El Arte de los Fractales

Francisco Alfonso Rivera López

Universidad del Cauca
Facultad de Artes
Departamento de Artes Plásticas
Popayán
2004

El Arte de los Fractales

Francisco Alfonso Rivera López

TRABAJO DE GRADO PARA OPTAR TÍTULO DE MAESTRO EN ARTES PLÁSTICAS

Director:
Margarita Medina.
Maestra en Artes Pláticas e Ingeniera Civil.

Universidad del Cauca
Facultad de Artes
Departamento de Artes Plásticas
Popayán
2004.

Nota de aceptación:

En cumplimiento de los requisitos legales y reglamentarios, se declara aprobado el siguiente trabajo de grado.

____

Jurado

____

Jurado

Popayán, julio de 2004.

DEDICATORIA

Quiero dedicar este trabajo a toda mi familia, los que con su amor y esmero dedicaron un tiempo de su fructífera vida para acompañarme en el logro del proyecto, especialmente a mi esposa, amiga y compañera que con su inteligencia y talento supo intuir todo el arraigo artístico que en mi interior existe;

A, mis hijas por ser el sí de mi vida;

A, mis hermanas y hermanos sin dejar de mencionar a mi hermano José Ernesto Rivera, que aunque no nos acompaña, su recuerdo será perenne.

Francisco Alfonso Rivera López.

AGRADECIMIENTOS

A, DIOS y a la SANTÍSIMA VIRGEN por sus bendiciones, ya que sin su ayuda espiritual no hubiera llegado a la meta prevista.

A, TODOS LOS PROFESORES DE LA FACULTAD Y DEL DEPARTAMENTO DE ARTES PLÁSTICAS, por sus valiosas enseñanzas, aporte artístico y su constante motivación, quienes me impulsaron a culminar con éxito este proyecto de mi vida.

CONTENIDO

Pág.

LISTA DE CUADROS

LISTA DE FIGURAS

GLOSARIO

ALEATORIO. Perteneciente o relativo al juego del azar.

ALGORITMO. Toda combinación definida de signos operativos y de símbolos. Ej: algoritmo algebraico.

AUTOSIMILITUD. Una propiedad exhibida por aquellos sistemas cuyas estructuras permanecen constantes al variar la escala de observación, o las pastes por pequeñas que éstas sean se parecen al todo.

DIMENSIÓN FRACTAL. Número que sirve para cuantificar el grado de irregularidad y fragmentación de un conjunto geométrico o de un objeto natural. La dimensión fractal no es necesariamente entera.

FRACTAL. En matemática es una forma geométrica compleja, detallada y particularizada, en su estructura y en todos sus niveles de magnificación (ampliación). Generalmente todos los fractales son iguales, es decir tienen la característica de que cada pequeña fracción del fractal puede ser observada como una reducción a escala o una pequeña réplica del todo (de toda la figura) Un ejemplo de un fractal es la Campanilla o Copo de nieve de Koch.

ITERACIÓN. Efecto de iterar, repetir.

INVARIANZA. Que no se altera, respecto de una cierta transformación algebraica o geométrica.

NÚMERO COMPLEJO. Es aquel que consta de dos partes, una real que siempre se escribe primero y una imaginaria. Se representan como Z = (a, b), donde a y b son la parte real e imaginaria respectivamente ; y pueden ser números enteros o con decimales positivos o negativos; permiten caracterizar puntos, pero estos no están sobre una línea sino sobre un plano al que llamamos *plano complejo.*

ORDENADOR. El computador.

POLVO. Colección totalmente discontinua de puntos, es decir, objeto de dimensión topológica igual a cero.

TESELACIONES. De Tesela. Cada una de las piezas cúbicas de mármol, piedra, barro cocido o cualquier otra materia con que los antiguos formaban los pavimentos de mosaico

RESUMEN

La comprensión fractal de imágenes es una técnica artística bastante controvertida, con detractores y admiradores; quizá por las mismas emociones que generan las matemáticas, que para algunos son lo más riguroso y científico que hay en la cultura, al tiempo que el arte es lo menos científico y riguroso que existe. No es correcto mantener a distancia las ciencias y las artes. Existen, al menos cuatro maneras de construir mundos muy relacionados entre sí: las filosofías, las artes, las ciencias y el sentido común; y más que maneras opuestas son maneras complementarias y finalmente entrelazadas.

Las matemáticas por ejemplo, construyen y reconstruyen sus mundos en formas más cercanas a las de las artes que otras maneras de construir mundos; en ellas se cultiva la estética y se valora ante todo la creatividad. En el mundo de las matemáticas se dan en forma muy notable, los rasgos más propios del arte: la libertad de creación, la búsqueda de coherencia interna con un alto grado de independencia de la realidad cotidiana.

Hacia el año 1975, se desarrolla una línea de investigación iniciada por el científico Benoit Mandelbrot cuyo tema son LOS FRACTALES con aplicaciones en la física, geografía, economía, biología, música etc., y por increíble que pueda parecer o por el contrario, obvio, los fractales tienen también sus aplicaciones en el arte. La mayoría de los fractales una vez representados arrojan formas de gran belleza y de variados colores.

Un fractal; palabra que proviene del adjetivo latino *"fractus"* y del verbo también latino *"frangere"* quiere decir, algo roto, no entero, fragmentado, irregular; es a grandes rasgos, en un lenguaje muy sencillo y en pocas palabras…belleza. Pero si esta definición resulta poco ortodoxa y no satisface., ***Un fractal es una composición que presenta la misma estructura, repetida al cambiarle indefinidamente la escala de observación, hasta llegar a valores infinitos. A ésta repetición de una misma e idéntica forma en distintas escalas se le denomina autosimilitud.*** El área o superficie de un fractal es finita, es decir, tiene límites. Por el contrario y por paradójico que esto resulte, su perímetro o longitud es infinita.

La belleza geométrica de los fractales suele ser un sentimiento humano inherente al espectáculo de su percepción visual. En un fractal hay orden y caos coexistiendo, cohabitando en perfecta armonía. El caos y los fractales están íntimamente relacionados, tanto que podemos decir, que los fractales constituyen el lenguaje del caos y un método para analizar aquellos fenómenos que se nos antojan "sin ley", como por ejemplo: la caprichosa forma de una nube, una hoja o rama de un árbol, una cadena de montañas., etc., Es así como, con una nueva geometría denominada fractal, se pretende explicar el comportamiento del caos en la naturaleza, llegando a demostrar que el caos sí mantiene una estructura ordenada dentro de sí mismo.

"EL ARTE DE LOS FRACTALES" constituye una propuesta original, visual y plástica con fundamento en un lenguaje muy especializado de procesos recursivos e iterativos, con gran variedad de formas impredecibles, análogos a una serie de ideas que no se materializan operativamente hasta que se desarrolla su proceso de ejecución, momento en el cual entran a manejarse elementos plásticos, tales como: el espacio, la forma, el fondo, el color, la estructura en muchas variaciones topológicas, al igual que las relaciones existentes por la polaridad armónica del *limite-ilimitado; recto-curvo; blanco-negro; grande-pequeño.* Los protagonistas van a ser los colores, las formas, el ritmo, el espacio que con la ayuda del ordenador como herramienta, se convierte en un elemento válido para la expresión artística; pues permite ir creando y cambiando imágenes hasta lograr una unidad dentro del caos de diversidad.

"EL ARTE DE LOS FRACTALES" es un estudio descriptivo y especialmente ilustrativo de la aplicación que tienen los modelos matemáticos y geométricos en la composición de imágenes de particular belleza artística, cuyas estructura permite aprehender los límites entre las concepciones de orden, caos y abstracción.

El proceso investigativo destaca tres capítulos que corresponden a: Un marco referencial o contextual de la teoría y conceptualización de los fractales; Un segundo capítulo referido a la metodología que soporta la ejecución y realización de la propuesta artística y un último capítulo destinado a ilustrar los resultados constituidos por una serie de composiciones figurativas con aplicación de elementos de la plástica y conceptos relacionados con el arte fractal. La importancia de la propuesta radica en una nueva y diferente representación figurativa con inclusión de elementos tanto de las artes como de las matemáticas en la elaboración tanto estructural como colorista del espacio pictórico.

INTRODUCCIÓN

Los Fractales representan una teoría matemática y un método para analizar una gran diversidad de fenómenos de la naturaleza; precisamente aquellos fenómenos que se nos antojan “sin ley” como por ejemplo: la caprichosa forma de una hoja, de una nube, una costa marina o, incluso, de una obra de arte.

Benoit Mandelbrot creó los *fractales* (a principios de los años setenta) que hoy han generado una serie de investigaciones en el campo de la física, geografía, economía, biología, música y especialmente el arte. En la actualidad existe una concepción y una geometría *fractales* de la naturaleza; cuya esencia es el concepto de *autosimilitud* una propiedad exhibida por aquellos sistemas cuyas estructuras permanecen constantes al variar la escala de observación; es decir cuando *las partes* por pequeñas que éstas sean se parecen al *todo.*

El lenguaje de los *fractales* puso en marcha una forma de pensar dentro de las matemáticas y las ciencias naturales, una ola que por su amplitud, fuerza y creatividad extraordinarias se ha convertido en un acontecimiento interdisciplinario de gran interés para el arte.

La esencia del lenguaje del arte de los *fractales* es que muchas estructuras naturales como por ejemplo las nubes, las montañas, las líneas de las costas, las grietas tectónicas, los pequeñísimos capilares sanguíneos, las superficies de ruptura de materiales etc., que aparentan tener una complejidad extraordinaria, poseen una misma regularidad geométrica; la denominada *invariancia* bajo escala. Esto significa que si se *invariancia* estas estructuras a distintas escalas se encuentran una y otra vez los mismos elementos básicos. Su interrelación a distintas escalas encuentra una descripción matemática apropiada mediante el concepto de dimensión fractal.

Un fractal, palabra que proviene del latín *“fractus”* quiere decir, algo roto, algo no entero, comprende objetos geométricos de cierta entidad que pueden ser descritos en términos de dimensiones no enteras o dimensiones *fractales.*

Una propiedad de muchos *fractales* es la *autosimilitud o invarianza* a escala. Esto es, que si se amplía una mínima parte del fractal, este aparece nuevamente en su totalidad y complejidad. Ahora bien, esta *autosimilitud* no implica *autoidentidad*. Es *impredictible* y hasta cierto punto aleatorio. Otra característica lo constituye el *infinito detalle***,** es decir que al ampliar un fractal, entre más se amplíe, tanto mas detalles revela éste, sin que se tenga un límite en el que se aprecien bloques.

La dimensión no entera hace referencia a que las figuras de la geometría clásica por ejemplo; tienen una, dos, o tres dimensiones; un fractal puede desarrollarse en una *dimensión no entera*, esto es, ocupa parte del plano pero no llega a tener la entidad de figura bi-dimensional.

Las fórmulas o algoritmos que definen los *fractales* son relativamente *sencillos* y con un conjunto muy *reducido* de datos. Su *algoritmia* es definida por una característica clave: la *iteración* que es precisamente *el ordenador* que permite experimentar y descubrir nuevos conjuntos y es imprescindible en cualquier campo que abarque los *fractales.*

La belleza geométrica de los *fractales* suelen ser un sentimiento humano inherente al espectáculo de su percepción visual. En un fractal hay orden y caos coexistiendo, cohabitando en perfecta armonía. El caos y los *fractales* están íntimamente relacionados, tanto así que un descriptor del tema es el de Teoría del caos. Además de la belleza plástica que se observa en la generación de un fractal, hay algo más que bellas e intrincadas imágenes generadas por un ordenador; en la última década los fractales se utilizan para la representación y el análisis de una gran variedad de procesos complejos a lo largo de diversos campos, como por ejemplo: la Física, las Matemáticas, Biología, Química, Geología, el Arte, la música etc.

La facilidad de los fractales para expresar o simular fenómenos que suceden en la naturaleza es debido a la *autosimilitud*; los fenómenos naturales creados o en los que interviene el azar, la aleatoriedad, estadísticamente siguen una *periodicidad o autosimilitud* que puede ser caracterizada a través de la dimensión fractal. La utilización de la geometría fractal en investigaciones numéricas, teóricas y experimentales, ha hecho posible tener una dimensión práctica y predecible de problemas que antes eran prácticamente intratables.

Todos hemos tenido alguna experiencia con las matemáticas durante los años de estudio y según lo agradable o desagradable que haya sido el aprendizaje de esos variados juegos simbólicos, tendremos una actitud positiva o negativa con respecto a ellas. En todo caso compartimos con maestros o profesores la opinión de que las matemáticas son lo más riguroso y científico que hay en la cultura, lo mismo que compartimos el concepto de que quizá el Arte es lo menos científico y riguroso que existe. Hay quienes consideran que las matemáticas más que ciencia son un arte. (Carlos E. Vasco. 1995)

Nelson Godman afirma que no existe "el mundo" ya dado, sino que hay al menos cuatro maneras de construir mundos muy relacionados entre sí: Las filosofías, las ciencias, las artes y el sentido común; tanto en la percepción normal como en el discurso cotidiano (Godman, N. *Ways of worldmaking*. Cambridge.1978.) Más que maneras opuestas, son maneras complementarias y finamente entrelazadas.

Judith Wechsler, en su obra titulada *La estética de la ciencia* (México, 1982) presenta a físicos, ingenieros y psicólogos discutiendo los aspectos estéticos, generalmente olvidados por los profesores de esas ciencias; de donde deduce que si en esas ciencias se encuentra tan profundamente implicada la estética, con mayor razón se encuentra en las matemáticas.
Porque así como las ciencias, las artes y el sentido común, las matemáticas también construyen sus mundos especiales y reconstruyen a su manera los demás mundos.

Además, si atendemos a la relación de las ciencias naturales, sociales y humanas (Ciencias Fácticas) con lo real, con los hechos empíricos y con los fenómenos observables, podríamos decir que las matemáticas construyen y reconstruyen sus mundos en formas más cercanas a las de las artes que otras maneras de construir mundos. No se trata de contraponer el arte a las ciencias fácticas, ya sean naturales, sociales y humanas. En todos esos campos se cultiva la estética y se valora ante todo la creatividad.

Si comparamos el campo de las ciencias formales (Lógica formal, teoría de la información, teoría general de procesos y sistemas y las distintas ramas de las matemáticas) particularmente el de las matemáticas, con el arte y con las ciencias fácticas; las ciencias formales parecen estar más cerca del arte que de las ciencias fácticas. En las ciencias formales y en las matemáticas se dan en forma muy notable los rasgos propios del arte: la libertad de creación de mundos y la búsqueda de coherencia interna, con un alto grado de independencia de la realidad cotidiana; mientras que en las ciencias fácticas se requiere la confrontación con lo real, la observación de los fenómenos y la contrastación de hipótesis por medio de experimentos. Siendo así, no miremos en las fórmulas sólo su significado riguroso y su adusta complejidad: admiremos su elegancia, belleza y sencillez. Busquemos el arte que esconden las matemáticas.

Con el presente estudio se busca realizar una exhaustiva investigación bibliográfica de los fractales en la naturaleza y su dimensión artística, a partir de esas formas geométricas con curiosas e interesantes particularidades que han inundado el mundo científico con un conjunto de reglas que nos retan a conocer y comprender la naturaleza desde la belleza artística que encierran las matemáticas. Pero no sólo buscar arte en las matemáticas y matemáticas en el arte sino también practicar la matemática como arte, como quehacer humano que pueden volverse profundamente satisfactoria y aún apasionante por estar más cerca de las artes que de las ciencias. En efecto los verdaderos matemáticos practican sus matemáticas como un arte.

El objetivo es, la ejecución de una propuesta visual, plástica y original mediante la realización de una serie de composiciones pictóricas con aplicación de elementos plásticos y conceptuales relacionados con el arte fractal haciendo uso de un lenguaje especializado en procesos iterativos al momento de trabajar el espacio, la forma, el color, el ritmo y la estructura.

Por tratarse de un estudio descriptivo, es esencialmente ilustrativo de los efectos que la aplicación de modelos matemáticos y geométricos se reflejan en composiciones de particular belleza cuya estructura marca los límites entre las concepciones de orden y caos; aspectos que cuestionan y problematizan en la actividad artística la belleza, la estética, la creatividad, la originalidad como elementos o fundamentos del arte.

Desde el punto de vista del arte, lo principal no es tanto la aplicación de modelos matemáticos, sino la belleza de estas composiciones, ya que la mayoría de los fractales una vez representados arrojan formas muy hermosas y variadas que favorecen la generación de planteamientos plásticos visuales con fundamento en el manejo de, no sólo otros lenguajes sino también otras herramientas como el ordenador, que se proyecta como de gran utilidad en la manifestación artística.

