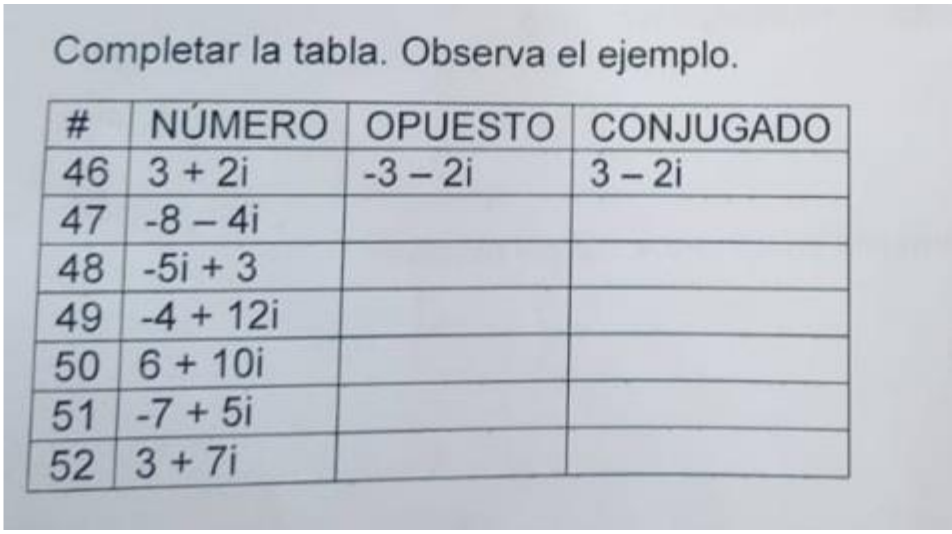
Se presentan una serie de indagaciones a la alumna para conocer los argumentos que tiene la alumna frente a ubicar los números complejos en el plano complejo.

R1-F: explícame por favor como ubicas el número complejo

R2-: Primero paso el numero complejo a la forma cartesiana y aunque no se vea, pero el cero está presente, y por eso cero estaría ubicado en la parte real y 8 en la parte imaginaria, de ahí me desplazo sobre el eje [redacted]porque no me puedo desplazar nada en el eje [redacted] imaginario y ya, es como ubico la coordenada

Temática: Número complejo conjugado.

Tabla 6. Ejercicios del 46 al 52 numero complejo conjugado.

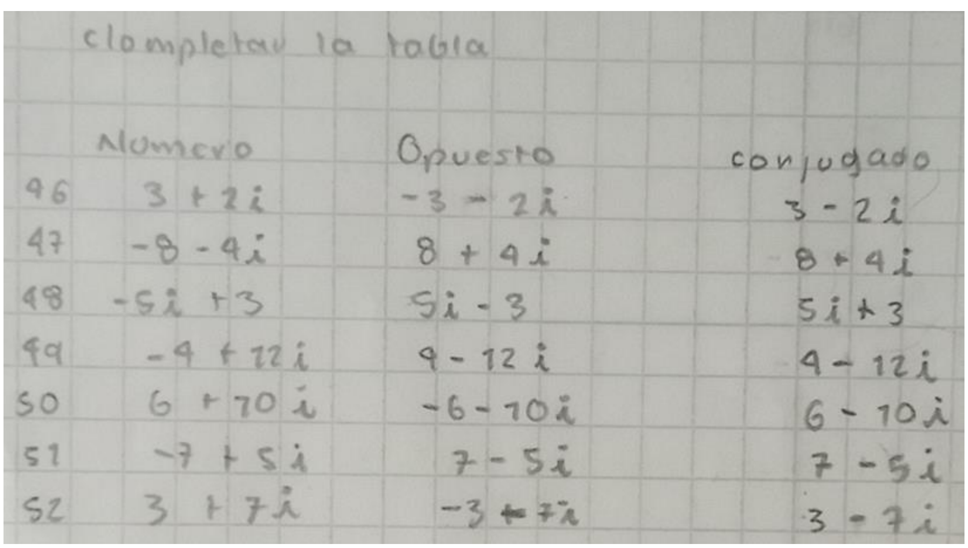

Completar la tabla. Observa el ejemplo.

#	NÚMERO	OPUESTO	CONJUGADO
46	3 + 2i	-3 – 2i	3 – 2i
47	-8 – 4i		
48	-5i + 3		
49	-4 + 12i		
50	6 + 10i		
51	-7 + 5i		
52	3 + 7i		

Fuente: hoja de ejercicios del docente titular.

Los siguientes ejercicios corresponden a la alumna [redacted](Imagen 46).

