LA COORDINACIÓN ENTRE DIFERENTES REGISTROS DE REPRESENTACIÓN DE UN OBJETO GEOMÉTRICO PARA EL APRENDIZAJE DE LA GEOMETRÍA ANALÍTICA

Angie Marcela Gómez Delgado

Directora De Práctica: Dra. Martha Lucía Bobadilla Alfado

UNIVERSIDAD DEL CAUCA

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES, EXACTAS Y DE LA EDUCACIÓN

LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

POPAYÁN

2023

NOTA DE ACEPTACIÓN: ____________________

____

Dr. Martha Lucia Bobadilla

Directora de la práctica pedagógica

____

Mg. Ángel Hernán Zúñiga

Evaluador de la práctica pedagógica

Fecha de sustentación: 23 de Junio de 2023

Tabla de ilustraciones

Ilustración 1. Representación semiótica de la recta en registro gráfico 15
Ilustración 2. Vista de la interfaz de GeoGebra Geometría 21
Ilustración 3. Construcción de la Hipérbola con la función Mostrar rastro 22
Ilustración 4. Estructura de la secuencia didáctica 26
Ilustración 5. Estructura de la guía 29
Ilustración 6. Participación activa de los y las estudiantes. 31
Ilustración 7. Ejercicio Propuesto. 32
Ilustración 8. Dificultad de correspondencia. 32
Ilustración 9. Congruencia entre los registros: gráfico y lengua natural. 33
Ilustración 10. Congruencia entre los registros: gráfico y lengua natural 34
Ilustración 11. Construcción de la Elipse en GeoGebra 36
Ilustración 12. Dificultad de conversión del registro lengua natural al registro simbólico. 37
Ilustración 13. Corrección de la conversión del registro lengua natural al registro simbólico 38
Ilustración 14. Conversión entre el registro Lengua Natural al Registro Simbólico 39
Ilustración 15. Congruencia entre el Registro Gráfico y el Registro Algebraico. 41
Ilustración 16. Construcción de la Hipérbola en GeoGebra. 42
Ilustración 17. Congruencia entre el Registro Gráfico y el Registro Simbólico. 43
Ilustración 18. Conversión al Registro Lengua Natural 44
Ilustración 19. Construcción cognitiva del objeto geométrico. 45
Ilustración 20. Correctos tratamientos algebraicos. 47
Ilustración 21. En consecuencia de una mala operación en el tratamiento algebraico los estudiantes no lograron desarrollar por completo el ejercicio planteado. 48

1. INTRODUCCIÓN

Este documento da cuenta del primer acercamiento hacia lo que es el rol del docente en su quehacer como formador y el de investigador de su propia práctica. El contenido corresponde al resultado de la sistematización de la Práctica Pedagógica, que se desarrolló en cuatro fases: fundamentación, proyecto de intervención pedagógica en el aula, ejecución del proyecto y la sistematización de la experiencia.

En este trabajo se presentan todos los elementos requeridos para el diseño y planeación de la práctica docente: presentación del espacio de trabajo, los objetivos planteados, la pregunta problema, los antecedentes, la justificación, el marco teórico y la metodología; y además, se presenta el recuento histórico y análisis crítico. La Práctica Docente se realizó en el curso de Geometría Analítica en el periodo académico 2022-II. Curso dirigido a estudiantes del Programa de Licenciatura en Matemáticas de la Universidad del Cauca.

El objetivo general planteado fue "contribuir con la construcción cognitiva de algunos objetos de la Geometría Analítica, mediante el uso del software GeoGebra". Para esto se tomó como fundamento la Teoría de Registros Semióticos de Duval, puesto que esta permite analizar las actividades cognitivas que los estudiantes utilizaron para el desarrollo de su aprendizaje, y a partir de ello establecer si han construido cognitivamente los objetos geométricos. En donde se propuso trabajar en diferentes registros y la coordinación entre ellos, puesto que como lo sustenta Duval, cada representación semiótica contribuye de forma específica con algunos aspectos conceptuales que son componentes del objeto matemático. Es importante aclarar que, no se trabajaron en todos los registros expuestos por la Teoría de Duval, sino solo los que son más pertinentes en la enseñanza-aprendizaje de la geometría analítica, los cuales son: Algebraico, Gráfico, Lengua Natural y Simbólico.

Por otra parte, el software GeoGebra, es una herramienta didáctica que permitió a los y las estudiantes coordinar los registros anteriormente mencionados. Puesto que la pantalla del software cuenta con dos ventanas activas: una zona de dibujo en la que se crean y manipulan las representaciones geométricas y otra zona donde se manipulan las representaciones algebraicas. Lo que les permitió tener trazos más precisos, facilitando así la visualización y en cuanto a lo algebraico, se obtuvieron soluciones precisas. Además, el que los estudiantes trabajen con el software y expresen lo que están observando, les permitió la congruencia de unidades significativas entre el lenguaje natural y las representaciones que les brinda el software.

Para lo anterior, se hizo uso de las secuencias didácticas, las cuales permitieron llevar una organización, planeación y programación de las sesiones propuestas, las cuales se llevaron a cabo mediante guías. Así, se analizaron las actividades cognitivas de carácter semiótico que los estudiantes desplegaron en el proceso de aprendizaje de los objetos geométricos trabajados y además se analizó la congruencia (o no) de unidades significantes entre las representaciones realizadas, donde GeoGebra fue un facilitador de dicho aprendizaje.

2. PRESENTACIÓN:

1.1 Descripción Del Establecimiento Educativo

La práctica docente se llevó a cabo en la Universidad del Cauca, la cual es una institución de educación superior pública. Esta Institución cuenta actualmente con 9 facultades en las cuales se brinda formación de pregrado y posgrado en diferentes áreas del conocimiento.

La Universidad del Cauca, fundada en su tradición y legado histórico, es un proyecto cultural que tiene un compromiso vital y permanente con el desarrollo social, mediante la educación crítica, responsable y creativa. Además, forma personas con integridad ética, pertinencia e idoneidad profesional, demócratas comprometidos con el bienestar de la sociedad en armonía con el entorno. Por otro lado, la Universidad del Cauca genera y socializa la ciencia, la técnica, la tecnología, el arte y la cultura en la docencia, la investigación y la proyección social.

Su visión está encaminada en ser fiel a su lema "Posteris Lvmen Moritvrvs Edat" (Quién ha de morir deje su luz a la posteridad), por ello, tiene un compromiso histórico, vital y permanente con la construcción de una sociedad equitativa y justa en la formación de un ser humano integral, ético y solidario.

1.2 Descripción Del Grupo de Trabajo

La Práctica Docente se realizó en el curso de Geometría Analítica en el periodo académico 2022-II. Curso dirigido a estudiantes del Programa de Licenciatura en Matemáticas de la Universidad del Cauca. El cual inició el 21 de Septiembre de 2022 y culminó el 16 de Enero de 2023. El curso tiene una intensidad horaria de 4 horas semanales presenciales y es orientado por el profesor Favian Enrique Arenas Aparicio, con la metodología de Aula Invertida haciendo uso de las TIC, con un máximo de 40 estudiantes. La asignatura, según el aconsejable del plan de estudios, está ubicada en tercer semestre; sin embargo, se puede matricular en cualquier semestre superior.

Es pertinente aclarar que, la práctica docente se desarrolló fuera del horario establecido para las clases del curso, donde se dispuso del horario semanal de asesoría, el cual se estableció de acuerdo a la disposición de los estudiantes, llegando a un acuerdo de que las sesiones se darían los días lunes de 9:00 am a 11:00 am, siendo así dos horas semanales; sin embargo hubo ocasiones en que las sesiones semanales fueron de cuatro horas, esto como solución a las sesiones canceladas por motivos ajenos, como por ejemplo los días festivos o asambleas estudiantiles, entre otros. Aunque en el curso estaban matriculados 40 estudiantes, solo 2 o 3 de ellos asistieron en las primeras sesiones, luego, de 7 a 10 estudiantes, a la mitad de las sesiones.

1.3 Temática

La práctica pedagógica se desarrolló a lo largo de todo el curso de Geometría Analítica en las temáticas: coordenadas en la recta y el plano, ecuación de una línea, cónicas como líneas de segundo orden, vectores en el espacio, operaciones con vectores, y superficies de primer y segundo orden.

1.4 Descripción De La Problemática

De acuerdo con (D'Amore, Fandiño Panilla, & Lori, 2013) los objetos matemáticos, a diferencia de las demás ciencias, no son accesibles a través de los sentidos, por ejemplo en química se puede observar la diferencia entre ácido y base, mientras que en matemáticas lo que podemos hacer con los objetos es describirlos, definirlos, denotarlos, nombrarlos y diseñarlos, entre otros. Es decir, solo dar representaciones, puesto que estos son abstractos.

Además, la única manera en que podemos conocer los objetos matemáticos, es a través de una coordinación de varios registros de representación semiótica de un mismo objeto. Como lo afirman (D'Amore, Fandiño Panilla, & Lori, 2013), para aprender un concepto matemático o, mejor aún, para construir cognitivamente un objeto matemático, es necesario aprender a usar con cierto dominio diversas representaciones semióticas del mismo objeto, puesto que, cada representación semiótica moviliza solo algunos de los aspectos conceptuales que son componentes del objeto matemático. Sin embargo, D'Amore, Fandiño Panilla, & Lori, 2013) recomiendan que hay que tener en cuenta que un exceso de representaciones puede menoscabar el aprendizaje del estudiante.

La geometría analítica fusiona la geometría euclidiana con el álgebra. Los dos problemas fundamentales de la geometría analítica son: dado el lugar geométrico en un sistema de coordenadas, obtener su ecuación y dada su ecuación, determinar la gráfica o lugar geométrico de los puntos que satisfacen dicha ecuación. De esta manera, combina la representación geométrica de los objetos con su respectiva representación analítica (algebraica); por lo que implica el uso de una diversidad de representaciones semióticas, donde cada una de ellas le ofrece al estudiante una información del objeto matemático; por esta razón, es necesario que el estudiante logre coordinar las diferentes representaciones para apropiar y adquirir nuevos conocimientos.

Esta diversidad de representaciones hace bastante complejo el aprendizaje de la Geometría Analítica. Sin embargo, la mayoría de los docentes no son conscientes de lo que implica esta complejidad, pues para ellos este proceso puede resultar inmediato y trivial. Además, la enseñanza tradicional impulsa a la mayoría de los estudiantes a recurrir al aprendizaje memorístico, por lo que, al pasar el tiempo, este aparente aprendizaje se va desvaneciendo; debido a que los procesos cognitivos del razonamiento no fueron los adecuados para que ese conocimiento quedará en la mente del estudiante como producto de elementos significativos para él.

Por estos aspectos resulta pertinente preguntarse, ¿cómo contribuir para que los estudiantes coordinen los diferentes registros de representación de un mismo objeto geométrico para alcanzar su correspondiente construcción cognitiva?

3. OBJETIVOS:

2.1 Objetivo General:

- Contribuir con la construcción cognitiva de algunos objetos de la Geometría Analítica, mediante el uso del software GeoGebra.

Objetivos Específicos:

- Evidenciar los rasgos distintivos de un objeto geométrico.
- Trabajar con diferentes registros de los objetos de la Geometría Analítica.
- Lograr la congruencia de unidades significantes de las representaciones: gráfica, algebraica y lenguaje natural.

4. ANTECEDENTES

En este apartado se describen algunas investigaciones de enseñanza-aprendizaje de la Geometría Analítica relacionadas con la Teoría de Registros de las Representaciones Semióticas de Raymond Duval y el uso de GeoGebra.

Balles, Gruszycki, Gruszycki, Maras, & Oteiza, (2012) en su investigación *Uso De GeoGebra Para Potenciar Las Diferentes Representaciones En Geometría Analítica*, muestran su propuesta, la cual se encuadra en un Proyecto de Investigación de la Universidad Nacional del Chaco Austral, donde su objetivo general es: *diseñar secuencias didácticas utilizando el software dinámico GeoGebra, con el propósito de mejorar la aprehensión conceptual de los estudiantes que están en el curso de geometría analítica*. Este trabajo se llevó a cabo utilizando las herramientas proporcionadas por la Teoría Duval, quien pone en evidencia la necesidad de una diversidad de registros y las dificultades de su coordinación, ya que considera que la utilización de los mismos, es primordial para la actividad matemática. Además, en esta investigación se afirma que la herramienta GeoGebra, permite trabajar con diferentes registros de representación a través de vistas gráficas, algebraicas y tablas.

Por otro lado, tenemos la investigación de Dip, Herrera, Olmos, & Savio, (2018), que está enmarcada en el Proyecto: "El aporte del GeoGebra en el proceso de conversión de las representaciones semióticas de objetos matemáticos de Geometría Analítica" la cual tiene como objetivo principal: "*determinar cómo incide en el aprendizaje de los objetos matemáticos de la Geometría Analítica en la temática de cónicas, las actividades cognitivas de conversión entre sus registros de representación semiótica"*. Entre los temas desarrollados en el curso de Geometría Analítica, han observado que "*en actividades que se realizan durante el cursado de la asignatura, la ausencia de congruencia entre dos o más representaciones referidas al mismo objeto matemático y de manera muy especial en el tema cónicas. Prueba de ello son los resultados de los ejercicios que vinculan en distintos apartados, las representaciones algebraicas y las representaciones geométricas de las ecuaciones de la circunferencia, de la parábola, de la elipse y de la hipérbola".*

En esta investigación proponen como apoyo didáctico el uso del software de geometría dinámica GeoGebra, porque este permite en pantalla trabajar simultáneamente con tres registros: algebraico, geométrico y tabular. En el caso de las cónicas, se pueden plantear actividades que requieran la coordinación de registros semióticos de representación, que se puede visualizar en pantalla a través de las vistas algebraicas, gráficas y la tabla de cálculo del software.

Por otra parte, la investigación de Ramírez Suárez, (2007) la cual tiene el nombre de *Propuesta Didáctica para la enseñanza de la Geometría Analítica en la Licenciatura en Matemática con el uso de un asistente matemático*, quien pone de manifiesto que actualmente los estudiantes que llegan a las aulas universitarias presentan ciertas dificultades en el aprendizaje de la Matemática y en particular de la Geometría, esto impide que los estudiantes logren un aprendizaje significativo; por ello se propone en la enseñanza-aprendizaje de la Geometría, la introducción de la computación en las clases, ya que ésta les permite a los estudiantes observar representaciones de objetos geométricos y ver estos objetos y sus elementos asociados, en movilidad y transformación; de modo que mediante la observación, los estudiantes puedan llegar a conclusiones y a demostraciones de manera más inmediata, para así apropiarse de estos conocimientos.

El objetivo principal de esta investigación fue, "*elaborar una propuesta didáctica para la enseñanza y el aprendizaje de la Geometría Analítica basada en la visualización de los objetos geométricos y conceptos matemáticos mediante el uso de CABRI"*, con el propósito de lograr un aprendizaje significativo de los conocimientos geométricos de los estudiantes de la carrera de Licenciatura en Matemática. Con la aplicación de esta propuesta didáctica se obtuvieron resultados positivos, puesto que se logró realizar más ejercicios y con un mayor grado de dificultad, el proceso docente ha influido de manera amena, con un ambiente favorable donde los estudiantes se sintieron motivados, permitiendo asegurar que se logró un aprendizaje significativo de los conocimientos geométricos.

5. JUSTIFICACIÓN

Duval (2005) afirma que entre todos los campos de conocimiento en los que los estudiantes deben entrar, la geometría es la que exige la actividad cognitiva más compleja, ya que apela al gesto, al lenguaje y a la mirada. Allí es necesario construir, razonar y ver, indisociablemente:

> (…) la visualización y la producción de enunciados en geometría requieren funcionamientos cognitivos que son diferentes y más complejos que los que se aplican fuera de la geometría. Por eso, su desarrollo y coordinación se deben considerar como objetivos de enseñanza, tan

> esenciales como los mismos contenidos teóricos. Porque aquí la comprensión de los contenidos solo se puede construir a partir de una sinergia entre visualización y lenguaje. Esas condiciones cognitivas son, en cierto modo, condiciones para aprender a aprender geometría (pág. 3).

Ahora bien, históricamente la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas se ha desarrollado con un modelo de enseñanza tradicional, donde claramente el estudiante es un mero receptor de la información que da el docente, aquí el estudiante tiene poco margen para pensar y elaborar conocimientos. Además, este tiene un rol pasivo donde siempre está a la espera de respuestas y soluciones dadas por el docente. La mayor parte del tiempo en las clases de matemáticas, se desarrolla con el Registro Algebraico, donde se trabaja en la repetición de algoritmos y fórmulas en donde el docente explica el tema a desarrollar, realiza un ejercicio paso a paso, a modo de ejemplo, luego plantea unos ejercicios similares para que el estudiante los realice y por último, se plantea una que otra situación problemática la cual será resuelta con el procedimiento proporcionado por el docente.

Es importante aclarar, que no se está diciendo con esto que las representaciones algebraicas no son necesarias. Al respecto, Castells (1997, citado por Fernández Escobar, 2018) plantea que el aprendizaje de estas se considera la base para el desarrollo de capacidades más complejas; lo malo es limitarse y conformarse solamente a que los estudiantes aprendan de memoria los conceptos matemáticos, los algoritmos de las operaciones y sus propiedades, dando de esa manera por finalizado el proceso de enseñanza y aprendizaje.

Por otra parte, el uso de las Tecnologías de la Información y la Comunicación presentan un estilo nuevo para abordar los problemas cognitivos. El uso de calculadoras, ordenadores e internet, complementan y permiten una visualización más precisa de las figuras geométricas y de los conceptos algebraicos, brindando una fuente de ejercicios variados que mejora la aprehensión conceptual y amplía los conocimientos matemáticos. En particular el software GeoGebra permite trabajar con una diversidad de representaciones de los objetos matemáticos, facilitando el aprendizaje de los objetos. Además, promueve el aprendizaje autónomo, la colaboración y el aprender haciendo.

Consideramos que la enseñanza de la geometría analítica con GeoGebra permite que los estudiantes coordinen los diferentes registros de representaciones semióticas, alcanzando así un aprendizaje significativo de los diferentes objetos geométricos.

6. MARCO TEÓRICO

6.1. La Teoría De Registros De Las Representaciones Semióticas

La Teoría de Registros de las Representaciones Semióticas de Raymond Duval sirvió como base y fundamento para la planeación, diseño y ejecución de la práctica docente.

Según (DIE, 2022) Raymond Duval es un filósofo, psicólogo y profesor emérito de la Universidad Louis Pasteur en Estrasburgo, Francia, y ha trabajado desde 1970 en el equipo interdisciplinario de Didáctica de la Matemática y Ciencias Cognitivas, desarrollando numerosas investigaciones en psicología cognitiva, en el aprendizaje matemático y en el papel de los registros de representación semiótica para la comprensión del conocimiento matemático, ofreciendo importantes aportes al área de la Educación Matemática.

Su principal obra es *Sémiosis y Pensamiento Humano. Registros Semióticos Y Aprendizajes Intelectuales*, en ella desarrolla la teoría de representación semiótica y analiza el funcionamiento del pensamiento en la adquisición de conocimiento, mostrando la importancia de su teoría para la investigación en la didáctica de las matemáticas.

Duval basó sus trabajos en las investigaciones de Charles Sanders Peirce, quien es considerado como el padre de la semiótica contemporánea, él desarrolla una teoría donde plantea que todo pensamiento debe existir en los signos; así, según esta teoría conocemos la realidad mediante un proceso de tres componentes los cuales forman la semiótica: el *representamen*, que es el signo o una cualidad material, como por ejemplo las secuencias de sonidos, las letras, las formas, los colores, entre otros; el *objeto*, que es el elemento de la realidad al que hace referencia el signo, y el *interpretante*, que es un nuevo signo más desarrollado que surge a partir del representamen.

La semiótica es la ciencia que estudia los diferentes sistemas de signos que permiten la comunicación entre individuos, sus modos de producción, de funcionamiento y recepción. Duval (2008, citado por D'Amore, 2013) expresa que:

> Un sistema semiótico es un conjunto de reglas organizadas para combinar o agrupar elementos en unidades significativas; elementos que asumen valor de sentido sólo en oposición de elección a otros elementos y a sus usos según las reglas organizativas que permiten designar objetos.

Para Duval (20016) una representación es algo que se pone en lugar de otro algo. Si se consideran estas representaciones con respecto a un individuo y a sus experiencias, entonces estas representaciones son mentales, es decir, creencias, conceptos o concepciones erróneas individuales a las que cada quien accede a través de sus producciones verbales o esquemáticas. Ahora bien, si el individuo desea exteriorizar o comunicar dichas representaciones mentales con el fin de hacerlas visibles y que puedan ser conocidas por otros, entonces estas deben de convertirse en representaciones semióticas donde estas son producciones constituidas por el empleo de signos, por ejemplo, enunciados de lenguaje natural, fórmula algebraica o gráfico, entre otros.

Duval considera que al estudiar los aspectos referentes al conocimiento se hace necesario la noción de representación, puesto que no existe conocimiento que el ser humano pueda movilizar sin recurrir a esta. A partir de esta concepción, él sustenta que ciertas actividades cognitivas asociadas al aprendizaje necesitan de los sistemas de representación, actividades tales como el razonamiento, la resolución de problemas y la modelación matemática, entre otros.

Como sabemos, los objetos matemáticos son objetos ideales, es decir no son perceptibles por los sentidos, es por esto que se hace necesario representarlos mediante las representaciones semióticas; en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, estas no solo sirven para los procesos de comunicación sino también para la construcción de los objetos matemáticos.

Ahora, para que un sistema semiótico pueda ser considerado como un registro de representaciones, este debe de permitir las tres actividades cognitivas fundamentales ligadas a la semiótica, las cuales son: la formación de una representación identificable, la transformación de tratamiento y la transformación de conversión. Las dos transformaciones semióticas son fuentes de dificultades recurrentes en el aprendizaje de las matemáticas, algunas de estas son generales y otras particulares, las cuales se pueden encontrar en cualquier nivel de la enseñanza y aprendizaje.

5.1.1 La formación de una representación identificable. El estudiante debe saber elegir los rasgos distintivos de un determinado objeto matemático de los cuales él desea representar; elegir el o los registros semióticos que se consideran adecuados para dicha representación; dar una representación en dichos registros o dar varias representaciones semióticas en uno o más de los registros elegidos.

En el estudio de la geometría analítica se emplean varios registros de representaciones semióticas, de los cuales los que más se destacan son: Registro Algebraico, Registro de Lengua Natural, Registro Gráfico y Registro Simbólico.

Registro algebraico. Son aquellos sistemas de escritura numérica algebraica con carácter formal y técnico, apoyados en las reglas de formación de representaciones para sistematizar, formalizar y formular; por ejemplo: reducción de términos semejantes, productos notables y transposición de términos, entre otros.

Registro lengua natural. Este registro utiliza los signos del lenguaje, la sintaxis y la gramática propia del español, permite realizar explicaciones, y dar definiciones. Se puede evidenciar cuando los estudiantes dan la definición de un objeto como lugar geométrico o como sección cónica, describen sus características y elementos.

Registro gráfico. En este registro se muestran formas, figuras geométricas, diseños y se hace uso del plano cartesiano.

Registro simbólico. Son aquellos sistemas de escritura con carácter formal y técnico, apoyados en las reglas de formación de representaciones para sistematizar, formalizar y formular; por ejemplo: notación conjuntista, notación geométrica, entre otros.

5.1.2 Tratamiento. Es una transformación de una representación de un objeto a otra, al interior del mismo registro semiótico. Un ejemplo de ello es, objeto matemático la recta, en el registro verbal, con las representaciones:

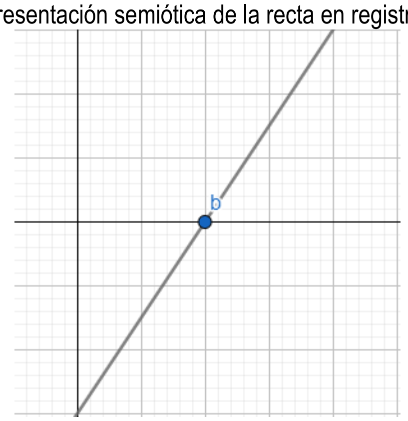
r1: Una recta con pendiente m y ordenada al origen b.

r2: Es la recta que corta al eje y en b y al eje x en $-\frac{b}{m}$

5.1.3 Conversión. Es cuando se hace una transformación de una representación de un objeto en un determinado registro semiótico a otra representación al interior de otro registro semiótico. Un ejemplo de ello es, objeto matemático recta, en un Registro Gráfico a un Registro Algebraico.

r1:

Ilustración 1. Representación semiótica de la recta en registro gráfico



r2: $y = mx + b$

Según Duval (2011, citado por Olivares, 2018) existen muchos estudios sobre las dificultades de lectura e interpretación de las representaciones gráficas cartesianas, como la imposibilidad de encontrar la ecuación de una recta partiendo de su representación gráfica, lo que implica la no coordinación de la representación gráfica y de sus ecuaciones. Tales dificultades no se deben buscar en el concepto matemático, sino en la falta de conocimiento de las reglas de correspondencia semiótica entre el Registro de representación Gráfica y la Algebraica.

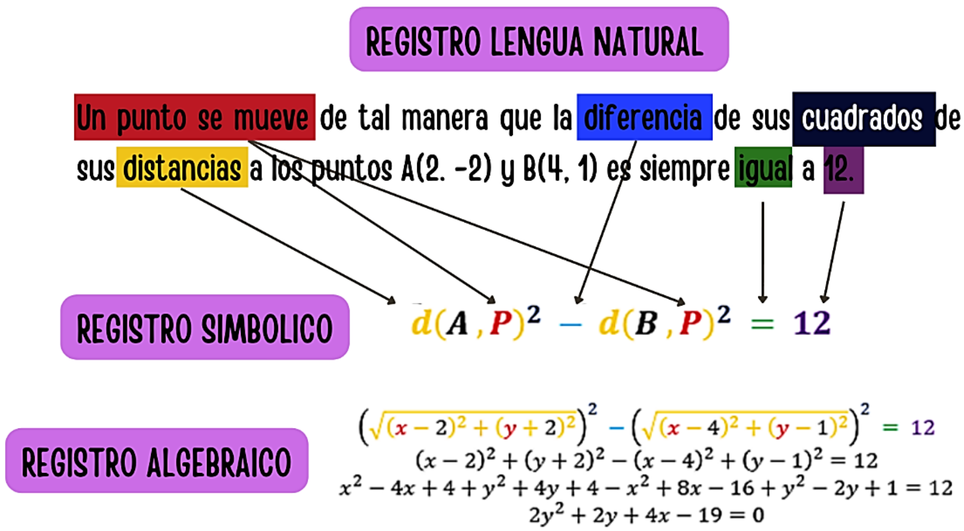
Se pueden establecer explícitamente reglas o el paso a paso para hacer una transformación de conversión, es decir, pasar de un registro en específico a otro, por ejemplo, pasar de un Registro Algebraico a un Registro Gráfico. Sin embargo, al invertir el sentido del cambio de registro, el problema cambia radicalmente para los estudiantes, donde las reglas dejan de ser operacionales y suficientes. Por otro lado, se puede establecer implícitamente la transformación de conversión, esto sucede cuando se requiere usar de manera interactiva, dos registros o incluso tres, por ejemplo, cuando se usa el lenguaje verbal mientras se escribe en expresiones simbólicas. Si se produce un cambio de registro semiótico también se modifica la representación semiótica, en cambio si se produce un cambio de representación semiótica no necesariamente cambia el registro.

Estas tres actividades cognitivas en el proceso de aprehensión conceptual se relacionan de forma permanente y sin un orden específico, aunque se presentan dificultades al transitar entre representaciones. Tal razón llevó a Duval a plantear que dentro de los sistemas semióticos de representación de un mismo objeto, pueden existir fenómenos de congruencia y no congruencia.

