Universidad
del Cauca

INSTITUTO DE POSTGRADOS
MAESTRÍA EN EDUCACIÓN
ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS Y LA TECNOLOGÍA

REPRESENTACIÓN POLINOMIAL DE NUMERALES ESCRITOS EN EL SISTEMA DECIMAL DE NUMERACIÓN: UN ESTUDIO CON NIÑOS Y NIÑAS ESCOLARIZADOS.

HELMER JESÚS RUIZ DIAZ

POPAYÁN, 2011

Universidad
del Cauca

INSTITUTO DE POSTGRADOS
MAESTRÍA EN EDUCACIÓN
ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS Y LA TECNOLOGÍA

REPRESENTACIÓN POLINOMIAL DE NUMERALES ESCRITOS EN EL SISTEMA DECIMAL DE NUMERACIÓN: UN ESTUDIO CON NIÑOS Y NIÑAS ESCOLARIZADOS.

HELMER JESÚS RUIZ DIAZ

Director
Mag. YILTON RIASCOS FORERO

Trabajo presentado como requisito para optar al título de Magister en Educación: Línea Enseñanza de las Ciencias y la Tecnología.

POPAYÁN, 2011

NOTA DE ACEPTACIÓN:

____

____

____

____

____

____

Director: ____________________________

Jurado: ____________________________

Jurado: ____________________________

Popayán, 2011.

AGRADECIMIENTOS

La culminación de este proyecto se debe además del esfuerzo del investigador a todas las personas que siempre estuvieron animándolo y apoyándolo en cada una de las etapas en que se desarrolló. A continuación expreso mis agradecimientos a aquellas personas que estuvieron y vivieron más de cerca todo el proceso de la investigación.

Primero que todo a Dios, creador del universo, dueño de mi vida y a todas las bendiciones que día a día recibo de él. A mis padres Gemma Diaz y Marino Ruiz, por su compañía y todo el apoyo incondicional que me dieron a lo largo de mis estudios.

A Dr. Yilton Riascos Forero, por su amistad, apoyo, paciencia, dedicación y valiosa colaboración durante el desarrollo del proyecto. A cada uno de los compañeros del grupo de investigación GEMAT de la Universidad del Cauca, por su confianza, sus aportes significativos y apoyo permanente para que este trabajo llegara a buen término

A los niños y niñas que participaron en el proyecto, por su disponibilidad, tiempo y entrega con que resolvieron las tareas propuestas.

A todos mis familiares, amigos y en general a todas aquellas personas que de una u otra forma colaboraron o participaron en la realización de esta investigación, hago extensivo mi más sincero agradecimiento.

TABLA DE CONTENIDO

LISTA DE TABLAS

LISTA DE FIGURAS

RESUMEN

El proyecto de investigación está enmarcado dentro de la didáctica de las matemáticas y tienen relación directa con la psicología cognitiva. El objeto matemático puesto en escena es el Sistema Decimal de Numeración (SDN), específicamente su representación polinomial.

Siendo la representación polinomial una forma de condensación de numerales grandes, el propósito fundamental es describir y caracterizar las estrategias que los niños y niñas aplican para representar de forma polinomial los numerales escritos en el sistema decimal de numeración. Para conseguir dicho propósito se diseñó y aplicó una tarea que consideró los elementos que hacen parte de un polinomio en base 10, la cual exigió de los participantes lectura y escritura de distintas representaciones numéricas. La tarea la resolvieron 22 sujetos con edades de 9, 10 y 11 años de grados 4°, 5° y 6° de educación básica.

Los resultados encontrados manifiestan dificultades en el tratamiento de operaciones como representaciones de numerales. También se muestra la importancia de complementar las representaciones aditivas y multiplicativas con explicaciones que apunten a desarrollar representación potenciativa para enriquecer la comprensión de la representación polinomial en los numerales escritos en el SDN.

PALABRA CLAVES: estrategia, representación, potenciación, numeral, polinomios en base diez, sistema de numeración

INTRODUCCIÓN

Asumir grandes retos, como proyectos de investigación, en áreas tan complejas como la Educación Matemática exige, de quien o quienes pretenden liderarlos, la formulación permanente de interrogantes así como su convicción de que las respuestas a ellos contribuyan a la cualificación del quehacer pedagógico para la enseñanza de la matemática a través de la innovación e implementación de propuestas didácticas.

El problema que se aborda en la presente investigación está ubicado en el desarrollo del pensamiento numérico el cual *"se adquiere gradualmente y va evolucionando a medida en que los alumnos tienen la oportunidad de pensar en los números y de usarlos en contextos significativos"* (MEN, 1996, pág. 43). Además, los lineamientos curriculares afirman que una de las herramientas para desarrollar dicho pensamiento son los sistemas numéricos.

En este sentido, Cortina (1997) manifiesta que a lo largo de la historia, la humanidad ha construido sistemas matemáticos, que le han permitido interactuar con el mundo, interpretándolo, organizándolo e interviniendo en él y que uno de los constituyentes básicos de las matemáticas, de la cultura occidental, es el sistema de numeración decimal, el cual siguiendo algunas reglas aparentemente sencillas, permite la representación de cualquier magnitud o cantidad y también la realización de una gran variedad de cálculos.

El aprendizaje del sistema decimal de numeración es un proceso no trivial, que está ligado al análisis de las demandas lógicas involucradas en el proceso de su construcción, la comprensión del concepto de número y no simplemente a conocer su sintaxis.

Que los niños y niñas comprendan los procesos involucrados en la representación de numerales escritos en el sistema decimal de numeración no es tarea fácil, muchos de los errores que los niños cometen al ejecutar los algoritmos de las operaciones se deben a la dificultad para que ellos comprendan dichos procesos. De ahí la importancia de explorar el pensamiento del niño, a través del seguimiento de estrategias, para conocer los procesos que siguen en la construcción del sistema de notación y enunciación de los números en un nivel más avanzado como lo es el del significado de representación polinomial de los mismos.

En la presente propuesta se pretende describir y caracterizar algunas de las estrategias necesarias para que los niños construyan la representación polinomial, es decir, qué elementos del sistema numérico son esenciales, cuáles son los más utilizados, cómo se pueden clasificar, etc., en las trayectorias que los niños siguen cuando construyen el significado de representación polinomial de los numerales escritos en el Sistema Decimal de Numeración. Así mismo determinar, si es posible, cuáles serían las condiciones ideales de un sujeto que alcanza este nivel de representación.

La representación polinomial hace referencia a que todo numeral escrito en el sistema decimal de numeración, es una forma abreviada de representar un polinomio en potencias de diez, por ejemplo, el numeral 5.896 lo podemos ver como:

$$5.896 = 5\times 10\times 10\times 10 + 8\times 10\times 10 + 9\times 10 + 6\times 1$$

(5 grupos de 10 de 10 de 10, más 8 de 10 de 10, más 9 de 10, más 6 de uno)

$$5.896 = 5\times 10^3 + 8\times 10^2 + 9\times 10^1 + 6\times 10^0$$

De esta manera, una comprensión del sistema decimal de numeración, requiere de estructuras complejas superiores a las elementales de adición y multiplicación, también exige un pensamiento que permita comprender el proceso condensado en un polinomio como el arriba señalado. Teniendo en cuenta estas consideraciones y otras provenientes de las experiencias de aula del investigador, surge el siguiente interrogante:

¿Cuáles son las estrategias que los niños y niñas entre 9 y 11 años, aplican cuando resuelven situaciones que involucran la representación polinomial de numerales escritos en el Sistema Decimal de Numeración?

Para dar respuesta a éste interrogante se planteó una investigación cualitativa que permitiera establecer, a partir de la observación de las acciones de los niños, las estrategias que siguen al resolver situaciones relacionadas con la representación polinomial de numerales escritos en el sistema decimal de numeración.

El documento se divide en cuatro partes, la primera se denominó *fundamentación teórica* compuesta por cuatro capítulos, en el primero, se presenta algunas reflexiones sobre la investigación en didáctica de las matemáticas con la intención de delimitar el campo de acción de la presente investigación. También se muestran algunos criterios de calidad, como elementos comparativos, que debe tener una investigación en didáctica de las matemáticas.

En el segundo capítulo, se hace un breve recorrido por algunas interpretaciones del término representación y el papel que juega en la didáctica de las matemáticas, con el ánimo de tomar postura y evitar las ambigüedades que dicho término presenta. En especial se hace una presentación desde la perspectiva de Vergnaud (2006) por ser ésta una teoría que se prestó a los requerimientos de la presente investigación.

En el capítulo 3 se presentan algunas consideraciones importantes acerca del Sistema Decimal de Numeración, por tratarse del objeto matemático puesto en escena en este trabajo. Aquí se muestran características importantes del concepto de número, de las operaciones entre números, de los sistemas de numeración y las distintas formas de representar numerales en el sistema decimal de numeración, especialmente lo relacionado con la representación polinomial.

Luego se presentan, en el capítulo 4, estudios antecedentes relacionados con el tema de la investigación, dicha presentación se hace teniendo en cuenta dos perspectivas, por un lado están los estudios sobre la conceptualización, por parte de los niños, del sistema decimal de numeración, y por otro, los trabajos sobre la enseñanza del sistema. En esta presentación se puede apreciar que los reportes acerca de la representación polinomial, es muy escasa.

En la segunda parte, denominada *El Estudio*, aparece el capítulo 5 donde se plantea el problema y se muestra la selección del método para abordad la investigación. En este capítulo además, se establece la forma como se hizo la selección de los 22 sujetos participantes, se narran los procedimientos para la recolección de datos, se describe la tarea y se muestran las herramientas y los instrumentos empleados en el trabajo de campo.

El diseño de la tarea consideró diversas representaciones previas a la representación polinomial, en ella se plantearon situaciones de lectura y escritura de numerales y operaciones como sumas, productos, potencias, sumas de productos y potencias.

Las situaciones planteadas se propusieron desde la perspectiva de los campos conceptuales, en donde se consideran más como una tarea psicológica, resaltando el rol del sujeto psicológico, que en la observación de sus acciones, se pueden evidenciar algunos procesos cognitivos y las respuestas en función de las situaciones a las cuales son confrontados.

Los *Resultados* se muestran en la tercera parte del documento, compuesta por el capítulo 6, donde se consignan los hallazgos obtenidos en la lectura y escritura, que realizaron los niños, a las expresiones propuestas. Además se describen las estrategias establecidas a partir de la observación de los datos recogidos.

En la cuarta y última parte, denominada *discusión de resultados*, aparecen los capítulos 7 y 8, en el capítulo 7 se hace la discusión de los resultados teniendo en cuenta las estrategias encontradas, los aportes a la construcción del sistema decimal de numeración, posibles reformas a la tarea utilizada, y las dificultades que se les presentan a los niños para acercarse a la representación polinomial.

Finalmente en el capítulo 8 se consignan algunas conclusiones a las cuales se llegó después de discutir los resultados, también ciertas recomendaciones que se pueden tener en cuenta para futuras investigaciones.

PARTE I. FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA

CAPITULO 1. Investigación en didáctica de las matemáticas

1.1 Delimitación del campo

La investigación tiene que ver con la indagación minuciosa que se realice respecto a los hechos y fenómenos que le son de interés. Si la didáctica de las matemáticas se encarga de estudiar los fenómenos ocurridos en torno a los procesos de enseñanza y aprendizaje de los conocimientos matemáticos, se podría decir que la tarea de la investigación en el campo sería la búsqueda de explicaciones que den cuenta del fenómeno.

Estas explicaciones se pueden dar desde diferentes puntos de vista, situación que pone a la didáctica de las matemáticas en relación con otras disciplinas como la psicología, sociología, lingüística, epistemología, antropología, filosofía, historia, entre otras, las cuales, desde sus marcos conceptuales, aportan interpretaciones de las distintas manifestaciones que se dan cuando se analizan las interacciones entre los elementos que componen su objeto de estudio.

Teniendo en cuenta lo anterior, se puede decir que si bien el trabajo del investigador en didáctica de las matemáticas no puede abarcar todos los campos mencionados anteriormente, si debe ser consciente de que en su trabajo se va a encontrar con aportes y limitaciones provenientes de las otras disciplinas.

Esta consideración marca la diferencia entre los investigadores en matemáticas y los investigadores en didáctica de las matemáticas quienes además de ser conocedores de la ciencia matemática, tienen que recorrer, entre otras, los fundamentos de algunos de los otros campos en torno de los objetos matemáticos, con competencia en la didáctica.

Tales recorridos generan métodos y procedimientos propios de la didáctica de las matemáticas ampliando de esta manera los enfoques que dicho campo va elaborando.

Para diferenciar los métodos y los procedimientos seguidos en los procesos de investigación, se han planteado diversas clasificaciones, agrupando temáticas que tienen que ver con cambios curriculares, práctica docente, empleo de tecnología, prácticas de evaluación, desarrollo profesional, el contexto social y otras con el proceso de aprendizaje (Kilpatrick, 1998).

Al respecto el mismo autor considera que en las investigaciones acerca del aprendizaje, se está enfatizando cada vez más en los procesos y las estrategias utilizadas para obtener respuestas y no tanto en la atención exclusiva de las respuestas correctas o incorrectas.

Los estudios del aprendizaje de las matemáticas por parte de los alumnos han pasado de teorías generales de aprendizaje a estudios del aprendizaje de un contenido matemático específico, así mismo se han preocupado más por el aprendizaje individual que el aprendizaje de grupos de estudiantes.

En este tipo de investigaciones se privilegia la indagación sobre cómo es que los sujetos aprenden los conocimientos matemáticos, teniendo en cuenta que la evolución de dichos conocimientos proceden, en gran parte, de su propia acción, de su experiencia y de su reflexión personal. Por tal motivo es de vital importancia observar las estrategias que se siguen al resolver un problema para identificar las maneras de cómo los individuos se acercan a la construcción de un concepto matemático para sugerir, en un futuro, situaciones de enseñanza que mejore los procesos de aprendizaje.

Por otra parte se puede decir que a pesar de la existencia de varios enfoques de investigación, los investigadores en educación matemática no deben casarse con una aproximación metodológica, una epistemología, un paradigma o un método particular. Todos son parciales y provisionales; ninguna puede contar la historia completa. En particular, ningún método de investigación puede considerar el conjunto completo de preguntas que son de interés para el educador matemático (Kilpatrick, 1998).

Lo anterior no quiere decir que un determinado investigador no pueda apoyarse en un método particular, lo puede hacer, pero debe tener en cuenta que la investigación como un todo, debe estimular una multiplicidad de métodos. En este sentido los investigadores deben tratar de encontrar todos los criterios posibles de calidad en un determinado estudio. A continuación se presentan algunos aspectos que pueden determinar la calidad de una investigación.

1.2 Criterios de calidad para la investigación en didáctica de las matemáticas.

Los productos de la investigación no pueden ser sólo resultados, deberían ser teorías, preguntas, problemáticas, metodologías, programas de investigación y sobre todo tener claro que la investigación genera además un discurso que tiene efectos sobre el conjunto del sistema escolar. La eficacia de ese discurso radica en la capacidad de ordenar nuevas prácticas en las que se inserten sujetos diferentes y se crean nuevas subjetividades. (Puig, 1998)

Ante este panorama es válido plantear y responder el interrogante que hace Kilpatric (1998): *¿Qué criterios permiten al investigador seleccionar problemas y* *metodologías que aseguren la calidad de los resultados?* (pág. 17). De acuerdo con este autor una investigación de calidad, en didáctica de las matemáticas debería cumplir con los siguientes criterios:

- ✓ Pertinencia, la investigación resulta pertinente cuándo responde a las preguntas ¿para qué sirve? y ¿para quién es útil?, es decir permite la adaptación y uso de algunos de sus aspectos.

- ✓ Validez, presta atención en las conclusiones que se sacan del estudio, cuestionando los resultados obtenidos a la luz del método de investigación utilizado.

- ✓ Objetividad, si bien en la investigación no se alcanza la objetividad total, ésta sí debería ser lo suficiente para minimizar el margen de error y ver las cosas como son y no como quisiéramos que fueran. Los investigadores tratarán de identificar el margen de error que aportan a su trabajo, explicar cómo distorsiona sus resultados, intentar refutar sus propias conclusiones reforzando así su razonamiento.

- ✓ Rigor en el sentido de buscar buenas explicaciones y precisión frente a las dudas que rodean un fenómeno y entenderlo con la máxima exactitud.

El trabajo que a continuación se presenta, procura mantenerse en la línea planteada cumpliendo con las características señaladas para ajustarse a los requisitos que la producción de conocimientos, en Didáctica de las Matemáticas, exige para permitir consolidarlo a un nivel aceptable y de servicio para los profesores e investigadores en esta disciplina.

CAPITULO 2. Representación y didáctica de las matemáticas

2.1 Concepto de representación

En los estudios referentes al conocimiento regularmente se encuentran una serie de términos que si no se aproxima una definición, ni se determina desde qué perspectiva se va a utilizar pueden conllevar a confusiones y terminar entorpeciendo el rumbo de la investigación.

En particular, en la realización de la presente investigación se hace necesario explicar el sentido que tendrá aquí el concepto de representación. No es objetivo de este trabajo hacer un estudio profundo sobre la noción de representación, sólo indicar su importancia en la didáctica, señalando que dicho concepto se utiliza para argumentar el significado que los sujetos dan a los objetos representados.

La noción de representación según Duval (1999) se ha presentado en tres ocasiones diferentes, cada una con una designación diferente en los estudios señalados.

Entre los años 1924–1926 se presentó por primera vez como representación mental, siendo Piaget su promotor designó la noción de representación como *"evocación de los objetos ausentes"*, es de anotar que en la teoría piagetiana el desarrollo de la inteligencia se articula en torno a la oposición entre el plano de la acción y el de la representación. (Duval, 1999).

El instrumento metodológico que se utilizó para el estudio de las representaciones fue el de la entrevista, de ella se estableció que lo que puede aparecer como un error es considerado como un indicador de una visión distinta de las cosas o de otras lógicas.

La segunda vez (1955–1960), se presentó como representación interna o computacional, donde sobresale la transformación que hace un sistema de las informaciones que recibe para que produzca una respuesta adaptada. En esta ocasión la representación se ve como una *"codificación de la información"*. Se utilizó el método de los tiempos de reacción.

Aproximadamente desde 1985, aparece por tercera vez como representación semiótica, la cual es relativa a un sistema particular de signos, supone *"la consideración de sistemas semióticos diferentes y una operación cognitiva de conversión de las representaciones de un sistema semiótico a otro"*. (Duval, 1999, pág. 27)

Si bien dicho concepto presenta ambigüedades, desde los paradigmas de dónde se aborde, se intentará hacer una aproximación desde los enfoques psicológico y didáctico, puesto que el problema central es la identificación de estrategias y el establecimiento de posibles interacciones con el conocimiento, en donde la representación es un factor clave para determinarlas.

Uno de los autores que ha trabajado los aportes de la psicología a la didáctica es Gérard Vergnaud, él en su artículo *Representación y actividad: dos conceptos estrechamente asociados* presenta cuatro definiciones de representación, tres de ellas, según él, son las adoptadas frecuentemente por la comunidad, estas son:

La representación como flujo de la conciencia (la representación es un fenómeno psicológico que funciona de manera irreprensible y espontánea en cualquier momento); como signos y símbolos (la representación son signos y símbolos sin los cuales ni ella ni la experiencia podrían ser comunicadas); como sistemas de conceptos (la representación es el sistema a partir del cual se obtiene la información necesaria para llevar la acción y la actividad de la manera más pertinente posible).

El otro significado que Vergnaud (2006) plantea con el ánimo de ampliar la comprensión de las tres anteriores, es considerar la representación como actividad funcional, es decir como un proceso dinámico, o mejor, como un conjunto jerarquizado de procesos dinámicos. En este sentido la funcionalidad de la representación está regida por dos principios:

- ✓ La organización de la acción, la conducta, y más en general la actividad, siendo ella misma el producto de la acción y de la actividad.
- ✓ Permite una cierta simulación de lo real, y por lo tanto la anticipación.

Teniendo en cuenta que en el desarrollo de conocimientos matemáticos en los niños, la representación se compone de formas interiorizadas de actividades en situación, se retomará en este trabajo la última definición presentada, considerando la actividad como algo más que el comportamiento, es decir se tendrá en cuenta la actividad mental de los sujetos.

Creemos que una forma de inferir las representaciones internas de los niños es observando y caracterizando las diversas estrategias que siguen cuando se acercan a la conceptualización de un objeto matemático; entendiendo por estrategia como un procedimiento no obligado que está dirigido hacia un objetivo, también según Inhelder (1978), una estrategia se puede "*determinar como todo sistema y toda secuencia de procedimientos, susceptibles de ser repetidos y transferidos a otras situaciones*" (pág. 7). En este sentido, lo que se busca es identificar, clasificar y caracterizar acciones que siguen los niños y niñas cuando resuelven tareas encaminadas a la construcción de dichas representaciones.

Otro aspecto de la representación, a nivel del pensamiento, es que puede presentar un carácter figurativo u operatorio. En lo figurativo están las configuraciones, es decir, la representación tiende a suministrar una imagen más o menos conforme a las realidades representadas, mientras que el carácter operativo se ve cuando la representación tiende más a operar y construir que a copiar, centrándose más en las transformaciones como tales.

Dentro del aspecto figurativo del conocimiento están las percepciones, la imitación y las imágenes mentales, tres elementos que tienen que ver con la traducción en figuras o en símbolos los movimientos e incluso las transformaciones, cuando el sujeto intenta percibirlas o reproducirlas. El aspecto operativo de las funciones cognitivas abarca el proceso ininterrumpido de conductas que van desde las acciones sensorio-motrices, las acciones interiorizadas preoperatorias y las operaciones lógico matemáticas que inciden sobre las transformaciones. (Piaget, 1976)

A pesar de estar marcada la diferencia entre lo figurativo y lo operatorio, es pertinente aclarar que dichos aspectos actúan en permanente dialéctica, es decir, los mecanismos operativos se sirven de los datos figurativos y éstos a su vez, se refieren a estados que adquieren significado cuando se conectan entre sí por las transformaciones.

2.2 Representación en Didáctica de las matemáticas

En didáctica de las matemáticas el término representación es abordado de manera especial, puesto que se centra en las representaciones de un conocimiento en particular, el matemático. En el análisis de los procesos de aprendizaje y comprensión de las matemáticas, las representaciones juegan un papel importante, sin embargo, como se mencionó anteriormente, aquí también existen ambigüedades alrededor de dicho término y es necesario conocer lo que varios autores dicen al respecto.

Rico (2009) señala que en los trabajos iniciales donde aparece la noción de representación, década de los 80, dicha noción se toma como equivalente a una señal externa que muestra y hace presente un objeto matemático; también como un signo o una marca con la cual los sujetos piensan las matemáticas; e incluso como aquellos esbozos o imágenes mentales con los que la mente trabaja sobre ideas matemáticas.

Desde entonces las representaciones matemáticas se han entendido, desde una mirada amplia, como aquellos instrumentos que hacen presentes los conceptos y procedimientos matemáticos y con las cuales los sujetos abordan e interactúan con el conocimiento matemático. El interés didáctico en las representaciones está dado, puesto que trabajar con ellas permite a las personas asignar significados y comprender las estructuras matemáticas.

Goldin y Janvier (1998), citados por Godino (2003) utilizan el término representación, para abordar el significado de los objetos y lo utilizan para referirse a sistemas de representación.

Otro autor interesado en el estudio del término en cuestión es Raymond Duval quien se ha interesado en el estudio de la especificidad de las representaciones semióticas que son relativas a un sistema particular de signos: el lenguaje, la escritura algebraica o los gráficos cartesianos, y que pueden ser convertidas en representaciones equivalentes en otro sistema semiótico, pudiendo tomar significados diferentes para el sujeto que las utiliza.

La noción de representación semiótica implica la consideración de sistemas semióticos diferentes y una operación cognitiva de conversión de las representaciones de un sistema a otro. (Duval, 1999)

También afirma que no puede haber comprensión en matemática si no se distingue un objeto de su representación, considerando que un mismo objeto matemático puede darse a través de representaciones muy diferentes.

En su artículo Rico (2009) expone la existencia de cinco paradojas alrededor de la complejidad de las nociones de representación y comprensión, en didáctica de las matemáticas, asegurando que las dicotomías que se presentan afectan el uso del término representación.

A continuación se mencionan dichas paradojas, con el fin de ubicar la presente investigación en una de ellas y saber con claridad con cuál de los paradigmas se identifica.

Representar es sustituir, es dar presencia a un ausente. Desde este punto de vista la paradoja ausencia-presencia pone a la representación en una dualidad entre representante-representado, poniendo en evidencia la existencia de conceptos matemáticos como objetos con existencia propia en algún mundo.

La paradoja que plantea la dicotomía entre representación visual y representación simbólica, plantea que las representaciones se pueden reducir a una imagen visual que remite a una cosa y a una forma verbal, que da el sentido a esa cosa mediante un concepto.

El autor agrega que representar es atribuir significado, la representación toma sentido dentro de un sistema de significados y relaciones, está es la paradoja de la dualidad objetivo-convencional, que apunta hacia la construcción social del conocimiento.

Representar es una práctica y abarca muchas opciones. En la paradoja de la dualidad univocidad–pluralidad, se piensa que la representación consiste en cambiar de aspecto un mismo dato para verlo de otro modo.
Para cada una de las anteriores situaciones Rico (2009) plantea una serie de cuestionamientos con el propósito de dar continuidad a la reflexión y discusión iniciadas acerca del tema en cuestión.

Complementando los anteriores significados que se pueden asociar al término representación, el mismo autor propone como otra de las paradojas la dualidad entre representaciones internas y representaciones externas. Desde esta apreciación se considera que representar es reproducir en la mente.

En los sistemas de representación externa se pueden mencionar los sistemas simbólicos convencionales de las matemáticas tales como la numeración en base diez, la notación formal algebraica, la representación en coordenadas cartesianas, y también, se incluyen entornos de aprendizaje como los que utilizan materiales concretos o micromundos basados en el uso de ordenadores (Godino J. D., 2003)

Por su parte, las representaciones internas son las construcciones mentales de los individuos, para Godino (2003) estas representaciones se presentan como "*una herramienta teórica para caracterizar las cogniciones complejas que pueden construir los estudiantes sobre las representaciones externas*" (pág. 20). Dichas representaciones no se pueden observar directamente, sino que son inferidas a partir de conductas observables.

Es decir, para comprender la realidad y actuar sobre ella, el niño construye representaciones mentales de esa realidad. Dichas representaciones no son accesibles al observador exterior quien a través del análisis de las acciones del niño podría determinar lo que el niño creyó comprender o lo que él hizo.

Otras por el contrario son objetivables en el sentido de que se pueden observar testimonios importantes en las producciones del sujeto (palabras pronunciadas, dibujos, gestos, operaciones hechas por los sujetos, entre otras) (Vergnaud G. , 1991)

Según Vergnaud (1991), las siguientes son las representaciones utilizadas en la enseñanza de las matemáticas:

- ✓ *Expresiones lingüísticas o enunciados de la lengua natural*.
- ✓ *Esquemas espaciales en el plano (líneas, flechas, regiones del espacio, localización).*
- ✓ *Expresiones algebraicas.* (pág. 67)

Vergnaud (1990) propone una teoría en la cual le concede a las representaciones internas un papel determinante en la construcción de conocimiento por parte de los sujetos. Los elementos de esta teoría se consideran en la siguiente sección.