Aún así, se puede afirmar que todavía no se pueden dar respuestas finales y definitivas en el campo del arte. La duda siempre será un estímulo para la creatividad; pues es bien seguro que no hay certidumbres absolutas; pero una de las funciones del arte sigue siendo generar conocimiento y comprensión. En el arte no cabe el escepticismo.

1. EL ARTE DE LOS FRACTALES

"Ningún artista ve las cosas como son en realidad,
Si las viese dejaría de ser artista." ***Oscar Wilde.***

Cuando queremos comprender cómo funcionan las cosas, es decir, cuando enfrentamos problemas o situaciones que consideramos complejas, generalmente recurrimos a las simplificaciones. Esta forma de entender el mundo que nos rodea es muy útil tanto en los procesos científicos, como en la vida cotidiana. Cuando se esta interesado en descubrir, cómo surgieron las formas y estructuras tan diversas y complejas que encontramos en la naturaleza, bien vale cuestionarse acerca de las diversas maneras de representarlas.

Las figuras comunes de la geometría euclidiana o clásica (círculos, triángulos, esferas, etc.) no son las más adecuadas para generar formas complejas como la hoja de un helecho o el perfil de una montaña. Su limitación se debe a que tienden a perder su estructura cuando son ampliadas; un arco de círculo se transforma poco a poco en una recta, la superficie de una esfera se hace cada vez más plana. Esto no es precisamente lo que sucede con las formas naturales; así por ejemplo, la superficie rugosa de una roca mantiene prácticamente la misma complejidad a varios niveles de amplificación con el microscopio. Si analizamos una parte de la roca y dentro de ella otra más pequeña y así sucesivamente, no por ello nos parecerá cada vez más lisa.

De la misma forma que con la roca, podríamos proceder con el ramaje de un arbusto: de una rama salen muchas ramas y en cada una de ellas se repite el mismo esquema. La ampliación de una parte del original es muy similar al original mismo.

Tales objetos son más complicados que un círculo, un cono o una esfera; sin embargo, podemos servirnos de ellos para simplificar los intentos de reproducir la realidad.

Se trata de descartar la dificultad de la figura y buscar la facilidad de reproducirla mediante un método de trabajo que nos permite descubrir que detrás del nacimiento o la formación de un cuerpo complejo, no necesariamente se esconde un mecanismo muy elaborado.

A este tipo de formas geométricas que, entre otras propiedades contienen una imagen de si mismas en cada una de sus partes, se les llama *fractales*, y hace ya mas de una década que inundaron el mundo científico con un conjunto de nuevas reglas para enfrentarse con el reto de conocer y describir la naturaleza. Su lenguaje permeó campos increíblemente diversos de las ciencias naturales y sociales, y ha hecho de las matemáticas un instrumento novedoso para las artes.

1.1 ANTECEDENTES HISTÓRICOS.

FIGURA 1. BENOIT B. MANDELBROT.

Matemático francés de origen Polaco (1924 -) Considerado como el padre de la GEOMETRÍA FRACTAL. Obtuvo en 1952, un Doctorado en matemáticas en la Universidad de Paris; ha enseñado a Economistas en la universidad de Harvard, Ingenieros en Yale, Psicólogos en el Colegio de Medicina Albert Einstein y matemáticos en Paris y Génova. Desde 1958, trabaja y es miembro del centro de investigación Thomas J. Watson de IBM en Yorktown Heights (New York). Entre sus obras destacan principalmente: ***Los objetos fractales. Forma azar y dimensión. (1975). Fractals and turbulence: Attractors and dispersión. (1977) The fractal geometry of nature. (1983); Fractals, an animated discussión. (1990). Fuente: Microsoft Corporation.***

En los años setenta, un matemático entonces no muy bien visto por sus colegas Benoit Mandelbrot, (véase figura 1) inventó una extraña forma de dibujar. Estudiaba la aplicación repetida de una función a un punto z en el plano de los números complejos, revivió ideas de otros matemáticos como Gastón Julia, sobre los puntos que no se alejan indefinidamente del origen al aplicarles una y otra vez la misma función. Al graficar esos conjuntos en los incipientes computadores de entonces, aparecían figuras intrigantes, paisajes lunares o costas de islas imaginarias, Maldenbrot bautizó esas figuras extrañas y atractivas con el nombre de fractales, palabra relacionada con fracción, fragmentado, roto.

Con el avance tecnológico en los sistemas de computación y específicamente el aumento de velocidad y la llegada de las pantallas a color, los fractales se han convertido en una de las fuentes de pintura contemporánea más atractivas y exquisitas.

Si se observa con cuidado la figura 2, se empieza a ver que algunos de sus esquemas se repiten aquí o allá a distintas escalas. Si se amplía la pintura a diferentes escalas vuelven a aparecer los mismos esquemas.

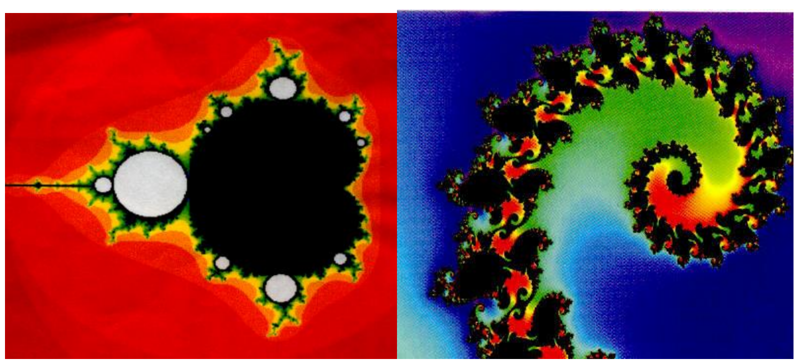


FIGURA 2. FRACTAL O CONJUNTO DE MANDELBROT.

Se caracteriza por una forma cardioide (de corazón) tangente a un disco circular de menor extensión, de los cuales brotan una infinidad de estructuras que se ajustan a la misma descripción. Los detalles de la estructura del contorno del conjunto se hacen más evidentes con el uso de colores para distinguir las características de la orbita de iteración que genera un universo de hipocampos. ***(Fuente: Innovación y Ciencia. 1995)***

El aporte más notable de Mandelbrot, es el descubrimiento, sustentado mediante argumentos teóricos y experimentales de que los fractales están involucrados en la explicación de una amplia gama de fenómenos naturales y en la solución de problemas matemáticos. Un buen ejemplo de ello es el hecho de que los llamados atractores extraños que se presentan al estudiar ciertos sistemas dinámicos y cuya descripción es aún en muchos casos incompleta, de ahí el adjetivo de “extraños”, resultan tener una estructura fractal. (1)

Aunque la definición de conjunto fractal tiene como base conceptos matemáticos que ya habían sido desarrollados durante los primeros años de este siglo y matemáticos entre los que se destacan A.S. Besicovitch, les habían concedido desde entonces especial atención, el interés en su estudio se incrementó notablemente en los últimos años, debido en gran parte al reconocimiento de que los fractales no son sólo curiosidades matemáticas sino que aparecen en conexión con problemas provenientes de diversas áreas de la ciencia.

En efecto los fractales han probado ser de utilidad para explicar y modelar fenómenos diversos que van desde el movimiento Browniano hasta la distribución de las galaxias en el universo. Indudablemente en este proceso ha sido fundamental el trabajo desarrollado por Mandelbrot, que además fue quién propuso el término *fractal* para referirse a esa amplia gama de conjuntos que podrían llamarse “no euclidianos”: conjuntos que no pueden ser apropiadamente descritos mediante la geometría euclidiana tradicional.

La esencia del mensaje de Benoit Mandelbrot, del Centro de investigación Thomas J. Watson de la IBM en Yorktown Heights (New York) con su concepto de *fractales* ampliamente expuesto en su libro *The fractal Geometry of Nature*, es que muchas estructuras naturales (como, por ejemplo: las nubes, las montañas, las líneas de las costas) que aparentan tener una complejidad extraordinaria, poseen en realidad una misma regularidad geométrica: la denominada invarianza bajo escala.

---

(1)Gómez, Hoyos Adriana. Fractales y medidas. Tesis. Universidad del Valle.1979

Esto significa que si se analizan estas estructuras a distintas escalas, se encuentran una y otra vez los mismos elementos básicos. Su interrelación a distintas escalas encuentra una descripción matemática apropiada mediante el concepto de *dimensión fractal,* concepto que puso en marcha una nueva forma de pensar dentro de las matemáticas y las ciencias naturales, que por su extraordinaria creatividad se ha convertido en acontecimiento interdisciplinario de primer orden.

Los métodos matemáticos de medición de la dimensión de un fractal fueron introducidos por Félix Hausdorff y Andrei Kolmogorov a principios de siglo.

Otros matemáticos modernos estudiosos del tema son: Michael Barnsley, Harmut Jurgens, Heinz-Otto Peitgen, Dietmar Saupe, quienes trabajan en matemática de los sistemas dinámicos complejos, los fractales y el grafismo por ordenador en el Instituto de Sistemas Dinámicos de la Universidad de Bremen, en el que han creado un laboratorio de matemática experimental.

Peitgen se doctoró en matemáticas por la Universidad de Bonn en 1973. Es profesor de la disciplina en la Universidad de Bremen, así como en la de California en Santa Cruz. Sus trabajos se centran en el análisis no lineal y las ecuaciones diferenciales, los métodos numéricos, los sistemas dinámicos y los fractales.

Saupe y Jurgens se doctoraron en matemáticas por la Universidad de Bremen en 1982 y 1983 respectivamente. El primero es profesor ayudante de matemáticas y, director del laboratorio el segundo.

1.2 LOS FRACTALES.

En 1975 Benoit Mandelbrot denominó *fractales* al conjunto de formas que, generadas normalmente por un proceso de repetición, se caracterizan por poseer detalle a toda escala, por tener longitud infinita, por no ser diferenciables y por exhibir dimensión fraccional.

Adicionalmente construyó con ellas un conjunto de nuevas reglas para explorar la geometría de la naturaleza, y las reconoció como herramientas potencialmente útiles para analizar un gran número de fenómenos físicos. (Peitgen, 1986)

El interés de Mandelbrot en los fractales nació de su certeza de que "las nubes no son esferas, las montañas no son conos, las costas no son círculos, como la corteza de un árbol no es plana ni un rayo viaja en línea recta... La naturaleza no sólo exhibe un grado mayor sino también un nivel diferente de complejidad". (Mandelbrot, 1984).

Los fractales son curiosos objetos geométricos generados por la iteración infinita de un algoritmo bien especificado. La dimensión de un fractal es fraccionaria. Así como un punto tiene dimensión cero, o un plano dimensión dos, la dimensión de un fractal no es un número natural, sino fraccionario.

Actualmente se tienen identificadas innumerables manifestaciones naturales de estructuras fractales, Se sabe que su geometría esta presente en depósitos y agregados coloidales (como los generados por el polvo y el esmog) poliméricos y electroquímicos (Sander, 1987); en aparatos y sistemas de los seres vivos, como los vasos capilares, tubos intestinales, biliares y bronquiales, y en redes neuronales, (Goldberger, 1990).

De manera similar, hay evidencia de que la localización geográfica de epicentros de temblores exhibe un patrón fractal. (Back, 1991), y en la actualidad la dimensión fraccional (dimensión fractal) de la superficie irregular de una falla en un material ya se utiliza como medida indirecta de su resistencia y dureza (Peterson, 1988).

1.3 PROPIEDADES DE LOS FRACTALES.

Como características notables de los fractales pueden mencionarse *la autosimilitud o invarianza a escala,* esto es, que si se amplía suficientemente una mínima parte del fractal, este aparece nuevamente en su totalidad y complejidad. A diferentes escalas un fractal conserva la misma apariencia, siempre existe una clara similitud entre partes muy distintas de una misma figura fractal, lo cual no implica autoidentidad, pues resulta impredictible y hasta cierto punto aleatorio.

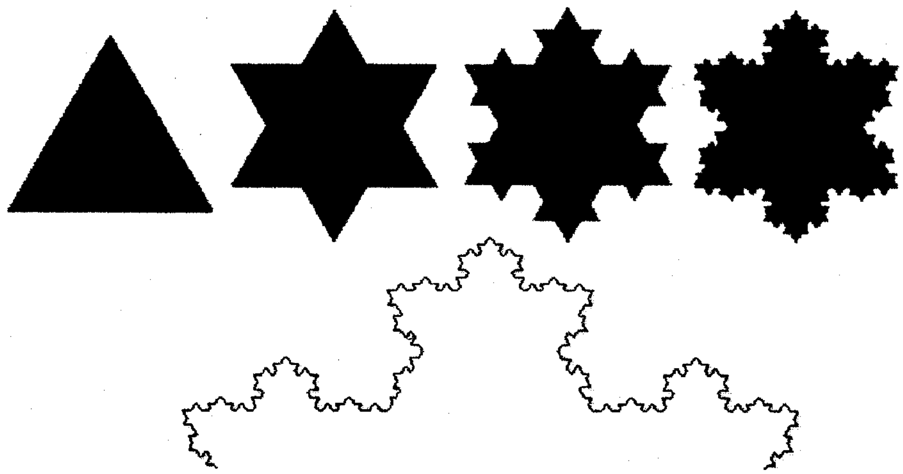


FIGURA 3. FRACTAL CAMPANILLA, COPO DE NIEVE O ISLA TRIADA DE KOCH

Se obtiene a partir de triángulos equiláteros que se repiten en figuras cada vez más pequeñas de triángulos, inicialmente intermedios y luego por todos los lados de manera progresiva. Las nuevas adiciones se hacen dividiendo los lados en tres partes iguales y colocando un nuevo triángulo en el tercio central. Cada nueva figura es más compleja, pero todos los triángulos que la forman son exactamente iguales al original. Los fractales se generan a través de iteraciones de un patrón geométrico. *(Fuente: Microsoft Corporation)*

El infinito detalle: Relacionada con la anterior característica, significa que, al ampliar un fractal, tanto más revela un detalle cuanto más se amplíe el fractus.

Dimensión no entera *o fractal.* La geometría clásica o elemental nos enseña que un punto aislado, o un número finito de puntos, constituyen una figura de dimensión cero. (0); que una recta, así como cualquier otra curva, constituye figuras de dimensión 1, que un plano, y cualquier otra superficie común, son figuras de dimensión 2; que un cubo tiene dimensión 3. Pero matemáticos como Hausdorff han añadido que para ciertas figuras ideales se puede decir que su dimensión no es un entero sino una fracción, como por ejemplo, ½, 3/2, 5/2, o más a menudo, un número irracional, tal como log 4/log3 = 1,2618, o incluso la solución de una ecuación complicada.

Al contrario de la geometría clásica, en la que las figuras tienen 1, 2, o 3 dimensiones, un fractal puede desarrollarse en una dimensión no entera, como por ejemplo; la curva de Koch, que lo hace en la dimensión 1,26; esto es, ocupa parte del plano pero no llega a tener la entidad de figura bi-dimensional. (figura 3)

Las fórmulas o algoritmos que las definen son relativamente *sencillos y* con un *conjunto muy reducido de datos. La algoritmia* es definida por una característica clave: *la iteración*. *Es* precisament*e el ordenador* lo que permite experimentar y descubrir nuevos conjuntos. Es imprescindible en cualquier campo que abarque los fractales.

1.4 EL LENGUAJE DE LOS FRACTALES.

Estas estructuras, de increíble detalle, son más que curiosidades matemáticas. La Geometría fractal describe, de forma concisa y apropiada, procesos y objetos complejos del entorno natural. (Investigación y ciencia, julio, 1997)

> ***"La geometría fractal cambiará a fondo su visión de las cosas. Seguir leyendo es peligroso. Se arriesga a perder definitivamente la imagen inofensiva que tiene de nubes, bosques, galaxias, hojas, plumas, flores, rocas, montañas, tapices y de muchas otras cosas. Jamás volverá a recuperar las interpretaciones de todos estos objetos que hasta ahora le eran tan familiares."***
>
> ***Michael Barnsley***

Mandelbrot, con su concepto de los fractales puso en marcha una nueva forma de pensar dentro de las matemáticas, las ciencias naturales y el arte. Una ola que por su amplitud, fuerza y creatividad extraordinaria, se ha convertido en un acontecimiento interdisciplinario de primer orden. La esencia del mensaje de Mandelbrot, es que muchas estructuras naturales por ejemplo: nubes, montañas, las líneas de las costas, las grietas tectónicas, los pequeñísimos capilares sanguíneos o las superficies de ruptura de materiales que aparentan tener una complejidad extraordinaria, poseen en realidad una misma regularidad geométrica: la denominada invarianza bajo escala. Esto significa que, si se analizan estas estructuras a distintas escalas, se encuentran una y otra vez, los mismos elementos básicos. Su interrelación a distintas escalas encuentra una descripción matemática apropiada mediante el concepto de dimensión fractal.