Cuando hay correspondencia término a término en las unidades significantes se habla de congruencia de las representaciones, en este sentido Duval (1999), nos habla de tres criterios de congruencia entre representaciones:

- *Posibilidad de una correspondencia semántica de los elementos significantes*: a cada unidad significante simple de una de las representaciones, se puede asociar una unidad significante elemental. Se considera como unidad significante elemental a toda unidad que depende del léxico de un registro.
- *Univocidad semántica terminal*: a cada unidad significante elemental de la representación de salida, no le corresponde más de una única unidad significante elemental en el registro de representación de llegada.
- El tercer criterio es relativo a la organización de las unidades significantes. Las organizaciones respectivas de las unidades significantes de las dos representaciones comparadas, conduce a que las unidades en correspondencia semántica sean aprehendidas en el mismo orden en las dos representaciones.

Consideremos el siguiente ejemplo, donde se observa la congruencia de unidades significantes que hay entre los diferentes registros que están denotando a un mismo objeto matemático:



La construcción cognitiva de los objetos matemáticos está estrechamente ligada a la capacidad de usar varios registros de representación de dicho objeto, es por ello que (Fandiño, 2010) establece que el estudiante ha logrado el aprendizaje conceptual de un determinado objeto cuando está en grado de:

- Elegir los rasgos distintivos de un objeto y representarlo en un determinado registro;
- Tratar dichas representaciones al interior de un mismo registro;
- Convertir dichas representaciones de un registro en un registro diverso.

Aún más ella considera que un concepto está cognitivamente construido cuando el estudiante está en grado de:

- Identificar las propiedades del objeto que se pueden utilizar en un determinado contexto y por tanto representarlo de manera adecuada según la situación;
- Transformar dicha representación si la situación lo exige;
- Usar de modo oportuno el objeto geométrico en una pluralidad de situaciones, incluso después de realizar transformaciones de conversión.

Duval (1993) pone en advertencia que no se debe confundir un objeto matemático con sus representaciones, pero debido a la imposibilidad de un acceso directo a los objetos matemáticos, fuera de toda representación semiótica, se hace casi inevitable la confusión, esto es a lo que el autor denomina como la paradoja cognitiva del pensamiento matemático:

> (…) de una parte, el aprendizaje de los objetos matemáticos no puede ser sino conceptual y, por otra parte, es solo por medio de representaciones semióticas que es posible una actividad sobre los objetos matemáticos. Esta paradoja puede construir un verdadero círculo vicioso para el aprendizaje. ¿Cómo, sujetos en fase de aprendizaje, podrían no confundir los objetos matemáticos con sus representaciones semióticas si ellos sólo pueden tener relación con las representaciones semióticas? La imposibilidad de un acceso directo a los objetos matemáticos, fuera de su representación semiótica, hace la confusión casi inevitable. Y, por el contrario, ¿Cómo pueden los estudiantes adquirir el dominio de los tratamientos matemáticos, necesariamente ligados a las representaciones semióticas, si no tienen ya un aprendizaje conceptual de los objetos representados? (Duval, 1993, citado por Fandiño, 2010, pág. 39).

Duval plantea que la actividad cognitiva de la conversión entre los diferentes registros de representación de un objeto matemático favorece el aprendizaje de los estudiantes, no solo trabajar en un determinado registro, sino trabajar en una coordinación de diversos registros, puesto que cada representación semiótica contribuye de forma específica con algunos aspectos conceptuales que son componentes del objeto matemático.

El uso de una única representación para un objeto matemático, puede crear un malentendido y el estudiante tenderá a confundir el objeto con su representación, como se mencionó anteriormente en la *paradoja* de Duval. Por tanto, una única representación de un determinado objeto matemático, es de evitar; pero, por otra parte, un exceso de representaciones puede provocar confusiones y pérdida de sentido (Fandiño, 2010).

Duval (1999) llama *semiosis* a la aprehensión de las representaciones semióticas y *noesis* a la aprehensión conceptual de un objeto. Afirma que no hay noesis sin semiosis, lo cual significa que no hay acceso al objeto matemático sino a través de sus representaciones semióticas.

6.2. Tecnologías de la información y de la comunicación (TIC)

Según la UNESCO (2002, citado por López Jiménez & Villafañe Rodríguez, 2010), las TIC se compone por dos conjuntos, las Tecnologías de la Comunicación (TC) constituidas principalmente por la radio, la televisión y la telefonía convencional, y por las Tecnologías de la Información (TI) caracterizadas por el uso de ordenadores y equipos de telecomunicación para almacenar, recuperar, transmitir y manipular datos.

Así, las TIC son el conjunto de avances tecnológicos que nos proporcionan la informática, las telecomunicaciones y las tecnologías audiovisuales, que comprenden los desarrollos relacionados con los ordenadores, Internet, la telefonía, las aplicaciones multimedia y la realidad virtual. Estas tecnologías básicamente nos proporcionan información, herramientas para su proceso y canales de comunicación. Ahora bien, la implementación de las TIC en la educación ha traído grandes beneficios, como lo afirma Graells (2008) las TIC en la educación es un medio de expresión para la creación, un canal de comunicación, un instrumento para procesar información, un instrumento cognitivo y un recurso interactivo para el aprendizaje.

Si hablamos particularmente en la geometría, la implementación de las TIC ha sido notoria, como lo afirma Galvis (2000, citado por Fernández, 2018) los softwares educativos permiten manipular gráficos, ofreciendo la posibilidad de representar los objetos en diferentes sistemas de representación; circunstancia que favorece una mayor comprensión de los objetos matemáticos. Además, el uso del software educativo nos permite proponer actividades más amplias y profundas para los estudiantes; propiciando el desarrollo de un pensamiento activo.

Sin embargo, las TIC por sí solas no van hacer de la enseñanza y del aprendizaje efectos extraordinarios. Es decir, ningún docente por el solo hecho de implementar software educativo en su enseñanza puede esperar que, de forma casi automática, este provoque en sus estudiantes un mayor y mejor aprendizaje y que, además, estén motivados. Como lo afirma Área (2004, citado por Fernández, 2018):

> Esto es una forma de atropismo o fe pedagógica sobre el potencial de las máquinas digitales sin suficiente fundamento racional. Debido a que los ordenadores son objetos o herramientas que adquieren su potencialidad pedagógica en función del tipo de actividades y decisiones metodológicas realizadas por los docentes. En otras palabras, lo relevante para la innovación

> pedagógica de la práctica docente, es el planteamiento y método de enseñanza desarrollado y el proceso de aprendizaje que dicho método promueve en los estudiantes, no las características de la tecnología utilizada (pág. 75).

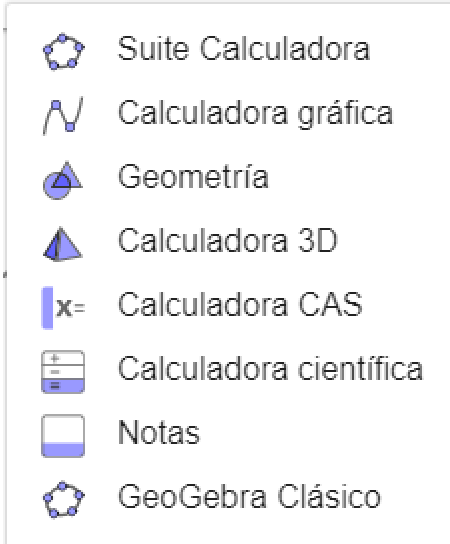
Ahora bien, con la utilización de softwares educativos se ha producido una nueva estructura de la enseñanza de la geometría, donde las ventajas sobre los sistemas tradicionales de enseñanza son innegables, dado que, si se usan adecuadamente, estos estimulan en gran medida al estudiante a explorar, conjeturar, refutar, reformular y explicar el pensamiento geométrico. No sólo contribuyen para verificar conjeturas verdaderas, sino también para construir contraejemplos de conjeturas falsas. Además, potencialmente permiten estimular en los estudiantes la experimentación y la investigación orientada.

> Sandoval (2009, citado por Pineda W. 2021) afirma que cada representación que el estudiante elabora con regla, lápiz y papel genera una escasa visión sobre el objeto matemático, ya que no lo puede manipular y en consecuencia tiene dificultades para establecer un puente entre la representación y el concepto, sin embargo, cuando el estudiante utiliza un software que le permite interactuar con el objeto matemático de manera dinámica, este consigue elementos que ayudan en la creación de dicho puente.

En esta práctica docente se decidió integrar el programa GeoGebra, como una de las herramientas de la TIC para la enseñanza de Geometría Analítica. Este software permite que el estudiante interprete objetos matemáticos al visualizar e interactuar con ellos, modificándolos dinámicamente.

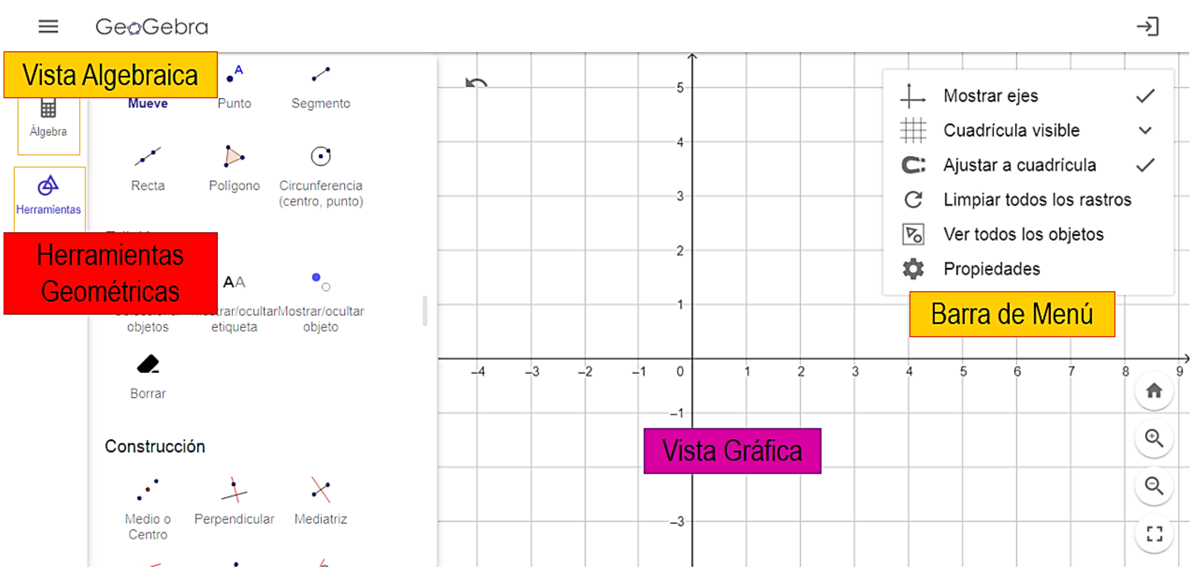
Software GeoGebra. Es un programa interactivo en el que se combinan, por partes iguales, el Registro Gráfico y el Registro Algebraico. Fue diseñado, por Markus Hohenwarter de la Universidad de Salzburgo, como herramienta para la enseñanza y aprendizaje de matemáticas para el nivel de secundaria, su principal característica diferenciadora es el tratamiento algebraico de los elementos geométricos dibujados de forma clásica.

Es pertinente aclarar que en esta práctica se trabajó con GeoGebra geometría, esto puesto que GeoGebra cuenta con una variedad de programas, tales como:



La presentación de la pantalla del programa cuenta con dos ventanas activas: una zona de dibujo en la que se crean y manipulan las representaciones geométricas: puntos; segmentos, rectas, vectores, triángulos, polígonos, círculos, arcos y cónicas; y otra zona donde se manipulan las representaciones algebraicas: las coordenadas de los puntos, las ecuaciones y curvas trazadas que se actualizan simultáneamente con los cambios en la representación gráfica.

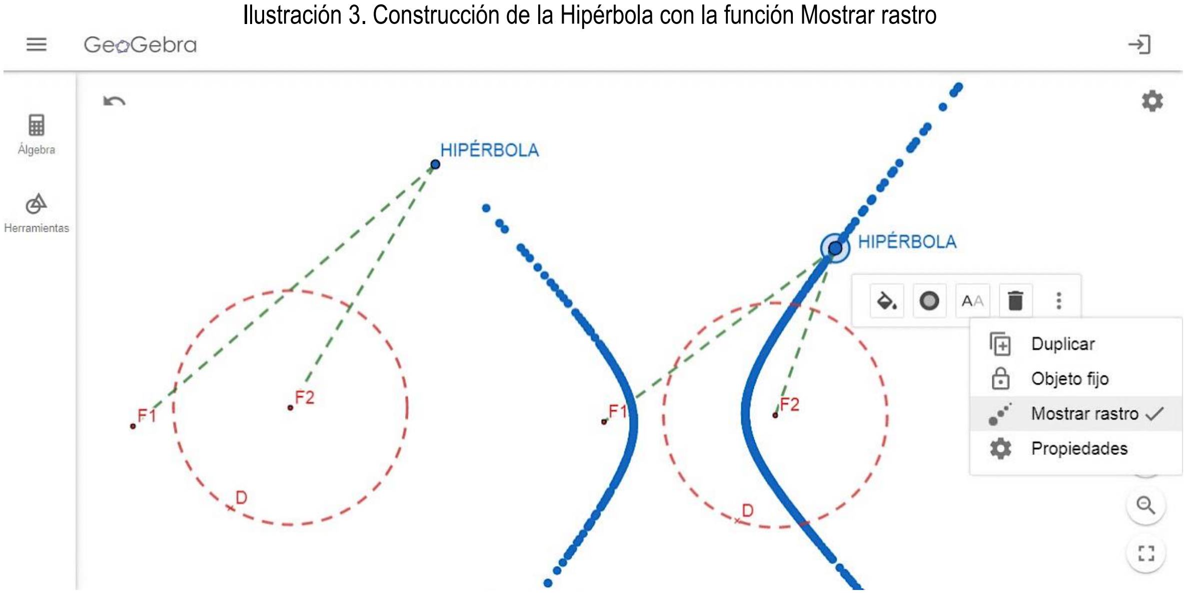
Ilustración 2. Vista de la interfaz de GeoGebra Geometría



Una de las funciones con que cuenta este software es la denominada "Mostrar rastro" la cual permite transitar de una geometría estática a una dinámica, conservando las propiedades del objeto

Matemático, observar Ilustración 3. Construcción de la Hipérbola con la función Mostrar rastro Ahí se puede observar que en el lado izquierdo está la construcción de dicha cónica y en el lado derecho se está mostrando cuáles son los puntos que satisfacen las características para ser parte de la hipérbola. Una de las ventajas que se logró evidenciar con esta función en GeoGebra Geometría es que permite proponer estrategias lúdicas y dinámicas para ayudar en la enseñanza y aprendizaje de la Geometría Analítica, generando en los y las estudiantes un interés por aprender.

Ilustración 3. Construcción de la Hipérbola con la función Mostrar rastro



En síntesis GeoGebra es un recurso metodológico que nos brinda un apoyo como refuerzo para la enseñanza de los docentes, como también para el aprendizaje de los estudiantes, puesto que con esta se tendrán trazos más precisos, soluciones más exactas y además hace las clases más dinámicas permitiendo generar una motivación para el aprendizaje.

6.3. Secuencias Didácticas

Según Zavala (2008, p.16, citado por Barraza, y otros, 2020) una secuencia didáctica es un conjunto de actividades ordenadas, estructuradas y articuladas para la consecución de los objetivos educativos planteados.

Una secuencia didáctica es una tarea importante puesto que, aquí es donde se desarrollará el orden particular que se le otorga a los distintos componentes que integran un ciclo de enseñanza y aprendizaje, con el fin de lograr los objetivos previamente establecidos. Este conjunto de actividades crea una situación didáctica donde se establece una ruta de trabajo donde el estudiante desarrolle cierto tipo de actividades a partir de la guía del docente.

> Las secuencias constituyen una organización de las actividades de aprendizaje que se realizarán con los alumnos y para los alumnos con la finalidad de crear situaciones que les permitan desarrollar un aprendizaje significativo. Por ello, es importante enfatizar que no puede reducirse a un formulario para llenar espacios en blanco, es un instrumento que demanda el conocimiento de la asignatura, la comprensión del programa de estudio y la experiencia y visión pedagógica del docente, así como sus posibilidades de concebir actividades "para" el aprendizaje de los alumnos, (Díaz Barriga, 1984,1996, citado por Barraza, y otros, 2020).

En este sentido, se vuelve relevante el rol del docente en la planificación de las actividades organizadas bajo una lógica secuenciada centrada en el aprendizaje de los estudiantes.

Las secuencias didácticas presentan una estructura integrada por tres actividades: introducción, desarrollo y cierre. Como parte de la planeación de la enseñanza y el aprendizaje, es importante cuestionarse respecto de la secuencia más apropiada para generar los aprendizajes que se persiguen; no hay una secuencia didáctica universal, la validez de las secuencias depende de la naturaleza de los contenidos, los objetivos planteados y los contextos donde se implementarán. Como lo afirma Laguzzi y Simon:

> Es necesario pensar en la selección y secuencia de los contenidos, los objetivos de aprendizaje, las tareas y actividades con sus tiempos, y los modos de evaluar. De esta manera, las secuencias de clase establecen no solo un orden en los contenidos y tiempos de trabajo, sino también un orden lógico para estudiantes y docentes. (Laguzzi & simon, 2018, pág. 9)

Momentos de una secuencia didáctica

Inicio. Se refiere a la apertura del aprendizaje, se diseña un momento esencial con el fin de motivar el aprendizaje del estudiante; permitiendo establecer objetivos y metas de trabajo, así como dar cuenta de los conocimientos previos de los estudiantes frente al contenido que se comenzará a trabajar; generando bases conceptuales o empíricas que den paso a la profundización de contenidos. Se presentan, desarrollan y cierran los distintos temas de la secuencia, estableciendo relaciones entre los diferentes momentos.

Desarrollo. Esta tiene la finalidad de que el estudiante interactúe con una nueva información. Según (Diaz Barriga, 2013) afirma que "hay interacción puesto que el estudiante cuenta con una serie de conocimientos previos sobre un tema, a partir de los cuáles le puede dar sentido y significado a una información" para que esa información sea significativa se requiere poner en interacción la información previa, la nueva información y un referente contextual que ayude a darle sentido, hasta donde sea posible.

Dos momentos son relevantes en las actividades de desarrollo: el trabajo intelectual con una información y el empleo de esa información en alguna situación problema. El problema puede ser real o formulado por el docente, es importante que no se limite a una aplicación escolar de la información, a responder un cuestionario de preguntas sobre el texto o a realizar ejercicios de los que vienen en los textos escolares, sino que es conveniente que esta aplicación de información sea significativa. Por ello, vincularla con un caso, problema o proyecto puede tener más relevancia para el estudiante.

Cierre. Esta actividad se realiza con el objetivo de sistematizar lo aprendido, institucionalizar saberes, repasar, fijar, realizar autoevaluaciones y programar a futuro, se piensa en ciertas actividades que permitan cerrar la secuencia. De alguna forma, las actividades de cierre posibilitan una perspectiva de evaluación para el docente y el estudiante, tanto en el sentido formativo, como sumativo. De esta manera, las actividades propuestas pueden generar múltiple información, tanto sobre el proceso de aprendizaje de los estudiantes, como para la obtención de evidencias de aprendizaje. Es así como se puede analizar lo que se viene logrando, así como las deficiencias y dificultades que se encuentran en cada uno de los estudiantes y en el grupo en general.

Ahora, un elemento que compone e integra una secuencia didáctica y que se debe tener en cuenta es el tiempo, puesto que es necesario pensar en la duración de la secuencia, en relación con la duración del periodo académico y considerando la cantidad de clases previstas para el tratamiento de los contenidos seleccionados.

7. METODOLOGÍA

Para la práctica pedagógica, vista como una primera investigación formativa, se consideró la sistematización de experiencias donde a través de ella se genera conocimiento y se propicia un aprendizaje significativo para la maestra en formación. Esta sistematización hace explícito ese vínculo de relaciones en todas las direcciones en las cuáles la experiencia está enlazada a la totalidad mediante un proceso de interacción y negociación de sentidos. Como lo afirma Jara (2010):

> La sistematización es aquella interpretación crítica de una o varias experiencias que, a partir de su ordenamiento y reconstrucción, descubre o explicita la lógica del proceso vivido en ellas: los diversos factores que intervinieron, cómo se relacionaron entre sí y por qué lo hicieron de ese modo. La Sistematización de Experiencias produce conocimientos y aprendizajes significativos que posibilitan apropiarse de los sentidos de las experiencias, comprenderlas teóricamente y orientarlas hacia el futuro con una perspectiva transformadora. (pág. 2).

De acuerdo con Mejía (2008), en los procesos de sistematización es muy importante dejar registrado lo que acontece en los diferentes eventos y experiencias, ya que si no se hace, se puede llegar a perder una valiosa información. Este registro se tomó de forma ordenada, cronológica, conceptual, secuencial y reflexiva.

Las herramientas utilizadas para el registro de la información en el proceso de la práctica pedagógica fueron las siguientes:

Diario personal. Es una herramienta en la cual se escribió toda la información que se consideraba que sería necesaria para realizar el proyecto, es aquí donde se anotó de forma cronológica los hechos, diálogos, dificultades, conflictos que al resolver marcan otros rumbos, ideas para otros desarrollos, resultados no esperados, entre otros.

Diario de campo. Es una herramienta en la cual se escribió toda la información que se consideraba necesaria para realizar el proyecto, a diferencia del diario personal, es un instrumento de reflexión, interpretación y valoración, en donde se hace toma de decisiones y además se hace la selección y organización de la información que estaba en el diario personal.

El archivo. Este archivo es una carpeta que está ubicada en el computador y tiene el nombre de *práctica pedagógica*, en el cual fueron colocados los diferentes productos que va arrojando el desarrollo del proceso: imágenes, fotos, escritos, guías, documentos. El archivo está organizado de tal manera que me permite clasificar y codificar la información para hacer uso de ellos.

Para el desarrollo de las actividades en el aula se planearon e implementaron tres secuencias didácticas que se llevaron a cabo mediante guías, las cuales estaban estructuradas y organizadas de acuerdo a la Teoría de Registro de Representaciones Semióticas; además, se incluyeron instrucciones para el uso de la herramienta didáctica GeoGebra.

La estructura general de las secuencias didácticas es la siguiente:

Ilustración 4. Estructura de la secuencia didáctica

<table>
<tr><td>Universidad del Cauca</td><td colspan="2">UNIVERSIDAD DEL CAUCA
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES, EXACTAS Y DE LA EDUCACIÓN
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS</td></tr>
<tr><td colspan="3">NOMBRE DEL DOCENTE: Angie Marcela Gómez Delgado</td></tr>
<tr><td>PERIODO ACADEMICO 2022-II</td><td>CURSO: GEOMETRÍA ANALÍTICA</td><td>SECUENCIA N° _</td></tr>
<tr><td colspan="3">1. TEMAS</td></tr>
<tr><td colspan="3">Aquí irá la temática que se desarrollara en la secuencia didáctica</td></tr>
<tr><td colspan="3">2. DURACIÓN DE LA SECUENCIA Y NUMERO DE SESIONES PREVISTAS:</td></tr>
<tr><td colspan="3"></td></tr>
<tr><td colspan="3">3. FINALIDAD, PROPÓSITO U OBJETIVOS:</td></tr>
<tr><td colspan="3"></td></tr>
<tr><td colspan="3">4. MOMENTOS DE LA SECUENCIA DIDACTICA</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Inicio</td><td colspan="2">Motivación y presentación de objetivos</td></tr>
<tr><td colspan="2">Conocimientos previos</td></tr>
<tr><td>desarrollo</td><td colspan="2">Actividad de una nueva temática</td></tr>
<tr><td>cierre</td><td colspan="2">Actividades de retroalimentación</td></tr>
</table>

Para la implementación de las secuencias didácticas inicialmente se diseñaron guías con los contenidos que se describen a continuación:

7.1 Primera secuencia didáctica:

Guía N°1	Sistemas de coordenadas
	Distancia entre dos puntos
	Punto medio
Guía N°2:	Vectores
	Adición y sustracción de vectores
	Magnitud y dirección de un vector
	Producto de un vector por un escalar
	Vectores paralelos
	Producto interno
	Vectores perpendiculares
Guía N°3:	Ecuaciones de una recta
	Distancia de un unto a una recta

7.2 Segunda secuencia didáctica:

Guía N°1	Lugares geométricos
Guía N°2	La circunferencia
Guía N°3	La parábola
Guía N°4	La elipse
Guía N°5	La hipérbola

7.3 Tercer secuencia didáctica:

Guía N°1	Translación de coordenadas
	Traslación de ejes
	Rotación de ejes
Guía N°2	Trazador de curvas de ecuaciones
	Grafica de una ecuación
	Simetrías
	Asíntotas
Guía N°3	Coordenadas polares
	Distancia entre dos puntos
	Relaciones y trasformaciones entre coordenadas rectangulares y polares
Guía N°4	Ecuaciones paramétricas
	De ecuaciones paramétricas a ecuaciones cartesianas
Guía N°5	Geometría en tres dimensiones
	Rectas
	Planos
	Superficies

Diseño de guías

La guía tiene la siguiente estructura (ver Ilustración 5): empieza con los temas que se trabajaron en dicha sesión, luego está el objetivo de la guía y por consiguiente están los conocimientos esperados por parte del estudiante. Seguidamente está la parte de conceptos generales, aquí es donde se encuentra la teoría y ejemplos de la temática abordada. Por último está la parte de Actividades que es un apartado que los estudiantes realizaron, mostrando si tenían inquietudes con algunos conceptos.

Ilustración 5. Estructura de la guía

Universidad del Cauca	UNIVERSIDAD DEL CAUCA FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES, EXACTAS Y DE LA EDUCACIÓN DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
NOMBRE DEL DOCENTE: Angie Marcela Gómez Delgado	
NOMBRE DEL ESTUDIANTE:	
PERIODO ACADEMICO 2022-II	GUIA N° 1
1. TEMATICA	
➢ *La temática que se trató en la guía.*	
2. OBJETIVO DE LA GUÍA	
3. CONOCIMIENTO ESPERADO	

1. Preguntas provocadoras
Aquí se realizaron unas cuantas preguntas con la intensión de generar en el estudiante inquietudes sobre algunos conceptos claves del curso de Geometría Analítica.
2. Conceptos Generales
Este aspecto lo considero como el más relevante dentro de la guía didáctica, pues tiene como función, acompañar y conducir al estudiante en su aprendizaje, ayudándole a superar las dificultades que surjan en el desarrollo de la guía.
3. Actividades
Estimular y activar el recuerdo de conocimientos previos que se consideren importantes para el aprendizaje de nuevos conocimientos.

Todas las guías planteadas fueron desarrolladas por los estudiantes, sin embargo no todos los puntos de las actividades fueron trabajados, porque se prefirió trabajar al ritmo de los estudiantes y en sus inquietudes frente a la temática trabajada.

Al principio de las sesiones los estudiantes asistían por querer "ayudar" con la práctica, con una participación de dos a tres estudiantes, pero al transcurrir las sesiones, se dieron cuenta que estas sesiones si les aportaba a su aprendizaje, llegando a tener una participación de siete a diez estudiantes.

Además, las guías permitieron trabajar tanto con lápiz y papel, como con la herramienta GeoGebra, con la finalidad de que los estudiantes complementen su aprendizaje en geometría analítica; es decir, no se limitó a que los y las estudiantes trabajaran solo en GeoGebra, sino que también se trabajará con lápiz y papel. Puesto que tomar notas a mano implica un acto cognitivo; manipular y transformar información conduce a una comprensión más profunda (Mueller, 2015).