2.3 Actividad y representación

Vergnaud (1990) a través de su propuesta quiso proporcionar una teoría que sirviera de soporte a las investigaciones acerca de lo que él denomina actividades cognitivas complejas como las que hacen referencia a los aprendizajes científicos y técnicos.

La teoría de los campos conceptuales explica cómo el sujeto construye conocimientos permitiendo establecer relaciones y separaciones entre estos desde el punto de vista del contenido conceptual. La importancia, de esta teoría, para la Didáctica se sustenta en los fundamentos que hace sobre el aprendizaje y por ende del desarrollo cognitivo.

2.3.1 Elementos constitutivos de la teoría de los campos conceptuales

Los conceptos clave de la teoría de los campos conceptuales son, además del propio concepto de *campo conceptual*, los conceptos de esquema, situación, significantes, significados, y su propia concepción de concepto.

A continuación cada uno de estos conceptos será abordado desde la perspectiva de la teoría de Vergnaud. Después, serán retomados aspectos generales de la teoría y serán examinadas las implicaciones para la enseñanza de las ciencias en particular, y para la investigación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

2.3.1.1 Conceptos

En esta teoría un concepto no se puede reducir a su definición, más aún cuando está de por medio su enseñanza y su aprendizaje, complementando esta apreciación, el autor manifiesta que los conceptos adquieren sentido en el niño, cuando éste se enfrenta a situaciones y problemas que hay que resolver. En estas consideraciones, sin hacer a un lado la importancia del lenguaje y del simbolismo en la conceptualización, se pretende enfatizar en el papel que tiene la acción del sujeto en la función adaptativa del conocimiento, considerando la acción mental como algo más que el comportamiento.

Para determinar la acción existen dos clases de situaciones: unas aquellas para las cuales el sujeto dispone de competencias necesarias para el tratamiento inmediato de la situación, y otras aquellas en las cuales el sujeto no dispone de todas las competencias necesarias para su resolución.

Para detallar las acciones del sujeto, frente a las situaciones arriba mencionadas, Vergnaud, introduce el concepto de esquema, aclarando que su funcionamiento varía en los dos casos. En el primer caso se va a observar para una misma clase de situaciones, conductas muy automatizadas, organizadas por un único esquema; en el segundo caso, se va a observar el esbozo sucesivo de varios esquemas que deben ser acomodados, separados y recombinados, apareciendo en este proceso varios descubrimientos.

La experimentación de diversas situaciones en torno a un concepto, sobre todo las segundas, puede conducir a la operacionalidad del mismo, es aquí donde el investigador puede analizar las conductas y los esquemas para comprender en qué consiste, desde el punto de vista cognitivo, determinado concepto.

En particular, según Vergnaud (1990), en la formación de conceptos matemáticos se debe considerar un concepto como una colección de invariantes utilizables en la acción, donde se hacen presencia los siguientes conjuntos:

> S: conjunto de situaciones que dan sentido al concepto
>
> I: conjunto de invariantes sobre los cuales reposa la operacionalidad de los esquemas
>
> Γ: conjunto de las formas lingüísticas que permiten representar simbólicamente el concepto, sus propiedades, las situaciones y los procedimientos de tratamiento. (pág. 7)

De esta manera Vergnaud (1990) define un concepto, como la tripleta de los tres conjuntos C(S, I, Γ). Donde el conjunto de situaciones hace referencia a las descrita anteriormente, los invariantes operatorios son los conocimientos contenidos en los esquemas que se pueden expresar por conceptos-en-acto y/o teoremas-en-acto.

Teniendo en cuenta que un teorema-en-acto es una proposición considerada verdadera en la actividad, mientras que concepto-en-acto se refiere a los conceptos que usa un sujeto frente a una situación, dicho uso puede ser consciente o inconsciente. La relación entre teoremas y conceptos es naturalmente dialéctica, en el sentido que no hay teorema sin conceptos y no hay concepto sin teorema. (Vergnaud G. , 1990)

Las formas lingüísticas aluden al uso de significantes explícitos necesarios para la conceptualización, como las palabras, los enunciados, los símbolos y los signos. Para analizar el desarrollo y el funcionamiento de un concepto, bien sea en su aprendizaje o durante su uso, es determinante considera al mismo tiempo los tres conjuntos.

2.3.1.2 Esquemas

Los esquemas son los elementos cognitivos que hacen que la acción[1] del sujeto sea operatoria, por lo tanto es en ellos que se deben analizar los conocimientos-en-acto del sujeto, es decir, en los esquemas se determinan los comportamientos observables y las actividades no directamente observables de la representación.

Vergnaud (1990) consideró relevante identificar lo que en la actividad corresponde a una función de conceptualización, en consecuencia definió el concepto de esquema, de la siguiente manera:

- ✓ *Un esquema es una organización invariante de la actividad para una clase definida de situaciones* (pág. 2).
- ✓ *Un esquema es una totalidad dinámica funcional.* (pág. 5).

La primera acepción hace referencia al funcionamiento cognitivo, es decir, lo que un sujeto es capaz de hacer con lo que tiene, no exige un incremento en su "estructura". Según Inhelder (1978) estructura se define como *"lo que el sujeto sabe hacer*" y no como "*lo que el sujeto piensa"*. (pág. 5)

La segunda se refiere al desarrollo cognitivo, ahora el sujeto hace cosas que antes no podía hacer, generando avances adicionales al conocimiento. Aquí según Vergnaud (1990), se presenta un esbozo sucesivo de varios esquemas, que pueden entrar en competencia que para llegar a la solución buscada, deben ser acomodados, separados

[1] Al hablar de acción del sujeto se hace referencia, en términos de la Teoría de Piaget, a la acción mental, diferenciándola de la actividad, que alude más a la actividad física.

y recombinados. En este proceso necesariamente se exhiben descubrimientos y por ende implica aprendizaje

Por otra parte, se debe tener en cuenta que en el funcionamiento cognitivo Piaget (1969), plantea que la función permanece constante en todos los sujetos, pero la estructura cambia, de esta manera si en Educación, consideramos que la función es aprendizaje, podemos ver que todos aprende, pero la forma como cada uno aprende depende de su estructura, es decir la estructura varía de sujeto a sujeto.

Ahora bien, como la estructura es la variable, es necesario conocer cuáles son las estrategias utilizadas para resolver cierto tipo de tareas, puesto que a partir de ellas podremos encontrar la estructura que más se repite, es decir conocer la estructura más común para un tipo de situaciones.

De esta forma las estrategias se constituyen como una herramienta esencial para encontrar el conjunto de esquemas que se organizan respecto a una situación dada, con este conjunto de esquemas constituido se puede observar los invariantes de la conducta, que con el conjunto de problemas y soluciones conformarán el campo conceptual.

2.3.1.3 Campos conceptuales

La primera aproximación que hace Vergnaud para definir un campo conceptual, es identificarlo como un conjunto de situaciones, de tal manera que se pueda generar una clasificación basada en el análisis de las tareas cognitivas y en los procedimientos que pueden ser puestos en juego en cada una de ellas, considerando que las situaciones complejas se pueden analizar como una combinación de tareas de las que es importante conocer la naturaleza y la dificultad propias (Vergnaud G. , 1990).

La clasificación de las situaciones requiere de aspectos matemáticos y de aspectos psicológicos, por eso al interesarse por el aprendizaje de las matemáticas se debe establecer clasificaciones, describir procedimientos, formular teoremas-en-acto, analizar la estructura y la función de los enunciados y representaciones simbólicas, en términos que tengan un sentido matemático (Vergnaud G. , 1990)

Por otra parte, el mismo autor propone otros elementos a considerar en los campos conceptuales, éstos son los teoremas y los conceptos, entendiendo entonces por campo conceptual como el conjunto de situaciones y el conjunto de conceptos y teoremas que permiten analizar estas situaciones como tareas matemáticas.

En particular, si tenemos en cuenta que un numeral escrito en el Sistema Decimal de Numeración se puede expresar como la suma de una seria de unidades de diferente orden y que cada símbolo incluido en la expresión arábiga debe ser interpretado como la multiplicación del dígito que representa, por la potencia de 10 que marca su posición en la expresión, es claro que al indagar sobre la representación polinomial en dicho sistema estén involucradas las estructuras aditivas y las multiplicativas definidas por Vergnaud.

2.3.1.4 Situaciones

En la teoría de los campos conceptuales una situación se identifica más con tarea que con una situación didáctica. En la tarea, desde el punto de vista psicológico, se pueden confrontar los procesos cognitivos con las respuestas que un sujeto proporciona al afrontar las situaciones propuestas. Desde este punto de vista las situaciones son instrumentos que sirven para analizar las dificultades conceptuales encontradas en los alumnos.

Vergnaud (1990) distingue tipos de situaciones: las primeras aquellas para las cuales el sujeto dispone en un momento dado de su desarrollo y bajo ciertas circunstancias, de competencias necesarias para el tratamiento inmediato de la situación", y las segundas aquellas en las cuales "el sujeto no dispone de todas las competencias necesarias, obligándolo a un tiempo de reflexión y de exploración conduciéndolo eventualmente al éxito o al fracaso. (pág. 2)

Respecto a las situaciones el autor de la teoría, destaca dos aspectos fundamentales:

Primero, la idea de variedad, esto es, en un determinado campo conceptual, se considera la existencia de gran variedad de situaciones generadas de manera sistemática por las variables de la situación.

El segundo aspecto considera la idea de historia, según Vergnaud (1990), las situaciones que los alumnos han encontrado y han dominado progresivamente, son las que modelan sus conocimientos, sobre todo aquellas que son capaces de dar sentido a los procedimientos y a los conceptos que se les quiere enseñar, es decir, se trata de la historia individual del aprendizaje de las matemáticas.

Esta última idea es esencial para los propósitos de la teoría, puesto que se pueden identificar, tanto en la manera de abordar y tratar la situación, en las concepciones primarias que se forman de los objetos, de sus propiedades y sus relaciones, como en las etapas por las cuales pasan, muchas regularidades entre un niño y otro.

Al hablar de regularidades, se entiende como la distribución de procedimientos que no están unívocamente determinados, que no son totalmente ordenados ni están ceñidos a un calendario. Sin embargo cuando se considera como conjunto vinculado a un campo conceptual es vital para la teoría de los campos conceptuales, puestos que se pueden identificar las principales filiaciones y las principales rupturas. (Vergnaud G. , 1990)

2.3.1.5 Significados y significantes.

Desde una perspectiva cognitiva, se puede decir que aunque son las situaciones las que dan sentido a los conceptos matemáticos, dicho sentido no se encuentra en las situaciones ni en las palabras ni en los símbolos matemáticos. Lo que constituye el sentido de una situación o de un significante son los esquemas evocados en el sujeto individual por esa situación o por ese significante. Es decir, para esta teoría, el sentido es una relación del sujeto con las situaciones y los significantes. (Vergnaud G. , 1990)

Sin embargo, frente a una situación o a un simbolismo, un sujeto necesariamente, no evoca todos los esquemas posibles, entra en consideración entonces, el rol de otros elementos que intervienen en las funciones cognitivas de la actividad matemática, dichos elementos son el lenguaje y las representaciones simbólicas.

Para la teoría de los campos conceptuales la función del lenguaje y los significantes es triple:

- ✓ *Ayuda a la designación y por tanto a la identificación de los invariantes: objetos, propiedades, relaciones, teoremas;*
- ✓ *Ayuda en el razonamiento y en la inferencia;*
- ✓ *Ayuda a la anticipación de los efectos y de los fines, a la planificación, y al control de la acción* (Vergnaud G. , 1990, pág. 15)

Comúnmente se le ha asociado al lenguaje una doble función de comunicación y de representación, dejando a un lado su función como ayuda del pensamiento que no está incluida en las dos primeras funciones. Si bien la designación y la identificación de los invariantes responden a la función de representación, no es seguro que el acompañamiento por el lenguaje de una actividad manual o de razonamiento provenga solamente de la función de representación. Por lo tanto, Vergnaud afirma que un sujeto acompaña su acción de una actividad lingüística cuando tiene necesidad de planificar y controlar una serie de acciones insuficientemente dominadas.

La actividad lingüística ayuda a la realización de la tarea y a la resolución del problema, es decir, esta actividad favorece el descubrimiento de las relaciones pertinentes y a la organización temporal de la acción y su control. En este sentido, la teoría propone tres funciones de la representación del lenguaje:

- ✓ *Representación de los elementos pertinentes de la situación*
- ✓ *Representación de la acción*
- ✓ *Representación de las relaciones entre la acción y la situación* (Vergnaud G. , 1990, pág. 16)

Por otra parte, cuando los datos son numerosos y cuando la respuesta a la cuestión planteada requiere varias etapas, las representaciones simbólicas aportan a la resolución de problemas constituyéndose en medios para identificar los objetos matemáticos determinantes para la conceptualización, sin embargo se aclara que la pertinencia del simbolismo y del lenguaje es relativa a los conocimientos y al desarrollo cognitivo del alumno.

El simbolismo matemático aunque no es una condición necesaria ni suficiente para la conceptualización, si le contribuye especialmente en la transformación de las categorías de pensamiento matemático en objetos matemáticos. El lenguaje natural es el medio esencial de representación y de identificación de las categorías matemáticas sin embargo es la acción del sujeto en situación la que constituye la fuente y el criterio de la conceptualización.

2.3.2 Estrategias

Como se mencionó en los párrafos anteriores, cuando un sujeto se enfrenta a dar solución a una situación determinada, es probable que ocurran dos cosas, la primera que los sujetos tengan las competencias necesarias para resolverla o por el contrario que carezca de ellas. En este último caso es donde emergen los esquemas mentales adquiridos y se combinan con otros para poder encontrar una solución a la situación.

Este esbozo sucesivo de varios esquemas como lo dice Vergnaud (1990) va acompañado necesariamente de descubrimientos, y es en las acciones del sujeto que se pueden observar las estrategias seguidas durante el proceso de resolución de una tarea concreta. Por esta razón el estudio de las estrategias se vuelve relevante a la hora de indagar por el aprendizaje en lo niños.

Antes de definir lo que es una estrategia, es conveniente distinguir entre dos tipos de sujetos: el epistémico y el psicológico. Por *sujeto epistémico* se entiende "*lo que hay de común a las estructuras intelectuales de los sujetos de un mismo nivel de desarrollo*". Por *sujeto psicológico, "lo que es propio de los individuos*", como por ejemplo la necesidad de una organización general que debe operarse entre el objetivo a alcanzar, y los medios disponibles (Inhelder, 1978, pág. 5).

De esta forma se comprende que el estudio de los procedimientos de resolución de tareas adquirirá su verdadera significación si se inscribe en un marco epistemológico constructivista, se elabora a partir de análisis estructurales previos y se apoya sobre las leyes fundamentales del progreso del conocimiento, lo que resulta crucial para avanzar en la comprensión del desarrollo cognitivo.

Las investigaciones efectuadas permiten precisar algunas leyes estructurales y funcionales del desarrollo cognitivo de los mecanismos de *comprensión de la realidad* imputables al sujeto epistémico. Llegando así el momento de centrar la atención en los *procesos de invención y en los procedimientos* utilizados por el sujeto psicológico en su búsqueda de una solución a problemas concretos (Inhelder, 1978, pág. 6).

La diferencia entre comprensión de la realidad y procesos de invención no debe ser entendida como algo radical, puesto que en el progreso de la comprensión que el niño realiza en el curso de su evolución psicogenética es posible discernir un acto de invención de otro y, recíprocamente, aceptar que en todo acto de descubrimiento hay una parte de comprensión.

Los trabajos iniciales, más epistemológicos y estructuralistas, estudiaron lo que hay de más *general*, o de universal, en la génesis del conocimiento; el objeto de los estudios posteriores varió hacia la búsqueda de los mecanismos funcionales subyacentes a las estrategias particulares del sujeto *individual* en sus diferentes niveles de desarrollo.

Inhelder (1978) denomina estrategia a "*todo sistema y toda secuencia de procedimientos, susceptible de ser repetidos y transferidos a otras situaciones, y que constituyen los medios para alcanzar el fin hacia el que tiende el sujeto*". (pág. 7) Queda claro en esta definición que las nociones de medio y fin son relativas, ya que un medio puede convertirse ocasionalmente en un fin y viceversa.

El problema central del estudio psicológico de las estrategias consiste en determinar sus condiciones de éxito, más específicamente, en precisar los ajustes progresivos de los medios a los fines y en analizar su formación (Inhelder, 1978). De esta forma, el análisis de las estrategias cognitivas versará sobre los descubrimientos sucesivos del sujeto y sobre las razones de las modificaciones operadas.

En el contexto anterior, fueron tres los problemas en los que la Escuela de Ginebra centró su atención: El primero hace referencia a la distinción entre dos órdenes de procedimiento: *un orden productivo*, causal en el sentido amplio (una acción del sujeto produce un efecto como resultado), y un orden que se puede calificar como *precursivo o teleonómico*, que constituye en cierto sentido una inversión del orden de producción (la consecución del fin comporta una serie de anticipaciones).

El segundo problema hace referencia a las relaciones existentes entre los procedimientos utilizados y los sistemas que subyacen a la interpretación que el niño atribuye a cada una de sus acciones. Aunque estos sistemas de interpretación corresponden a los esquemas más generales del sujeto, sería simplista pensar que los procedimientos salen directamente del conjunto de los esquemas organizados que posee el sujeto. Inhelder, Sinclair y Bovet (1975) creen por el contrario, que hay dos planos distintos pero interconectados: el de los esquemas generadores orientados hacia la comprensión y el de las estrategias particulares orientadas hacia la consecución del fin.

Estas formas de comprensión de la realidad contribuyen a la resolución de los problemas planteados, pero nunca directamente; puede ocurrir que un primer procedimiento, aún conduciendo a resultado positivo, sea considerado demasiado laborioso. En este caso, la búsqueda de simplificaciones y de economía lleva a una exploración más amplia de los objetos presentes con el fin de obtener una mejor comprensión de sus relaciones espaciales y causales.

El tercer problema, se refiere a la necesidad de explicitar en cada situación el juego de significaciones que el niño parece atribuir, por una parte a los medios y al fin, y por otra parte a sus propias acciones e intervenciones. Este juego de representaciones significantes, que constituye el puente entre los procedimientos de resolución de problemas y la comprensión, y que es tal vez responsable de la posible adecuación de los medios disponibles a la representación del fin, es de suma importancia para el estudio de las estrategias.

Pero ese juego de representaciones no se presta a la observación directa y por ello la tarea, extremadamente difícil, consiste en inferir a partir de los comportamientos todos los indicadores susceptibles de informar sobre los proyectos del sujeto y sobre la manera como concibe la realización de los mismos. Se trata en definitiva de establecer cómo opera el paso de un “saber hacer” general a un “cómo hacer” particular (Inhelder, 1978, pág. 9).

2.4 Aportes a la didáctica

Vergnaud (1990) estaba especialmente interesado en los campos conceptuales de las estructuras aditivas y las estructuras multiplicativas, sin embargo, la teoría de los campos conceptuales no es específica de esos campos, ni de la matemática, también se puede usar las propuestas de la presente teoría en la enseñanza de otras ciencias.

La teoría de los campos conceptuales en lugar de referirse a la interacción sujeto–objeto, se refiere a la interacción esquema–situación. Por consiguiente el desarrollo cognitivo consiste principalmente en el desarrollo de un considerable repertorio de esquemas.

Este repertorio afecta a unas esferas muy diferentes de la actividad humana y cuando se analizan, por ejemplo, los contenidos de competencia profesional de un individuo frecuentemente observamos que junto a competencias técnicas y científicas, propiamente dichas, están con un peso considerable, competencias sociales y afectivas. La educación, por lo tanto, debe contribuir a que el sujeto desarrolle un repertorio amplio y diversificado de esquemas procurando además, evitar que estos esquemas se conviertan en estereotipos anquilosados. (Vergnaud G. , 1996)

En muchas ocasiones las concepciones previas de los alumnos son consideradas como errores en relación a las concepciones científicas. Para Vergnaud, esta manera de concebir el conocimiento previo supone al niño, al alumno o al aprendiz adulto, como incompletos, imperfectos o deficientes en comparación con los adultos especialistas. Este abordaje, según él, es inadecuado para las cuestiones de desarrollo cognitivo allí involucradas. Sería mucho más fructífero considerar al sujeto como un sistema dinámico con mecanismos regulatorios capaces de asegurar su progreso cognitivo.

Las concepciones previas de los alumnos contienen teoremas y conceptos–en–acto que no son verdaderos teoremas y conceptos científicos pero que pueden evolucionar hacia ellos. En la enseñanza, es necesario desestabilizar cognitivamente al alumno, es preciso identificar sobre cuáles conocimientos previos el niño se puede apoyar para aprender, pero también es necesario distinguir cuáles son las rupturas necesarias, es decir, es preciso proponer también, cuidadosamente, situaciones para las cuales los alumnos no tienen donde apoyarse, o no se pueden apoyar en conocimientos previos.

La teoría de Vergnaud no es una teoría de enseñanza de conceptos explícitos y formalizados, pero manifiesta la idea de que los conocimientos–en–acto pueden evolucionar, a lo largo del tiempo, hacia los conocimientos científicos.

Al rescatar y enriquecer el concepto del esquema introduciendo los conceptos de teorema–en–acto y concepto–en–acto, al definir concepto como un tripleta, al colocar la conceptualización en el marco del desenvolvimiento cognitivo, al priorizar la interacción sujeto–situación y definir campo conceptual Vergnaud suministra un referencial muy rico para comprender, explicar e investigar el proceso de aprendizaje significativo.

Por otra parte, cuando el niño se enfrenta a una tarea (no necesariamente de matemáticas sino de la vida diaria), requiere de: analizar la situación, representársela, operar sobre esta representación para encontrar una solución y aplicar la solución encontrada, volver a empezar si es necesario. Este es un proceso psicológico fundamental en la vida, no solamente en la escuela.

Por lo tanto, si el profesor quiere comprender lo que hacen sus alumnos y la naturaleza de las dificultades con las cuales están confrontados, necesita conocer mejor dicho proceso, la teoría de los campos conceptuales ofrece herramientas fundamentales para interpretar las acciones de los niños al enfrentarse a un problema concreto.

CAPITULO 3. El Sistema Decimal de Numeración (SDN)

La actividad matemática se caracteriza por la utilización de diversos sistemas de expresión y representación, es decir, a cada concepto matemático le corresponde una o varias representaciones específicas.

Al respecto se debe tener cuidado para no confundir un objeto con su representación, como lo manifiesta Duval (1999) *"no puede haber comprensión en matemática si no se distingue un objeto de su representación"* (pág. 13)

En particular, el concepto de número está ligado a la noción de sistema, es decir no se hace referencia a conceptos numéricos sino a sistemas o estructuras numéricas.

Entendiéndose por estructura numérica como *"el conjunto de entes abstractos expresados simbólicamente, dotado de unas operaciones o modos de componer esos números y de unas relaciones, mediante las que se comparan dichos entes"* (Castro, Rico, & Romero, 1996, pág. 3).

Uno de los sistemas de representación o *"Modo de expresar y simbolizar determinadas estructuras numéricas, mediante unos signos, unas reglas y unos enunciados"* (Castro, Rico, & Romero, 1996, pág. 4), mediante el cual se expresan estructuras numéricas es el Sistema Decimal de Numeración, el cual por ser el objeto matemático de la presente investigación, se ampliará a continuación. Primero se anotarán algunas consideraciones generales sobre el concepto de número, sus operaciones y los sistemas numéricos.

3.1 El número

De acuerdo con (Vergnaud G. , 1991) la noción de número es una de las más importantes de la matemática enseñada en la escuela primaria, añade además, que no es una noción elemental, puesto que se apoya en otras nociones, como las de función, correspondencia biunívoca, relación de equivalencia y relación de orden.

Para Piaget, el concepto de número y su aprendizaje va ligado al desarrollo de la lógica del niño. El número se va organizando de una etapa a otra, en mutuo apoyo con la elaboración gradual de los sistemas de inclusión de clases y la seriación de las relaciones de orden, de modo que la serie de los números se constituye como síntesis de la clasificación y la seriación. Por tal motivo no hay construcción de número cardinal separadamente de la de número ordinal, sino que ambos se constituyen de modo indisociable (Piaget & Szeminska, 1967)

Por lo anterior la enseñanza del número en la escuela no es tarea fácil como se piensa, el hecho de que los niños repitan la serie numérica no garantiza que comprendan la noción de número.

Por otra parte, desde el punto de vista histórico, varias son las teorías acerca de cómo el hombre generó y utilizó el número; en una primera etapa aparece como la distinción de uno y muchos, luego como la necesidad de recuento de pertenencias, donde se establece una correspondencia uno a uno entre estas y un conjunto de igual cantidad de elementos, cuyo representante es el número cardinal correspondiente; posteriormente surge la necesidad de registro, creándose así rótulos y etiquetas que posibilitan organizar las muestras de acuerdo al número de elementos, apareciendo así el aspecto ordinal; después surgieron los sistemas de numeración como herramienta para organizar aquellos rótulos que permitieran otros usos del número y finalmente, la acción del conteo, uso de la secuencia ordenada de palabras número en correspondencia uno a uno de los elementos, donde el último de los elementos nombra la clase a la cual pertenece (Villella, 1996)

En la actualidad, dependiendo del contexto, en que los niños utilicen el número, éste puede tener distintos significados, (Castro, Rico, & Castro, 1987) citados en (MEN, 1996), plantean los siguientes:

- ✓ ***Como secuencia verbal*** *los números se utilizan en su orden habitual (uno, dos, tres, etc.), sin hacer referencia a ningún objeto externo. Los niños aprenden rápidamente a contar números por repetición de pautas verbales.*
- ✓ ***Para contar****, cada uno de los números se asocia a un elemento de un conjunto de objetos discretos.* Este contexto conlleva el correcto empleo de la correspondencia biunívoca que a cada número asocia un objeto.
- ✓ ***Como cardinal****, el número describe la cantidad de elementos de un conjunto bien definido de objetos discretos.*
- ✓ ***Para medir****, los números describen la cantidad de unidades de alguna magnitud continua que se supone dividida en múltiplos de la unidad correspondiente y que permite contestar la pregunta ¿cuántas unidades hay?*
- ✓ ***Como ordinal****, el número describe la posición relativa de un elemento en un conjunto discreto y ordenado, en el que se ha tomado uno de los elementos como inicial.*
- ✓ ***Como código****, los números se utilizan para distinguir clases de elementos. Son etiquetas que identifican cada una de las clases.*
- ✓ ***Como una tecla****, con el uso de las calculadoras y los computadores, el número está asociado con un resorte diferenciad, que hay que accionar físicamente para su utilización.* (pág. 29)

Para entender el significado de los números, además del uso cotidiano, es necesario realizar variadas experiencias utilizando materiales físicos y reflexionar sobre las acciones para ir construyendo el propio significado.