Imagen 46. Ejercicios del 46 al52 resueltos por [redacted]

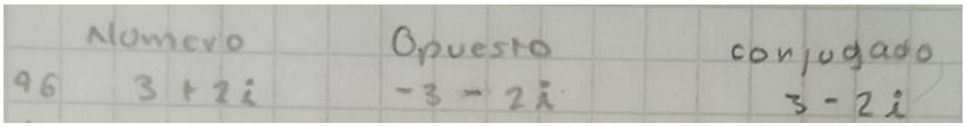

clompletar la tabla

	Numero	Opuesto	conjugado
46	3 + 2i	-3 - 2i	3 - 2i
47	-8 - 4i	8 + 4i	8 + 4i
48	-5i + 3	5i - 3	5i + 3
49	-4 + 12i	4 - 12i	4 - 12i
50	6 + 10i	-6 - 10i	6 - 10i
51	-7 + 5i	7 - 5i	7 - 5i
52	3 + 7i	-3 - 7i	3 - 7i

Fuente: notas del cuaderno de la alumna D_1.

Composición 5. Ejercicio 47.

#	numero	opuesto	conjugado
46	[redacted]	[redacted]	[redacted]



Fuente: notas del cuaderno de la alumna D_1.

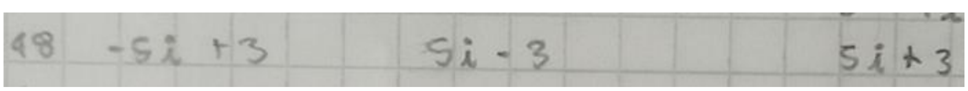
Se evidencia que [redacted] halla el respectivo opuesto y conjugado de la expresión solicitada. Se presentan una serie de indagaciones a la alumna para conocer los argumentos que tiene frente los ejercicios resueltos:

R1-F: explícame por favor cada una de las respuestas

R2-[redacted]: como el opuesto es cambiar los signos de los dos números, entonces el opuesto de [redacted] es [redacted] y el conjugado seria [redacted].

Composición 6. Ejercicio 48.

#	numero	opuesto	conjugado
48	[redacted]	[redacted]	[redacted]



Fuente: notas del cuaderno de la alumna D_1.

Continuando con las indagaciones se obtiene que:

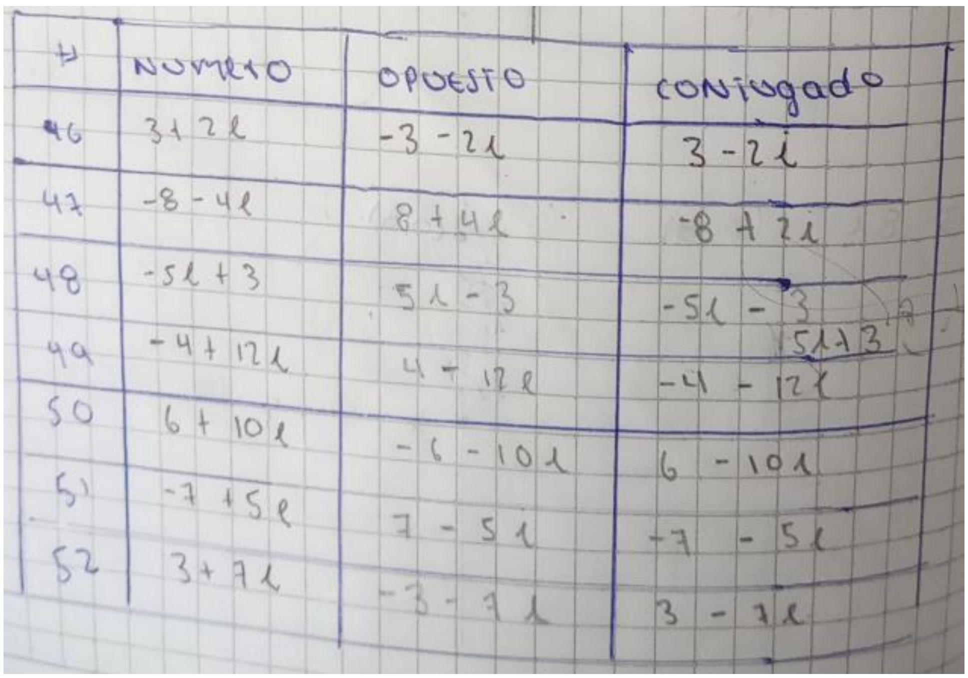
R1-[redacted]**:** en el punto 48, su opuesto es [redacted] y el conjugado es [redacted]

R2-F: ¿Porque cuando te refieres al conjugado el número real 3, no cambia con signo negativo?

R3-[redacted]: porque cuando se trata del conjugado; como usted decía, el único al que se le cambia el signo es a la parte imaginaria, la parte real no se le cambia el signo.

A continuación, se presentarán los ejercicios argumentados por la alumna [redacted] (Imagen 47).