8. RECUENTO HISTÓRICO Y ANÁLISIS CRÍTICO

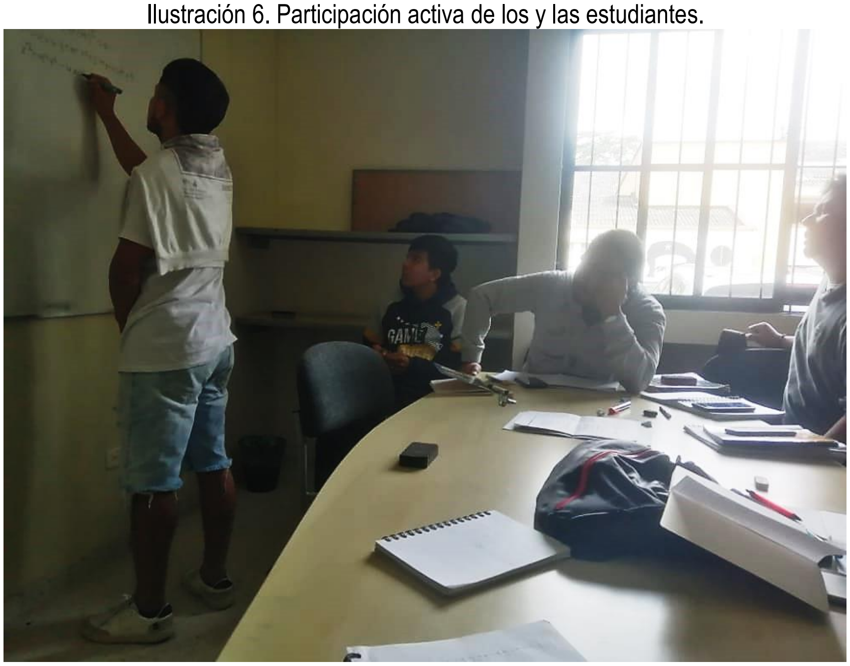
Unas de las dificultades que se presentaron en la práctica docente en diversas sesiones, fueron las devoluciones por parte de la practicante ante las inquietudes de los y las estudiantes; estas no fueron las adecuadas, debido a dos posibles causas: no se tenía total manejo sobre la temática que se trabajó y la falta de experiencia; en consecuencia al dar las devoluciones, simplemente se daban los resultados o la respuesta correcta, haciendo que los estudiantes asuman lo que se les decía como verdadero, sin lograr la actividad cognitiva correspondiente, teniendo así el estudiante un rol pasivo donde estaban a la espera de respuestas y soluciones dadas por el docente. La intención era que ellos construyeran cognitivamente los objetos matemáticos que se estaban trabajando en dicha sesión, más que sólo "creer" o hacer actos de" fe" en las afirmaciones que se daban. Sin embargo, esto es algo que se irá aprendiendo en el transcurso de la labor docente.

Otra de las dificultades o inconvenientes que se encontraron es que los estudiantes no seguían las guías, puesto que ellos querían trabajar en ejercicios específicos o que les ayudará a resolver dudas sobre la temática trabajada con el profesor titular. Las guías fueron diseñadas en un principio para que los estudiantes las resolverlas, sin embargo, a partir de la tercera guía, se modificó su estructura ya que los estudiantes tenían otros fines en estas sesiones.

Por otro lado, es pertinente resaltar que uno de los beneficios que se ha encontrado al realizar la práctica pedagógica en la Universidad Del Cauca es que los estudiantes están siempre en disposición de querer aprender, no hubo una sesión en la que los estudiantes no quisieran realizar las actividades; al principio asistían por querer "ayudar" con la práctica, pero al transcurrir las sesiones, se dieron cuenta que estas sesiones si les aportaba a su aprendizaje.

En las sesiones siempre se trabajó al ritmo del aprendizaje de los y las estudiantes, ya que no se tenía que cumplir con un contenido, sino más bien ser un apoyo para su aprendizaje, en donde sí se observaba que tenían falencias, se les ayudaba a reforzar ese aprendizaje; además en las sesiones ellos no estaban presionados por calificaciones, sino por su propio aprendizaje, el cual no sólo les será útil para el curso, sino que además les será de gran utilidad tanto para los cursos posteriores, como también para su labor profesional, es por ello que se sentían con la libertad de cometer errores para aprender, sin miedo a que los estén juzgando. Cumpliendo así el objetivo de esta práctica la cual era contribuir a aprendizaje en geometría analítica.

Ilustración 6. Participación activa de los y las estudiantes.



Ahora, se presentará una serie de análisis de algunos registros semióticos del trabajo realizado por los estudiantes, identificando si las operaciones cognitivas de los estudiantes fueron las adecuadas o no, y en el caso de que no fueron las adecuadas, cuáles podría ser las posibles causas y además, cuál podría ser la solución a dichas falencias, esto con el fin de analizar si los estudiantes construyeron cognitivamente los objetos geométricos.

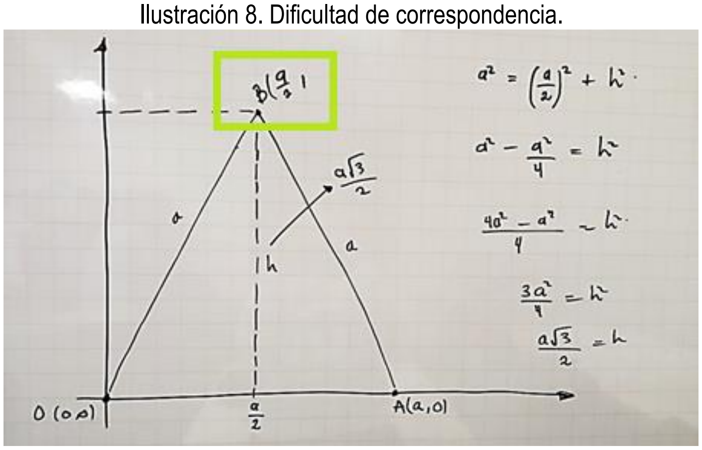
El objetivo de la guía N°1 fue presentar algunos de los conceptos fundamentales que constituyen la base del estudio de la Geometría analítica plana. Se les propuso el siguiente ejercicio, observar Ilustración 7. Ejercicio Propuesto., con el fin de trabajar en las actividades cognitivas, en los registros Lengua Natural, Gráfico y Algebraico:

Ilustración 7. Ejercicio Propuesto.

Ejercicio: Un triángulo equilátero OAB cuyo lado tiene una longitud a está colocado de tal manera que el vértice O está en el origen, el vértice A está sobre el eje de las X y a la derecha de O, y el vértice B está arriba del eje X. Realiza su representación gráfica en GeoGebra y halla las coordenadas de los vértices A y B y el Área del triángulo.

Los estudiantes lograron encontrar las coordenadas de los puntos O, A, sin embargo, para las coordenadas del punto B, hubo un inconveniente, encontraron la coordenada de las abscisas, pero para la coordenada de las ordenadas, aunque la encontraron, no lograron determinar que ese valor pertenecía a dicha coordenada.

Ilustración 8. Dificultad de correspondencia.



En el registro anterior (Ilustración 8. Dificultad de correspondencia.) podemos observar que los estudiantes llevaron a cabo el siguiente proceso: construyeron el triángulo OAB en el plano cartesiano según las indicaciones planteadas en el ejercicio (Ilustración 7); seguidamente, ubicaron las coordenadas de los punto O y A; luego, para la búsqueda de los valores de las coordenadas del punto B hacen uso del Teorema de Pitágoras para obtener una ecuación que les permita determinar el valor de la altura del mismo, obteniendo la siguiente ecuación $a^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + h^2$, luego con el fin de despejar h, hace uso de sus conocimientos sobre operaciones con expresiones algebraicas para tener como resultado $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

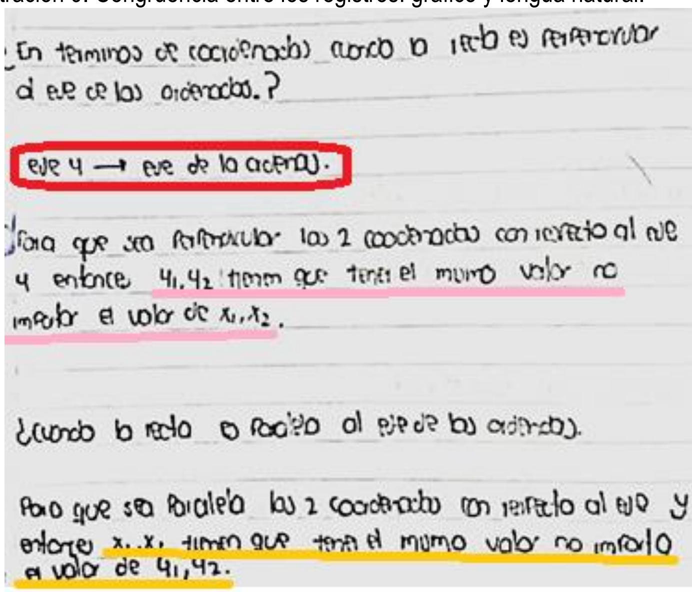
Así, los estudiantes realizan operaciones cognitivas de tratamiento y de conversión, dado que una vez construyen el triángulo y luego pasan a buscar una ecuación que les permita determinar el valor de la altura del mismo, están pasando del Registro Gráfico al Registro Algebraico; siendo esto una transformación de conversión, y además al hacer uso de sus conocimientos sobre operaciones con expresiones algebraicas para despejar h en la ecuación $a^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + h^2$, hacen una actividad cognitiva de tratamiento.

Ahora bien, para la solución del ejercicio, se necesitaba la altura del triángulo OAB, como se observa en la Ilustración 8. Dificultad de correspondencia., los estudiantes encontraron la altura, sin embargo, teniendo la proyección horizontal, no lograron precisar que ese valor correspondía a dicha coordenada. Una posible causa de esta dificultad podría ser, que los estudiantes trabajan muy bien en un sistema de coordenadas unidimensionales, pero presentan dificultades al trabajar en un sistema de coordenadas bidimensionales.

En varias sesiones los estudiantes lograron realizar la congruencia de unidades significativas entre el Registro Gráfico al Registro Lengua Natural. Veamos cómo en la guía N°3 a partir de una construcción realizada en GeoGebra (ver GUIA N° 3, construcción) los y las estudiantes operan esta actividad cognitiva.

El ejercicio consistía en construir una recta a partir de dos puntos cualesquiera $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$. A partir de ello se realizó una serie de preguntas, una de ellas consistía en determinar en términos de coordenadas cuándo la recta es perpendicular y paralela al eje de las ordenadas.

Ilustración 9. Congruencia entre los registros: gráfico y lengua natural.


¿En términos de coordenadas cuándo la recta es perpendicular al eje de las ordenadas.?

eje y → eje de la ordenadas.

Para que sea perpendicular las 2 coordenadas con respecto al eje y entonces y_1, y_2 tienen que tener el mismo valor no importa el valor de x_1, x_2.

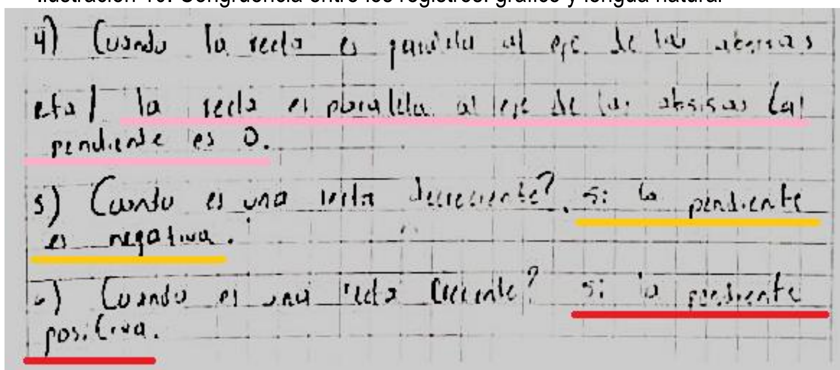
¿Cuándo la recta es paralela al eje de las ordenadas.

Para que sea paralela las 2 coordenadas con respecto al eje y entonces x_1, x_1 tienen que tener el mismo valor no importa el valor de y_1, y_2.

Los estudiantes primero interpretaron el enunciado, registrando que se le conoce al $eje\ y$ como el eje de las ordenadas, una vez comprendieron lo que se está preguntando, procedieron a manipular la construcción realizada en GeoGebra, llegando a la conclusión de que "*para que sea perpendicular, las coordenadas de los dos puntos deben de cumplir la siguiente condición:* $y_1,\ y_2$ *tienen que tener el mismo valor y no importa el valor de* $x_1,\ x_2$". Análogamente respondieron a la pregunta de cuándo la recta es paralela al eje de las ordenadas (ver Ilustración 9).

Similarmente, se realizó otra construcción de la recta a partir de un punto y una pendiente cualesquiera (ver GUIA N° 3). A partir de ello se realizó las siguientes preguntas: en términos de pendiente, responder cuándo la recta es perpendicular y paralela al eje de las abscisas, y cuándo la recta es creciente y decreciente, a lo que los estudiantes contestaron que "*si la recta es paralela al eje de las abscisas, entonces la pendiente es igual a 0*"; la recta es decreciente cuando *"la pendiente es negativa";* al igual que, la recta es creciente cuando: "*la pendiente es positiva*", como se evidencia en la Ilustración 10:

Ilustración 10. Congruencia entre los registros: gráfico y lengua natural


4) Cuando la recta es paralela al eje de las abcisas
esta | la recta es paralela al eje de las absisas la
pendiente es 0.
5) Cuando es una recta decreciente? si la pendiente
es negativa.
6) Cuando es una recta creciente? si la pendiente
positiva.

Los estudiantes realizan una congruencia de unidades significantes entre los elementos geométricos y los enunciados, es decir que ellos identificaron cuando una recta es paralela o perpendicular a alguno de sus ejes en lo gráfico y a partir de ello lo expresan con sus propias palabras. Es decir, que los estudiantes identifican rasgos distintivos del objeto recta, realizan la operación cognitiva de conversión y además, cuando los estudiantes modificaron la representación gráfica o algebraica en el software hace operación cognitiva de tratamiento. Por lo anterior se establece los estudiantes han construido cognitivamente el objeto geométrico.

Algunos de los beneficios al implementar GeoGebra en esta sesión, es que los estudiantes interactúan directamente con el objeto geométrico, una vez que ellos realizan la construcción en GeoGebra y se les pregunta por ejemplo ¿Cuándo la recta es perpendicular al eje de las ordenadas? Los estudiantes comienzan a modificar ya sea: en la representación algebraica, dándole valores a las coordenadas, sabiendo que si modifican esta representación también se modificará la representación geométrica, permitiendo la actividad cognitiva fundamental ligada a la semiótica, la cual es la transformación de conversión y la congruencia entre estos registros; o modificando directamente la parte geométrica a través de los deslizadores (una herramienta que permite modificar un objeto geométrico conservando sus propiedades). Permitiendo GeoGebra una conversión entre tres Registros, el Gráfico, el Algebraico y el Lengua Natural. Además, es importante resaltar que los estudiantes al realizar esa variación o variaciones de la recta en GeoGebra, hacen conciencia de la correspondencia de unidades significantes, por ende hay congruencia de las representaciones y con ello los estudiantes han construido cognitivamente el objeto recta.

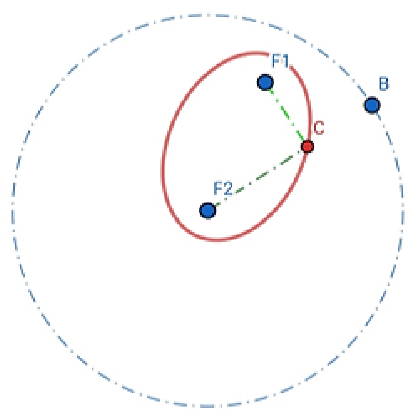
Al realizar la GUIA N° 7 también se observaron los beneficios que trae el implementar GeoGebra para favorecer el aprendizaje de los estudiantes. En esta sesión los estudiantes realizaron en GeoGebra la construcción de la elipse (ver Ilustración 11), con el objetivo de identificar algunos rasgos distintivos del objeto geométrico, para luego representarlo en un determinado registro:

Ilustración 11. Construcción de la Elipse en GeoGebra

Registro Gráfico.

Pasos a seguir para realizar en GeoGebra

- ✓ Ir a Herramienta
- ✓ Crear dos puntos F_1 y F_2, estos cumplirán la función de Focos.
- ✓ Crear una circunferencia con centro en alguno de los dos Focos y radio arbitrario que contenga al otro foco.
- ✓ Representamos un punto de la circunferencia, denotado por B, hacer clic en punto en objeto y luego clic en la circunferencia.
- ✓ Clic en mediatriz, clic en los puntos B y el Foco que no es centro de la circunferencia.
- ✓ Crear el segmento F_1B
- ✓ Al punto de intersección entre el segmento F_1B y la recta mediatriz lo denotamos por E.
- ✓ Ocultar la recta mediatriz y el segmento F_1B
- ✓ Trazar los segmentos F_1E y F_2E
- ✓ Clic en lugar geométrico

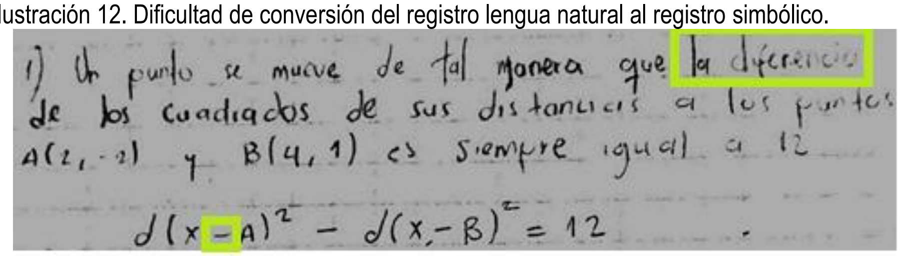


Aunque los estudiantes ya habían trabajado en la temática de elipse con el profesor titular, no tenían construido cognitivamente el objeto matemático, puesto que, una vez realizaron la construcción y observaron el rol que cumplen los puntos llamados focos, hicieron la siguiente expresión *“!ah¡ para eso son esos dos puntos”* ,y cómo a partir de ellos se construye una elipse. Permitiendo así que, después de visualizar dicha construcción en Geogebra, los estudiantes identifican cuales son los puntos que cumplen la condición para pertenecer a este objeto geométrico, cumpliendo así el objetivo planteado.

Por otro lado, una de las dificultades más recurrente en los estudiantes, fue hacer la conversión del Registro Lengua Natural al Registro Simbólico. Veamos cómo en la GUIA N° 4, los estudiantes no realizan la congruencia de unidades significativas en esta operación cognitiva.

En esta sesión se trabajó con lugares geométricos, uno de los ejercicios planteados fue: Un punto se mueve de tal manera que la diferencia de los cuadrados de sus distancias a los puntos $A(2,-2)\ y\ B(4,1)$ es siempre igual a 12.

Ilustración 12. Dificultad de conversión del registro lengua natural al registro simbólico.


1) Un punto se mueve de tal manera que la diferencia de los cuadrados de sus distancias a los puntos A(2,-2) y B(4,1) es siempre igual a 12

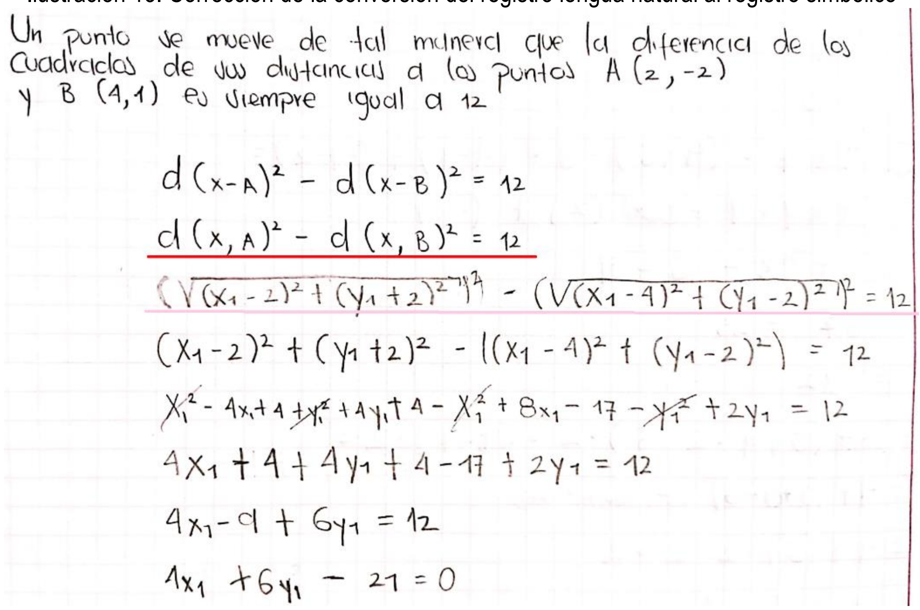
$d(x-A)^2 - d(x,-B)^2 = 12$

En el anterior registro (Ilustración 12) los estudiantes hacen la siguiente congruencia de unidades significativas: Un punto se mueve de tal manera, es congruente con x; los cuadrados de sus distancias, es congruente con $d(\qquad)^2$; es siempre igual a 12, es congruente con $= 12$; sin embargo, con la palabra *diferencia*, si es correcto que es congruente con el signo "$-$", pero los estudiantes hicieron una mala interpretación, al transformarla en como si fuera un signo menos dentro de la representación de distancia (resaltado en el rectángulo amarillo en la Ilustración 12). A la representación que los estudiantes debían llegar era a $d(X,A)^2 - d(X,B)^2 = 12$.

Para que los estudiantes realizaran adecuadamente dicha transformación, se les preguntó ¿cuál sería su representación en el registro algebraico? ¿qué significa $d(x - A)$? ¿dentro de los paréntesis de la representación de distancia que va? ¿cuál sería la representación del enunciado: distancia entre dos puntos? ¿cuál sería la representación del enunciado: la diferencia entre dos distancias? y preguntas similares, con el fin de que los estudiantes realizarán la adecuada congruencia de unidades significas de la representación: la diferencia de los cuadrados de sus distancias a los puntos $A\ y\ B$, con la representación $d(X,A)^2 - d(X,B)^2$.

Este tipo de preguntas ayudaron a los estudiantes a realizar la operación de conversión del registro lengua natural al registro simbólico. En el siguiente Ilustración 13 podemos observar que los estudiantes hacen correspondencia término a término en las unidades significantes por lo que ya hay una congruencia de representaciones y a partir de ahí lograron resolver el problema.

Ilustración 13. Corrección de la conversión del registro lengua natural al registro simbólico



Un punto se mueve de tal manera que la diferencia de los Cuadrados de sus distancias a los puntos A (2, -2) y B (4, 1) es siempre igual a 12

$d(x-A)^2 - d(x-B)^2 = 12$

$d(x, A)^2 - d(x, B)^2 = 12$

$\left(\sqrt{(x_1-2)^2+(y_1+2)^2}\right)^2 - \left(\sqrt{(x_1-4)^2+(y_1-2)^2}\right)^2 = 12$

$(x_1-2)^2+(y_1+2)^2 - ((x_1-4)^2+(y_1-2)^2) = 12$

$\cancel{x_1^2} - 4x_1 + 4 + \cancel{y_1^2} + 4y_1 + 4 - \cancel{x_1^2} + 8x_1 - 17 - \cancel{y_1^2} + 2y_1 = 12$

$4x_1 + 4 + 4y_1 + 4 - 17 + 2y_1 = 12$

$4x_1 - 9 + 6y_1 = 12$

$4x_1 + 6y_1 - 21 = 0$

En el registro anterior (Ilustración 13) podemos observar que los estudiantes llevan a cabo el siguiente proceso: hacen la corrección de la representación en el Registro Simbólico $d(x,A)^2 - d(x,B)^2 = 12$; luego, hacen la conversión al Registro Algebraico, obteniendo la ecuación $\left(\sqrt{(x_1-2)^2+(y_1+2)^2}\right)^2 - \left(\sqrt{(x_1-4)^2+(y_1-2)^2}\right)^2 = 12$; y para finalizar, hacen uso de sus conocimientos en operaciones con expresiones algebraicas para simplificar la ecuación, obteniendo como resultado la educación $4x_1 + 6y_1 - 21 = 0$.

Analizando el anterior proceso, los estudiantes además de realizar la congruencia de unidades significativas correspondiente a la operación cognitiva de conversión, hacen la operación cognitiva de tratamiento al interior de sistema de representación algebraico en distintos momento al resolver la ecuación realizando el siguiente proceso: efectuaron propiedades de potenciación para simplificar la raíz cuadrada, obteniendo $(x_1-2)^2 + (y_1+2)^2 - (x_1-2)^2 + (y_1+2)^2 = 12$, en seguida, usaron $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ y $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ para expandir la expresión, obteniendo $x_1^2 - 4x_1 + 4 + y_1^2 + 4y_1 + 4 - x_1^2 + 8x_1 - 17 - y_1^2 + 2y_1 = 12$, luego, agruparon términos semejantes, cancela términos opuestos, y calcularon sumas y restas, con el fin de reducir la expresión, obteniendo $4x_1 + 6y_1 - 21 = 0$. Así, haciendo uso de sus conocimientos, los y las estudiantes trabajaron dentro del registro algebraico (ver Ilustración 13).

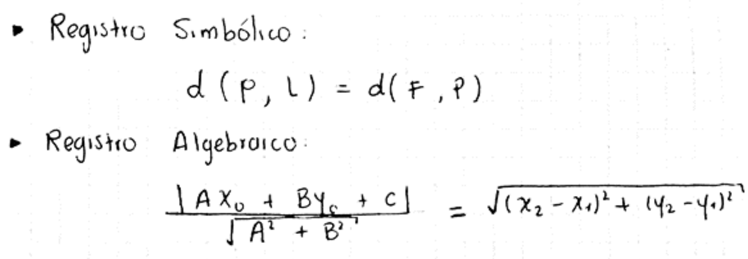
Los y las estudiantes al resolver este tipo de problemas expresaban que: *…es muy difícil pasar de eso escrito a lo Simbólico. Como casi siempre trabajamos en lo Simbólico y lo algebraico... es difícil porque no comprendo lo que me están diciendo en el Registro Lengua Natural y si no logro pasar a lo algebraico, pues no puedo resolver el problema…*

Una de las posibles causas por la que los estudiantes tienen esta dificultad, es porque en la enseñanza de las matemáticas, e incluso en los libros de matemáticas, la mayoría de veces se trabaja en los tratamientos algebraicos y simbólicos, y pocas veces se trabaja en el registro lengua natural. Lo adecuado sería proponer actividades en las cuales los estudiantes hagan transformaciones de conversión, donde ellos realicen congruencias de unidades significativas, puesto que esto significa que los estudiantes han comprendido y construido cognitivamente el objeto matemático. Como lo afirma Duval, la actividad cognitiva de conversión y de tratamiento entre diferentes registros de representación de un objeto matemático, favorece el aprendizaje de los estudiantes; no solo trabajar en un determinado registro, sino trabajar en una coordinación de varios registros, puesto que cada representación semiótica contribuye en la comprensión y construcción cognitiva de dicho objeto matemático.

En la sesión de la GUIA N° 6, se observó que hay un avance en la conversión del Registro Lengua Natural al Registro Simbólico. Veamos:

Se les presentó a los estudiantes el enunciado general de parábola: *la parábola* es *el lugar geométrico de un punto que se mueve en un plano de tal manera que su distancia de una recta fija, situada en el plano, es siempre igual a su distancia de un punto fijo del plano y que no pertenece a la recta.* Para que ellos hicieran la operación cognitiva de conversión al registro simbólico:

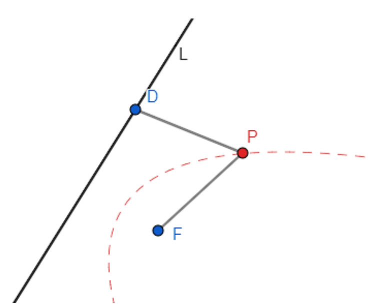
Ilustración 14. Conversión entre el registro lengua natural al registro simbólico



En el anterior registro (Ilustración 14) los estudiantes realizaron la siguiente congruencia de unidades significativas: *un punto,* es congruente con $P(x_1,\ y_1)$; *recta*, es congruente con l; *distancia del punto a una recta fija*, es congruente con $d(P, l)$; e*s siempre igual*, es congruente con el signo $=$; *un punto fijo del plano*, es congruente con $F(x_2, y_2)$; *distancia del punto a un punto fijo del plano y que no pertenece a la recta*, es congruente con $d(P, F)$.