La construcción del concepto de número requiere de un largo proceso en el que uno de sus indicadores se ubica en el momento en que se logren integrar los aspectos ordinal y cardinal del número, es decir, cuando al contar se asocie a la última palabra número, un doble significado: para distinguir un objeto que tiene la misma categoría de los restantes y para representar la cantidad de objetos de la colección (MEN, 1996).

Finalmente es necesario aclara y diferenciar el concepto de número (lo representado) con el de numeral (la representación), ya que la no diferenciación de estos términos podría ocasionar dificultades en el aprendizaje; el primero se refiere a una idea asociada a un conjunto de objetos, o a una entidad abstracta que representa una magnitud, mientras que la segunda hace referencia a los símbolos utilizados para representar los números, por ejemplo el numeral "32" representa el número "treinta y dos" en el sistema decimal de numeración. Por lo tanto los numerales son el vehículo para comunicar ideas de números. (Duarte, Roby, & Polo, 2001)

3.2 Operaciones entre números

De acuerdo a los lineamientos curriculares de matemáticas (MEN, 1996), el currículo de matemáticas en la educación básica primaria le dedica un tiempo considerable a la comprensión del concepto de las operaciones fundamentales de adición, sustracción, multiplicación y división entre números naturales.

Además afirman que para construir el significado de las diferentes operaciones y orientar el aprendizaje de las mismas, se pueden tener en cuenta algunos aspectos básicos como:

- ✓ Reconocer el significado de la operación en situaciones concretas, de las cuales emergen;
- ✓ Reconocer los modelos más usuales y prácticos de las operaciones;
- ✓ Comprender las propiedades matemáticas de las operaciones;
- ✓ Comprender el efecto de cada operación y las relaciones entre operaciones.

¿Pero qué es una operación?, Matemáticamente según (Obregón, 2007, pág. 42) se llama operación (entre números) "*a una regla que, a partir de dos números llamados operandos, genera un tercer número llamado el resultado de la operación*"; complementa diciendo que para cualquier operación debe haberse inventado un signo que, colocado entre los dos operandos, indique qué operación se está realizando.

Dos de las operaciones básicas entre números son la suma y la multiplicación. El signo para la primera es una cruz vertical "+", que se lee "más", los operandos se llaman sumandos y el resultado suma o total. Para la segunda es una cruz oblicua "×", que se lee "por", los operandos para ésta se llaman factores y el resultado producto (Obregón, 2007)

Este mismo autor considera, a diferencia de lo que comúnmente se dice que las operaciones básicas son cuatro (suma, resta, multiplicación y división), la potenciación como la tercera operación básica, después de las dos mencionadas en el párrafo anterior, y define la a potenciación como una operación, con signo "^" que se lee "elevado a la", con operandos llamados base y exponente y cuyo resultado se llama potencia, que se obtiene al tomar el producto de la base tantas veces como factor, cómo indique el exponente. (Obregón, 2007)

Usualmente en las escuelas se enseña que "tres elevado a la cuatro" se escribe 3^4 en lugar de 3^4, es probable que el omitir el signo de la operación, se convierta en un obstáculo para que el niño aprenda y se apropie del concepto de potenciación.

3.3 Sistemas de numeración

Un sistema de numeración en general, está constituido por un conjunto de signos (orales o escritos) que se toman como primitivos y unas reglas que permiten combinarlos para dar lugar a nuevos signos, de tal manera que sea posible representar en forma precisa y simplificada la cantidad de elementos de un conjunto cualquiera.

Aquí también conviene diferenciar los conceptos de sistema de numeración y sistema numérico. El primero más general que el segundo. Un sistema numérico es un sistema de números independientes de los símbolos usados para representarlos. Un sistema de numeración, es la manera de representar los números mediante símbolos de acuerdo con reglas específicas que no conciernen directamente a las propiedades de los números.

Se tiene entonces, que los sistemas de numeración están conformados por el sistema de escritura y lectura de los signos utilizados para representar la cantidad de elementos de los conjuntos. El sistema numérico tiene que ver con el significado de los conceptos representados por los signos del sistema de numeración, por ejemplo el signo 358 pertenece al sistema de numeración, el significado que se le asigne corresponde al sistema numérico.

3.3.1 Sistemas de numeración antiguos:

Para comprender mejor lo que dio origen al nacimiento del sistema decimal de numeración, ésta breve reseña histórica permitirá conocer la aparición y evolución de la idea esencial que antecede a la numeración de posición, también se presentará algunos sistemas de numeración que antecedieron al actual sistema de numeración decimal.

En su texto (Ifrah, 1987) manifiesta que los yacimientos arqueológicos de un sistema de numeración se localizan en el Irak actual, antigua Mesopotamia; los especialistas establecen que del IX milenio al III milenio A.C. una gran variedad de fichas de arcilla sirvieron para designar números, medidas y categorías de objetos. Los "textos" matemáticos de los periodos Paleosumerio, Sumerio, Pre-sargónico, Sargón, y Seleucida, aproximadamente del año 4.000 A.C. tienen como característica común la aparición por primera vez de una noción de base.

Los sistemas de numeración de hace aproximadamente 3.000 años A.C. son similares en su estructura; en varias regiones (Mesopotamia, Egipto e Indonesia), se asentaron culturas bastante avanzadas con sistemas numéricos más o menos formales, que elegían una base y elaboraban un sistema de símbolos para presentar cualquier número.

Dichos sistemas se afectaron al emplearse los símbolos alfabéticos que representarían los números, dando origen a los sistemas de numeración alfabéticos (griego, fenicio, árabe, etrusco, romano, hebreo, entre otros).

Desde la antigüedad los números naturales se han representado con distintos tipos de símbolos. Cuando el hombre empezó a anotar números con marcas, haciendo rayas en una piedra o en el suelo, estaban por primera vez escribiendo numerales.

Después de un largo recorrido en la historia, al hombre se le ocurrió usar los diferentes símbolos en lugar de objetos; cuando se le ocurre combinar con símbolos siguiendo una serie de reglas, aparecen los llamados sistemas de numeración; siglos más tarde, según algunos historiadores en el norte de la India aproximadamente en el siglo V D.C., surgió un sistema de numeración posicional en base 10, con un símbolo para el cero, que se establece plenamente a comienzos del siglo VII (Castro, Rico, & Romero, 1996).

Entre esos sistemas antiguos se destacan cuatro que fueron los antecesores del sistema de numeración decimal y pueden considerarse como conectores históricos en la génesis de los números decimales; estos son:

3.3.1.1 Sistema babilónico

Fue uno de los primeros sistemas de numeración escrito, se considera uno de los sistemas más perfectos creados en la antigüedad, se trata de un sistema de numeración en base 60 que utiliza en parte un criterio posicional. Para escribir los números utilizaban dos símbolos: un “clavo” vertical ( ) que indicaba la unidad y una “espiga” ( ) que indicaba la decena. Para representar los números del 1 al 59 se hacía de una manera aditiva repitiendo esos signos las veces necesarias; a partir del 59 la escritura era posicional. Por ejemplo, la forma de escribir los numerales 17 y 58 se muestra en la figura 1:

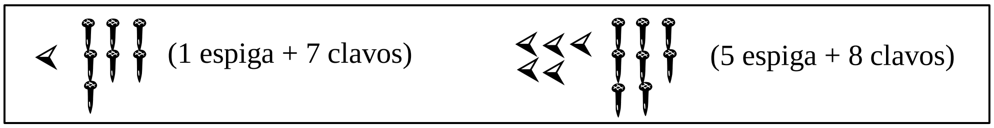


Figura 1. Representación de los numerales 17 y 58 en el sistema de numeración

A partir de 59 la escritura era posicional, la figura 2 muestra, por ejemplo, la escritura del numeral 65:

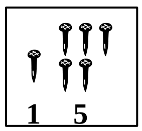


Figura 2. Representación del numeral 65 en el sistema de numeración babilónico

De esta manera, una escritura como la de la figura 3, representa el numeral $36 \times 60^2 + 40 \times 60 + 15 = 132.015$. Este es un sistema posicional de bases 60 en el cual, los signos que señalan cuántas potencias de la base tiene el número, conforman un sistema aditivo de base 10.

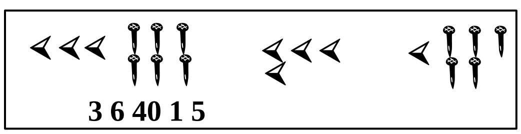


Figura 3. Representación del numeral 132.015 escrito en el sistema de numeración babilónico

La falta de un símbolo para indicar la ausencia de unidades y la mezcla de sistema posicional y aditivo presentaba ambigüedades en la escritura de los números, por ejemplo, dos “clavos” podía representar 2 unidades o 61.

3.3.1.2 Sistema de numeración de los antiguos chinos

Los matemáticos y los calculadores chinos utilizaron un ingenioso sistema de numeración en el cual combinaban regularmente barras horizontales y barras verticales alternativamente para distinguir las órdenes de unidades diferentes y evitar ambigüedades.

El sistema chino tenía símbolos para la unidad, el diez, las potencias de diez y símbolos para todos los números entre uno y diez, éstos se pueden observar en la figura 4.

Figura 4. Símbolos utilizados en el sistema de numeración

La representación de los números se basó en un principio multiplicativo y era de carácter posicional. Por ejemplo en la figura 5 aparece el numeral 4.361 representado en este sistema, teniendo en cuenta que los chinos escriben de arriba hacia abajo.

Figura 5. Representación del numeral 4.361 escrito en el sistema de numeración chino

A partir del siglo VIII los sabios chinos introducen en su sistema de numeración de posición un signo especial representado por un pequeño "círculo" para señalar la ausencia de unidades de un cierto orden. (Ifrah, 1987)

3.3.1.3 Sistema Maya de numeración

Los sacerdotes y astrónomos Mayas emplearon un sistema de numeración escrito en base 20, en el que las cifras recibían un valor dependiendo de su posición en la escritura, utilizaron tres símbolos: un punto para representar la unidad, una raya horizontal para representar cinco unidades y una concha para representar el cero. Los numerales del 1 hasta el 19 se representaban como se muestra la figura 6

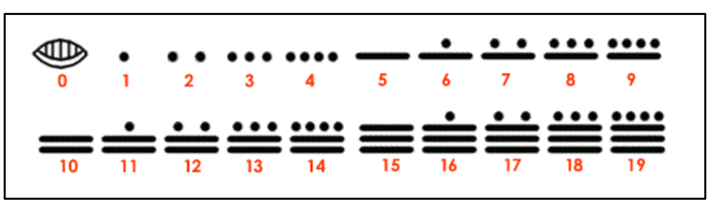


Figura 6. Representación de los numerales del 1 al 19 escritos en el sistema de numeración Maya

En este sistema de numeración se suman los valores de los símbolos para conocer un número. El punto no se repite más de 4 veces. Si se necesitan 5 puntos, entonces se sustituyen por una raya. La raya no aparece más de 3 veces. Si se necesitan 4 rayas, entonces quiere decir que se quiere escribir un número igual o mayor que 20 necesitándose así emplear otro nivel de mayor orden, por ejemplo la forma como se escribiría el numeral 5.832 en el sistema de numeración Maya se puede ver en la figura 7.

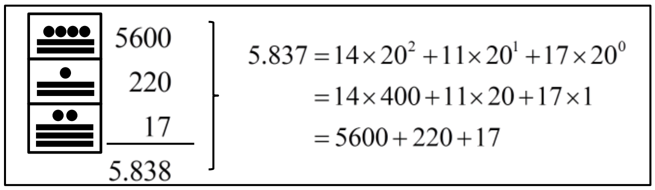


Figura 7. Representación del numeral 5.838 escritos en el sistema de numeración Maya

3.3.1.4 El origen del sistema posicional Hindú

Hace aproximadamente quince siglos, surge la primera numeración con una escritura idéntica a la nuestra, cuyos signos gráficos han constituido la prefiguración de nuestras cifras actuales; lo más probable es que haya nacido en la India Septentrional. Los símbolos utilizados fueron:

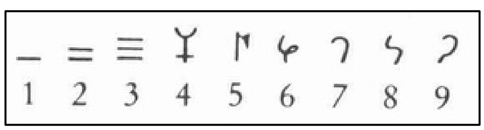


Figura 8. Símbolos utilizados en el sistema hindú

Sus cifras son signos que no hacen referencia a ningún objeto concreto y la regla de posición se aplica siguiendo las potencias consecutivas de la base diez.

Las nueve primeras cifras de la antigua numeración Brahmí y los nueve primeros nombres ordinarios de los números de la lengua Sánscrita fueron totalmente adoptados a la regla numeral de posición siguiendo la base diez. Junto al principio de posición aparece el del cero que constituyó el hallazgo más importante y sin el que no habría sido posible el progreso de las matemáticas, las ciencias y las ciencias modernas (Castro, Rico, & Romero, 1996).

3.4 Tipos de sistemas de numeración

Teniendo en cuenta los sistemas de numeración citados anteriormente, se puede evidenciar la existencia de diferentes tipos de sistemas de numeración, (Cid, Godino, & Batanero, 2003), clasificados de la siguiente manera:

- ✓ Sistema aditivo regular: aquí se definen los símbolos para la unidad, la base de y las potencias de la base. El número a representado se obtiene sumando los valores de los signos que componen su representación.

- ✓ Sistema multiplicativo regular: en este tipo de sistemas se definen símbolos para la unidad, la base, las potencias de la base y todos los números comprendidos entre la unidad y la base. El número representado se obtiene multiplicando cada potencia de la base por el valor del símbolo que le precede y sumando los resultados junto a las unidades.

- ✓ Sistema posicional regular: en este tipo de sistema se definen símbolos para la unidad y los números comprendidos entre la unidad y la base. Así mismo se define un símbolo para indicar la no existencia de unidades (el cero). Al contrario de los otros sistemas, en este no se definen símbolos específicos para la base ni para las potencias de la base, esto se hace por medio de combinaciones de los símbolos de la unidad y del cero.

  Con estas características, cada uno de los signos que componen la representación del número, dependiendo del lugar que ocupa, hace referencia a las unidades o a una determinada potencia de la base. El número representado se obtiene de la misma manera que en un sistema multiplicativo.

  Para los sistemas posicionales de numeración existe el siguiente teorema fundamental de existencia y unicidad de la expresión de un número ***n*** en una base cualquiera ***b***.

Dado un número natural ***b*** (que se llama base del sistema de numeración), todo número natural $n \in N$ se puede expresar de manera única mediante el siguiente polinomio:

$$n = r_k b^{k-1} + r_{k-1} b^{k-2} + ... + r_3 b^2 + r_2 b^1 + r_1 b^0$$

Donde $r_1,\ r_2, ..., r_k$ son números naturales menores que ***b***.

En conclusión se puede decir que a lo largo de la historia las diferentes sociedades han creado sistemas de numeración compuestos por un pequeño grupo de signos que combinados adecuadamente, bajo el parámetro de ciertas reglas, sirven para realizar todo tipo de recuentos y representar todos los números necesarios para las actividades diarias de dichas sociedades. Para ello, generalmente, se basaron en dos principios: los signos no representan sólo unidades sino también grupo de unidades y cualquier número se representa mediante combinaciones de los signos definidos en el sistema de numeración.

El estudio de los sistemas de numeración ha sido una parte esencial de la educación matemática desde los primeros niveles. De hecho, el núcleo de la enseñanza de las matemáticas en la educación infantil y primaria lo forman la comprensión de los números, de las operaciones aritméticas y la adquisición de destrezas de cálculo, por tal motivo es de suma importancia que los docentes tengan claridad en todos los conceptos que intervienen en la comprensión de dichos temas para que puedan brindar una gran variedad de situaciones que favorezcan el aprendizaje de los estudiantes.

3.5 El Sistema Decimal de Numeración (SDN)

El sistema decimal de numeración tuvo su origen en la India y fueron los árabes quienes lo difundieron por toda Europa, por esta razón es conocido como Induarábigo.

Según (Duarte, Roby, & Polo, 2001), el número decimal en un principio sirvió exclusivamente para medir y representar cantidades, luego el número decimal aparece como instrumento matemático, de aproximación de racionales y radicales. Posteriormente el decimal se utiliza conscientemente, pero no se le reconoce como objeto de estudio. Posteriormente, los decimales se convierten en un objeto de conocimiento que puede ser enseñado y utilizado en operaciones prácticas.

En el desarrollo del sistema decimal, se destaca también la aparición de la primera publicación que utilizó el sistema decimal el "*Liber Abaci de Leonardo de Pisa*" y la superación de la crisis bancaria en el siglo XV, de la "*Banca Medicis*" al aplicar en su contabilidad el sistema de numeración decimal lo cual avaló su utilidad en el mundo económico.

Con la invención de la imprenta (1.440) se facilitó la difusión y la popularización del sistema decimal y en entre los años 1.548 y 1.620, Simón Stevin amplió el sistema para escribir las fracciones decimales y creó la notación de potencias negativas dando lugar a la aparición de los números decimales, quienes serían esenciales para la construcción posterior de los números reales. (Duarte, Roby, & Polo, 2001)

En la actualidad nuestro sistema de lectura y escritura se llama Sistema Decimal de Numeración, porque cada diez unidades de orden cualquiera forman una unidad de orden inmediatamente superior. Este sistema utiliza diez signos, llamados dígitos, los cuales son: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0 y un punto (.) para indicar unidades de mil, de millón, etc., además para representar un número natural en dicho sistema, se deben seguir las siguientes reglas: solamente se escriben las cifras que especifican el número de unidades que lo componen, dichas cifras se escriben una a continuación de la otra, de izquierda a derecha, en relación decreciente con respecto al orden de las unidades.

De las reglas anteriores se deriva que las cifras adquieran un doble valor: el valor correspondiente al número de unidades y el valor relativo al orden que depende de la posición que la cifra ocupe en el numeral. Entendiéndose por numerales como los signos primitivos y los que se derivan de la combinación de ellos.

El Sistema Decimal de Numeración es una herramienta matemática construida a través de una larga evolución histórica, se clasifica dentro de los sistemas posicionales e involucra simultáneamente operaciones aditivas, multiplicativas, y de potenciación.

Guitel, (1975), Ifrah, (1987) citados por Terigi y Wolmn (2007), señalan que han sido tres las innovaciones más relevantes en la génesis del Sistema de Numeración en la historia de la humanidad: la utilización de agrupamientos, la utilización del principio de la base y el valor posicional de las cifras.

El valor posicional de las cifras se constituyó en el principio fundamental para la economía en la notación numérica, ya que permitió eliminar, en la escritura, la representación de los exponentes de las potencias de las base. Por ejemplo al escribir 28.654 se está diciendo $2\times10^4+8\times10^3+6\times10^2+5\times10^1+4\times10^0$, que al escribirlo posicionalmente, se evita la escritura de los exponentes de las potencias de la base (4, 3, 2, 1, 0) sobreentendidos en la posición asignada a cada coeficiente (2, 8, 6, 5,4).

3.5.1 El sistema decimal de numeración como objeto

El uso cotidiano del Sistema Decimal de Numeración lo han convertido en una simple técnica de traducción de ciertas cantidades en símbolos gráficos y generalmente se piensa que para su conocimiento es suficiente conocer la regla que rige dicha traducción. Este modo de entender al SDN oscurece la comprensión de los problemas involucrados en el aprendizaje de este objeto y, desde luego, en su enseñanza (Terigi & Wolman, 2007).

Como objeto matemático, según Terigi y Wolman (2007), el sistema de numeración se puede considerar como un sistema de representación de las cantidades, es de anotar que la construcción de cualquier sistema de representación involucra un proceso de diferenciación de los elementos y relaciones reconocidas en el objeto a ser representado y una selección de aquellos elementos y relaciones que serán retenidos en la representación.

Teniendo en cuenta lo anterior se puede decir que el SDN permite la representación de los números en diversas formas, dependiendo de las necesidades de los individuos que los utilizan.

3.5.2 Representación de números en el Sistema Decimal de Numeración

El Sistema Decimal de Numeración permite la representación de los números en varios formatos, los más comunes son el formato arábigo que lo hace por medio de dígitos o secuencias de dígitos, que se conocen como numerales arábigos, y el formato verbal, que lo hace a través de palabras o secuencias de palabras con características morfosintácticas, conocidas como palabras-número o expresiones numéricas verbales, (Otálora & Orozco, 2006). A continuación presentamos algunas características de estos dos formatos:

3.5.2.1 Sistema de numeración escrito

Como ya se mencionó anteriormente el sistema decimal es un sistema posicional regular de base 10, con símbolos: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Tiene una estructura polinómica, es decir el valor que representa cada cifra se obtiene multiplicando esa cifra por cierta potencia de 10.

Respecto a los numerales arábigos, se puede decir que el SDN descompone los enteros en sumas de unidades sucesivas, siguiendo las reglas de todos los sistemas posicionales de notación. Específicamente en el SDN, esta descomposición se hace de la forma $n=\sum_{i=1}^{m} k_i 10^i$ donde n es el número a descomponer, m representa el "orden del número", i varía entre 0 y m, y los k_i son enteros entre 0 y 9.

Por ejemplo,

$$\begin{aligned} 3548 &= 3000+500+40+8 \\ &= 3(10\times10\times10)+5(10\times10)+4(10)+8(1) \\ &= 3\times10^3+5\times10^2+4\times10^1+8\times10^0 \end{aligned}$$

Respecto a esta representación Orozco y Hederich (2002) comentan que:

> La estructura aditiva y multiplicativa del sistema de numeración arábiga es evidente. Primero, el número se expresa como la suma de una serie de unidades de diferente orden. Segundo, cada símbolo incluido en la expresión arábiga debe ser interpretado como la multiplicación del dígito que representa, por la potencia de 10 que marca su posición en la expresión. Así, la interpretación del grafismo arábigo requiere de la realización de adiciones, de multiplicaciones y, si se quiere, incluso de potenciaciones (que en sí, son multiplicaciones generalizadas). Así, es innegable desde un punto de vista matemático, el carácter multiplicativo de las expresiones arábigas. (pág. 8)

3.5.2.2 Sistema de numeración oral

Este formato tiene una estructura aditiva (diecinueve: 10+9; veintiocho: 20+8, etc.) y multiplicativa (tres mil: 3×1.000, o setecientos: 7×100), es decir, define símbolos para los números anteriores a la base, para la base y sus potencias. El número 3200 no se lee “tres dos cero cero”, sino como “tres mil doscientos”, haciendo referencia a las potencias de la base “mil” y “cien” o “ciento”

Cid, Godino, y Batanero, (2003, pág. 35), manifiestan que el sistema oral presenta irregularidades dependiendo del idioma, para el castellano son las siguientes:

- ✓ Para los numerales once, doce, trece, catorce y quince, en un sistema regular se diría: dieciuno, diecidos, diecitrés, diecicuatro y dicecinco.

- ✓ Las decenas veinte, treinta, cuarenta, …, noventa, en un sistema regular se diría: dos dieces (o dos decenas), tres dieces, etc.

- ✓ Otra irregularidad es pronunciar quinientos en lugar de cinco cientos.

- ✓ Algunas potencias de 10 no tienen un símbolo específico, sino un símbolo compuesto por los correspondientes a otras potencias, por ejemplo, no existe un símbolo para la potencia 10^4, para esta potencia se utiliza un símbolo compuesto por los correspondientes a otra potencias: diez mil, lo mismo ocurre con otras potencias de la base, 10^5 se dice cien mil, 10^7 se dice diez millones, 10^8 se dice cien millones, lo que hace que las potencias mil (10^3) y un millón (10^6)se conviertan en bases auxiliares.

- ✓ La palabra "billón" tiene un significado ambiguo. En países de origen latino quiere decir "un millón de millones" (10^{12}), mientras que en los países de tradición anglosajona la palabra equivalente significa "mil millones" (10^9)

Por otra parte, Hederich y Orozco (2000) proponen para el análisis de las expresiones numéricas verbales en castellano dos perspectivas, una morfo-fonológica, que permite diferenciar prefijos de sufijos y analizar contracciones de las expresiones numéricas verbales, y otra sintáctica, que permite la diferenciación de las palabras que componen cada expresión.

En la perspectiva morfo-fonológica se evidencian dos tipos de componentes: las palabras numéricas y prefijos llamados partículas de cantidad, porque marcan cantidades básicas ("dos", "cincu", "sete") y las palabras numéricas y sufijos que expresan potencias de diez o unidad en un orden dado llamados partículas sintácticas o partículas de potencia ("enta", "cientos", "mil", "millón") (Otálora & Orozco, 2006), por ejemplo en la expresión verbal:

"cuatro[*cientos*] / *och*[*enta*] *y cinco*[*mil*] / *nove*[*cientos*]/ *set*[*enta*] *y seis" (485.976)*

Las palabras "*cuatro*", "*cinco*", "*seis*" y los prefijos "*och*", "*nove*" y "*set*" constituyen partículas de cantidad y la palabra "*mil*" y los sufijos "*cientos*" y "*enta*" constituyen partículas de potencia. El slash (/) representa las composiciones aditivas y los paréntesis cuadrados ([ ]) las composiciones multiplicativas.

Por tanto, de acuerdo con Hederich y Orozco (2000), se puede decir que las expresiones verbales numéricas y las expresiones arábigas, denotan una secuencia de operaciones aditivas y multiplicativas entre dígitos y ciertas potencias de 10.

Estos dos formatos siguen ciertas reglas comunes, sin embargo en la aplicación de alguna de ellas se pueden encontrar diferencias sustanciales, siendo una de ellas el uso del símbolo "0" que como manifiesta (Hederich & Orozco, 2000, pág. 6) *"en la notación arábiga el cero denota la ausencia de unidades en un orden dado, mientras que en la verbal es la pausa en la vocalización de la secuencia completa (centenas–decenas–unidades) lo que denota esta ausencia"*. Razón por la cual se puede considera el sistema de palabras numéricas verbales menos transparente que el de la escritura arábiga.

Respecto a las operaciones involucradas en los dos formatos, (Lerner & Sadovski, 1997) expresan que en la numeración hablada, la yuxtaposición de palabras supone siempre una operación aritmética, en algunos casos una suma ("mil siete" significa 1000+7) y en otros una multiplicación ("novecientos" significa 9×100).

En la denominación de un número, estas dos operaciones aparecen combinadas, por ejemplo "cuatro mil seiscientos" significa 4×1000 + 6×100. La conjunción "y" (que representa lingüísticamente la adición), sólo aparece cuando se quieren reunir decenas y unidades.

Para Lerner y Sadovski (1997) la numeración escrita es más regular y hermética que el formato oral. Regular en el sentido en que la suma y la multiplicación se aplican siempre de la misma manera: se multiplica cada cifra por la potencia de la base a la que corresponde y se suman los productos resultantes. Es hermética porque en ella no hay rastro de las operaciones aritméticas involucradas y a diferencia del formato oral, las potencias de la base no se representan a través de símbolos particulares sino que se infieren a partir de la posición que ocupa las cifras.

CAPITULO 4. Estudios antecedentes

El problema de la construcción del Sistema Decimal de Numeración ha sido abordado desde diferentes perspectivas, entre ellas están los estudios psicológicos sobre las conceptualizaciones de los niños acerca del sistema de numeración, y por otra parte están las investigaciones sobre los métodos de enseñanza del sistema, a continuación presentamos algunos tipos de investigaciones en éstos dos ámbitos.