CURVA DE KOCH						HELECHO						HOJA					
a_{11}	a_{12}	a_{21}	a_{22}	b_1	b_2	a_{11}	a_{12}	a_{21}	a_{22}	b_1	b_2	a_{11}	a_{12}	a_{21}	a_{22}	b_1	b_2
0,33333	0,0	0,0	0,33333	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,17	0,0	0,0	0,64987	-0,013	0,013	0,64987	0,175	0,0
0,33333	0,0	0,0	0,33333	0,66666	0,0	0,84962	0,0255	-0,0255	0,84962	0,0	3,0	0,64948	-0,026	0,026	0,64948	0,165	0,325
0,16667	-0,28867	0,28867	0,16667	0,33333	0,0	-0,1554	0,235	0,19583	0,18648	0,0	1,2	0,3182	-0,3182	0,3182	0,3182	0,2	0,0
-0,16667	0,28867	0,28867	0,16667	0,66666	0,0	0,1554	-0,235	0,19583	0,18648	0,0	3,0	-0,3182	-0,3182	0,3182	0,3182	0,8	0,0

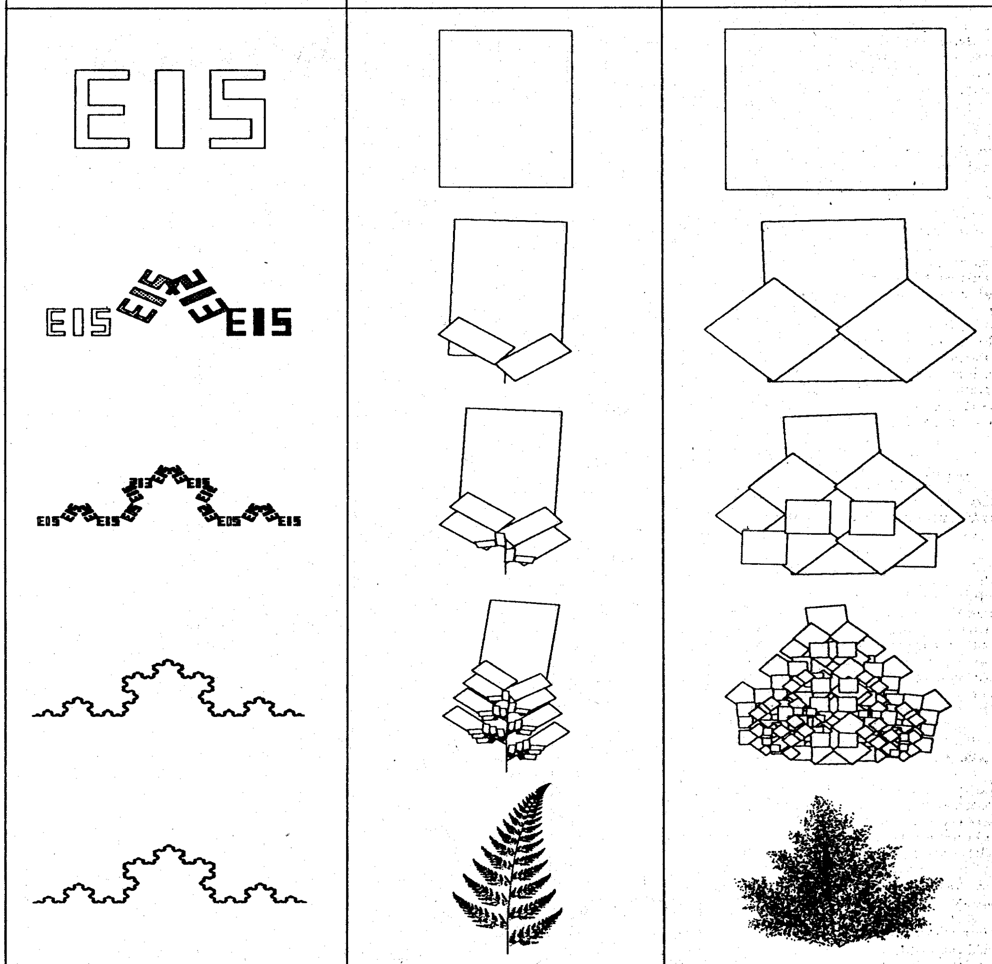


FIGURA 4. ALGUNOS ELEMENTOS DEL DIALECTO LINEAL: La curva copo de nieve de Koch, EL helecho de Michael Barnsley y una hoja de planta fanerógama. Las transformaciones afines correspondientes pueden representarse en la forma $f(x,y)=(a_{11}x + a_{12}y + b_1.\ a_{21}x + a_{22}y + b_2)$; **Los parámetros** a_{11} **y** b_1**, se indican en cada caso encima de la figura. De arriba abajo: figura original, 2 y 4 iteraciones y figura límite. (*Fuente: Investigación y Ciencia. Números 169 y 259de 1990)***

El significado de la invarianza bajo escala, tiene un notable paralelo en la teoría del caos, también de gran actualidad, que ha proporcionado a los investigadores de la naturaleza y a los matemáticos la extraordinaria sorpresa de que hay muchos fenómenos que, a pesar de ser rígidamente deterministas, no son básicamente predecibles. La relación entre ambas teorías no es casual y pone de manifiesto un parentesco mucho más profundo. (2)

La geometría fractal es, en primer término un nuevo lenguaje que se expresa por medio de algoritmos, es decir por medio de reglas e instrucciones de procedimiento, que requieren de la ayuda de un ordenador para convertirse en formas y estructuras. Una vez se domina el nuevo lenguaje, la descripción de una nube, una montaña, una roca por ejemplo se hace tan precisa y simple como lo sería, la de una casa mediante el plano de un arquitecto en el lenguaje de la geometría tradicional.

Para introducirse en la geometría fractal y empezar a abordar algunas de sus características fundamentales es muy ilustrativa y oportuna una metáfora lingüística. Mientras que las lenguas occidentales se escriben con la ayuda de un alfabeto finito, las lenguas orientales, como el chino, utilizan tal número de signos que bien podríamos decir que poseen infinitos elementos. En las lenguas occidentales hay que combinar las letras para formar palabras, que son las portadoras del significado. Por el contrario, los símbolos chinos ya son significativos por sí mismos, sin que sea preciso combinarlos para que lo adquieran.

De manera análoga a las lenguas occidentales, que poseen un alfabeto finito (por ejemplo: el latino), la geometría euclídea tradicional posee sólo contados elementos, como la línea recta, la circunferencia etc., con estos pocos elementos se construyen objetos más complejos, que ya pueden asimilarse a objetos reales, es decir, empieza a tener significado.

---

(2) Investigación y Ciencia., El Lenguaje de los Fractales. Volumen VI, número 4, 1997.

Por el contrario la geometría fractal correspondería a la familia de las lenguas orientales. Se compone de un número infinito de elementos radicalmente distintos de los euclídeos, la manera más simple de describirlos consiste en identificarlos con reglas de cálculo o algoritmos. (3) Tales algoritmos pueden considerarse directamente como las unidades significativas del lenguaje fractal que requiere de reglas e instrucciones de procedimiento y de la ayuda de un ordenador para convertirse en formas y estructuras.

La geometría fractal ha generado su propio lenguaje con representaciones mudas de enorme contenido visual. En realidad se trata de operaciones geométricas para rotar, trasladar, escalar y deformar cualquier figura a nuestro antojo.

Los fractales han revolucionado la tecnología de la generación y reproducción de imágenes. Hoy día no sólo se les utiliza para almacenar o trasmitir señales visuales, sino también para simular paisajes, así entonces se nos ofrece hojas fractales para un árbol fractal en un bosque, un planeta, una galaxia digna de la más refinada película de ciencia-ficción.(4)

1.4.1 EL DIALECTO LINEAL DEL LENGUAJE FRACTAL.

Hay dos grupos lingüísticos fractales básicos: el lineal y el no lineal. El dialecto más importante del lenguaje fractal es la ***geometría fractal lineal***. Es fácil de comprender y conduce de modo muy adecuado a las ideas fundamentales de las demás variantes. Como todos los dialectos fractales, se habla con un número infinito de algoritmos. Obsérvese en la figura 6 un ejemplo concreto de algoritmo recursivo.

---

(3) Investigación y Ciencia., FRACTALES., Volumen VI, Número 4., 1997.

(4) Vicente Talanquer. *Fractus, fracta, fractal.* México 1996

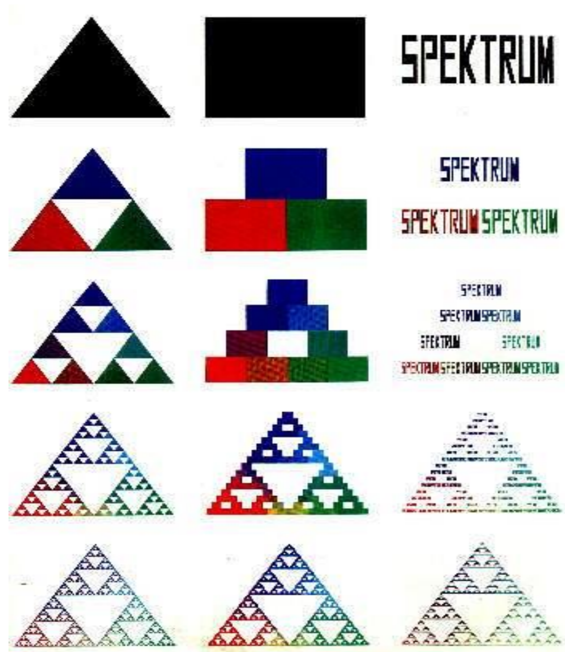


FIGURA 5. EL TRIANGULO DE SIERPINSKI (Fig. izquierda) muestra un ejemplo concreto de ALGORITMO RECURSIVO. La regla de "Copia reducida y multiplicada" vuelve a proporcionar al cabo de seis iteraciones una imagen que es prácticamente la misma. Cuadrados, triángulos y la palabra SPEKTRUM, respectivamente, pero la figura límite es siempre igual. ***Fuente: Investigación y Ciencia Volumen VI, número 4. 1997.***

A partir del dibujo original, (Un cuadrado, un triángulo) se obtiene en el primer paso, una configuración triple. Con ello se describe una regla referida a la "*copia reducida y multiplicada"*: colóquense tres reducciones a la mitad del original en los extremos de un triángulo equilátero. Si vuelve a hacerse uso de la misma regla, se obtiene una ordenación triangular de tres ordenaciones triangulares reducidas, y así sucesivamente. Al cabo de seis repeticiones o *iteraciones* se empieza a observar con claridad la figura que ilustra este ejemplo concreto. (El triángulo de Sierpinski) Se denominará *figura límite,* ya que se trata del valor frontera matemático (el límite) resultante de una sucesión infinita de repeticiones de la regla, sobre una determinada figura original. Este resultado que se debe a una idea del matemático Jhon E. Hutchinson, puede describirse y demostrarse de manera general y de modo bastante simple.

Las reducciones y desplazamientos (así como las rotaciones, reflexiones especulares, seccionamientos y sus combinaciones) se agrupan dentro la denominación común de *transformaciones lineales afines del plano.* Se caracterizan por el hecho de transformar rectas en rectas. A partir de *n* transformaciones de éste tipo ($f_{1, \ldots} \ldots f_n$) puede especificarse de manera unívoca una regla del dialecto fractal lineal.. El comportamiento límite garantiza que, con independencia de la figura original, cada vez se obtiene una figura límite y sólo una.

Una figura de aspecto tan complejo como el de una hoja de helecho queda descrita por completo gracias al algoritmo con tan solo 24 números. (Véase figura 5). Por el contrario, para representar punto a punto la figura de la misma hoja de helecho con calidad de pantalla de televisor, se precisan unos cuantos centenares de miles de valores numéricos. Así pues, cuando el objeto es el apropiado, su descripción mediante el dialecto de los fractales lineales, puede reducir extraordinariamente la cantidad de información que ha de almacenarse o transmitirse. En ello reside una posibilidad de utilización práctica de la geometría fractal. Por ejemplo, el tiempo, la complejidad y el costo requeridos para transmitir imágenes por satélite se reducirían drásticamente si se las codificase mediante algoritmos fractales. (5)

1.4.2 DIALECTOS FRACTALES NO LINEALES: Conjuntos de Julia y de Mandelbrot.

Los ***dialectos fractales no lineales*** van a estar representados por los conjuntos Julia y de Mandelbrot. Mientras que no hay más que un único dialecto lineal para estructuras complejas; el número de dialectos no lineales es infinitamente grande, sin embargo destaca uno de ellos, al tiempo que tiene una especial relevancia matemática. Se denomina ***dialecto cuadrático.*** Está estrechamente relacionado con la teoría del caos y sus elementos pueden obtenerse de una ecuación matemática.(véase figura 7)

---

(5) Investigación y Ciencia. Volumen VI. Número 4. 1997

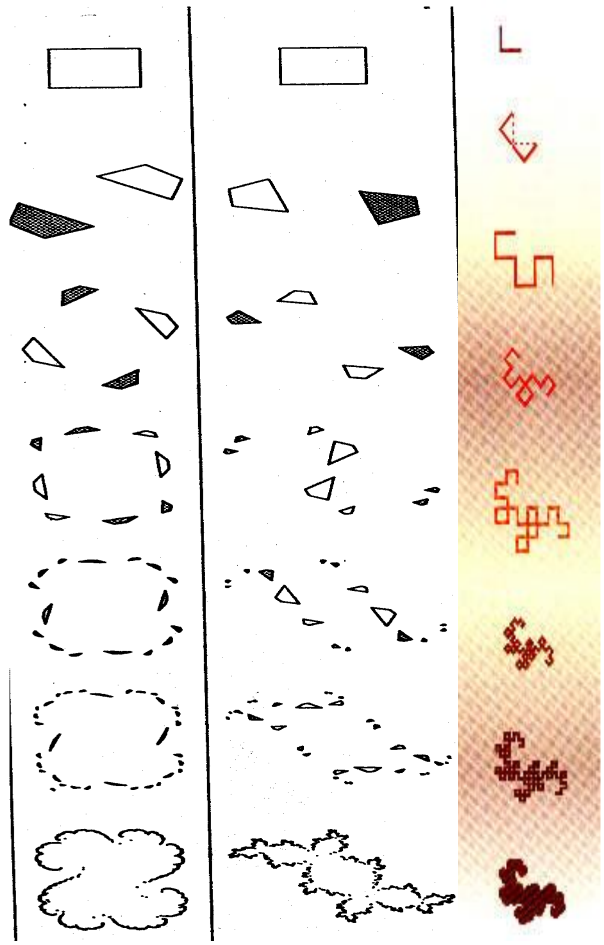


FIGURA 6. DIALECTOS FRACTALES NO LINEALES.
Figura original, quinta iteración y figura límite de tres elementos del dialecto cuadrático. Cada uno de ellos consta de un par de transformaciones del plano complejo y queda determinado por un parámetro complejo *c*. La ecuación no lineal de las transformaciones se observa por la deformación progresiva de la figura. Las figuras límite son conjuntos de Julia. ***Fuente: Investigación y Ciencia. Ns 169, 259/1990)***

1.4.2.1 LOS CONJUNTOS DE JULIA. Las raíces de la teoría matemática correspondiente se remontan a una obra maestra muy reputada en la actualidad del matemático francés Gastón Julia (1893–1978) quien la escribió en 1918 en un hospital de campaña, siendo herido de guerra. Pero sus trabajos, así como los contemporáneos de su mas duro contrincante, Pierre Fatou (1878–1929), se sumergieron pronto en el olvido y sólo han vuelto a ser populares tras la obra de Mandelbrot. Los logros intelectuales de Julia y de

Fatuo han de ser tanto más considerados cuanto no hay que olvidar que no disponían de ningún tipo de ordenador como medio para representar sus objetos, debiendo apoyarse exclusivamente en su capacidad imaginativa.

Julia y Fatuo se plantearon el problema de determinar que sucede con un punto *z* del plano complejo cuando se le aplica de forma repetida (iterativamente) la transformación $g\ (z) = z^2 + c$. El número complejo *c* es aquí un parámetro de control que podemos ajustar arbitrariamente. En casos sencillos al aplicar *g* iterativamente, sobre los puntos de un entorno del origen de coordenadas, éstos se concentran sobre un punto dado punto fijo de la aplicación *g* mientras que los puntos más alejados del origen se dispersan, dirigiéndose hacia el infinito. Cada uno de estos dos puntos constituye una región; en medio queda una frontera infinitamente delgada, que hoy se conoce con el nombre de ***Conjunto Julia.*** Al ir aplicando *g* iterativamente, los puntos de ambas regiones se van alejando del conjunto de Julia, hacia dentro o hacia fuera, respectivamente.

