EXPLORANDO EN EL AULA LA NOCIÓN DE GRAFO, UNA INMERSIÓN PARA GRADOS DÉCIMO Y UNDÉCIMO

Eida Bibiana Girón Chilito

UNIVERSIDAD DEL CAUCA

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES, EXACTAS Y DE LA EDUCACIÓN

LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

POPAYÁN

2024

EXPLORANDO EN EL AULA LA NOCIÓN DE GRAFO, UNA INMERSIÓN PARA GRADOS DÉCIMO Y UNDÉCIMO

Requisito parcial para optar al título de Licenciada en Matemáticas

Eida Bibiana Girón Chilito

Directora de Practica Pedagógica:

Dra. Gabriela Inés Arbeláez Rojas

UNIVERSIDAD DEL CAUCA

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES, EXACTAS Y DE LA EDUCACIÓN

LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

POPAYÁN

2024

Nota de Aceptación

____

____

____

____

El presente trabajo de práctica pedagógica fue asesorado y aprobado por:

Directora: __________________________________

Dra. Gabriela Inés Arbeláez Rojas

Evaluador: __________________________________

Dr. David Fernando Daza Urbano

Coordinadora programa Licenciatura en Matemáticas:

____

Dra. Gabriela Inés Arbeláez Rojas

Lugar y fecha de sustentación: Popayán, 30 de mayo del 2024

AGRADECIMIENTOS

Agradezco a todos aquellos que brindaron su tiempo, conocimientos, amistad y colaboración para completar este trabajo. A mis profesores y compañeros, cada experiencia compartida me ha dejado una invaluable lección que ha contribuido a mi crecimiento personal y académico. Fue un placer conocerlos, aprender y compartir con ustedes.

Un agradecimiento especial a Tarcisio Catuche, mi tío, cuya bondad, humildad y aliento han sido vitales en este proceso. Me enorgullece profundamente formar parte de su familia y contar con su ejemplo como inspiración constante.

DEDICATORIA

A Elvira Chilito Anacona y Alexandra Giron Chilito, mamá y hermana, mi profunda gratitud por su apoyo incondicional y su motivación constante a lo largo de este trayecto. Me reconforta saber que siempre han creído en mí. Espero sepan que mis metas siempre han sido por y para ustedes, y así seguirá siendo. Este logro es también suyo.

A todos los que luchan cada día por cumplir sus sueños.

TABLA DE CONTENIDO

LISTA DE ILUSTRACIONES

LISTA DE TABLAS

LISTA DE IMÁGENES

INTRODUCCIÓN

En el vasto mundo de las matemáticas, existen áreas que despiertan la curiosidad y el asombro, invitando a explorar nuevos horizontes y desafíos intelectuales. La Teoría de grafos es una de esas fascinantes ramas matemáticas que sumerge en un universo de conexiones y patrones, que permiten explorar soluciones ingeniosas a situaciones con un laberinto de posibilidades que desafían nuestra percepción y estimulan la creatividad.

Durante los primeros semestres universitarios, tuve un primer acercamiento a esta teoría en un seminario de Pensamiento matemático, inicialmente me intrigó por su desconexión con mis estudios previos en el bachillerato, luego, al investigar su historia, descubrí que está marcada por los pasos audaces de mentes brillantes como la del matemático suizo Leonhard Euler, teniendo sus orígenes con la solución que él le dio al celebre problema de los siete puentes de Königsberg, un logro emblemático que marcó su origen y relevancia en la topología moderna, ejemplificando el poder de la creatividad, de la capacidad de abstracción, y del lenguaje matemático en cada razonamiento, lo que hizo me diera cuenta del potencial que tiene esta área para fomentar una percepción innovadora de las matemáticas.

En este documento, se condensa lo que fue una inmersión a la Teoría de Grafos realizada durante los meses julio y agosto del año 2023 con estudiantes de grado décimo y once de la Institución Educativa Agropecuaria Nuestra Señora del Rosario, en los horarios académicos de la misma. Esta institución se ubica en el corregimiento El Rosal del municipio de San Sebastián al sur del Departamento Caucano, operando bajo resolución 0450 de abril de 2004 de la Secretaría de Educación y Cultura del Departamento del Cauca, actualmente, su rector es el Licenciado Edier Parra Muñoz, quien ha ejercido el cargo desde el año 2010, y quien abrió las puertas y brindo el espacio para esta experiencia.

El objetivo fue introducir a los estudiantes en este emocionante campo matemático, explorando la noción de grafo y algunas relaciones de esta estructura en la resolución de problemas, un contenido inusual en el aula, alejándome del enfoque centrado en el currículo, pero con la misma convicción de fomentar la curiosidad y el disfrute por las matemáticas, entre otras razones que se detallan en el primer capítulo del documento.

En el segundo capítulo, denominado Marco Teórico y Metodológico se destaca el papel del juego y la resolución de problemas como herramientas clave en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Se muestra cómo los desafíos y actividades lúdicas pueden enriquecer la comprensión y el pensamiento matemático, reconociendo la trascendencia del campo de las matemáticas recreativas para facilitar el acceso al conocimiento y cultivar una apreciación más profunda y amplia de esta disciplina, destacando, por ejemplo, la solución que le dio Leonhard Euler al problema de los siete puentes de Königsberg, la coloración de grafos y el Teorema de los Cuatro Colores.

En el tercer capítulo, se examinan dos antecedentes de trabajos relacionados con la teoría de grafos, destacando su impacto en la inclusión en el aula y sus contribuciones como fuente de inspiración y referencia en mi enfoque procedimental.

En el siguiente capítulo se presenta el procedimiento de esta práctica, que consta de cuatro actividades para introducir a los estudiantes al concepto. Comienza con un juego que les familiariza con esta noción, seguido por la exploración de figuras como los poliedros platónicos y el análisis de la solución de Euler al problema de los siete puentes de Königsberg. Finalmente, se aborda la coloración de grafos en la resolución de problemas

En el quinto capítulo detallo cuatro bitácoras en las que compilo los aspectos más relevantes del desarrollo de esta práctica pedagógica, no solo detallo cada paso realizado durante cada actividad, sino que también reflexiono sobre los desafíos encontrados y las lecciones aprendidas.

En el siguiente capítulo menciono las conclusiones frente al trabajo tanto de los estudiantes, y mío, con La teoría de grafos destacando los aprendizajes y huellas que deja esta experiencia. Luego se encuentran las referencias que incluyen todas las fuentes consultadas para este proyecto, respaldando las afirmaciones y argumentos presentados, y brindando a los lectores la oportunidad de explorar más a fondo los temas tratados.

JUSTIFICACIÓN

Es evidente cómo la mayoría de las personas suelen mostrar cierta indiferencia y antipatía hacia las matemáticas. Esta actitud se debe, en gran parte, a experiencias poco satisfactorias, como la realización mecánica de operaciones sin comprender su importancia o el poco conocimiento sobre la historia y la utilidad de las mismas. Además, es común ignorar que el conocimiento matemático no solo se limita al ámbito académico, sino que también puede ser una herramienta divertida para comprender el mundo tanto dentro como fuera de un salón de clase. Es crucial reconocer la importancia de las matemáticas como un saber trascendental que va más allá de la obtención de altas calificaciones en un examen.

Un ejemplo claro de lo mencionado se observa frecuentemente en estudiantes de secundaria, especialmente en los grados superiores. En esta etapa, los jóvenes y adolescentes suelen perder la curiosidad característica de la infancia para explorar, aprender e interactuar con el mundo matemático que les rodea. Y, por otro lado, la enseñanza tradicional de las matemáticas en estos grados a menudo omite ciertas teorías, conocimientos y estrategias que podrían ayudar a disminuir esa percepción indiferente. Es importante reconocer que el trabajo de un profesor no se limita a la simple transmisión de conocimientos rutinarios, sino que implica buscar constantemente nuevas formas de enriquecer la formación de los estudiantes, mediante la investigación y la retroalimentación constante con contenidos innovadores.

Desde esta perspectiva, surge la propuesta de llevar a cabo una práctica pedagógica enfocada en orientar una de las temáticas menos convencionales en el aula de clase de grado décimo y once, utilizando la metodología de resolución de problemas. El objetivo es guiar a los estudiantes en un acercamiento a la Teoría de Grafos de manera diferente y estimulante, alejándose del enfoque mecánico de aplicar fórmulas y encontrar respuestas con poca significancia para ellos. En cambio, se busca enriquecer la experiencia matemática desde su familiarización con los problemas, en pro de una apropiación de su proceso, que permita dar sentido a sus razonamientos, animándolos a interpretar, proponer y dar sus opiniones ante nuevas situaciones.

Así, se plantea esta intervención con estudiantes de grado décimo y once de la Institución Educativa Agropecuaria Nuestra Señora del Rosario, una institución que es de carácter público, ubicada en el municipio de San Sebastián Cauca, específicamente en el corregimiento El Rosal, de donde es originaria la encargada de esta propuesta.

Dado que esta localidad queda a siete horas de viaje de la capital caucana vía terrestre, este tipo de intervenciones escasamente llegan a estas zonas rurales, por lo que se considera importante priorizarla, pues además la disposición de su comunidad académica favorece el desarrollo de esta actividad. Por otro lado, esta elección refleja el deseo de retribuir lo que ha sido mi proceso educativo a la sociedad y al sistema educativo de carácter público del que he sido beneficiaria durante mi carrera universitaria.

Es grato evidenciar que instituciones como esta manifiestan interés por involucrarse en procesos universitarios de este tipo, beneficiando a futuros profesionales de la educación y a la comunidad educativa que se nutre recíprocamente en experiencia.

MARCO TEÓRICO Y METODOLÓGICO

Papel del Juego en las Matemáticas

A menudo, se tiende a asociar la noción de matemática recreativa con un simple juego, cuya única finalidad es la diversión, para evitar esto es necesario profundizar y reflexionar frente a lo que es el campo de las matemáticas recreativas, buscando reconocer el papel tan importante y significativo que tiene en procesos de enseñanza y aprendizaje. Grandes matemáticos han demostrado cómo la interacción con juegos y actividades lúdicas puede generar beneficiosos aportes, incluso dando origen a nuevos campos y enfoques de pensamiento. Este impacto trasciende, pues cada contribución permite ampliar el acervo de conocimientos e incita a continuar explorando nuevas teorías, se pueden notar estas valiosas interacciones en algunos ejemplos que Guzmán (1984) mencionó y se describen brevemente a continuación:

- Durante la Edad Media, Leonardo de Pisa, más conocido como Fibonacci, desarrolló una matemática numérica con un enfoque lúdico, influenciado por las técnicas árabes, lo que le llevó a ser reconocido como Stupor Mundí (asombro del mundo) por el emperador Federico II debido a sus impresionantes logros matemáticos.
- En la Edad Moderna, Gerónimo Cardano, uno de los matemáticos más destacados de su época, escribió el Líber de ludo Aleae, un tratado sobre juegos de azar que anticipó en más de un siglo los trabajos de Blaise Pascal y Pierre Fermat en el campo de la probabilidad. Además, participó activamente en duelos intelectuales resolviendo ecuaciones algebraicas desafiantes, junto a otros famosos contendientes como Niccolò Fontana, conocido como Tartaglia.
- El célebre problema del Caballero de Meré, que plantea cómo deberían ser las apuestas de dos jugadores que, teniendo que alcanzar un total de n puntos con sus dados, uno obtuvo p puntos y el otro q puntos en una primera jugada, fue propuesto por Antoine Gobaud, conocido como el

Caballero de Meré a Blaise Pascal. De la correspondencia entre Pascal y Pierre de Fermat sobre este problema, surgió la moderna Teoría de la probabilidad.

- En 1735, Leonhard Euler, un prolífico matemático suizo, abordó el famoso problema de los siete puentes de Königsberg, planteando la posibilidad de encontrar un camino que cruzara cada puente exactamente una vez. Esta resolución marcó el inicio de la Teoría de Grafos y la topología, abriendo nuevas puertas en el campo de las matemáticas.
- William Rowan Hamilton, un matemático dublinés del siglo XIX, creó un juego matemático llamado Viaje por el Mundo, que consistía en recorrer todos los vértices de un dodecaedro regular, donde cada vértice representaba una cuidad, sin repetir visitas a las ciudades, generando así un problema interesante sobre que admiten un camino Hamiltoniano (un camino que visita todos los vértices del grafo una sola vez).
- John Von Neumann, uno de los matemáticos más influyentes del siglo XX, junto a Oskar Morgenstern un economista alemán, escribió Teoría de Juegos y Conducta Económica en 1944, donde exploraron los juegos de estrategia y presentaron el Teorema de Minimax, crucial para el estudio del comportamiento económico.
- Además de sus contribuciones a la física, Albert Einstein también mostró un gran interés en las matemáticas y en los juegos matemáticos. Se sabe que en su biblioteca particular tenía una sección dedicada específicamente a libros sobre juegos matemáticos.

También es justo mencionar a Martin Gardner, un escritor y divulgador científico estadounidense, ampliamente reconocido por su contribución a las matemáticas recreativas. A lo largo de su vida, Gardner exploró una variedad de temas, incluyendo la magia, la filosofía, la religión y la literatura. Sin embargo, su pasión por los acertijos y los juegos matemáticos dejó una huella duradera. Según Paenza (et.al.2018) "Él más prolífico y brillante escritor, difusor de la matemática recreativa en el mundo. Es considerado como el verdadero 'gurú' de la especialidad". Escribió durante 25 años columnas en la revista Scientific American Mathematical Games, las cuales han recibido gran acogida por quienes buscan seguir sus pasos, o por quienes llenos de curiosidad buscan sumergirse en acertijos y rompecabezas que a la vez demuestran que las matemáticas pueden ser divertidas.

Se puede continuar destacando la importancia creciente que han adquirido los juegos y la recreación en el ámbito del conocimiento, resaltando el análisis involucrado en ellos, muchas veces subestimado al considerarlos simples pasatiempos. Es crucial reconocer que estos juegos poseen un trasfondo matemático que a menudo pasa desapercibido.

Es común que algunos estudiantes no asocien las matemáticas con actividades divertidas o placenteras, percepción que puede transformarse al introducir experiencias educativas que estimulen el aprendizaje a través de juegos, retos o desafíos que despierten su curiosidad y deseo de abordarlos, aplicando conocimientos matemáticos de manera divertida y atractiva. Es importante entender que el juego no solo puede ser una herramienta para la diversión, sino también una actividad que estimula el proceso de aprendizaje en sí mismo. En este sentido, es crucial reconocer que las matemáticas pueden ser recreativas y no necesariamente deben ser percibidas únicamente como una ciencia formal dedicada a resolver problemas, calcular, medir, entre otras tareas que a menudo se asocian con seriedad y monotonía.

Según Guzmán (1984) "por una parte son muchos los juegos con un contenido matemático profundo y sugerente, y por otra parte, una gran porción de la matemática de todos los tiempos tiene un sabor lúdico que la asimila extraordinariamente al juego", a pesar de esta conexión intrínseca, en el ámbito educativo se tiende a pasar por alto esta afirmación, como consecuencia, muchos estudiantes desarrollan una aversión hacia las matemáticas, considerándolas aburridas y tediosas. Este desinterés puede llevar a una percepción de incompetencia en cálculos y operaciones matemáticas. Sin embargo, es importante destacar que estos mismos estudiantes muestran habilidades sobresalientes cuando se enfrentan a juegos como cartas, rompecabezas o puzles, sin darse cuenta de que están aplicando conceptos matemáticos de manera intuitiva y efectiva.

Esta discrepancia entre la percepción de las matemáticas en el aula y su aplicación en contextos lúdicos muestra la necesidad de reevaluar y enriquecer los métodos de enseñanza, buscando integrar la diversión y el juego como herramientas educativas efectivas en el aprendizaje de las matemáticas. Es importante reflexionar sobre cómo aprovechar estas habilidades lúdicas para fomentar el interés y el aprendizaje en esta disciplina, reconociendo que la diversión puede ser un poderoso vehículo para el desarrollo de habilidades matemáticas y la superación de los desafíos académicos.