Imagen 47. Ejercicios del 46 al 52 resueltos por [redacted]

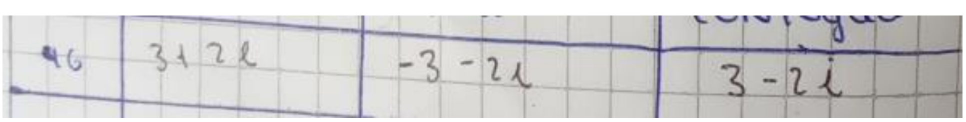


#	NUMERO	OPUESTO	CONJUGADO
46	3+2i	-3-2i	3-2i
47	-8-4i	8+4i	-8+2i
48	-5i+3	5i-3	-5i-3 5i+3
49	-4+12i	4-12i	-4-12i
50	6+10i	-6-10i	6-10i
51	-7+5i	7-5i	-7-5i
52	3+7i	-3-7i	3-7i

Fuente: notas del cuaderno de la alumna D_2.

Composición 7. Ejercicio 46.

#	número	opuesto	conjugado
46	[redacted]	[redacted]	[redacted]



Fuente: elaboración propia.

Se presenta una serie de indagaciones para conocer las argumentaciones de la alumna [redacted] frente al tema conjugado y opuesto por un numero complejo.

R1-F: por favor explícame cada respuesta

R2-[redacted]: como opuesto es cambiarle los signos a los dos números, entonces me queda [redacted] y el conjugado es cambiarle el signo a la parte imaginaria entonces me queda [redacted]

Composición 8.Ejercicio 48.

#	número	opuesto	conjugado
48	[redacted]	[redacted]	[redacted]

Fuente: elaboración propia.

R1-[redacted]**:** el opuesto es [redacted] y el conjugado es [redacted]

R2-F: ¿Por favor, me puedes decir como obtenemos el conjugado de un numero complejo?

R3-[redacted]**:** como le acabo de decir en el otro ejercicio, hay que cambiarle el signo solo al número imaginario.

R4-F: Vale ¿entonces por qué tienes escrito [redacted]?

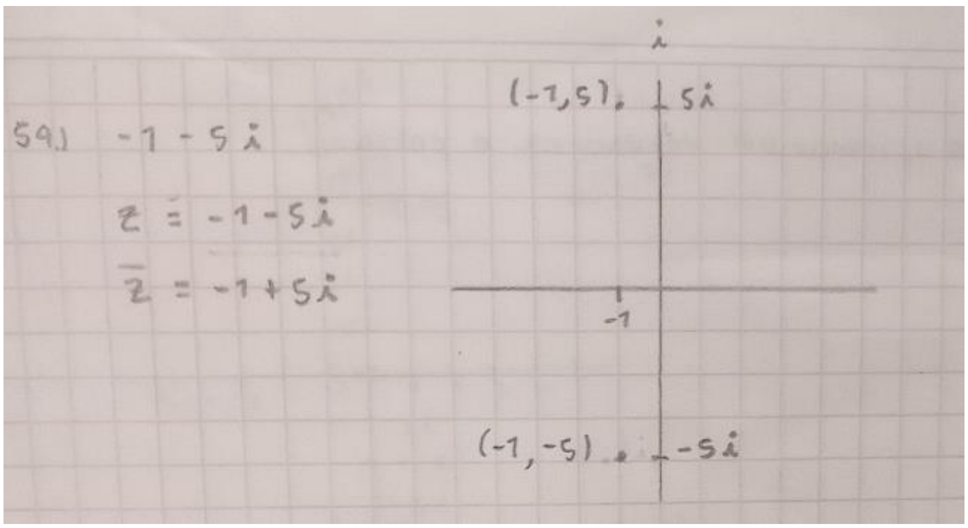
R5-[redacted]**:** Aaah sii profe, eso vi que me había equivocado, no sé porque lo hice, pero es [redacted].

Los siguientes ejercicios que se presentaran corresponden a graficar simultáneamente el conjugado de un numero complejo y el mismo número complejo en el plano complejo.

Temática: representación en el plano complejo del conjugado de un número complejo

Los siguientes ejercicios pertenecen a la alumna [redacted] (Imagen 48).

Imagen 48. Ejercicio 54:[redacted]



Fuente: notas del cuaderno de la alumna D_1.

La alumna [redacted] ubico en el eje real el valor -1 y a su vez, ubico en el eje imaginario el valor -5, además en el plano complejo, en su parte negativa marca el punto y le asigna coordenadas en el lenguaje cartesiano [redacted].

Respecto al conjugado, conserva el valor real y ubica en el plano complejo el valor de 5 en ese sentido marca el punto y le asigna coordenadas en el lenguaje cartesiano [redacted].