4.1 Estudios sobre las conceptualizaciones del sistema decimal de numeración

Broitman y Kuperman (2004) citan a (Sastre y Moreno, 1976; Huges, 1986; Sinclair et al, 1983), como pioneros en trabajar sobre la representación gráfica de cantidades menores que diez; otros estudios se centran en la diferenciación entre notaciones numéricas y alfabéticas (Pontecorvo, 1985) o hacen énfasis en procedimientos notacionales en general (Tolchinsky y Karmiloff-Smith, 1993)

Posteriormente aparecieron estudios sobre la reconstrucción de las reglas del Sistema Decimal de Numeración en cuanto a su producción, interpretación o comparación de notaciones de números de varios dígitos, aquí Broitman y Kuperman (2004) citan a (Nunes, T., 1989; Higino da Silva, 1990; Seron et al, 1991 y 1995; Sinclair y Scheuer, 1993; Lerner, Sadovsky y Wolman, 1994; Sinclair et al, 1994). Otros trabajos muestran que los niños avanzan en su conocimiento del sistema de numeración al enfrentar conflictos entre las diferentes ideas que construyen, (Terigi, 1992; Lerner, Sadovsky, Wolman, 1994)

Desde una perspectiva operatoria, Kamii (1994) muestra que, para construir el sistema de notación en base 10 para los números arábigos, se requiere la construcción de sistemas jerárquicos sucesivos, segmentando en cada nuevo sistema el todo en partes iguales, ordenando cada parte, e incluyéndolas jerárquicamente. De acuerdo con la autora, este mismo proceso debe ser repetido para cada nuevo subsistema.

Por otra parte, para analizar errores que comenten los niños al escribir números arábigos al dictar y al leer numerales, varios autores utilizan un modelo de procesamiento numérico que describe la estructura interna y el funcionamiento de los mecanismos cognitivos que permiten el procesamiento numérico normal propuesto por McCloskey[2] y que permite diferenciar los errores (lexicales y sintácticos) que los individuos comente al escribir numerales dictados.

En algunos de estos estudios (Power & Dal Martello, 1990, Seron et al., 1991, 1991, 1994), citados por (Orozco Hormaza & Hederich, 2002) señalan que la mayoría de los errores muestran un patrón consistente; sin embargo en otras investigaciones (Sullivan, Macaruso & Sokol, 1996), también reportadas por (Orozco Hormaza & Hederich, 2002) se encuentra que la mayoría de los errores presentan patrones bastante inconsistentes, se concluye entonces que *"cualquier modelo de desarrollo de decodificación numérica necesita tomar en cuenta la diversidad de errores que los niños cometen"* (Orozco Hormaza & Hederich, 2002, pág. 2).

Autores como Lerner & Sadovski (1997) trabajan desde la perspectiva del desarrollo de la notación numérica y de la comprensión del sistema, estos estudios analizan las escrituras no convencionales desde los criterios que los niños utilizan, además estudian el papel de algunos números privilegiados llamados nudos[3] argumentado que los niños primero abordan estos nudos y solamente *"después elaboran la escritura de los números que se ubican en los intervalos entre nudos"* (pág. 11) y también estudian el papel de la numeración hablada en la escritura y señalan que para notar

[2] En Hederich, C. y Orozo, M. (2000) puede encontrar más información acerca del Modelo de McCloskey
[3] Números nudos son numerales que permiten representar las decenas, centenas y unidades de mil exactas.

numerales, los niños extraen información del sistema lingüístico, pero simultáneamente aplican sus conocimientos sobre el sistema de notación (Orozco Hormaza & Hederich, 2002).

En esta misma perspectiva también se encuentra las investigaciones de Nunes y Schliemann, (1982 y 1983) que estudian la comprensión que los niños tienen sobre la composición aditiva y su relación con la escritura de números y las de Scheuer y otros, (2000) que estudian y tipifican los errores de niños menores de 8 años al escribir numerales dictados.

Como las categorías propuestas para analizar la escritura errada de los niños, así como los modelos adoptados por los autores que trabajan tanto desde la perspectiva del procesamiento como desde la perspectiva del desarrollo, no resultaron suficientes para abarcar la diversidad de los errores, en los trabajos de Orozco y Hederich (2002) se busca especificar más la diversidad encontrada en los errores de los niños al escribir numerales dictados.

Es así como en sus investigaciones los autores, presentan criterios y categorías que permiten diferenciar los errores que los niños cometen al escribir dictados y proponen a manera de hipótesis los elementos constitutivos del proceso requerido para transcodificar[4] las expresiones verbales dictadas a los códigos del formato arábigo, entendiéndose el proceso de transcodificación como la traducción de las expresiones numéricas del formato verbal hablado al formato arábigo.

Además, manifiestan que

> La transcodificación del formato verbal hablado al formato arábigo, no solo exige al niño codificar las marcas de cantidad del formato verbal

[4] La transcodificación numérica es el proceso mental que permite traducir los números de un formato de representación a otro, haciendo uso de mecanismos cognitivos de procesamiento de información. (Otálora, Y. y Orozco, M, 2006)

> hablado a otro código, el grafémico, sino, convertir las marcas de unidades, en la posición del dígito en el numeral arábigo. (pág. 9)

y proponen que para escribir numerales a partir de un dictado el niño debe fragmentar la expresión numérica verbal hablada que escucha en función de sus componentes y transcodificar cada marca al correspondiente código y posición en el output arábigo.

Algunas conclusiones en general a las que han llegado este tipo de investigaciones son:

> Muchos estudios evidencian la elaboración temprana por parte de los niños de conceptualizaciones originales sobre el SDN, entre las cuales se destacan la construcción de criterios de comparación de números y la producción de notaciones numéricas basadas en la correspondencia con la numeración hablada. (Terigi & Wolman, 2007, pág. 69)

> Los niños presentan dificultades al escribir numerales dictados por dos razones diferenciadas: 1) En el proceso de transcodificación establecen correspondencia entre las expresiones verbales que fragmentan y los numerales que escriben, ignorando o codificando las partículas sintácticas que expresan potencia de diez. 2) La utilización inicial y defectuosa de las reglas de composición o de valor de posición, propias de la notación arábiga interfiere con la codificación. (Orozco Hormaza & Hederich, 2002, pág. 22)

> Tanto las expresiones numéricas arábigas como las verbales tienen en común una estructura operatoria de adiciones y multiplicaciones. Por lo tanto se propone que el elemento que permite al niño comprender y producir números en el sistema de notación decimal es el dominio del componente operatorio del sistema. (Hederich & Orozco, 2000, pág. 7).

> Aunque la interpretación de un numeral requiera de multiplicaciones y potenciaciones, en sentido estricto estas no se requieren de forma generalizada, sino que se encuentran restringidas a ciertas multiplicaciones específicas (del dígito por el orden la unidad) y a ciertas potenciaciones específicas (todas sobre la misma base: 10). En este sentido, podría pensarse que el sistema tiene una estructura multiplicativa restringida sobre un subconjunto de números enteros: dígitos y potencias de 10. (Hederich & Orozco, 2000, pág. 7)

> Basándose en la propiedad polinómica del sistema, los niños elaboran estrategias tanto para escribir los números, como para operar con ellos. Se detectó la importancia de esta propiedad en el proceso de aprendizaje, demostrando que aparece tempranamente. “Cobran especial importancia –además de los criterios para ordenar números– «leyes» como «los ‘dieces’ van con dos, los ‘cienes’ van con tres»; «después de nueve viene cero y el otro número pasa al siguiente»; «hay diez números (de dos cifras) que empiezan con uno, diez que empiezan con dos…»” (Lerner & Sadovski, 1997, pág. 159)

4.2 Estudios sobre la enseñanza del Sistema Decimal de Numeración

Respecto a la enseñanza usual del Sistema Decimal de Numeración, Terigi y Wolman (2007), manifiestan que se diseña sobre el supuesto de que los niños tienen que comprender el sistema de numeración antes de comenzar a utilizarlo, ya que el uso resulta de la correcta aplicación de los principios conceptuales que rigen al sistema. Por lo tanto, se establece un proceso didáctico que comienza con la explicación por parte del profesor del principio de agrupamiento en base diez que rige al sistema, y que promueve luego la aplicación de ese principio a diversas situaciones de uso, como la resolución de pequeñas cuentas, el dictado de números, entre otros.

Las investigaciones sobre la enseñanza del SDN, se puede decir que aparecen cuando diversos estudios evidenciaron que se requiere de situaciones específicas para que ciertos aspectos conceptuales de él se pongan en juego, esto condujo a que los procesos cognoscitivos ligados a la construcción del SDN se ubicara en el contexto de la enseñanza escolarizada.

En esta perspectiva Terigi y Wolman (2007) nombran los trabajos de Bednarz y Janvier, 1992, Bednarz, 1991, De Blois, 1996 y Lerner, 2005, quienes han estudiado entre otras, la relación entre el aprendizaje de las operaciones aritméticas y la comprensión de los aspectos multiplicativos subyacentes a la notación numérica, la producción, interpretación o comparación de escrituras numéricas.

Lerner y otros, (2003) citado por Terigi & Wolman (2007) trabajan sobre el diseño y aplicación de situaciones didácticas que apuntan a la comprensión de la agrupación decimal por parte de los niños que permita estudiar el paso de una concepción estrictamente aditiva de la notación numérica a una concepción caracterizada por la progresiva consideración de los aspectos multiplicativos involucrados en la organización del sistema posicional.

En esta misma perspectiva, a partir de las investigaciones hechas por Castaño (1995 - 1998), se han podido establecer las siguientes etapas en el proceso que siguen los niños al asignar significado a los numerales escritos en el sistema decimal de numeración.

Etapa cero: *Significación global***.** El niño no tiene conciencia alguna del valor relativo de las cifras que forman un numeral. Los niños de este nivel aunque intuyen la regla de combinar los dígitos para escribir numerales de dos cifras, no tienen conciencia del valor relativo que tiene cada cifra dentro del signo.

Etapa uno: *Significación aditiva.* El niño toma conciencia del valor relativo de las cifras. Esta etapa se caracteriza porque el niño asigna a cada cifra un valor de acuerdo con el lugar que ocupe en el numeral.

Etapa dos: *Significación aditiva-mulitiplicativa.* El niño opera con dos y más tipos de unidades distintas. Reconoce que una cifra de un numeral representa unidades de uno, que la otra hacia la izquierda, unidades de diez, que la otra hacia la izquierda, unidades de cien, etc. Los niños de esta etapa antes de alcanzar este nivel operatorio, inventarán formas intermedias de hacer cuentas en las que mezclan procedimientos propios de esta etapa con los de la anterior.

Etapa tres: *Significación polinomial.* El niño se hace a un significado abstracto de unidad relativa. Cada unidad equivale a unidades que a su vez están constituidas por otras unidades. En esta etapa se reconocen unidades de diferente orden para cada una de las cifras y se reconoce la relación de inclusión jerárquica entre ellas.

En este sentido, las investigaciones hechas por Castaño (2009), han podido constatar que el niño confiere diferentes significados a los numerales escritos en el sistema decimal de numeración. Estos significados están ligados al grado de estructuración que los niños van ganando y de su capacidad para coordinarlos e integrarlos en uno sólo. En esta dirección la presente investigación pretende caracterizar las estrategias seguidas por los niños para pasar de la etapa dos a la etapa tres.

En general, los trabajos de Castaño (1995 - 1998) se enmarcan en el reconocimiento de que el alumno debe vivir múltiples y variadas experiencias significativas[5], con diferente nivel de estructuración, para que desde allí pueda ejecutar las acciones físicas y mentales necesarias para establecer las relaciones lógicas implicadas; la reflexión sobre las acciones y sus resultados le permiten al niño formular hipótesis, confrontarlas y avanzar en el nivel de estructuración de su pensamiento con relación a este concepto.

En síntesis, las investigaciones hechas por Castaño dan cuenta de los procesos por los cuales los niños se acercan a la segunda etapa mencionada anteriormente, pero ninguna describe las estrategias seguidas por los niños para acceder a la representación polinomial de numerales en el sistema decimal de numeración, brecha que se pretende cubrir con la realización de esta investigación

[5]Según el marco de Castaño, situaciones significativas son aquellas situaciones reales o imaginadas, que crean un contexto en el cual los alumnos dan significado y sentido a la acción, Castaño (1995)

En conclusión se puede decir que tanto los estudios realizados desde la perspectiva psicológica, como desde la perspectiva de la enseñanza, la mayoría están dirigidos a indagar por los problemas suscitados en las etapas iniciales de la construcción del Sistema Decimal de Numeración.

Los aportes son significativos para la comprensión de los fenómenos presentados en dichas etapas, en cuanto a la representación polinomial los aportes son muy pocos.

PARTE II. El estudio

CAPITULO 5. 3^4 se lee "tres subido a la cuatro".

5.1 Un problema y un método

5.1.1 Delimitación del problema

La educación escolar, como proceso, considera principalmente dos enfoques fundamentales: la enseñanza y el aprendizaje, que a pesar de tener diferencias marcadas siempre serán complementarios.

Un estudio completo de dicho proceso tendría, necesariamente, que considerar ambos enfoques exponiendo claramente la forma en que interactúa el uno con el otro, tarea que hasta el día de hoy parece sumamente complicada.

Varias perspectivas teóricas, con diferentes orígenes disciplinarios, han logrado aportar mayor claridad a cuestiones relacionadas con uno de los enfoques, pero han fracasado al tratar de explicar la contra parte con la claridad que otras perspectivas lo hacen. De acuerdo con Cortina (1997), pensamos que tratar de acercarse a un proceso educativo implica tener que optar ya sea por el enfoque de la enseñanza o el del aprendizaje.

Esto no quiere decir que al elegir uno de los enfoques se excluya o desconozca la importancia de la otra perspectiva. Por el contrario, *"estudiar el aprendizaje implica aportar conocimiento sobre los resultados de la enseñanza en cuyo marco se dio. En reciprocidad, estudiar la enseñanza significa indagar en las formas de interacción social en las que se logra el aprendizaje"*, Cortina (1997, pág. 48)

En Didáctica de las Matemáticas ocurre lo mismo, como su objetivo es mejorar la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, los investigadores tienen que contribuir a desarrollar conocimientos útiles relacionados con temas importantes para la disciplina. Para Lesh (1979), citado por Gutiérrez (1991) *"desarrollar conocimientos útiles"* significa:

- ✓ *Identificar problemas importantes para la enseñanza de las matemáticas*
- ✓ *Plantear conjunto de cuestiones concretas y resolubles relacionadas entre sí y que contribuyan a mejorar el conocimiento disponible sobre el problema subyacente.*
- ✓ *Encontrar respuestas a esas cuestiones que sean útiles en una diversidad de contextos.*
- ✓ *Comunicar los resultados y las conclusiones de forma que sean comprensibles por profesores e investigadores*. (pág. 152)

Además, Gutiérrez (1991) clasifica los trabajos de investigación en Didáctica de las Matemáticas, en dos grupos. Por un parte están los que se dedican a elaborar teorías de enseñanza o aprendizaje de las matemáticas, en donde los estudios deben abordar los diferentes componentes matemáticos, psicológicos y pedagógicos que intervienen en los procesos de comprensión y aprendizaje de las matemáticas.

El otro grupo lo conforman los trabajos dedicados a elaborar bloques de actividades o planes de enseñanza complementaria con los que se pretende mejorar la eficacia de la enseñanza y la profundidad del aprendizaje de los alumnos.

Entre éstas clases de trabajos se encuentra la actividad que realizan la mayoría de los investigadores, que consiste en estudiar alguna parcela de la enseñanza o el aprendizaje de las matemáticas, analizando los procesos de aprendizaje de los estudiantes, sus formas de comprensión de los conceptos o las dificultades que encuentran, desarrollar métodos de enseñanza, etc. Gutiérrez (1991)

En el proceso de aprendizaje de una parte determinada de las matemáticas se van produciendo modificaciones en el comportamiento de los estudiantes, es decir sus conocimientos, destrezas operatorias, o estrategias cambian. Estas alteraciones suelen estar directamente relacionadas con cambios en su forma de entender los conceptos matemáticos involucrados o con el surgimiento de determinadas dificultades específicas.

Para mejorar la enseñanza es necesario indagar cómo se desarrollan dichos procesos de aprendizaje y descubrir la evolución del pensamiento de los estudiantes, las causas de sus problemas y como adquieren las habilidades cognitivas que les permiten superarlos.

Por esta razón Gutiérrez (1991) denomina este tipo de investigaciones como de *"análisis de comportamiento"* de los sujetos (pág. 161). El análisis de los procesos y dificultades en el aprendizaje de conceptos, algoritmos y estrategias, se reflejan en las formas como los estudiantes realizan determinadas tareas o en las respuestas que dan a ciertas preguntas.

Dentro de los contenidos básicos de la escuela elemental, se encuentra la enseñanza del SDN, generalmente se cree que cuando un niño cuenta, escribe y lee los números, maneja las casillas de unidades, decenas, centenas, etc., tienen un conocimiento adecuado del SDN.

Pero cuando los alumnos se enfrentan a cierto tipo de situaciones, que requieren manejar la lógica que fundamenta el SDN, fracasan dejando claro que las manifestaciones dadas por los niños, descritas en el párrafo anterior, no son suficientes.

El Sistema Decimal de Numeración se soporta en dos principios: el de posicionalidad y el decimal. Según Castaño (1997) para comprender estos dos principios y poder operar con ellos, "*es indispensable poseer cierto desarrollos de los pensamientos aditivo y multiplicativo"* (pág. 2).

Además este autor afirma que el *Sistema numérico* comprende, el conjunto de los números con las relaciones (*mayor que, menor que*, *e igual a*) y las operaciones de suma y multiplicación. Al establecer estas relaciones y al calcular los resultados de dichas operaciones, el niño, y cualquier individuo, se apoya en el conocimiento y manejo del SDN.

Diversas investigaciones se han dedicado a estudiar los fenómenos que se presentan en el aprendizaje de las primeras etapas de la construcción del Sistema Decimal de Numeración, desde distintas perspectivas; muy pocas se han interesado en indagar sobre las últimas etapas, como por ejemplo la que se refiere a la representación polinomial de un numeral escrito en el Sistema Decimal de Numeración.

Recordemos que al hablar de representación polinomial, nos referimos al hecho de que todo numeral escrito en el sistema decimal de numeración, se puede representar como un polinomio en base 10, por ejemplo el numeral 5.896, se puede ver como:

$$5.896 = 5\times10^3+8\times10^2+9\times10^1+6\times10^0$$

Por supuesto que, al encontrarnos con un numeral cualquiera escrito en el SDN, no hacemos este tipo de cálculos; estamos acostumbrados a concebir las magnitudes bajo este sistema de numeración y por eso no es necesario. Sin embargo, al operar con el sistema estamos operando bajo esta racionalidad, y es probable que para poder operarlo tengamos que dominarla.

Es sobre la racionalidad del SDN que se construyen la mayoría de los cálculos convencionales con los que operamos (algoritmos) y también buena parte de los sistemas de medición (kilos, metros, grados centígrados, etc.). Todo esto hace que el estudio del sistema de numeración sea un conocimiento muy importante de la educación elemental.

Para que los niños y niñas desarrollen comprensivamente esta representación, requieren de una buena formación del concepto de número y un manejo apropiado de la lógica del sistema. Una comprensión del SDN exige un pensamiento que permita comprender el proceso condensado en un polinomio como el mostrado anteriormente

Por lo anterior y partiendo del hecho que en la mayoría de veces, en el aprendizaje y en la enseñanza del SDN, no se tiene en cuenta la importancia de la representación polinomial como algo fundamental para la comprensión del SDN y atendiendo a las experiencias de nuestra práctica pedagógica, la pregunta orientadora de esta investigación se formuló de la siguiente manera: *¿Cuáles son las estrategias que los niños y niñas entre 9 y 11 años, aplican cuando resuelven situaciones que involucran la representación polinomial de numerales escritos en el Sistema Decimal de Numeración?*

Abordar esta pregunta desde la Didáctica de las Matemáticas requirió de una perspectiva cognitiva aplicada a la educación, por este motivo se tuvo en cuenta la teoría propuesta por Vergnaud (1990), algunas consideraciones de los trabajos propuestos por Inhelder (1978), y de la limitación de los alcances de este trabajo, que en este sentido corresponden a describir las estrategias que los niños y niñas entre 9 y 11 años, aplican cuando desarrollan comprensivamente la representación polinomial de los numerales escritos en el Sistema Decimal de Numeración. Para esto, específicamente se planteó:

- ✓ Diseñar una tarea que involucre operaciones requeridas en la representación polinomial de un número escrito en el SDN, y permita identificar las estrategias seguidas por los niños

- ✓ Clasificar y caracterizar las estrategias que los niños evidencian al resolver la tarea propuesta.

- ✓ Identificar dificultades en el aprendizaje de la representación polinomial de un numeral escrito en el SDN

El problema plateado muestra que el interés de nuestra investigación centra como objetivo la estrategias desarrolladas por los niños en la comprensión de la representación polinomial, involucrando

Para procurar alcanzar los objetivos establecidos alrededor de nuestro objeto de estudio, se determinó como enfoque la investigación cualitativa en la cual se propuso como herramienta de análisis y discusión las situaciones problema desde la perspectiva de Vergnaud.

5.1.2 Escogencia del método

Para dar cumplimiento a los objetivos propuestos, y teniendo en cuenta la problemática propuesta, se implementó el enfoque de investigación cualitativa, dejando en claro el interés por comprender la forma como los niños acceden al conocimiento matemático. Es decir, que al ser las acciones del sujeto las evidencias para corroborar tal acceso, la postura psicológica permite asegurar más la identificación del ¿cómo? que el ¿por qué? del aprendizaje de las matemáticas.

En este sentido la metodología empleada fue adaptada a este tipo de investigación, teniendo en cuenta que lo cualitativo no se refiere a lo a numérico sino que representa un compromiso con el desarrollo del trabajo de campo.

Durante el proceso de aprendizaje de una parte concreta de las matemáticas, en este caso la representación polinomial, se van produciendo modificaciones en el comportamiento de los estudiantes, sus conocimientos, destrezas, entre otras. Dichas modificaciones pueden estar relacionadas con cambios en su forma de entender los conceptos matemáticos involucrados con la aparición de determinadas dificultades específicas.

Una forma de mejorar la enseñanza, es averiguar cómo se desarrollan dichos procesos de aprendizaje y descubrir la evolución y la lógica del pensamiento de los estudiantes, las causas de sus dificultades y cómo hacer que adquieran las habilidades cognitivas que les permitan superarlas.

En esta investigación se tiene como punto de partida el aprendizaje que los niños construyen acerca de la representación polinomial, de esta manera se podrá establecer en el futuro estrategias que mejoren y fortalezcan los procesos de enseñanza del Sistema Decimal de Numeración.

Como se mención anteriormente, este tipo de investigación, se denomina *"análisis de comportamiento" de los sujetos,* dicho análisis puede darse de forma individual o grupal. En el presente trabajo se hizo en forma individual, en donde el análisis de las estrategias de solución, se reflejó en las acciones manifestadas por los sujetos al plantear soluciones a la tarea propuesta.

Por otra parte, uno de los principios básicos de la forma de entender la educación en la investigación cualitativa, según (Gutierrez, 1991), es considerar que "*los estudiantes son diferentes y que su comportamiento o su éxito en el aprendizaje no* *dependen sólo de su habilidad o capacidad, sino que están relacionados con una serie de variables de tipo social que deben ser tenidas en cuenta (entorno familiar, escolar,…)”* (pág. 171).

Esta investigación no tuvo en cuenta todas las variables posibles, sólo se consideró la más relevante para la consecución de los objetivos planteados, dejando el análisis de la influencia de otras variables para estudios posteriores. Esto se muestra con mayor precisión en el siguiente ítem.

Otra característica de la investigación cualitativa, tiene que ver con el diseño, que como afirma (Castro & Crespo Blanco, 2007, pág. 1) , "*a menudo se denomina emergente, ya que emerge sobre la marcha”*, es decir, el diseño puede cambiar según el desarrollo de la investigación, cuando el investigador confronta las decisiones con base a los descubrimientos, y los puntos de vista de los sujetos participantes, los cuales no se conocía ni comprendían al iniciar el estudio.

El proceso seguido en esta investigación se inició con la delimitación del tema propuesto. Luego se desarrolló el marco conceptual y la revisión de antecedentes que consistió en explorar y estudiar todo un conjunto de fuentes que ofrecían utilidad para el estudio, tales como: libros, artículos y en general documentación que ayudó a desarrollar temas involucrados en el SDN y sus representaciones, también investigaciones didácticas sobre las construcciones por parte de los niños de dicho sistema y las teorías acerca de la representación y el significado de los objetos matemáticos, de los cuales se pudo llegar a la formulación del problema de investigación

En este recorrido se encontró que muy pocas investigaciones han abordado la construcción de dicho sistema centrando la atención en la representación polinomial, teniendo en cuenta los propósitos de la presente investigación se elaboró una tarea en la cual, los sujetos participantes, leyeron y escribieron números presentados en distintas formas (numerales, productos, potencias, sumas y productos), entre ellas la polinomial.

La elaboración final de la tarea consideró aportes significativos que sugirió la prueba piloto, después de que la resolvieran varios sujetos con características similares de los niños que participaron en la resolución de la tarea final. Detalles de dicha prueba se pueden observar más adelante.

Después de gestionar los permisos para ingresar en las instituciones escogidas, hacer la elección de los sujetos participantes, y aplicar la tarea a cada uno de ellos, se procedió a la recolección y análisis de resultados. Estas dos etapas de la investigación se desarrollan cada una en los capítulos 6 y 7 respectivamente.

5.2 Sujetos participantes

Para la elección de los sujetos, decidimos trabajar, a partir de una solicitud informada, convocando niñas y niños que quisieran participar en el estudio, y que además cumplieran con el requisito básico de no haber estudiado, al momento de la entrevista, la potencia en sus cursos previos de matemáticas.

De esta forma, la convocatoria incluyó un total de 22 estudiantes de los grados 4º, 5º y 6º de la educación básica, provenientes de dos colegios de la ciudad de Popayán, uno de naturaleza oficial y el otro de naturaleza pública, con los cuales se realizó un trabajo personalizado.

Las características de los colegios seleccionados fueron las siguientes:

- ✓ No pertenecen a una zona marginada

- ✓ No cuentan con programas de capacitación y apoyo didáctico para maestros, ni con poblaciones pequeñas en los salones.
- ✓ Son conocidos y con trayectoria

La relación entre grado escolar y edad, permitió que los niños y niñas convocados se encontraran entre los 9 y los 11 años, concordando con la literatura (Castaño, 1995) que establece que es a lo largo de esos tres años que la mayoría de las niñas y niños inician el proceso de construcción de la representación polinomial de un numeral escrito en el SDN.

Esto hizo que la investigación, en un principio, considerara la edad de los niños. Pensando establecer en la diferencia de edades posibles evoluciones en las estrategias desarrollas por ellos.