Al presentar los contenidos matemáticos de manera lúdica y al analizar diferentes actividades recreativas desde una perspectiva matemática, se puede fomentar gradualmente el disfrute de la actividad matemática. Este enfoque no solo ayuda a los estudiantes a ver la diversión en las matemáticas, sino que también les permite enfrentarse a desafíos y resolver problemas de una manera más dinámica y participativa. Los juegos y actividades lúdicas pueden plantear problemas o retos que requieran aplicar conceptos y habilidades en un contexto práctico y divertido, lo que motiva a los estudiantes a pensar de manera creativa y a desarrollar estrategias para encontrar soluciones que implícitamente requieren de las matemáticas. De esta manera, los educadores pueden aprovechar el poder del juego para involucrar a los estudiantes en el proceso de aprendizaje y promover una comprensión más profunda y significativa de los conceptos matemáticos. Además de acuerdo con Guzmán (1984):

> Por supuesto, existen diferencias substanciales entre la práctica del juego y la de la matemática. Generalmente las reglas del juego no requieren introducciones largas, complicadas, ni tediosas. En el juego se busca la diversión y la posibilidad de entrar en acción rápidamente. Muchos problemas matemáticos, incluso algunos muy profundos permiten también una introducción

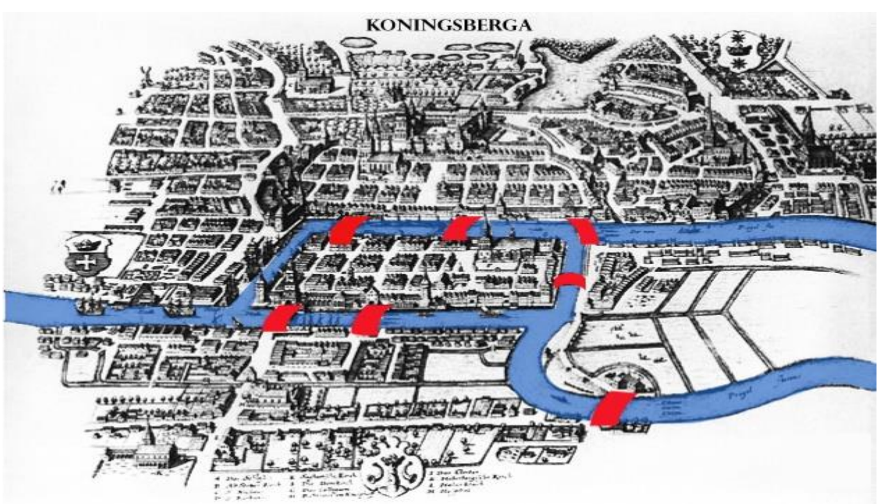
sencilla y una posibilidad de acción con instrumentos bien ingenuos, pero la matemática no es sólo diversión, sino ciencia e instrumento de exploración de su realidad propia mental y externa.

Por lo que esta propuesta se enfoca en presentar problemas matemáticos que comparten similitudes con los juegos, al seguir reglas establecidas y ofrecer un ambiente que estimula la curiosidad, la diversión y la exploración. No obstante, es importante destacar que estos problemas, a pesar de su apariencia lúdica, también mantienen su esencia como actividades matemáticas fundamentales.

El Problema de los Puentes de Königsberg

El problema se planteó en la antigua ciudad de Königsberg, ubicada en lo que hoy es Kaliningrado, Rusia. La ciudad se encontraba atravesada por el río Pregolia, el cual formaba varias islas y se ramificaba en múltiples brazos alrededor de la isla Kneiphof. Un total de siete puentes conectaban las distintas partes de la ciudad: el puente del herrero, el Puente Conector, el Puente Verde, el Puente del Mercado, el Puente de Madera, el Puente Alto y el Puente de la Miel. La pregunta central que surgía era la siguiente: ¿Es posible recorrer toda la ciudad, cruzando cada uno de los siete puentes una única vez?

Imagen 1 *Mapa puentes de Königsberg*

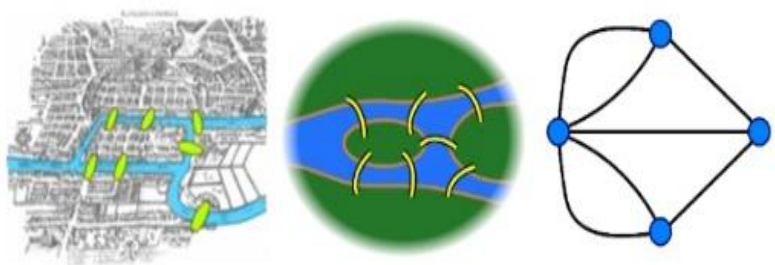


Fuente: Introducción al Pensamiento Matemático (unam.mx)

Leonhard Euler un eminente matemático y físico del siglo XVIII, reconocido por su genialidad y prolífica producción académica, demostró que no existe una ruta con estas características, en 1736 presento la solución al problema en un artículo *llamado Solutio problematis and geometriam situs pertinentis* (La solución de un problema relativo a la geometría de la posición) con la que sentó las bases de la Teoría de Grafos, por lo que su nombre está estrechamente ligado a esta teoría, y además a la Teoría de Números, a la Geometría, el Cálculo pues contribuyó significativamente al desarrollo de diversas ramas de las matemáticas y la física.

En este apartado no se detallará la solución de Euler, ya que se explorará en una de las actividades que se plantean más adelante, sin embargo, se rescata el enfoque con que él abordó el problema. En lugar de centrarse en los detalles específicos de la ciudad y sus puentes, Euler optó por abstraer el problema a un nivel más general. De modo que una de las características sobresalientes de su solución es la abstracción del problema, pues por un lado simplificó el problema a un modelo que consistía en representar los terrenos y puentes de Königsberg mediante puntos (vértices) y líneas (aristas) que conectaban estos puntos, creando y acuñando la noción de grafo para describir tal estructura.

Imagen 2 *Grafo puentes de Königsberg*



Fuente: Euler y los puentes de Königsberg | Pasatiempos OpenMind (bbvaopenmind.com)

El grafo permite una visualización clara y precisa de la disposición geográfica del problema, conservando los elementos esenciales del problema, como las regiones, las conexiones y los puentes.

Este enfoque resultó fundamental, ya que simplificó el problema al convertirlo en un objeto matemático que podía ser analizado de manera más rigurosa y general. Al representar el problema en forma de grafo, se eliminaron las distracciones y se enfocó la atención en las relaciones fundamentales entre los elementos, lo que facilitó la identificación de patrones y la formulación de estrategias de solución más efectivas. Además, el uso del grafo proporcionó una estructura organizada para el análisis, lo que permitió abordar el problema de manera sistemática y metódica. No solo simplificó su complejidad, sino que también proporcionó una herramienta poderosa para su análisis y comprensión.

Ahora bien, desde una primera mirada, resolver el problema de los siete puentes de Königsberg implicaría considerar múltiples opciones de un recorrido, ya que existen numerosas combinaciones posibles para cruzar cada puente una sola vez. En cada paso del recorrido, se presentan siete opciones para elegir el primer puente a cruzar, seis para el segundo, cinco para el tercero y así sucesivamente. Esta multiplicidad de posibilidades conduce a un número considerable de caminos a explorar, representado por siete factorial (7!), que resulta en una cantidad enorme de combinaciones a verificar. Sin embargo, gracias al enfoque generalizado propuesto por Euler, es posible analizar cualquier problema similar y determinar si existe una ruta que satisfaga las condiciones requeridas, lo que constituye un avance significativo en la teoría de grafos y en la resolución de problemas de este tipo.

En un acercamiento intuitivo al problema, los estudiantes, pueden abordarlo desde una perspectiva práctica, utilizando herramientas visuales, como diagramas o modelos físicos, para explorar las relaciones entre los elementos del problema y experimentar con diferentes estrategias de resolución. El problema permite una fase inicial de exploración intuitiva que fomenta la creatividad y la curiosidad de los estudiantes, permitiéndoles desarrollar hipótesis y realizar conjeturas sobre posibles soluciones lo que abre camino a explorar la solución de Euler que si bien se muestra con un enfoque formal, puede ser una estrategia pedagógica poderosa para el desarrollo del pensamiento matemático donde se combinan elementos intuitivos como la exploración visual con el rigor analítico del enfoque de Euler, lo que fomenta el razonamiento deductivo para abordar problemas reales.

Coloración de Grafos, El Teorema de los Cuatro Colores

En el campo de la teoría de grafos, uno de los problemas más intrigantes es el estudio de la coloración de grafos, que busca determinar la mínima cantidad de colores necesarios para colorear los vértices de un grafo de manera que ningún par de vértices adyacentes tenga el mismo color. Lo que muestra la relación con el teorema de los cuatro colores, que establece que "Dado cualquier mapa geográfico con regiones continuas, este puede ser coloreado con cuatro colores diferentes o menos, de forma que no queden regiones adyacentes con el mismo color" (Teorema de los cuatro colores, s.f.). Este problema tiene una amplia gama de aplicaciones en diversos campos. Por ejemplo, se utiliza en la planificación de horarios, el diseño de redes de comunicación y la optimización de rutas en logística y transporte. Además, en la programación informática, se emplea para resolver problemas de asignación de recursos, lo que en este proceso conlleva a considerarlo como parte de las actividades en la resolución de problemas.

Este teorema, también conocido como Teorema de la Minimalidad Cromática, fue propuesto en la Teoría de Grafos en la segunda mitad del siglo XIX y generó un gran interés debido a su aparente simplicidad y la amplia gama de aplicaciones que tenía.

> El problema del mapa de 4 colores se remonta a 1852, cuando Francis Guthrie, un estudiante de la University College London, observó que cualquier mapa dibujado en papel podía rellenarse con solo ese número de colores sin que quedaran dos regiones vecinas con el mismo tono. Desesperado por probar su conjetura, se lo contó a su hermano quien le pasó la duda al eminente matemático Augustus De Morgan, quien incapaz de resolver el problema por sí mismo, se lo expuso a sus colegas, entre ellos el igualmente eminente William Rowan Hamilton. (¿Es

cierto que 4 colores son suficientes para pintar cualquier mapa sin que ningún país vecino tenga el mismo color?, 2019)

A pesar de los esfuerzos iniciales, aunque De Morgan que no pudo hallar solución difundió el problema con otros matemáticos, la conjetura se hizo famosa con la declaración de Arthur Cayley en 1878 quien lo presento a la London Mathematical Society. Esta presentación dio lugar a un renovado interés en el problema y atrajo la atención de matemáticos de todo el mundo. A partir de entonces, el problema del mapa de cuatro colores se convirtió en uno de los desafíos más fascinantes y persistentes en el campo de la teoría de grafos y la matemática combinatoria.

La formulación precisa y la demostración rigurosa del teorema representaron un desafío para muchos matemáticos durante décadas, hasta que finalmente se logró una prueba completa y general en 1976, gracias al trabajo de los matemáticos Kenneth Appel y Wolfgang Haken, quienes utilizaron computadoras para realizar una exhaustiva verificación de casos. Demostraron que no puede existir ninguna configuración como contraejemplo del teorema, considerando una cantidad de 1936 mapas que fueron comprobados individualmente con ayuda de un ordenador, con un total de 1200 horas de tiempo computacional obtuvieron la prueba final, concluyendo que cualquier configuración de un mapa cae dentro de los mapas considerados, así hasta ahora no se ha encontrado contraejemplo alguno.

Este teorema tuvo un impacto significativo en el campo de la teoría de grafos y en la percepción pública de las matemáticas. Además de su relevancia teórica, su demostración destacó la importancia de la computación en la resolución de problemas matemáticos complejos y desencadenó avances en el desarrollo de algoritmos y en la interacción entre matemáticos y científicos de la computación.

No obstante, la demostración tuvo una recepción variada. Fue el primer caso espectacular en el que una computadora participó para probar un teorema matemático. Sin embargo, los matemáticos de la vieja escuela de la época recibieron la prueba con sospecha, burla y consternación. “Una buena prueba matemática es similar a un poema, ¡pero esto es una guía telefónica!", fue una de las críticas. (¿Es cierto que 4 colores son suficientes para pintar cualquier mapa sin que ningún país vecino tenga el mismo color?, 2019)

De modo que, es considerado el primer resultado de coloración de grafos, y también el primer gran teorema que se demostró usando un ordenador, con el transcurrir del tiempo su demostración ha sido aceptada por la mayoría de los matemáticos, sin embargo, algunos aun que se niegan a aceptar la exactitud del programa, del compilador y computador en el cual se ejecutó la prueba.

Así, el estudio de la coloración de grafos y el teorema de los cuatro colores representan áreas fundamentales en la teoría de grafos, que no solo tienen aplicaciones prácticas, sino que también han contribuido a enriquecer nuestra comprensión de conceptos matemáticos fundamentales y a promover el desarrollo de nuevas herramientas computacionales.

Considerando la trascendencia del teorema de los cuatro colores y el estudio de la coloración de grafos, resulta interesante en este proceso, adentrarse en el análisis de cómo se colorea un grafo y como usar esta técnica en la solución de problemas con los estudiantes, lo que se verá más adelante en la actividad 4. Este conocimiento no solo les proporciona una comprensión más profunda de la teoría de grafos, sino que también les ofrece una nueva estrategia para abordar y resolver situaciones o problemas reales de manera estructurada y metódica.

La Resolución de Problemas en el Conocimiento Matemático

Con frecuencia, los estudiantes se encuentran con obstáculos al intentar comprender y resolver problemas matemáticos. Esto se debe a que su enfoque se centra únicamente en encontrar la respuesta correcta o aplicar algoritmos, descuidando la comprensión profunda del problema en sí mismo. Este enfoque mecánico omite la verdadera esencia de la resolución de problemas, que implica pensar de manera crítica y creativa sobre cómo abordar una situación matemática particular. Es fundamental que los estudiantes desarrollen habilidades para analizar los problemas desde diferentes perspectivas, identificar patrones y relaciones, y aplicar estrategias innovadoras para llegar a soluciones efectivas.

De esta manera, no solo resolverán problemas con mayor eficiencia, sino que también comprenderán mejor los conceptos subyacentes y desarrollarán una mayor apreciación por el proceso matemático en sí mismo, pues como mencionan Bahamonde y Viceña (2011):

> La resolución de problemas, habitualmente no es tomada en cuenta, o se aborda desde una perspectiva bastante básica en los colegios, ya que los tiempos no siempre rinden lo que se espera, otorgando demasiado realce a la operatoria mecánica (calculo procedimental) y olvidando desarrollar en los alumnos la capacidad de "pensar matemáticamente" que es lo que finalmente importa.

De modo que, es importante considerar la complejidad inherente del proceso de resolución de problemas, no como una dificultad sino como un proceso que requiere una estructura metodológica sólida, que estimule el pensamiento matemático de los estudiantes y para ello se tienen en cuenta parte del valioso legado del matemático húngaro George Pólya, frente a la enseñanza de estrategias para resolver problemas.

Fases Para la Resolución de Problemas Según George Pólya

George Pólya hizo contribuciones significativas en una variedad de áreas, incluyendo teoría de números, combinatoria y análisis complejo, también se hizo conocido por su libro *Como plantear y resolver problemas* en el que presenta un enfoque de cuatro pasos para la resolución de problemas, el cual ha tenido un impacto duradero en la educación matemática, ya que fomenta el pensamiento crítico y la reflexión, habilidades que son valiosas en una amplia gama de disciplinas.

Por lo tanto, considerar algunas de sus ideas será vital para incentivar el pensamiento crítico y matemático desde la resolución de problemas sin caer en estrategias que contribuyan al desencanto por las matemáticas, ya que suelen encontrase situaciones en el aula que generan desagrado en los estudiantes, y peor aún, algunas de estas situaciones son resultado de enfoques educativos que priorizan el avance del contenido sin fomentar un aprendizaje significativo, dejando la posibilidad a los estudiantes de experimentar frustración y desmotivación al no comprender el contenido de manera profunda.