Mostrando así la congruencia de representaciones. Con este ejercicio se quería que los estudiantes, aparte de dar una representación simbólica al enunciado, dieran una representación algebraica y a partir de ésta hacer tratamientos algebraicos para llegar a la ecuación canónica. Sin embargo, este proceso se iba a complicar puesto que como se observa en Ilustración 14, los y las estudiantes llevarían este proceso partiendo de la representación algebraica *distancia de un punto a una recta*, donde se trabajaría con valor absoluto, cuadrados dentro de una raíz y cocientes.

Es por ello que la practicante sugirió que trabajaran en la representación algebraica *distancia de un punto a otro punto* donde este último pertenece a la recta, su representación simbólica sería $d(P, D)$ y su representación algebraica sería $\sqrt{(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2}$ y gráficamente sería:

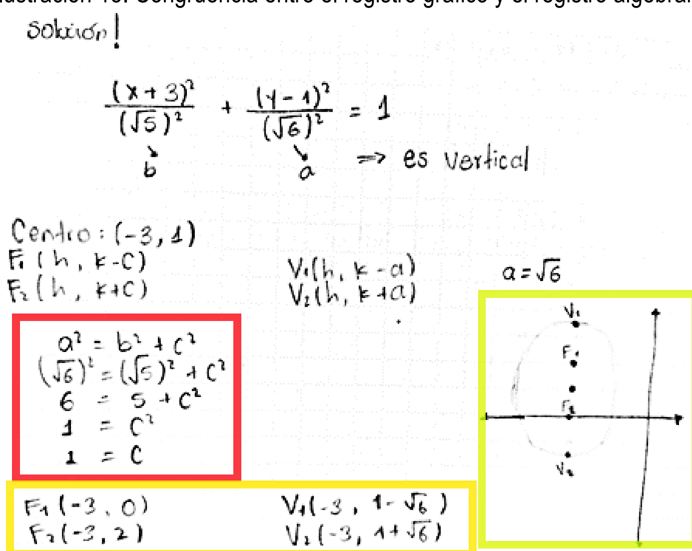


Aunque hay una correspondencia entre estas dos representaciones (la representación simbólica que sugirió la practicante y a la que los estudiantes llegaron) puesto que describen al mismo objeto geométrico parábola, se considera que los estudiantes no comprendieron el porqué de la preferencia de esta representación y no a la que ellos habían llegado, para luego simplificar y obtener la ecuación canónica. Esto se debe a que la practicante no especifico que sería más fácil la simplificación de la representación algebraica *distancia de un punto a otro punto,* puesto que al trabajar en los tratamientos algebraicos se tendría raíces que no tendrían mayor dificultad para despejar y reducir la ecuación.

En varias sesiones los estudiantes lograron realizar la transformación de conversión entre los Registro Aritmético y Gráfico. Veamos cómo en la GUIA N° 7 los estudiantes realizaron esta operación cognitiva adecuadamente:

En esta sesión se trabajó en la temática de elipse, veamos el primer ejercicio: Considere la ecuación $\frac{(x-3)^2}{5}+\frac{(y-1)^2}{6}=1,$ ubique sus elementos en una gráfica.

Ilustración 15. Congruencia entre el registro gráfico y el registro algebraico.



En la Ilustración 15 queda registrado como los estudiantes operan la actividad cognitiva de una representación identificable, puesto que identifican rasgos distintivos de dicho objeto geométrico en la representación algebraica de la elipse, los estudiantes identificaron en la ecuación canónica $\frac{(x+3)^2}{5}+\frac{(y-1)^2}{6}=1$ que su orientación es vertical, ya que el denominador de $(y-1)^2$ es mayor que el denominador de $(x-3)^2$; seguidamente, identificaron las coordenadas del centro de la elipse

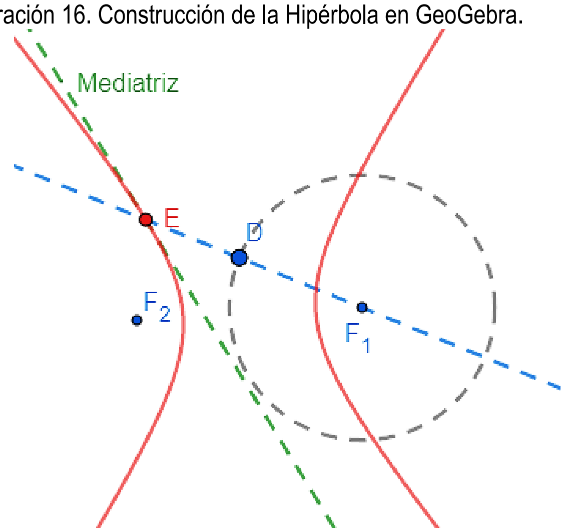
(h, k), donde h es el opuesto aditivo que está acompañando a la x y k es el opuesto aditivo que está acompañando a la y, así el centro es $C(-3,\ 1)$.

Posteriormente, hicieron una operación cognitiva de tratamiento al interior del registro algebraico para encontrar el valor de la distancia del centro al foco, denotada por c, con el fin de encontrar las coordenadas de los focos, utilizando en teorema de Pitágoras (cuadro de color rojo en la Ilustración 15) obteniendo que $c = 1$; seguidamente, encontraron las coordenadas de los focos y los vértices (cuadro de color amarillo en la anterior ilustración).

Finalmente, los estudiantes hicieron una operación cognitiva de conversión, puesto realizaron la congruencia de unidades significativa al ubicar los elementos de la elipse en representación algebraica a una representación gráfica (cuadro de color verde). Por ende se considera que los estudiantes han construido cognitivamente el objeto geométrico elipse.

Por otro lado, se evidenció que los estudiantes lograron una coordinación entre los Registros Gráfico y Simbólico y la conversión entre estos dos registros al Registro Lengua Natural. Veamos cómo en la GUIA N° 8 a partir de una construcción realizada en GeoGebra los y las estudiantes realizaron esta actividad cognitiva.

Ilustración 16. Construcción de la Hipérbola en GeoGebra.



En esta sesión se trabajó en el objeto geométrico hipérbola, los estudiantes realizaron la construcción de la hipérbola siguiendo las instrucciones de la docente, obteniendo la anterior representación gráfica (ver Ilustración 16). A partir de esta construcción, se realizó la siguiente pregunta: ¿cuál sería su representación en el Registro Simbólico?

Ilustración 17. Congruencia entre el registro gráfico y el registro simbólico.

Hiperbola

Registro simbolico

$d(F_1, D) = c$ Por radio

$d(F_2, E) = d(D, E)$ Por mediatriz

$d(F_1, E) = d(E, D) + d(D, F_1)$

$d(F_1, E) = d(F_2, E) + c$ remplazando

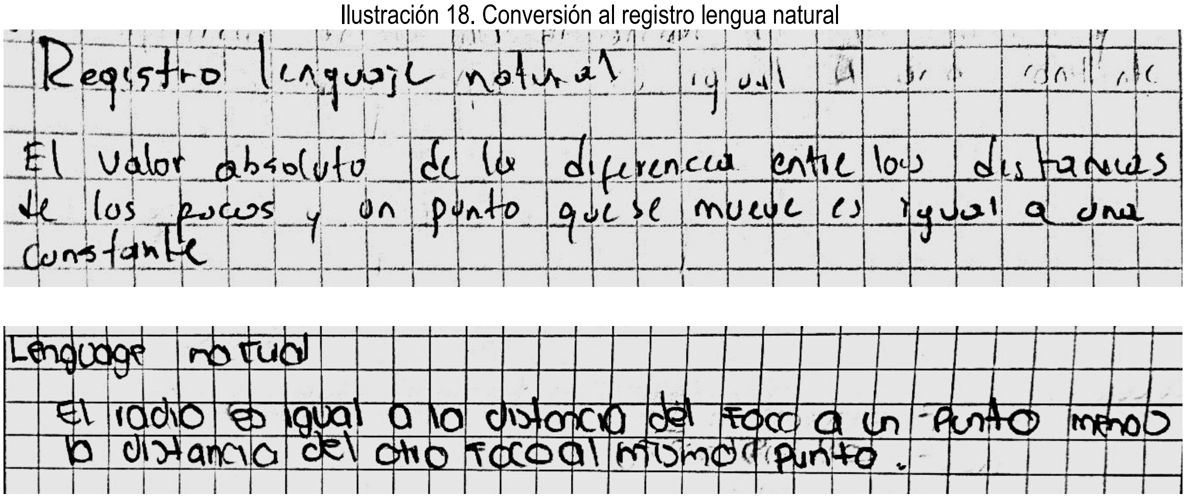
$c = |d(F_1, E) - d(F_2, E|$

En el registro anterior (Ilustración 17) podemos observar que los estudiantes llevaron a cabo el siguiente proceso, primeramente representaron simbólicamente el radio afirmando que la distancia desde el centro a un punto de la circunferencia es siempre igual a una constante, su representación es $d(F_1, D) = c$; luego, en la construcción se hizo uso de la recta mediatriz entre el punto de la circunferencia y el punto foco que está a la izquierda de la circunferencia, es por ello que los estudiantes afirman que la distancia entre el punto E, el cual forma parte de la mediatriz, al punto de la circunferencia es igual a la distancia del punto E al segundo foco, su representación es $d(F_2, E) = d(D, E)$; seguidamente, visualizaron que la distancia del punto E al centro de la circunferencia es igual a la distancia entre el puntos E y el punto que pertenece a la circunferencia, más la distancia entre el punto que pertenece a la circunferencia y el punto que es el centro de la circunferencia, su representación simbólica es $d(F_1, E) = d(E, D) + d(D, F_1)$; luego, remplazaron la distancia de radio y la igualdad de distancias que tenían por definición de mediatriz, obteniendo: $d(F_1, E) = d(F_2, E) + c$; para finalizar, despejaron la constante c, llegando a: $c = |d(F_1, E) - d(F_2, E)|$.

De lo anterior, se afirma que en términos semióticos hay transformación de conversión, debido a que los y las estudiantes hacen congruencia de unidades significativas pasando así de la representación gráfica (Ilustración 16) a la representación simbólica (Ilustración 17). Además de esto, los estudiantes realizan una operación cognitiva de tratamiento dentro del registro simbólico cuando remplazaron la distancia de radio y la igualdad de distancias que tenían por definición de mediatriz.

Con este ejercicio se quería que los estudiantes, aparte de dar una representación simbólica de la hipérbola a partir de su gráfico, dieran una representación en lengua natural, donde ellos lograron hacer la correspondiente conversión, para lo cual, a partir de las dos representaciones anteriores, los estudiantes afirmaron que:

Ilustración 18. Conversión al registro lengua natural


Registro lenguaje natural

El valor absoluto de la diferencia entre las distancias de los focos y un punto que se mueve es igual a una constante

Lenguage natural

El radio es igual a la distancia del foco a un punto menos la distancia del otro foco al mismo punto.

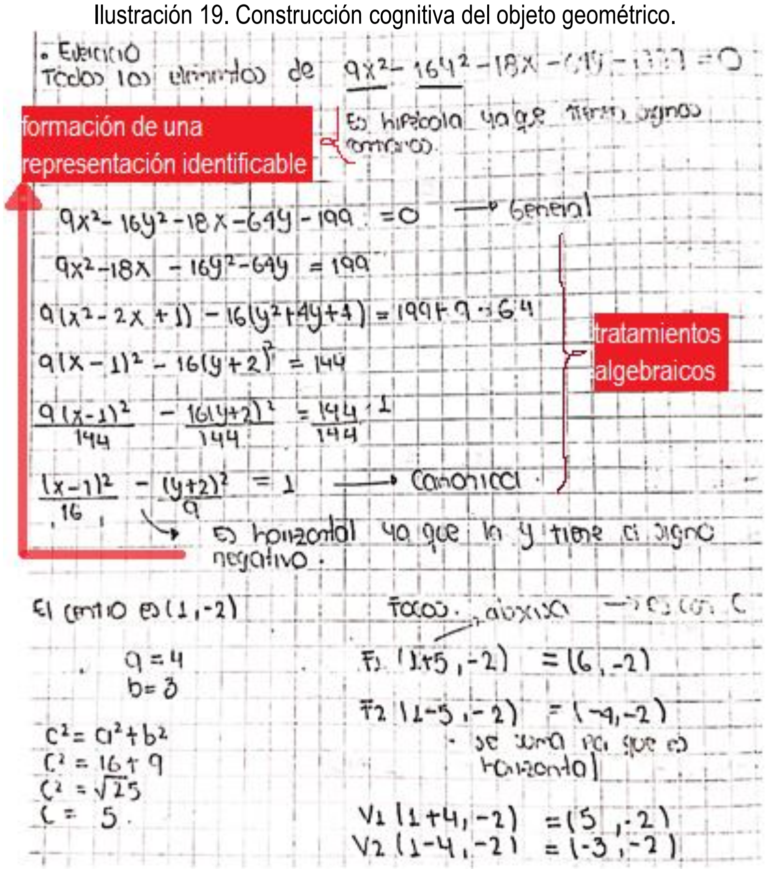
Como se puede observar en la Ilustración 18, los estudiantes expresan con sus propias palabras lo que visualizan gráficamente y lo que tienen simbólicamente, llegando a enunciados verdaderos, haciendo correspondencia término a término en las unidades significantes, llegando así a la congruencia de las representaciones, haciendo una construcción cognitiva del objeto geométrico hipérbola.

Como los estudiantes tenían falencias para realizar congruencia de unidades significantes partiendo del registro algebraico se trató de proponer más ejercicios que involucren este registro con el fin de que los estudiantes tengan mayor familiaridad con este y se acerquen más al objeto geométrico hipérbola.

Ahora veamos la GUIA N° 9, se trabajó un taller con el fin de que los estudiantes apliquen y argumenten correctamente todo lo que han aprendido de la sección de cónicas.

Se considera que los estudiantes han construido cognitivamente dichos objetos matemáticos, puesto que ellos identificaron rasgos distintivos de estos y los representaron en un determinado registro, por ejemplo, a partir de la ecuación canónica, ellos identificaron que tipo de cónica es, cuál es su orientación, cuál es su centro, entre otros elementos, para luego hacer su representación gráfica. Además, ellos transforman dichas representaciones si la situación lo exige, por ejemplo, cuando se les pide graficar una cónica a partir de su ecuación general, los estudiantes la transforman a una ecuación canónica para identificar sus elementos y poderla graficar. Y por último, los estudiantes logran hacer una coordinación entre diversas representaciones haciendo su respectiva conversión, esto se puede observar en la siguiente imagen:

Ilustración 19. Construcción cognitiva del objeto geométrico.



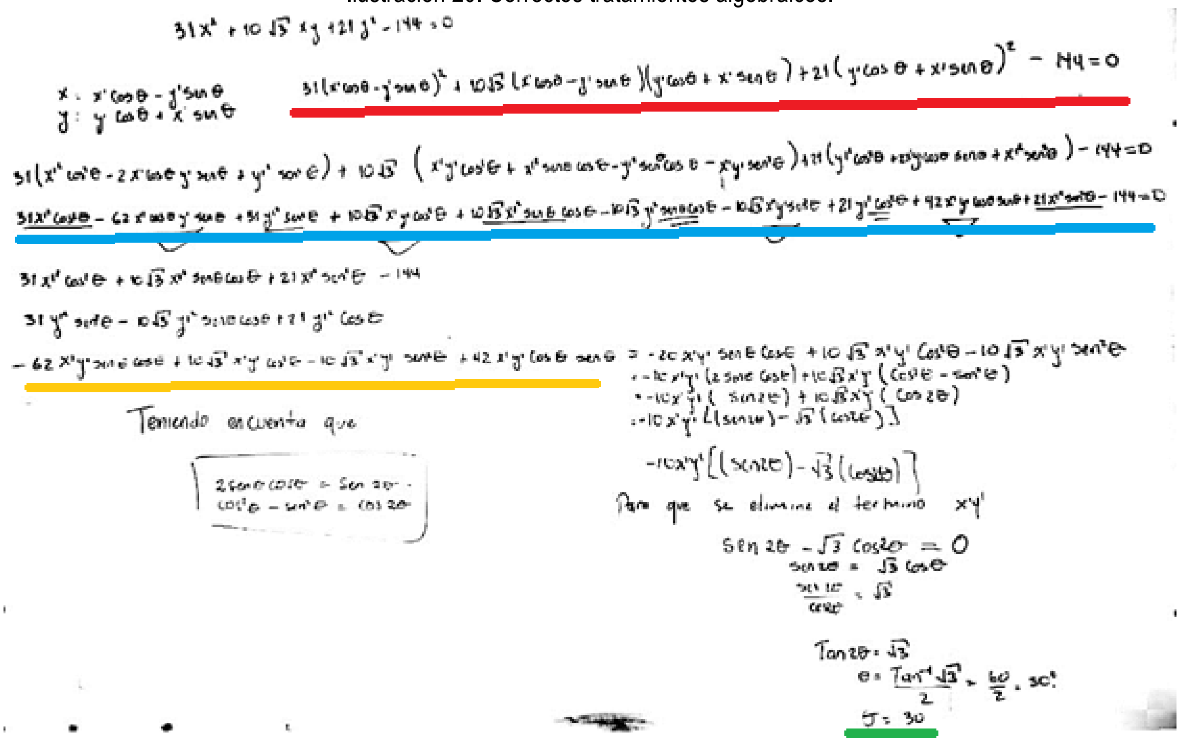
Por otro lado, se evidenció una frustración por parte de los estudiantes, ya que en los tratamientos del Registro Algebraico cometieron errores, a los que ellos llamaban "*errores básicos*" como por ejemplo: cuando a un polinomio le antecede un signo negativo, todos los signos del polinomio cambian, sin embargo los estudiantes sólo cambian el signo del primer término del polinomio; no tenían en consideración la jerarquía de operaciones; suma o resta de fracciones algebraicas erróneas; al completar al cuadrado no sumaban a ambos lados de la ecuación el valor que les daba al tomar la mitad del coeficiente del término x, elevándolo al cuadrado, entre otros errores.

Los y las estudiantes eran conscientes que este tipo de errores los llevaría a resultados incorrectos. Es por ello que se les aconsejó que realizarán las operaciones ordenadamente, que rectificaran y que además las realizarán con calma, puesto que los errores anteriormente cometidos habían sido por tratar de hacer los cálculos en la mente o de manera rápida.

Veamos cómo en la GUIA N° 10 los estudiantes cometieron errores algebraicos, sin embargo ellos construyeron cognitivamente dichos objetos geométricos, puesto que, cometieron errores en algunos tratamientos, pero no en todo el proceso algebraico, además hacían correctamente la congruencia de unidades significativas para una adecuada conversión e identifican rasgos distintivos de los objetos geométricos.

El ejercicio 3 de la GUÍA N°10 plantea: hallar la ecuación de rotación de ejes, necesario para eliminar el término xy de la ecuación $31x^2 + 10\sqrt{3}xy + 21y^2 - 144 = 0.$ Hacer su gráfica. Para la solución del ejercicio los estudiantes deben de eliminar el término xy de la cónica oblicua y para ello deben encontrar el ángulo de inclinación, esto con el fin de que la cónica tenga orientación ya sea horizontal o vertical.

Ilustración 20. Correctos tratamientos algebraicos.



En el registro anterior (Ilustración 20) podemos observar que los estudiantes llevaron a cabo el siguiente proceso, primero remplazaron $x = x'cos\ \theta - y'sen\ \theta$ y $y = y'cos\ \theta + x'sen\ \theta$ en la ecuación $31x^2 + 10\sqrt{3}xy + 21y^2 - 144 = 0$, obteniendo como resultado (resaltado con rojo en la ilustración 20): $31(x'cos\ \theta - y'sen\ \theta)^2 + 10\sqrt{3}(x'cos\ \theta - y'sen\ \theta)(y'cos\ \theta + x'sen\ \theta) + 21(y'cos\ \theta + x'sen\ \theta)^2 - 144 = 0$; luego, resolvieron el binomios al cuadrado, el binomio diferencia al cuadrado y operaron los productos utilizando propiedad distributiva, teniendo como resultado (resaltado con azul en la ilustración 20): $31(x')^2\cos^2\theta\ - 62x'y'\cos\theta sen\ \theta + 31(y')^2 sen^2\ \theta + 10\sqrt{3}x'y'\cos^2\theta + 10\sqrt{3}(x')^2 sen\ \theta\cos\theta - 10\sqrt{3}(y')^2 sen\theta\cos\theta - 10\sqrt{3}x'y'sen^2\theta + 21(y')^2\cos^2\theta\ + 42x'y'cos\theta sen\ \theta + 21(x')^2 sen^2\theta - 144 = 0.$

Seguidamente, los estudiantes colocaron aparte los términos que tenían x' y y' y en otra parte los términos $x'y'$, puesto que se quería eliminar este último término, teniendo así lo siguiente: polinomio con términos x': $31(x')^2\cos^2\theta + 10\sqrt{3}(x')^2 sen\ \theta cos\theta + 21(x')^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta - 144$; polinomio con términos y': $31(y')^2 sen^2\ \theta - 10\sqrt{3}(y')^2 sen\theta\cos\theta + 21(y')^2\cos^2\theta$;

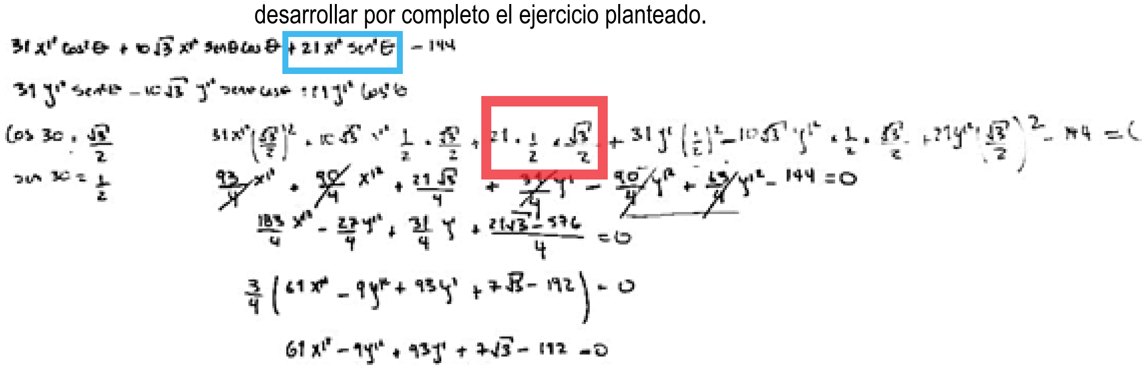
polinomio con términos $x'y'$: $-62x'y'\cos\theta sen\,\theta + 10\sqrt{3}x'y'\cos^2\theta - 10\sqrt{3}x'y'sen^2\theta + 42x'y'cos\theta sen\,\theta$, resaltado con amarillo en la Ilustración 20.

Posteriormente, simplificaron el polinomio de términos $x'y'$, sumando y restando términos semejantes: $-20x'y'\cos\theta sen\,\theta + 10\sqrt{3}x'y'\cos^2\theta - 10\sqrt{3}x'y'sen^2\theta$; para luego factorizar, teniendo como resultado: $-10x'y'(2\cos\theta sen\,\theta) + 10\sqrt{3}x'y'(\cos^2\theta - sen^2\theta)$; seguidamente, hicieron uso de las identidades trigonométricas $2\cos\theta sen\,\theta = sen2\theta$ y $\cos^2\theta - sen^2\theta = cos2\theta$, remplazaron: $-10x'y'(sen2\theta) + 10\sqrt{3}x'y'(cos2\theta)$; por último, volvieron a factorizar, llegando a: $-10x'y'\left[sen2\theta - \sqrt{3}cos2\theta\right]$.

Ahora, como el objetivo es eliminar el término $x'y'$, los estudiantes afirman "para que se elimine el término $x'y'$ se debe hacer $sen2\theta - \sqrt{3}\cos 2\theta$ igual a cero", para solucionar la anterior ecuación los estudiantes determinaron cuando la ecuación es igual a cero. Primeramente, sumaron en ambos lados de la igualdad $-\sqrt{3}\cos 2\theta$, teniendo así $sen\ 2\theta = \sqrt{3}cos2\theta$, luego, dividieron en ambos lados de la igualdad por $cos2\theta$, obteniendo $\frac{sen\ 2\theta}{\cos 2\theta} = \sqrt{3}$, después, utilizaron sus conocimientos trigonométricos: $\tan 2\theta = \sqrt{3}$, en seguida, despejaron θ, llegando a que $\theta = 30°$, como se observa en la Ilustración 20 resaltado con verde.

En consecuencia los estudiantes remplazaron $\theta = 30°$, en la ecuación para simplificarla y así poder determinar qué tipo de cónica es y además encontrar todos sus elementos para graficarla.

Ilustración 21. En consecuencia de una mala operación en el tratamiento algebraico los estudiantes no lograron desarrollar por completo el ejercicio planteado.



En el registro anterior podemos observar que los estudiantes remplazaron $\theta = 30°$ teniendo que $\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ y $\operatorname{sen} 30° = \frac{1}{2}$, sin embargo, al remplazarla en la ecuación cometieron un error: en la ecuación tenían $21(x')^2 \operatorname{sen}^2 \theta$ (resaltado con azul en la Ilustración 21) y al remplazar lo hicieron como si hubieran tenido $21\mathrm{sen}\theta\cos\theta$ obteniendo $21 \times \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}$ (resaltado con rojo en la Ilustración 21).

Aunque todo el proceso antes realizado es correcto, este solo error los condujo a una respuesta incorrecta, ellos obtuvieron la ecuación $61(x')^2 - 9(y')^2 + 93y' + 7\sqrt{3} - 192 = 0$; los estudiantes al comprobar en GeoGebra si esta era la misma cónica del ejercicio planteado solo que no iba a ser oblicua, se dieron cuenta que se trataba de otra cónica, reconociendo así que en el proceso algebraico han cometido algún error.

Es importante resaltar que los y las estudiantes tenían claro el proceso a seguir para la resolución del ejercicio, aunque no realizaron la gráfica por un solo error en los tratamientos algebraicos, es por ellos que se establece que los estudiantes han construido cognitivamente el objeto geométrico rotación de ejes.

9. CONCLUSIONES

- El Software GeoGebra permitió que los y las estudiantes identifiquen los rasgos distintivos de un objeto geométrico, la congruencia de unidades significativas de las representaciones y la transformación de tratamientos.
- Los y las estudiantes utilizaron el software GeoGebra como una herramienta de verificación de sus procesos algebraicos visualizando lo geométrico.
- La formulación de una representación identificable es una actividad cognitiva que la mayor parte de los estudiantes lograron desarrollar, puesto que justificaron adecuadamente los rasgos distintivos de los objetos geométricos.
- La conversión de las representaciones semióticas es una actividad cognitiva en la cual, la mayor parte de los estudiantes encontraron obstáculos al principio de las sesiones; sin embargo al pasar las sesiones los y las estudiantes fueron mejorando, aunque al resolver algún ejercicio no se llegaba a los resultados esperados, por algún error cometido en la transformación de tratamientos.
- Los estudiantes presentaron dificultades en la conversión del Registro Lengua Natural al Registro Simbólico, a causa de la no congruencia entre estos dos registros. Además, la practicante no logró corregir en su totalidad dicha falencia; mejoraron gracias a la metodología implementada, pero no siempre realizaron conversiones congruentes.
- Una recomendación al trabajar la conversión del Registro Lengua Natural al Registro Simbólico o al Algebraico es que los docentes muestren a sus estudiantes la congruencia de unidades significativas entre estos registros.