Sin embargo, no se desconocen otro tipo de variables que se hicieron presentes en el estudio, como por ejemplo, el género, la procedencia de los colegios (oficial y privada), grado escolar, el contexto social y cultural, entre otras; que podrían genera nuevas situaciones de estudio para otras investigaciones que amplíen los resultados obtenidos en este trabajo.

La conformación final de los sujetos participantes se presenta en la tabla siguiente:

Tabla 1. Conformación de los sujetos participantes por sexo y edad

Niñas			Niños			TOTAL
9 años	10 años	11 años	9 años	10 años	11 años	
2	2	2	7	5	4	22

De la tabla se puede apreciar que el 72,7% de los sujetos son niños y el 27,3% son niñas. En cuanto a la edad, se puede ver que el 45,4% son de nueve años, de los cuales el 80% son niños y el 20% son niñas. El 27,3% de los entrevistados tienen diez años, de ellos, el 66,7% son niños y el 33,3% niñas. De once años son el 27,3% de los cuales el 66,7 son niños y el 33,3% niñas.

5.3 Procedimiento de recolección de datos

Con el fin de conocer los métodos de resolución y formas de uso de los conceptos y habilidades matemáticas entorno al SDN, específicamente a su representación polinomial, se diseñó y propuso una situación, en la cual los sujetos participantes, leyeron y escribieron, de forma secuencial, algunas expresiones relacionadas con dicha representación.

De esta manera se recogió toda la actividad de los sujetos participantes, para luego analizarla en detalle. Se utilizó una cámara de video y los registros de escritura de cada una de las sesiones en que se dividió la entrevista.

El tipo de protocolo utilizado fue la entrevista clínica, donde se reprodujo el diálogo en el que participaron el investigador y cada uno de los niños de forma individual. El investigador mostró, en la primear parte, una serie de tarjetas que el sujeto participante leyó y luego realizó un dictado que los niños y niñas escribieron.

Para garantizar que a todos los individuos entrevistados se le hicieran las mimas preguntas se elaboraron once tarjetas y una tabla en la que se consignaban una serie de expresiones numéricas y aritméticas, relacionadas con la representación polinomial de número escrito en el SDN. (Ver figura 9 y tabla 2)

La finalidad de la entrevista fue la de conocer los caminos o estrategias seleccionadas por los niños y niñas al resolver la tarea propuesta. Cada uno de los sujetos participantes se sometió a una entrevista, la cual se dividió en dos sesiones.

La primera sesión de la entrevista se inició con una motivación inicial y ambientación en la que se agradeció, de antemano, a los niños y niñas su colaboración y valiosos aportes a la investigación, se presentó la actividad y se aclaró en qué consistía la participación de cada uno de ellos.

En esta etapa los niños realizaron dos actividades, la primera consistió en leer distintas representaciones de números (numerales, productos, potencias y sumas de productos y potencias), que se les presentó en diferentes tarjetas. En la segunda se les pidió a los niños que escribieran números con características similares a los números que leyó en la primera parte.

En el dictado, el investigador intervino directamente puesto que fue él quien leyó las expresiones para que los niños las escribieran. Mientras que en la lectura no hubo intervención, simplemente mostró las tarjetas y se le pidió a los niños que leyeran lo que ahí observaban. Además en la primera sesión de la entrevista los niños se limitaron a leer lo que aparecía en las tarjetas y a escribir lo que se les dictó, aquí no hubo intercambio de preguntas ni respuestas.

La segunda sesión de la entrevista también consistió en dos actividades, en la primera los sujetos leyeron números, en esta oportunidad, las tarjetas mostradas a los niños contenían los mismos números y expresiones que se les dictó en la primera sesión de la entrevista.

Para la escritura se tuvo en cuenta la forma de lectura que los niños realizaron en la primera sesión. En esta etapa se consideraron dos casos: 1) Si la lectura que hizo el niño en la primera sesión, no correspondía con la del sistema decimal de numeración, se le dictaron los números siguiendo la forma como ellos lo hicieron y posteriormente se les dictó en la forma como corresponde en el sistema decimal de numeración. 2) Cuando el niño leyó el número como se corresponde en el sistema decimal de numeración, se conservó esa forma de presentación para su dictado.

Durante el desarrollo de la segunda sesión de la entrevista, después de que los niños leyeron las tarjetas, se presentó intercambios de preguntas y respuestas, las preguntas que se realizaron estuvieron encaminadas a indagar sobre el significado que tenía para los niños las tarjetas donde aparecían potencias.

En cada una de las entrevistas no se condicionó el tiempo que el niño requirió para la solución de las tareas, por el contario se le dio libertad para que reaccionara y respondiera verbalmente o por escrito según el caso.

El desarrollo de las actividades propuestas se llevó a cabo en la biblioteca de la institución educativa donde los sujetos realizan sus estudios. Cada niño y niña pasó de uno en uno y se ubicó en una mesa quedando al frente al investigador quien le iba mostrando las tarjetas de forma ordenada. Luego en la misma mesa los niños y las niñas realizaron la escritura.

Como se mencionó anteriormente, para tener una información más precisa de lo ocurrido se hicieron registros fílmicos y el investigador principal elaboró fichas donde condesó las respuestas, y las estrategias de los sujetos. La actividad tuvo una duración aproximada de diez minutos por participante en cada sesión, en total la entrevista se realizó entre 20 y 25 minutos. Con los resultados obtenidos se procuró caracterizar las estrategias que los sujetos plantearon al solucionar las tareas planteadas.

5.3.1 Prueba piloto

Teniendo en cuenta que la representación polinomial de un numeral escrito en el SDN se refiere a una expresión como $5\times10^4+3\times10^3+9\times10^2+2\times10^1+4\times10^0$ se propuso presentarles a los niños once expresiones agrupadas de acuerdo a los componentes de dicha representación, en el siguiente orden: las tres primeras incluían numerales, las dos siguientes, incluían productos, las dos siguientes potencias, las dos siguientes sumas de productos, la siguiente suma de productos y potencias, y la última un número en su representación polinomial.

Durante el desarrollo de la prueba, se llevaron a cabo dos sesiones, con dos actividades cada una (lectura y escritura). Para la lectura se les presentó un listado de expresiones las cuales el niño debía leer de una en una. Para la escritura el investigador realizó un dictado de expresiones semejantes a la lectura.

Se aplicó la prueba a 20 sujetos (niños y niñas), entre los que estaban algunos que conocían, formalmente, la potenciación y otros que no la conocían. Algunas de las entrevistas se realizaron en las casas de los niños.

La ejecución de la prueba piloto permitió realizar los siguientes ajustes:

- ✓ Selección de los sujetos participantes: como en esta prueba se entrevistó a niños que ya conocían la operación potenciación y en ellos no se observó mayor dificultad en la lectura y escritura de numerales y expresiones aritméticas, nos dimos cuenta que para alcanzar nuestros objetivos se requería de niños que aún no hubieran visto este tema, por lo tanto la muestra final se decidió escoger niños con esta característica.

- ✓ Protocolo de la entrevista: para garantizar la homogeneidad en la aplicación de la entrevista la prueba piloto permitió organizar el protocolo de cada una de las preguntas e intervenciones del investigador.

- ✓ Elaboración del material: después de la prueba piloto se organizó el material a utilizar en tarjetas para la lectura y tablas para la escritura de tal forma que a todos los niños se les presentara todas las expresiones por igual.

- ✓ Lugar de aplicación de la entrevista: algunas entrevistas de la prueba piloto se realizaron en las casas de los niños, nos dimos cuenta que la presencia de familiares influye en la acción del sujeto, por tal razón se buscó un sitio con mayor privacidad, decidiendo realizar la prueba en la biblioteca de las instituciones a las que pertenecían los niños.

5.3.2 Descripción de la tarea

El objetivo de la tarea pretendió, a partir de las acciones de los sujetos, describir las estrategias seguidas por ellos cuando resolvieron situaciones relacionadas con la representación polinomial de numerales escritos en el SDN.

Como se mencionó anteriormente, el sistema decimal de numeración permite la representación de los números en varios formatos, entre ellos están el formato verbal y el formato escrito. En el primero *se representan los números a través de palabras o secuencias de palabras con características morfosintácticas especiales conocidas como palabras-número* (por ejemplo: *"Quinientos treinta y siete"*) y el segundo *permite representarlos por medio de dígitos o secuencias de dígitos conocidos como numerales arábigos* (por ejemplo, "2.348"), (Otálora & Orozco, 2006, pág. 409).

De esta forma, la tarea se diseñó tomando dos tipos de situaciones comunes para los niños. En la primera situación los niños leyeron lo que aparecía en once tarjetas que el investigador fue mostrando una a una. Las expresiones consignadas en las tarjetas fueron seleccionadas teniendo en cuenta las operaciones que aparecen en un polinomio en base 10, como los numerales, los productos, las sumas de productos y las potencias.

En la segunda tarea, los niños escribieron expresiones similares a las consignadas en las tarjetas, en esta ocasión, el investigador realizó el dictado de dichas expresiones.

Con el propósito de cruzar información, las expresiones que aparecieron en las tarjetas de la primera lectura fueron las que se les dictó en la segunda y las que los niños leyeron en la segunda fueron las que se les dictó en la primera.

En los números escogidos para la lectura y escritura no se tuvieron en cuenta numerales que contenían ceros intermedios. Diversas investigaciones como, (Scheuer, et. al. , 2000), (Tolchinsky & Karmiloff, 1991), (Lerner & Sadovski, 1997), entre otras citadas por Orozco & Hederich (2002), muestran las dificultades que se les presenta a los niños cuando leen o escriben numerales con dicha cifra, lo que involucra una variable adicional, que no fue de interés para la presente investigación.

Teniendo en cuenta las consideraciones anteriores las expresiones escritas en las tarjetas se presentaron en el siguiente orden:

En las tarjetas 1, 2 y 3 aparecieron numerales de diferente orden. El de la primera tarjeta tenía seis cifras (centenas de mil), el de la segunda un numeral de 8 cifras (decenas de millones) y el de la tercera, un numeral de 9 cifras (centenas de miles de millones).

En las tarjetas 4 y 5 se presentaron productos, en la tarjeta 4 una multiplicación de un número de primer orden multiplicado por diez, en la tarjeta 5, el producto de un número de segundo orden por otro de tercer orden.

En las tarjetas 6 y 7 se mostraron potencias, en la tarjeta 6 un número de primer orden elevado a otro número del mismo orden. En la tarjeta 7 un número de orden tres elevado a un número de orden dos.

En las tarjetas 8 y 9 aparecieron, sumas de productos. En la tarjeta 8, la suma del producto de un numeral de segundo orden por otro de primer orden, más la multiplicación de dos números de orden dos. En la tarjeta 9, la suma del producto de un número de primer orden por cien, más el producto de un número de primer orden por 10.

En la tarjeta 10 se presentó la suma del producto de un número de orden uno, por la potencia de un número elevado a un número del mismo orden, más el producto de otro número de primer orden, por una potencia de un número elevado a un número del mismo orden, más la potencia de un número de orden uno elevado a un número del mismo orden, como se muestra en la figura.

$$8\times5^2 + 2\times3^4 + 6^5$$

Figura 9. Expresión incluida en la tarjeta 10

En la tarjeta 11 se presentó la representación polinomial de un numeral de cinco cifras, es decir del orden de las decenas de mil.

En los anexos 1 y 2 se pueden ver las tarjetas que se utilizaron en la entrevista uno y en la entrevista dos respectivamente.

Como se mencionó anteriormente los dictados se realizaron con expresiones similares a las contenidas en las tarjetas (ver tabla2)

5.3.3 Instrumentos y Materiales

El seguimiento a la realización de la tarea se hizo a través de la entrevista clínica, en cuanto permitió indagar acerca de las justificaciones y argumentaciones que los sujetos establecieron al construir la respuesta a la situación planteada.

La entrevista se dividió en dos sesiones. En la primera, por la forma cómo se pensó las situaciones, no hubo mayor intercambio de preguntas entre el investigador y el entrevistado, esta sesión se remitió a una lectura y a un dictado. En cambio en la segunda, después de que se recogió y organizó la información recogida en la primera, se presentó más intercambio sobre todo al indagar sobre la forma de leer las tarjetas que contenían potencias.

La entrevista se llevó a cabo a través de las siguientes etapas:

Motivación: Presentación y saludo inicial.

Investigador: Yo estoy haciendo un trabajo de la Universidad y me han pedido que entreviste a niños y niñas, y que escuche atentamente sus respuestas para entender cómo es que ustedes aprenden. Como no tengo tan buena memoria necesito grabar nuestra conversación, por eso es que traigo la cámara. Quiero que sepas que todo lo que me digas será muy importante para mí y te lo voy a agradecer, lo que interesa es saber lo que tú haces y piensas para responder lo que yo te pregunte.

La actividad está dividida en dos partes, ahora vamos a hacer una parte y luego en unos días, vuelvo para hacer la segunda parte. De antemano quiero agradecerte por tu valiosa colaboración.

SESIÓN 1

Actividad 1: Lectura de números

Investigador: Te voy a presentar unas tarjetas, quiero que las observes y leas lo que ahí aparece. A medida que se iban presentando las tarjetas se iba leyendo el número correspondiente a cada una de ellas. (Ver anexo 1)

Actividad 2: Escritura de números

Investigador: voy a leer lo que aparece en un cuadro y quiero que tú escribas, en el lugar correspondiente lo que te voy dictando. Aquí se utilizó la Tabla2 con la cual el investigador dictó los numerales y la Tabla4 en al que los niños registraron su escritura. Se esperó el tiempo necesario para que los niños escribieran las expresiones.

Terminada la primera sesión, en la tabla 4 se transcribió y clasificó la lectura que los niños realizaron en la actividad1 de la primera sesión.

SESIÓN 2:

Después de una semana de haber realizado la primera sesión de la entrevista, se realizó la otra con características similares a la de la primera, con algunas variantes.

Actividad 1: Lectura de números

Investigador: Te voy a presentar unas tarjetas, quiero que las observes y leas lo que ahí aparece. Las expresiones que aparecen en las tarjetas fueron las mismas que el niño escribió en la actividad 2 de la sesión 1 (ver anexo 2).

Después de que el niño leyó las tarjetas el investigador solicitó que leyeran de nuevo la tarjeta número 6, donde aparece una potencia, con la intención de indagar a los niños sobre lo que estaban entendiendo cuando leyeron 4^3 de forma exitosa.

Actividad 2: Escritura de números

Para esta sesión fue necesario transcribir la forma como el niño leyó las expresiones de las tarjetas en la actividad 1 de la primera sesión. (Ver anexo 3)

Investigador: voy a leer las expresiones que aparecen en esta tabla y quiero que tú escribas lo que te voy dictando

Parte 2A: si el niño, en la sesión anterior, no leyó en la forma del sistema decimal de numeración, se le dictaron los números en la forma como los leyó.

Parte 2B: dictado en la forma del sistema decimal de numeración.

En cuanto a los materiales se puede decir que las 11 tarjetas fueron elaboradas en cartulina blanca, de forma rectangular de 31×3,5 centímetros cada una, con las representaciones numéricas impresas en el tipo de letra Impact número 72. Además cada tarjeta se numeró en la parte posterior de tal forma que antes que los niños realizaran la lectura, el investigador anunciaba el número de la tarjeta a leer, en la figura 9 se ilustra un ejemplo.

Tarjeta 10

(Atrás)

$$8\times5^{2}+2\times3^{4}+6^{5}$$

(Delante)

Figura 10. Ejemplo de tarjetas observada por los niños

De la misma forma, para garantizar la homogeneidad en el dictado, se escribieron los números en el formato verbal, y se utilizó la siguiente tabla:

Tabla 2. Dictado en la forma del Sistema Decimal de Numeración. Sesión1

TARJETA	Dictado1: en la forma del SDN
1	Ochocientos cincuenta y siete mil, seiscientos cuarenta y dos
2	Ochenta y cuatro millones, trescientos veinticuatro mil, ciento cincuenta y siete.
3	Quinientos ochenta y cuatro mil, trescientos veinticinco millones, seiscientos cuarenta y ocho mil, quinientos treinta y nueve.
4	Nueve por diez.
5	Treinta y dos por cuatrocientos cincuenta y ocho.
6	Cuatro elevado a la tres.
7	Doscientos ochenta y cuatro elevado a la treinta y cinco.
8	Dieciocho por seis, más treinta y cuatro por cuarenta y siete.
9	Cinco por cien más nueve por diez.
10	Cuatro por seis elevado a la cinco, más ocho por cuatro elevado a la siete, más ocho elevado a la tres.
11	Siete por diez elevado a la cuatro, más nueve por diez elevado a la tres, más cinco por diez elevado a la dos, más seis por diez elevado a la uno, más cuatro por diez elevado a la cero.

El registro de la escritura realizada por los niños se realizó en la tabla 3, la cual contiene un encabezado donde se registró la edad de los entrevistados, seguidamente un cuadro con dos columnas, la primera contiene el número de la tarjeta que se le dictó y la segunda un espacio en blanco destinado para la escritura.

Tabla 3. Registro para le escritura de los niños

Edad:_____

TARJETA 1	
TARJETA 2	
TARJETA 3	
TARJETA 4	
TARJETA 5	
TARJETA 6	
TARJETA 7	
TARJETA 8	
TARJETA 9	
TARJETA 10	
TARJETA 11	

5.4 Procedimiento de análisis de datos

Cada una de las sesiones de la entrevista, en las cuales los niños realizaron los dos tipos de tareas (lectura y escritura), fue grabada en video; cada sesión tuvo una duración aproximada de 10 a 15 minutos. A partir de estos videos se procedió a identificar las distintas estrategias de solución que para cada tarea se presentaron, también se tuvieron en cuenta las expresiones escritas que los niños realizaron en el dictado y que se recogieron en la tabla3.

La información de los videos de la lectura uno y dos, se transcribió en tablas como la siguiente:

Tabla 4. Transcripción de la lectura de los niños en la entrevista1

CÓDIGO: _____ EDAD: ___________ SESIÓN:______ Fecha: ____________________

Número a leer	**LECTURA1**		
	SDN	Otra	Cómo leyó
643.785	☑		
92.684.836		☑	

Número a leer	LECTURA1		
	SDN	Otra	Cómo leyó
791.354.276.846			
8×10			
49×524			
3^4			
328^{42}			
12×5 + 28×34			
8×100 + 5×10			
$8\times5^2 + 2\times3^4 + 6^5$			
$8\times10^4+6\times10^3+7\times10^2+5\times10^1+9\times10^0$			

La tabla está constituida por un encabezado donde se consiga el código, la edad, la sesión y la fecha. Es de anotar que el código se estableció con el fin de ordenar los registros, para esto se tuvo en cuenta la edad y la cantidad de niños o niñas en esa edad. Por ejemplo, el código 1102, representó el segundo niño de once años.

En la primera columna de la tabla, aparece el número que los niños y niñas leyeron, observando las tarjetas, en el respectivo orden. La columna siguiente está dividida en tres partes: “SDN”, “Otra”, “como leyó”. Si los entrevistados leyeron de acuerdo al sistema decimal, se marcó con una X debajo de casilla “SND”, si leían de otra forma distinta a la del sistema, se marcó con una X debajo de la casilla “Otra”. En la columna “como leyó”, se hizo la transcripción de las expresiones verbales que los niños utilizaron al resolver la tarea.

Leer en la forma del SDN supone que los niños leyeron los numerales y las operaciones con numerales en la forma como usualmente se hace. Otra forma de leer implica la introducción de variantes a la forma usual, hecho que nos permitió determinar las estrategias seguidas por los niños al leer las tarjetas.

Como las once tarjetas se diseñaron teniendo en cuenta los componentes de la representación polinomial de un número, es decir, las tres primeras incluían numerales, las dos siguientes, incluían productos, las dos siguientes potencias, las dos siguientes sumas de productos, la siguiente suma de productos y potencias, y la última un número en su representación polinomial.

Se procedió a organizaron las respuestas de los niños de acuerdo a cada una de las tarjetas, teniendo en cuenta las edades de los niños, en una tabla donde se registró en la primera columna el número de la tarjeta, en la segunda el código y la lectura de los niños con su clasificación (en el SDN u otra). Un ejemplo de dicha organización se muestra en la tabla número cinco

Tabla 5. Descripción de la lectura que hicieron los niños para la tarjeta 1

T	CÓDIGO	LECTURA	SDN	OTRA
TARJETA 1	0901	Seiscientos cuarenta y tres mil, setecientos ochenta y cinco	X	
	0902	Seiscientos cuarenta y tres mil, setecientos ochenta y cinco	X	
	0903	Seiscientos cuarenta y tres, setecientos ochenta y cinco		X
	0904	Seiscientos cuarenta y tres mil, setecientos ochenta y cinco	X	
	0905	Seiscientos cuarenta y tres mil, setecientos ochenta y cinco	X	
	0906	Seiscientos cuarenta y tres mil, setecientos ochenta y cinco	X	
	0907	Seiscientos cuarenta y tres mil, setecientos ochenta y cinco	X	
	0908	Seiscientos cuarenta y tres mil, setecientos ochenta y cinco	X	
	0909	Seiscientos cuarenta y seis mil setecientos ochenta y cinco	X	
	1001	Seiscientos cuarenta y tres mil setecientos ochenta y cinco	X	
	1002	Seiscientos cuarenta y tres mil setecientos ochenta y cinco	X	
	1003	Seiscientos cuarenta y tres mil, setecientos ochenta y cinco	X	
	1004	Seis cuarenta y tres setecientos ochenta y cinco		X
	1005	Seiscientos cuarenta y tres mil setecientos ochenta y cinco	X	
	1006	Seiscientos cuarenta y tres setecientos ochenta y cinco		X
	1007	Seiscientos cuarenta y tres setecientos ochenta y cinco		X
	1101	Seis cuarenta y tres y siete ochenta y cinco		X
	1102	Seis millones cuarenta y tres mil setecientos ochenta y cinco		X

T	CÓDIGO	LECTURA	SDN	OTRA
	1103	Seiscientos cuarenta y tres setecientos ochenta y cinco		X
	1104	Seis cuarenta y tres siete ochenta y cinco		X
	1105	Seis cuatro tres siete ocho cinco		X
	1106	Seiscientos cuarenta y tres mil setecientos ochenta y cinco	X	

Luego se determinó el éxito (ver anexos 4 y 5) alcanzado en el desempeño de la lectura de todas las tarjetas, tanto en la sesión uno como en la dos. Esto permitió detenerse en el análisis de las tarjetas en las cuales los niños leyeron de una forma distinta a la usual del SDN

Posteriormente, para cada una de las tarjetas, se realizó un resumen que permitió identificar las estrategias seguidas por los niños al leer y escribir numerales del SDN en su forma polinomial. En la tabla se consignó el número de la tarjeta, la lectura que realizaron los niños, el número de veces que se repitió una misma forma de leer (f_i) y la estrategia planteada. Por ejemplo la tabla 6.

Tabla 6. Resumen de las formas en que los niños leyeron la tarjeta 6

	Lectura realizada	f_i	Edad	Estrategia
Tarjeta 6: 3^4	Tres… cuatro	2	9 años	Lectura de dígitos
	Treinta y cuatro	3	9 y 10 años	Concatenación
	Treinta y cuatro sobre cuatro	1	11 años	Leen la operación: como fracción o intentan componer una operación
	Tres cuartos	12	9(4), 10(4) y 11(4)	
	Tres sobre cuatro, no estoy seguro	1	11 años	
	Treinta y cua…, tres…, como es que se dice la raíz cuadrada de tres	1	9 años	
	Tres al cuadrado / tres a la cuatro	2	9 años y 10 años	Leen la operación

Finalmente, para clasificar las estrategias seguidas por los niños, se conformaron con las tarjetas 5 grupos teniendo en cuenta una secuencia lógica para llegar a la representación polinomial, los grupos quedaron constituidos de la siguiente manera:

Grupo 1: tarjetas que incluyen numerales (tarjetas 1, 2 y 3)

Grupo 2: tarjetas que incluyen productos (tarjetas 4 y 5)

Grupo 3: tarjetas que incluyen potencias (tarjetas 6 y 7)

Grupo 4: tarjetas que incluyen sumas y productos (tarjetas 8 y 9)

Grupo 5: tarjetas que incluyen un polinomio (tarjeta 10 y 11)

El análisis de los datos se centró más que todo en la observación y descripción de la lectura que realizaron los niños de las diferentes expresiones, pues fue allí donde se encontraron más indicadores para detectar las estrategias que los niños siguieron para representar en forma polinomial un numeral escrito en el SDN.

En la escritura, a pesar de detectar algunos errores cometidos por los niños, algunos de los enunciados por Orozco y Hederich (2002), no se notó aportes significativos acerca de las estrategias que los niños siguen para construir la representación polinomial de un número.

PARTE III. RESULTADOS

CAPITULO 6. Resultados de la investigación

6.1 Resultados de la lectura

La lectura de la primera sesión permitió detectar el mayor número de estrategias utilizadas por los niños, la segunda lectura que realizaron los niños, estuvo influenciada por el dictado que realizó el investigador en la primera parte.

Como se mencionó antes, las tarjetas se agruparon en cinco grupos diferentes, considerando en cada uno de ellos las expresiones que hacen parte de la representación polinomial de un numeral escrito en el SDN. A continuación se describen los resultados obtenidos en cada uno de los grupos considerando la tarjeta leída y la edad de los sujetos participantes.

El grupo de las tarjetas con numerales se conformó con tres tarjetas:

T1:643.785 T2:92.684.836 T3: 791.354.276.846.

De la lectura de estas tarjetas se obtuvieron los siguientes resultados:

Tabla 7. Resultados de las tarjetas con numerales

	EDAD						
	9		**10**		**11**		
Tarjeta	**SDN**	**OTRA**	**SDN**	**OTRA**	**SDN**	**OTRA**	**TOTAL**
1	8	1	4	3	1	5	22
2	7	2	3	4	1	5	22
3	4	5	2	5	0	6	22
TOTAL	**19**	8	**9**	12	**2**	16	66

Se puede observar que a medida que el numeral se hace más grande, más se alejan los estudiantes de su lectura en la forma del SDN. Aproximadamente, el 59,1% realizó la lectura de la tarjeta 1 en la forma del SDN, el 50% lo hizo con la tarjeta 2, y el 27,27% lo hizo con la tarjeta 3

En cuanto a la edad, se puede apreciar que los niños de once años, con un 48,48% son los que más recurren a otras formas de leer los numerales, de diez años el 36,36% y de nueve el 24, 23%.

Las tarjetas del segundo grupo contenían productos:

T4: 8×10 T5: 49×524.

Aquí se obtuvo los siguientes resultados:

Tabla 8. Resultados de las tarjetas con productos

	EDAD						
	9		10		11		
Tarjeta	**SDN**	**OTRA**	**SDN**	**OTRA**	**SDN**	**OTRA**	**TOTAL**
4	9	0	7	0	6	0	22
5	9	0	6	1	6	0	22
TOTAL	18	0	13	1	12	0	44

La mayoría de los niños realizó la lectura de los productos en la forma en que se hace en el SDN, tan solo una niña de diez años utilizó otra estrategia.