En consecuencia, una actitud negativa hacia las matemáticas en general, e incluso los estudiantes pueden desarrollar una falta de confianza en sus habilidades matemáticas, lo que puede afectar su futuro desempeño en esta área y en otras disciplinas relacionadas, tal y como Pólya, (1981) menciona "Las matemáticas tienen el dudoso honor de ser el tema menos popular del plan de estudios... Futuros maestros pasan por las escuelas elementales aprendiendo a detestar las matemáticas. Regresan a la escuela elemental a enseñar a nuevas generaciones a detestarlas".

En ese sentido, a continuación, se tienen en cuenta algunas consideraciones en las fases clave que Pólya propone en su libro *Cómo plantear y resolver problemas*, para la resolución de problemas, desde una interpretación subjetiva hacia como un profesor puede aplicarlas.

Comprender el Problema.

Es crucial que los estudiantes entiendan completamente el problema que están enfrentando. Esto significa no solo leer el enunciado, sino también comprender el significado detrás de cada palabra y la información proporcionada. Como profesor, se es un guía que debe fomentar la curiosidad y el pensamiento crítico en sus alumnos. Es importante recordarles que, antes de comenzar a resolverlo, deben familiarizarse con lo que están buscando y comprender hacia dónde los dirige el problema. Esto implica hacerse la pregunta ¿Qué es lo que necesito encontrar?, esto ayudará a enfocar su atención en los elementos clave del problema y a desarrollar una estrategia más efectiva para resolverlo.

Concebir el Plan.

Después de comprender completamente el problema, el siguiente paso es diseñar un plan de acción. George Pólya enfatiza que existen múltiples formas razonables de abordar un problema y que la habilidad para elegir una estrategia adecuada se desarrolla a través de la práctica. Por lo tanto, es importante animar a los estudiantes a explorar diferentes enfoques y estrategias de resolución.

Una vez que los estudiantes comprenden el problema, es útil que detallen la información conocida, sus experiencias previas y sus conocimientos previos relacionados con lo que se necesita encontrar. Esto les ayudará a visualizar un camino a seguir y a determinar la mejor estrategia para resolver el problema. Alentar a los estudiantes a explorar diferentes enfoques no solo desarrollará su capacidad para resolver problemas matemáticos, sino que también fomentará su creatividad y su capacidad para pensar críticamente. Esto les permitirá enfrentarse a una variedad de desafíos y situaciones problemáticas no solo en el ámbito escolar, sino también en su vida cotidiana.

Ejecución del Plan.

Una vez que se ha diseñado un plan para abordar el problema, el siguiente paso es ejecutarlo. Este proceso puede resultar más sencillo que la etapa de diseño, pero aún requiere paciencia y habilidades específicas para llevarlo a cabo de manera efectiva. Como profesor, es importante alentar la persistencia entre los estudiantes. Si un enfoque no funciona, animar a probar otro sin desanimar su proceso. Esto refleja cómo los matemáticos profesionales también abordan los problemas, mediante la experimentación y la adaptación de diferentes estrategias hasta encontrar la solución adecuada.

Al finalizar la ejecución del plan, los estudiantes verificarán si su proceso de resolución los condujo a una respuesta correcta. Si han seguido los pasos correctamente y han aplicado las estrategias de manera efectiva, es probable que hayan llegado a una solución satisfactoria. Sin embargo, si no obtienen el resultado esperado, es importante que revisen su plan y consideren ajustes o enfoques alternativos para alcanzar la respuesta correcta.

Visión Retrospectiva.

Mirar hacia atrás y reflexionar sobre el proceso de resolución de problemas es una etapa crucial en el desarrollo de habilidades matemáticas. Es fundamental analizar lo qué funcionó y lo qué no funcionó durante el proceso, respondiendo a ¿Qué estrategias fueron efectivas y cuáles no? ¿Cómo podrían aplicarse estas lecciones aprendidas a futuros problemas?

El profesor debe guiar a los estudiantes en esta fase de reflexión. Ayudarlos a evaluar su proceso de resolución de problemas, fomentando la autoevaluación y la identificación de áreas de mejora. Esto les permitirá desarrollar habilidades metacognitivas, es decir, la capacidad de reflexionar sobre su propio pensamiento y aprendizaje. Al hacerlo, los estudiantes pueden anticipar estrategias futuras y mejorar su capacidad para abordar problemas similares en el futuro. En esta etapa, es importante no solo encontrar la solución al problema, sino también asimilar detalladamente la experiencia. Se debe analizar la razón del éxito o fracaso, explorar otras posibles estrategias de resolución y determinar cuál es la más eficaz. Esta reflexión no solo fortalece la comprensión del problema actual, sino que también enriquece la capacidad de los estudiantes para enfrentar desafíos futuros con confianza y eficacia.

Ahora bien, la tarea que tiene el profesor es ayudar a los estudiantes en este proceso, una de las tareas más importantes y nada fáciles según Pólya, pues el estudiante debe adquirir en su trabajo personal la más amplia experiencia posible, pero si se les deja enfrentarlos solos sin ninguna guía, pueden estancarse en su progreso. Por otro lado, si el profesor les ofrece demasiada ayuda, los estudiantes pueden volverse dependientes y no desarrollar sus habilidades de manera independiente. Es crucial encontrar un equilibrio, el profesor debe brindar apoyo, pero permitir que los estudiantes asuman una parte significativa del trabajo por sí mismos. Si un estudiante enfrenta dificultades, el profesor puede motivarlo a seguir adelante fomentando su entusiasmo por el trabajo personal. En este sentido, el profesor debe proporcionar orientación de manera discreta, sin imponerse en exceso al estudiante.

Se reconoce que, en el proceso de enseñanza y aprendizaje, el papel del maestro no es el único relevante, ya que el trabajo colectivo dentro del aula también desempeña un papel fundamental. Según Godino, Batanero y Vicenç (2004), la instrucción matemática significativa se basa en la interacción social, donde el aprendizaje ocurre a través de la interacción con el entorno educativo apoyado en el uso de recursos simbólicos, materiales y tecnológicos disponibles en el entorno.

En este sentido, el profesor debe promover un espacio en el que los estudiantes no solo reciben instrucción de manera tradicional, sino que también interactúan y exploran problemas, en una dinámica que fomenta el intercambio de ideas y el trabajo colaborativo entre compañeros.

Por otro lado, es necesario notar que, al analizar un juego o actividad recreativa, se puede identificar un objetivo que, aunque no se perciba como la resolución de un problema matemático convencional, comparte características. Ambos implican la necesidad de tomar decisiones conscientes y acertadas para alcanzar un objetivo específico. Por lo tanto, en la matemática recreativa, la resolución de problemas juega un papel fundamental al brindar a los estudiantes la oportunidad de desarrollar habilidades de pensamiento crítico y estratégico.

Cuando los estudiantes se enfrentan a desafíos a través de problemas recreativos, se sienten motivados a ejercitar su creatividad y encontrar soluciones innovadoras. Esta experiencia no solo les permite desarrollar habilidades de pensamiento útiles para resolver problemas matemáticos, sino también para enfrentar desafíos en diversos aspectos de su vida. Esto cobra especial relevancia al introducir conceptos de matemáticas no convencionales, ya que puede despertar el interés y la disposición de los estudiantes para participar activamente en actividades de aprendizaje. Al interactuar con las matemáticas de manera divertida y atractiva, se tiene la oportunidad de experimentar el aspecto lúdico de esta disciplina, lo que puede generar un mayor compromiso y comprensión.

> En total acuerdo con Guzmán (1984) cuando menciona que, si cada día ofreciésemos a nuestros alumnos, junto con el rollo cotidiano, un elemento de diversión, incluso aunque no tuviese nada que ver con el contenido de nuestra enseñanza, el conjunto de nuestra clase y de nuestras mismas relaciones personales con nuestros alumnos variarían favorablemente.

La percepción del profesor y del curso de matemáticas como el más estricto y aburrido e incluso temible de todas las áreas con la que a veces se lo distingue, puede decaer si más que orientar conocimientos matemáticos, se prioriza el disfrute e interés genuino por esta disciplina.

ANTECEDENTES

Como se ha mencionado anteriormente, esta propuesta pedagógica busca proporcionar una experiencia práctica a través de una combinación de enfoques que incluyen la matemática recreativa, la resolución de problemas en un acercamiento a la Teoría de Grafos. El objetivo es que los estudiantes adquieran una perspectiva positiva de las matemáticas, al tiempo que se incentiva el desarrollo de habilidades analíticas y de pensamiento crítico al explorar uno de los temas menos convencionales en el aula.

La inclusión de la Teoría de Grafos proporciona a los estudiantes una oportunidad para explorar nuevos territorios, analizar y razonar sobre conceptos matemáticos que pueden ampliar su comprensión y apreciación de las matemáticas. Aunque es un tema típicamente asociado al nivel universitario y no está incluido en los programas de estudio escolares convencionales, cada vez se reconoce más su potencial para fomentar el análisis y el razonamiento en personas de todas las edades y niveles educativos, ya que su no se requiere ser un experto en el tema para apreciar su utilidad y aplicabilidad en diversos contextos.

En ese sentido, a continuación, se describen dos trabajos que buscan integrar la Teoría de grafos en los procesos de enseñanza y aprendizaje de estudiantes en diferentes niveles escolares.

Desarrollo del Pensamiento Matemático a Través de Tres Problemas Clásicos

Esta experiencia pedagógica fue realizada en el año 2015 por David Fernando Daza Urbano como trabajo de grado para obtener el título de Licenciado en Matemáticas en la Universidad del Cauca. Aquí, exploró una idea diferente respecto a las prácticas educativas llevando contenidos matemáticos poco usuales en la educación básica y media, para ello mediante la metodología de resolución de problemas trabajó con estudiantes de grado décimo tres problemas relacionados con el Infinito numerable, la Teoría de Códigos y la Teoría de Grafos, los cuales se describen a continuación respectivamente:

El hotel infinito de Hilbert: Este problema consiste en un hotel con infinitas habitaciones que el matemático David Hilbert ideó para explicar algunas propiedades importantes de los conjuntos infinitos numerables, es una representación abstracta que ilustra paradojas relacionadas con el infinito en las matemáticas, especialmente los infinitos numerables de George Cantor pionero de la Teoría de conjuntos. Este hotel hipotético cuenta con un número infinito de habitaciones numeradas del 1 al infinito, permitiendo maniobras matemáticas que desafían la intuición, como la capacidad de alojar un número infinito de huéspedes y turistas adicionales, desafiando las limitaciones de espacio convencionales. Este problema es un ejercicio mental fascinante, su estudio ayuda a comprender mejor los conceptos abstractos del infinito en las matemáticas, aunque su realización física sea imposible, por ejemplo, si se agrega una habitación al hotel este seguirá teniendo una cantidad infinita de habitaciones, lo que puede traducirse en términos de conjuntos, si se agrega un elemento a un conjunto infinito numerable entonces este no sufrirá cambio alguno.

Truco de magia: En este problema abordó el truco matemático conocido como *A vista de pájaro*, un ejercicio de deducción que emplea seis cartas que contienen números del 0 al 63 para descubrir un número específico que alguien ha pensado. Es decir, un espectador elige mentalmente un número entre 0 y 63 sin revelarlo. Mediante una serie de preguntas estratégicas, los estudiantes pueden deducir el número pensado por el espectador al observar qué cartas menciona si contienen el número elegido. No solo es un fascinante ejercicio de deducción, sino que también ofrece una perspectiva única sobre la representación de los números naturales en el sistema binario, esta representación es fundamental para que el truco funcione, ya que se puede deducir el número pensado por el espectador mediante la suma de los valores binarios de las cartas mencionadas. Así, aunque el truco pueda parecer mágico, en realidad se trata de descifrar un código numérico de manera ingeniosa, en una relación con el sistema de numeración binaria.

Puentes de Königsberg: para este caso, propuso una actividad interactiva donde los estudiantes exploran varios grafos con el objetivo de identificar si pueden ser dibujados de un solo trazo, es decir, si existe un camino que recorra cada arista exactamente una vez sin levantar el lápiz del papel. Durante esta actividad, los estudiantes analizan patrones y características comunes entre los grafos que les permiten deducir una regla general para determinar cuándo un grafo tiene un recorrido de un solo trazo, lo que constituye un acercamiento al Teorema de Euler para grafos. Este teorema establece las condiciones necesarias y suficientes para que un grafo tenga un ciclo euleriano, es decir, un camino cerrado que pase por cada arista exactamente una vez. Luego de comprender esta teoría, los estudiantes pueden aplicar sus conocimientos en la resolución de tres problemas clásicos: ***Las joyas de la condesa, Los puentes de Manhattan y Los puentes de Königsberg***. Estos problemas, que pueden representarse mediante grafos, ofrecen contextos prácticos para aplicar el Teorema de Euler y comprender su utilidad en la resolución de problemas del mundo real relacionados con la conectividad y la optimización de rutas.

En las anteriores actividades se puede observar que la resolución de problemas no tiene por qué ser una estrategia aburrida, más bien, puede ser una experiencia de exploración emociónate, incluyendo sucesos históricos en los que matemáticos destacados han recurrido a ideas y situaciones ingeniosas para explicar de forma sencilla grandes enigmas y paradojas de la humanidad, demostrando la versatilidad y perspectivas únicas con las que los estudiantes se pueden ir relacionando desde el colegio.

> Al finalizar su experiencia con estas actividades en una de sus conclusiones expresa: Puedo especular y “decir” que es posible trabajar de forma dinámica y agradable conceptos matemáticos diferentes a los que usualmente se establecen en el currículo de la educación básica y media. Debemos respetar las ideas de los estudiantes, no imponer las nuestras, más bien hacerles ver si es el caso, que están en algo incorrecto. El reflexionar sobre la preparación

> de la clase te permite explorar diversas formas de presentar un contenido, lo que mejora tus competencias en el área. (Daza, 2015)

Desde este tipo de prácticas pedagógicas se puede notar la viabilidad de adoptar enfoques flexibles y creativos en la enseñanza de las matemáticas. Se destaca la idea de ir más allá del currículo estándar y de respetar las ideas de los estudiantes, permitiéndoles explorar y expresarse libremente. Además, se enfatiza la importancia de la reflexión continua sobre la preparación de la clase, con el fin de mejorar habilidades como educadores y adaptar la enseñanza a las necesidades individuales de los estudiantes.

Finalmente deja una idea con la que desde esta propuesta se empatiza y es la siguiente:

> El campo de acción de las matemáticas parece ser inagotable, sin embargo, en la mayoría de ocasiones las practicas matemáticas son enfocadas a temas que han sido ya de mucho estudio (sin desmeritar), ¿Por qué no arriesgarse a descubrir que nuevos resultados pueden brindarnos otras ramas de las matemáticas, como la Teoría Fractal, la Teoría de Grafos, ¿la historia de las matemáticas entre otras? (Daza, 2015).

Es importante fomentar la exploración y el descubrimiento en todas las áreas de las matemáticas, ya que esto puede conducir a nuevas ideas, métodos y aplicaciones que podrían ser muy valiosos en el futuro. Por ejemplo, el estudio de la historia de las matemáticas puede proporcionar una perspectiva única sobre cómo han evolucionado las ideas matemáticas a lo largo del tiempo y cómo pueden seguir desarrollándose en el futuro, lo que también incentiva la apropiación y valorización del conocimiento matemático.

Enseñanza de Grafos: Un Breve Recorrido en Distintos Niveles Educativos

Ahora bien, el segundo antecedente que se describirá a continuación es parte de las investigaciones realizadas por Teresa Claudia Braicovich, Ingeniera civil y Magister en Enseñanza de las ciencias Exactas-Orientación Matemática de la universidad Nacional del Comahue, universidad pública de Argentina.

Desde el año 1992 hace parte de proyectos de investigación y desde el 2006 comienza a dirigirlos, todos referidos a la temática de grafos, estas investigaciones están encaminadas en tres líneas, Algebrización de grafos, Aplicaciones de grafos y Enseñanza de grafos en distintos niveles educativos, de esta última línea es de donde se describe la factibilidad de introducir algunos conceptos de la Teoría de Grafos en los distintos niveles educativos.