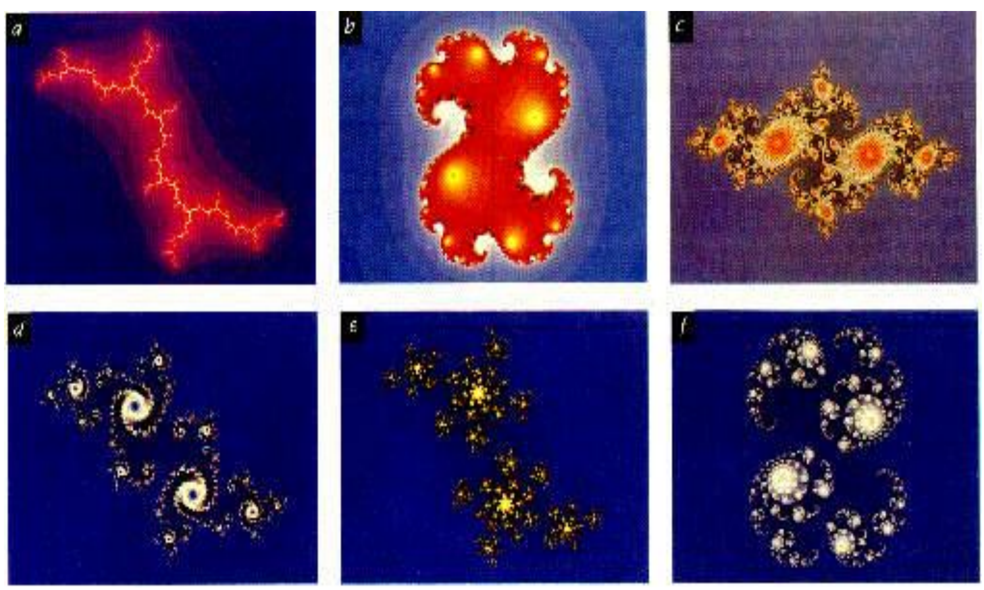


FIGURA 7. LOS CONJUNTOS DE JULIA. Son fronteras fractales resultantes de la iteración de la transformación cuadrática $z^2 + C$, adoptan una alucinante variedad de formas, dependientes exclusivamente del número complejo *C*, llamado parámetro de control. Determinados valores de *c* originan conjuntos de Julia de una pieza (Arriba) mientras que los resultantes de otros valores son disgregados y pulverulentos. (Abajo). (*Fuente: Investigación y ciencia. Números 169 y 259 de 1990.*)

Puede igualmente intentarse efectuar el proceso inverso al de huida de sus puntos, con lo que nos acercaríamos a él. Para ello tenemos a nuestra disposición una transformación que invierte exactamente el efecto de g (es decir, g^{-1}). Por efecto iterativo de esta transformación inversa, cualesquiera puntos arbitrariamente elegidos por dentro o por fuera del conjunto de Julia irán cayendo hacia el mismo. Esto es así, incluso en el caso general en que el conjunto de Julia no sea una línea divisoria entre dos regiones cuyos puntos se distinguen por tener comportamientos distintos bajo iteración. En ello se fundamenta el llamado método de iteraciones inversas (MII) que constituye el dialecto cuadrático de nuestro lenguaje fractal.

La inversión de $g(z) = z^2 + c$ esta formada por dos aplicaciones:

$f_1(u) = +\sqrt{u - c}$ y $f_2(u) = -\sqrt{u - c}$ (ya que para los números complejos como para los reales positivos, existen dos raíces cuadradas con signos opuestos). (6)

A estas transformaciones no lineales debe aplicarse la regla de "copia *reducida y multiplicada"* La figura 6 muestra su actuación para tres valores distintos del parámetro c. A consecuencia de la no linealidad, en general, las líneas rectas se transforman en líneas curvas. A partir de la figura inicial, obtenemos primero dos figuras más pequeñas, luego cuatro, luego ocho, hasta que poco a poco la figura límite va tomando forma. Como en el lenguaje lineal, la figura límite no depende de la inicial, queda completamente determinada por f_1, f_2 y el parámetro c.

Hasta aquí, se ha aplicado dos dialectos del lenguaje fractal: lineal, uno de ellos, cuadrático, el otro. Se plantea entonces una de las cuestiones más difíciles y, al mismo tiempo más fascinantes de la geometría fractal que con rigor matemático se plantea así: ¿Existe un principio de ordenación de la clase infinita de los conjuntos de Julia? La respuesta nos conduce a uno de los descubrimientos más bellos de la matemática experimental. La idea de la solución se basa en el hecho, ya conocido por Julia y Fatuo, de que, para todo parámetro de control c, la figura resultante corresponde necesariamente a uno de los casos

---

(6)Investigación y Ciencia. Juegos de ordenador. Octubre 1985, Enero 1988, Mayo y Septiembre 1989.

siguientes: (a) El conjunto de Julia es conexo, es decir de una sola pieza; (b) el conjunto de Julia es completamente disconexo, como una nube de polvo formada por infinitos puntos. (Denominado conjunto de Cantor).

1.4.2.2. EL CONJUNTO DE MANDELBROT. Se define como el conjunto de todos los puntos c del plano complejo que dan origen a un conjunto de Julia conexo. Es decir, que para obtener una grafica por ordenador del conjunto de Mandelbrot, lo que hay que hacer es, marcar un punto negro en el plano complejo, para cada valor de c que origine un conjunto de Julia conexo.

Cada una de las partes del Conjunto de Mandelbrot, caracteriza una familia de conjuntos de Julia afines. Por ejemplo, el cuerpo principal central, en forma de corazón del conjunto de Mandelbrot, caracteriza a ulteriores conjuntos de Julia, que aparecen como círculos ligeramente deformados (y algunos fuertemente retorcidos). Aunque el conjunto de Mandelbrot no es exactamente sibisimilar como lo eran los helechos y el triángulo de Sierpinski que hemos mostrado antes, en la figura 8 comparte con ellos una propiedad análoga: con una ampliación suficiente, es posible descubrir en su frontera infinidad de minúsculas copias del propio conjunto.

La propiedad sin duda más fascinante del conjunto de Mandelbrot, es que puede considerársele un almacén infinitamente eficaz de figuras. Ello se debe a que el conjunto de Mandelbrot no sólo clasifica a los conjuntos de Julia conexos y disconexos, sino que además es un índice grafico directo de una infinidad de conjuntos de Julia distintos.

La trascripción del dialecto de los fractales, el tránsito de las fórmulas a las imágenes, requiere muchas veces de ayuda computacional. Los procedimientos a seguir son sencillos y los resultados obtenidos pagan con creces el esfuerzo que conllevan. Los fractales parecen encontrarse en esa frontera difusa que existe en el mundo entre el caos y el orden; están ahí donde la imaginación apenas llega lo que nos permite intuir su estrecha relación con el arte. Es como aprender a concebir la realidad de otra forma.

1.4.3. FRACTALES ALEATORIOS.

Todos los fractales comentados hasta ahora pueden ser considerados deterministas, dado que el azar no desempeña ningún papel en su construcción. Incluso los fractales que aparecen el juego del caos son también deterministas. La elección aleatoria de la reducción utilizada es cuestión auxiliar diseñada para hacer lo más eficaz posible la formación de la figura. La figura límite en sí, es totalmente independiente de la elección de las probabilidades utilizadas. En los denominados *fractales aleatorios*; la situación es distinta.

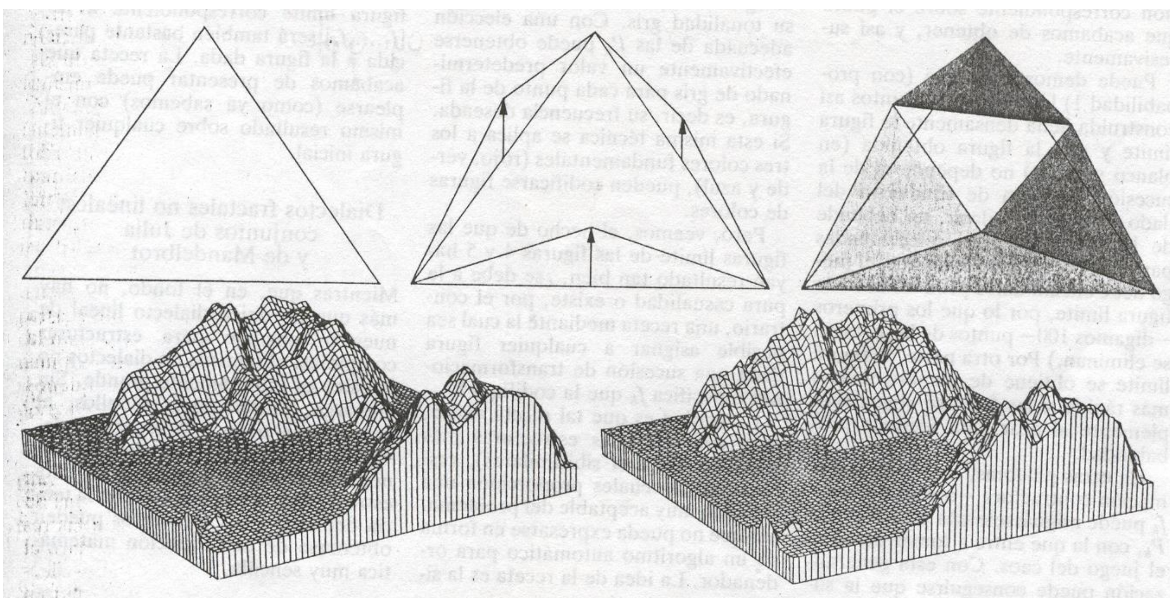


FIGURA 8. FRACTALES ALEATORIOS. Construidos mediante desplazamientos de puntos medios. En la figura, los puntos medios de los lados de un triángulo se desplazan perpendicularmente al plano del triángulo, hacia arriba o hacia abajo. Para fijar la magnitud de estos desplazamientos pueden prescribirse normas diversas, dependiendo del aspecto global de la superficie a modelar, cuya forma se aprecia en el diagrama obtenido mediante ordenador. (*Fuente:Investigación y Ciencia Ns.169,259 1990.)*

Se ilustra a modo de ejemplo en la figura 8, una construcción representativa de un conjunto mucho mayor. Se empieza con un triángulo dibujado en un plano horizontal y se marcan los puntos medios de sus lados. Se trazan rectas perpendiculares al plano por dichos puntos y se marca aleatoriamente, hacia arriba o hacia abajo, un punto arbitrario sobre cada una de ellas. Con el punto así obtenido, en cada lado se forman, uniéndolo con los dos puntos extremos de los lados del triángulo inicial, tres triángulos, sobre cada uno de los cuales se efectúa ahora la misma transformación. Y así sucesivamente.

Con éste método de desplazamiento del punto medio, las magnitudes de elevación o depresión resultan de una ley de distribución que se ajusta de manera que, la figura límite del fractal se aproxime adecuadamente a la superficie a modelar.

Hay muchas variaciones de este principio. Desde que se descubrió se ha aplicado, entre otras cosas, a la búsqueda de leyes y modelos de la erosión de las montañas o para investigar el movimiento de fallas tectónicas en relación con datos sísmicos

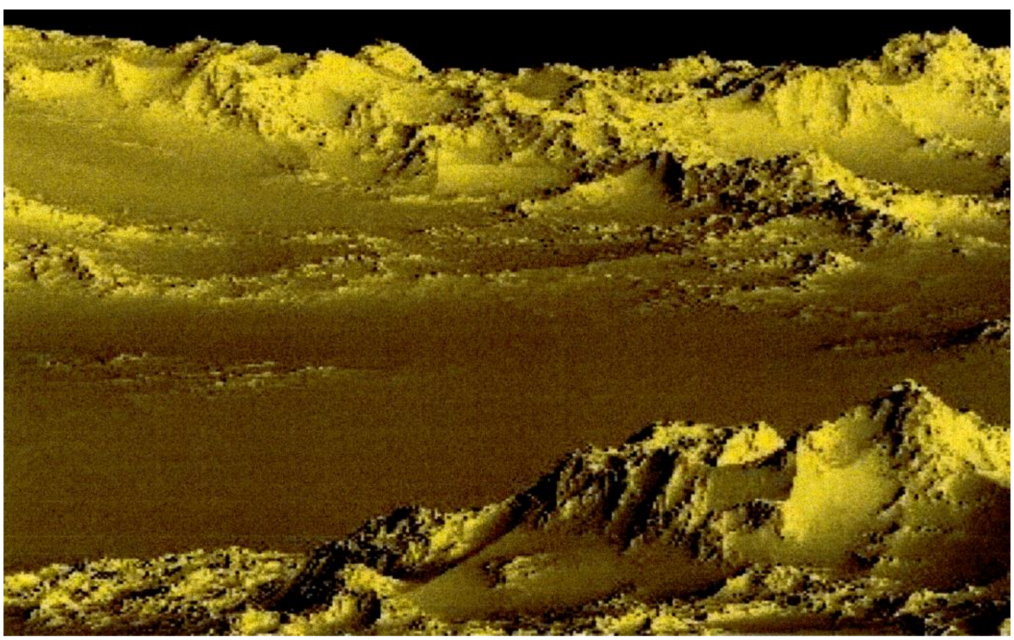


FIGURA 9. FRACTAL ALEATORIO.

Ciertas categorías de fractal no encajan dentro de las de los dialectos lineales y no lineales, dependen en cierta medida del azar. En estos, la figura límite en sí, es totalmente independiente de la elección de las probabilidades utilizadas y el propósito es modelar la forma de la superficie. Tiene aplicación en la búsqueda de leyes y modelos de la erosión de montañas o el movimiento de fallas tectónicas en relación con datos sísmicos. (*Fuente: Investigación y Ciencia. Números 169 y 259 de 1990.*

1.5 TIPOS DE FRACTALES

1.5.1 Fractal de Mandelbrot o algoritmos de escape.

1.5.2 Fractal tipo Julia.

1.5.3 El helecho de Michael Barnsley o Sistema de funciones iteradas. (IFS)

1.5.4 Fractales de Koch. (Copo de nieve)

1.5.5 Sistema de órbitas caóticas de Lorenz.

1.5.6 Fractales aleatorios y celulares.

1.5.7 El Triángulo de Sierpinski.

1.5.1 FRACTALES DE MANDELBROT O ALGORITMOS DE ESCAPE.

Para generar este tipo de fractal, Mandelbrot hizo aplicación de un teorema probado de manera independiente por Julia y Fatou alrededor de 1919. Las implicaciones del teorema son sorprendentes, basta aplicar la iteración en un solo punto, el Zo = (0,0) para determinar la naturaleza del conjunto de Julia que se obtendrá cuando la iteración se aplique a todo el plano complejo.

Al aplicar la propiedad de la iteración cuadrática y localizar los valores de la constante c que dan lugar a conjuntos de Julia conexos, encontró que esta colección de valores de c, que en su honor tiene el nombre de conjunto de Mandelbrot, también tenía una estructura sorprendente cuando se representaba en el plano complejo (La representación gráfica de este conjunto y sus detalles se ilustra mejor por medio de la computadora).

Hay dos maneras de describir la estructura geométrica del conjunto de Mandelbrot (véase figura 2); una informal que se refiere a él como la representación de un muñeco de nieve recostado y completamente infestado de granos; la otra más purista, que considera que el cuerpo principal puede pensarse como *una forma cardioide (de corazón) tangente a un disco circular de menor extensión* de los cuales brotan una infinidad de estructuras que se ajustan a la primera descripción. Es difícil decir que se trata de una figura cuya frontera es endiabladamente complicada, pues a toda escala aparecen formas geométricas semejantes a la original, conectada a través de filamentos que siguen patrones muy poco regulares y aunque a simple vista aparezca estar salpicado de puntos aislados puede demostrarse que el conjunto total es conexo (de una sola pieza) ya que siempre puede hallarse a cierta escala un filamento que cubra la ruta entre dos puntos aparentemente separados.

El conjunto de Mandelbrot describe el fractal con las características que hasta ahora hemos mencionado: Y así por ejemplo; la ampliación de un detalle de su frontera da lugar a una forma muy similar a la del conjunto completo y tal parece que esto se repetirá a cualquier escala.

El conjunto de Mandelbrot se forma mediante un *NUMERO COMPLEJO* (a + bi, A y B son números reales; i = unidad imaginaria) que se dice especial. Entonces tenemos un número Z = a+bi, el cual se lo somete a una prueba matemática, para ello tomamos el número Z y lo elevamos al cuadrado, sumándoselo después al mismo Z; luego tomamos ese resultado y lo elevamos nuevamente al cuadrado, sumándoselo a Z y así infinitamente

Los detalles de la estructura del contorno del conjunto de Mandelbrot se hacen más evidentes cuando se utilizan colores para distinguir las características de la órbita de iteración que le corresponde a cada valor de la constante c. Al hacerlo se producen imágenes de enorme belleza (véanse las figuras 10, 11, 12, 13) dignas de incluirse dentro de las OBRAS DE ARTE y hay quienes afirman que tienen poderes relajantes sobre quién las observa con detenimiento.