El siguiente grupo conformado por las tarjetas con potencias: T6: 3^4 y T7: 328^{42} arrojó los siguientes resultados:

Tabla 9. Resultados de las tarjetas con potencias

	EDAD						
	9		10		11		
Tarjeta	**SDN**	**OTRA**	**SDN**	**OTRA**	**SDN**	**OTRA**	**TOTAL**
6	1	8	1	6	0	6	22
7	0	9	2	5	0	6	22
TOTAL	1	17	3	11	0	12	44

Como se observa, a diferencia de los grupos anteriores, fue en las potencias donde los niños usaron diversas estrategias para cumplir con la tarea. El 9,1% de los sujetos participantes realizó la lectura de cada una de las tarjetas 6 y 7 en la forma del SDN.

En cuanto a las edades se puede apreciar que el 94, 5% de los niños de nueve años leen en forma distinta a la del SDN, también leen de otras formas el 78,58% de los niños de diez años y el 100% de los niños de once años hacen lo mismo.

El grupo de productos y sumas consideró las tarjetas número 8 y número 9: T8:12×5+28×34 y T9:8×100+5×10. Los resultados fueron:

Tabla 10. Resultados de las tarjetas con suma de productos

	EDAD						
	9		**10**		**11**		
Tarjeta	**SDN**	**OTRA**	**SDN**	**OTRA**	**SDN**	**OTRA**	**TOTAL**
8	8	1	6	1	6	0	22
9	9	0	6	1	6	0	22
TOTAL	17	1	12	2	12	0	44

Como ocurrió con las tarjetas de los productos, en este grupo la lectura se hizo en su gran mayoría de acuerdo a la forma como usualmente se hace en el SDN. La tarjeta 8 fue leída de otra forma diferente a la del SDN por el 9,1% de los niños. La tarjeta 9 la leyeron de forma distinta a la del SDN el 4,5%.

El 95,5% de los niños de nueve años leyó las tarjetas en la forma del SDN, de diez años lo hicieron el 85,7%, mientras que de once años todos los niños leyeron las tarjetas en la forma usual del SDN.

Finalmente la lectura del grupo de los polinomios conformado por las tarjetas 10 y 11, (T10: $8\times5^2 + 2\times3^4 + 6^5$ y T11: $8\times10^4+6\times10^3+7\times10^2+5\times10^1+9\times10^0$) arrojó los siguientes resultados:

Tabla 11. Resultados de las tarjetas con polinomios

	EDAD						
	9		10		11		
Tarjeta	**SDN**	**OTRA**	**SDN**	**OTRA**	**SDN**	**OTRA**	**TOTAL**
10	1	8	2	5	0	6	22
11	0	9	2	5	0	6	22
TOTAL	1	17	4	10	0	12	44

En la lectura de estas tarjetas se encontró que el 94,5% de los niños de nueve años, realizaron la lectura de otra forma distinta al a usada en el SDN, entre los niños de diez años se encuentra que un 71,4% utilizó formas distintas a la del sistema, y el cien por ciento de los niños de once años hicieron lo mismo.

Para la lectura de la segunda sesión se hizo un procedimiento similar, en la siguiente tabla se muestran los resultados.

Tabla 12. Resultados de la lectura de la segunda entrevista

	Edad						
	9		10		11		
Tarjeta	SDN	OTRA	SDN	OTRA	SDN	OTRA	TOTAL
1	6	3	5	2	4	2	22
2	8	1	4	3	4	2	22
3	3	6	3	4	1	5	22
TOTAL	17	10	12	9	9	9	66
4	9	0	7	0	6	0	22
5	9	0	6	1	6	0	22
TOTAL	18	0	13	1	12	0	44
6	8	1	5	2	6	0	22
7	8	1	5	2	5	1	22
TOTAL	16	2	10	4	11	1	44
8	9	0	6	1	6	0	22
9	9	0	6	1	6	0	22
TOTAL	18	0	12	2	12	0	44
10	7	2	6	1	5	1	22
11	6	3	5	2	5	1	22
TOTAL	13	5	11	3	10	2	44

En esta parte, la mayoría de los niños leyeron en la forma del SDN, se hizo notorio el cambio sobre todo en las tarjetas 6, 7, 10 y 11 que son las que contienen potencias dentro de sus expresiones.

Sin embargo después de terminada la lectura, el investigador solicitó a los niños que volvieran a leer la tarjeta 6 y se les preguntó acerca de lo que para ellos podría ser la expresión allí representada, algunos ejemplos fueron los siguientes:

- Investigador (I): Como leíste esta tarjeta 6 (4^3)
- Entrevistado (E): *"cuatro elevado a la tres"*
- I: ¿Para ti que quiere decir eso?
- E: *es un número que está arriba de otro y se podría colocar como 43*,
- I: ¿Qué más, podrías decir de eso?
- E: *Un fraccionario al que le falta un número: como cuatro es el número grande, significa cuántas unidades se pueden repintar todas, y el tres de cuántas le faltaron y el otro número pues le faltaría*.
- ¿Qué otra cosa podrías decir? Cuatro más tres, pero le faltaría el más.

Otro caso que se presentó fue:

- I: ¿Cómo leíste esta tarjeta (se muestra la tarjeta 6:4^3?
- E: *"cuatro subido a la tres"*,
- I: para ti ¿qué quiere decir esto, o qué me puedes decir de esto?
- E: *Pues que se suma o se multiplica tres veces más o que se suma tres veces más el número*
- I: ¿Cómo así?
- E: *Como doce.*
- I: ¿Qué otra cosa puedes decir?
- E: ... *No*

Otras repuestas, a preguntas similares, fueron:

- *Es como un número pequeño que casi no se utiliza o si se multiplica por ese número pequeño el resultado que dé.*

- *Es como un número pequeño que no se utiliza en las operaciones, dependiendo de la cantidad de números.*

- *Cuarenta y tres, o cuatro menos uno igual tres. Que tres es más pequeño que cuatro. Que dice cuatro y tres.*

- *Es un número muy raro, porque todos los números son como seguidos y ese está uno encima de otro.*

- *El cuatro como multiplicado y dividido, digamos cuatro por tres o cuatro dividido tres. Es como si fueran cuatro tercios.*

- *Si el tres no fuera tan pequeño sería cuarenta y tres.*
- *Los matemáticos cuando no tuvieron más números, comenzaron con el 1 elevado a l 2, el dos elevado a la tres, y así.*

- *Que hay cuatro tercios, en lo que me enseñaron siempre me han dicho que un cuatro y un tres arriba es cuatro tercios.*

Estas son algunas manifestaciones de los niños que nos hace pensar que el hecho de que los niños, en la segunda sesión, leyeron en la forma usual del SDN las potencias, no quiere decir que ya comprendan la operación potenciación, lo más probable fue que recordaron la forma como el investigador leyó esas expresiones en la primera entrevista y ellos solamente se limitaron a imitar lo que ya habían escuchado.

Sin embargo como no es de nuestro interés indagar por el significado que los niños dan a las expresiones donde aparecen potencias, dejamos este tipo de situaciones para que sean estudiadas en futuras investigaciones.

En términos de Vergnaud (1990), las tarjetas donde aparecen las potencias, sobre todo en la lectura de la primear entrevista, corresponden al tipo de situaciones en las que los sujetos no disponen de todas las competencias necesarias, para dar respuesta a la tarea propuesta. Por tal motivo es allí donde se puede observar el esbozo sucesivo de varios esquemas, que pueden entrar en competición y que, para llegar a la solución buscada, deben ser acomodados, separados o recombinados.

Por lo tanto, fue la lectura realizada en la primera sesión, la que más aportó a la identificación de las estrategias requeridas por los niños para escribir un numeral en la representación polinomial del SDN.

6.2 Estrategias seguidas por los niños al representar un número en la forma polinomial

6.2.1 Estrategias observadas en la lectura 1

A continuación se presenta una descripción de las estrategias que los niños y niñas siguieron para resolver la tarea propuesta. Como se mencionó anteriormente dichas estrategias, a pesar de ser identificadas a partir de las acciones realizadas por los niños, consideraron la secuencia establecida en el orden de presentación de las tarjetas. Al revisar los resultados se concluyó que la variable edad no presenta diferencias sustanciales, por lo que la clasificación de las estrategias consideró solo la secuencia establecida en el orden de las tarjetas.

Grupo 1: Lectura de numerales

La representación polinomial de un numeral escrito en el SDN cobra sentido cuando los numerales son de orden mayor, por eso en este grupo se consideraron tres numerales de orden 6, 7 y 8 respectivamente.

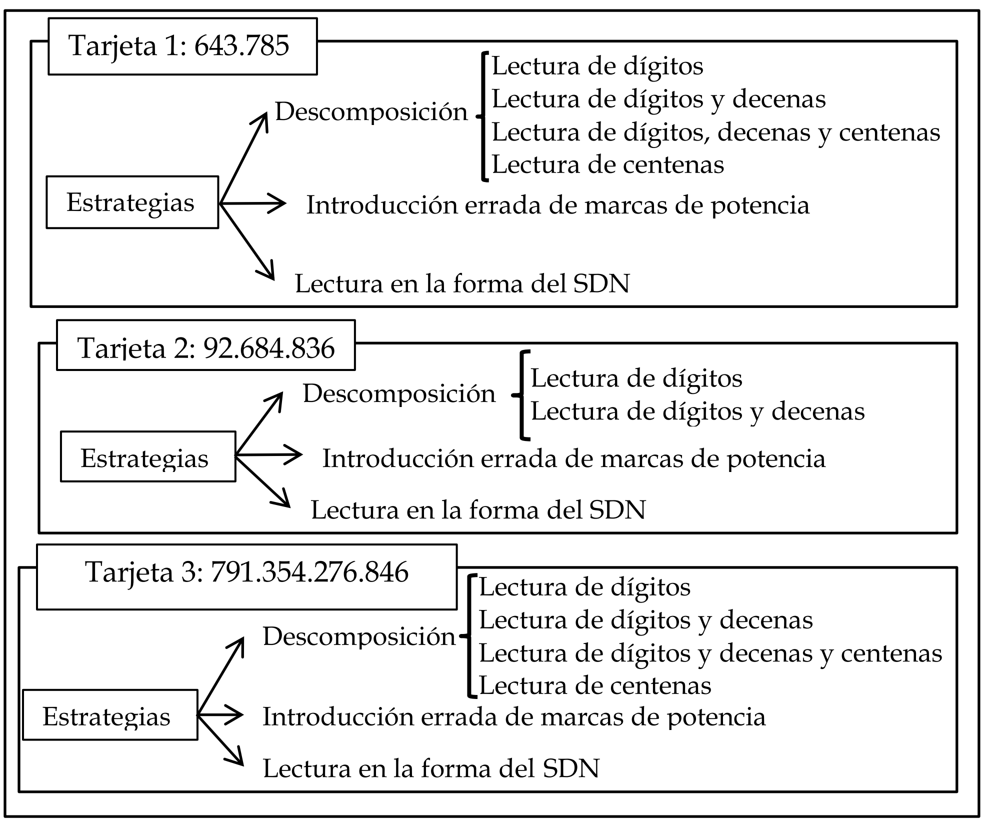


Figura 11. Estrategias para leer numerales

En la lectura de numerales se establecieron tres estrategias que se pueden ordenar jerárquicamente de la siguiente manera:

- ✓ **Estrategia de descomposición:** aquí los niños descomponen el numeral en varios números, por ejemplo el numeral "92.684.836" lo leen *"Noventa y dos, seis ochenta y cuatro, ocho treinta y seis"*

Dentro de la estrategia de descomposición se pueden establecer varias sub-estrategias:

- ❖ **Descomposición dígito a dígito:** los niños leen el numeral enunciando cada uno de los dígitos que lo conforman, por ejemplo, el numeral "791.354.276.846" lo leyeron como *"Siete, nueve, uno, tres, cinco, cuatro, dos, siete, seis, ocho, cuatro y seis"*. El 4,55% de los estudiantes utilizó esta estrategia en la lectura de las tarjetas 1, 2 y 3.

- ❖ **Descomposición dígitos y decenas:** los niños enuncian un dígito seguido de una decena, por ejemplo el numeral "643.785" lo leyeron como *"Seis cuarenta y tres, y siete ochenta y cinco"*. El 9,09% de los entrevistados leyeron la segunda tarjeta utilizando esta estrategia. Mientras que el 4,55% lo hizo en la lectura de la tarjeta 3.

- ❖ **Descomposición dígitos, decenas y centenas:** los niños enuncian un dígito seguido de una decena y una centena, por ejemplo el numeral "643.785" lo leyeron como *"Seis cuarenta y tres, setecientos ochenta y cinco"*. Esta estrategia la utilizó un 4,55% en la lectura de cada una de las tarjetas de este grupo.

También se pueden apreciar cambios en esta estrategia, de acuerdo a la longitud del numeral, por ejemplo, en el numeral de la tarjeta 1 y en el de la tarjeta 3 los entrevistados descomponen en centenas, mientras que en la tarjeta 2 dicha descomposición desaparece.

- ✓ **Estrategia de introducción errada de marcas de potencia:** en un intento por componer todo el número, los niños introducen marcas de potencia adicionales que no están en el numeral pero que el niño las va poniendo para poderlo construir como un todo, por ejemplo, cuando al leer el numeral 791.354.276.846 dice *"setecientos noventa y un* ***trillón****, trescientos cincuenta y cuatro, doscientos setenta y seis, ochocientos cuarenta y seis"*. Esta estrategia la usaron los niños sobre todo en la lectura del numeral más grade (tarjeta 3), el 50% de los entrevistados recurrió a esta estrategia.

  En esta estrategia, introducen marcas y leen descomponiendo en centenas, además, introducen otras marcas, no establecidas en el sistema, como la palabra "punto", un ejemplo de este caso se aprecia cuando un niño lee "*Noventa y dos millones* ***punto*** *seiscientos ochenta y cuatro ochocientos treinta y seis*" al referirse al numeral 92.684.836. no hay un reconocimiento del punto como indicador de potencia sino como un elemento más del numeral que está obligado a leer. El 4,55% de los niños leyeron las tarjetas 1 y 2 siguiendo esta estrategia.

- ✓ **Estrategia de lectura de un numeral en la forma del SDN:** aquí el niño resuelve la tarea leyendo en la forma usual del sistema siguiendo sus reglas básicas para leer numerales y las operaciones entre ellos. El 59,09% de los entrevistados leyeron la tarjeta 1 aplicando esta estrategia, la tarjeta 2 el 50% y la tarjeta 3 el 27,27%.

Grupo 2: Productos

El grupo está conformado por las tarjetas 4 y 5. De la lectura de dichas tarjetas se puede decir que el 100% de los encuestados leyó la tarjeta 4 de acuerdo a la forma del SDN, y un 95% de los niños leyeron la tarjeta 5 en la misma forma. Se puede observar que en la lectura de productos no se presentan mayores dificultades.

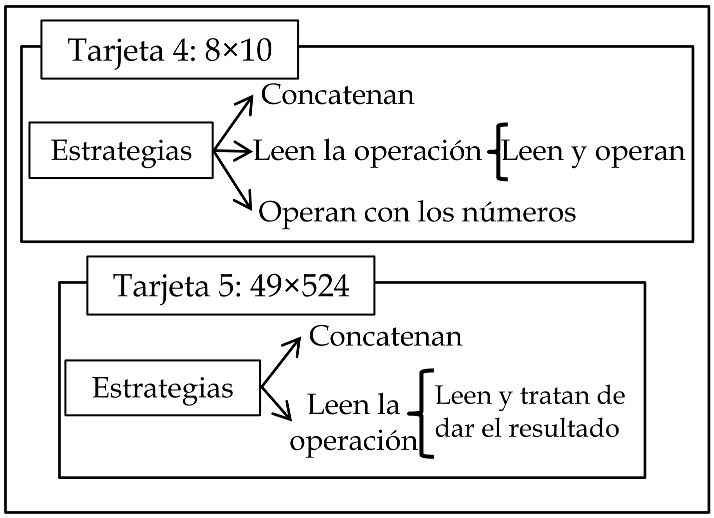


Figura 12. Estrategias en la lectura de productos

En la lectura de productos, los niños propusieron tres estrategias

- ✓ **Estrategia de concatenar:** aquí los niños omiten el signo de la operación y leen como si se tratara de un numeral, por ejemplo, el producto 49×524 la leyeron como: *"cuarenta y nueve mil quinientos veinticuatro"*. Esta estrategia la siguió el 44,5% de los entrevistados.

- ✓ **Estrategia de leer la operación:** los niños al observar la tarjeta leen la operación que allí está indicada, por ejemplo, la tarjeta con la expresión 49×524 la respondieron como *"cuarenta y nueve por quinientos veinticuatro"*.

Al leer la operación aparece una sub-estrategia,

- **Leer la operación y operar:** algunos niños leyeron la operación y operaron: *"ocho por diez, ochenta"* otros leyeron la operación y trataron de operar, pero no encontraron el resultado: *"cuarenta y nueve por quinientos veinticuatro…"*, los niños leen la operación pero están inclinados a dar un resultado, por supuesto, el segundo ejemplo les resulta difícil, pero ahí está la intencionalidad. Los niños que siguieron esta estrategia representan el 18,18% del total de los sujetos participantes.

✓ **Estrategia de operar con los números:** en este caso los niños observaron la tarjeta y enuncian el resultado de la operación que ahí está presente, por ejemplo, ante una expresión como 9×10, los niños leyeron *"noventa"*. El 13,64% de los entrevistados recurrió a esta forma de leer el contenido de las tarjetas 4 y 5.

Grupo 3: Potencias

Como se mencionó anteriormente las tarjetas 6 y 7 tenían en su contenido potencias. Las estrategias seguidas para leer estas expresiones fueron:

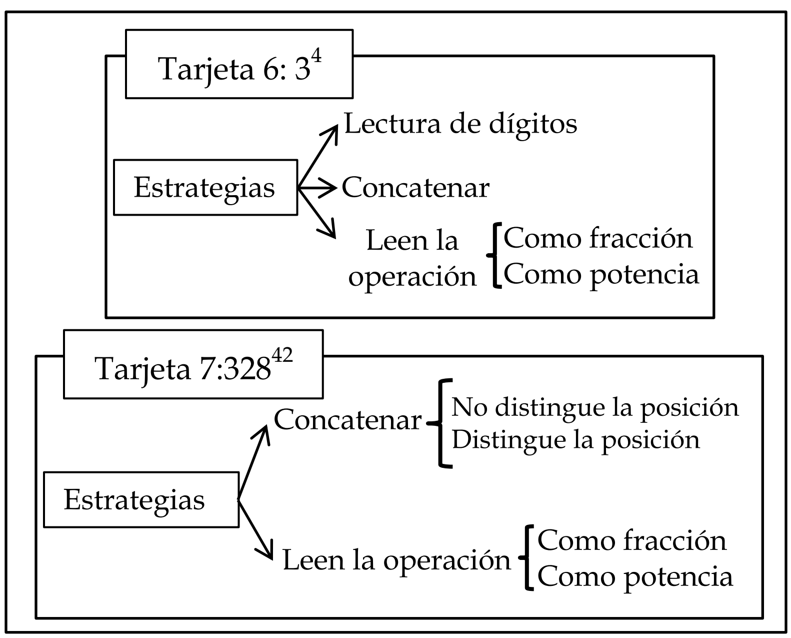


Figura 13. Estrategias en la lectura de potencias

- ✓ **Lectura de dígitos:** el 13, 64% de los niños entrevistados, no identificaron en la posición de los numerales, la necesidad de operar, por ejemplo, la expresión 3^4, la leyeron como *" tres cuatro"*

- ✓ **Concatenación:** en esta estrategia el 13,64% de los niños consideran la expresión 3^4 como un numeral y la leyeron como *"treinta y cuatro"*

  En la concatenación, algunos niños no distinguieron la posición de los elementos de la potencia y leyeron la expresión 328^{42} como *"treinta y dos mil ochocientos cuarenta y dos"*, mientras que otros si distinguieron la posición cuando leyeron *"trescientos veintiocho y un cuarenta y dos pequeño".*

- ✓ **Leen la operación:** en esta estrategia los niños operan con los números que aparecen en la tarjeta, por ejemplo la expresión 3^4 la leen como *"tres al cuadrado"*. Sin embargo en esta estrategia se encontró que un alto porcentaje asociaron la lectura de fraccionarios a la operación de potenciación, es así como el 59,1% la misma expresión la leyeron como *"tres cuartos"*, mientras que un 40,9% leyeron la expresión 328^{42} como *"trescientos veintiocho cuarenta y dos avos"*.

En este grupo, sigue apareciendo la estrategia de lectura de dígitos, no hay reconocimiento de la operación potenciación, sin embargo se puede apreciar que algunos tratan de introducir una operación y leen *"treinta y cuatro sobre cuatro"*.

El niño reconoce que entre esos dos números hay una operación pero no la lee correctamente. Identifica que debe existir algún tipo de operación con estos dígitos y al tratar de descubrirla construye una que no es la correcta (*"tres cuartos"*, *"tres sobre cuatro"*).

Grupo 4: Suma de productos

En las tarjetas 8 y 9 que conforman este grupo se determinó que el 90.9% de los encuestados leen dichas tarjetas en la forma del SDN, como ocurrió en la lectura de los productos, aquí tampoco se notó mayor dificultada en el cumplimiento de la tarea.

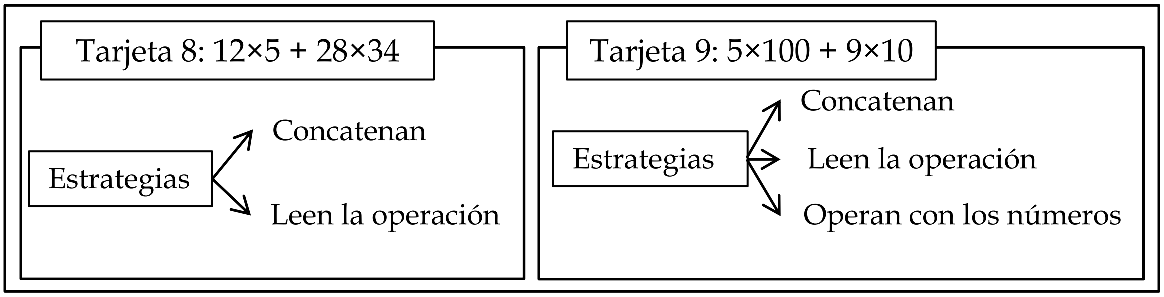


Figura 14. Estrategias en la lectura de sumas de productos

En este grupo de tarjetas se repiten las estrategias seguidas para la lectura de los productos, aquí los niños y niñas siguen los siguientes procedimientos:

- ✓ **Concatenan**: el 4,55% de los niños ignoraron los signos de las operaciones, y la expresión 12×5 + 28×34, la leyeron como *"un millón doscientos cincuenta y dos mil ochocientos treinta y cuatro"*.

- ✓ **Leen la operación:** la mayoría de los niños, el 95,45%, leyeron la operación en la forma usual del SDN, por ejemplo la expresión 12×5 + 28×34, la leyeron como *"doce por cinco más veintiocho por treinta y cuatro"*

- ✓ **Leen y operaron con los números:** el 4,55% de los niños a medida que iban leyendo enunciaron el resultado de la operación, por ejemplo, al leer la expresión 8×100 + 5×10. *"Ocho por cien que da ochocientos y cinco por diez que da cincuenta, eso me da ochocientos cincuenta porque está el más"*

Grupo 5: Polinomios

En este grupo se encuentran las tarjetas 10 y 11, sobre la lectura se puede decir que el 4.5% y el 9,1% de los sujetos, respectivamente, la realizaron en la forma del SDN. Nuevamente se observa que en la lectura de estas expresiones los niños tienen mayor dificultad

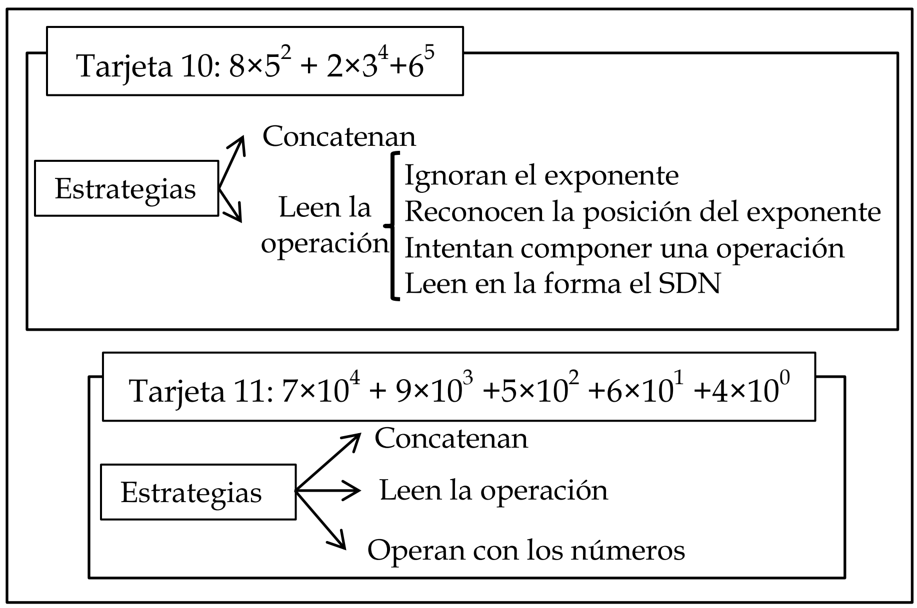


Figura 15. Estrategias en la lectura de polinomios

En la lectura de las tarjetas con polinomios, los niños y niñas usaron la mayoría de las estrategias descritas anteriormente, entre ellas se encontraron:

- ✓ **Concatenan:** un 4,55% de los niños, no reconocieron los signos de las operaciones y leyeron la expresión como un numeral, por ejemplo cuando observaron el polinomio $8\times10^{4}+6\times10^{3}+7\times10^{2}+ 5\times10^{1}+9\times10^{0}$ su expresión verbal fue: *"Ochocientos diez cuatrocientos sesenta y uno millones, cero treinta y siete uno cero dos… ciento dos, diez ciento noventa y uno, quinientos diez ciento noventa y uno cero"*.

También, el 4,55% de los niños usó la estrategia de concatenación cuando leyeron la misma expresión como *“ocho por ciento cuatro, más seis por ciento tres más siete por ciento dos, más cinco por ciento uno más nueve por cien”*

- ✓ **Leer la operación:** en esta estrategia a pesar de que los niños en su mayoría tuvieron éxito en la lectura de las sumas y los productos, en varias ocasiones quisieron componer o buscar una forma de leer la operación potenciación, es así como de esta estrategia surgen varias subestrategias como por ejemplo:

Están los niños que leyeron la operación, pero ignoraron el exponente, al observar la tarjeta $8{\times}5^2 + 2{\times}3^4 + 6^5$, su expresión verbal fue: *“ocho por cinco más dos por tres más seis”*. El 44,55% de los niños usó esta estrategia.