Inicialmente reconoce que hay serias dificultades en el proceso de aprendizaje de los estudiantes en distintos niveles educativos, incluso en la educación universitaria, pues los estudiantes tienen problemas para generar razonamientos propios y a menudo no pueden resolver problemas simples que se relacionan con la vida cotidiana y con la matemática. Situación que posiblemente esté vinculada a un modelo cultural que prioriza la reproducción del conocimiento sobre su producción y además reconoce lo difícil que resulta a los profesores despertar interés de los estudiantes, para lo cual menciona que:

> Una posible respuesta a la problemática anteriormente planteada, estaría dada por la idea de plantear situaciones donde el alumno tenga la posibilidad de explorar, descubrir, crear, ensayar, probar, generar hipótesis y conjeturas, discutirlas y analizarlas. En este sentido, a partir de investigaciones realizadas he concluido que los grafos constituyen una buena herramienta para conceptualizar situaciones, para extraer pautas y entender esquemas y lograr transferirlos a situaciones nuevas. La Teoría de Grafos es un tema avanzado a nivel universitario que, en general, no se encuentra en las currículas escolares y que permite realizar análisis y

razonamientos muy interesantes. Es decir, no hay necesidad de ser un experto en el tema para usarlos con cierta soltura, por lo que considero que el introducir algunos conceptos de grafos resulta útil para despertar el interés por la matemática, para ayudar al desarrollo lógico y a la visión espacial, también actúa como formador de la intuición y sostén del razonamiento abstracto. (Braicovich, 2012)

Grafos y su Potencial Educativo

Cuando se plateó la propuesta de incorporar algunos conceptos de grafos en distintos niveles de escolaridad Braicovich (2012) cita a Rosenstein, J., Franzblau, D., Roberts, F. (1997) quienes detallan los siguientes puntos:

- Referido a la aplicabilidad: En los años recientes varios temas de esta teoría han sido utilizados creando distintos modelos en distintas áreas.
- Referido a la accesibilidad: Para entender las aplicaciones del tema en muchas situaciones es suficiente tener conocimientos de aritmética y en otras solamente de álgebra elemental.
- Referido a la atracción: Existen algunas situaciones sencillas de resolver y también otras que hacen que los alumnos deban explorar para poder llegar a los resultados.
- Referido a la adecuación: A aquellos estudiantes que no tengan problemas en matemática les dará mayor preparación para las carreras que elijan y para los que no les va bien en esta disciplina es apropiada porque les da la posibilidad de un nuevo comienzo.

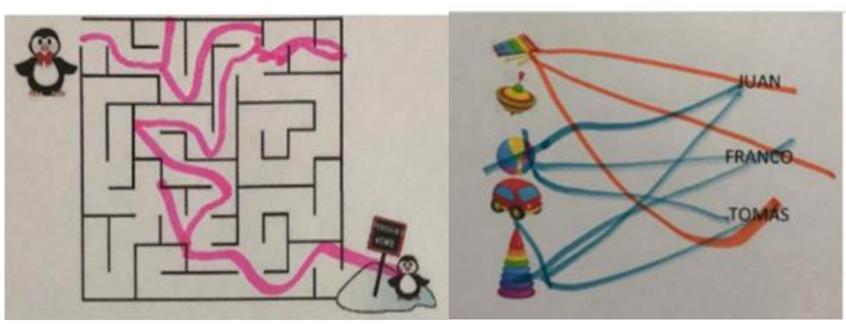
Ahora bien, durante sus investigaciones Braicovich realizó y analizó propuestas de aula para los diferentes niveles de escolaridad e incluso pensó en la inclusión de conceptos de Teoría de Grafos en algunas carreras de nivel universitario entre ellos la licenciatura en Matemática, en distintas orientaciones de ingeniería, e incluso en el profesorado en matemática y profesorado universitario en matemática como se describe brevemente a continuación.

Nivel Inicial.

En este nivel "uno de los ejes de la matemática es la construcción del espacio, por eso es factible trabajar los conceptos de cierre, vecindad, separación y orden. Los niños pueden jugar realizando distintos recorridos en un grafo, sobre todo en el sentido hamiltoniano, ya que es más fácil para ellos, pasar por determinados lugares y no por determinados caminos" (Braicovich, 2010)

Durante la experiencia se trabajaron dos temas, caminos y grafos bipartidos como se muestra a continuación:

Imagen 3 *Caminos y grafos bipartidos realizados por niños del nivel inicial*



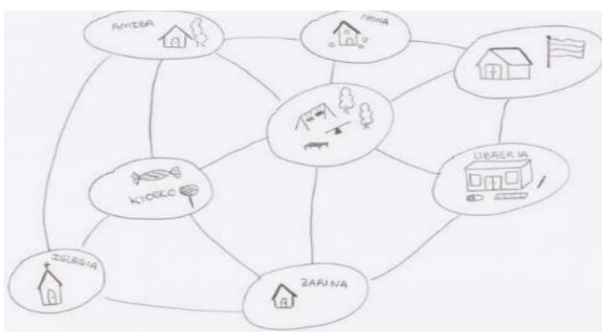
Fuente: Vista de Enseñanza de Grafos: Un breve recorrido en distintos niveles educativos (fespm.es)

Nivel Primario.

En este ciclo se pueden usar los grafos para representar situaciones concretas. El pensamiento del niño de esta edad hace que perciba cada problema individualmente, sin aún captar las regularidades, sugiere enfrentarlos a una gran variedad de situaciones diferentes y entretenidas, que irán desarrollando la intuición, base "fértil" para futuras generalizaciones y comprensión de propiedades. También se puede hacer que los niños coloreen grafos o regiones, tratando que lo hagan con la menor cantidad de colores posibles, a esta edad no lo harán de manera algorítmica, lo harán, en general, por ensayo y error. (Braicovich, 2010)

En este caso las experiencias se llevaron a cabo en distintos establecimientos de educación públicos, de radio céntrico, de radio periférico, rurales y también públicos de gestión privada, considerando al nivel primario dividido en tres ciclos, el primero entre 1º y 3º grado, el segundo comprende 4º y 5º grados y el tercero 6º y 7º grado. En el primer ciclo, por ejemplo, se encontró que ya son capaces de realizar recorridos con determinadas condiciones, los niños fueron capaces de encontrar caminos entre lugares que se les pedía, por ejemplo “Ir desde la escuela a la Iglesia pasando (obligatoriamente) por la librería y sin pasar por el kiosco” en la elaboración de un grafo como el que sigue:

Imagen 4 *Grafo de actividades niños 1º y 3º grado*



Fuente: Vista de Enseñanza de Grafos: Un breve recorrido en distintos niveles educativos (fespm.es)

Nivel Secundario

En este nivel se diferencian dos partes de la enseñanza, en la primera los estudiantes están en una etapa donde *se*gún Braicovich (2010):

> Se producen cambios cognitivos en los alumnos, por tanto, ellos pueden acceder a un mejor nivel de abstracción y representación que en los años anteriores, es decir que podrán plantearse

problemas sin necesidad de estar ligados a un problema concreto, realizando razonamientos propios de la matemática discreta y generalizando. Incluso se puede trabajar de manera inversa, darles grafos y solicitarles que busquen situaciones que puedan ser representados por estos, además pueden trabajar con grafos planares, encontrar la relación con el teorema de Euler a partir de ejemplos concretos y realizar justificaciones con la misma, por supuesto acordes a sus edades.

También menciona que como en esta etapa se dan los primeros pasos hacia un pensamiento lógico-formal, se debe seguir estimulando la capacidad de conjeturar, hacer uso de las propiedades ya conocidas, para realizar justificaciones.

En la Segunda parte de la enseñanza, los estudiantes ya se encuentran plenamente en la etapa de desarrollo de pensamiento formal, por lo que ya son capaces de razonar con hipótesis verbales y por tanto menciona que:

> Al razonar sobre hipótesis, la realidad se vuelve secundaria en relación con la posibilidad, lo real se subordina a lo posible, justamente la deducción lógica es uno de sus instrumentos. Por lo tanto, en este nivel se puede presentar a los alumnos situaciones para que ellos realicen demostraciones y también problemas en los cuales deban plantear distintas conjeturas y evaluar el valor de verdad de las mismas, con justificaciones ya más formales. Cabe aclarar, que es necesario y fundamental que los estudiantes reconozcan el razonamiento y la demostración como aspectos fundamentales de la matemática. En este nivel es interesante que los alumnos hallen la relación entre grafos y poliedros, o equivalentemente entre la relación de Euler trabajada en el nivel anterior y la relación poliedral, ya que es muy importante que los estudiantes trabajen con distintas representaciones. (Braicovich, 2010)

En este nivel se trabajaron los cuatro grandes temas que dieron origen a la Teoría de Grafos, que son recorridos eulerianos, recorridos hamiltonianos, planaridad y coloreo y árboles. De estos temas el único que no fue trabajado en niveles anteriores fue el de recorridos hamiltonianos, el motivo por el cuál no fue trabajado es porque es un problema abierto. Pero, justamente, eso es lo que hace rico el trabajo en secundaria porque puede ser comprendido aún para quienes tengan conocimientos básicos de la Teoría de Grafos. En términos generales se puede mencionar que se profundizó en los temas anteriores, hallando y formalizando algoritmos, resolviendo problemas y planteando situaciones problemáticas concretas que pueden ser modelizadas y resueltas mediante determinados conceptos de grafos. (Braicovich, 2022)

Se invita al lector a explorar más a fondo cómo se abordó esta área en el nivel universitario, tanto en algunas carreras de Ingeniería como en el Profesorado Universitario y Licenciatura en Matemáticas.

Finalmente expresa que, pensando en la proyección a futuro, para incluir este tema en el currículo es posible que deba realizarse un cambio gradual, pues hay docentes que no lo conocen. No en todos los planes de estudio de la carrera de profesorado de matemática y de magisterio se encuentra el tema grafos, por lo que sería importante trabajar con los contenidos, pero también en herramientas para la enseñanza de este, y a modo de cierre cita una frase de Claudi Alsina (2011) “Un grafo es una construcción extraordinariamente simple: unos puntos y las líneas que los unen. Son grafos desde el mapa del metro hasta la ruta de un mensajero, y en general, las redes de todo tipo que cimentan el mundo contemporáneo. La observación cuidadosa de estas simples estructuras nos abre los ojos a un universo de enlaces y conexiones donde las matemáticas reinan supremas”.

ACTIVIDADES

En las actividades propuestas, se detalla el procedimiento no meramente como una serie de pasos algorítmicos, sino más bien como una invitación a transitar cada ejercicio con calma y dedicación. Se busca fomentar la comprensión y el disfrute de cada ejercicio, sin apresuramientos ni superficialidades. Cada idea y ejercicio se aborda con la profundidad necesaria para apreciar su riqueza y complejidad, espero no "cortar" de manera abrupta el flujo de pensamiento. Estas actividades requieren varias sesiones para completarse, lo cual demanda entrega y dedicación a las matemáticas, así como el disfrute del proceso mismo, de los estudiantes y profesar que guía el proceso.

Introducción a un Grafo

1. La primera parte de esta actividad es una adaptación de uno de los retos mencionados en el video ***El maravilloso mundo de la Teoría de Grafos***[1] del canal de YouTube ***ParaDoppler*** en el que muestra algunas aplicaciones y problemas que abarca la Teoría de Grafos con relación a establecer caminos en un grafo. En esta actividad se busca que los estudiantes construyan sus propias nociones a partir de conclusiones, opiniones y conjeturas, por lo que se evita proporcionar definiciones directas, centrándose en el reto de organizar una fila con los nombres de algunos colores de acuerdo con las siguientes condiciones:

   Dos colores no pueden ser continuos si comparten la misma cantidad de letras. Dos colores pueden ser continuos si tienen al menos una letra en común. La fila debe iniciar en el color azul

   Los colores son blanco, verde, azul, rojo, celeste y amarillo, los cuales deben distribuirse en una hoja de papel aprovechando al máximo el espacio disponible. A continuación, para dar respuesta al reto es necesario tener en cuenta las siguientes recomendaciones:

[1] (1) El maravilloso mundo de la Teoría de Grafos - YouTube

- Es conveniente que los estudiantes no se ayuden de la escritura en letras o números para encontrar la solución, es mejor que se sumerjan en la idea de solucionar el problema usando líneas que representen las posibilidades que tiene cada color de relacionarse con otro color.

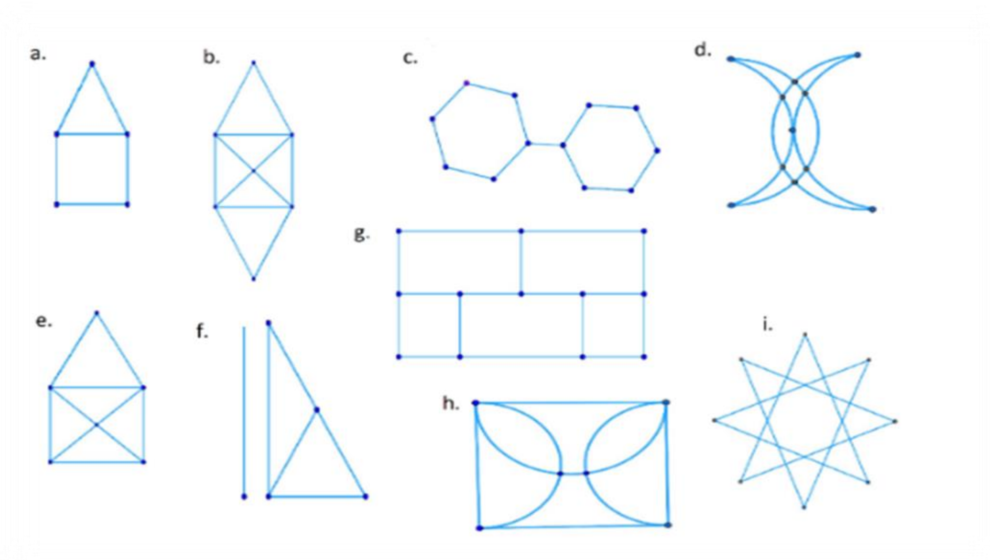
  - Deben tener en cuenta todas las posibilidades que tiene cada color para relacionarse con otros colores, atendiendo las condiciones indicadas.
  - Su respuesta debe estar respaldada por las líneas encontradas.
  - Es beneficioso que se intercambien resultados, reconociendo sí coinciden tanto en las líneas como su respuesta, o incluso si encuentran una relación que dejaron olvidada. Claramente, se obtendrán diferentes gráficos, pues dependen de la posición con la que se ubica cada color, sin embargo, coincidirán en el número de relaciones que cada color tiene.
  - Buscar que los estudiantes desde sus gráficos conjeturen que "un camino que se puede seguir sobre las líneas dibujadas entre los colores, sin alzar el lápiz de la hoja de papel" permite encontrar el orden de la fila de colores buscada, y a partir del grafico obtenido guiar a los estudiantes hacia la noción de grafo[2], y grado de un vértice[3], relacionando su trabajo con tales nociones.

2. Para la segunda parte de esta actividad, de acuerdo con la noción de grado de un vértice se analizarán las siguientes ilustraciones completando la tabla 1.

Un grafo es una representación matemática de relaciones entre objetos, compuesto por nodos (vértices) y conexiones entre ellos (aristas).

[3] El grado de un vértice en un grafo es el número de aristas incidentes en ese vértice. En otras palabras, es la cantidad de conexiones que tiene ese vértice con otros vértices en el grafo

Ilustración 1 *Grafos actividad 1*



Fuente: Adaptación propia de grafos en línea según necesidades introductorias.

Tabla 1 *Información grafos actividad 1*

Grafo	¿Se puede trazar sin levantar el lápiz del papel y sin pasar dos veces por una misma arista?	Grado de cada uno de los vértices
a		
b		
c		
⋮	⋮	⋮
i		

Fuente: Elaboración propia

3. Con la información de la tabla 1 es posible para los estudiantes comparar y hallar patrones o relaciones en el grado de los vértices, diferenciando cantidades pares e impares, en los grafos que sí se pudieron dibujar sin alzar el lápiz del papel, dichos patrones serán los que permiten guiar a los estudiantes hacia las siguientes conjeturas
   - Si todos los vértices de un grafo son pares, el grafo se puede dibujar de un solo trazo.
   - Si el grafo posee exactamente dos vértices de grado impar, el grafo se puede dibujar de un solo trazo comenzando el trazo en uno de los vértices de grado impar.
   - Si en un grafo existen más de dos vértices de grado impar, no es posible dibujar el grafo de un solo trazo.