La creación de un universo extraordinario, fantástico, de gran imaginación, con un alto ingrediente de creatividad, poblado de hipocampos, dragones, hombres de nieve, flores y caracoles de extrema complejidad y diseño no es una particularidad única de la iteración cuadrática que hemos estudiado. Existen numerosos casos de relaciones matemáticas que son capaces de construir su propio mundo fractal (Peitgen 1986). El análisis y clasificación del zoológico de sus formas ha mostrado a los seres humanos una nueva forma de generar almacenar y transcribir información.

IMÁGENES ESPECTACULARES GENERADAS POR ALGORITMOS

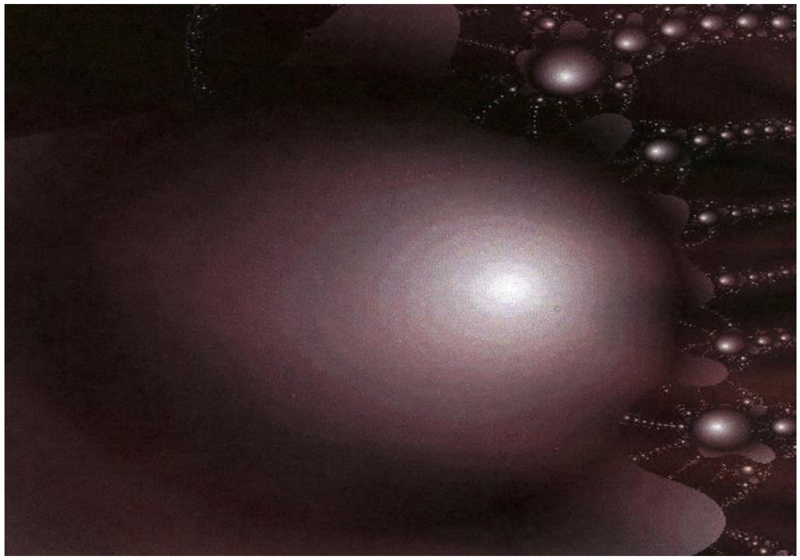


FIGURA 10. PEARL

MANUEL PONCE HOME. ***Fuente: Today´s Fractals. Febrero de 2001.***

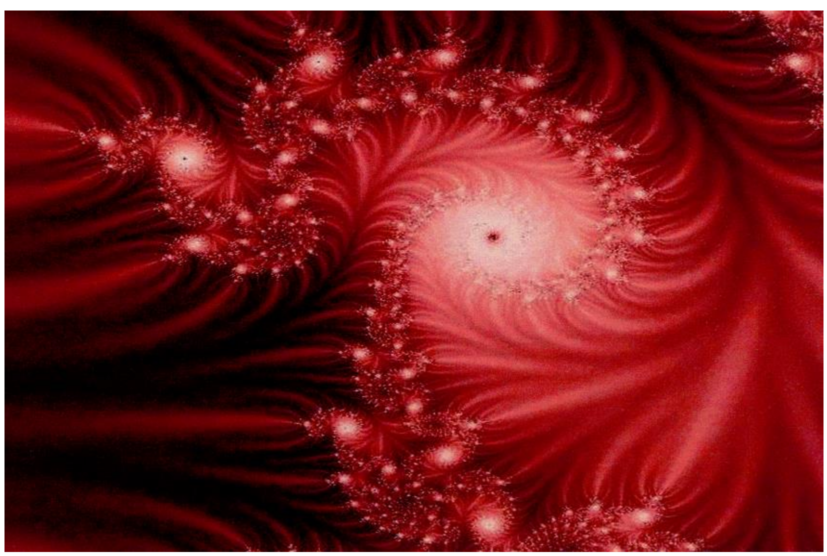


FIGURA 11. SMOOTH

JUAN PABLO BREAÑA. MEXICO 2000

IMÁGENES ESPECTACULARES GENERADAS POR ALGORITMOS

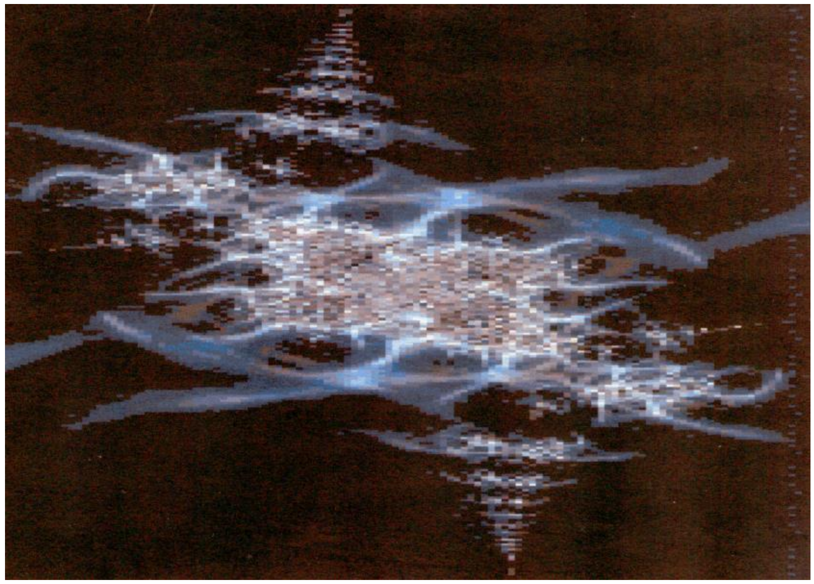


FIGURA 12. FANTASIA.
MARTINEZ ROCA (*Fuente: Galería de arte fractal. Enero de 2001)*

FIGURA 13. TORMENTA

JUAN PABLO BREAÑA. MEXICO FEBRERO DE 2000

El juego con iteraciones de números complejos es un mecanismo sencillo para generar estructuras altamente organizadas, utilizando una sola clave. Ilustra con mucha claridad como la presencia de una estructura compleja, no necesariamente implica un mecanismo de formación igualmente complicado. Esto hace pensar que, para nuestra sorpresa, la gran similitud con el comportamiento de la naturaleza, en el que la lectura de un solo código puebla nuestro mundo de formas diversas, puede ser algo más que simple coincidencia.

El fractal de Mandelbrot se genera mediante *un algoritmo de escape.* Para cada punto *se* calculan una serie de valores mediante la repetición de una fórmula hasta que se cumple una condición, momento en el cual se asigna al punto un color relacionado con el número de repeticiones. Los fractales de este tipo precisan de millones de operaciones, por lo cual sólo pueden dibujarse con la ayuda del ordenador.

Una característica especial del fractal de Mandelbrot (y de otros tipos afines), es la de generar un infinito conjunto de fractales, ya que por cada punto se puede generar un fractal tipo Julia, que no es sino una ligera modificación en la fórmula del Mandelbrot.

1.5.2 FRACTALES TIPO JULIA. (Véase figura 7)

El fractal tipo Julia no es sino una ligeras modificación en la fórmula de Mandelbrot.
El trabajo pionero en el juego de hacer iteraciones con los números complejos fue desarrollado por dos matemáticos franceses Gastón Julia y Pierre Fatou, a principios de nuestro siglo. Mandelbrot recuperó su análisis sobre el comportamiento de los números complejos cuando la iteración consiste en elevarlos al cuadrado y sumar una constante al resultado. Simbólicamente sería: $Z_{n+1} = Z^2 + c$, donde *c* es la constante y también un número complejo.

Esta iteración dice simplemente: toma un número y elévalo al cuadrado, súmale la constante C que elegiste y repite lo mismo una y otra vez sobre sus resultados. Las órbitas que ahora se generan son secuencias de números complejos y sus características dependen fundamentalmente de los valores del punto inicial Zo del que se parte y la constante c seleccionada. Por ejemplo:

Si el punto inicial es z_o = (1,0) y la constante c = (0,1), al hacer la iteración tenemos:

$Z_1 = Z^2_o + c$ = (1,0) (1,0) + (0,1) = (1,1)

Y asi seguir hasta detectar la naturaleza del atractor

La increíble belleza de la representación gráfica de los Conjuntos Julia fue puesta en evidencia hace no más de 15 años por J.H. Hubbard quién para hacerlo se sirvió de los adelantos computacionales del momento, pues son formas con infinito detalle.

1.5.3 EL HELECHO DE MICHAEL BARNESLEY O SISTEMA DE FUNCIONES ITERADAS (IFS).

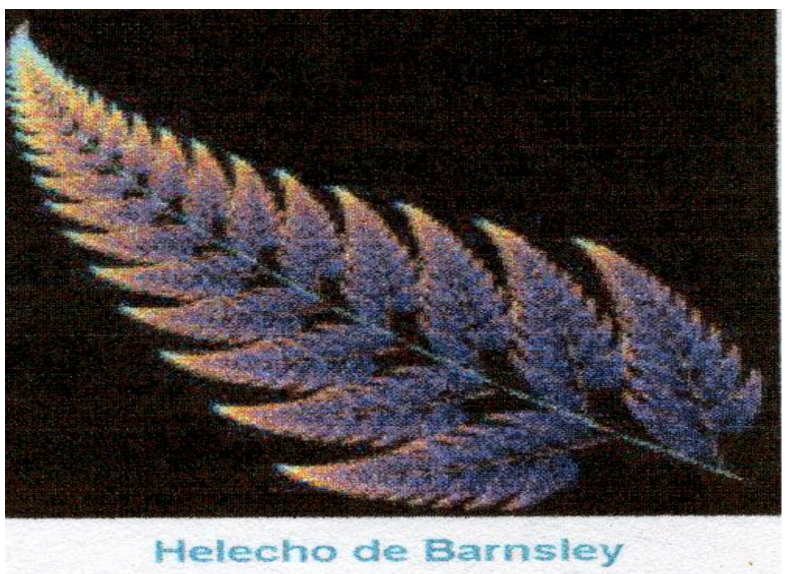


FIGURA 14. HELECHO DE BARNSLEY. Ilustra el principio de autosemejanza. Cualquier hoja es una réplica exacta de la hoja completa.(*Fuente:* *http://www.arrakis.es/sysifus/tipos.htm 2000*)

Es un método que se fundamenta en el principio de AUTOSEMEJANZA. En un fractal IFS siempre se puede encontrar una parte de la figura que guarda una relación de semejanza con la figura completa, relación que a menudo se vuelve muy difícil de apreciar, pero en el caso del helecho es bastante clara, pues cualquier hoja es una réplica exacta de la figura completa.(véase figura 14) Obsérvese que el helecho completo mantiene una apariencia similar en cada una de sus hojas, cada hoja con sus sub-hojas y así sucesivamente mantienen un patrón claramente definido.

En 1987 este matemático inglés descubrió lo que hoy se conoce como *la transformación fractal* capaz de detectar fractales en fotografías digitalizadas, este descubrimiento dió lugar a *la comprensión fractal de imágenes,* utilizada en multimedia y otras aplicaciones que tienen como base la imagen.

1.5.3.1 COMPRESIÓN FRACTAL DE IMÁGENES.

Como aplicación bien interesante de los fractales en el mundo de las imágenes digitales, Barnsley fundador de la empresa Iterated Systems junto con Alan Sloan, descubrió que era posible controlar el contenido de una imagen fractal de forma precisa y hacerla parecer increíblemente similar a una imagen del mundo real. Un ejemplo temprano de aproximación a una imagen real basado en fractales lo constituye el clásico helecho fractal.

La generación de la figura del helecho proviene en su base de, un simple sistema de ecuaciones que opera en el plano a través de rotaciones, traslaciones y escalados; se trata de la *transformación afín* y constituye parte fundamental de la compresión fractal.

La *compresión fractal* se basa en un tipo concreto de transformación afín: las transformaciones afines *contractivas* se caracterizan porque su resultado en el plano euclídeo es más pequeño que la imagen a la que se le aplicó la transformación afín.
El mapa de afinidad converge a *un punto fijo***.** Este fenómeno sucede con todas las transformaciones afines contractivas, y el punto o puntos fijos reciben el nombre de *atractor*. El atractor independientemente de la imagen de origen es siempre el mismo.

Un grupo de transformaciones afines contractivas que actúan en conjunto sobre el plano constituye los llamados *Sistemas de función iterada o IFS.* En los IFS sucede lo mismo que con una transformación afín y su atractor. Cualquier imagen a la que se aplique el IFS, conduce siempre a una misma figura o atractor.

1.5.4 FRACTALES DE KOCH. (COPO DE NIEVE O ISLA TRIADA DE KOCH.)

La curva de Koch fue inventada en 1906 por Helge Von Koch matemática sueca (1870-1924) se construye a partir de un segmento que se divide en tres y el tercio central se reemplaza por un triángulo equilátero sin base y constituyéndose ésta en la figura inicial. Luego, cada uno de los cuatro segmentos se reemplaza por la figura anterior contraída y así sucesivamente. (Véase figura 3). Se observa como la figura esta contenida en un área finita (4 segmentos), pero su longitud es infinita. (Triángulo sobre triángulo hasta el límite de la imaginación) La curva así construida resulta indibujable y colapsaría la computadora, pues la forma del contorno se repite a todos los niveles. Cada punto sobre ella, si lo exploraremos con una lupa, nos revelaría los mismos secretos; triángulo sobre triángulo, indefinidamente.

El fundamento de este tipo de fractal es la *AUTOSIMILITUD*, pues cada una de sus partes es igual al total es decir, su apariencia es la misma a cualquier escala y desde el punto de vista matemático poseen ciertas propiedades peculiares que las distinguen.

La curva es generada en un proceso de repetición que añade mas y mas detalle a cada paso, extendiendo su longitud sin límite alguno; si la estiráramos generaríamos con ella una recta de longitud infinita.; pensemos que siempre habrá un pico que desdoblar y dentro de éste otro, y luego otro y otro y así sucesivamente sin límite alguno.. El resultado es fascinante y sorprendente; nos encontramos con un objeto que a pesar de estar definido sobre una región finita de espacio (el primer triángulo) posee una frontera de extensión ilimitada.

Establecer la dimensión de un “monstruo” matemático como éste con una longitud infinita obligó al matemático alemán Felix Hausdorff a introducir el concepto de *dimensión fractal* en 1919 que hoy se conoce y lo caracteriza.

1.5.5 SISTEMA DE ÓRBITAS CAÓTICAS DE LORENZ.

(Figura 15) En el sistema solar, se supone que los planetas describen órbitas elípticas. Como en todo, eso es cierto sólo hasta cierto nivel. El atractor de Lorenz se consigue llevando esa incertidumbre hasta el extremo. La representación bidimensional y coloreada de la figura nos muestra que esta formada básicamente por un hilo infinitamente largo que va describiendo una trayectoria tridimensional acercándose y alejándose de dos puntos de atracción. Este tipo de modelo nació con un estudio sobre órbitas caóticas desarrollado por E. Lorenz en 1963.

FIGURA 15. EL ATRACTOR DE LORENZ. Representación bidimensional y coloreada que va describiendo una trayectoria tridimensional, acercándose y alejándose de dos puntos de atracción. (*Fuente*: *http://www.arrakis.es/~sysifus/tipos.htm*)

1.5.6 FRACTALES ALEATORIOS Y CELULARES.

(Véase figura 16) Ciertas categorías de fractal no encajan del todo dentro de las características que hemos descrito. Estructuras como el plasma y las imágenes de difusión dependen en cierta medida del azar, por lo cual son únicas e irrepetibles.

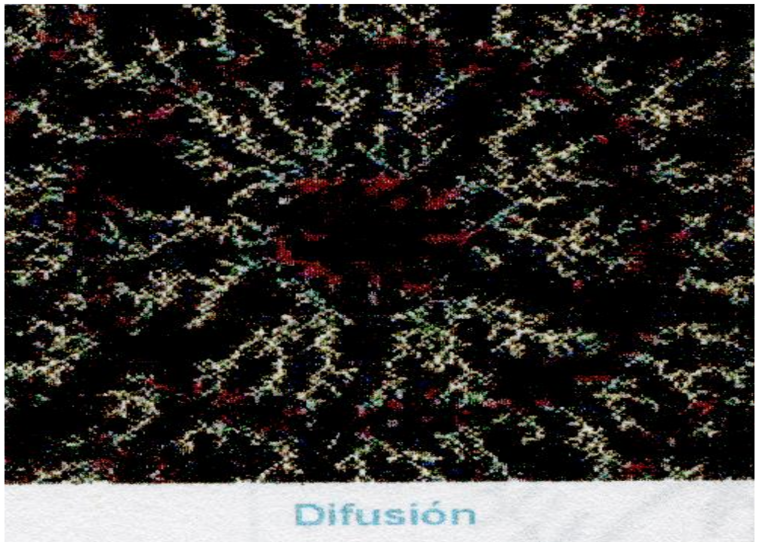


FIGURA 16. FRACTALES ALEATORIOS Y CELULARES. Las imágenes de difusión o estructuras como el plasma dependen del azar, por lo cual son únicas e irrepetibles. (*Fuente: http://www.arrakis.es/-sisyfus/tipos.htm)*

Los autómatas celulares están en el otro extremo. Funcionan con sencillas reglas que colorean zonas a partir del color de las adyacentes. Pese a que en principio pueda parecer que las imágenes conseguidas con este método vayan a ser sencillas y simétricas, no tiene por qué ser así.