- Gracias a la metodología implementada la mayoría de los estudiantes lograron desarrollar la actividad cognitiva de tratamiento de las representaciones semióticas, puesto que trabajaron al interior de un sistema semiótico, donde hacían uso de los conocimientos que tenían en cada sistema para resolver los ejercicios propuestos y además hacían uso consciente de esta actividad cognitiva sólo si la situación lo exigía; sin embargo, los estudiantes no siempre llegaban a los resultados esperados porque por el afán de resolver el ejercicio cometen “errores básicos”, como ellos los llamaban, llegando así a resultados erróneos.

10. REFERENCIAS

Balles, H. A., Gruszycki, A. E., Gruszycki, L. O., Maras, P. M., & Oteiza, L. N. (2012). *USO DE GEOGEBRA PARA POTENCIAR LAS DIFERENTES REPRESENTACIONES EN GEOMETRIA ANALITICA.* Obtenido de http://www.geogebra.org.uy/2012/actas/31.pdf

Barraza, A., Valles, A., Piñón, G., Soto, P., Segovia, V., Bustillos, S., . . . Uribe, G. (2020). *MODELOS DE SECUENCIAS DIDÁCTICAS.* México: UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA DE DURANGO.

confidencial, E. (2020). *Por qué tomar notas a mano es mucho mejor para estudiar.* Obtenido de https://www.elconfidencial.com/alma-corazon-vida/2020-09-27/por-que-deberias-tomar-notas-a-mano_2751787/

D'Amore, B., Fandiño Panilla, M. I., & Lori, M. (2013). *La semiotica en la didáctica de la matemática.* (B. D'Amore, M. I. Fandiño Panilla, & M. Lori, Edits.) Obtenido de Biblioteca Digital Magisterio: http://bibliotecadigital.magisterio.co.acceso.unicauca.edu.co/node/93959#

Diaz Barriga, Á. (2013). *Secuencias de aprendizaje ¿Un problema del enfoque de competencias?* Obtenido de https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=56729527002

DIE. (07 de 07 de 2022). *Doctorado Internacional en Educacion*. Obtenido de https://die.udistrital.edu.co/comunidad/raymond_duval/

Dip, H., Herrera, C., Olmos, A., & Savio, C. (2018). *ANÁLISIS DE LA CONVERSIÓN DE REPRESENTACIONES SEMIÓTICAS DEL TEMA CÓNICAS EN LA CÁTEDRA DE GEOMETRÍA ANALÍTICA.* Obtenido de https://cadi.org.ar/wp-content/uploads/2018/09/4_CADI_y_10_CAEDI_paper_177.pdf

Duval. (1999). *SEMIOSIS Y PENSAMIENTO HUMANO: Registros semióticos y Aprendizajes intelectuales.* Obtenido de Cali. Universidad del valle.

Duval. (2016). *Un análisis cognitivo de problemas de comprensión en el aprendizaje de las matemáticas.* Obtenido de https://classroom.google.com/u/0/w/MjY5MTI0MDgxNjU5/tc/MjY5NDkwMTU5ODIx

Duval. (2005). *Las condiciones gognitivas del aprendizaje de la geometría. Desarrollo de la visuallización, deferenciaciones de los razonamientos, coordinación de sus funcionamientos. .* Obtenido de file:///C:/Users/Usuario/Downloads/Documents/Duval2016Las.pdf

Duval. (2006). *Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación.* Obtenido de file:///C:/Users/Usuario/Downloads/Documents/La%20habilidad%20para%20cambiar%20el%20registro%20de%20representaci%C3%B3n.pdf

Fandiño, M. (2010). *Múltiples aspectos del aprendizaje de la matemática.* Obtenido de http://bibliotecadigital.magisterio.co.acceso.unicauca.edu.co/libro/m-ltiples-aspectos-del-aprendizaje-de-la-matem-tica#

González. (s.f). *La gestión de la clase de geometría utilizando sistemas de geometría dinámica.* Obtenido de https://www.uv.es/Angel.Gutierrez/aprengeom/archivos2/homenaje/19Gonzalez-LopezMJ.PDF

Jara, O. (2010). *Orientaciones teórico-prácticas para la sistematización de experiencias. .* Obtenido de http://centroderecursos.alboan.org/ebooks/0000/0788/6_JAR_ORI.pdf

Laguzzi, & simon. (2018). *Modos de organizar las clases: las secuencias didácticas.* Obtenido de https://www.buenosaires.gob.ar/sites/gcaba/files/profnes_marco_doc_2_modos_de_organizar_las_clases_-_final.pdf

López Jiménez, I., & Villafañe Rodríguez, C. (2010). *La integración de las tic al currículo: propuesta práctica.* Obtenido de https://www.redalyc.org/pdf/1995/199516111056.pdf

Mueller, P. (2015). *La escritura a mano beneficia el desarrollo cognitivo*. Obtenido de https://www.universia.net/ec/actualidad/orientacion-academica/escritura-mano-beneficia-desarrollo-cognitivo-1117623.html

Olivares, E. (2018). *Coordinación de diferentes registros de representación semiótica para movilizar la noción de elipse en estudiantes de fisica.* Obtenido de https://tesis.pucp.edu.pe/repositorio/bitstream/handle/20.500.12404/12989/OLIVARES_LOP

EZ_COORDINACION_DE_DIFERENTES_REGISTROS_DE_REPRESENTACION_SEMIOTICA.pdf?sequence=1&isAllowed=y

Peñaloza, T., & Flores, J. (2018). *Aprehensiones y modificaciones en el registro Gráfico-Dinámico del paraboloide elíptico.* Obtenido de https://repensarlasmatematicas.files.wordpress.com/2019/05/s109-documento-de-referencia.pdf

Pineda, W. (2021). *Registros de representación semiótica para la comprensión de la elipse usando GeoGebra.* Obtenido de https://repositorio.uptc.edu.co/bitstream/001/8519/1/Registros_representacion_semiotica.pdf

Ramírez Suárez, I. (2007). *Propuesta Didáctica para la enseñanza de la Geometría Analítica en la Licenciatura en Matemática con el uso de un asistente matemático.* Obtenido de https://dspace.uclv.edu.cu/bitstream/handle/123456789/10911/Tesis%20de%20Idelfonso.pdf?sequence=1&isAllowed=y

Salazar, J., & Almouloud, S. (2015). *Registro figural en entornos de geometría dinámica.* Obtenido de file:///C:/Users/Intel/Downloads/26325-Texto%20do%20artigo-68808-1-10-20160114%20(1).pdf

Tecnologías de la información y comunicación: la guía definitiva. (s.f). Obtenido de https://www.ikusi.com/mx/tecnologias-de-la-informacion-y-comunicacion-la-guia-definitiva/

12. ANEXOS

GUIA N° 1

Universidad del Cauca	UNIVERSIDAD DEL CAUCA FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES, EXACTAS Y DE LA EDUCACIÓN DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
NOMBRE DEL DOCENTE: Angie Marcela Gómez Delgado	
NOMBRE DEL ESTUDIANTE:	
PERIODO ACADÉMICO 2022-II	GUIA N° 1

1. MOTIVACIÓN

QUERIDISIMOS DOCENTES EN FORMACIÓN:

"Nunca consideren el estudio como una obligación sino como una oportunidad para penetrar en el bello y maravilloso mundo del saber"

Albert Einstein.

Si desean comunicarse conmigo lo pueden hacer a través de mi correo electrónico marceladelgado@unicauca.edu.co

2. TEMÁTICA

- Sistemas de coordenadas
- Distancia entre dos puntos
- Punto medio de un segmento

3. OBJETIVO DE LA GUÍA

El objetivo de esta guía es presentar algunos de los conceptos fundamentales que constituyen la base del estudio de la Geometría analítica plana.

4. CONOCIMIENTO ESPERADO

- Identifica las características de los sistemas coordenadas y sus respectivas representaciones.
- Reconoce y describe cada una de las características del objeto geométrico distancia entre dos puntos.
- Aplica y argumenta adecuadamente el concepto de distancia entre dos puntos, en las actividades propuestas en clase.
- Reconoce y describe cada una de las características del objeto geométrico punto medio entre dos puntos.
- Aplica y argumenta adecuadamente el concepto de punto medio de un segmento, en las actividades propuestas en clase.

1. Preguntas provocadoras
2. ¿Cuál es la diferencia entre la Geometría Euclidiana y la Geometría Analítica?

3. ¿Cuáles son los elementos fundamentales de la geometría?
4. ¿Cuáles son las representaciones del punto, la recta y el plano?
5. ¿Cuáles considera que podrían ser las ventajas de implementar GeoGebra en la enseñanza de la Geometría Analítica?

2. Conceptos Generales

Sistema De Coordenadas Unidimensionales

Las relaciones de lugar recíprocas entre los puntos de una línea recta L y los números Reales:

Números	Puntos
$si\ a < b\ y\ b < c, entonces\ a < c$	Si P está a la derecha de Q y Q está a la derecha de R, entonces P está a la derecha de R y se dice que Q está entre P y R.
Dados $a\ y\ c$, existen siempre infinitos números b que están entre $a\ y\ c$	Dados P y R, hay siempre infinitos puntos Q que están entre P y R.
Dado el número a podemos descomponer los números del sistema R en dos clases $\boldsymbol{A_1}$ y $\boldsymbol{A_2}$, los cuales tienen infinitos elementos. $\boldsymbol{A_1}$: Es el conjunto de todos los números tales que $a > x$. $\boldsymbol{A_2}$: Es el conjunto de todos los números tales que $a < y$. Así todo número de la clase $\boldsymbol{A_1}$ es menor que cada número de la clase $\boldsymbol{A_2}$.	Dado el punto P podemos descomponer los puntos de la recta L en dos clases $\boldsymbol{P_1}$ y $\boldsymbol{P_2}$, los cuales tienen infinitos elementos. $\boldsymbol{P_1}$: Es el conjunto de todos los puntos tales que P está a la izquierda de los puntos X. $\boldsymbol{P_2}$: Es el conjunto de todos los puntos tales que P está a la derecha de los puntos Y. Así todo punto de la clase $\boldsymbol{P_1}$ está a la izquierda de cada punto de la clase $\boldsymbol{P_2}$.

En consecuencia, esta analogía entre los números reales y los puntos de una recta se convierte en una verdadera correlación si se elige en la recta un determinado origen “0” y una determinada unidad de medida para la medición de segmentos. Con la ayuda de esto, podemos decir que a cada número real a le corresponde uno y solo un punto P. Si a los números a y b les corresponde respectivamente los puntos P y Q como los hemos enunciado anteriormente entonces las propiedades de los números reales les corresponden las leyes de los puntos de la recta.

El punto P con su coordenada (a) es la representación geométrica o gráfica del número real a, y la coordenada (a) es la representación analítica del punto P. Ordinariamente escribiremos el punto P y su coordenada juntos, tal como sigue: P(a).

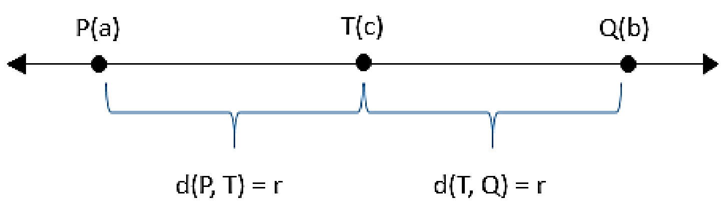
Distancia entre dos puntos en sistemas de coordenadas unidimensional:

- ✓ ¿Recuerdas cómo calcular la distancia entre dos puntos de una recta?
- ✓ ¿Cuál es su representación analítica?

Ejercicio: Considera un caso particular de dos puntos A y B sobre la recta, especificando sus correspondientes coordenadas y calcula su distancia. ¿Cuál es la longitud del segmento $\overline{AB}$? Generaliza el resultado anterior.

Punto medio de un segmento unidimensional:

El punto medio de un segmento es el que lo divide en dos partes iguales, observemos geométricamente:



La distancia entre P y Q es igual al valor absoluto de la diferencia de sus coordenadas.

- ✓ ¿Cuál es su representación analítica?

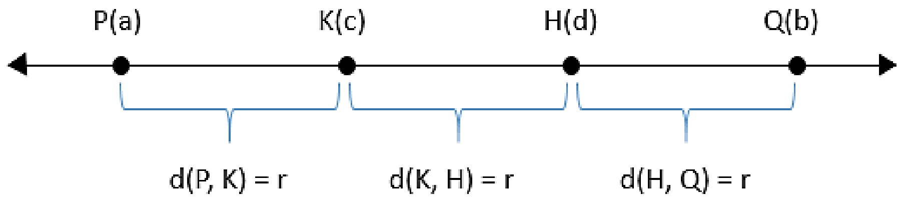
La distancia entre P y T es igual a la mitad de la distancia de los puntos P y Q.

- ✓ ¿Cuál es su representación analítica?

La coordenada del punto T sería igual a la coordenada del punto P más la distancia entre estos dos puntos.

- ✓ ¿Cuál es su representación analítica?

Los puntos que dividen al segmento en tres partes iguales :



- $d(P,Q) = b - a.$
  - ✓ ¿Cuál es su representación en lenguaje natural?

- $d(P,K) = \frac{b-a}{3}$
  - ✓ ¿Cuál es su representación en lenguaje natural?
  - ✓ ¿Cuál es la longitud de cada uno de los tres segmentos?

Las coordenadas de los puntos que dividen al segmento en tres partes iguales son:

- $c = a + r$
- $d = c + r$
  - ✓ ¿Cuál es su representación en lenguaje natural?

Ejercicio: determina cuáles son las coordenadas de los puntos de un segmento que lo divide en n partes iguales.

Sistema De Coordenadas Bidimensionales

- ✓ ¿Qué es el plano cartesiano?
- ✓ ¿Crees que es necesario que los ejes se corten formando un ángulo de 90°?

Análogamente al sistema de coordenadas unidimensionales, al punto P con su coordenada (a, b) es la representación geométrica o gráfica de la pareja ordenada de números reales (a, b), y la coordenada (a, b) es la representación analítica del punto P. Ordinariamente escribiremos el punto P y su coordenada juntos, tal como sigue: P(a, b), donde a pertenece al eje X y b pertenece al eje Y.

- ✓ ¿Qué nombre recibe el eje X y el eje Y?
- ✓ ¿Hay dos coordenadas diferentes para un mismo punto?
- ✓ ¿Qué relación hay entre el plano cartesiano y el conjunto $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$?

Ejercicio: Un triángulo equilátero OAB cuyo lado tiene una longitud a está colocado de tal manera que el vértice O está en el origen, el vértice A está sobre el eje de las X y a la derecha de O, y el vértice B está arriba del eje X. Realiza su representación gráfica en GeoGebra y halla las coordenadas de los vértices A y B y el Área del triángulo.

Distancia entre dos puntos en sistemas de coordenadas bidimensionales:

Para determinar la distancia entre los puntos $P_1(x_1,\ y_1)$ y $P_2(x_2,\ y_2)$, recordemos:

- ✓ En una superficie plana ¿Cuál es la línea más corta para calcular la distancia entre dos puntos?
- ✓ ¿Cuál es el teorema de Pitágoras?

Vamos hacer la construcción en GeoGebra:

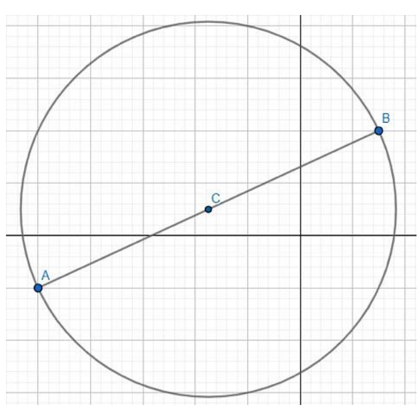
1. Ubica los puntos $P_1(x_1,\ y_1)$ y $P_2(x_2,\ y_2)$ en el plano cartesiano.
2. Traza una recta paralela al eje X que pase por el punto $P_1(x_1,\ y_1)$ y traza otra recta paralela al eje Y que pase por el punto $P_2(x_2,\ y_2)$.
3. Las dos rectas formadas anteriormente se cortan en un punto, lo vamos a denotar por E.
4. Trazamos el segmento $P_1\ P_2$. Así hemos formado un triángulo rectángulo.

¿Consideras que la información anterior es suficiente para determinar la distancia entre los puntos $P_1(x_1,\ y_1)$ y $P_2(x_2,\ y_2)$?

¿Qué sucede si la recta paralela al eje X pasa por el punto $P_2(x_2,\ y_2)$ y la recta paralela al eje Y pasa por el punto $P_1(x_1,\ y_1)$?

Punto medio de un segmento bidimensionales:

El punto medio de un segmento es el que lo divide en dos partes iguales, observemos geométricamente:

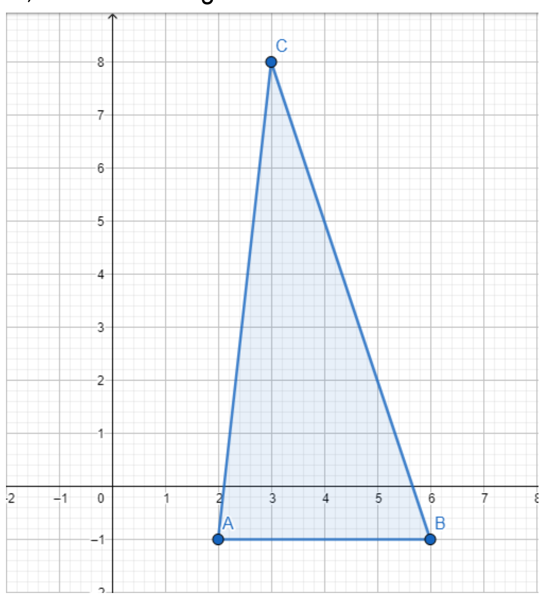


- ✓ ¿Cuál es la distancia entre los puntos A y P?
- ✓ Sabiendo que el punto C es el que divide al segmento en dos partes iguales ¿Cuál es la distancia entre A y C?
- ✓ ¿Cuál es la coordenada del punto C?

Ejercicio: determine cuales son las coordenadas de los puntos de un segmento que lo divide en n partes iguales.

3. Actividades

1. Mostremos que los puntos A (1, -1), B (3, 3), C (11, 4), D (9, 0) son los vértices de un paralelogramo.
2. Según el triángulo siguiente, calcular la longitud de la mediana del lado BC y el punto A.



3. Los extremos de un segmento son los puntos P (1, 2) y Q (-5, -1). Hallar la razón y las coordenadas de los puntos en que divide al segmento en cinco partes iguales, además realiza su representación geométrica en GeoGebra.

GUIA N° 2

Universidad del Cauca	UNIVERSIDAD DEL CAUCA FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES, EXACTAS Y DE LA EDUCACIÓN DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
NOMBRE DEL DOCENTE: Angie Marcela Gómez Delgado	GUÍA N° 2

1. MOTIVACIÓN

QUERIDÍSIMOS DOCENTES EN FORMACIÓN:

"El esfuerzo de hoy será la recompensa del mañana" Marc Miró.

Si desean comunicarse conmigo lo pueden hacer a través de mi correo electrónico marceladelgado@unicauca.edu.co

2. TEMÁTICA

- ✓ Vectores
- ✓ Adición y sustracción de vectores
- ✓ Magnitud y dirección de un vector
- ✓ Producto de un vector por un escalar
- ✓ Vectores paralelos
- ✓ Producto interno
- ✓ Vectores perpendiculares

3. OBJETIVO DE LA GUÍA

El objetivo de esta guía es presentar algunos de los conceptos fundamentales que constituyen la base del estudio de la Geometría analítica plana.

4. CONOCIMIENTO ESPERADO

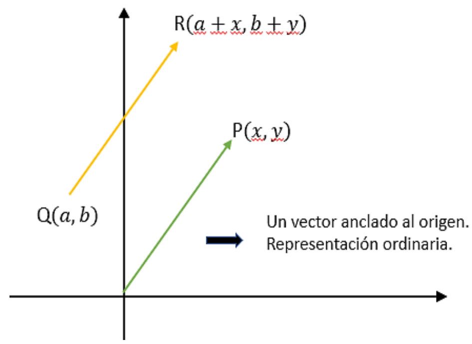
- ✓ Identifica las características de un vector y sus respectivas representaciones.
- ✓ Reconoce y describe cada una de las características del objeto geométrico vector.
- ✓ Aplica y argumenta adecuadamente las operaciones entre vectores, en las actividades propuestas en clase.

1. Conceptos Generales

Puntos y Vectores

En un sistema de coordenadas a cada punto del plano le asignamos un par de coordenadas. Ordinariamente escribiremos el punto P y su coordenada juntos, tal como sigue: P(a, b), donde a es una coordenada sobre el eje X y b es una coordenada sobre el eje Y.

Un Vector es una función que traslada un punto a otro punto, un caso particular es la denominada representación ordinaria, esta es que al punto P(a, b) le asignamos una función de traslación desde el origen hasta el. Su representación gráfica es:



Ejercicio: En GeoGebra grafica el vector anclado al origen con traslación al punto P(5, 2), luego aplica esta función al punto Q(-3, -2)

Pasos a seguir para realizarlo en GeoGebra:

- ✓ Ubica el punto P.
- ✓ Ve a las herramientas y da clic en vector, haz la traslación desde el origen hasta el punto P.
- ✓ Ubica el punto Q.
- ✓ Ubica el cursor en el vector y le da clic en duplicar
- ✓ Arrastra el vector hasta que el punto Q sea el punto inicial del vector.

¿Cuáles son las coordenadas del punto final del vector que tiene como punto inicial Q(-3, -2)? ¿Cómo encontrar ese punto final haciéndolo analíticamente?

Ejercicio: ¿Cuáles son las coordenadas del punto final del vector anclado al origen si se le ha aplicado la misma función al vector que tiene como punto inicial Q(-5, 1) y como punto final R(2, 8)?

Adición y Sustracción de Vectores

Sean $\vec{V}(x_1,\ y_1)$ y $\overrightarrow{W}(x_2,\ y_2)$ dos vectores anclados al origen, tenemos que:

$\vec{V}\ +\ \overrightarrow{W}\ = (x_1 + x_2,\ y_1 + y_2)$

$\vec{V} -\ \overrightarrow{W}\ = (x_1 - x_2,\ y_1 - y_2)$

Propiedades de la adición de Vectores:

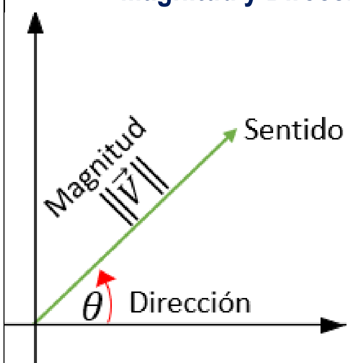
Si $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \vec{z}\ \in R^2$, entonces

- ✓ $\vec{u} +\ \vec{v} \in R^2\ Propiedad\ de$ cerradura
- ✓ $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$ Propiedad conmutativa
- ✓ $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} +\ \vec{w})$ Propiedad asociativa
- ✓ $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$ Elemento neutro
- ✓ $\vec{u} + (-u) = 0$ Inverso aditivo
- ✓ $\vec{u} = \vec{v}\ y\ \vec{w} = \vec{z},\ entonces\ \vec{u} + \vec{w} = \vec{v} + \vec{z}$

Ejercicio: consideremos los vectores $\vec{V}$ (3,9) y $\overrightarrow{W}$ (2, -5), realiza tanto analíticamente como gráficamente:

- ✓ $\vec{V} + \overrightarrow{W}$
- ✓ $\overrightarrow{W} - \vec{V}$
- ✓ $2\vec{V} - \overrightarrow{W}$
- ✓ $\vec{V} + (\vec{V} + \overrightarrow{W})$
- ✓ $(\vec{V} - \overrightarrow{W}) + \overrightarrow{W}$

Magnitud y Dirección de un Vector



La magnitud o norma de un vector es la longitud desde el punto inicial hasta el punto final, se calcula mediante:

$$\|\cdot\| = R^2 \to R_0^+$$
$$\vec{V}(x,y) \longmapsto \|\vec{V}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

La Dirección de un vector está representada por el ángulo, puede ser de 0° a 360°, medido desde la parte positiva del eje de las abscisas hasta llegar al vector, en sentido antihorario, se calcula mediante:

Cuadrante II

$$\theta = 180° - \sin^{-1}\left(\frac{y}{\|V\|}\right)$$
$$\theta = 180° - \cos^{-1}\left(\frac{x}{\|V\|}\right)$$
$$\theta = 180° + \tan^{-1}\left(\frac{Y}{X}\right)$$

Cuadrante I

$$\theta = \sin^{-1}\left(\frac{y}{\|V\|}\right)$$
$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{x}{\|V\|}\right)$$
$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{Y}{X}\right)$$

Cuadrante III

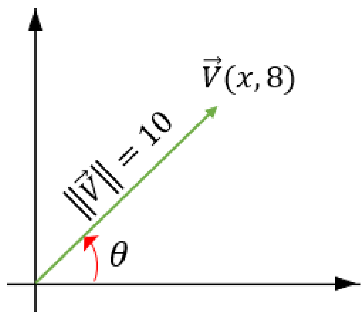
$$\theta = 180° - \sin^{-1}\left(\frac{y}{\|V\|}\right)$$
$$\theta = 180° + \cos^{-1}\left(\frac{x}{\|V\|}\right)$$
$$\theta = 180° + \tan^{-1}\left(\frac{Y}{X}\right)$$

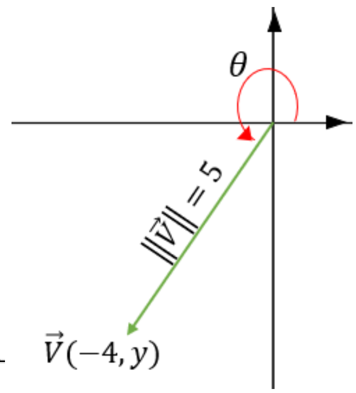
Cuadrante IV

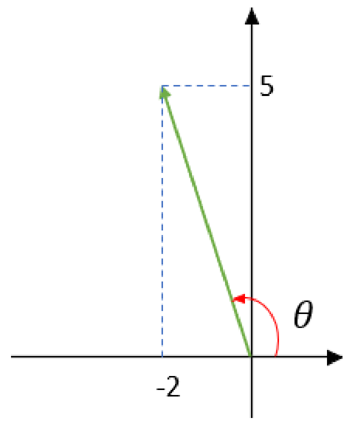
$$\theta = 360 + \sin^{-1}\left(\frac{y}{\|V\|}\right)$$
$$\theta = 360° - \cos^{-1}\left(\frac{x}{\|V\|}\right)$$
$$\theta = 360° + \tan^{-1}\left(\frac{Y}{X}\right)$$

Ejercicio: Sea $\vec{V}$ (-7,2) un vector ¿Cuál es la dirección del vector? ¿Cuál es la magnitud del vector?

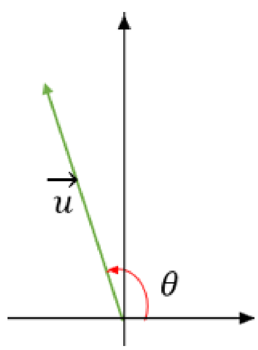
Ejercicio: Determine cuál es la dirección del vector.