   Las conjeturas que se buscan obtener son las conclusiones a las que llego Leonhard Euler en su solución al problema de los siete puentes de Königsberg, sin embargo, aquí no se realizará esta aclaración, ya que su solución será estudiada en la actividad 3.

4. Finalmente, para complementar la introducción a grafos se propone resolver el problema ***Red de amistades***, una de las actividades propuestas por la profesora Esther Mazorra Gutiérrez en su trabajo de Fin De Máster, ***Actividades introductorias de los grafos en las matemáticas de secundaria****,* realizado en el año 2020, la cual busca solucionar la siguiente situación desde la representación en grafos:
   Años después de finalizar el instituto, Laura quiere organizar una reunión con ocho de sus antiguos compañeros de clase, sin embargo, no tiene el número de teléfono de ninguno de ellos. Recurre a Facebook donde encuentra el perfil de Carla, a partir de la cual establece las siguientes conexiones:
   - *Carla es amiga de Sergio y de Lidia.*

- *Lidia es amiga a su vez de Carmen y Andrés.*
- *Sergio es hermano de Julia; Julia y Andrés son pareja, por lo que los tres son amigos en Facebook.*
- *Carmen es amiga de Carlos y de Andrés, Carlos no es amigo de nadie más.*
- *María no tiene perfil en Facebook*

a) *Para ayudar a Laura, representar mediante un grafo esta red de amistades.*

b) ¿Cuántos amigos tienen cada uno en Facebook dentro de esta red de amistades?

c) Supongamos que, los que NO son actualmente amigos en Facebook se quisieran agregar, exceptuando a María, ¿Cuántas solicitudes de amistad se mandarían en total?, ¿Quién tendría que agregar un menor número de amigos?, ¿Por qué?

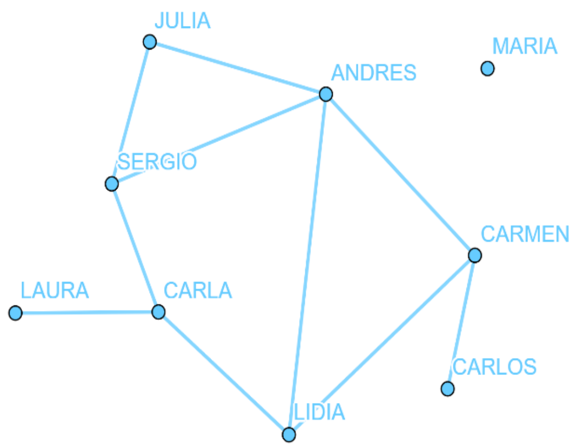
d) Representar mediante un grafo la situación hipotética del apartado c.

Nótese que esta actividad busca familiarizar a los estudiantes con un grafo y su utilidad, por ejemplo, para representar conexiones de amistad, en este caso los vértices representan a cada uno de los amigos.

Vértices: {Laura, Carla, Sergio, Julia, Andrés, Lidia. Carmen, Carlos, María} y las aristas representan la amistad en Facebook, las cuales son: {(Laura, Carla), (Carla, Sergio), (Sergio, Julia), (Sergio, Andrés), (Julia, Andrés), (Andrés, Carmen), (Carmen, Lidia), (Lidia, Andrés), (Carla, Lidia), (Carmen, Carlos)}.

Por otro lado, la es posible familiarizarse con la noción de vértice aislado pues en este caso María es un vértice que no tiene ninguna arista, Así para el literal (a) se puede obtener como respuesta un grafo similar al que sigue.

Ilustración 2 *Grafo Red de amistades*



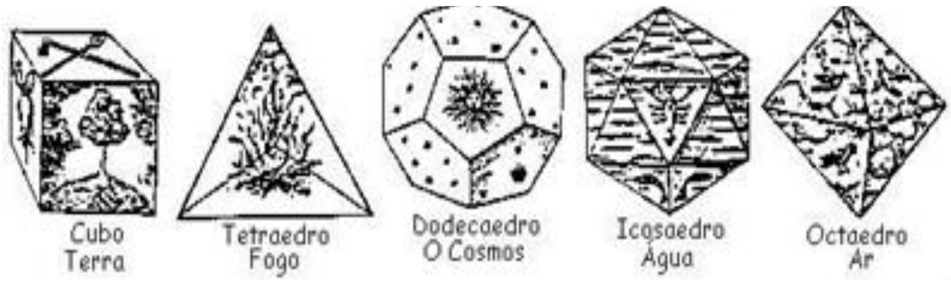
Fuente: Elaboración propia

Ahora bien, para responder a los literales restantes es necesario reconocer el grado de cada vértice y realizar cálculos sencillos alrededor del grafo obtenido. Al finalizar esta actividad, se espera que cada estudiante este familiarizado con la noción de grafo, grado de un vértice, vértice aislado, nociones claves para la siguiente actividad.

Conociendo los Poliedros Platónicos

Entre las innumerables formas poliédricas que existen, algunas han ejercido siempre una gran atracción hacia su estudio debido a sus características, entre ellas se encuentran los poliedros regulares, cuyas caras son polígonos regulares iguales entre sí y en cuyos vértices concurren el mismo número de caras. Platón, en su obra "Timeo," vinculó cada uno de los cuatro elementos fundamentales del universo griego (fuego, aire, agua y tierra) con un poliedro específico: el tetraedro al fuego, el octaedro al aire, el icosaedro al agua, el hexaedro o cubo a la tierra, y, finalmente, el dodecaedro al universo. Esta asociación ha otorgado a estos poliedros el título de Sólidos platónicos, su estudio ha perdurado debido a sus características únicas y a la conexión filosófica establecida por Platón entre estos sólidos y los elementos fundamentales de la realidad.

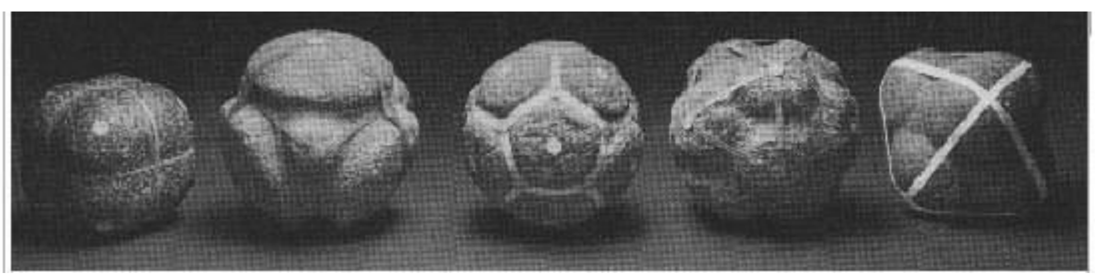
Imagen 5 *Poliedros platónicos*



Fuente: md21011 [licensed for non-commercial use only] / 4,1 Concepto e Historia de los cuerpos geométricos (pbworks.com)

La primera noticia sobre estos poliedros proviene de un yacimiento neolítico en Escocia, donde se descubrieron figuras de barro datadas aproximadamente en el 2000 a.C. Aunque no existía una comprensión matemática completa en ese momento, se cree que estas figuras podrían haber sido elementos decorativos o, posiblemente, utilizados en algún tipo de juego.

Imagen 6 *Figuras encontradas en un yacimiento neolítico de Escocia*



Fuente: md21011 [licensed for non-commercial use only] / 4,1 Concepto e Historia de los cuerpos geométricos (pbworks.com)

Estos sólidos han trascendido las fronteras de las matemáticas y se han convertido en elementos familiares para muchas personas. A lo largo de la historia, genios como Arquímedes, Kepler, Escher, Leonardo da Vinci, Luca Pacioli y Leonhard Euler han explorado sus propiedades y aplicaciones. Además, su presencia en el arte, a través de pintores de diferentes épocas, también contribuye a su familiaridad y belleza.

En este contexto, resulta intrigante y, a la vez, enriquecedor explorar la idea del por qué solo son cinco poliedros platónicos, explorando el teorema de Euler para poliedros, al tiempo que nos adentramos en la Teoría de Grafos con la intención de destacar la atractiva naturaleza de los poliedros, cuyas propiedades se revelan como elementos clave para comprender esta teoría. Al reconocer características como el número de vértices, caras y aristas, se puede observar cómo estas figuras tridimensionales pueden transformarse en notación plana, representadas de manera concisa en un grafo.

Leonhard Euler formuló su teorema para poliedros el en el siglo XVIII, presentó este resultado fundamental en su obra ***Elementa Doctrinae Solidorum,*** publicada en 1758. La fórmula asociada al teorema C + V - A = 2, establece la relación entre las caras (C), vértices (V) y aristas (A) de un poliedro convexo. Esta contribución revolucionó el estudio de los poliedros y proporcionó una herramienta valiosa para entender las propiedades geométricas de estos sólidos, y en este caso al abordar la pregunta de por qué solo existen cinco poliedros platónicos, es posible acercarse al proceso deductivo de una demostración matemática a partir de la aplicación de esta fórmula en los poliedros, revelando una relación intrínseca entre sus componentes geométricos que permite clarificar y demostrar, por qué únicamente existen cinco poliedros platónicos.

Procedimiento:

1. Construcción y manipulación de los poliedros platónicos:

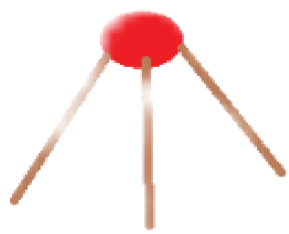
   En esta actividad, los estudiantes construirán y diferenciarán poliedros platónicos a través de conclusiones y conjeturas. Se evitarán definiciones directas, optando por ejemplos prácticos que se basarán en nociones previas sobre vértices, aristas y grados de vértices. Estos ejemplos buscarán aclarar el origen de sus nombres y deducir la definición de cada poliedro platónico, destacando características como la cantidad de caras poligonales regulares y grados de vértices iguales.

- Materiales: Gomitas comestibles y palillos de igual tamaño que representarán los vértices y aristas respectivamente.

1.1. Se propone el "reto" de construir una figura tridimensional con ciertas características, por ejemplo, una estructura con seis aristas y cuatro vértices, en la que todos los vértices son de grado tres (características del tetraedro), algunas sugerencias para los estudiantes durante el proceso podrían ser:

a. Tomar un vértice y hacer confluir en el tres aristas

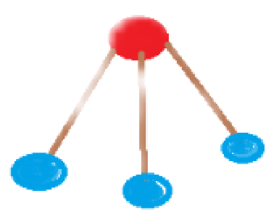
Ilustración 3 *Representación vértice de grado tres*



Fuente: Elaboración propia

b. Al final de cada arista agregar un vértice, y analizar la ubicación de las aristas restantes (esto con el objetivo de crear las cuatro caras triangulares regulares que forman el tetraedro).

Ilustración 4 *Estructura guía para obtener el tetraedro*



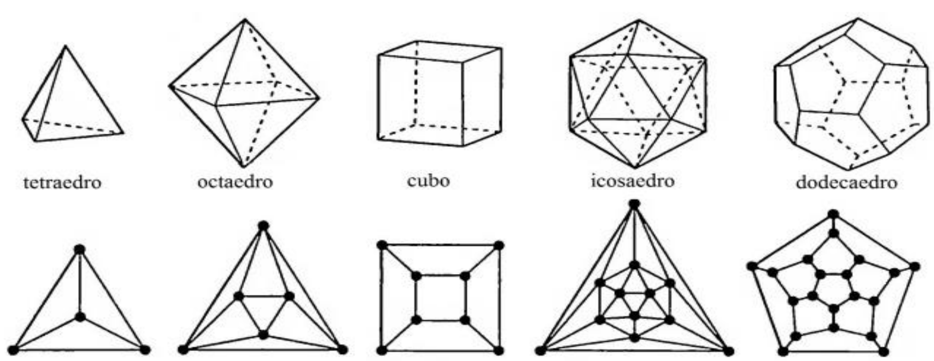
Fuente: Elaboración propia

1.2 Después de tener una estructura como la del tetraedro, es preciso fomentar un diálogo en el que se analicen las características de la estructura, como qué polígonos la conforman, cuántos polígonos son, si son o no polígonos regulares, además de las ya conocidas en relación al número de aristas y vértices. El fin de este diálogo es deducir gradualmente que se obtuvo un poliedro regular con cuatro caras que son triángulos equiláteros, y de ahí su nombre Tetraedro.

1.3 Después de la construcción tridimensional del Tetraedro, se propone modelar su representación (plana) en un grafo. Este proceso busca que los estudiantes comprendan la transición de una figura tridimensional a una figura plana, incentivando la idea visualizar e incluso manipular el poliedro para obtener el diseño de su grafo, una tarea poco sencilla pero que puede despertar su imaginación y creatividad, teniendo en cuenta que este diseño conservará características como la cantidad de vértices, aristas, y grado de cada vértice,

En un proceso análogo, se puede estudiar cualquiera de los poliedros platónicos, partiendo de la cantidad de vértices, aristas y el grado de un vértice, con la idea de manipular y construir estas estructuras para familiarizarse con ellos y reconocer sus nombres. Es preciso la ayuda visual de los poliedros y grafos, en la etapa final, para corroborar o corregir cada construcción.

Ilustración 5 *Grafos de los poliedros platónicos*



Fuente: EVALUACION 1er PERIODO: noviembre 2010 (diconsmomenang.blogspot.com)

2. ¿Es posible hallar más cuerpos de este tipo? ¿son solo cinco los poliedros platónicos?

    2.1. En primer lugar, invitar a los estudiantes a realizar una consulta en clase utilizando herramientas en línea, puede estimular su espíritu investigativo frente a la abundancia de información disponible sobre los poliedros. Se alienta a descubrir otras figuras tridimensionales, pues conocer los cinco poliedros platónicos y sus características, puede impulsar la imaginación hacia poliedros con otras caras poligonales y otras cantidades de vértices y aristas, lo que permitirá encontrar y resaltar ciertas características distintivas en comparación con otros poliedros platónicos, tales como su convexidad y complejidad geométrica. Ampliar su enfoque contribuirá a una comprensión más detallada de las diversas formas tridimensionales existentes que hacen únicos a los poliedros platónicos.

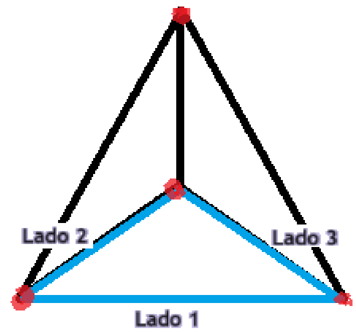
    2.2. El teorema de Euler par poliedros: Abordar la formula del teorema $C - A + V = 2$, y verificar que para cada uno de los poliedros platónicos se cumple esta relación entre la cantidad total de sus caras(C), vértices(V) y aristas(A) será una base del análisis deductivo que a continuación se muestra como una primera respuesta a la pregunta inicial.

    2.3. Respondiendo a la pregunta, un acercamiento a la demostración matemática.

    Inicialmente es necesario detallar las siguientes características para cualquiera de los poliedros platónicos:

    a. Cada vértice tiene una cantidad de aristas que denotaremos por a, y cada cara poligonal de un poliedro regular tiene una cantidad de lados que denotaremos por l, por ejemplo, en el tetraedro a=3 y l=3.