1.5.7 EL TRIANGULO DE SIERPINSKI.

Hacia el año 1915, Waclaw Sierpinski (1862-1969) concibió su archiconocido fractal (Véase figura 5) partiendo de un triángulo (no tiene que ser equilátero) dibujamos otro uniendo los puntos medios de sus lados. La figura resultante contiene cuatro triángulos semejantes al anterior, pero sólo tres comparten su orientación.

Ese cuarto triángulo no pertenece a la curva, y este detalle desencadena propiedades sorprendentes. En la siguiente iteración repetimos el mismo esquema con los tres triángulos aludidos y así sucesivamente. No es difícil observar que el área definida va decreciendo con arreglo a la sucesión (en el caso de un triángulo equilátero de área 1): 1, ¾, 9/16, 27/64, 81/256…, A=(3/4)*. * es K. Por tanto, el área total del triángulo de Sierpinski es nula (obviamente tras infinitas iteraciones) Por otra parte, el perímetro de todos los triángulos generados sí es infinito. Siendo 1 la longitud del lado del primer triángulo, el perímetro total crece así: 3, 9/2, 27/4, 81/8, 243/16… … … …, P= 3x(3*)/(2*). donde * es K.

La trascripción del dialecto de los fractales, el tránsito de las formulas a las imágenes requieren la mayoría de las veces, ayuda del computador. Los procedimientos a seguir son sencillos y los resultados obtenidos pagan con creces el esfuerzo que conllevan.

Los fractales parecen encontrarse en esa frontera difusa que existe en el mundo entre el caos y el orden; están ahí donde la imaginación apenas llega, lo que nos permite intuir su estrecha relación con el arte. Es como aprender a concebir la realidad de otra forma.

"…Después de todo, cada movimiento de la vida humana se ve afectado
por la forma y el color.
Todo lo que vemos, tocamos, pensamos y sentimos se encuentra conectado con ello
de manera que, cuando un artista puede utilizar estos elementos libre y creativamente,
puede convertirse en una influencia tremendamente potente en nuestras vidas…"

Ben Nicholson.

1.6 NATURALEZA, CAOS Y ARTE FRACTAL.

El mundo natural esta constituido por montañas, costas, mares, nubes, plantas, animales etc. Se trata sin duda alguna del reino de las formas, que más que el reflejo de un mundo sencillo y ordenado, parece ser el dominio de la irregularidad y el caos.

Cuerpos amorfos desde rocas hasta planetas, galaxias; flujos turbulentos desde ríos a tornados, patrones asimétricos que sobrepasan con mucho el número de cuerpos regulares. Azar y desorden en un universo aparentemente estructurado. Sin embargo, en este mar de caos, una observación más cuidadosa de la naturaleza nos permite apreciar que aún dentro de su enorme complejidad existen ciertos patrones que la caracterizan.

Una roca es similar a la montaña de la que forma parte; una rama tiene la misma estructura que la del tronco del que nace; como si la decisión hubiera sido repetir la misma forma a diferentes escalas dentro de un mismo objeto, asegurando la preservación de una copia del original a cualquier nivel de amplificación.

Un helecho *cuerno de ciervo*, un brócoli o una coliflor (véanse figuras 17, 18, 19) son ejemplos vivos de este juego de la naturaleza en el que el mismo patrón de crecimiento se manifiesta a diferentes escalas y aunque es verdad que la realidad pone límites a la imaginación, nada nos impide especular sobre las propiedades de helechos “imaginarios” que aún a escala microscópica exhiban características geométricas semejantes a las de la planta completa. Objetos que en sus detalles se repiten a sí mismos, siguiendo una idea semejante a la plasmada en las famosas muñecas de los artesanos rusos.(Figura 20) Entidades denominadas autosimilares o autosemejantes, pues cada una de sus partes es igual al total, (su apariencia es la misma a cualquier escala) y desde el punto de vista matemático poseen ciertas propiedades peculiares que las distinguen.

NATURALEZA FRACTAL

FIGURA 17. BROCOLI 1.
Diferentes secciones del Brócoli tienen una estructura muy similar a la de la cabeza completa.
(Fuente: Fotografías Francisco A. Rivera. Popayán. Colombia. 2002)

FIGURA 18. BROCOLI 2.

(*Fuente: Fotografías Francisco A. Rivera. Popayán, Cauca, Colombia. 2002)*

NATURALEZA FRACTAL

FIGURA 19. COLIFLOR

Las diferentes partes de la coliflor tienen una estructura muy similar a la de la cabeza completa.
(*Fuente: Fotografías Francisco A. Rivera. Popayán. 2002)*

FIGURA 20. JUEGO DE MUÑECAS DE LOS ARTESANOS RUSOS.

(*Fuente: Fotografías, Francisco A. Rivera. Popayán .Colombia. 2002)*

El caos y los fractales están íntimamente relacionados. Tanto, que se afirma que los fractales constituyen el lenguaje del caos. Una aplicación bien interesante que se hace del tema es, el referente a la corrupción. Ese candente problema de la economía colombiana. Veamos de qué forma se aplica.

Afirma Ismael Roldan Castro, un estudioso del tema de la Universidad de Sevilla, España; que alguna relación deberá tener la corrupción con el caos cuando suscita tantos temores en los corruptos, así como interés exacerbado en quienes lo detestan. Es cierto además que, en ocasiones y en algunos países provoca efectos demoledores. Si se piensa en la corrupción como si de un fractal se tratase, habría que considerarla como una realidad omnipresente a escala.

El fraude frecuente y voluntario a la administración Pública o al Estado, el trabajo no productivo, el uso indebido de los recursos públicos, como el uso indebido del teléfono en los establecimientos del Estado, las comisiones ilegales, el enriquecimiento por la información privilegiada, los negocios fraudulentos, los privilegios en razón del cargo público, la falsificación de documentos, los mensajes subliminales de la publicidad, el soborno, la extorsión, el peculado, en fin, todos aquellos delitos llamados de "cuello blanco" tan de moda en nuestro país, constituirían diferentes texturas fractálicas de la corrupción, generándose entonces una insólita realidad multifractal, que es lo que tenemos, aunque sólo podamos intuirla.

Los fractales constituyen los soportes algorítmicos de las más diversas ayudas de representación de la realidad.

La luz nos permite ver los objetos que nos rodean, más tan sólo ciertos matices de la realidad: el color, la textura, el movimiento, etc. Por ello, lo real nos es incognoscible. Lo que vemos es una representación de lo real. No ven nuestros ojos, ve nuestro cerebro. Si el ser humano dispusiera de algún censor fisiológico que le permitiese percibir la caótica red de ondas electromagnéticas que le rodean, el espectáculo multicolor nos maravillaría.

Se ofrecen en la actualidad una extensa gama de programas informáticos que utilizan los fractales para generar todo tipo de imágenes: paisajes, árboles, nubes, texturas, etc. El ordenador, auxiliado con la potencia de los fractales, se ha convertido de ésta manera en auténtico estudio de pintura y en revolucionario manipulador de imágenes fotográficas y de vídeo, consiguiéndose sorprendentes efectos especiales en las transiciones de imágenes.

Desde que Benoit Mandelbrot descubrió el primer fractal, que lleva su nombre, se ha especulado mucho acerca de su presencia en los más diversos campos de la ciencia y el arte. Existen investigadores que encuentran estructuras con autosimilitud, en ciertas composiciones poéticas, los hay también que utilizan los fractales en composiciones musicales, y quienes aseguran como Leonard Bernstein que existe autosemejanza en las variaciones recurrentes presentes en toda estructura musical. Teddy Bautista, pionero del rock español, trabaja con los fractales en un intento por crear un universo donde el orden y el caos fluyan en equilibrio. (Roldan Castro, I. Fractales, corrupción y arte. España, 2000)

Vivimos en el caos, realmente lo asumimos inconscientemente mientras tratamos de ordenar, catalogar y adivinar el entorno, sus elementos y acontecimientos. Es paradójico que un fenómeno tan complejo como el sistema solar tenga un comportamiento más predecible que una hoja de papel que se cae de nuestra mesa.

De ahí el término cosmos que significa orden. Pero cuán desordenado resulta el orden cuando se observa con la precisión adecuada. Mientras tanto llamamos caos a todo aquello que no somos capaces de sistematizar. Por eso la palabra en cuestión aparece frecuentemente ligada a fenómenos tan “incontrolables” como el tráfico de una gran ciudad o el funcionamiento de ciertos establecimientos del Estado.

Los hormigueros, las selvas tropicales, el cerebro comparten un rasgo común: son sistemas complejos, alejados del equilibrio y dotados de propiedades que los sitúan a medio camino entre el orden y el desorden. Veamos como ocurre este fenómeno.

La física nos demuestra que podemos construir una imagen coherente del universo partiendo de principios básicos y a menudo muy simples; se trata de leyes deterministas en las que dadas ciertas condiciones iniciales, por ejemplo: posición y velocidad para el caso de un cometa, el futuro del sistema quedaba definido. Determinismo y predicción resultan conceptos indisociables. Este determinismo newtoniano se tambaleó con la llegada de la mecánica cuántica que nos hizo ver que el mundo microscópico de los átomos y las partículas elementales poseen un límite más allá del cual las certidumbres se convierten en probabilidades.

Más tarde con el descubrimiento del caos determinista en sistemas dinámicos simples se demostró que tras fenómenos manifiestamente complicados, subyacía un orden oculto. Era necesario abandonar nuestra intuición lineal de los fenómenos y reemplazarla por una visión del mundo basada en la no-linealidad. Se encontró entonces, la existencia de propiedades emergentes muy propias de los sistemas no lineales como resultado de la interacción entre sus partes y que no pueden explicarse a partir de las propiedades de sus elementos componentes. Una colonia de hormigas, por ejemplo, es capaz de llevar a cabo tareas de gran complejidad, como explorar su entorno, construir galerías o decidir la fuente de alimento, entre dos posibles a escoger. Pero considerada una por una, ninguna puede acometer por sí sola, semejantes tareas.

Decimos que el comportamiento social del hormiguero emerge a partir de interacciones entre las hormigas y no es reducible a las propiedades de un individuo de la colonia. Lo mismo ocurre con el cerebro y las neuronas que lo componen o con un ecosistema y sus especies componentes. (Investigación y Ciencia. 236. 1996)

Ser trata en definitiva de sistemas complejos, y como tales sus propiedades emergen de las interacciones entre los elementos que lo componen. Muy pronto se comprendió, que los sistemas complejos aparecen a medio camino entre el orden y el desorden. Por un lado el orden es necesario para almacenar información y mantener la estabilidad de las estructuras. Pero también se precisa flexibilidad en la transmisión de la información.

Pero complejidad no significa necesariamente complicación. Se ha propuesto una hipótesis general acerca del origen de la complejidad (7), denominada hipótesis de la frontera del caos. Establece que la complejidad aparece en unas condiciones muy especiales, conocidas desde antaño por la física: *los puntos críticos* en los que tienen lugar las transiciones de fase. Los sistemas complejos serían el resultado de una evolución hacia dichos puntos. Las estructuras fractales se caracterizan por presentar el mismo aspecto básico a distintas escalas.

1.6.1 LA CONCEPCION DE ARTE Y LA ESTETICA FRACTAL.

De acuerdo con Umberto Eco, en su libro *La definición* del *arte.* (8) "Una concepción del arte como *hacer*, hacer concreto, empírico, industrial, en un contexto de elementos materiales y técnicos: un concepto del fenómeno artístico como organismo regido por toda una legalidad estructural... ... … eran razonamientos que generaban desconfianza y reservas. Hasta estos últimos decenios no se había dado un florecimiento de la investigación orientada a la reconsideración de las últimas experiencias estéticas europeas y americanas desde Bergson hasta Dewey, desde los alemanes hasta los desarrollos de la fenomenología y de las investigaciones sociológicas encaminadas a una atenta consideración de todos los fenómenos de la evolución del gusto y de los estilos..." (9)

Luigi Pareyson, esboza su teoría de la *formatividad, la* cual, "...a la solución idealista del arte como *visión* opone un concepto de arte como *forma* en el que, el término *forma* significa *organismo* formación del carácter físico, que vive una vida autónoma, armónicamente calibrada y regida por leyes propias; y a un concepto de *expresión* opone el de *producción*, acción formante...(10)

(7). Elaborada por Jim Crutchfield de la Universidad de California. Stuart Kauffman, del Instituto de sistemas complejos de Santa Fe. Chris Langton, del Centro de estudios No Lineales en los Alamos y Per Bak del Laboratorio Nacional de Brookhaven

(8), (9), (10) Umberto Eco. La definición del arte. España. 1987.

De la misma manera Carlos E. Vasco Uribe, Licenciado en Filosofía y Letras, M.S. en Física y Ph.D. en Matemáticas, Profesor titular en la Universidad Nacional de Colombia hace referencia a la estética de la Ciencia y de las matemáticas al afirmar que las fórmulas, las demostraciones y las definiciones de las matemáticas tienen un componente estético inseparable de su significado que permite referirse a ellas con criterios de sencillez, hermosura y sobre todo elegancia.; Es así, como se busca el arte en las matemáticas.

Así como algunos artistas han empezado a pintar con computador, otros han empezado a componer música con computador. La música aleatoria tiene sus admiradores y seguidores, así como el arte pictórico computacional. De la misma manera, muchos pintores desde la antigüedad utilizaron las formas geométricas regulares en sus cuadros, murales y decoraciones. En el Renacimiento Alberto Durero utilizó motivos matemáticos en sus cuadros, (*La Melancolía*) y Leonardo Da Vinci utilizó la sección áurea en sus bocetos y composiciones.

Muchos artistas han utilizado conscientemente la sección áurea en sus composiciones, y muchos críticos de arte han buscado y medido proporciones en muchas otras composiciones pictóricas, en las que han creído encontrar la sección áurea (Piet Mondrian. Rectángulos; óleo de Rembrandt. *San Jerónimo.)*

Hay un pintor que llevó a su perfección la utilización de las matemáticas en el arte. Es el holandés Maurits Escher, quién nos legó la más apasionante colección de grabados, litografías, plumillas y acuarelas que presenta la historia del arte como matemáticas, o de las matemáticas como arte. Teselaciones o embaldosinados del plano, grupos cristalográficos, rotaciones, reflexiones y proyecciones de todo tipo, hacen de sus cuadros una exhibición de deslumbrantes fuegos artificiales de las matemáticas.

El medio de la pintura es el color y el espacio:
El dibujo es esencialmente una división del espacio,
Por lo tanto la pintura es la mente realizándose a sí misma en color y espacio.
ROBERT MOTHERWELL.

2. METODOLOGIA

Las imágenes fractales son composiciones especialmente geométricas generadas con ayuda del ordenador por ser el sistema que puede utilizar cálculos tan complejos como los que implica este tipo de imágenes. En el campo de la pintura específicamente no se pintan fractales, sino que constituyen la inspiración como en la presente obra pues permiten abordar los conceptos de estructura, espacio, orden, forma, color, ritmo etc., a partir de un lenguaje especializado en procesos iterativos, de autosimilitud y de infinito detalle.

El estilo de composición a partir de fractales va a estar inmerso en la dialéctica de lo realista versus lo naturalista, entre lo abstracto y lo simbólico, entre una mezcla de elementos lingüísticos y lo pictórico, pero lo que cuenta al final, son las imaginativas variaciones en el espacio pictórico.

El "ARTE DE LOS FRACTALES" es una investigación de carácter exploratorio, tipo descriptivo-retrospectivo y proyectivo, esencialmente ilustrativo de los efectos que la aplicación de modelos matemáticos y geométricos genera en la composición artística.

En razón a la experiencia y relación con la ingeniería, las matemáticas y la pintura, siento especial atracción por este tipo de fenómenos que de una forma u otra interrogan el arte en lo que tiene que ver con la belleza, la estética, la creatividad, la originalidad como también su asociación en términos de correlación con las matemáticas. ¿Es posible una íntima asociación entre variables que podríamos determinar como estética, belleza y modelos matemáticos y geométricos? ¿Resultan ser los fractales su representación objetiva, concreta, real a partir de los cuales se podría tener una aproximación a la concepción del arte?