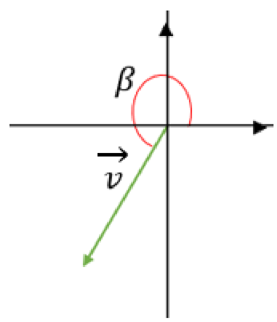






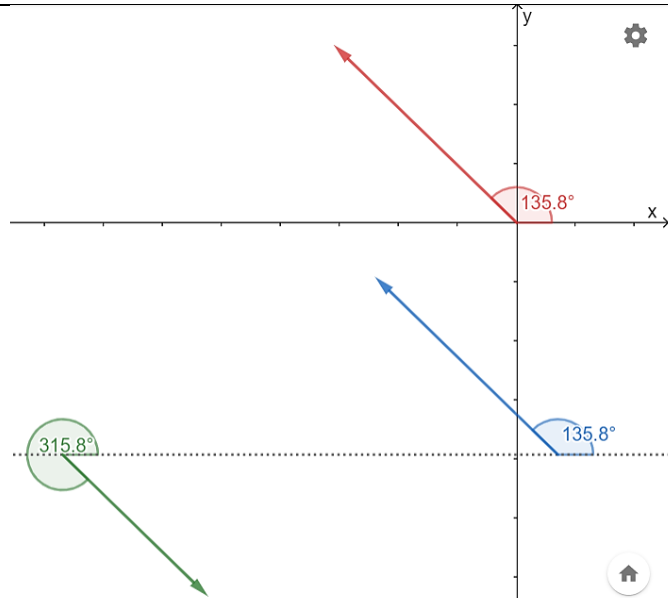
Definición: Dos vectores son paralelos si y sólo si la diferencia de sus ángulos es igual a cero o igual a ciento ochenta.





$$\boxed{\vec{u} \parallel \vec{v} \quad sii \quad |\beta - \theta| = 0 \quad ó \quad |\beta - \theta| = 180}$$

Ejemplo:



Ejercicio: Determinar si los dos vectores dados son paralelos o no, $\vec{u}(4,-1)$, $\vec{v}(-12,3)$

Definición: Un vector de magnitud 1 se llama Vector Unitario.
Nota: si un vector no es unitario, se puede convertir en unitario.
Normalizar: Esto consiste en multiplicarlo por un escalar adecuado, así:

$$\vec{V}(a,b) \qquad ||\vec{V}|| = \sqrt{a^2+b^2}$$

$$\vec{u} = \frac{1}{||\vec{V}||}(a,b) \qquad ||\vec{u}|| = 1$$

Nota: al hacer esta conversión el vector va a conservar sus características, es decir su dirección y sentido no cambian, pero su magnitud sí.

Ejemplo: Cuál es el vector unidad cuya dirección es la misma que la de $(-1,\sqrt{3})$.

$$||\vec{V}|| = \sqrt{(-1)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$$

$$u = \frac{1}{2}(-1,\sqrt{3}) = \left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$||\vec{u}|| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}} = \sqrt{\frac{4}{4}} = 1$$

Ejercicio: grafica en GeoGebra el ejemplo anterior y observa lo que está sucediendo.

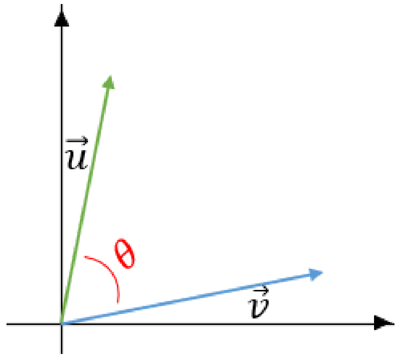
Producto Interno o Producto Punto

Sea $\vec{v}$ (a, b) y $\vec{w}$ (c, d) dos vectores, entonces $\vec{v}\cdot\vec{w} = ac + bd$

Propiedades del producto interno:

- ✓ $\vec{v} \cdot \vec{w} = \vec{w} \cdot \vec{v}$ Propiedad conmutativa
- ✓ $\alpha(\vec{v} \cdot \vec{w}) = (\alpha\vec{v}) \cdot \vec{w}$ Propiedad asociativa con un escalar
- ✓ $\vec{v} \cdot (\vec{w} + \vec{u}) = (\vec{v} \cdot \vec{w}) + (\vec{v} \cdot \vec{u})$ Propiedad distributiva
- ✓ $\vec{w} \cdot \vec{w} = ||\vec{w}||^2$

Ángulo entre dos vectores



$$\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = ||\vec{u}||\,||\vec{v}|| \cos\theta}$$

$$\boxed{\cos\theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{||\vec{u}||\,||\vec{v}||}}$$

Ejercicio: Calcular el coseno del ángulo comprendido entre los vectores $\vec{v}(\,3, -4)$ $\vec{u}(12, 5)$

Nota: Si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$, entonces el ángulo es 90° o 270°.

Ejercicio: calcular para qué valores de a son perpendiculares los vectores $\vec{v}(\,3, 4)$ $\vec{u}(8, a)$

GUIA N° 3

Universidad del Cauca	UNIVERSIDAD DEL CAUCA FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES, EXACTAS Y DE LA EDUCACIÓN DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
NOMBRE DEL DOCENTE: Angie Marcela Gómez Delgado	GUÍA N° 3

1. TEMÁTICA

- ✓ La recta
- ✓ Rectas paralelas
- ✓ Rectas perpendiculares

2. OBJETIVO DE LA GUÍA

El objetivo de esta guía es presentar algunas características que cumple el objeto geométrico recta y mostrar algunas de sus representaciones

3. CONOCIMIENTO ESPERADO

- ✓ Identifica las características de una recta y sus respectivas representaciones.
- ✓ Reconoce y describe cada una de las características del objeto geométrico recta.
- ✓ Aplica y argumenta adecuadamente las operaciones entre rectas, en las actividades propuestas en clase.

1. Conceptos Generales

Registro Lengua Natural.

La recta es un lugar geométrico donde todos los puntos están en la misma dirección.

Registro Gráfico.

Construcción, Pasos a seguir para realizar en GeoGebra

- ✓ Hacer clic en *Herramienta*
- ✓ Hacer clic en *MÁS*
- ✓ Ir a la parte ultima y dar clic en *MÁS*
- ✓ Ir a *Medición* y dar clic en *Deslizador,* dar clic en cualquier parte de la pantalla
- ✓ Colocar en $\text{Min} = \text{-}10$, $\text{Máx} = 10$, $\text{Paso} = 0{,}05$
- ✓ Hacer tres deslizadores más y nombrarlos como x_1, x_2, y_1, y_2, estos van a cumplir la función de coordenadas de los puntos A, B
- ✓ Ir a la parte Álgebra
- ✓ Y crear dos puntos con las coordenadas anteriormente construidas, $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)\ B(x_2,\ y_2)$
- ✓ Escribir $\upsilon = Vector\ (A), \nu = Vector\ (B)$, para trazar el vector director que pasa por estos dos puntos
- ✓ Escribir $\mu = Vector(punto\ inicial, punto\ final)$
- ✓ Ahora trazaremos la recta con un punto y el vector director, escribir $l = Recta(Punto, vector\ director)$

Ejercicio:

En términos de coordenadas responder:
1. ¿Cuándo la recta es perpendicular al eje de las ordenadas?
2. ¿Cuándo la recta es paralela al eje de las ordenadas?

Pasos a seguir para realizar en GeoGebra
- ✓ Ir a *Herramientas*
- ✓ Ir a *Medición*
- ✓ Hacer clic en *Pendiente* y clic en la recta

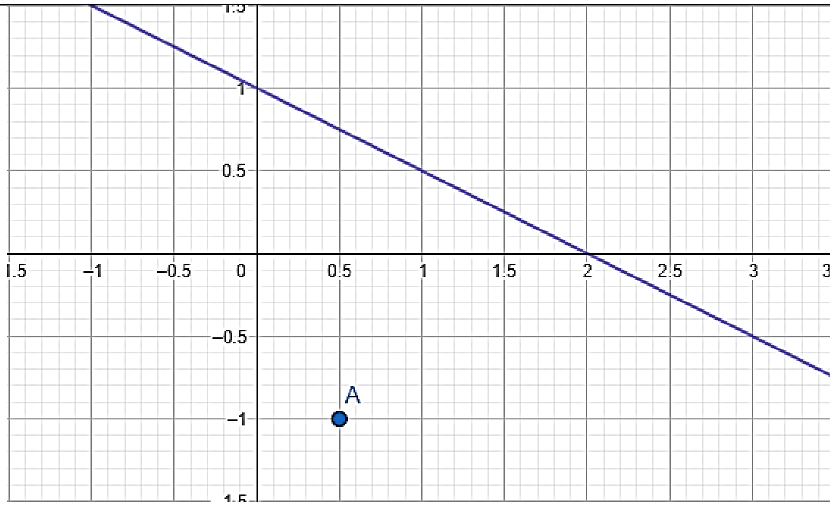
Ejercicio:
En términos de pendiente responder:
1. ¿Cuándo la recta es perpendicular al eje de las abscisas?
2. ¿Cuándo la recta es paralela al eje de las abscisas?
3. ¿Cuándo la recta es decreciente?
4. ¿Cuándo la recta es creciente?

En una nueva ventana de GeoGebra hacer:
- ✓ Ir a la parte *Álgebra*
- ✓ Representar una Recta con una ecuación canónica en variables
- ✓ Hacer dos *Deslizadores* para formar el punto A
- ✓ Escribir $l = Perpendicular(Punto, Recta)$
- ✓ Ir a *Herramientas*
- ✓ Ir a *Construcción*
- ✓ Dar clic en *Pendiente* y dar clic en cada una de las rectas anteriormente formadas
- ✓ Ir a Álgebra
- ✓ Escribir Pendiente1 * Pendiente2
- ✓ Dar clic en *Animar* a cada Deslizador, observar que el producto de las dos pendientes siempre es igual a -1

Observación
GeoGebra nos permite determinar la relación entre dos objetos:
- ✓ Ir a Herramienta
- ✓ Ir a otros
- ✓ Hacer clic en Relación y hacer clic en un punto cuales quiera y en una recta

GeoGebra te dirá si el punto pertenece o no a la recta.

2. Actividades
1. Sean $A(-1,1)$ y $B(1,-2)$. Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto medio del segmento AB y es perpendicular a este. 2. Encontrar la distancia del punto A a la recta



3. Demostrar que los cuatro puntos $A(1,1), B(3,5), C(11,6), D(9,2)$ son los vértices de un paralelogramo

GUIA N° 4

Universidad del Cauca	UNIVERSIDAD DEL CAUCA FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES, EXACTAS Y DE LA EDUCACIÓN DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
NOMBRE DEL DOCENTE: Angie Marcela Gómez Delgado	GUÍA N° 4
1. TEMÁTICA	
✓ Lugares Geométricos	
2. OBJETIVO DE LA GUÍA	
El objetivo de esta guía es presentar algunas características que cumple los lugares geométricos con el fin de trabajar en algunos lugares geométricos especiales en las sesiones siguientes como las cónicas.	
3. CONOCIMIENTO ESPERADO	
✓ Identifica las características de un lugar geométrico y sus respectivas representaciones.	

1. Conceptos Generales

Lugares Geométricos.
Es un conjunto de puntos que tienen alguna característica geométrica común.

Ejemplos: Una recta, estar en un cuadrante, estar en un eje.

Ejemplo Estrofoide

Es una curva engendrada a partir de una curva dada C y de dos puntos A (fijo) y O (el polo).

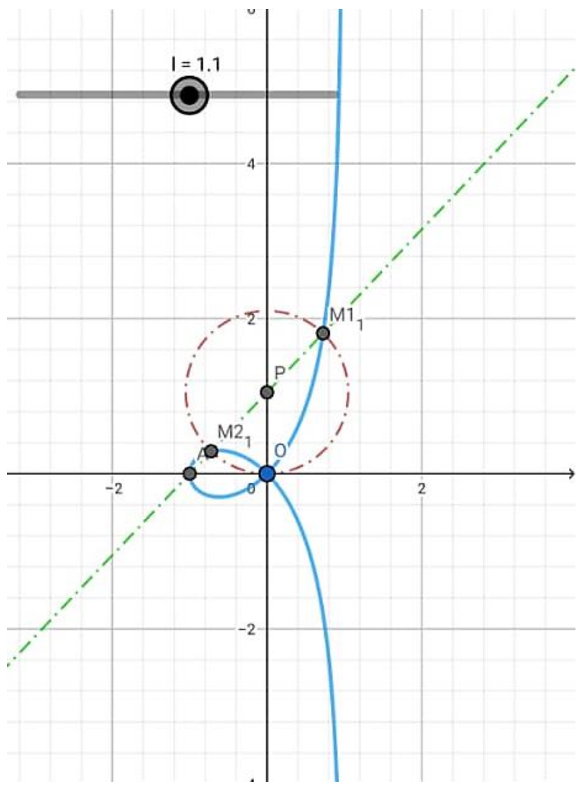
La curva estrofoidal que corresponde a la curva C, con el punto fijo A y el polo O se constituye de la manera siguiente:

Registro Lengua Natural
Sea l una recta móvil que pasa por O y que corta C en K. Sea entoncesP_1 y P_2 los dos puntos de l tales que $P_1K = P_1K = AK$.

El lugar geométrico de los puntos M_1 y M_2 que yacen en radios arbitrarios que pasan por el punto A donde los segmentos PM_1 y PM_2 son iguales al segmento OP.

Registro Gráfico.
Pasos a seguir para realizar en GeoGebra
- ✓ Ir a Álgebra
- ✓ Escribir: $r = 1,\ A(-r, 0),\ O(0,0)$
- ✓ Ir a Herramienta
- ✓ Crear un Deslizador denotado l , $Mín = -15, Máx = 15,\ Paso = 0{,}01$
- ✓ Ir a Álgebra

- ✓ Crear un punto P con coordenada abscisa igual a cero y con coordenada ordenada igual a l
- ✓ Ir a Herramienta
- ✓ Crear una circunferencia en centro P y radio O
- ✓ Crear una recta que pasa por los puntos $A\ y\ P$
- ✓ Los puntos de intersección de la recta y la circunferencia formados se denotaran por $M_1\ y\ M_2$
- ✓ A los dos puntos anteriores activar trazo y mover el deslizador l



Registro Algebraico
La ecuación que satisface dichos puntos es

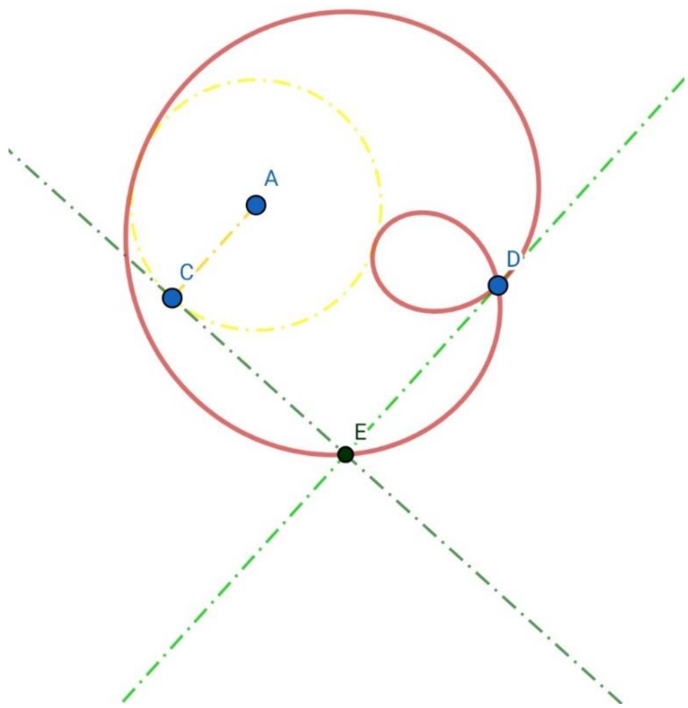
$$y^2 = x^2\left(\frac{r+x}{r-x}\right)$$

Donde r representa la distancia del segmento OP

Otro Ejemplo: Podaria
Registro Lengua Natural
Es el lugar geométrico de las proyecciones ortogonales de ese punto sobre las tangentes de la curva.

Registro Gráfico.
Pasos a seguir para realizar en GeoGebra
- ✓ Ir a Herramienta
- ✓ Crear dos puntos cuales quiera A y B
- ✓ Crear una circunferencia con centro en A y radio B

- ✓ Clic en *Punto en objeto* y dar clic en la circunferencia, denotado por C
- ✓ Crear una segmento que pasa por los puntos $A\ y\ C$
- ✓ Crear una recta perpendicular a la anterior que pase por el punto C, denotada por l_1, esta es una recta tangente de la circunferencia.
- ✓ Crear un punto exterior arbitrario, denotado por D
- ✓ Crear una recta perpendicular a la recta l_1 que pase por el punto D, denotada por l_2
- ✓ Denotar al punto de intersección entre la recta l_1 y l_2, denotado por E
- ✓ Dar clic en lugar geométrico, clic en el punto C y el punto E



2. Actividades

1. Un punto se mueve de tal manera que la diferencia de los cuadrados de sus distancias a los puntos $A(2,-2)\ y\ B(4,1)$ es siempre igual a 12.

2. Un punto se mueve de tal manera que su distancia al punto $A(2,4)$ es siempre igual a su distancia del eje y aumentada en 3.

3. Un punto se mueve de tal manera que su distancias del punto $A(2,-2)$ es siempre igual a su distancia a la recta $x-y+1=0$

GUIA N° 5

GUIA N° 6

Universidad del Cauca	UNIVERSIDAD DEL CAUCA FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES, EXACTAS Y DE LA EDUCACIÓN DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
NOMBRE DEL DOCENTE: Angie Marcela Gómez Delgado	GUÍA N° 6
1. TEMÁTICA	
✓ La parábola ✓ Ecuación canónica ✓ Ecuación general ✓ Elementos de una parábola	
2. OBJETIVO DE LA GUÍA	
El objetivo de esta guía es presentar algunas de las características que cumple el objeto geométrico parábola y mostrar algunas de sus representaciones.	
3. CONOCIMIENTO ESPERADO	
✓ Identifica las características de una parábola y sus respectivas representaciones. ✓ Reconoce y describe cada una de las características del objeto geométrico parábola. ✓ Aplica y argumenta adecuadamente en las actividades propuestas en clase.	

1. Conceptos Generales

LA PARÁBOLA

Registro Lengua Natural.

Es el lugar geométrico de un punto que se mueve en un plano de tal manera que su distancia de una recta fija, situada en el plano, es siempre igual a su distancia de un punto fijo del plano que llamaremos Foco y que no pertenece a la recta.

✓ ¿Cuál sería su representación en el **Registro Simbólico**?

$$d(D,P) = d(F,P)$$

Registro Gráfico.

Pasos a seguir para realizar en GeoGebra

✓ Ir a Herramienta

✓ Crear dos puntos $A\ y\ B$ y por ellos trazar una recta, está cumplirá la función de la recta directriz.

✓ Crear un punto que no pertenezca a la recta, este cumplirá la función del punto Foco. Denotado por F

✓ Vamos a representar un punto C de la recta directriz, para ello, vamos a Medición y le damos clic en punto en objeto, clic en la recta.

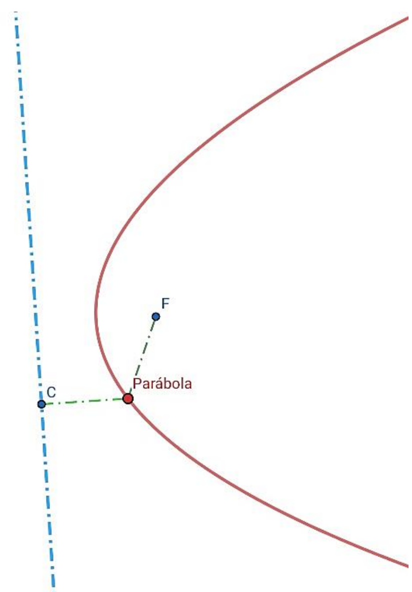
¿Cómo encontramos la distancia de un punto a una recta?

- ✓ Crear una recta perpendicular a la recta directriz que pase por el punto C

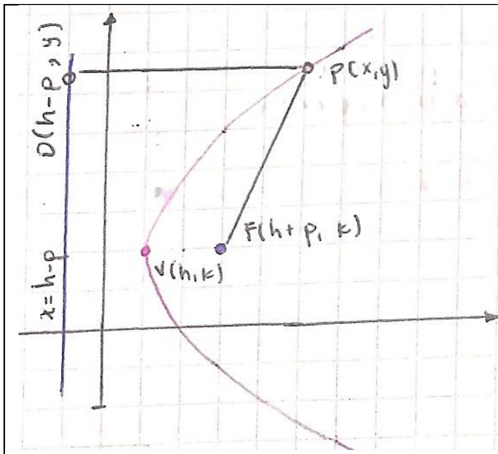
Note que el punto que estamos buscando va a formar parte de la recta perpendicular y va ser el extremo de un segmento que inicia en el Foco y también va ser el extremo de otro segmento que inicia en el punto C

¿Qué es la mediatriz?

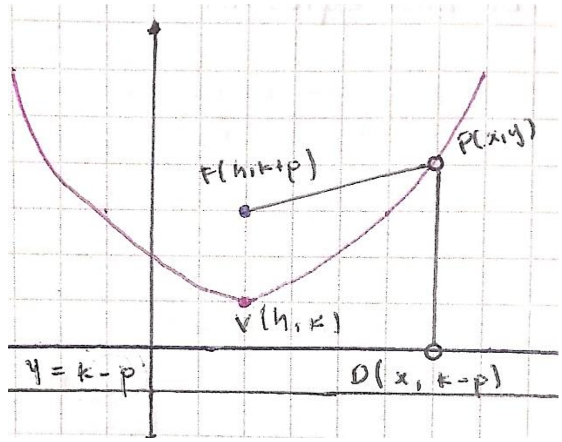
- ✓ Clic en Mediatriz, clic en los puntos $F\ y\ C$
- ✓ Clic en intersección, clic en la recta mediatriz y la recta perpendicular, denotado por Parábola
- ✓ Ocultamos las rectas mediatriz y perpendicular
- ✓ Trazamos el segmento $CParábola\ y\ FParábola$
- ✓ Clic en lugar geométrico, clic en el punto Parábola y en punto C



Elementos de una parábola:



$PARÁBOLA\ HORIZONTAL$



$PARÁBOLA\ VERTICAL$

✓ ¿Cuál sería su representación en el **Registro Algebraico**?

$4p(x-h) = (y-k)^2$ ***Ecuación canónica de la parábola horizontal***

Nota: si $p > 0$, la parábola abre a la derecha
si $p < 0$, la parábola abre a la izquierda

$4p(y-k) = (x-h)^2$ ***Ecuación canónica de la parábola vertical***

Nota: si $p > 0$, la parábola abre a la arriba
si $p < 0$, la parábola abre a la abajo

Ecuación general de la parábola

$Ax^2 + Bx + Cy^2 + Dy + E = 0\ donde\ A = 0\ ó\ C = 0$

$Si\ A = 0, entonces\ Cy^2 + Bx + Dy + E = 0$ ***la parábola es horizontal***

$Si\ C = 0, entonces\ Ax^2 + Bx + Dy + E = 0$ ***la parábola es vertical***

2. Actividades

1. Calcule las coordenadas del Foco y obtenga una ecuación cartesiana de la directriz, de la parábola con vértice en el origen y que pasa por los puntos $S(-5, 5)\ y\ T(-5, -5)$.

2. Emplee la definición de parábola para obtener una ecuación cartesiana de la parábola con el Foco en $(5, 2)$ y con la directriz $x = 1$.

3. Sea la ecuación de la parábola $x^2 - 8y + 14x + 13 = 0$ hallar las coordenadas del vértice y del Foco, la ecuación de su directriz y la longitud de su lado recto.

GUIA N° 7

Universidad del Cauca	UNIVERSIDAD DEL CAUCA FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES, EXACTAS Y DE LA EDUCACIÓN DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
NOMBRE DEL DOCENTE: Angie Marcela Gómez Delgado	GUÍA N° 7
1. TEMÁTICA	
✓ La elipse ✓ Ecuación canónica ✓ Ecuación general ✓ Elementos de una elipse	
2. OBJETIVO DE LA GUÍA	
El objetivo de esta guía es presentar algunas de las características que cumple el objeto geométrico elipse y mostrar algunas de sus representaciones.	
3. CONOCIMIENTO ESPERADO	
✓ Identifica las características de una elipse y sus respectivas representaciones. ✓ Reconoce y describe cada una de las características del objeto geométrico elipse. ✓ Aplica y argumenta adecuadamente en las actividades propuestas en clase.	

1. Conceptos Generales

LA ELIPSE

Registro Lengua Natural

Es el lugar geométrico de un punto que se mueve en un plano de tal manera que la suma de sus distancias a dos puntos fijos de ese plano es siempre constante.

✓ ¿Cuál sería su representación en el **Registro Simbólico**?

Sabemos que:

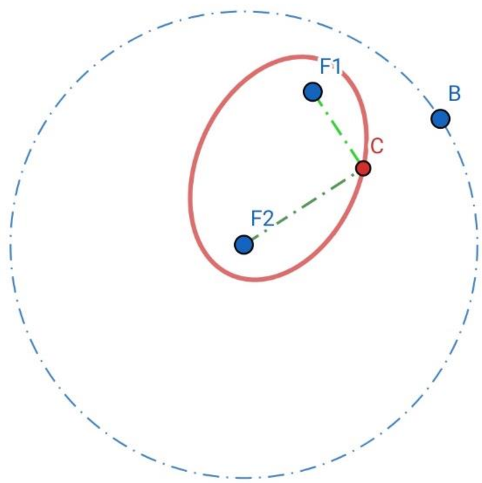
$d(F_2, B) = n$ esto porque es el radio de una circunferencia
$d(E, B) = d(E, F_1)$ por la recta mediatriz
$d(F_2, B) = d(F_2, E) + d(E, B)$ esto porque E pertenece al segmento F_2, B
$d(F_2, E) + d(F_1, E) = n$

Registro Gráfico.

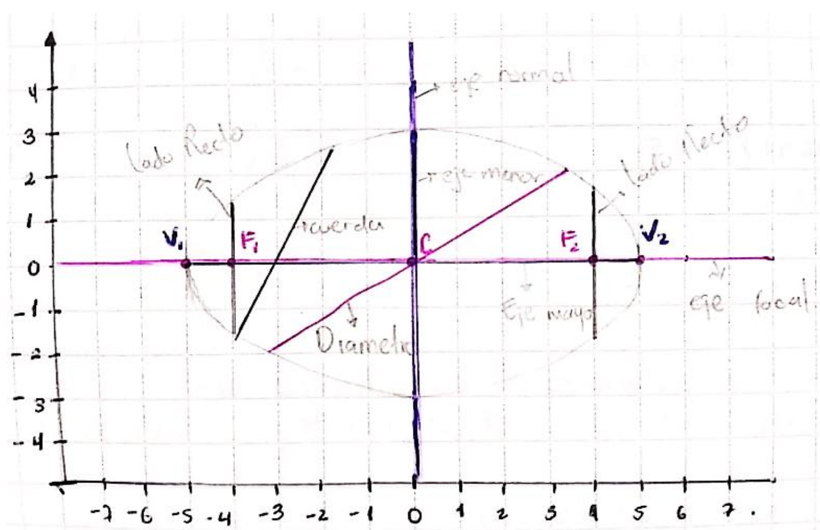
Pasos a seguir para realizar en GeoGebra

✓ Ir a Herramienta
✓ Crear dos puntos F_1 y F_2, estos cumplirán la función de Focos.
✓ Crear una circunferencia con centro en alguno de los dos Focos y radio arbitrario que contenga al otro foco.
✓ Representamos un punto de la circunferencia, denotado por B, hacer clic en punto en objeto y luego clic en la circunferencia.