Ilustración 6 *Lados y caras del tetraedro*



Fuente: Elaboración propia

b. Cuando se cuenta el número de aristas por la cantidad total de vértices $(a \times V)$ la relación debe dividirse entre dos, pues por cada dos vértices siempre existirá una arista que los une, por lo que se está contando dos veces. Es decir que en realidad el número total de aristas $A = \frac{a \times V}{2}$ lo que implica que $V = \frac{2A}{a}$

c. Análogamente si se analiza la cantidad de lados por la cantidad total de caras $(l \times C)$ la relación debe dividirse entre dos, pues por cada lado siempre habrá dos caras, luego se puede encontrar la cantidad total aristas $A = \frac{C \times l}{2}$ lo que implica que $C = \frac{2A}{l}$

Remplazando los valores de C y de V encontrados en la fórmula $C - A + V = 2$ se obtiene que: $\frac{2A}{l} - A + \frac{2A}{a} = \mathrm{A}\left(\frac{2}{\mathrm{l}} - 1 + \frac{2}{\mathrm{a}}\right) = 2$

Nótese que se tiene una igualdad de cantidades positivas, a sabiendas que la cantidad total de aristas A de un poliedro es una cantidad positiva, se debe analizar los valores que mantengan dicha igualdad en la expresión $\left(\boldsymbol{\frac{2}{l} - 1 +} \frac{2}{a}\right) > 2$

Inicialmente se debe reconocer que $a \geq 3$ y $l \geq 3$ ya que la menor cantidad de aristas o lados con que se puede formas un polígono es tres, y la menor cantidad de aristas en un vértice es también tres pues de lo contrario no estaría cerrando o separando ninguna cara poligonal. Por lo tanto, al variar los valores de a desde 3 en adelante en la expresión $\left(\frac{\mathbf{2}}{\boldsymbol{l}} - \mathbf{1} + \frac{\mathbf{2}}{a}\right) > 2$ se obtienen desigualdades que ofrecen información acerca de los valores que l puede asumir como se puede observar en la siguiente tabla:

Tabla 2 *Aristas y lados de un polígono para formar un poliedro*

(Cantidad de aristas en cada vértice) $\boldsymbol{a}$	**Desigualdad obtenida**	**(Lados de una cara poligonal)** $\boldsymbol{l}$
3	$3 \leq l < 6$	3,4,5
4	$3 \leq l < 4$	3
5	$3 \leq l < \frac{10}{3}$	3
6	$3 \leq l < 3$	En este caso, cuando en un vértice concurren 6 aristas se encuentra una expresión que no tiene solución, una contradicción que permite verificar que no hay caras poligonales con las que se pueda hallar un poliedro con vértices de grado 6.

Fuente: Elaboración propia

Desde la tabla se puede establecer que:

- Con $a = 3$, l podría tomar los valores de 3, 4 y 5, lo que traduce que cuando tres aristas concurren en un vértice (vértices de grado 3), la cara poligonal del poliedro regular puede tener 3, 4 o 5 lados, lo que evidentemente solo lo cumple el tetraedro con caras triangulares, el hexaedro con caras cuadradas, y el dodecaedro con caras pentagonales, respectivamente.
- Con $\boldsymbol{a = 4}$ solo se obtuvo un único valor posible para l, el 3, lo que significa que cuando cuatro aristas concurren en un vértice (vértices de grado 4), la cara poligonal del poliedro regular solo puede tener 3 lados, lo que evidentemente lo cumple el octaedro con caras triangulares
- Con $\boldsymbol{a = 5}$ también se obtuvo un único valor posible para l,el 3, lo que significa que cuando cinco aristas concurren en un vértice (vértices de grado 5), la cara poligonal del poliedro regular solo puede tener 3 lados, lo que evidentemente lo cumple el icosaedro con caras triangulares.
- Con $\boldsymbol{a = 6}$ se puede notar que cuando concurren seis aristas en un vértice nos es posible hallar una cara poligonal con la cual construir un poliedro regular convexo pues la desigualdad brinda información contradictoria, lo que permitirá concluir que no puede haber poliedros con vértices de grado seis. Al continuar variando valores de a superiores a 6, se seguirán encontrando desigualdades contradictorias que permiten concluir que no es posible hallar otros poliedros regulares convexos como los poliedros o sólidos platónicos, encontrando que solo son los cinco conocidos inicialmente.

2.4. Para complementar la respuesta al por qué no es posible hallar más de cinco poliedros platónicos, es conveniente tener en cuenta la suma de los ángulos internos que causan las caras poligonales al coincidir en un vértice, ya que esta suma debe ser inferior a 360 grados, evitando que la figura a construir sea plana. Para entender mejor este enfoque es útil presentar el video ***Geometría de poliedros en N dimensiones: ¿Por qué solo hay 5 sólidos platónicos en 3D[4]?*** del canal de YouTube de Eleanor Abernathy, que contiene algunas animaciones que facilitan la comprensión visual de cómo dicha suma determina cuántas caras regulares pueden unirse, descartando poliedros con caras hexagonales, heptagonales, entre otras corroborando la información encontrada anteriormente.

Los Siete Puentes de Königsberg

Como mencionado previamente, el problema de los siete puentes de Königsberg es un enigma matemático célebre que surgió en la ciudad prusiana de Königsberg en el siglo XVIII. Esta actividad se propone estudiar las lecciones y pasos dados por Leonhard Euler en su solución, presentada en su artículo ***Solutio problematis and geometriam situs pertinentis*** (La solución de un problema relativo a la geometría de la posición). Desde un enfoque general, Euler no solo resolvió el mencionado problema de los siete puentes, sino que también derivó conclusiones aplicables a una amplia gama de problemas similares. En lugar de limitarse a resolver un desafío específico, Euler estableció un método y un marco conceptual que permiten identificar patrones y aplicar soluciones a problemas con características fundamentales compartidas. Por lo tanto, esta actividad no solo se enfoca en la resolución de un problema particular, sino que también aspira a comprender los principios subyacentes que pueden aplicarse en diversos contextos de manera más amplia.

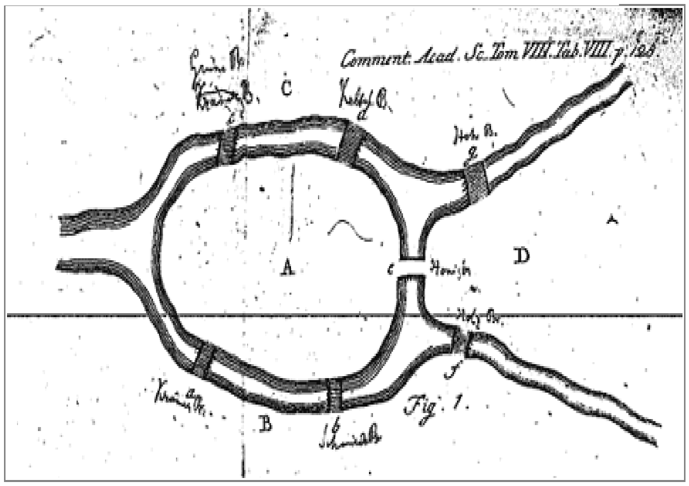
PROCEDIMIENTO:

1. Planteamiento del problema: En la cuidad de Königsberg, en Prusia, hay una isla A llamada Kneiphof, rodeada por los brazos del rio Pregel. Hay siete puentes a, b, c, d, e, f y g que cruzan

[4] Enlace del video: https://www.youtube.com/watch?v=zdKq_hXYlz4&t=18s

los dos brazos del rio, la cuestión consiste en determinar ***si una persona puede realizar un paseo de tal forma que cruce cada uno de estos puentes una sola vez.***

Ilustración 7 *Boceto mapa puentes de Königsberg*



Fuente: La teoría de grafos | Matemáticas (eitb.eus)

Una vez que se ha planteado el problema a los estudiantes, se les invita a buscar una posible solución, fomentando la generación de ideas y la exploración de diferentes enfoques para abordarlo. Se alienta un acercamiento intuitivo que permita a los estudiantes familiarizarse con el problema y comprender sus componentes e implicaciones. Es difícil obtener una solución inmediata, pero este proceso de familiarización con el problema sienta las bases para luego detallar paso a paso la solución y los razonamientos de Euler que se ilustran a continuación.

2. Acercamiento y análisis de la solución de Leonhard Euler al problema

2.1. Notación del recorrido

Se designa con letras mayúsculas las regiones y letras minúsculas los puentes correspondientes, así para representar un recorrido que cruza un puente de una región a otra se usa la secuencia de las letras mayúsculas, por ejemplo, si se parte de la región A hasta la B y luego a la región C, este recorrido se representará como ABC, y los recorridos AB y BC se condensan en la secuencia ABC.

En esta notación, se puede notar que, en el recorrido AB se cruza un puente, en el recorrido ABC se utilizan dos puentes, y en el recorrido ABDC se emplearan tres puentes, y así sucesivamente. Se busca que los estudiantes puedan detallar patrones hasta obtener la afirmación: **Si el caminante atraviesa P puentes, su recorrido quedará representado por $P+1$ letras mayúsculas, las cuales denotan una a una las regiones visitadas.**

Incógnita: En el recorrido que cruza los siente puentes de Königsberg una sola vez, ¿cuántas letras tendría la secuencia que representa el recorrido?

Respuesta: De acuerdo a la conclusión hallada, la secuencia tendría 7+1=8 letras.

2.2. Cantidad de puentes, su influencia en la notación del recorrido

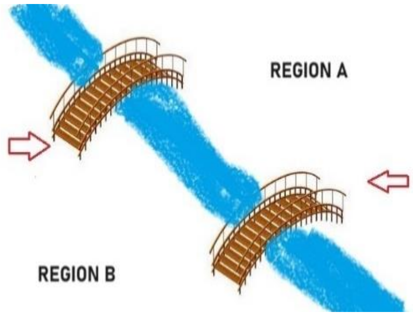
Al abordar la representación del recorrido mediante una secuencia de letras, Euler consideró un enfoque general del problema, donde cada región podría contener cualquier cantidad de puentes. Profundizó su análisis al contemplar la posibilidad de un número variable de puentes en una región y cómo esto influiría en la secuencia de letras que representa el recorrido. Esta idea se puede analizar con los estudiantes detallando la situación desde una cantidad $\boldsymbol{n}$ de puentes que puede ser par o impar en una región cualquiera.

Gráficamente se puede analizar este hecho con la ayuda de un dibujo donde se puede variar la cantidad de puentes para una región cualquiera que se denotará por A, al analizar los posibles recorridos se puede completar la tabla 3 como se verá en seguida.

a) Cantidad par de puentes en la región A:

   Por ejemplo, para el primer caso par, cuando $n=2$, es decir cuando hay dos puentes en la región A, se tiene el siguiente dibujo.

Ilustración 8 *Herramienta visual, cantidad par de puentes.*



Fuente: Elaboración propia

Visualmente los estudiantes pueden detallar en el dibujo que si el recorrido inicia en la región A, este será representado por la sucesión ABA, donde A aparece dos veces. Si el recorrido no inicia en la región A, será representado por la sucesión BAB, donde A aparece una sola vez, información que se puede notar en la segunda fila de la tabla 3. Note que, en la última fila de la columna, se encuentran expresiones generales, las cuales se pueden estudiar y/o conjeturar con los estudiantes a partir de estrategias como la comparar las columnas, por ejemplo, la tercera columna es la mitad de la primera columna, y dicha relación se puede escribir como $\frac{n}{2}$.

Tabla 3 *Implicaciones de un número par de puentes en la región A*

Número de puentes (par)	**Veces que aparecerá A si el recorrido comienza en A**	**Veces que aparecerá A si el recorrido NO comienza en A**
2	2	1
4	3	2
6	4	3
8	5	4
n	$\frac{n}{2}+1$	$\frac{n}{2}$

Fuente: Elaboración propia.

Note que, en la última fila de la columna, se encuentran expresiones generales, las cuales se pueden estudiar y/o conjeturar con los estudiantes a partir de estrategias como la comparar las columnas, por ejemplo, la tercera columna es la mitad de la primera columna, y dicha relación se puede escribir como $\frac{n}{2}$.

b). Cantidad impar de puentes en la región A.

En un proceso similar al anterior, se puede completar la tabla 4

Tabla 4 Implicaciones de un número impar de puentes en la región A

Número de puentes (impar)	Veces que aparecerá A si el recorrido comienza en A	Veces que aparecerá A si el recorrido NO comienza en A
1	1	1
3	2	2
5	3	3
⋮	⋮	⋮
n	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n+1}{2}$

Fuente: Elaboración propia

De la información obtenida en las tablas 3 y 4 se tienen las siguientes conclusiones:

- A aparecerá $\frac{\boldsymbol{n}}{\mathbf{2}}$ veces si la cantidad $\boldsymbol{n}$ s es par y el recorrido no inicia en la región A
- A aparecerá $\frac{\boldsymbol{n}}{\mathbf{2}}+\mathbf{1}$ veces sí $\boldsymbol{n}$ es par y el recorrido inicia en la región A
- A aparecerá $\frac{\boldsymbol{n}+\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$ veces sí $\boldsymbol{n}$ es impar, inicie o no el recorrido en la región A

2.3. Los siete puentes de Königsberg y la representación de su recorrido

A partir de estas conclusiones, para el problema de los siete puentes de Königsberg se tiene la siguiente tabla.

Tabla 5 *Implicaciones de los siete puentes de Königsberg*

Región	Número de puentes que conducen a la región	Número de veces que debe aparecer la letra
A	5 (impar)	$\frac{5+1}{2}$=3
B	3(impar)	$\frac{3+1}{2}$=2
C	3(impar)	$\frac{3+1}{2}$=2
D	3(impar)	$\frac{3+1}{2}$=2
	Suma total: 14 Cantidad real de puentes: $P = \frac{14}{2} = 7$	Suma total (Q) = 9 (letras)

Fuente: Elaboración propia

Consideraciones importantes en las tablas:

a. La suma total de la segunda columna es doble de la cantidad real de puentes, pues cada puente se está numerando dos veces, ya que comunica dos regiones, por ejemplo, en la tabla 5, se puede ver que la suma es 14, y la cantidad real de puentes es 7. De ahora en adelante se denotará por $\boldsymbol{P}$ a la cantidad real de puentes.

b. Del literal anterior se puede inferir que como la suma de la segunda columna es un número par, entonces deben existir una cantidad par de regiones con una cantidad impar de puentes o todas las regiones tienen una cantidad par de puentes, descartando así la existencia de problemas en los que hay una cantidad impar de regiones con una cantidad impar de puentes.

c. Si el recorrido buscado se puede hallar, deben coincidir la suma total de las veces que debe aparecer cada letra, es decir la suma de la tercera columna, que de ahora en adelante se denotara por $\boldsymbol{Q}$, con la cantidad de letras en la secuencia que representa el recorrido, es decir la cantidad de puentes más uno, esto es $\boldsymbol{P+1}$,(recuérdese la afirmación encontrada antes) ya que estas dos cantidades ofrecen información de un mismo recorrido. En el caso de la tabla 5, se puede observar que $P+1 \neq Q$, pues $8 \neq 9$, por tanto, se puede deducir que en el problema de los siete puentes de Königsberg no es posible hallar el recorrido.

2.4. Generalización; abordando diversas situaciones

Con las conclusiones halladas antes, desde una mirada general, es posible saber cuándo se puede encontrar el recorrido buscado en cualquier situación realizando un proceso similar pero aplicado a una cantidad arbitraria de regiones $A_{1,}A_{2,} \dots A_n$, con una cantidad arbitraria de puentes $n_1, n_2, \dots, n_n$ respectivamente, como se muestra a continuación:

- ***Problemas en los que todas las regiones tienen un número par de puentes***

Tabla 5 *Implicaciones de una cantidad par de puentes en todas las regiones*

Región	Número de puentes en cada región	Número de veces que debe aparecer la letra
$\boldsymbol{A_1}$	n_1	$\frac{n_1}{2}$+1 (sin perdida de generalidad, supongase que el recorrido inicia en esta región)
$\boldsymbol{A_2}$	n_2	$\frac{n_2}{2}$
$\boldsymbol{A_3}$	n_3	$\frac{n_3}{2}$
$\boldsymbol{A_n}$	n_n	$\frac{n_n}{2}$
	Total $n_1 + n_2 + \cdots + n_n$ $P = \frac{n_1 + n_2 + \cdots + n_n}{2}$ $P + 1 = \frac{n_1 + n_2 + \cdots + n_n}{2} + 1$	Total, cantidad de letras: $Q = \frac{n_1}{2} + 1 + \frac{n_2}{2} + \frac{n_3}{2} + \cdots + \frac{n_n}{2}$ $= \frac{n_1 + n_2 + \cdots + n_n}{2} + 1$
NOTA: se puede observar que $\boldsymbol{P + 1 = Q}$, por tanto, es posible hallar el recorrido, y este puede iniciar en cualquier región.		