Se trata de un estudio descriptivo, porque se propone la observación, el análisis y la comprensión de elementos de la naturaleza a partir de modelos numéricos con la ayuda del computador, para posteriormente hacer aplicación de ellos en la composición pictórica.Fue necesario entonces buscar los antecedentes del problema en cuestión para ilustrar acerca de los hallazgos que desde la década de los setenta se tiene en este campo.

La obra proyectada como producto del estudio realizado, se origina entonces a partir de concepciones derivadas de modelos fractales con manejo de los elementos de la plástica como la unidad, fondo, profundidad, color, estructura, dinámica, etc.

Entre los materiales utilizados se cuenta con lienzo, oleos, madera, Pintuc-Pac transparente, incolora, Indralit, base vinílica, barniceta, aceite de linaza, papel bond, lápices para dibujo y se emplearon formatos con una dimensión de 60 x 80 cms.

Como equipos, técnicas y procesos, se hizo uso de cámara fotográfica y de video, diapositivas, fotografías corriente y digitalizada, computador, consulta por internet y programas especiales, photoshop, para uso y selección de colores. Se asistió a eventos académicos relacionados con la temática de los fractales como fue el Seminario Internacional de Biología, realizado en Popayán en junio de 2001. Se realizaron entrevistas con profesionales expertos en el tema durante dicho evento.

Para cada uno de los nueve cuadros se realizaron cinco (5) bocetos, en papel bond de medio pliego y pliego completo, se tomaron las diapositivas necesarias para el estudio no sólo del color (el cual se hizo también en forma manual con óleos, lápices a color y con ayuda del ordenador) sino también de otros elementos como la luz, tratando de lograr una buena composición y obtener unidad de color y estructura.

Con la participación de profesionales de Ingeniería Electrónica se desarrolló un programa de computación con el propósito de validar los conceptos teórico-prácticos hallados en la revisión bibliográfica.

3. RESULTADOS

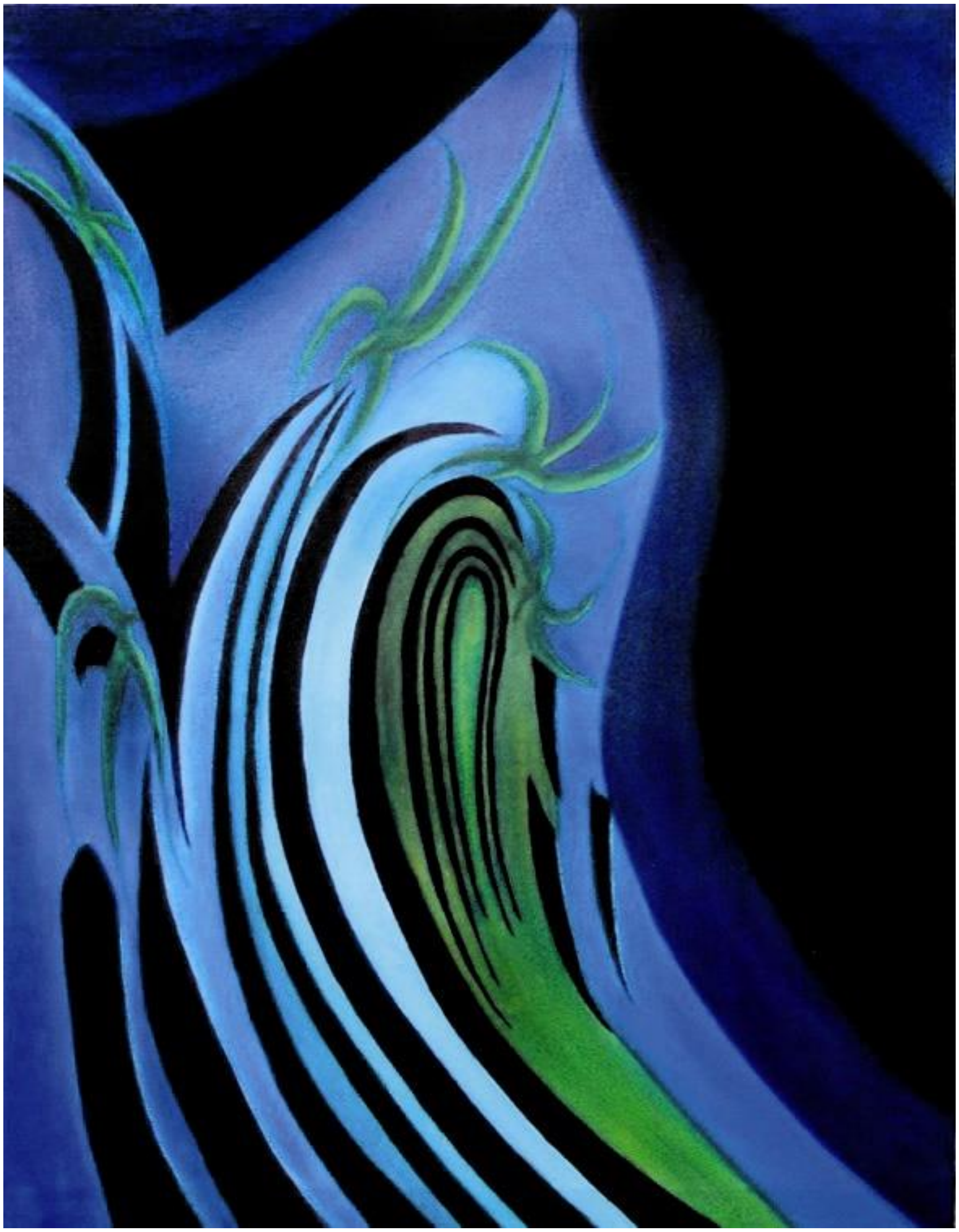
La obra realizada como producto de esta grata experiencia investigativa esta constituida por nueve pinturas que se ilustran a continuación y que permiten reconocer que la naturaleza nos aporta grandes y muy valiosas ideas, que nos estimula y motiva presentándonos el material suficiente para desarrollar nuestra creatividad.

Al llevar a cabo una referenciación artística con los muchísimos autores consultados y revisados es evidente la coincidente y efectiva efusividad, entusiasmo y gran emoción que genera el manejo y aplicación de toda esa conceptualización al momento de realizar el trabajo artístico.

Realmente es una técnica muy prometedora y de grandes logros en el arte. Se trata de una propuesta que permite disfrutar de réplicas de formas, líneas, texturas, color, luces y otra serie de elementos que ligados entre sí favorecen favorecen la representación mediante la integración y combinación de elementos que culminan con resultados pictóricos de amplio significado.

Todos intuimos y tenemos la facultad de ver que existen los colores, y que estos colores expresan juegos, modulaciones, ritmos, contrapesos, articulaciones, profundidades, vibraciones, acordes, estructuras monumentales, es decir, un orden de acuerdo con medidas que son innatas al hombre y que inmediatamente se revelan a nuestros sentidos. El color se presenta a la percepción de manera inconsistente, el proceso pictórico le da sentido como cálido o frío y sus matices se ven afectados por el color vecino que lo cambia y le da fuerza o también lo debilita.

Titulo: Fractal 1
Técnica: Óleo sobre lienzo
60 X 80 cm
Autor: Francisco A. Rivera
Popayán 2004



Titulo: Fractal 2
Técnica: Óleo sobre lienzo
60 X 80 cm
Autor: Francisco A. Rivera
Popayán 2004

Titulo: Fractal 3

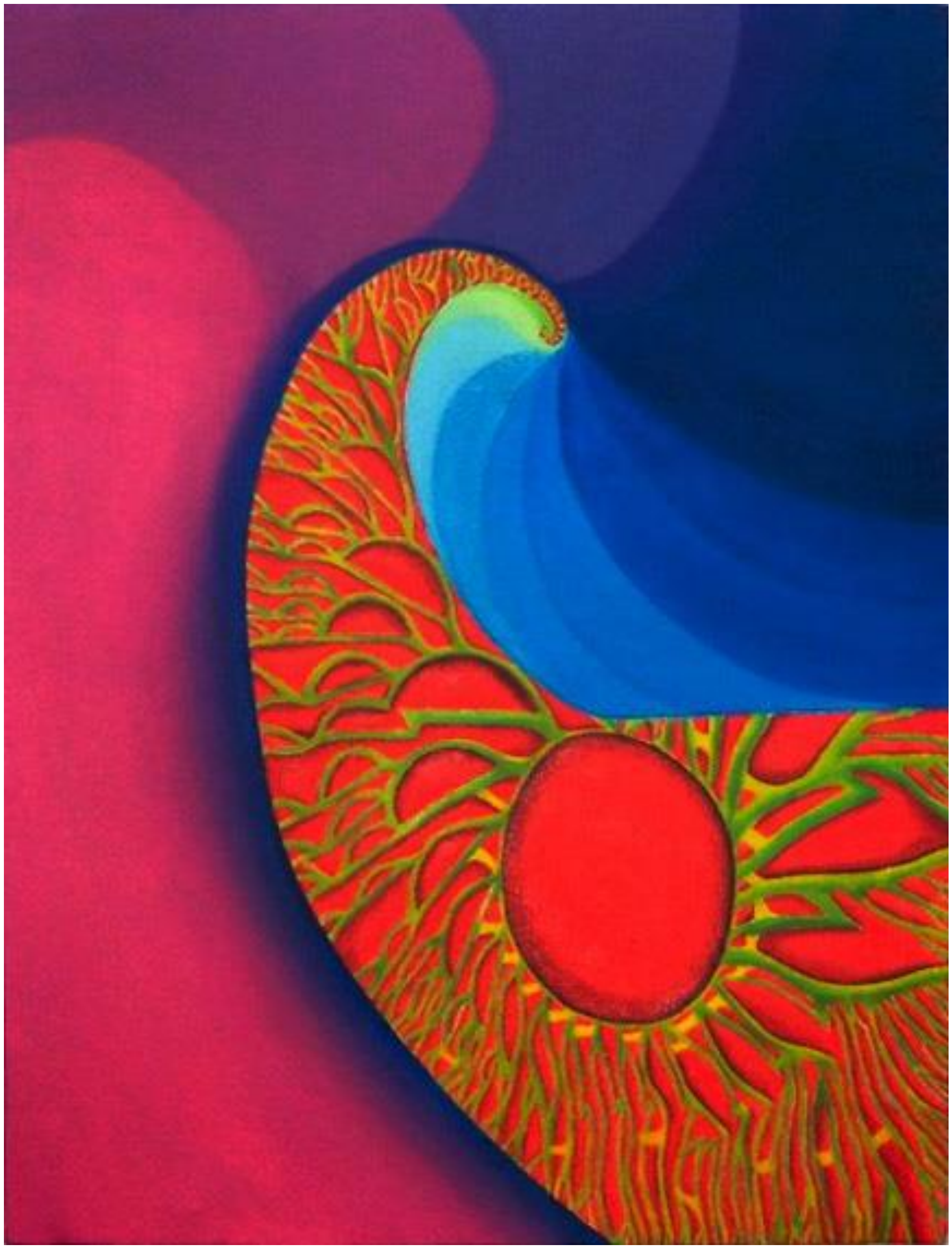
Técnica: Óleo sobre lienzo

60 X 80 cm

Autor: Francisco A. Rivera

Popayán 2004

Titulo: Fractal 4
Técnica: Óleo sobre lienzo
60 X 80 cm
Autor: Francisco A. Rivera
Popayán 2004