Se presenta una serie de indagaciones para conocer las argumentaciones de la alumna [redacted] frente al tema de los números complejos:

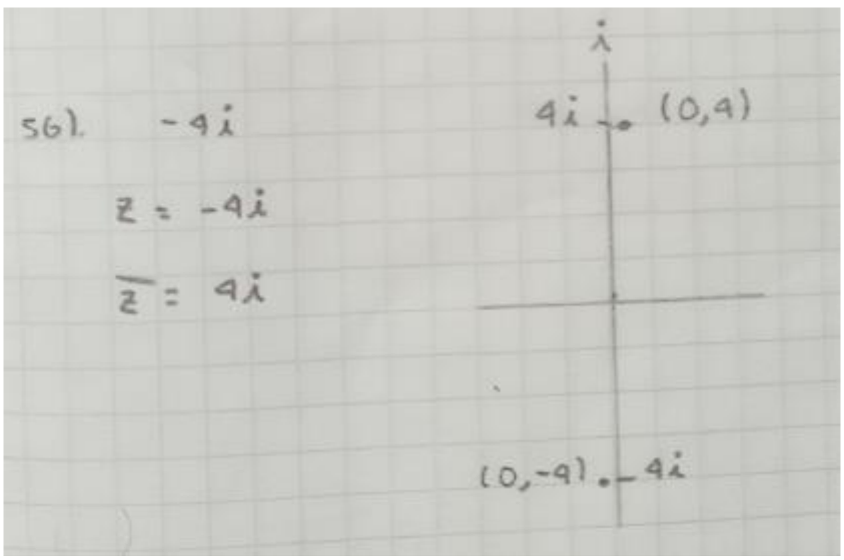
[redacted]¿cómo ubicas las coordenadas de del número complejo y su conjugado?

R2-[redacted]: primero, me desplazo hasta menos uno y de ahí subo hasta cinco y al ubicar el punto, pongo primero el menos uno y luego pongo el cinco; ahora con el conjugado también me desplazo hasta menos uno y bajo hasta menos cinco.

R3-F: ¿Cuándo representas el complejo en su forma cartesiana, importa el orden, es decir, puedo escribir (5,-1)?

R4-[redacted]: Si importa el orden, porque el lado izquierdo son los números del eje [redacted] que son los reales y el lado derecho son los imaginarios

Imagen 49. Ejercicio 56: [redacted]



Fuente: elaboración propia.

La alumna reconoce la inexistencia de la parte real y en consecuencia se desplaza únicamente sobre el eje imaginario situando el punto en la parte negativa del eje, además, simultáneamente le asigna la coordenada en el lenguaje cartesiano [redacted].

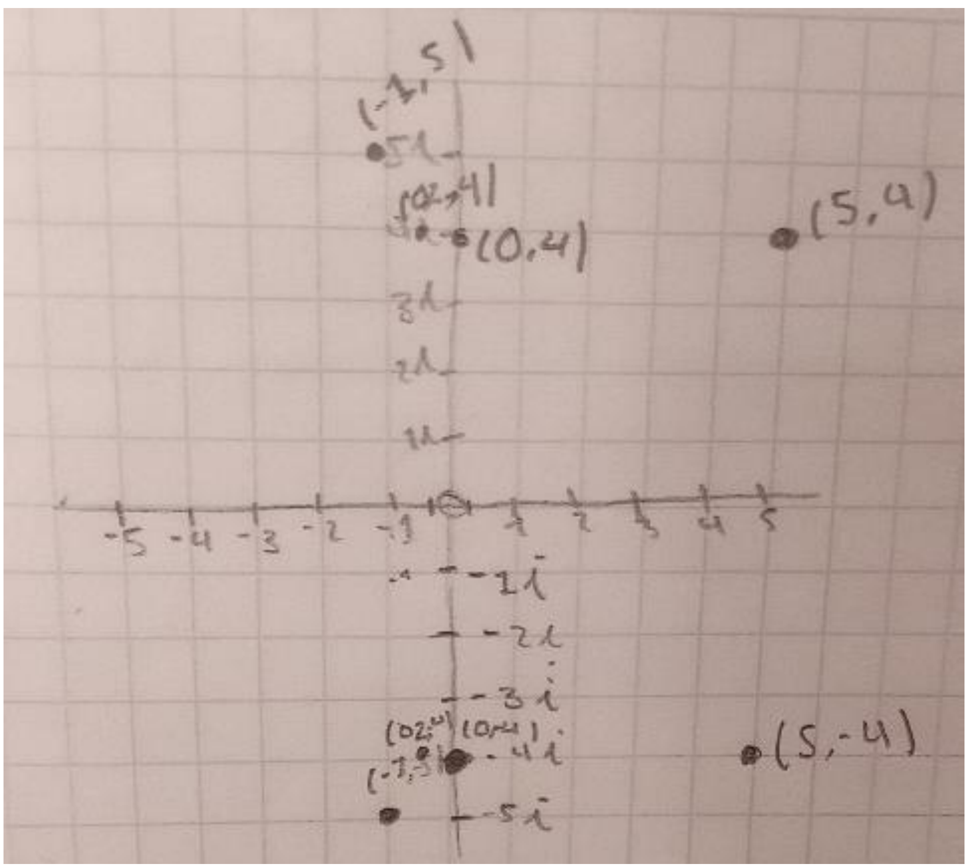
Respecto al conjugado, conserva la inexistencia de la parte real y ubica en la parte positiva del eje imaginario marca el punto y le asigna coordenadas en el lenguaje cartesiano [redacted].