- ✓ Clic en mediatriz, clic en los puntos B y el Foco que no es centro de la circunferencia.
- ✓ Crear el segmento F_1B
- ✓ Al punto de intersección entre el segmento F_1B y la recta mediatriz lo denotamos por E.
- ✓ Ocultar la recta mediatriz y el segmento F_1B
- ✓ Trazar los segmentos F_1E y F_2E
- ✓ Clic en lugar geométrico



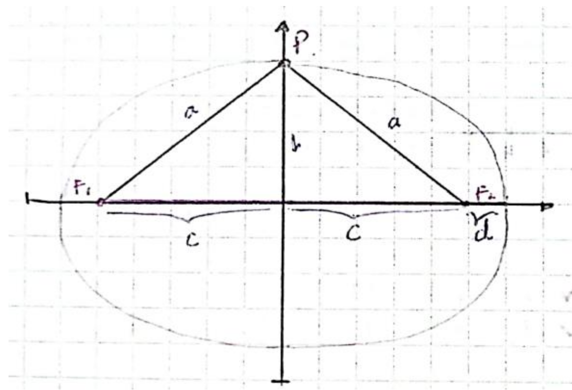
Elementos de una elipse:



- ➢ Eje focal: Recta que pasa por los dos Focos.
- ➢ Eje normal: Recta perpendicular a la recta eje focal y pasa por el centro.
- ➢ Eje mayor: segmento que une a los vértices y pasa por el centro.
- ➢ Eje menor: Segmento que une a los vértives menores y pasa por el centro.
- ➢ Cuerda: segmento que une dos puntos cualesquiera de la elipse.
- ➢ Lado recto: Es una cuerda que pasa por los Focos y es perpendicular al eje focal.

- Diámetro: cualquier cuerda que pase por el centro.

Registro Aritmético



- Por Pitágoras:

$$c^2 + b^2 = a^2$$
$$b^2 = a^2 - c^2$$

- Recorrido de F_1 a F_2 por V

$$2c + d + d = 2a$$
$$2c + 2d = 2a$$
$$c + d = a$$

Por lo anterior tenemos que $d(F_2, E) + d(F_1, E) = 2a$

Ecuación canónica de la elipse horizontal con $C(h, k)$

$$F_1(h + c, k)$$
$$F_2(h - c, k)$$
$$V_1(h + a, k)$$
$$V_2(h - a, k)$$

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

Ecuación canónica de la elipse vertical con $C(h, k)$

$$F_1(h, k + c)$$
$$F_2(h, k - c)$$
$$V_1(h, k + a)$$
$$V_2(h, k - a)$$

$$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$$

Nota: para identificar cuando es vertical u horizontal, si en el denominador el número que está con x^2 es más grande que el número que está con y^2 entonces la elipse es horizontal, pero si en el denominador el número que está con x^2 es más pequeño que el número que está con y^2 entonces es vertical.

$$\frac{(x-h)^2}{t^2}+\frac{(y-k)^2}{s^2}=1$$

$$si\ t > s, entonces\ la\ elipse\ es\ horizontal$$
$$si\ t < s, entonces\ la\ elipse\ es\ vertical$$

Ejemplo:

$$\frac{(x-1)^2}{4^2}+\frac{(y-2)^2}{3^2}=1$$

Es una elipse horizontal puesto que $4 > 3$

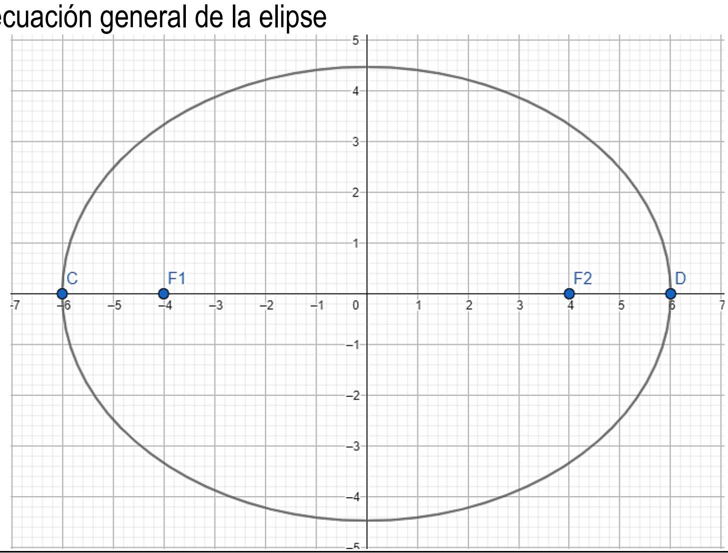
$$\boldsymbol{Ecuación\ general\ de\ la\ parábola}$$
$$Ax^2+Bx+Cy^2+Dy+E=0\ donde\ A\ y\ C\ tienen\ el\ mismo\ signo$$

2. Actividades

1. Considere la ecuación $\frac{(x-3)^2}{5}+\frac{(y-1)^2}{6}=1$ ubique sus elementos en una gráfica.

2. Encontrar la ecuación de una elipse que pasa por los puntos $P(-6,4), Q(-8,1), R(2,-4), T(8,-3)$.

3. Hallar la ecuación general de la elipse



GUIA N° 8

Universidad del Cauca	UNIVERSIDAD DEL CAUCA FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES, EXACTAS Y DE LA EDUCACIÓN DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
NOMBRE DEL DOCENTE: Angie Marcela Gómez Delgado	GUÍA N° 8

1. TEMÁTICA

- ✓ La hipérbola
- ✓ Elementos de una hipérbola
- ✓ Ecuación canónica
- ✓ Ecuación general
- ✓ Asíntotas

2. OBJETIVO DE LA GUÍA

El objetivo de esta guía es presentar algunas de las características que cumple el objeto geométrico hipérbola y mostrar algunas de sus representaciones.

3. CONOCIMIENTO ESPERADO

- ✓ Identifica las características de una hipérbola y sus respectivas representaciones.
- ✓ Reconoce y describe cada una de las características del objeto geométrico hipérbola.
- ✓ Aplica y argumenta adecuadamente en las actividades propuestas en clase.

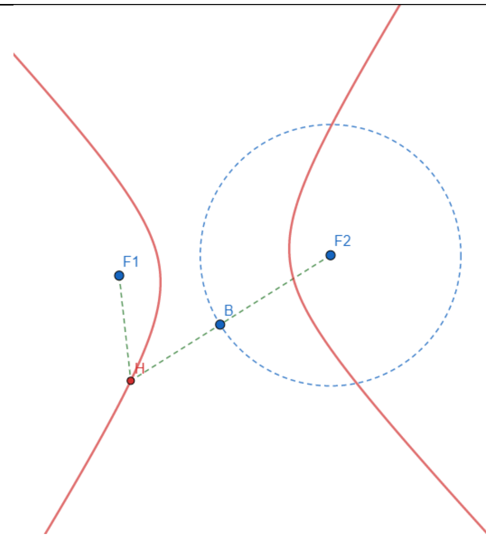
1. Conceptos Generales

LA HIPÉRBOLA

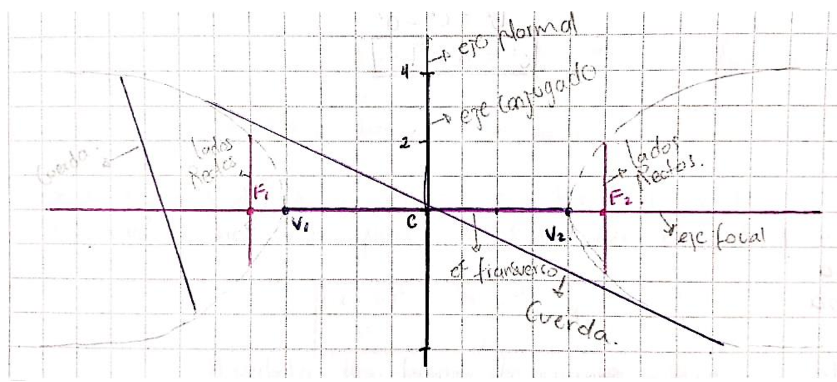
Registro Gráfico.

Pasos a seguir para realizar en GeoGebra

- ✓ Ir a Herramienta
- ✓ Crear dos puntos F_1 y F_2, estos cumplirán la función de Focos.
- ✓ Crear una circunferencia con centro en alguno de los dos Focos y radio arbitrario que no contenga al otro Foco, Circunferencia (F_2, Radio).
- ✓ Representamos un punto de la circunferencia, denotado por B, hacer clic en punto en objeto y luego clic en la circunferencia.
- ✓ Clic en mediatriz, clic en los puntos B y el Foco que no es centro de la circunferencia.
- ✓ Recta l que pasa por el centro de la circunferencia y por el punto B.
- ✓ Al punto de intersección entre la recta l y la recta mediatriz lo denotamos por H.
- ✓ Ocultar la recta mediatriz y la recta l.
- ✓ Trazar los segmentos F_1H y F_2H
- ✓ Clic en lugar geométrico, clic en el punto H y clic en B



Elementos de una hipérbola:



- ➢ Eje focal: Recta que pasa por los dos Focos.
- ➢ Vértices: Intersección entre el eje focal y la hipérbola.
- ➢ Centro: el punto medio entre los vértives o el punto medio entre los Focos
- ➢ Eje transverso: es el segmento que une los dos vértices
- ➢ Eje normal: Recta perpendicular a la recta eje focal y pasa por el centro.
- ➢ Cuerda: segmento que une dos puntos cualesquiera de la hipérbola.
- ➢ Lado recto: los segmentos perpendiculares al eje focal, paralelo al eje normal, son cuerdas y para por los Focos

✓ ¿Cuál sería su representación en el **Registro Simbólico**?
Sabemos que:

$d(F_2, B) = n$ esto porque es el radio de una circunferencia
$d(H, B) = d(H, F_1)$ por la recta mediatriz
$d(B, H) = d(B, F_2) + d(F_2, H)$
$d(F_2, H) + d(F_1, H) = n$

$d(H, F_1) = d(B, F_2) + d(F_2, H)$
$d(F_1, H) = n + d(F_2, H)$
$|d(F_1, H) - d(F_2, H)| = n$

✓ ¿Cuál sería su representación en el **Registro Lengua Natural**?

Es el lugar geométrico de un punto que se mueve en un plano de tal manera que el valor absoluto de la deferencia de sus distancias a dos puntos fijos de ese plano es siempre una cantidad constante

Registro Aritmético

$$d(F_2, E) + d(F_1, E) = 2a$$

$\boldsymbol{Ecuación\ canónica\ de\ la\ hipérbola\ horizontal\ con\ C(h,k)}$

$$F_1(h + c, k)$$
$$F_2(h - c, k)$$
$$V_1(h + a, k)$$
$$V_2(h - a, k)$$
$$Lado\ recto = \frac{2b^2}{a}$$

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

$\boldsymbol{Ecuación\ canónica\ de\ la\ elipse\ vertical\ con\ C(h,k)}$

$$F_1(h, k + c)$$
$$F_2(h, k - c)$$
$$V_1(h, k + a)$$
$$V_2(h, k - a)$$
$$Lado\ recto = \frac{2b^2}{a}$$

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$

Nota: para identificar cuando es vertical u horizontal, lo define el signo negativo, si el signo negativo está en y^2 entonces es horizontal, pero si el signo está en x^2 entonces es vertical

$$\boldsymbol{Ecuación\ general\ de\ la\ parábola}$$

$Ax^2 + Bx + Cy^2 + Dy + E = 0\ donde\ A\ y\ C\ tienen\ signos\ opuestos$

Asíntotas de una hipérbola

Las asíntotas de la hipérbola son dos rectas, donde el lugar geométrico que se está trazando se acerca a dichas rectas.

Ejemplo: Encontrar las asíntotas de $\frac{(x+4)^2}{36} - \frac{(y-1)^2}{16} = 1$

Para encontrar las asíntotas, se toma las expresiones y se igualan a cero.

$$\frac{(x+4)^2}{36} - \frac{(y-1)^2}{16} = 0$$

$$\left(\frac{x+4}{6}\right)^2 - \left(\frac{y-1}{4}\right)^2 = 0$$

Teniendo en cuenta que $M^2 - N^2 = (M-N)(M+N)$, tenemos que

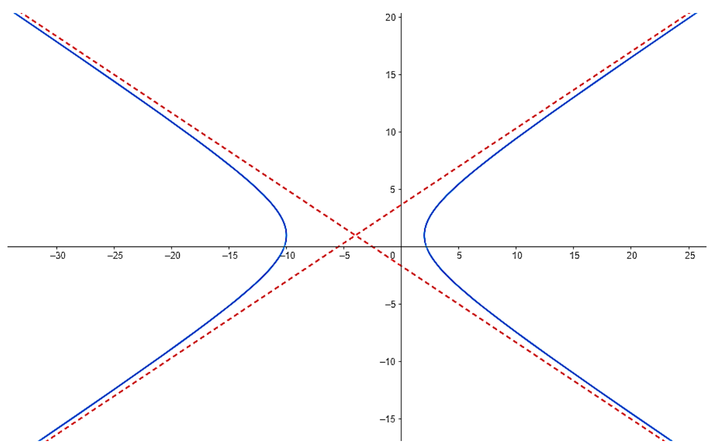
$$\left(\frac{x+4}{6} - \frac{y-1}{4}\right)\left(\frac{x+4}{6} + \frac{y-1}{4}\right) = 0$$

Así, por producto de factores igualados a cero, tenemos que

$$\frac{x+4}{6} = \frac{y-1}{4} \qquad \frac{x+4}{6} = -\frac{y-1}{4}$$

$$4x + 16 = 6y - 6 \qquad 4x + 16 = -6y - 6$$

$$4x - 6y + 22 = 0 \qquad 4x + 6y + 10 = 0$$



2. actividades

1. Encontrar todos los elementos de $9x^2 - 16y^2 - 18x - 64y - 199 = 0$.

2. Hallar la ecuación de la hipérbola con centro en el origen sabiendo que el lado recto es 18 y la distancia entre los focos es 12.

3. Hallar la ecuación de la hipérbola que tiene su centro en el origen, eje focal en el eje x, excentricidad $\frac{\sqrt{7}}{2}$ y lado recto igual a 6.

GUIA N° 9

Universidad del Cauca	UNIVERSIDAD DEL CAUCA FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES, EXACTAS Y DE LA EDUCACIÓN DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
NOMBRE DEL DOCENTE: Angie Marcela Gómez Delgado	GUÍA N° 9
1. TEMÁTICA	
✓ Cónicas	
2. OBJETIVO DE LA GUÍA	
El objetivo de esta guía es proponer algunos ejercicios para que los estudiantes estudien para el parcial.	
3. CONOCIMIENTO ESPERADO	
✓ Identifica las características de una las cónicas y sus respectivas representaciones. ✓ Reconoce y describe cada una de las características de los objetos geométricos. ✓ Aplica y argumenta adecuadamente en cada uno de los ejercicios propuestos en la sesión.	

1. Ejercicios

1. Determine a qué clase de cónica pertenece, justifique su respuesta.

a) $9x^2 + 18x + 4y^2 + 24y - 9 = 0$
b) $x^2 + y^2 + 8x - 4y + 4 = 0$
c) $y^2 - 7x - 8y - 5 = 0$
d) $4x^2 + 9y^2 - 40x - 54y + 145 = 0$

2. Encontrar la ecuación de la hipérbola si sus asíntotas son $3x - 4y + 1 = 0$ y $3x + 4y - 7 = 0$.

3. Encontrar la ecuación de la parábola cuyo Foco es $(-2,-1)$ y pasa por los puntos $A(-2,2)$ y $B(-2,-4)$

4. La recta $y = mx + 1$ es tangente a la circunferencia $(x-2)^2 + y^2 = 3$ ¿cuál es el valor de la pendiente?

5. La intersección de las rectas $2x - y + 3 = 0$, $4x + y - 2 = 0$ es el centro de una circunferencia que es tangente a la recta $x - y + 1 = 0$. Determine la ecuación de la circunferencia.

6. Determine la longitud de la cuerda de la circunferencia que tiene como ecuación $x^2 + y^2 - 6x - 14y - 111 = 0$ conociendo que el punto medio de dicha cuerda tiene coordenadas $\left(\frac{17}{2}, \frac{7}{2}\right)$.

7. Determine la ecuación canónica de la parábola donde la recta directriz tiene la ecuación $y + 2 = 0$ y los extremos del lado recto son los puntos $A(0,2), B(8,2)$.

8. Determine la ecuación de la parábola cuya directriz es la recta definida por $y = 1$, contiene al punto $A(0,3)$ y la menor distancia entre la parábola y la directriz es igual a 2.

9. Si los focos de una elipse son los puntos $F_1(-4,3)$, $F_2(2,3)$y el perímetro del triángulo cuyos vértices son los focos y un punto de la elipse, es igual a 16. Determine la ecuación de la elipse.

GUIA N° 10

Universidad del Cauca	UNIVERSIDAD DEL CAUCA FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES, EXACTAS Y DE LA EDUCACIÓN DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
NOMBRE DEL DOCENTE: Angie Marcela Gómez Delgado	GUÍA N° 10

1. TEMÁTICA
✓ Traslación de coordenadas ✓ Traslación de ejes ✓ Rotación de ejes
2. OBJETIVO DE LA GUÍA
El objetivo de esta guía es presentar algunas de las características que cumple los objetos geométricos rotación y traslación y además mostrar algunas de sus representaciones.
3. CONOCIMIENTO ESPERADO
✓ Identifica las características de los objetos geométricos y sus respectivas representaciones. ✓ Reconoce y describe cada una de las características de los objetos geométricos ✓ Aplica y argumenta adecuadamente en las actividades propuestas en la sesión.

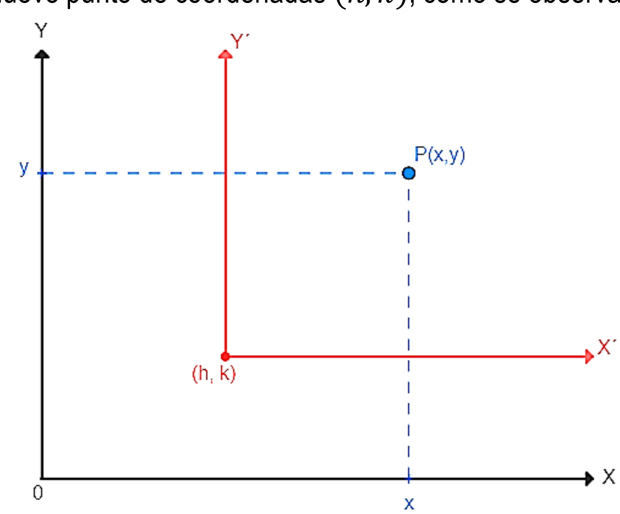
1. Conceptos Generales

TRANSFORMACIÓN DE EJE COORDENADO

En geometría es muy importante elegir un sistema de coordenadas o sistema de referencia adecuado, con el fin de simplificar al máximo las ecuaciones.

Traslación de ejes

Si se hace una transformación de traslación, es decir el sistema de coordenadas ya no estará en el origen, sino en un nuevo punto de coordenadas (h, k), como se observa en el siguiente gráfico:



Si se desea saber cuál será la nueva ecuación de un lugar geométrico o las nuevas coordenadas de un punto en el nuevo sistemas de coordenadas, se hace:

$$y = y' + k$$
$$x = x' + h$$

Si se desea saber cuáles son las coordenadas del punto P en el sistemas de coordenadas con centro en el origen, se hace:

$$y' = y - k$$
$$x' = x - h$$

Ejemplo: Hallar la ecuación de la curva $2x^2 + 3y^2 - 8x + 6y = 7$ cuando se traslada el origen de coordenadas al punto $(2, -1)$

Remplazamos

$$y = y' - 1$$
$$x = x' + 2$$

$$2(x' + 2)^2 + 3(y' - 1)^2 - 8(x' + 2) + 6(y' - 1) = 7$$
$$2x'^2 + 8x' + 8 + 3y'^2 - 6y' + 1 - 8x' - 16 + 6y' - 6 - 7 = 0$$
$$2x'^2 + 3y'^2 - 18 = 0$$
$$\frac{(x')^2}{9} + \frac{(y')^2}{6} = 1$$

Otro ejemplo: Por una traslación de ejes, transforme la ecuación $3x^2 + 2y^2 + 18x - 8y + 29 = 0$ en otra ecuación que carezca de términos de primer grado

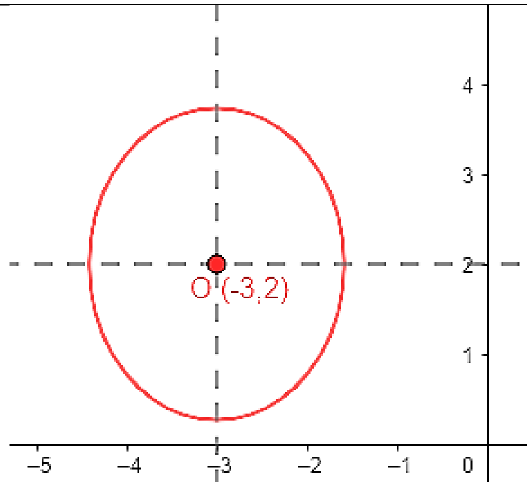
$$3(x' + h)^2 + 2(y' + k)^2 + 18(x' + h) - 8(y' + k) + 29 = 0$$
$$3x'^2 + 6x'h + 3h^2 + 2y'^2 + 4y'k + 2k^2 + 18x' + 18h - 8y' - 8k + 29 = 0$$
$$3x'^2 + 2y'^2 + x'(6h + 18) + y'(4k - 8) + 3h^2 + 2k^2 + 18h - 8k + 29 = 0$$

Para que los términos de primer grado se cancelen, entonces:

$$6h + 18 = 0 \qquad 4k - 8 = 0$$
$$h = -3 \qquad k = 2$$

Así remplazamos:

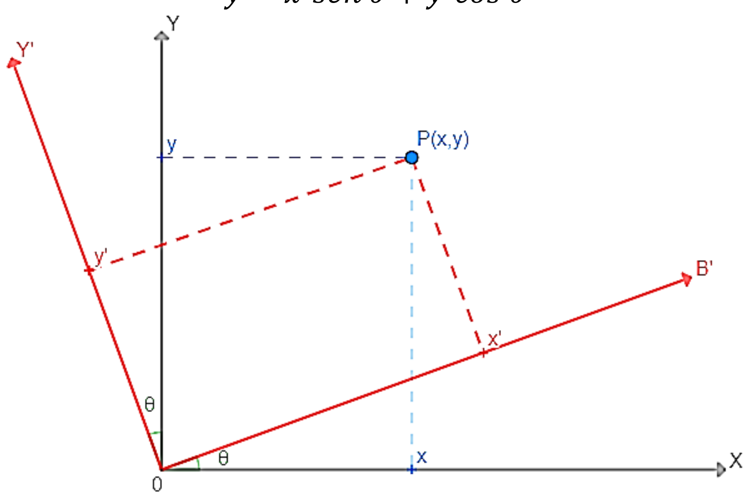
$$3x'^2 + 2y'^2 + 3(-3)^2 + 2(2)^2 + 18(-3) - 8(2) + 29 = 0$$
$$3x'^2 + 2y'^2 + 27 + 8 - 54 - 16 + 29 = 0$$
$$3x'^2 + 2y'^2 - 6 = 0$$



Rotación de eje

Los ejes coordenados giran un ángulo θ en torno de su origen como centro de rotación, y las coordenadas de un punto cualquiera antes y después de la rotación son (x, y) y (x', y') respectivamente, las ecuaciones de transformación del sistema original al nuevo sistema de coordenadas están dadas por

$$x = x' cos\ \theta - y' sen\ \theta$$
$$y = x' sen\ \theta + y' cos\ \theta$$



Ejemplo: Ejemplo transformar la ecuación $2x^2 + \sqrt{3}xy + y^2 = 4$ girando los ejes coordenados un ángulo de $30°$

$$x = x' cos30° - y' sen30° = \frac{\sqrt{3}}{2}x' - \frac{1}{2}y'$$
$$y = xsen30° + y' cos30° = \frac{1}{2}x' + \frac{\sqrt{3}}{2}y'$$

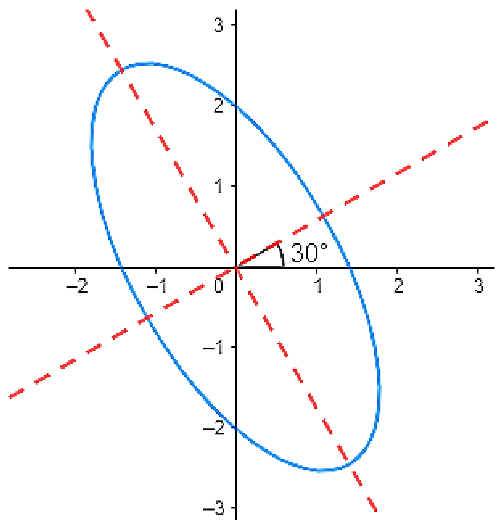
Remplazamos:

$$2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x' - \frac{1}{2}y'\right)^2 + \sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x' - \frac{1}{2}y'\right)\left(\frac{1}{2}x' + \frac{\sqrt{3}}{2}y'\right) + \left(\frac{1}{2}x' + \frac{\sqrt{3}}{2}y'\right)^2 = 4$$

$$\frac{3}{2}x'^2 - \sqrt{3}x'y' + \frac{1}{2}y'^2 + \frac{3}{4}x'^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}x'y' - \frac{3}{4}y'^2 + \frac{1}{4}x'^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}x'y' + \frac{3}{4}y'^2 - 4 = 0$$

$$\frac{5}{2}x'^2 + \frac{1}{2}y'^2 - 4 = 0$$

$$5x'^2 + y'^2 = 8$$

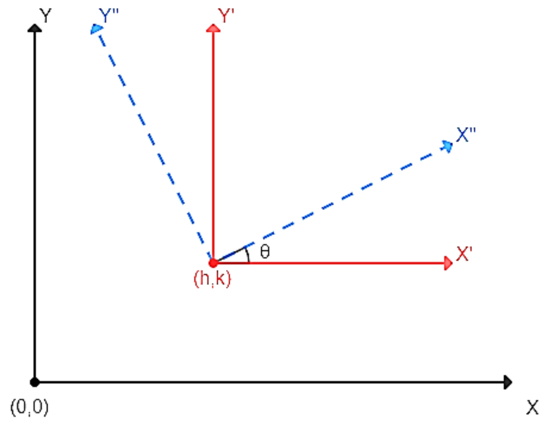


Traslación y Rotación:

Si efectuamos un de eje ejes coordenados mediante una traslación y una rotación, tomadas en cualquier orden, y las coordenadas de cualquier punto referido a los sistemas original y final son $(x, y)\ y\ (x'', y'')$ respectivamente, las ecuaciones de transformaciones del sistema original al nuevo sistema de coordenadas son

$$x = x''cos\theta - y''sen\theta + h$$
$$y = x''sen\theta + y''cos\theta + k$$

En donde θ es el ángulo de rotación y (h, k) son las coordenadas del nuevo origen referido a los ejes coordenados originales.



Ejemplo: hallar la ecuación de la curva $3x^2 - 2xy + 3y^2 - 2x - 10y + 9 = 0$ cuando se traslada al punto $(1,2)$ y se hace una rotación en un ángulo de $45°$

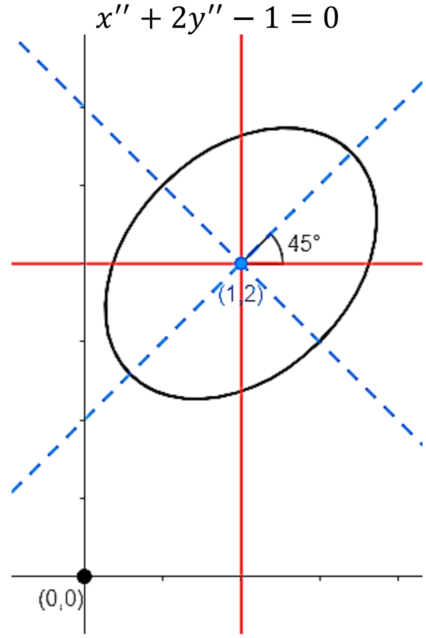
$$x = x''cos45° - y''sen45° + 1 = \frac{\sqrt{2}}{2}x'' - \frac{\sqrt{2}}{2}y'' + 1$$
$$y = x''sen45° + y''cos45° + 2 = \frac{\sqrt{2}}{2}x'' + \frac{\sqrt{2}}{2}y'' + 2$$

Remplazamos

$$3\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x'' - \frac{\sqrt{2}}{2}y'' + 1\right)^2 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x'' - \frac{\sqrt{2}}{2}y'' + 1\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x'' - \frac{\sqrt{2}}{2}y'' + 2\right) + 3\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x'' - \frac{\sqrt{2}}{2}y'' + 1\right)^2 - 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x'' - \frac{\sqrt{2}}{2}y'' + 2\right) - 10\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x'' - \frac{\sqrt{2}}{2}y'' + 1\right) + 9 = 0$$

Resolviente, tenemos

$$x'' + 2y'' - 1 = 0$$



2. Actividades
1. Un punto se mueve de tal manera que equidista del punto (-2,2) y de la recta x-y+1=0. Hallar la ecuación de rotación de ejes, necesario para eliminar el término xy del lugar geométrico. 2. Hallar la ecuación de rotación de ejes, necesario para eliminar el termino xy de la ecuación $y^2 + xy - 1 = 0$. 3. Hallar la ecuación de rotación de ejes, necesario para eliminar el termino xy de la ecuación $31x^2 + 10\sqrt{3}xy + 21y^2 - 144 = 0$. Hacer su gráfica. 4. Por traslación de los ejes coordenados al nuevo origen $(1,1)$ y luego rotación de los ejes en un ángulo de 45° la ecuación de cierto lugar geométrico se transformó en $x''^2 - 2y''^2 = 2$. Hallar la ecuación del lugar geométrico respecto a los ejes originales.