Fuente: Elaboración propia

- ***Problemas en los que hay una cantidad par de regiones con una cantidad impar de puentes.***

  Partiendo con el número par más pequeño posible es decir dos, se tiene un problema con dos regiones que tiene una cantidad impar de puentes, sin pérdida de generalidad se puede asumir que dichas regiones son A_1 y A_2. De ese modo, se diferencian las siguientes tablas.

  Cuando el recorrido inicia en una región con una cantidad impar de puentes

Tabla 6 *Análisis recorrido con dos regiones impares, iniciando en una región impar.*

Región	Número de puentes en cada región	Número de veces que debe aparecer la letra.
$\boldsymbol{A_1}$	n_1(impar)	$\frac{n_1+1}{2}$ (sin perdida de generalidad, supongase que el recorrido inicia en esta region)
$\boldsymbol{A_2}$	n_2(impar)	$\frac{n_2+1}{2}$
$\boldsymbol{A_3}$	n_3	$\frac{n_3}{2}$
$\boldsymbol{A_4}$	n_4	$\frac{n_4}{2}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\boldsymbol{A_n}$	n_n	$\frac{n_n}{2}$

Total: $n_1 + n_2 + \cdots + n_n$	Cantidad de letras total:
$P = \frac{n_1 + n_2 + \cdots + n_n}{2}$	$Q = \frac{n_1+1}{2} + \frac{n_2+1}{2} + \frac{n_3}{2} + \cdots + \frac{n_n}{2}$
$P + 1 = \frac{n_1 + n_2 + \cdots + n_n}{2} + 1$	$= \frac{n_1 + 1 + n_2 + 1 + n_3 \ldots + n_n}{2}$
	$= \frac{n_1 + n_2 + n_3 + \cdots + n_n}{2} + \frac{2}{2}$
	$= \frac{n_1 + n_2 + n_3 + \cdots + n_n}{2} + 1$
NOTA: se puede observar que $\boldsymbol{P + 1 = Q}$, por tanto, en este caso es posible hallar el recorrido si este inicia en una de las regiones con una cantidad impar de puentes.	

Fuente: Elaboración propia

Cuando el recorrido inicia en una región con una cantidad par de puentes

Tabla 7 *Análisis recorrido con dos regiones impares, iniciando en una región par*

Región	Número de puentes en cada región	Número de veces que debe aparecer la letra
$\boldsymbol{A_1}$	n_1(impar)	$\frac{n_1+1}{2}$
$\boldsymbol{A_2}$	n_2(impar)	$\frac{n_2+1}{2}$
$\boldsymbol{A_3}$	n_3	$\frac{n_3}{2}+1$(sin perdida de generalidad, supóngase que el recorrido inicia en esta región)
$\boldsymbol{A_4}$	n_4	$\frac{n_4}{2}$
$\boldsymbol{A_n}$	n_n	$\frac{n_n}{2}$

Total $n_1 + n_2 + \cdots + n_n$	Cantidad de letras total:
$P = \dfrac{n_1 + n_2 + \cdots + n_n}{2}$	$Q = \dfrac{n_1 + 1}{2} + \dfrac{n_2 + 1}{2} + \dfrac{n_3}{2} + 1 + \dfrac{n_4}{2} + \cdots + \dfrac{n_n}{2}$
$P + 1 = \dfrac{n_1 + n_2 + \cdots + n_n}{2} + 1$	$= \dfrac{n_1 + 1 + n_2 + 1 + n_3 + n_4 + \cdots + n_n}{2} + 1$
	$= \dfrac{n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + \cdots + n_n}{2} + \dfrac{2}{2} + 1$
	$= \dfrac{n_1 + n_2 + n_3 + \cdots + n_n}{2} + 2$
NOTA: se puede observar que $\boldsymbol{P + 1 \neq Q}$, por tanto, no es posible hallar el recorrido si este inicia en una de las regiones con una cantidad par de puentes.	

Fuente: Elaboración propia

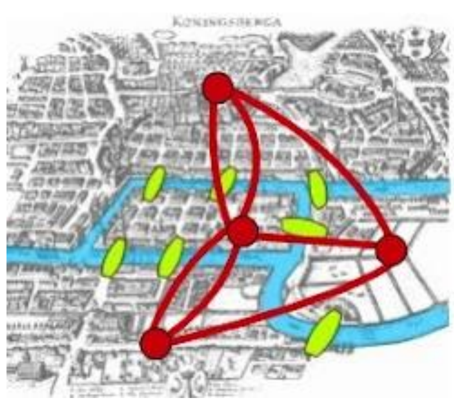
Observe que, si la cantidad par de regiones con un número impar de puentes crece, en la suma de la tercera columna aumentara una unidad, por lo que nunca se cumplirá la igualdad entre las cantidades $P + 1$ y Q, por tanto, no será posible el recorrido. De modo que se descarta la posibilidad de hallar un recorrido en problemas donde existe un número par mayor a 2 de regiones con un número impar de puentes, por ejemplo, el problema de los siete puentes de Königsberg. (tiene cuatro regiones con una cantidad impar de puentes)

De esta manera se deduce una respuesta para el problema inicial, y además se obtienen las siguientes conclusiones que permiten saber cuándo es posible o no hallar un recorrido que cruce una sola vez cada puente en cualquier problema:

- Si en todas las regiones tienen una cantidad par de puentes, entonces el recorrido es posible y puede iniciar en cualquier región.
- Si son más de dos las regiones a las cuales el número de puentes que conducen es impar, entonces puede afirmarse con certeza que este recorrido no se da.
- Si solamente hay dos regiones con un número impar de puentes, entonces el recorrido es posible, con tal que empiece en una de estas regiones.

2.5. Es importante recordar las conjeturas buscadas en la primera actividad, “***un grafo se puede dibujar de un solo trazo si tiene todos sus vértices de grado par o si tiene exactamente dos vértices de grado impar*"** notando que son equivalentes a las anteriores conclusiones, lo que lleva a establecer la relación de estos problemas con los grafos. Para tal fin, es necesario orientar a los estudiantes hacia la transformación del mapa a esta estructura, lo que implica convertir cada región en un vértice y cada puente en una arista, obteniendo así el grafo correspondiente. En este contexto, también es posible analizar la posibilidad de encontrar un recorrido que atraviese cada arista una única vez, lo que claramente no es posible pues todos sus vértices son de grado impar.

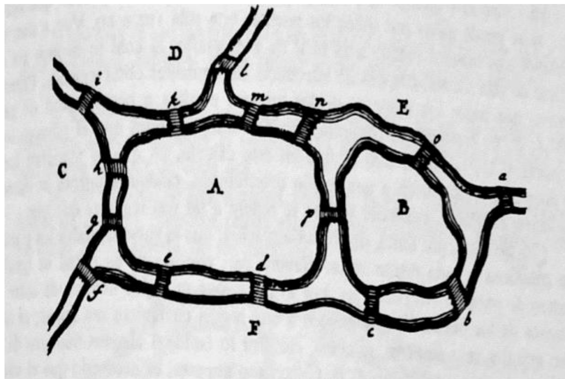
Imagen 7 *Vértices y aristas en el grafo de los puentes de Königsberg*



Fuente: Matemáticas Discretas Problemas de los puentes de Königsberg (matematicasdiscretasunevegc.blogspot.com)

3. Finalmente se propone analizar el siguiente mapa, con la idea de saber si es posible hallar o no un recorrido que cruce cada puente una sola vez, aplicando las conclusiones encontradas.

Imagen 8 *Mapa de un problema con 15 puentes y 6 regiones.*



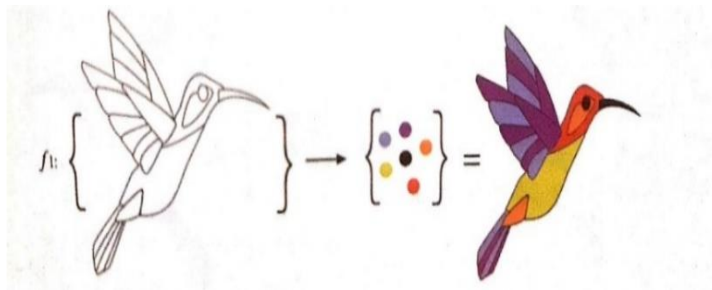
Fuente: (PDF) Acerca de la portada: Euler y los puentes de Königsberg: una visión histórica chgate.net)

Coloración de Grafos

PROCEDIMIENTO

1. Para comenzar esta actividad, es fundamental establecer una relación matemática con el concepto de coloración. En este sentido, algunas imágenes del libro *Matemáticas de Colores*, escrito por la doctora en Matemáticas Amanda Montejano, brindan una aproximación auténtica y lúdica a esta noción. Se puede conceptualizar las coloraciones como funciones entre dos conjuntos, uno de objetos por colorear y otro de colores. Graficamente:

Imagen 9 *La coloración como función*



Fuente: Imagen extraída del libro *Matemáticas de colores* de la Doctora en matemáticas Alejandra Montejano

Observe que las imágenes permiten complementar la nocion de función que los estudintes conocen en su experiencia academica, ya que por ejemplo si se asume el conjunto A como el conjunto de las regiones por colorear en el dibujo del colibrí, y el conjunto B como el conjunto de colores que se pueden usar para pintar dichas regiones, a cada elemento de A se le asigna u unico color del conjunto B, definiendo la actividad de colorear como la accion de donde se puede obtener resultados como los siguientes:

Imagen 10 *Ejemplo de coloraciones*

Fuente: Imágenes extraídas del libro *Matemáticas de colores* de la Doctora en matemáticas Alejandra Montejano

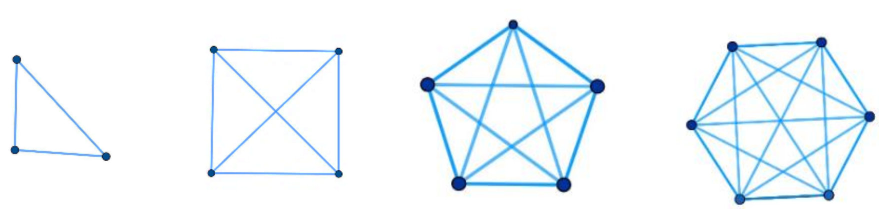
No obstante los siguientes no seran coloraciones:

Imagen 11 *Ejemplo de lo que no es una coloración*

Fuente: Imágenes extraída del libro *Matemáticas de colores* de la Doctora en matemáticas Alejandra Montejano

2. Con la ntencion de usar la coloracion de grafos como una estrategia para la resolucion de problemas, es necesario orientar las siguientes nociones a los estudiantes:
    - Número cromático: El menor número de colores que son necesarios para colorear un grafo de tal forma que los vértices adyacentes no compartan un mismo color
    - Un Grafo completo es un grafo con n vértices y todas las posibles aristas que estos vértices puedan formar, denotados por $\mathcal{K}_n$ donde n denota el grado del grafo, es decir cuántos vértices tiene. Por ejemplo: a continuación, se presentan en su orden $\mathcal{K}_3, \mathcal{K}_4, \mathcal{K}_5, \mathcal{K}_6$

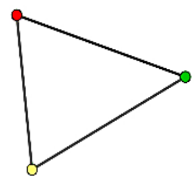
Ilustración 9 *Grafos completos*



Fuente: Elaboración propia.

Observación: Para los grafos completos se tiene que el número cromático es igual al grado del grafo (número de vértices del grafo), por ejemplo, el número cromático de $\mathcal{K}_3$ es 3.

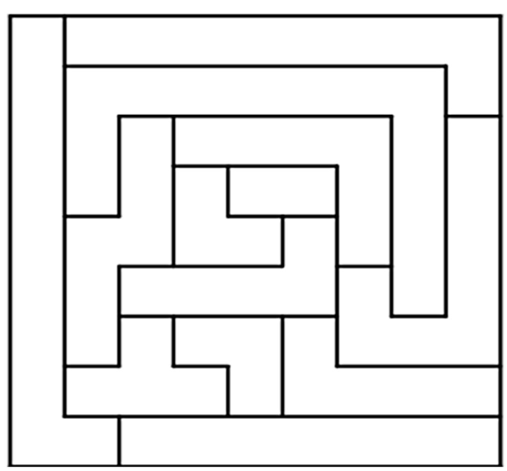
Ilustración 10 *Coloreo del grafo completo* $\mathcal{K}_3$



Fuente: Elaboración propia.

3. A continuaicon se propone colorear la ilustración 12 y cojeturar cual es el menor número de colores posible, asegurando que regiones adyacentes no compartan el mismo color, ejercicio que puede proporcionar a los estudiantes un acercamiento intuitivo al Teorema de los Cuatro Colores. Este ejercicio práctico puede despertar intrés estético y también ilustrar la eficiencia y naturalidad de este teorema.

Ilustración 11 *Figura o mapa con regiones adyacentes para colorear*



Fuente: Material del trabajo Fin De Máster: Actividades Introductorias De Los Grafos En Las Matemáticas De Secundaria, Gutiérrez Mazorra, Esther http://hdl.handle.net/10259/5738

3.1. Después de conjeturar la mínima cantidad de colores para colorear la ilustración 12 se puede mostrar el video ***El teorema de los cuatro colores***[5], realizado por el Doctor en matemáticas Eduardo Sáenz de Cabezón Irigaray, en su canal de YouTube denominado ***Derivando*** donde se mencionan algunas de las implicaciones de este teorema en la historia de las matemáticas y en la comunidad matemática.

3.2. Según el teorema de los cuatro colores, cualquier mapa puede ser coloreado con solo cuatro colores, evitando que regiones adyacentes compartan el mismo color. En el caso de la ilustración 12, esto también aplica, por lo que el objetivo ahora es encontrar la distribución de colores que cumpla con esta condición, para esto se buscara usar un grafo, y colorearlo.

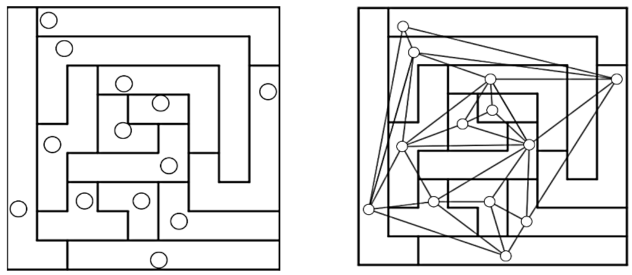
En ese sentido, en el trabajo fin de máster titulado *Actividades introductorias de los grafos en las matemáticas de secundaria* de la profesora Esther Gutiérrez Mazorra, menciona el procedimiento propuesto por Braicovich y Cognigni (2011) para colorear un grafo. Este método sugiere comenzar coloreando el vértice más concurrido (de mayor grado) y luego, del mismo color, pintar todos los vértices que no se relacionen con él. Posteriormente, entre los vértices restantes sin pintar, elegir nuevamente el más concurrido y repetir el proceso hasta terminar.