Se presenta una serie de indagaciones para conocer las argumentaciones de la alumna frente al tema de los números complejos:

> **R1-F:** dime como ubicas el numero complejo
>
> **R2-**: como el está solo, quiere decir que al él se le está sumando cero, y ese cero es la parte real y el es la parte imaginaria, y para el conjugado seria lo mismo , pero positivo. Entonces teniendo en cuenta eso, me voy hacia arriba hasta llegar a cuatro, pero sin moverme sobre el otro eje porque como es cero, no me muevo nada. Y para ubicar el conjugado hago lo mismo, pero para llegar hasta .

Los siguientes ejercicios pertenecen a la alumna .

Imagen 50. Conjunto de soluciones representados en un solo plano cartesiano



Fuente: notas del cuaderno de la alumna D_2.

Es evidente que la alumna ha ubicado todo el conjunto de ejercicios solicitados de números complejos y sus respectivos conjugados en un solo plano complejo, sin embargo, se consideran dos de ellos para ser analizados y son: ejercicio 53: ubico en el eje real el valor 5 y conjuntamente ubico en el eje imaginario el valor 4, además en el plano complejo, en su parte positiva marca el punto y le asigna coordenadas en el lenguaje cartesiano .

Respecto al conjugado, conserva el valor real y ubica en la parte negativa del plano complejo el valor de y en ese sentido marca el punto y le asigna coordenadas en el lenguaje cartesiano y el ejercicio 56:

Para el ejercicio 56, se observa que cuando ubica las dos coordenadas en plano complejo; la del número complejo y su conjugado, ha transformado el numero complejo expresado en forma binomial a su forma cartesiana, de lo cual identifica correctamente el cero como la parte real y el cómo la parte imaginaria, de manera análoga ocurre con ejercicio 53.

Se presenta una serie de indagaciones para conocer las argumentaciones de la alumna frente al ejercicio 53.

> **R1-F:** que haces para graficar el numero complejo y su conjugado
>
> **R2-**: Es lo mismo que he hecho en los otros ejercicios de graficar. Primero paso el número de su forma binomial a su forma cartesiana, entonces según eso, como 5 es la parte real y me voy sobre el eje hasta llegar a 5 y subo hasta a y para el conjugado me quedo en 5 pero bajo hasta y en el plano me queda .

Se presenta una serie de indagaciones para conocer las argumentaciones de la alumna frente al ejercicio 56.

R1-: y en el 56 hago lo mismo que en el anterior punto, paso de forma binomial a la cartesiana; entonces como cero es la parte real no me desplazo sobre el eje real pero si hacia arriba hasta .

A raíz del conjunto de los anteriores registros, los cuales están constituidos por los resultados escritos por las alumnas y las entrevistas que dan cuenta de las argumentaciones que ellas dan de estos, se presenta la siguiente tabla que contiene categorías emergentes del análisis de las respuestas. Para obtener estas categorías se ejecuta únicamente para el análisis de dichos resultados, la codificación abierta que hace parte del procedimiento de análisis de la teoría fundamentada, con la finalidad de evidenciar la relación existente entre lo que explica el practicante en relación con las argumentaciones que brindan las alumnas.

Para ello se elabora una tabla en la cual se ubicará la información que se acaba de mencionar.

En las filas de la tabla, se ubican las dos categorías emergentes y en las columnas se ubican algunas líneas o fragmentos seleccionados de las entrevistas.

Tabla 7. Tabla de codificación abierta - números imaginarios puros, potencias de i, números complejos, representación en el plano complejo de números complejos, números complejos y su conjugado, representación en el plano complejo de números complejos y su conjugado

-

Argumentaciones			
Categorías	Resoluciones		Subcategorías
	Alumna [redacted]	Alumna [redacted]	
Con sustento teórico	**R6-**[redacted]: por la propiedad del producto de radicales me queda [redacted] **R2-**[redacted]:como 16 está sumando pasa al otro lado a restar a 4. Luego, al hacer la resta, me queda [redacted], después le saco raíz cuadrada a [redacted] y a [redacted] **R2-**[redacted] dividí 216 entre 4 y me da 54, entonces [redacted] lo elevo a la 4 y vuelvo a	**R2-**[redacted]**:** entonces dividí 216 entre 4 y me da 54 y le sumo cero. Que es el residuo, es decir, [redacted] Y precisamente a eso es lo que me queda elevado el [redacted]. Después de eso, separó la potencia, entonces [redacted]por [redacted].entonces me queda uno elevado a 54, y por la parte de a la cero, como [redacted]esta elevado a cero, entonces todo número elevado a	Justifica o describe lo se involucra en la resolución; es decir propiedades y/o el proceso que realizo en el paso.