GUIA N° 11

Universidad del Cauca	UNIVERSIDAD DEL CAUCA FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES, EXACTAS Y DE LA EDUCACIÓN DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
NOMBRE DEL DOCENTE: Angie Marcela Gómez Delgado	GUÍA N° 11

1. TEMÁTICA

- ✓ Trazador de curvas de ecuaciones
- ✓ Intersección con los ejes
- ✓ Signos
- ✓ Simetría
- ✓ Extensión de la curva
- ✓ Asíntotas

2. OBJETIVO DE LA GUÍA

T

3. CONOCIMIENTO ESPERADO

- ✓ Identifica elementos característicos de una ecuación para graficarla o viceversa
- ✓ Reconoce y describe cada una de las características para trazar curvas de ecuaciones.
- ✓ Aplica y argumenta adecuadamente en las actividades propuestas en clase.

1. Conceptos Generales

Gráfica De Una Ecuación

Intersección con los ejes.

Corte con el eje de las abscisas: $f(x) = 0$
Corte con el eje de las ordenadas: $x = 0$

Signos.

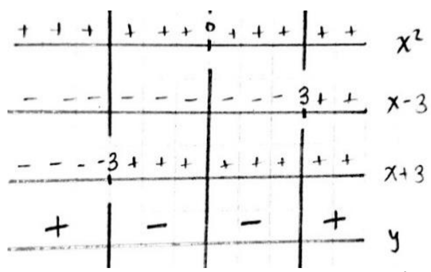
Raíces múltiples
Si una raíz es par, no crea un cambio de signo.
Si una raíz es impar, crea un cambio de signo.

Ejemplo: Determinar las intersecciones con los ejes de la ecuación $x^4 - 9x^2 - y = 0$

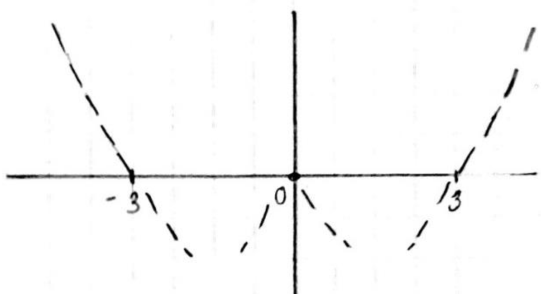
Corte con el eje de las ordenadas: $x = 0$, entonces $y = 0$
Corte con el eje de las abscisas: $y = 0$, entonces

$$x^4 - 9x^2 = 0$$
$$x^2(x^2 - 9) = 0$$
$$x = 0 \quad o \quad x^2 - 9 = 0$$
$$x = 0\,, \qquad x = 3, \qquad x = -3$$

Hacemos la ley del cementerio:



Con lo anterior podemos decir que un bosquejo de la ecuación $x^4 - 9x^2 - y = 0$ es:



Simetría

Simetría con respecto al origen: la gráfica de la ecuación es simétrica con respecto al origen si al sustituir x por $-x$ y y por $-y$ se obtiene la misma ecuación.

Simetría con respecto al eje y: la gráfica de la ecuación es simétrica con respecto al eje y si al sustituir x por $-x$ se obtiene la misma ecuación.
Simetría con respecto al eje $\boldsymbol{y = k}$: $x = g(y)$, si $g\big(-(y-k)\big) = g(y-k)$, entonces es simétrica con respecto al eje y

Simetría con respecto al eje x: la gráfica de la ecuación es simétrica con respecto al origen si al sustituir y por $-y$ se obtiene la misma ecuación.
Simetría con respecto al eje $\boldsymbol{x = h}$: y= $g(x)$, si $g\big(-(x-h)\big) = g(x-h)$, entonces es simétrica con respecto al eje x.

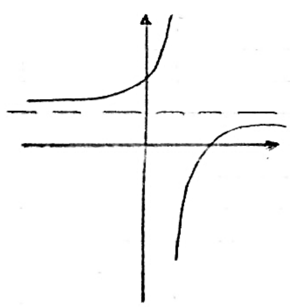
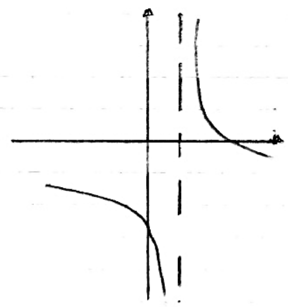
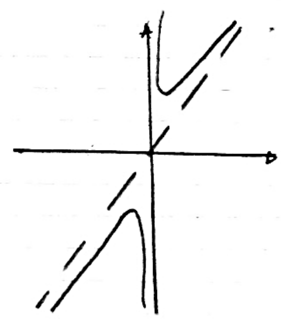
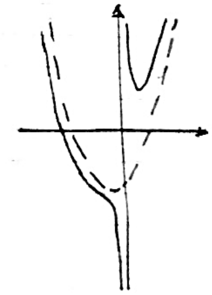
Extensión de la gráfica

Esta característica se refiere a encontrar los intervalos de variación donde los valores para x y y son valores Reales.
Para el dominio se determina cuando la ecuación se indetermina con respecto a x
Para el rango se determina cuando la ecuación se indetermina con respecto a y

Asíntotas

Si para una curva dada $f(x, y) = 0$, existe otra curva $g(x, y) = 0$ tal que, a medida que la curva se aleja del origen, la distancia entre f y g tiende a cero.

Clases de asíntotas:

$Asíntota\ Horizontal$ $\quad$ $Asíntota\ Vertical$ $\quad$ $Asíntota\ oblicua$ $\quad$ $Asíntota\ parabólica$

Hay una asíntota vertical cuando hay puntos que no pertenecen al dominio.
Hay una asíntota horizontal cuando hay puntos que no pertenecen al rango.

Ejemplo: Trace la gráfica de la ecuación

$$y = \frac{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}{x + 2}$$

Solución:

- **Intersección con los ejes**.

Corte con el eje $y,\ entonces\ \ x = 0$, tenemos,

$$y = \frac{0^3 - 6(0)^2 + 11(0) - 6}{0 + 2}$$

$$y = \frac{-6}{2}$$

$$y = 3$$

Corte con el eje $x, entonces\ y = 0$, tenemos

$$\frac{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}{x + 2} = 0$$

Esto es cero cuando el numeradores igual a cero, así:

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$$

$$x^3 - x^2 - 5x^2 + 5x + 6x - 6$$

$$x^2(x - 1) - 5x(x - 1) + 6(x - 1) = 0$$

$$(x-1)(x^2-5x+6)=0$$

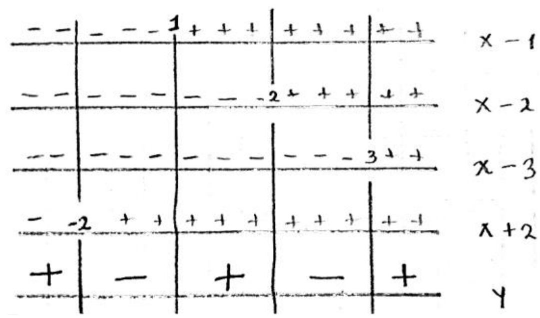
$$(x-1)(x-2)(x-3)=0$$

Así, las raíces son:

$$x=1, \quad x=2, \quad x=3$$

- **Signos.**

Cada una de estas raíces tiene multiplicidad 1, por tanto son impares, es decir, crean un cambio de signo.



- **Simetría**

Simetría con respecto al origen.

$$-y=\frac{(-x)^3-6(-x)^2+11(-x)-6}{(-x)+2}$$

$$-y=\frac{-x^3-6x^2-11x-6}{-x+2}$$

$$y=\frac{x^3+6x^2+11x+6}{-x+2}$$

Por tanto no es simétrico con respecto al origen.

Simetría con respeto al eje y.

$$y=\frac{(-x)^3-6(-x)^2+11(-x)-6}{(-x)+2}$$

$$y=\frac{-x^3-6x^2-11x-6}{-x+2}$$

$$y=\frac{-(x^3+6x^2+11x+6)}{-(x-2)}$$

$$y=\frac{x^3+6x^2+11x+6}{x-2}$$

Por tanto no hay simetría con respecto al eje y.

Simetría con respecto al eje x.

$$-y = \frac{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}{x + 2}$$

Por tanto no hay simetría con respecto al eje x.

- **Extensión de la gráfica**

Para encontrar el dominio:

El dominio de una función racional son todos los valores de x para los cuales el denominador es diferente de 0.

$$x \in \mathbb{R} - \{-2\}$$

Para encontrar el rango:

$$\mathrm{y} = \frac{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}{x + 2}$$

$$y(x + 2) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$$

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 - yx = 2y + 6$$

Por tanto, $y \in \mathbb{R}$

- **Asíntotas**

Asíntota vertical:

Como el dominio es $\in \mathbb{R} - \{-2\}$, entonces hay una asíntota vertical en $x = -2$

Asíntota horizontal no hay.

Asíntota parabólica:

Haciendo división sintética, tenemos que

$$\begin{array}{rl}
x^3 - 6x^2 + 11x - 6 & \big| \; x + 2 \\
\underline{-x^3 - 2x^2 \qquad\qquad} & \; x^2 + 8x + 27 \\
-8x^2 + 11x \qquad & \\
\underline{+8x^2 + 16x \qquad} & \\
+27x - 6 & \\
\underline{+27x - 54} & \\
-60 &
\end{array}$$

Por tanto, la ecuación la podemos escribir de la siguiente forma:

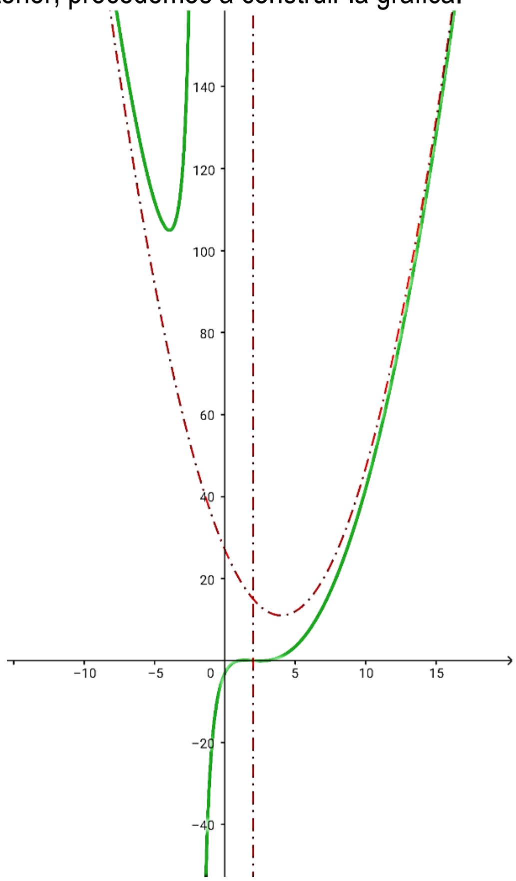
$$y = x^2 - 8x + 27 + \frac{60}{x + 2}$$

Así, la gráfica de la ecuación tiene una asíntota parabólica.

$$x^2 - 8x + 27 = (x-4)^2 + 11$$

Esta parábola es simétrica con respecto al eje y, en $x = 4$.
Tiene su vértice en $(4{,}11)$.
Orientación vertical hacia arriba.

Con toda la información anterior, procedemos a construir la gráfica.



3. Actividades

Trazar la gráfica mostrando: las raíces, los signos, simetría, la extensión, las asíntotas

1. $y = \dfrac{x^3+1}{x^2}$
2. $y = x^2 - 1 + \dfrac{1}{x^3+8}$
3. $y = \dfrac{x^4 - 7x^3 + 17x^2 - 17x + 6}{x^2}$

GUIA N° 12

Universidad del Cauca	UNIVERSIDAD DEL CAUCA FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES, EXACTAS Y DE LA EDUCACIÓN DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
NOMBRE DEL DOCENTE: Angie Marcela Gómez Delgado	GUÍA N° 12

1. TEMÁTICA

- ✓ Coordenadas polares
- ✓ Relación entre las coordenadas polares y las coordenadas cartesianas
- ✓ Plano polar
- ✓ Transformación de coordenadas polares a cartesianas o viceversa
- ✓ Ecuaciones paramétricas

2. OBJETIVO DE LA GUÍA

T

3. CONOCIMIENTO ESPERADO

- ✓ Identifica elementos característicos de una ecuación para graficarla o viceversa
- ✓ Reconoce y describe cada una de las características para trazar curvas de ecuaciones.
- ✓ Aplica y argumenta adecuadamente en las actividades propuestas en clase.

1. Conceptos Generales

Coordenadas Polares.

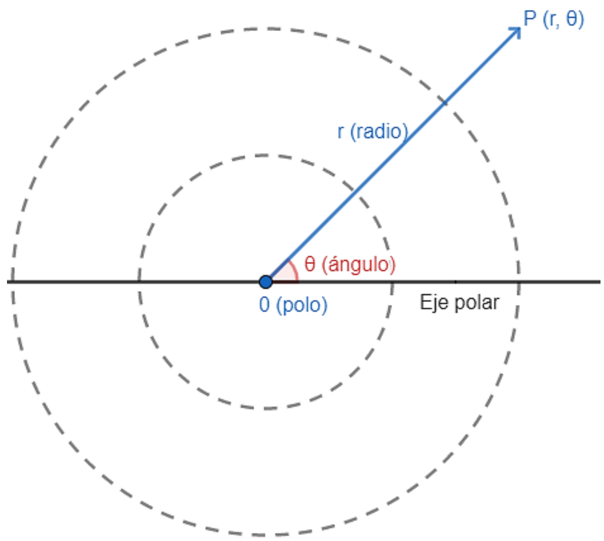
Es un sistema de coordenadas bidimensional en el que cada punto del plano se determina por una distancia y un ángulo. Este sistema es ampliamente utilizado en física y trigonometría.

De manera más precisa, como sistema de referencia se toma:

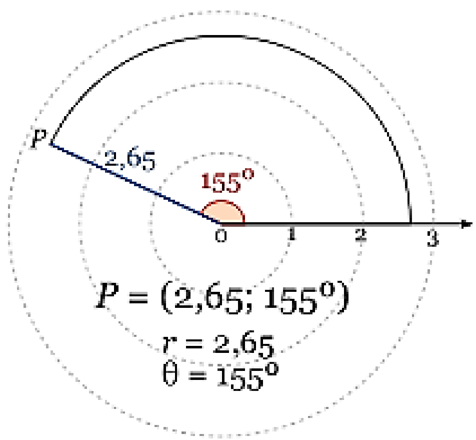
a. Un punto *O* del plano, al que se llama *origen* o *polo*

b. Una recta dirigida (o segmento *OL*) que pasa por *O*, llamada eje polar (equivalente al eje *x* del sistema cartesiano).

Con este sistema de referencia y una unidad de medida métrica (para poder asignar distancias entre cada par de puntos del plano), todo punto P del plano corresponde a un par ordenado (r, θ) donde r es la distancia de P al *origen* y θ es el ángulo formado entre el eje polar y la recta dirigida OP que va de O a P. El valor θ crece en sentido antihorario y decrece en sentido horario. La distancia r $(r \geq 0)$ se conoce como la «coordenada radial» o «radio vector», mientras que el ángulo es la «coordenada angular» o «ángulo polar».



Ejemplo 1. Ubicar en el plano polar el punto $P(2{,}65,\ 155°)$

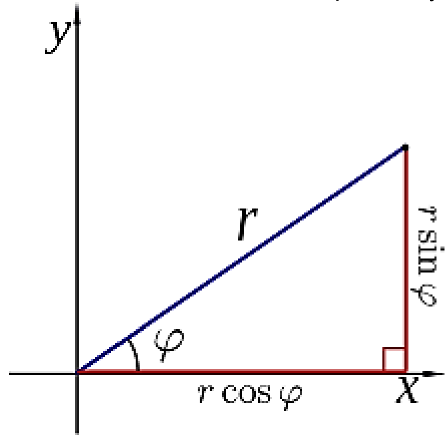


Relación entre las coordenadas polares y las coordenadas cartesianas

Las coordenadas polares son definidas usando la distancia, *r,* y al ángulo, *θ*. Por otra parte las coordenadas rectangulares, también conocidas como coordenadas cartesianas, son definidas por *x* y por *y.* Podemos encontrar ecuaciones que relacionen a estas coordenadas usando un triángulo rectángulo y las funciones trigonométricas seno y coseno.

A continuación, conoceremos las fórmulas que podemos usar para transformar de coordenadas polares a rectangulares. Luego, aplicaremos estas fórmulas al resolver algunos ejercicios de práctica.

Diagrama ilustrativo de la relación entre las coordenadas polares y las coordenadas cartesianas:



De ahí que:

- $\cos(\theta) = \frac{x}{r} \quad \Longrightarrow \quad x = rcos(\theta)$
- $sen(\theta) = \frac{y}{r} \quad \Longrightarrow \quad y = rsen(\theta)$
- $r = \sqrt{x^2 + y^2}$
- $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right); con\ x \neq 0, si\ x = 0, entonces\ \theta = 90° \ o\ \theta = 270°$

Transformación de coordenadas polares a coordenadas cartesianas o viceversa.

Ejemplo 2. Consideremos el siguiente punto con las coordenadas polares $(5, \frac{\pi}{3})$, ¿cuáles son sus coordenadas rectangulares?

Podemos observar los valores $r = 5, \theta = \frac{\pi}{3}$. Usamos las fórmulas encontradas anteriormente para convertir a coordenadas rectangulares. Entonces, el valor de x es encontrado usando la función coseno:

$$x = rcos(\theta)$$

$$x = 5cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$x = 5(0{,}5)$$

$$x = 2{,}5$$

El valor de y es encontrado usando la función seno:

$$y = rsen(\theta)$$

$$y = 5sen\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$y = 5(0{,}866)$$

$$y = 4{,}33$$

Entonces, las coordenadas rectangulares son (2.5, 4.33)

Ejemplo 3. Consideremos la ecuación $r = \frac{12}{4+3\cos(\theta)}$ en sistema de coordenadas polares ¿Cuál es su ecuación en sistemas de coordenadas cartesianas?

Primero reescribamos la ecuación:

$$r = \frac{12}{4+3\cos(\theta)}$$
$$r(4+3\cos(\theta)) = 12$$
$$4r + 3rcos(\theta) = 12$$

Lo que esta resaltado de color morado es equivalente a x y $r = \sqrt{x^2+y^2}$, entonces remplacemos:

$$4\sqrt{x^2+y^2} + x = 12$$
$$4\sqrt{x^2+y^2} = 12 - 3x$$
$$16(x^2+y^2) = (12-3x)^2$$
$$16x^2 + 16y^2 = 144 - 72x + 9x^2$$
$$7x^2 + 16y^2 + 72x - 144 = 0 \quad Ecuación\ carteciana$$

Ejemplo 4. Consideremos la ecuación $y = \frac{x^3}{2a-x}$ en sistema de coordenadas cartesianas ¿Cuál es su ecuación en sistemas de coordenadas polares?

Primero reescribamos la ecuación:

$$y = \frac{x^3}{2a-x}$$
$$(2a-x)y^2 = x^3$$
$$2ay^2 - xy^2 = x^3$$
$$2ay^2 = xy^2 + x^3$$
$$2ay^2 = x(y^2+x^2)$$

Remplazando, tenemos que:

$$2ar^2sen^2(\theta) = rcos(\theta)r^2$$
$$2asen^2(\theta) = rcos(\theta)$$
$$r = \frac{2asen^2(\theta)}{\cos(\theta)}$$

$$r = 2\,\mathrm{atan}(\theta)\,sen(\theta)$$

Ejemplo 5. Encontrar analíticamente los puntos de intersección de las curvas $r = \frac{3}{2-\cos(\theta)}$; $rcos(\theta) = 1$.

Resolvemos el sistema de coordenadas:

$$r = \frac{3}{2-\cos(\theta)}$$

$$2r - rcos(\theta) = 3$$

$$2r - 1 = 3$$

$$2r = 4$$

$$r = 2$$

Ahora remplazamos r en la segunda ecuación:

$$2\cos(\theta) = 1$$

$$\cos(\theta) = \frac{1}{2}$$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\theta = \pm 60°$$

Así, el punto de corte es $P(2, 60°), Q(2, -60°)$

Graficar funciones que estén en coordenadas polares.

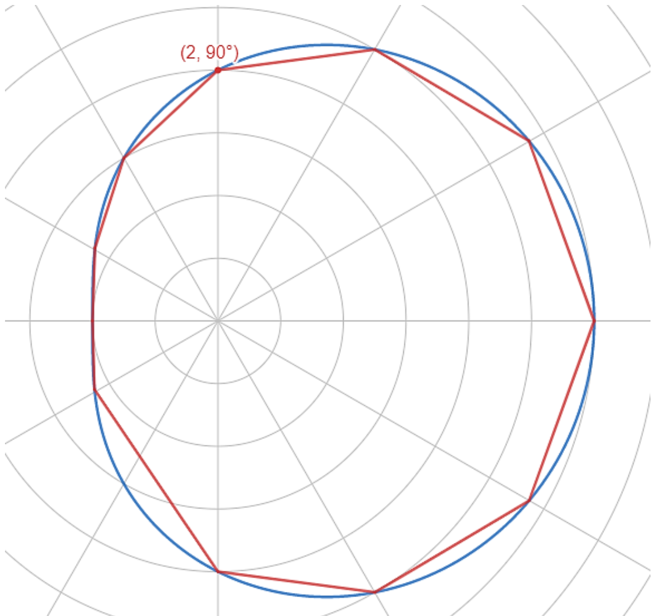
Ejemplo 6. Graficar $r = 2 + \cos(\theta)$

NOTA: se toma como variable independiente el ángulo y la variable dependiente al radio.

Tomamos como recurso la tabulación:

θ	0°	30°	60°	90°	120°	150°	180°	210°	240°	270°	300°	330°	360°
r	3	2,86	2,50	2	1,50	1,13	1	1,13	1,50	2	2,50	2,86	3

Su gráfico quedaría de la siguiente manera, donde la de color rojo representa a la tabulación anteriormente realizada y la de color azul representa a la ecuación:



Ecuaciones paramétricas.

En muchas ocasiones tendremos funciones o ecuaciones de la forma $F(x, y) = 0$. La representación paramétrica significa poder escribir cada una de las variables de esa ecuación como una función que depende de una tercera variable a la que llamaremos parámetro $(t, n\ \theta)$. Estas no tienen representaciones geométricas, por ejemplo el tiempo.

$$f(x, y) = 0 \ \Rightarrow x = g(t), y = h(t)$$

Ejemplo 1: Consideremos estas ecuaciones paramétricas:

1. $x = 1 - 5t$
2. $y = 2 + 3t$

Ahora, despejemos t de ambas ecuaciones, así

1. $x = 1 - 5t$
   $5t = 1 - x$
   $t = \frac{1-x}{5}$
2. $y = 2 + 3t$
   $3t = y - 2$
   $t = \frac{y-2}{3}$

Luego, igualamos las dos ecuaciones obtenidas

$$\frac{1-x}{5} = \frac{y-2}{3}$$

Operamos algebraicamente y obtenemos:

$$3 - 3x = 5y - 10$$
$$3x + 5y - 13 = 0$$

Esta sería la Ecuación no paramétrica o ecuación Rectangular

NOTA: las ecuaciones no son únicas, por ejemplo, haciendo el mismo proceso anterior con las siguientes ecuaciones obtenemos:

Ejemplo 2.

1. $x = t$
2. $y = \frac{13-3t}{5}$

Así,

$$y = \frac{13-3x}{5}$$
$$5y + 3x - 13 = 0$$

Obteniendo la misma ecuación no paramétrica del anterior ejemplo.

Gráfica De Ecuaciones Paramétricas

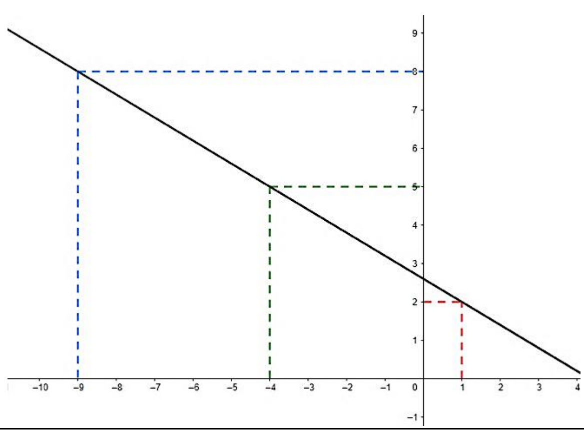
Tomemos las ecuaciones del ejemplo 1:

1. $x = 1 - 5t$
2. $y = 2 + 3t$

Lo haremos haciendo uso de la tabulación, donde le daremos valores a t, así

t	0	1	2
x	1	-4	-9
y	2	5	8

La grafica quedaría:



3. Actividades
1. Considere la ecuación $r = \frac{4}{3-\cos(t)}$ c. Realice su gráfica d. Encuentre su ecuación cartesiana e. Encuentre analíticamente la intersección con $r = 2sen(t)$ 2. Considere las ecuaciones $x = 2\tan(t)$, $y = 3\cot(t)$ a. Realice su gráfica b. Encuentre su ecuación no paramétrica

GUIA N° 13

Universidad del Cauca	UNIVERSIDAD DEL CAUCA FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES, EXACTAS Y DE LA EDUCACIÓN DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
NOMBRE DEL DOCENTE: Angie Marcela Gómez Delgado	GUÍA N° 13
1. TEMÁTICA	
✓ Geometría en tres dimensiones ✓ Rectas ✓ Planos ✓ Superficies	
2. OBJETIVO DE LA GUÍA	
T	
3. CONOCIMIENTO ESPERADO	
✓ Identifica elementos característicos de una ecuación para graficarla o viceversa ✓ Reconoce y describe cada una de las características para trazar curvas de ecuaciones. ✓ Aplica y argumenta adecuadamente en las actividades propuestas en clase.	

1. Actividades
1. Ubique en el espacio cartesiano los siguientes puntos e indique en qué octante se encuentra cada uno de ellos. a. A(2, -1, 3) b. B(-2, -1, 3) c C(-2, 1, -3) d. D(2,-1, -3) 2. Encuentre un vector de cosenos directores que es el normal al plano $2x + y - 4z = 3$ 3. Encuentre la ecuación simétrica de la recta que es intersección entre los planos $-x + y + z = 3, \quad -4x + 2y - 7z = 5$ 4. ¿son coplanarios los puntos: $A(1,2,1), B(1,0,0); C(0,-1,1), D(-1,0,1)$?