Otros reconocieron el exponente pero no en la forma del SDN, el 9,09% de los entrevistados leyeron la expresión anterior como *“ocho por cinco dos, más dos por tres cuatro, más seis cinco”*. Algunos leyeron

El 63,64% de los niños, intentó componer una operación, por ejemplo cuando leyeron *“ocho por cinco dos medios, más dos por tres cuartos más seis quintos”* o también cuando se refirieron al polinomio $8{\times}10^4{+}6{\times}10^3{+}7{\times}10^2{+}\ 5{\times}10^1{+}9{\times}10^0$ como *“ocho por diez cuartos, más seis por diez tercios, más* siete por diez *medios, más cinco por diez… un avo, más nueve por diez ceroavos”*

Otros niños usan una mezcla de estas subestrategias, al leer la operación reconocen la ubicación del exponente e intenta componer una operación, es así como el 4,55% leyó el polinomio $8{\times}5^2 + 2{\times}3^4 + 6^5$ como *“ocho por cinco dos pequeño, más dos por tres sobre cuatro, más seis sobre cinco”*

Finalmente se encuentran el 9,09% de los entrevistados que leyeron las tarjetas en la forma como usualmente se hace en el SDN.

- ✓ **Operan con los números:** el 4,55% de los niños al expresar verbalmente el contenido de las tarjetas operaron simultáneamente y enunciaron el resultado de la operación de los números contiguos, por ejemplo la tarjeta 11 se leyó como: *"ocho por diez que me da ochenta, seis por diez me da sesenta, siete por diez me das setenta, cinco por diez que me da cincuenta y nueve por diez que me da noventa, como dije anteriormente* (al leer la tarjeta 10) *pienso que es sumar el cuatro a lo que me dio, más el tres más el dos más el uno y al último no le sumaría nada. O también se puede referir a un ciento cuatro, ciento tres, ciento dos, ciento uno y cien. También podría ser fraccionarios pero faltaría el otro número y la raya"*

6.2.2 Estrategias observadas en la lectura 2

En cuanto a la lectura desarrollada por los niños en la segunda sesión de la entrevista, se puede decir que el desempeño de los estudiantes (ver Anexo5) mejoró considerablemente con respecto a la lectura inicial, en los grupos de tarjetas donde los niños cambiaron de representación se observaron mejores resultados.

En general se puede decir que las estrategias se mantuvieron, sin embargo cabe resaltar algunas nuevas estrategias que aparecieron.

En el primer grupo (tarjetas con numerales), el 68,2% de los entrevistados realizaron la lectura de la tarjeta 1 en la forma del SDN, el 72,7% y el 31,8% de los niños leyeron las tarjetas 3 y 4 respectivamente, en la forma del SDN. En este grupo se reportaron las siguientes estrategias:

- ✓ **Descomposición de numerales**: aparece una descomposición que no estaba en la primera sesión. En esta oportunidad los niños descompusieron el numeral leyendo centenas y dígitos.

- ❖ **Descomposición en centenas, dígitos y decenas:** los niños para la lectura del numeral, lo descomponen en centenas y dígitos, por ejemplo, el 9,09% realizó la lectura del numeral 857.642 , diciendo *"Ochocientos cincuenta y siete, seis cuarenta y dos"*

- ❖ **Descomposición en centenas:** el 9,09% de los niños descompusieron el numeral en centenas, de tal manera que al leer la expresión 584.325.648.539 dijeron: *"quinientos ochenta y cuatro, trescientos veinticinco, seiscientos cuarenta y ocho, quinientos treinta y nueve"*

- ✓ **Introducción errada de marcas de potencia:** de nuevo se presenta la inclusión de marcas distintas a las usuales en el sistema decimal de numeración, el 4,55% de los entrevistados leyó el numeral anterior de la siguiente manera: *"Quinientos ochenta y cuatro **punto** trescientos veinticinco **más** seiscientos cuarenta y ocho **punto** quinientos treinta y nueve"*

En las tarjetas con productos, la lectura de las tarjetas 4 y 5 produjo un acierto del 95,4% y 90,9% respectivamente, no se observó ninguna novedad, aquí como en la primera sesión, algunos niños compusieron numerales, otros leyeron la operación y otros operaron.

Para las tarjetas donde aparecen potencias, el 77,3% de los entrevistados reportaron éxito en la lectura de las tarjetas 6 y 7, este aumento considerable en los resultados positivos se debió a que los niños ya habían escuchado el dictado en la actividad 2 de la sesión 1 y les era fácil reconocer la lectura de las potencias, por lo cual procuraron imitar la forma de la lectura.

Las estrategias seguidas en este grupo de tarjetas se mantuvieron, al expresar verbalmente las expresiones se repitió la estrategia de leer como fracción. En la lectura de la operación apareció otra estrategia donde los niños introdujeron marcas distintas a las establecidas en el Sistema Decimal de Numeración, por ejemplo al leer *"cuatro **subido** a la tres"* para referirse a 4^3.

En la suma de productos se reportó un total de aciertos correspondientes al 90.9% de éxitos en la lectura de las tarjetas 8 y 9, aquí algunos niños compusieron numerales, otros leyeron la operación y otros leyeron la operación y operaron.

En la lectura de polinomios, la lectura de las tarjetas 10 y 11 reportaron un acierto del 68,2%, los niños y niñas siguieron estrategias similares a las utilizadas en la sesión inicial, compusieron números y leyeron la operación, sin embargo en esta última estrategia, omitieron la jerarquía de las operaciones y el 4,55% leyó la expresión $7\times10^4+9\times10^3+5\times10^2+ 6\times10^1+4\times10^0$ como *"Siete por diez setenta elevado cuatro, nueve por diez noventa elevado tres, cinco por diez cincuenta elevado dos, seis por diez sesenta elevado uno, cuatro por diez cuarenta elevado cero"*.

Otros en un intento por componer la operación mezclaron la notación de fracción con la de potencia, esto se evidenció cuando leyeron la expresión $4\times6^5 + 8\times4^7 + 8^3$ como: *"Cuatro por seis **sobre a la** cinco más ocho por cuatro **sobre a la** siete más ocho sobre a la tres"*

También apareció la estrategia donde introdujeron otras marcas distintas a las del SDN, por ejemplo cuando leyeron *"Siete por diez **subido** a la cuatro nueve por diez **subido** a la tres cinco por diez **subido** a la dos seis por diez **subido** a la uno y cuatro por diez **subido** a la cero"* al observar la tarjeta con la expresión $7\times10^4+9\times10^3+5\times10^2+ 6\times10^1+4\times10^0$.

6.3 Resultados de la escritura

En cuanto a los resultados obtenidos en la escritura es conveniente aclarar que en este ejercicio los niños tuvieron más ayuda, puesto que la intervención del investigador es más notoria, no solamente se limita a mostrar una tarjeta sino que al realizar el dictado se activan más fácilmente los esquemas que tienen los niños y niñas respecto a los numerales dictados. Otra situación distinta hubiera sido si en lugar de dictarle se le hubiera pasado un texto para que lo leyera y luego lo escribiera, en este caso habría doble transcodificación, por eso se decidió realizar el dictado.

Por ejemplo, al dictarle "e*levado a la…*", es distinto a que él lo lea. La entonación ayuda mucho, el número de errores se minimiza, lo único fundamental es asegurar que los entrevistados mantengan una buena escucha.

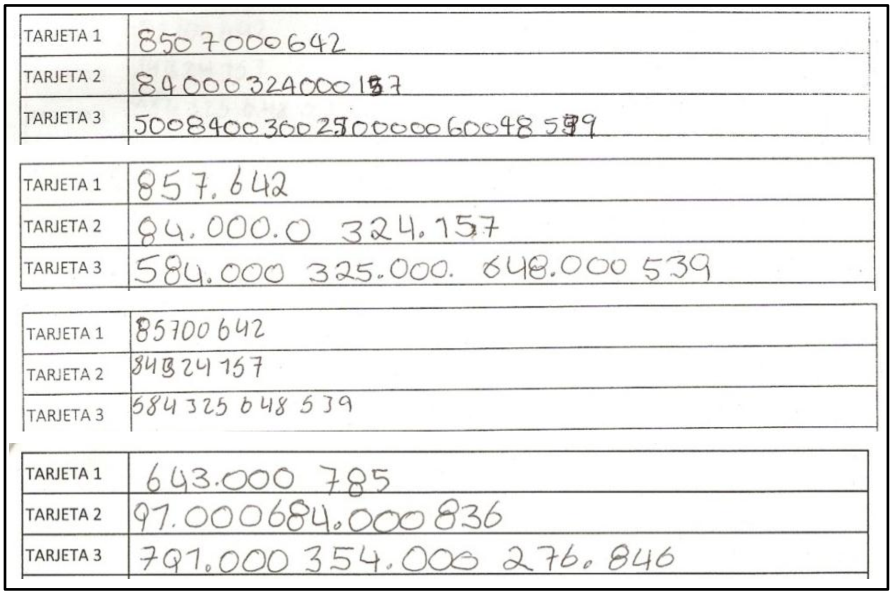
A continuación se describen los resultados encontrados en la escritura, aquí también se tendrá en cuenta la forma de agrupar las tarjetas, que se mencionó anteriormente. En este apartado no se considera por aparte los resultados de la escritura 1 y la escritura 2 porque los resultados fueron muy similares y no ameritó hacer dicha separación.

Grupo 1: Numerales

En la escritura de los numerales se pudo observar lo siguiente: la colocación de los puntos en los lugares respectivos de las unidades de mil, de diez mil o de cien mil no es clara, presentan mucha confusión en muchos casos no los colocan sobre todo cuando la longitud del numeral es extensa.

También se presenta la yuxtaposición, es decir, los niños yuxtaponen cuando escriben uno a continuación del otro, numerales que codifican fragmentos de la expresión numérica verbal. En algunos casos los numerales corresponden con los fragmentos de la expresión verbal, en otros, no corresponden. Por ejemplo, al dictar el numeral "*trescientos sesenta y siete"*, los niños escriben 30067 o 30057. El numeral arábigo 300 codifica la expresión de orden superior *"trescientos"* y corresponde con una unidad en un periodo dado o numeral nudo (Orozco Hormaza & Hederich, 2002)

En la figura 16 se puede observar que el niño al dictarle el numeral *"ochocientos cincuenta y siete mil seiscientos cuarenta y dos"* escribió 8507000642, también aparecen otras escrituras con este mismo tipo de error.



TARJETA 1	8507000642
TARJETA 2	84000324000157
TARJETA 3	50084003002500000060048539

TARJETA 1	857.642
TARJETA 2	84.000.0 324.157
TARJETA 3	584.000 325.000. 648.000 539

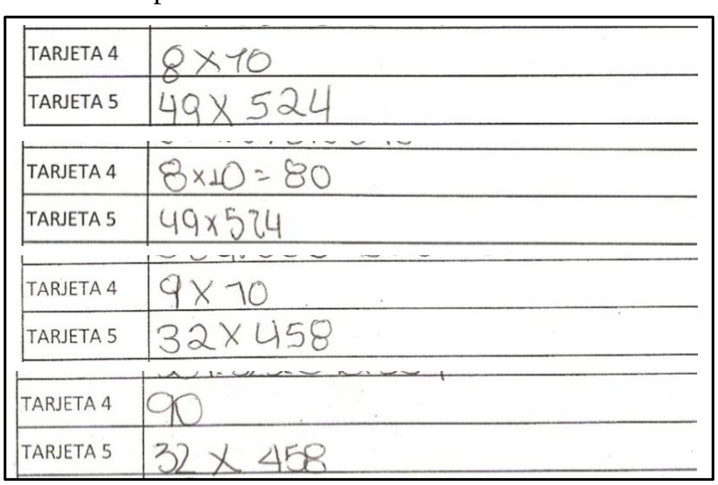
TARJETA 1	85700642
TARJETA 2	84824157
TARJETA 3	584325648539

TARJETA 1	643.000 785
TARJETA 2	97.000684.000836
TARJETA 3	791.000 354.000 276.846

Figura 16. Escritura de numerales donde aparecen errores de yuxtaposición

Grupo 2: productos

En la escritura de productos no se encontró mayor variedad de resultados, casi la totalidad de los entrevistados al hacer el dictado "*nueve por diez*" escribieron 9 ×10, tan sólo el 4,55% del total de los entrevistados escribió 90, se podría decir que operó o que recurrió a otra representación.



TARJETA 4	8×10
TARJETA 5	49×524

TARJETA 4	8×10 = 80
TARJETA 5	49×524

TARJETA 4	9×10
TARJETA 5	32×458

TARJETA 4	90
TARJETA 5	32 × 458

Figura 17. Escritura de productos

Grupo 3: potencias

En la escritura de las potencias los niños usaron la representación estándar, no hubo otra estrategia diferente, tan solo el 4,55% de los entrevistados escribió 43 al escuchar el dictado "*cuatro elevado a la tres*", en el dictado de la primera entrevista.

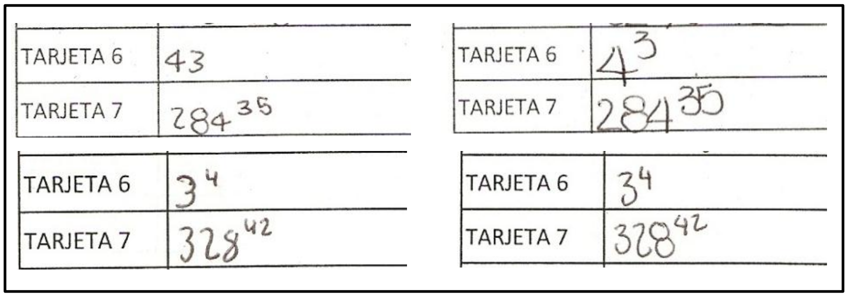


Figura 18. Escritura de potencias

Grupo 4: suma de productos

En la suma de productos tan solo el 4,55% de los entrevistados utilizó una estrategia diferente a los demás, al dictarle "*dieciocho por seis más treinta y cuatro por cuarenta y siete*" escribió 1'863.447, también al dictarle "*cinco por diez más nueve por trece*" escribió 5'100.910, se puede observar que en ambos casos se omitieron los signos de la suma y la multiplicación.

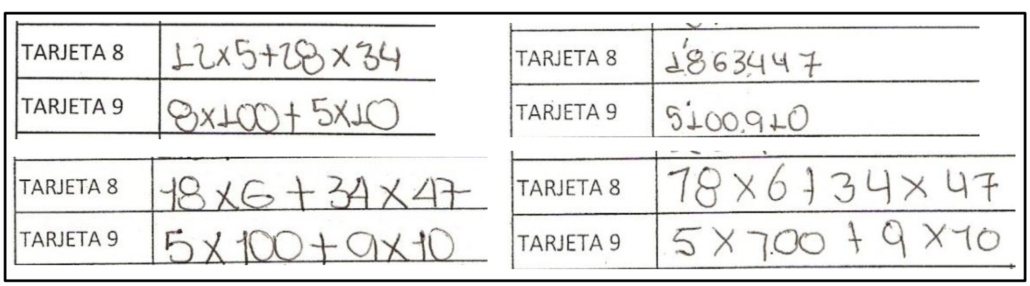
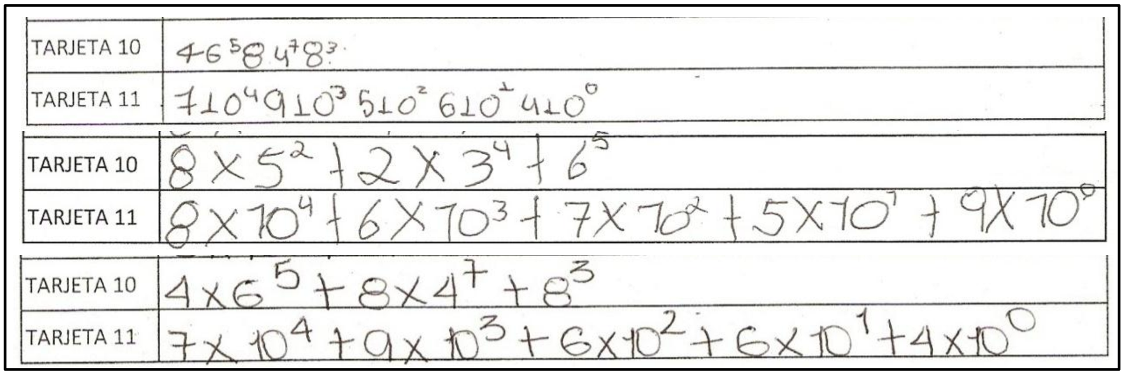


Figura 19. Escritura de sumas de productos

Grupo 5: polinomio en otra base y polinomio en base diez

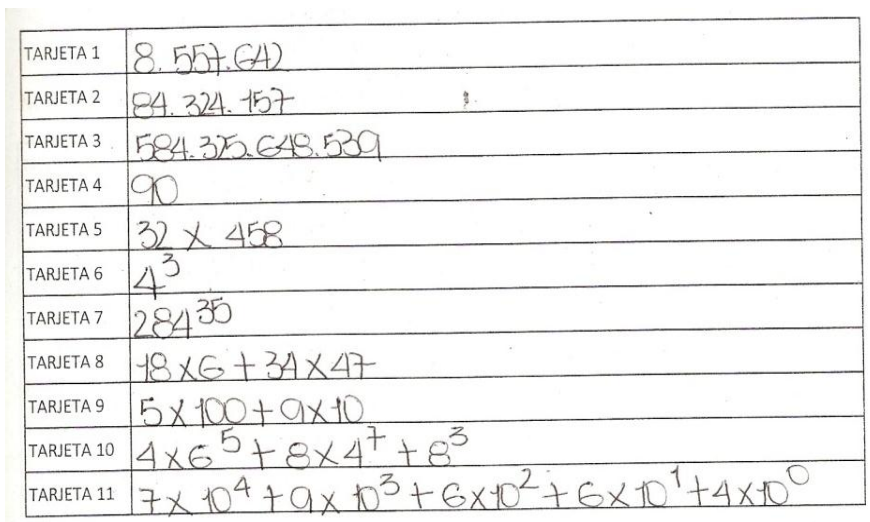
Casi la totalidad de los niños y niñas escribieron el dictado siguiendo las reglas del sistema decimal de numeración, ubicando en los lugares correspondientes los símbolos de las operaciones (suma, producto y potencias), tan sólo el 4,55% de los niños, como en el caso anterior, omitió los símbolos de las operaciones.



TARJETA 10	$4\,6^5\,8\,4^7\,8^3$
TARJETA 11	$7\,10^4\,9\,10^3\,5\,10^2\,6\,10^1\,4\,10^0$
TARJETA 10	$8 \times 5^2 + 2 \times 3^4 + 6^5$
TARJETA 11	$8 \times 10^4 + 6 \times 10^3 + 7 \times 10^2 + 5 \times 10^1 + 9 \times 10^0$
TARJETA 10	$4 \times 6^5 + 8 \times 4^7 + 8^3$
TARJETA 11	$7 \times 10^4 + 9 \times 10^3 + 6 \times 10^2 + 6 \times 10^1 + 4 \times 10^0$

Figura 20. Escritura de polinomios

En la figura 20 aparece la escritura, desarrollada por un niño, de los numerales representados en cada una de las tarjetas, como se puede apreciar en esta actividad no se registraron hechos significantes que aportaran a la explicación del problema planteado.



TARJETA 1	8.557.642
TARJETA 2	84.324.157
TARJETA 3	584.325.648.539
TARJETA 4	90
TARJETA 5	32×458
TARJETA 6	4^3
TARJETA 7	284^{35}
TARJETA 8	$18 \times 6 + 34 \times 47$
TARJETA 9	$5 \times 100 + 9 \times 10$
TARJETA 10	$4 \times 6^5 + 8 \times 4^7 + 8^3$
TARJETA 11	$7 \times 10^4 + 9 \times 10^3 + 6 \times 10^2 + 6 \times 10^1 + 4 \times 10^0$

Figura 21. Ejemplo de escritura hecha por los niños

PARTE IV. DISCUSIÓN DE RESULTADOS

CAPÍTULO 7. Análisis de resultados

Retomando los resultados que hasta aquí hemos presentado, en esta parte del trabajo trataremos de dar respuestas a los siguientes interrogantes directamente vinculados con los objetivos que nos planteamos:

- ✓ ¿Cuáles son las estrategias que aplican los niños cuando resuelven situaciones donde está involucrada la representación polinomial de los numerales escritos en el SDN?
- ✓ ¿Cuáles son los aportes que ésta investigación hace a la construcción del SDN?
- ✓ ¿Cuáles serían las posibles tareas que ayuden a construir conceptualmente la representación polinomial?
- ✓ ¿Cuáles son las dificultades que se presentan en el aprendizaje de la representación polinomial de un numeral escrito en el SDN?

7.1 Sobre las estrategias

Teniendo en cuenta que las estrategias, según Ineldher (1978), se pueden considerar como todo sistema y secuencia de procedimientos que son susceptibles de ser repetidos y transferibles a otras situaciones, se pudo establecer en el desarrollo de las acciones de los niños al resolver las situaciones presentadas, las siguientes:

- ✓ Descomposición en dígitos, decenas, centenas y combinaciones entre ellas.
- ✓ Introducción errada de marcas de potencia

- ✓ Concatenación
- ✓ Lectura de operaciones
- ✓ Operaciones con los números
- ✓ Lectura en la forma del SDN

Las estrategias de descomposición e introducción errada de marcas de potencia, se presentaron, sobre todo en la lectura de los numerales de las primeras tarjetas, los cuales fueron seleccionados intencionalmente puesto que es en este tipo de numerales que la notación polinomial tiene sentido.

A medida que el numeral se fue haciendo más grande, mayor fue el uso, por parte de los niños, a la descomposición o la introducción de marcas de potencia en lugares que no correspondían. Lo mismo ocurrió en la escritura con la yuxtaposición de términos.

En la lectura de los numerales también encontramos resultados similares a los presentados por Otálora (2006), respecto a la introducción de marcas de potencias, sin embargo pudimos detectar otras palabras que en el análisis fonológico no está ni como sufijo ni como prefijo, en este caso los niño mencionan el punto al leer un numeral, por ejemplo al leer el numeral 353.234 dicen *"trescientos cincuenta y tres* ***punto****, doscientos treinta y cuatro"*.

El punto hace parte de la lectura del numeral, es decir que algunos niños le encuentran sentido al punto y lo leen dentro del numeral. Pero sabemos que en el sistema decimal de numeración, realmente el punto no se lee, es una convención que existe. Al representar un numeral en el formato verbal, se omite la palabra punto.

¿Hasta dónde es un error, en términos del significado del número, leer el punto? En el sentido en que si el niño no lee el punto, si no que enuncia una palabra de potencia, por ejemplo mil, es decir, ¿qué pasaría si en lugar de *"tres mil"*, se leyera *"tres punto* *de mil"*? Es probable que el niño le esté dando una interpretación al punto como un elemento constitutivo del numeral.

También se pudo apreciar, en este grupo de tarjetas, que las estrategias de los niños pueden ir desde procedimientos simples como cuando leyeron *"Siete, nueve, uno, tres, cinco, cuatro, dos, siete, seis, ocho, cuatro y seis"* a otros más elaborados cuando leyeron *"setecientos noventa y un mil, trecientos cincuenta y cuatro millones,* doscientos *setenta y seis mil, ochocientos cuarenta y seis"*

La estrategia de concatenación apareció en la lectura de productos, potencias, suma de productos y polinomios, la mayoría de los niños que siguieron esta estrategia desconocieron los símbolos presentes en cada expresión y leyeron como si se tratase de un numeral. Por ejemplo quien leyó *"cuarenta y nueve mil quinientos veinticuatro"* en lugar de "cuarenta y nueve por quinientos veinticuatro"

La lectura de operaciones se dio en varias tarjetas, sobre todo en los productos y la suma de productos, aquí los niños leyeron los numerales de acuerdo a las operaciones incluidas en cada una de las tarjetas. En esta estrategia se destaca la lectura de la operación potenciación como una fracción, pues fue a la que más recurrieron los niños entrevistados.

En términos de Vergnaud, se puede decir que ante la situación de tener que leer una expresión desconocida, en la cual los niños no disponen de las competencias necesarias, ellos evocan lo más cercano, en este caso recurren a la notación de fraccionarios, por tal motivo terminan leyendo 3^4 como *"tres cuartos"*

Para esta misma expresión (3^4), otros niños leyeron *"tres cuatro"* y algunos lo hicieron como *"treinta y cuatro"* en este caso se puede decir que los segundos están en un nivel inferior que los primeros. Quienes leen *"treinta y cuatro"* están viendo en esa expresión un número, es decir al observar la tarjeta, aparece en ellos un esquema presentativo del 34, ellos lo ven allí e inmediatamente lo enuncian, en este caso se puede decir que en estos niños no hay comprensión, porque no están relacionando la posición de los números.

Ahora bien, de los que leen *"tres cuatro"*, se puede decir que de alguna manera ya están generando una diferenciación, no hay plena comprensión, pero en la parte procedural lo leen como varios números.

Por otra parte, respecto a la estrategia de operar con los números, se destacan algunos niños que al observar en una tarjeta una multiplicación no leyeron la operación sino que indicaron el resultado de dicha operación. En las multiplicaciones de numerales de dos y tres cifras intentaron calcular el resultado mentalmente, pero como les fue imposible terminaron leyendo la operación.

Respecto a esta situación se podría pensar en la utilización de los objetos matemáticos como herramienta o como objeto que plantea (Douady, 1986), ¿cuándo 8×10 representa un número?, ¿cuándo una operación? y las implicaciones que este tipo de situaciones trae para el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas.

Finalmente está la estrategia de leer en la forma usual del SDN, en la lectura de todas las tarjetas a pareció esta estrategia, la consideramos como tal, puesto que es un procedimiento mediante el cual el sujeto resuelve la tarea propuesta. Es una forma de dar respuesta a la situación planteada, en la cual hubo una organización y una secuencia de procedimientos para llegar a la meta propuesta.

Se puede observar que algunas estrategias se repiten en los 5 grupos. Unas se resisten más que otras, estás son las que los niños siempre tratan de mantener, si son consistentes no las van a cambiar, si para ellos una estrategia es exitosa difícilmente la cambian, como por ejemplo, realizar la lectura descomponiendo en dígitos, es una estrategia que bien puede utilizarse en todas las tarjetas y cumplir con la tarea propuesta.

La estrategia de lectura de dígitos es una estrategia robusta, siempre se mantiene y no respeta el SDN, no respeta operaciones, es un obstáculo cognitivo, en el sentido que ésta estrategia que el niño manifiesta es un conocimiento resistente, que él tiene y que no le permite avanzar en el conocimiento. Está muy arraigada, hace que el sujeto se centre más en aquellas partes del fenómeno que conoce. Se podría decir que es inmune a operaciones u otras relaciones, representa una gran economía, solamente con aprenderse los números del cero al nueve es suficiente.

Considerando lo anterior se pueden identificar indicadores del avance de los niños en términos del cambio de estrategias para la resolución de las situaciones. Por ejemplo, cuando el niño intenta permanecer con la misma estrategia, es un indicador primero de buen funcionamiento cognitivo porque está optimizando, pero también es un indicador de la falta de comprensión, en este caso no hay avance en la construcción de conocimiento del niño.

Cuando se presenta la necesidad de comprender de integrar nuevos elementos al desempeño, entonces necesariamente la estrategia tiene que ser modificada de alguna manera bien se en su forma o bien sea en su estructura.