	elevarlo a 54. Entonces, como es igual a 1, entonces me queda uno elevado a 54 **R2-:**divido 47 entre 4, y eso me da 44 más 3. **R4-:**porque al dividir, no recuerdo como se llama la parte donde está el 4 y en la que está el 11 en la división, pero y el 3 es lo que sobra de la división, entonces al sumar más me da . **R2-**: es la parte real por lo que el radicando es positivo y es la imaginaria, bueno este caso si resuelvo ese seria . **R2-**: Aah lo haría como: , es que recuerdo que en la tabla me corrigió cuando el error que tenía con **R2-**: el opuesto de es y el conjugado seria . **R1-:** en el punto 48, su opuesto es	la cero da 1, entonces al final me da **R2-:** Profe, creo que está mal ubicados 3 y 5; porque primero deben estar los reales y luego los imaginarios ¿cierto? **R2-**: Es lo mismo que he hecho en los otros ejercicios de graficar. Primero paso el número de su forma binomial a su forma cartesiana, entonces según eso, como 5 es la parte real y me voy sobre el eje hasta llegar a 5 y subo hasta a y para el conjugado me quedo en 5 pero bajo hasta y en el plano me queda . **R4-** Porque si tenía en mente que debía desplazarme sobre el eje real llegando hasta 5 y de ahí subir hasta , es algo parecido a lo que se hace para ubicar un punto en el otro plano, pero fue que me confundí al pasarlo de la forma binomial creo es que se llama, a la forma en pareja	

	y el conjugado es **R2-**: primero, me desplazo hasta menos uno y de ahí subo hasta cinco y al ubicar el punto, pongo primero el menos uno y luego pongo el cinco; ahora con el conjugado también me desplazo hasta menos uno y bajo hasta menos cinco. **R4-**: Si importa el orden, porque el lado izquierdo son los números del eje que son los reales y el lado derecho son los imaginarios **R2-**: como el está solo, quiere decir que al él se le está sumando cero, y ese cero es la parte real y el es la parte imaginaria, y para el conjugado seria lo mismo , pero positivo. Entonces teniendo en cuenta eso, me voy hacia arriba hasta llegar a cuatro, pero sin moverme sobre el otro eje porque como es cero, no me muevo nada. Y para ubicar el conjugado hago lo	**R2-**: y aunque no se vea, pero el cero está presente, y por eso cero estaría ubicado en la parte real y 8 en la parte imaginaria, de ahí me desplazo sobre el eje porque no me puedo desplazar nada en el eje imaginario **R1-:** en el punto 34, la parte real es 1 y la parte imaginaria es -8	

	mismo, pero para llegar hasta [redacted].		
	R7-[redacted]: sé que [redacted] y [redacted], según la tabla entonces pongo en el otro igual [redacted], que esto es igual a [redacted]. **R2-**[redacted]: En el punto 19, es verdadero porque como la variable [redacted]puede ser cualquier número negativo y el radical tiene índice dos y dos es par, entonces me daría como resultado un numero imaginario **R2-**[redacted]: como el opuesto es cambiar los signos de los dos números	**R2-**[redacted]**:** porque cada 4 se repite el ciclo según la tabla **R2-**[redacted]: es verdadero por lo que el índice es par y el radicando negativo. **R2-**[redacted]: como opuesto es cambiarle los signos a los dos números, (…)y el conjugado es cambiarle el signo a la parte imaginaria **R1-**[redacted]**:** el opuesto es [redacted] y el conjugado es [redacted]	Etg: expresa en términos generales de que consta el tema recientemente explicado
	R1[redacted]:Como usted me indicó, en este caso la parte real es [redacted] y la parte imaginaria es [redacted] **R2-**[redacted]: como esta en la forma binomial, en el plano lo paso a su forma cartesiana y de ahí como nos decía, me deslizo sobre el eje real hasta llegar a 5; de ahí subo hacia los imaginarios hasta el número 3 y	**R2-** [redacted]: la parte real es cero, aunque no esté escrita y la parte imaginaria es [redacted]. **R2-**[redacted]: Primero paso el numero complejo a la forma cartesiana **R2-**[redacted]: como el opuesto es cambiarle los signos a los dos números y el conjugado es cambiarle el signo a la parte imaginaria	Amve: se argumenta de forma similar a como lo hizo el practicante al explicar la temática objeto de estudio