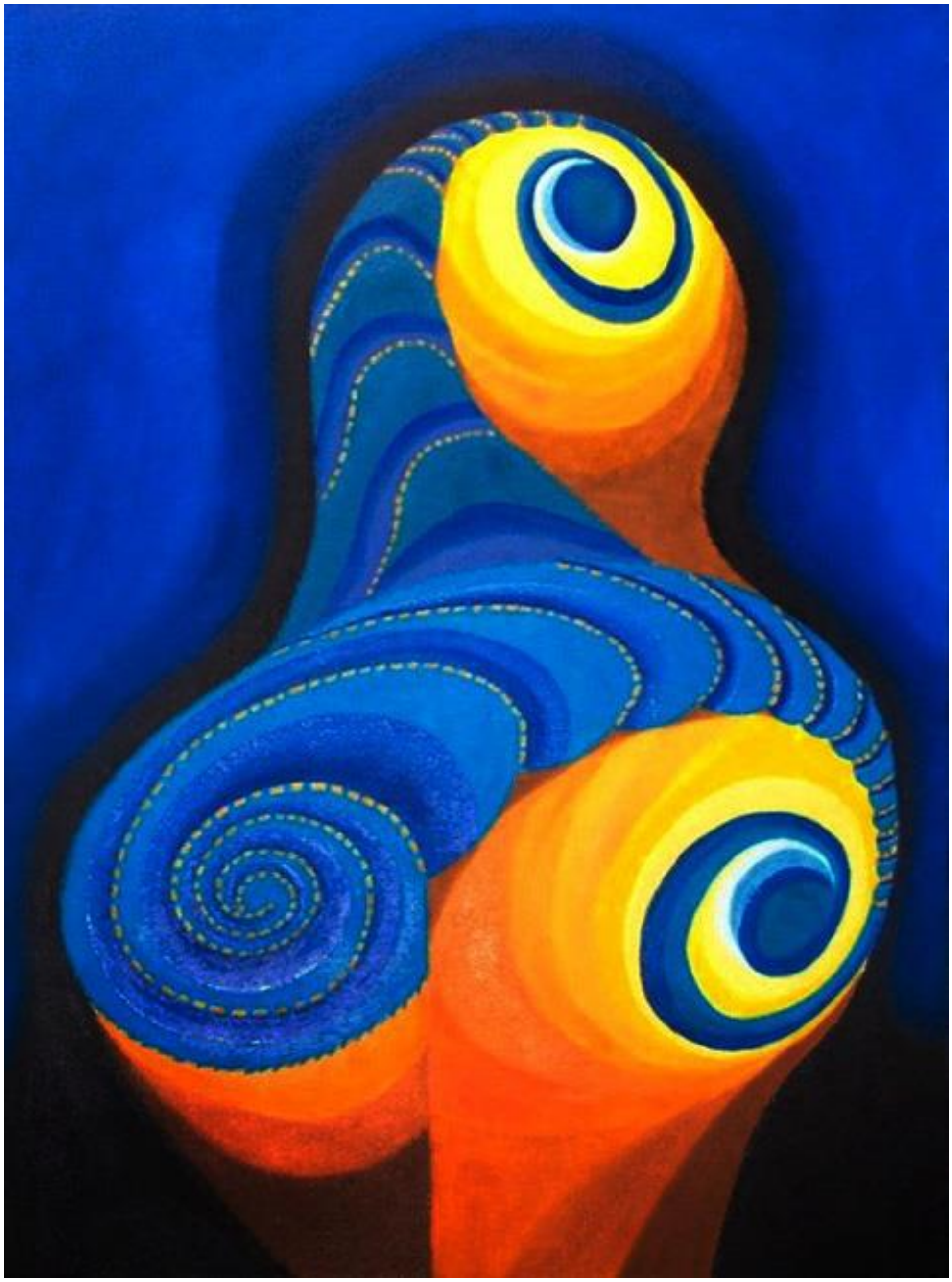
Titulo: Fractal 5

Técnica: Óleo sobre lienzo

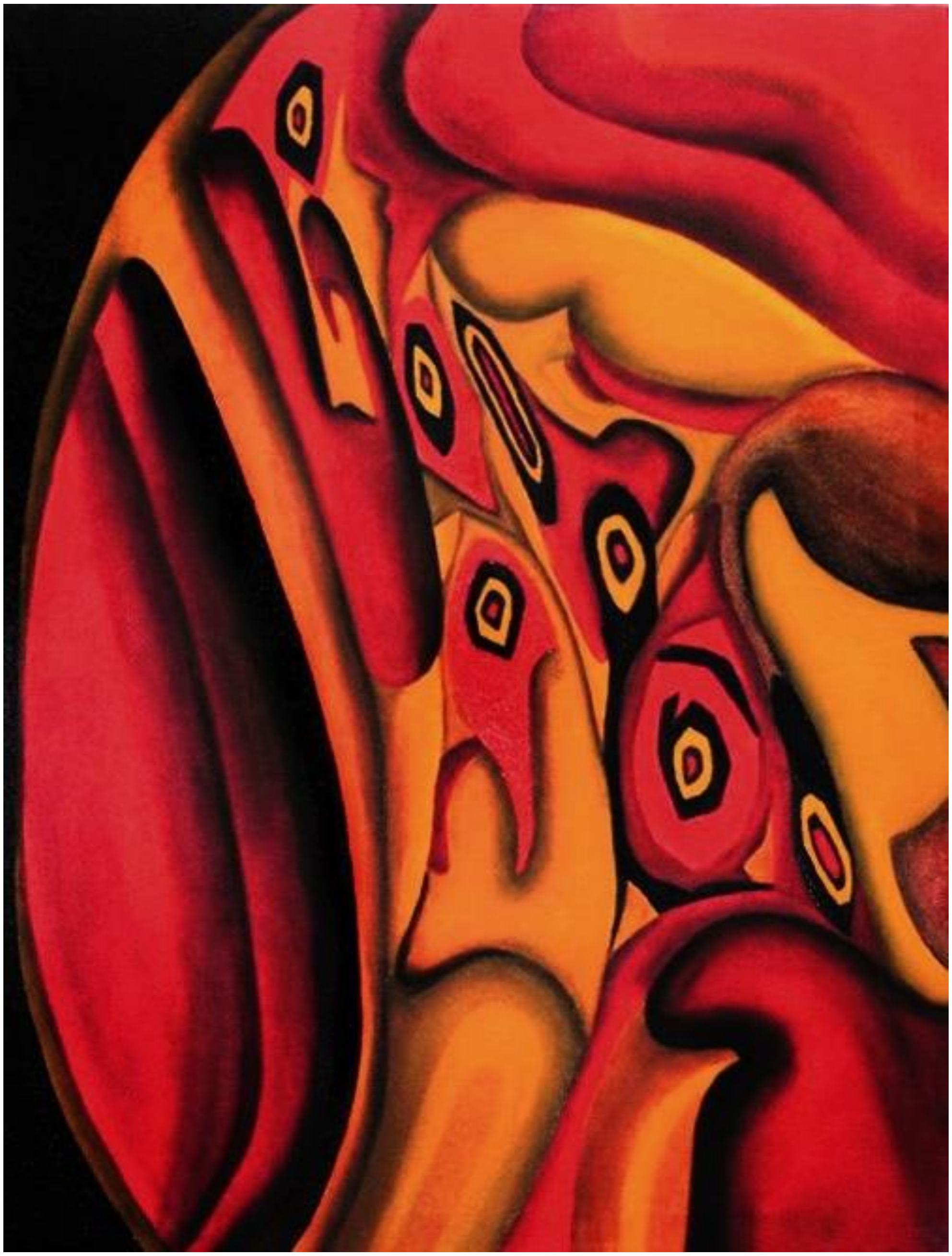
60 X 80 cm

Autor: Francisco A. Rivera

Popayán 2004



Titulo: Fractal 6
Técnica: Óleo sobre lienzo
60 X 80 cm
Autor: Francisco A. Rivera
Popayán 2004



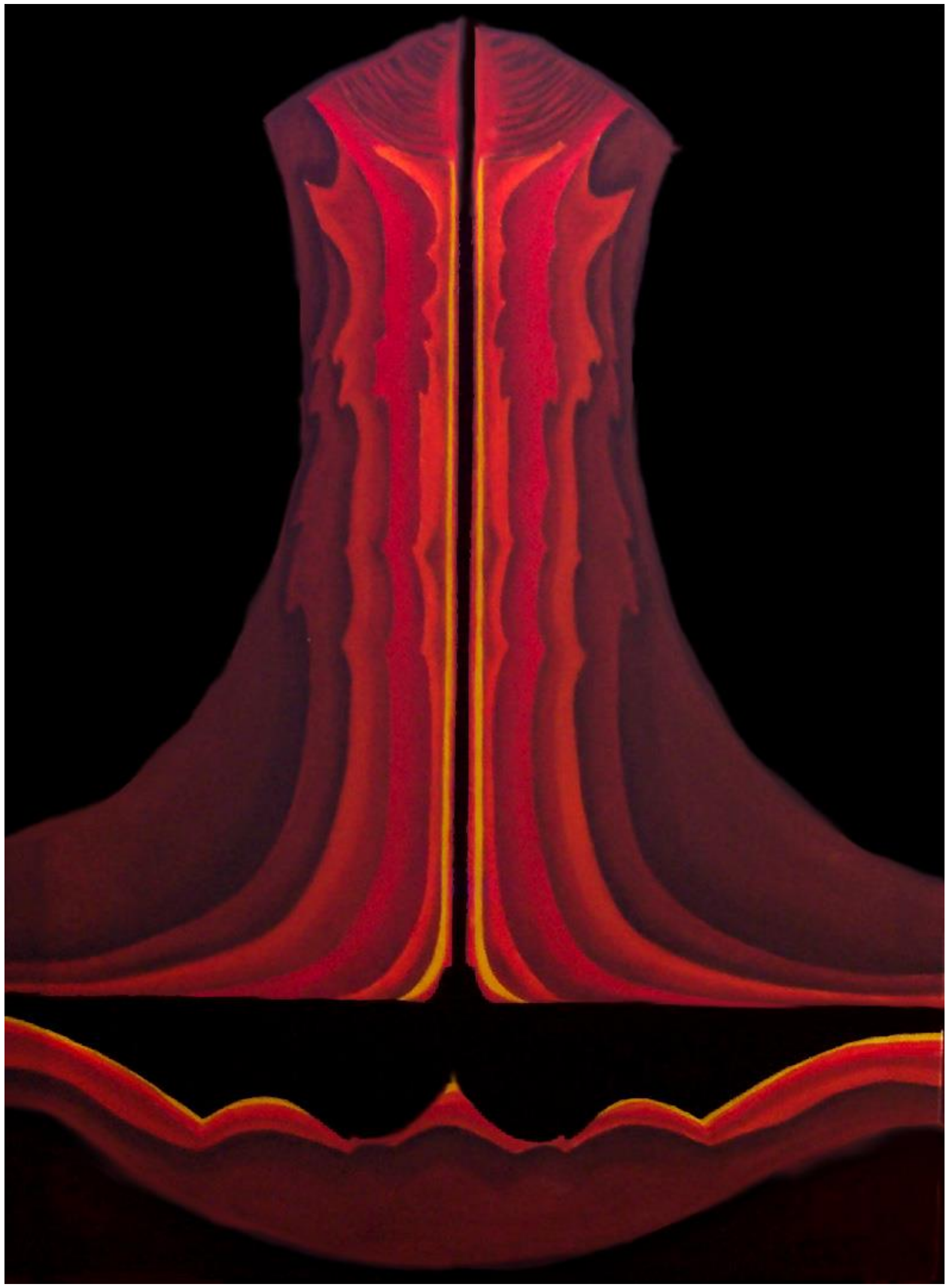
Titulo: Fractal 7

Técnica: Óleo sobre lienzo

60 X 80 cm

Autor: Francisco A. Rivera

Popayán 2004



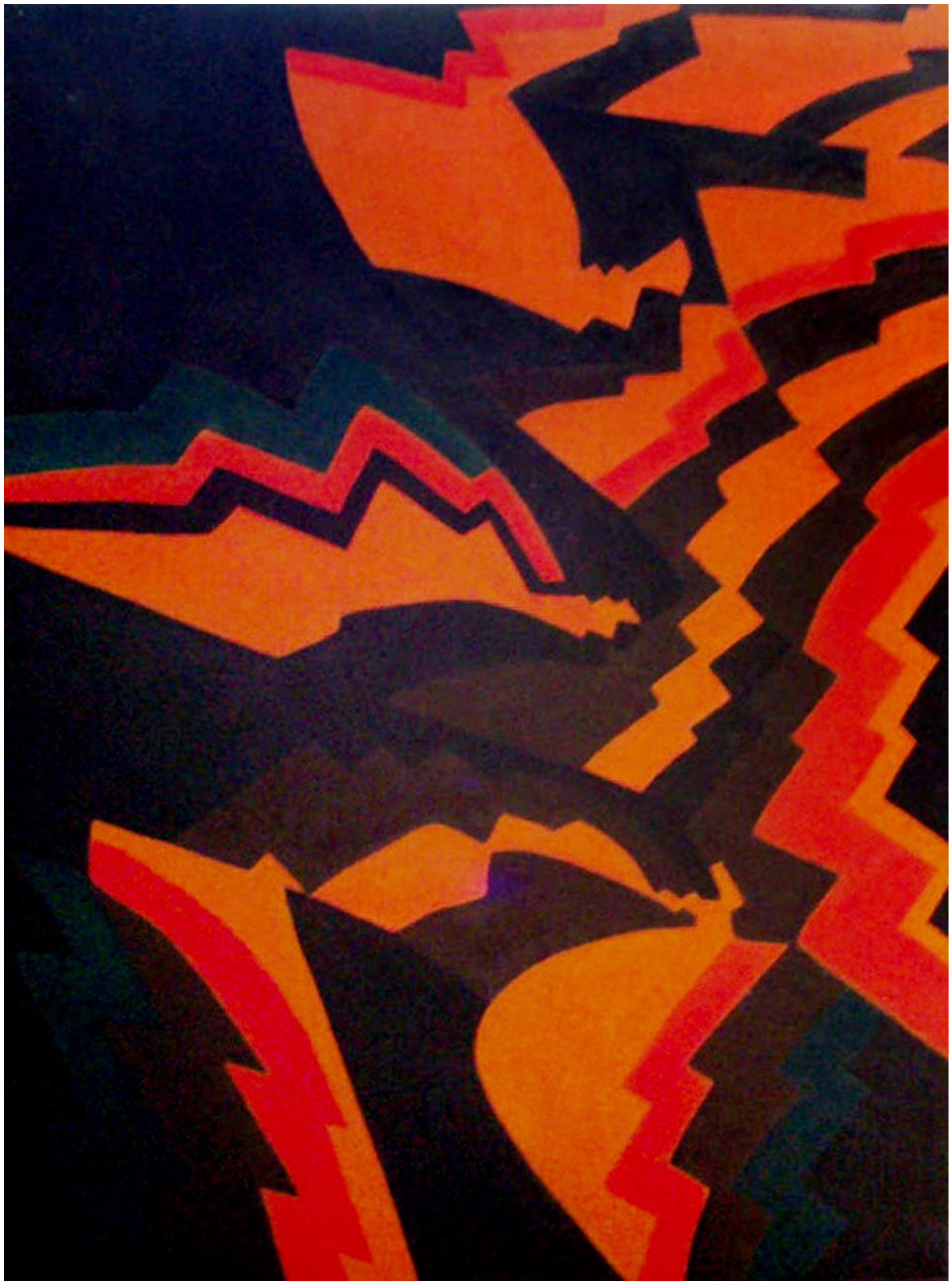
Titulo: Fractal 8

Técnica: Óleo sobre lienzo

60 X 80 cm

Autor: Francisco A. Rivera

Popayán 2004



Titulo: Fractal 9

Técnica: Óleo sobre lienzo

60 X 80 cm

Autor: Francisco A. Rivera

Popayán 2004

4. CONCLUSIONES

Las matemáticas como quehacer humano son profundamente satisfactorias y apasionantes porque están más cerca de las artes que de las ciencias. Los que las practican como una mera ciencia formal, se quedan en una artesanía de símbolos y en una monótona escritura de fórmulas, convirtiéndose en sólo repetidores de las matemáticas inventadas por matemáticos creativos; porque el matemático como ser creativo se parece más al artista que persigue sin cesar las conjeturas, los bocetos, las quimeras, los modelos hasta ver surgir la inspiración con su luz deslumbrante.

La construcción de un fractal, la posibilidad de utilizarlo para producir, almacenar, analizar o trasmitir una imagen se simplifica considerablemente haciendo uso del computador. De hecho, el efecto y la utilidad que ha demostrado tener la geometría fractal no se hubieran manifestado sin las facilidades del cálculo y representación gráfica que proporciona el trabajo en computadora; parecen estar hechos el uno para el otro. Los fractales se generan a través de procesos en los que una misma operación se repite un sinnúmero de veces, y eso es lo que precisamente una computadora sabe hacer mejor. Mandelbrot alimentó la computadora y ésta creó verdaderas obras de arte.

La mayoría de los métodos desarrollados para conseguir imágenes fractales tienen como base, procedimientos muy sencillos que en cualquier lenguaje computacional se expresan en unos cuantos renglones; de ahí la sorpresa que provoca observar la complejidad de la imagen que hacen surgir en la pantalla. La tecnología moderna permite generar imágenes cuya resolución va más allá de lo que podemos distinguir con nuestros ojos.

Cezanne fundamentó su arte sobre las leyes estrictas y claras de la geometría, así lo manifestó en su correspondencia: "*Tratar la naturaleza por medio del cilindro, de la* *esfera, del cono, todo ello puesto en perspectiva, de modo que cada lado de un objeto o de un plano se dirija hacia un punto central. Las líneas paralelas proporcionan en el horizonte la extensión, esto es, una sección de la naturaleza, o bien si preferís, el espectáculo que el Pater omnipotens aeterne Deus muestra ante nuestros ojos. Las líneas perpendiculares a este horizonte le confieren profundidad".*

Se dispone actualmente de un tipo de formas geométricas que entre otras propiedades contienen una imagen de sí mimos en cada una de sus partes y se les denomina fractales. Hace ya, más de tres décadas que inundaron el mundo científico con un conjunto de nuevas reglas para enfrentarse con el reto de conocer y descubrir la naturaleza. Su lenguaje se permeó a campos increíblemente diversos de las ciencias naturales y sociales y ha hecho de las matemáticas un instrumento novedoso para las artes.

Mientras los artistas sigan siendo concientes del hecho de que una de las funciones del arte es generar conocimiento y comprensión no habrá ninguna razón para el escepticismo o el pesimismo sobre el futuro del arte, a pesar de que los profetas de la negación afirmen lo contrario.

Conformar y conciliar elementos como fondo, forma y color para que se establezca un "orden" y "forma" dentro del contexto pictórico, es la tarea que cualquier pintor debe llevar a cabo. El conocimiento de la geometría fractal y de la teoría del caos podrían ayudar a comprender este maravilloso proceso.

La importancia de esta propuesta radica en una "nueva" representación figurativa la cual incluye elementos de las matemáticas y la geometría fractal. La lectura global y particular de los elementos de la obra así concebida, tanto como las sensaciones estéticas y la belleza geométrica de los fractales suelen ser un sentimiento humano inherente al espectáculo de su percepción visual.

BIBLIOGRAFIA

ECO, UMBERTO. La definición del Arte. Editorial Martínez Roca. S. A. Barcelona. España. 1970.

EZZELL, BEN. Programación de gráficas con Turbo C++. Addison Wesley Iberoamericana, S.A. Wilmington, Delaware, E.U.A. 1993.

HISTORIA DEL ARTE., Salvat Mexicana de ediciones, tomo 11/12, 1976.

LUPTON E. J. ABBOTT MILLER. El abc del triángulo, cuadrado, circulo. La Bauhaus y la teoría del diseño. Editorial Gustavo Gili, S. A. Barcelona.1994

MANDELBROT, BENOIT. Los objetos fractales. Tusquet Editores.3ª edición Barcelona. España. 1993.

OCAMPO, ESTELA Y PERAN MARTI. Teorías del Arte. Editorial Icara. Barcelona. España. 1978.

PEDOE, DAN. La Geometría en el Arte. Editorial Gustavo Gili, S. A. Barcelona. 1979.

TALANQUEAR, VICENTE. Fractus, Fracta, Fractal. Editorial de Cultura Económica. México. 1996.

TAPIES, ANTONI. El Arte contra la Estética. Editorial Ariel. Barcelona. España.1978.

TASCHEN, Editores. Arte del Siglo XX, Volumen 1 y 2. Germany. 1999

ULRETE BECAS- MALORNY., En camino hacia la Abstracción, Benedikt Taschen, Italia 1994

________El lenguaje de los fractales. Investigación y Ciencia. Números 169,259. 1990.

________Los fractales. Innovación y Ciencia. Volumen IV. Numero 4.   1995.

________El Caos. Innovación y Ciencia. Volumen V. Numero 4. 1996.

________Fractales. Innovación y Ciencia. Volumen VI. Numero 4. 1997.

________ THULE, Revista Italiana de estudios americanos. Nº 1, Octubre 1996, Pgs 136-154

Http://free.prohosting.com// josuna/fractal/intro.htm.

http:www.arrakis.es/sysifus/caos.htm

http://is.dal.ca:3400adiggins/fractal/Dalhousie la Galería de fractal Universitaria

hppp://www.cnam.fr/fractals/anim.html la fractal Animaciones Galería

http://ucmpl.berkeley.edu/henon.html experimental interactivo

ftp:ftp.uu.net:/usenet/comp.sources.x/vome8/xmntns

http://www.geocities.com/capecanaveral/cockpit/5889/intro.html

file://A: /viii_para la computadora.htm

http://free.prohosting.com/-josuna/fractal/intro/intro.htm

htpp://www.vcn.bc.ca/spcw/marinab.htm

http://wwwgeocities.com/alyrub/geometria.htm