Según Duval (1999), hay comprensión cuando los niños pueden pasar de un sistema de representación a otro, en nuestro caso los niños comprenderán la representación polinomial de numerales escritos en el sistema decimal de numeración, cuando sean capaces de leer en el numeral 86.759 cada una de las siguientes representaciones:

$$8\times10^4+6\times10^3+7\times10^2+5\times10^1+9\times10^0$$

$$8\times10000+6\times1000+7\times100+5\times10+9\times1$$

$$80000+6000+700+50+9$$

En términos matemáticos podemos decir que si nos fijamos de la representación al número, esta relación es una función, es decir a una representación le corresponde un solo número, pero el caso contrario, del número a la representación, no se cumple, es decir esta relación no es función.

Un número está relacionado con muchas representaciones, pero una representación sólo está relacionada con un número. El niño tiene que identificar una función en una representación, es decir, “8×10”, solamente lo puede asociar a “ochenta”, “42×524” sólo me representa un número, de la misma manera “$3\times10^4+6\times10^2+5\times10+7\times10^0$” representa únicamente un número.

Este hecho implica que el fortalecimiento de la representación polinomial no solamente va a permitir una mayor conceptualización del concepto de número, sino también una potenciación en la manipulación operativa de los números en el SDN

De acuerdo con Vergnaud (1990), hay una invariante hasta la lectura de sumas y productos, lo que no ocurre con la lectura de la potencia, es decir, el repertorio de esquemas de los niños frente a la situación que exigía sumas y productos funciona perfectamente, allí ellos no tuvieron ningún problema, pero cuando aparece la situación en la que se requiere la potencia, entonces su repertorio de esquemas no es suficiente, y empiezan a generar estrategias para resolverla, ese conjunto de estrategias es el que nos interesa describir, porque ahí está la explicación del esquema.

En general se puede decir que a pesar que los niños leen de cierta manera y pronuncian de cierta manera una determinada expresión, no es garantía de comprensión, cuando se indaga en profundidad sobre los objetos representados, muchas veces nos encontramos con que no era lo que nos imaginábamos.

Muchas veces el niño repite de memoria, como dice Piaget (1976), el actúa con un conocimiento figurativo, él se acordó que lo había escuchado así, pero no tiene la menor idea de lo que significa, por ejemplo, en la lectura de la segunda sesión muchos de los niños leyeron de forma exitosa las potencias, pero si hubiéramos indagado sobre el significado de estas expresiones, es posible que no hubiéramos encontrado ningún rastro de comprensión.

7.2 Sobre la construcción del SDN

La representación polinomial exige en el niño una comprensión o un trabajo secuencial, pasar de un número en forma de numeral a una representación diferente (producto, suma de productos o polinomios), es pasar de la lectura de numerales a una lectura que contiene operaciones inmersas allí, por ejemplo las potencias, que a su vez están relacionadas con operaciones de productos y sumas que en últimas no es fácil identificar. Para alcanzar el nivel de representación polinomial lo aditivo y multiplicativo es muy importante, pero hace falta la potenciación.

En las primeras tarjetas para leer los numerales aparecen unas estrategias, luego cuando presentamos las tarjetas con operaciones, algunos niños suprimen el signo de la operación para seguir colocando el número en la representación usual del SDN, otros realizan o intentar resolver la operación, en estas primeras tarjetas hay indicios de que hay una representación de los que es el número.

De la tarjeta 4 en adelante aparecen las dos cosas, “8×10” es una representación de “ochenta”, de la misma manera 3^4, es una representación de algún número. Por lo tanto, después de la tarjeta 3 estamos obligando a los niños a que identifiquen la representación de un número, es decir que se den cuenta que lo que aparece allí representa un número.

Las expresiones que aparecen en las tarjetas después de la tres, son diferentes representaciones de números, lo que nos interesaba mirar era en qué momento los niños empiezan a leer en este sentido, como escasamente se ha hecho este tipo de interpretación, vemos que este proceso les genera mucha dificultad.

Al hablar de la representación aditiva, multiplicativa, potencial o combinación de ellas, nos estamos refiriendo en cada caso a números, lo que estamos encontrando es que al parecer una de las de las grandes dificultades que los niños van a tener para representar los números en su forma polinomial, es que los niños no han entendido que desde las representaciones aditivas y multiplicativas hay representaciones de números. Ellos lo hacen más desde un punto operativo que representativo.

Consideramos importante la necesidad de adelantar estudios que generen alternativas de diseño de situaciones que permitan avanzar en aspectos como los mencionados anteriormente. Pues así lograremos implementar actividades que mejoren la comprensión del SDN y por ende la operacionalidad entre numerales escritos en dicho sistema.

En cuanto a la escritura se puede decir que a pesar de que la escritura de numerales presenta más errores que las otras formas, probablemente hay que pensar que el niño logra la escritura de las expresiones, incluidos los polinomios, pero no comprende el número que está detrás de la expresión.

7.3 Posibles tareas

Teniendo en cuenta los resultados encontrados se podría pensar en hacer variaciones a la tarea propuesta con el ánimo de confrontar y buscar otras explicaciones al fenómeno en estudio, entres dichas variaciones podrían estar:

- ✓ Diseñar una tarea similar a la propuesta en este trabajo, pero que considere la representación de un mismo numeral en cada una de las representaciones, por ejemplo:

  TARJETA1 56.352

  TARJETA2 96×587

  TARJETA3 56×1000 + 88×4

  TARJETA4 $2^3 \times 1923 + \ldots$

  TARJETA5 $5\times10^5 + 6\times10^4 + 3\times10^2 + 5\times10^1 + 2\times10^0$

- ✓ Se podría pensar en otro tipo de situaciones que involucren más la escritura, de la cual se pueda extraer más información acerca de los procedimientos desarrollados por los niños. Por ejemplo no hacer el dictado sino mostrar las expresiones para que las escriban.

7.4 Dificultades encontradas respecto a la representación polinomial

Sin lugar a dudas uno de los inconvenientes, como ya se ha detectado en otros estudios, es la conceptualización que los niños tienen acerca del número. En este trabajo también se encontraron cosas similares, entre más esté estructurada esta noción es probable los niños accedan más fácilmente a la representación polinomial.

Otro de los aspectos fundamentales que se requieren para que los niños logren comprender la representación polinomial es que tengan desarrollado el concepto de la operación potenciación, sin este concepto es probable que los niños escriban o lean la representación polinomial pero no tengan compresión de la misma.

CAPITULO 8. CONSIDERACIÓNES FINALES

Los trabajos que en Educación Matemática se han ocupado del estudio sobre las formas cómo los niños construyen el Sistema Decimal de Numeración, están dirigidos unos hacia la observación de errores (Orozco Hormaza & Hederich, 2002), otros a detectar las dificultades para comprender el valor de posición (Cortina, 1997), otros a indagar sobre la relación entre el SDN y la operación multiplicación (Orozco Hormaza, Construcción de la operación multiplicativa y del sistema de notación en base 10: una relación posible, 2001), el desarrollo de las estructuras aditivas y multiplicativas, entre otras.

También dichos estudios han considerado las edades de los sujetos, en los primero años escolares, se interroga entre otras cosas por las regularidades en la serie numérica y su influencia en la adquisición del concepto de número; con niños más grandes estos trabajos consideran la variable del rango numérico de los numerales seleccionados.

Este trabajo quiso indagar por un elemento de dicha construcción del cual se encuentra escasa referencia bibliográfica. Es así como consideramos que al plantear una tarea cuya resolución permitiera evidenciar las estrategias necesarias para que los niños construyan la representación polinomial de un numeral en el SDN, es original y que sin bien en este trabajo no se abordaron todas las problemáticas ahí inmersas, si da pie para que posteriores investigaciones profundicen en el tema.

Si bien es cierto que falta mucho por considerar y mejorar, se pueden tomar como puntos concluyentes de este trabajo, los que a continuación se presentan:

- ✓ Como los niños no conocían la operación potenciación, no se puede pensar en que pretendíamos evaluar ese aprendizaje, pero si ocurre esto en el sentido en que todo lo previo que se preguntó el niño ya lo conocía, o se suponía que lo conocía, pues consideramos que es posible que el niño construya la representación polinomial a partir de las construcciones previas que él tuvo que haber hecho.

- ✓ El diseño y construcción de situaciones con propósitos establecidos con anterioridad, es fundamental para evidenciar en los niños los distintos procesos y estrategias que siguen para dar cumplimiento a la realización de las tareas y sobre todo para ver en escena sus conceptos-en-acto y sus teoremas-en-acto, de tal forma que se puedan reacomodar y plantear posteriormente situaciones de enseñanza que mejoren el aprendizaje de la matemática.

- ✓ El aprendizaje del SDN exige en el niño niveles de comprensión muy superiores a los establecidos tradicionalmente, puesto que junto a la conceptualización de número, son muchos otros conceptos involucrados en dicha construcción. Sin lugar a dudas que las estructuras aditivas y multiplicativas juegan un papel muy importante para acceder a la representación polinomial

- ✓ Para que los niños puedan construir la representación polinomial tiene que haber comprendido la operación de multiplicación, mientras esto no ocurra, es posible que a pesar de que en la lectura y la escritura tengan éxito, no tengan conciencia del número allí involucrado.

- ✓ El papel que juegan la representaciones en la didáctica de las matemáticas es muy significativo, por lo general los docentes nunca reflexionamos sobre lo que puede estar entendiendo o representándose un niño cuando exponemos las situaciones relacionadas con los conceptos matemáticos.

- ✓ Para mejorar el aprendizaje y proponer situaciones de enseñanza, en especial en las matemáticas, es preciso detenerse en el análisis de las estrategias individuales seguidas en el transcurso de la resolución de las tareas propuestas.

- ✓ El marco conceptual propuesto (Vergnaud G. , 1990) considera que un concepto es la tripleta de tres conjuntos: situaciones, invariantes y formas lingüísticas y no lingüísticas que permiten la representar el concepto. El presente trabajo, a través de la situación planteada, con la descripción de las estrategias, quiso aportar en la identificación de invariantes sobre la cual reposa el significado de la representación polinomial. Es de aclarar que este es un primer paso y queda mucho por investigar.

Conscientes de la magnitud de la problemática abordada y de la necesidad de afrontar un cambio, tanto conceptual como curricular que apunte en la dirección de procurar mejorar las condiciones y conocimientos de los estudiantes, partiendo de esta experiencia con la esperanza de contribuir a esta solución, se realizan los siguientes planteamientos:

- ✓ En la lectura de *"Setecientos noventa y un millones trescientos cincuenta y cuatro mil doscientos setenta y seis punto ocho cuarenta y seis"*, *"ocho cuarenta y seis"* podrían ser los decimales. La pregunta es ¿los decimales también se separan?, o ¿Por qué los decimales no se separan? La escritura de los decimales se hace sin separación, generalmente uno selecciona dos, tres o hasta cuatro decimales, y no se presta atención a la forma en que se lee, por ejemplo al escribir 1,1948 se puede hacer como *"uno punto diecinueve cuarenta y ocho"* indistintamente, para esto no existe regla alguna, ¿Qué pasa en esta situación con el sistema?

- ✓ Generalmente en la instrucción que se da a los niños no se habla de la representación, se dice que *"cinco por dos"* es "igual a diez", en lugar de que "representa a diez". ¿hasta dónde es errado decir que "cinco por dos" es lo mismo que "dos por cinco"? representa lo mismo, ¿cuándo representan lo mismo cuándo no?

- ✓ Es recomendable tener cuidado con las expresiones usadas en el aula de clase, por ejemplo, decir que "cinco por dos" es lo mismo que "dos por cinco" es un equívoco, representa lo mismo pero no es lo mismo, reflexiones como estas ¿hasta dónde ayudarían a mejorar los procesos de enseñanza y aprendizaje?

- ✓ ¿Qué influencia tienen los símbolos de las operaciones en la construcción de su concepto? ¿Será posible que si se presenta la potencia 3^4 (con su símbolo original), los niños lean *"tres cuartos"*?

- ✓ También en la enseñanza usual, los niños piensan que las tablas de multiplicar son hasta el diez. De ahí en adelante se habla de operaciones, pero se reconoce la operación no como una representación de los números, sino como un proceso que produce como resultado un número.

- ✓ ¿Hasta dónde es posible estudiar la conceptualización que los niños hacen del sistema decimal de numeración?

- ✓ ¿Es posible pensar en plantear situaciones problemas que los niños puedan resolver para que no solamente vean la representación polinomial como un conjunto de reglas, sino que se es un objeto que se puede construir conceptualmente?

REFERENCIA BIBLIOGRÁFICA

Artigue, M. (1990). Epistémologie et Didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 10*(23), 85-115.

Broitman, C., & Kuperman, C. (2004). *Interpretación de números y exploración de regularidades en la serie numérica: Propuesta didáctica para primer grado: "La loteria".* Oficina de Publicaciones de la Facultad de Filosofía y Letras de la UBA, Buenos Aires.

Brousseau, G. (1983). Les obstacles epistémologiques et les problémes en mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathematiques, 4*(2), págs. 164-198.

Brousseau, G. (1986). Fondements et Méthodes de la Didactique des Mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 7*(2), págs. 33-115.

Castaño, J. (1995 - 1998). El sistema decimal de numeración. *Hojas Pedagógicas. Colección matemáticas, Serie lo numérico*.

Castaño, J. (1995). *El proyecto descubro la matemática: una experiencia innovadora basada en el desarrollo del pensamiento.* Santa fe de Bogotá.

Castaño, J. (Abril - Junio de 1997). El sistema decimal de numeración. (A. d. Enseñar, Ed.) *Hojas Pedagógicas*(6), 2.

Castaño, J. (2009). *El sistema decimal de numeración y construcción de significado.*

Castro, A. B., & Crespo Blanco, C. M. (Enero - Febrero de 2007). El diseño de la investigación cualitativa. *Nure Investigación*(26), 1-6.

Castro, E., Rico, L., & Castro, E. (1987). *Números y operaciones. Fundamentos para una aritmética escolar.* Madrid: Síntesis S.A.

Castro, E., Rico, L., & Romero, I. (1996). Sistemas de representación y aprendizaje de estructuras numéricas. *Research Forum XX Encuentro del International Group for the Psychology of Mathematics Education,* (pág. 3). Valencia.

Cid, E., Godino, J. D., & Batanero, C. (2003). *Proyecto Edumat-Maestros. Matemáticas y su didáctica para maestros.* Obtenido de Sistemas numéricos y didáctica para maestros: http://www.ugr.es/local/jgodino/edumat-maestros/

Confrey, J. (1990). A review of research on student conceptions in mathematics, science and programming. *Review of Research in Education, 16*, págs. 3-55.

Cortina, J. L. (1997). *Conceptualización y operación del valor posicional en diferentes situaciones. Un estudio con niñas y niños mexicanos de segundo, tercer y cuarto grados.* En cumplimiento parcial de los requisitos para obtener el título de Maestría en Educación, Universidad de las Américas, A.C. Plantel DF.

Douady, R. (1986). Juegos de Marcos y dialéctica herramienta-objeto. *Recherches en Didactique de Mathématique, 7*(2).

Duarte, L. F., Roby, N., & Polo, M. A. (2001). Pensamiento númerico a través de las representaciones gráficas de las estructuras numéricas. *Dialéctica, 12*, 42-59.

Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano.* Cali, Colombia: Peter Lang.

Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano: registros semióticos y aprendizajes intelectuales.* Cali : Artes gráficas Univalle.

Ernest, P. (1991). *The philosophy of matemtics education.* London: Falmer Press.

Espasandin Lopes, C. A., & Carvaljo-Pinto Moran, R. C. (1999). A estatística e a probabilidade através das atividades propostas em alguns livros didáticos brasileros recomendados para o ensino fundamental. *Conferência Internacional: Experiências e Perspectivas do Ensino da Estatística - Desafios para o século XXI*, (pág. 167.174). Florianópolis - Brasil.

Estepa, A. (2003). Actividades de Educación Estadística difundidas en lengua Española y Portuguesa. *27 Congreso Nacional de Estadística e Investigación Operativa*, (págs. 1-12). Lleida.

Farfán, R. M. (1995). *Perspectivas y métodos de investigación en Educación Matemática* (Vol. Serie de Antologías 2). México: Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN.

Font, V. (2001). Algunos puntos de vista sobre las representaciones en didáctica de las matemáticas. *Philosophy of Mathematics Education Journal, 14*, 1-35.

Godino, J. D. (2003). *Marcos teóricos de referencia sobre la cognición matemática.* Documento de trabajo del curso de doctorado "Teoría de la Educación Matematíca", Universidad de Granada.

Godino, J. D., & Font, V. (2006). Algunos desarrollos de la teoría de los significados sistémicos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 325-355.

Godino, J. D., Batanero, M. d., & Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematic education. *ZDM Mathematics Education*, págs. 127-135.

Guitel, G. (1975). *Histoire comparée des numérations écrites.* Paris: Flammarion.

Gutierrez, A. (1991). La investigación en didáctica de las matemáticas. Madrid: Sintesis.

Hederich, C., & Orozco, M. (2000). *Relación entre construcción de la multiplicación y el uso del sistema notacional en base 10.* Cali: Universidad del Valle.

Ifrah, G. (1987). *Las cifras. Historia de una gran invención.* Madrid: Alianza.

Inhelder, B. (1978). Las estrategias cognitivas: Aproximación al estudio de los procedimientos de resolución de problemas. *Anuario de Psicologia*(18), 3-20.

Inhelder, B. (1978). Las estrategias cognitivas: aproximaciones al estudio de los procedimientos de resolución de problemas. *Anuario de Psicología*(18).

Inhelder, B., Sinclair, H., & Bovet, M. (1975). *Aprendizaje y estructuras del conocimiento.* (L. E. Echeverria Rivera, Trad.) Madrid (Apprentissage et strutures de la connaissance, Presses Universitaires de France, Paris, 1974), España: Morata S. A.

Kamii, C. (1986). Place Value: An explanation of its difficulty and implications for the primary grades. *Journadl for Research in Childhood Education*, 75-86.

Kamii, C. (1994). *Reinventando la arimética II* (Segunda ed.). Madrid, España: Aprendizaje Visor.

Kilpatric, J. (1998). Valoración de la investigación en didáctica de las matemáticas: más allá del valor aparente. En L. Puig, *Investigar y enseñar. Variedades de la educación matemática* (págs. 17-31). Bogotá, Colombia: Una empresa docente.

Kilpatrick, J. (1998). Investigación en educación matemática: su historia y algunos temas de actualidad. En L. R. Jeremy Kilpatrick, *Educación Matemática* (págs. 1-18). Bogotá, Colombia: Una empresa docente.

Lerner, D., & Sadovski, P. (1997). El sistema de numeración: un problema didáctico. En Parra, & Saiz*, Didáctica de las matemáticas aportes y reflexiones.* Buenos Aires: Paidos.

Lesh, R. (1979). Supporting research in mathematics education.

M. M. (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas.* Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.

Manzano, V., Fazeli, H., & Pérez, F. J. (Diciembre de 2001). Estrategias visuales para la optimización del aprendizaje de la prueba de significación estadísica. *Anales de psicología, 17*(2), 299-305.

MEN. (1996). *Lineamientos Curriculares - Matemáticas.* Santa fe de Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.

Obregón, I. (2007). *Magia y belleza de las matemáticas y algo de su historia.* Bogotá: Intermedio.

Orozco Hormaza, M. (2001). *Construcción de la operación multiplicativa y del sistema de notación en base 10: una relación posible.* Universidad del Valle.

Orozco Hormaza, M., & Hederich, C. (2002). *Errores de los niños al escribir numerales dictados.* Investigación presentada a través del Centro de Invetigaciones de Psicología de la Universidad del Valle, Universidad del Valle, Cali.

Otálora, Y., & Orozco, M. (2006). ¿Por qué 7345 se lee como "setenta y tres cuarenta y cinco". *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educatival, 9*(003), 407-433.

Perner, J. (1994). *Comprender la mente representacional.* Barcelona, España: Paidos.

Piaget, J. (1969). *Biología y Conocimiento.* Siglo XXI Editores.

Piaget, J. (1976). El papel de la imitación en la formación de la representación. En R. Zazzo, *Psicología y Marxismo* (págs. 135 - 143). Madrid: Pablo del Río, Editor.

Piaget, J., & Szeminska, A. (1967). *Génesis del número en el niño.* Buenos Aires: Guadalupe.

Puig, L. (1998). La didáctica de las matemáticas como tarea investigadora. En L. Puig, *Investigar y enseñar. Variedades de la educación matemática* (págs. 63-75). Bogotá, Colombia: Una empresa docente.

Rico, L. (2009). Sobre las nociones de representación y comprensión en la investigación en educación matemática. *PNA*, 1-14.

Rodríguez Gómez, G., Gil Florez, J., & García Jumenez, E. (1999). *Metodología de la Investigación Cualitativa.* Málaga: Aljibe.

Scheuer, N., Sinclair, A., Merlos de Rivas, S., & Tieche, C. (2000). Cuando ciento setenta y uno se escribe 10071. *Infancia y Aprendizaje*(90), 31-50.

Smith, T. M. (1976). The foudations of survey sampling: a review. *Journal of The Royal Satatistics Society*, págs. 183-204.

Terigi, F., & Wolman, S. (2007). Sistema de numeración: consideraciones acerca de su enseñanza. *Revista Iberoamericana de Educación, 43*, 59-83.

Tolchinsky, L., & Karmiloff, S. (1991). Las restricciones del conocimiento notacional. En *Psicología Educativa* (págs. 39-90).

Vallecillos, A. (1994). *Estudio teórico-experimental de errores y concepciones sobre el contraste de hipótesis en estudiantes universitarios.* Granada: Tesis doctoral, Universidad de Granada.

Vergnaud, G. (1982). Cognitive and developmental psychology and research in mathematics education: some theorical and metodological issues. *For the Learning of Mathematics, 3*(2), 31-41.

Vergnaud, G. (1990). La teoría de los campos conceptuales. *Recherches en Didáctiques des Mathématiques, 10*(2), 133-170.

Vergnaud, G. (1991). *El niño, las matemáticas y la realidad. Problemas de la enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria.* México: Trillas.

Vergnaud, G. (Marzo de 1996). Algunas ideas fundamentales de Piaget en torno a la didáctica. *Perspectivas, XXVI*(1).

Vergnaud, G. (2006). ¿En qué sentido la teoría de campos conceptuales puede ayudarnos para facilitar aprendizaje significativo? *V Encuentro Internacional sobre Aprendizaje Significativo,* (págs. 285-302). Madrid.

Vergnaud, G. (2006). Representación y actividad: dos conceptos estrechamente asociados. *Teoría de la Representación y Educación Matemática*, (pág. 16). Madrid.

Villella, J. (1996). *Sugerencias para la clase de matemática.* Buenos Aires: Aique.

Wheeler, D. (1993). Epistemolgical issues and challenges to assesment: What is mathematical knowledge? En M. Niss, *Investigations into assesment in mathematics education, An ICMI Study*. Dordrecht: Kluwer A. P.

ANEXOS

Anexo1: Tarjetas utilizadas en la actividad 1 de la primera sesión

"Tarjeta 1"	643.785
"Tarjeta 2"	92.684.836
"Tarjeta 3"	791.354.276.846
"Tarjeta 4"	8×10
"Tarjeta 5"	49×524
"Tarjeta 6"	3^4
"Tarjeta 7"	328^{42}
"Tarjeta 8"	$12\times5 + 28\times34$
"Tarjeta 9"	$8\times100 + 5\times10$
"Tarjeta 10"	$8\times5^2 + 2\times3^4 + 6^5$
"Tarjeta 11"	$8\times10^4+6\times10^3+7\times10^2+ 5\times10^1+9\times10^0$

Anexo2: Tarjetas utilizadas en la actividad 1 de la segunda sesión

"Tarjeta 1"	857.642
"Tarjeta 2"	84.324.157
"Tarjeta 3"	584.325.648.539
"Tarjeta 4"	9×10
"Tarjeta 5"	32×458
"Tarjeta 6"	4^3
"Tarjeta 7"	284^{35}
"Tarjeta 8"	$18\times6 + 34\times47$
"Tarjeta 9"	$5\times100 + 9\times10$
"Tarjeta 10"	$4\times6^5 + 8\times4^7 + 8^3$
"Tarjeta 11"	$7\times10^4+9\times10^3+5\times10^2+ 6\times10^1+4\times10^0$

Anexo 3. Ejemplo de Transcripción de la lectura que hicieron los niños en la actividad 1 de la primera sesión

CÓDIGO: 0901 EDAD: 9 años SESIÓN: 1 Fecha: 16/03/2010

Número a leer	LECTURA1		
	SDN	Otra	Cómo leyó
643.785	☑		Seiscientos cuarenta y tres mil, setecientos ochenta y cinco
92.684.836	☑		Noventa y dos millones, seiscientos ochenta y cuatro mil, ochocientos treinta y seis
791.354.276.846		☑	Setecientos noventa y un millones, trescientos cincuenta y cuatro…doscientos setenta y seis mil, ochocientos cuarenta y seis
8×10	☑		Ochenta … ocho por diez, ochenta
49×524	☑		Cuarenta y nueve por quinientos veinticuatro
3^4		☑	Tres cuartos
328^{42}		☑	Trescientos veintiocho cuarenta y dos cuartos … ¿Qué ves? Trescientos veintiocho y un cuarenta y dos pequeños.
$12\times5 + 28\times34$	☑		Doce por cinco más veintiocho por treinta y cuatro
$8\times100 + 5\times10$	☑		Ocho por cien más cinco por diez
$8\times5^2 + 2\times3^4 + 6^5$		☑	Ocho por cinco medios, más dos por tres cuartos, más seis quintos
$8\times10^4+6\times10^3+7\times10^2+5\times10^1+9\times10^0$		☑	Ocho por diez cuartos, más seis por diez tercios, más cinco por diez medios, más cinco por diez uno, más nuevo por diez cero.

Anexo4: Desempeño de los niños en la lectura de la sesión 2

CÓDIGO	TARJETA										
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**
0901	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0902	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0903	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0904	1	1	0	1	1	1	1	1	1	0	0
0905	1	1	1	1	1	0	0	1	1	0	0
0906	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	0
0907	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0908	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0909	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0910	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0
1001	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1
1002	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1003	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
1004	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
1005	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1006	0	0	0	1	1	1	1	1	1	0	1
1101	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1102	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
1103	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1
1104											
1105	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1
1106	1	1	0	1	1	0	0	1	1	0	0
ACIERTOS	15	16	7	21	20	17	17	20	20	15	15
Porcentaje	68,2	72,7	31,8	95.4	90.9	77,3	77,3	90,9	90,9	68,2	68,2

Anexo5: Desempeño de los niños en la escritura de la sesión 1

CÓDIGO	**TARJETA**										
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**
0901	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0902	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0903	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0904	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0905	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0906	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0907	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0908	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0909	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0910	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1001	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1002	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1003	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
1004	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
1005	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1006	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1
1101	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1
1102	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
1103	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
1104	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1
1105	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
1106	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1
ACIERTOS	16	17	12	21	21	21	22	21	21	21	21
Porcentaje	72,7	77,3	54,5	95,5	95,5	95,5	100	95,5	95,5	95,5	95,5