	ubico la pareja **R2-**: Como es cero, no puedo subir nada por el eje , pero si puedo deslizarme por el eje y así ubico , entonces en el plano queda **R2-**: el opuesto es cambiar los signos de los dos números		
	R2-: me daría como resultado un **numero imaginario.** R1-:**la parte real** es y la **parte imaginaria** es . **R2-**: como esta en la **forma binomial**, en **el plano lo paso a su forma cartesiana** (…), me deslizo **sobre el eje real** hasta llegar a 5; de ahí subo **hacia el eje de los imaginarios** hasta el número 3	54. Que es el residuo R1:**la parte real** es cero (…)y **la parte imaginaria** **R2-**:: Primero **paso el numero complejo a la forma cartesiana** (…)**parte real** y 8 en la **parte imaginaria**(…)ahí me desplazo sobre el eje porque no me puedo desplazar nada en el **eje imaginario**	Cdom: le concede las denominaciones correctas a los objetos matemáticos
Sin sustento teórico	**R4-:no recuerdo como se llama la parte donde está el** 4 y **en la que está** el 11 (…)es **lo que sobra de la división**	R4: al pasarlo de la forma binomial creo es que así como se le llama **a esa parejita.**	Ndom: no le concede las denominaciones correctas a los objetos matemáticos

Las dos categorías emergentes están constituidas por dos tipos de argumentaciones: argumentación heurística y argumentación retorica; argumentaciones que están especificadas en el marco teórico. Con respecto a la argumentación heurística hizo posible verificar que las alumnas se apoyan en un sustento teórico cuando dan sus argumentaciones que provienen de las explicaciones dadas por el practicante.

Al examinar las argumentaciones clasificadas en el tabla, se pueden reconocer subcategorías que corresponden a las maneras de argumentar las alumnas y ; subcategorías que están relacionadas con la argumentación heurística.

ANÁLISIS DE LA DOCENCIA

A pesar de que las alumnas se mostraban participativas de manera oral o saliendo al tablero, cuando eran indagadas para la resolución de los ejemplos que correspondían en las explicaciones, al resolver los ejercicios de los talleres mostraban algunas dificultades, bien sea de tipo teóricas o prácticas. Teóricas porque a veces no tenían total claridad sobre lo que les acababa de explicar el practicante y por ende no podían resolver el ejercicio en su totalidad. Y practicó porque en ocasiones describían verbalmente de que trataba la teoría, pero se les dificulta ponerla en práctica o aparentemente habían entendido la teoría y cuando la trataban de aplicar sus resoluciones resultaba incorrecta

Posibles causas que afectaron de manera negativa a las explicaciones

El practicante ejercía las explicaciones en dos secciones de clase: miércoles de 7:00 a 9:00 a.m. en donde posiblemente algunas de las alumnas tenían problemas, como: no ir desayunadas de manera adecuada o problemas en su entorno familiar que afectan el aprendizaje. La otra sección eran los viernes de 11: 00 a 1: 00 p.m. con la cual en determinadas oportunidades llegaban a la clase con poca disposición, debido a que, habían presenciado gran parte de esa jornada como la de toda la semana, además que, las alumnas algunas veces manifestaban frases similares como: “profe, hoy es viernes. No debería dar clase, estamos cansadas” lo cual deja en evidencia que por estar cercano el fin de semana, de alguna manera afectaban de manera negativa su atención.

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES.

A partir de las categorías emergentes, se manifestaron diferentes maneras en las que las alumnas presentaban sus argumentaciones, y a partir de estas, se evidencia relación con lo explicado por el practicante

El éxito que las alumnas tienen con determinados ejercicios se puede inferir que es debido a que las alumnas les dan sentido presentar sus resoluciones acudiendo a razones con sustento teórico; es decir, apoyadas en las explicaciones brindadas por el practicante, así mismo estriban sus argumentaciones verbales basadas en dichas explicaciones, lo que permite corroborar la importancia que le dan a estas.

Se pudo evidenciar a través del proceso de la codificación abierta, se corroboro que las argumentaciones de las estudiantes, tenían relación con lo explicado por el practicante. Lo cual deja en evidencia que, al ejercer esta labor, genera implicaciones en el aprendizaje

Por otro lado, el docente titular debido a inconvenientes de desempeño laboral y académico restringió en la intervención pedagógica la ejecución del proyecto o propuesta académica, además limitó al practicante al acompañamiento pedagógico para el desarrollo de los ejercicios.

Dado que la práctica se circunscribió únicamente a explicar procedimientos que involucran propiedades, reglas, condiciones y por consiguiente, la resolución de ejercicios involucrados en ese entorno matemático, las argumentaciones de las alumnas se encontraban limitadas, es decir, debían estar únicamente apoyadas bajo dichos procedimientos para dar solución a las hojas de ejercicios propuestas por el docente titular; en ese orden de ideas, las alumnas estaban impedidas para dar su punto de vista, analizar y expresar razonamientos lógicos para dar sus respuestas.

REFERENCIAS CITADAS

Aldana, E. (2014). La argumentación como estrategia de enseñanza y de aprendizaje de las matemáticas. *Revista Científica*, pp. 37-45. http://funes.uniandes.edu.co/11004/

Antolinez, L & Palacio M. (2013).

Clasificación de los argumentos producidos por estudiantes que ingresan a carreras técnicas al resolver una tarea de generalización con números 4-estelares, pp. 1-109. http://repository.pedagogica.edu.co/bitstream/handle/20.500.12209/9131/TO-16094.pdf?sequence=1&isAllowed=y

Becerra Espinosa, J. (*s.f.*) Matemáticas básicas. Radicales. http://132.248.164.227/publicaciones/docs/apuntes_matematicas/09.%20Radicales.pdf

Barrios, B.(2015). Tres momentos críticos de la Teoría Fundamentada Clásica. *SAPIENS, Vol 16* núm.1, pp- 32-33. https://www.redalyc.org/pdf/4235/423539419008.pdf

Bonilla, M.(2016). Ejemplificación del proceso metodológico de la teoría fundamentada. *Cinta de moebio*, núm.57, pp- 305-315. https://www.scielo.cl/pdf/cmoebio/n57/art06.pdf

Cubero, M, Santamaría A & Barragán A. (2017) La argumentación en el aula: una propuesta analítica. *Revista de Ciencias Sociales*, núm. 72, pp. 78-100, 2017 https://www.redalyc.org/journal/4959/495953509004/html/

Cuñat, R. (2007) Aplicación de la teoria fundamentada (grounded theory) al estudio del proceso de creación de empresas, *Vol 2* pp-1-13 https://dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/2499458.pdf

Duarte, P. V (*s.f.)* Iniciación al Cálculo. Radicación. https://repository.eafit.edu.co/bitstream/handle/10784/9767/taller_radicacion.pdf?sequence=2&isAllowed=y

Eder, M. (2005) La explicación en la enseñanza y en las ciencias. https://www.redalyc.org/pdf/659/65920055003.pdf

Ferrer, M, Fortuni, J & Morera, L. (2014)

Efectos de la actuación docente en la generación de oportunidades de aprendizaje matemático. *Enseñanza de las Ciencias*, 32(3), pp. 385-405.

http://funes.uniandes.edu.co/22018/

Gamboa, G.(2009)

Prácticas e interpretaciones en torno a la argumentación matemática de futuros maestros de educación primaria. https://www.uab.cat/servlet/BlobServer?blobtable=Document&blobcol=urldocument&blobheader=application/pdf&blobkey=id&blobwhere=1300174006714&blobnocache=true

Hernandez, R. (2014) Metodologia de la investigacion. https://www.icmujeres.gob.mx/wp-content/uploads/2020/05/Sampieri.Met.Inv.pdf

Herrera, A. (2004). *Algebra Geometría* 2. Santillana.

Institución Educativa San Agustin. *s.f.* Historia. https://sanagustinpopayan.wordpress.com/historia/

Jiménez, A. y Pineda, L.M. (2012). Comunicación y argumentación en clase de Matemáticas. https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=7981978

Morelo, M. *et al*. (*s.f.*). Los números complejos.

http://www2.caminos.upm.es/Departamentos/matematicas/Fdistancia/PIE/Analisis%20matematico/Temas/C01_Los_Numeros_Complejos.pdf

Mahecha, V., Álvarez, P., y Mateus G. (2022). Caracterización de textos expositivo-explicativos empleados en la fundamentación lingüística de alumnas de pregrado. *Lenguaje,* 50 (1), pp- 175-204.

http://www.scielo.org.co/pdf/leng/v50n1/2539-3804-leng-50-01-175.pdf

Restrepo, A. (2013). La Teoría Fundamentada como metodología para la integración del análisis procesual y estructural en la investigación de las Representaciones Sociales. *REVISTA CES PSICOLOGIA,* núm.1, pp- 123-133. https://www.redalyc.org/pdf/4235/423539419008.pdf

Salas Ll, (2013) El efecto del rol docente en la presencia del pensamiento crítico de los foros en línea. *REVISTAS UNED, vol 14* pp. 75-96. https://dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/5181337.pdf

San Martin, D.(2014) Teoría fundamentada y Atlas.ti: recursos metodológicos para la investigación educativa. *Revista electrónica de investigación educativa, Vol.16* num 1, pp.105-122. https://www.scielo.org.mx/pdf/redie/v16n1/v16n1a8.pdf

Trujillo, J. (2007). Los usos de la argumentación. Disponible en: http://www.scielo.org.co/pdf/pafi/n25/n25a12.pdf

Vidal, R. A. (2009). Las raíces y radicales en libros de texto en Chile (1969 – 2009) Un análisis de rupturas epistemológicas como aporte a la Didáctica de las Matemáticas [Tesis doctoral]. Pontificia Universidad Católica de Chile. Santiago de Chile. https://www7.uc.cl/sw_educ/educacion/grecia/plano/html/pdfs/biblioteca/DOCTOR/Roberto%20Vidal.pdf