Por tanto, se siguen algunos de sus pasos en el proceso que se muestra a continuación:

a. Obtener el grafo correspondiente al mapa de la ilustración 12

[5]Link del video El Teorema de los cuatro colores: https://www.youtube.com/watch?v=lp-1rvtRYQg&t=148s

Ilustración 12 *Construcción grafo de un mapa*

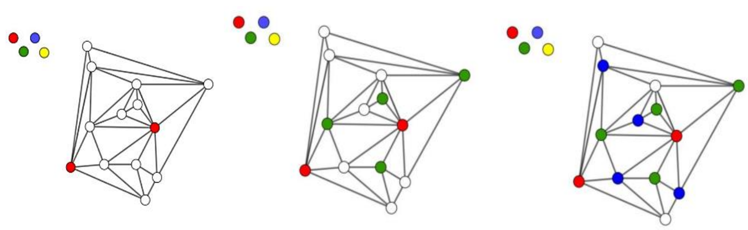


Fuente: Material del trabajo Fin De Máster: Actividades Introductorias De Los Grafos En Las Matemáticas De Secundaria, Gutiérrez Mazorra, Esther http://hdl.handle.net/10259/5738

b. Establecer el conjunto C de colores ordenado: rojo, verde, azul y amarillo, buscando todos inicien con el color rojo y se mantenga el orden establecido.

c. Buscando obtener una coloración propia, es decir una coloración donde cada vértice debe tener un color diferente a sus vértices vecinos o adyacentes, se inicia por los vértices de mayor grado. En este caso se colorean de rojo todos los vértices de mayor grado que no sean adyacentes, se repite el mismo proceso continuando con el color verde, azul y amarillo.

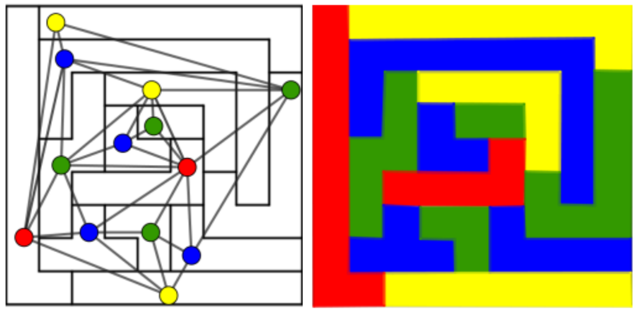
Ilustración 13 *Proceso coloreo de un grafo*



Fuente: Material del trabajo Fin De Máster: Actividades Introductorias De Los Grafos En Las Matemáticas De Secundaria, Gutiérrez Mazorra, Esther http://hdl.handle.net/10259/5738

d. Una vez el grafo esta coloreado por completo, es fácil colorear la figura 12 de acuerdo al color de los vértices correspondientes a cada una de sus regiones.

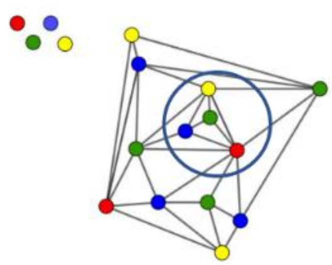
Ilustración 14 Coloreo del mapa de acuerdo a la coloración de su grafo



Fuente: Material del trabajo Fin De Máster: Actividades Introductorias De Los Grafos En Las Matemáticas De Secundaria, Gutiérrez Mazorra, Esther http://hdl.handle.net/10259/5738

e. El número cromático del grafo no puede ser menor que el número cromático del subgrafo completo de mayor grado, ya que la coloración del subgrafo completo representa una coloración propia, por tanto, es necesario encontrar el subgrafo completo de mayor grado.

Ilustración 15 *Menor grafo completo y coloración propia*



Fuente: Material del trabajo Fin De Máster: Actividades Introductorias De Los Grafos En Las Matemáticas De Secundaria, Gutiérrez Mazorra, Esther http://hdl.handle.net/10259/5738

Esto es, el subgrafo completo $\mathcal{K}_4$, y como el número cromático de $\mathcal{K}_4$ es cuatro, entonces el numero cromático del grafo es cuatro, lo que permite concluir que la menor cantidad de colores con que se puede pintar la figura es cuatro.

4. Aplicabilidad de la coloración de grafos en la resolución de problemas: Se propone resolver otro de los problemas propuestos por la profesora Esther Gutiérrez Mazorra en su trabajo, el cual se ilustra a continuación:

Con motivo del Día Internacional de la Mujer y la Niña en la Ciencia el departamento de matemáticas ha decidido hacer un homenaje a las siguientes mujeres matemáticas que han marcado la historia de las matemáticas:

- *Teáno de Crotona, primera mujer matemática.*
- *Hypatia de Alejandría, primera mujer astrónoma.*
- *María Gaetana de Agnesi, primera profesora de universidad.*
- *Sophie Germaine, la mejor matemática de la historia según Carl Friedrich Gauss.*
- *Ada Lovelace, primera persona programadora.*
- *Emmy Noether, fundadora del algebra moderna.*
- *Maryam Mirzakhani, primera mujer en recibir la medalla Fields.*
- *Sonia Kovalévskaya, primera mujer que se doctoró en Matemáticas.*

Se propone a los alumnos hacer una presentación oral sobre la vida de estas ocho mujeres matemáticas, así como de sus aportaciones a las matemáticas y aquellos aspectos que consideren interesantes, durante la semana de la ciencia en las horas lectivas de la asignatura. Cada alumno elige dos mujeres matemáticas distintas de entre las ocho propuestas

Las elecciones de los alumnos han sido las siguientes: {(H, T), (M, S), (A, N), (T, A), (H, M), (N, S), (T, A), (L, N), (L, K), (K, A), (K, S), (T, N), (M, N), (H, S) y (L, N)}.

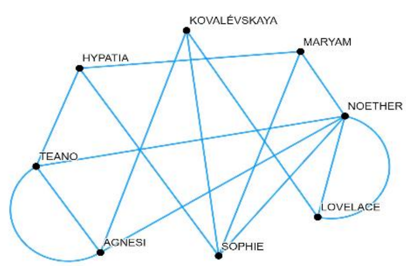
Los alumnos se agruparán en función de a qué mujer matemática han elegido y de acuerdo con la siguiente condición: Un mismo alumno no puede presentar dos trabajos el mismo día.

Resolver la siguiente cuestión:

- *¿Cuál es el mínimo número de días necesarios para realizar las presentaciones?*

Para resolver este problema, es necesario la representación de este problema como un grafo para luego realizar su respectiva coloración, en este caso los vértices serán las 8 mujeres matemáticas y las aristas las elecciones de cada alumno, obteniendo un grafo similar al siguiente:

Ilustración 16 *Grafo mujeres matemáticas*

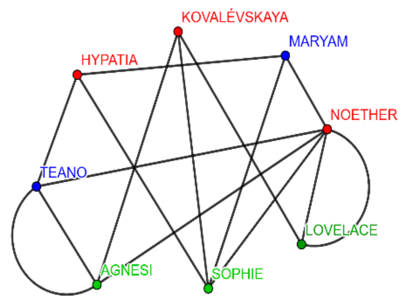


Fuente: Elaboración propia

Es fundamental que los estudiantes reconozcan que para colorear el grafo se siguen los pasos orientados en el numeral 3.2, pues al colorear el grafo con una coloración propia se garantiza que dos vértices vecinos no tengan el mismo color, lo que en relación al problema representaría la condición de no presentarse las dos exposiciones de un estudiante el mismo día, de modo que, el número cromático del grafo será la cantidad mínima de sesiones buscada.

La coloración del grafo obtenida es

Ilustración 17 Coloración del grafo mujeres matemáticas



Fuente: Elaboración propia

Dado que existe un subgrafo completo de orden 3, el número cromático no puede ser menor a 3, así con relación a la pregunta ¿Cuántos días serán necesarios? Se puede responder, estos son tantos como colores son necesarios para colorear el grafo, en este caso, tres días son suficientes para que los alumnos puedan llevar a cabo la presentación sin exponer dos veces en el mismo día.

BITÁCORAS

A continuación, se presentan cuatro bitácoras que documentan mi experiencia en la práctica pedagógica alrededor de la Teoría de Grafos. Es importante destacar que cada actividad o taller se llevó a cabo durante un período de aproximadamente nueve horas entre los estudiantes de grado décimo y undécimo. A pesar de que las actividades se implementaron con ambos grados, en estas bitácoras se resaltan los aspectos más relevantes y significativos de cada actividad de forma global, ya que los avances obtenidos fueron similares en ambas clases. Esto se debe a que las actividades no requerían conocimientos previos que favorecieran significativamente la comprensión en uno u otro grado.

Resalto que, a lo largo de esta travesía educativa, busqué proporcionar a los estudiantes una comprensión intuitiva de los conceptos fundamentales de los grafos, y al tiempo fomentar su pensamiento crítico y habilidades de resolución de problemas, así a través de cada bitácora, compartiré mis objetivos, observaciones y reflexiones a medida que se avanza en este emocionante viaje de aprendizaje. Espero que esta bitácora no solo sirva como un registro de mi experiencia, sino también como una fuente de inspiración y guía para futuros profesores en matemáticas que deseen explorar este apasionante campo de las matemáticas.

Bitácora I Caminando Entre Colores

El propósito de esta actividad fue introducir a los estudiantes en los conceptos básicos de la Teoría de Grafos y fomentar su capacidad para representar y analizar problemas del mundo real mediante la construcción y manipulación de grafos simples.

El primer día de esta práctica pedagógica fue un torbellino de emociones. Los nervios y la anticipación llenaban el aire mientras me paraba frente a grupo de estudiantes de grados décimo y undécimo, aunque la incertidumbre me acompañaba, trate de que la determinación y entusiasmo por compartir este apasionante tema con los estudiantes fuera más evidente.

Después de una breve presentación realizada por el profesor encargado del área, comencé la jornada explicando el porque de mi presencia y el programa al que pertenecía en la Universidad del Cauca, y pude percibir que, de los 38 estudiantes, algunos reconocen que la Universidad del Cauca es una de las mejores del país y que incluso desean ingresar a la misma una vez culminado su bachillerato. Poco a poco comenzó un diálogo en el que se hizo posible conocer sus nombres y su voz, creando un ambiente de confianza y disposición. Además, encontré rostros que mostraban familiaridad en sus miradas, pues compartimos la identidad de pertenecer a nuestro pequeño pueblo, y fue posible encontrar conocidos, vecinos e incluso familiares entre los estudiantes, por lo que el diálogo fue más natural para algunos, y de esta forma se abrió paso al desarrollo de la actividad.

Imagen 12 *Primera sesión con grados décimo y once*

Fuente: Fotografía propia.

Como era de esperarse, al indagar por las nociones previas de los estudiantes sobre la palabra grafo, encontré que ninguno de ellos la reconocía dentro de sus concepciones, así que, tratando de avivar ideas, mencioné palabras que podían ayudarlos a descubrir un significado, entre ellas bolígrafo, biógrafo, topógrafo, grafólogo, palabras que resultaron de gran utilidad, pues así llego una palabra clave al diálogo y fue la palabra escribir, incluso fue propicio mencionar el origen etimológico de la palabra griega, *graphien*, que puede traducirse como dibujar o escribir, aunque en español es común relacionar grafo con la palabra gráfica como una representación visual de datos.

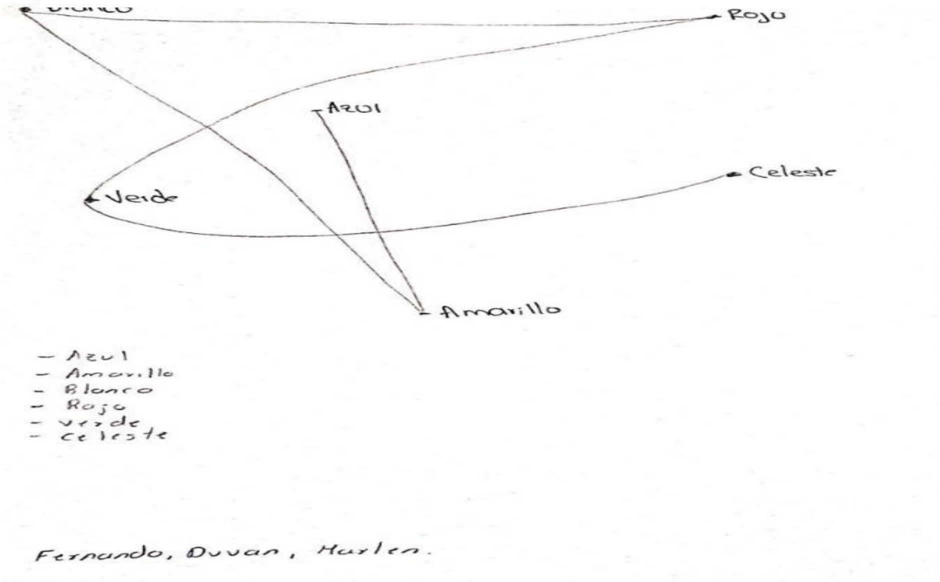
Sin embargo, se aclara que la noción de grafo en este caso también será tomada en el sentido de una estructura matemática, que conocerían mejor en el transcurso y desarrollo de esta actividad, en la que no se pretendía mostrar conceptos directamente de lo que es un grafo, sino una construcción de su definición y que al mismo tiempo se pudiera conjeturar su utilidad, por lo que al realizar el ejercicio "caminando entre colores"[6] se encontraron resultados interesantes los cuales se pueden ver en síntesis con los siguientes casos:

Caso 1: se pudo observar que algunos de los estudiantes omitieron la regla de considerar todas las opciones que tenía cada color, y en efecto, encontraban la fila usando solo una posibilidad de relacionar los colores, pues notaban que era una estrategia más fácil para encontrar la fila solicitada, obteniendo un resultado como se ve en la imagen 2.

Caso 2: se pudo notar que algunos estudiantes omitieron la regla de pasar por cada color una sola vez, aunque ilustraron casi todas las relaciones posibles de cada color, tanto en este caso, como en el anterior, fue notorio que los estudiantes hicieron su trabajo de manera apresurada, buscando ser los primeros en terminar para dejar una buena impresión, lo que puede sugerir que su principal motivación era destacar en la clase, lo que de una u otra forma mostró disposición de trabajo

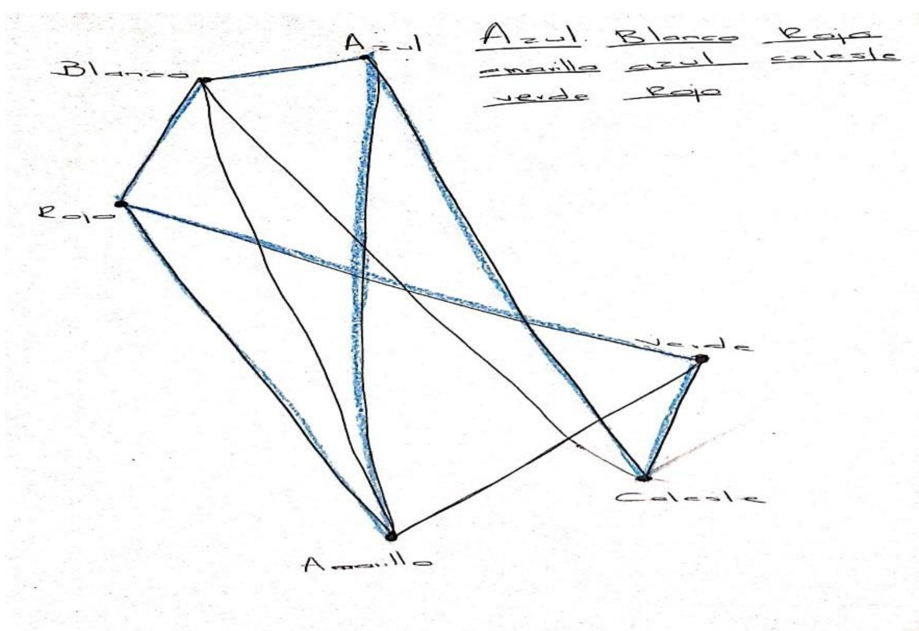
[6] Se recuerda que el ejercicio "caminando entre colores" consiste en obtener una fila con los nombres de algunos colores obedeciendo a las siguientes condiciones; en la fila no puede haber colores continuos que compartan la misma cantidad de letras, pero sí podrán ser continuos los colores que tengan al menos una letra en común, iniciando con el color azul y sin repetir color. Los nombres estarán ubicados en una hoja de papel y para hallar la solución solo se podrán usar líneas, lo que lleva a representar las posibilidades que tiene cada color de estar al lado de otro color con una línea, teniendo en cuenta así, todas las opciones de cada color.

Imagen 13 *Primer resultado actividad caminando entre colores. Caso1*



Fuente: Fotografía propia.

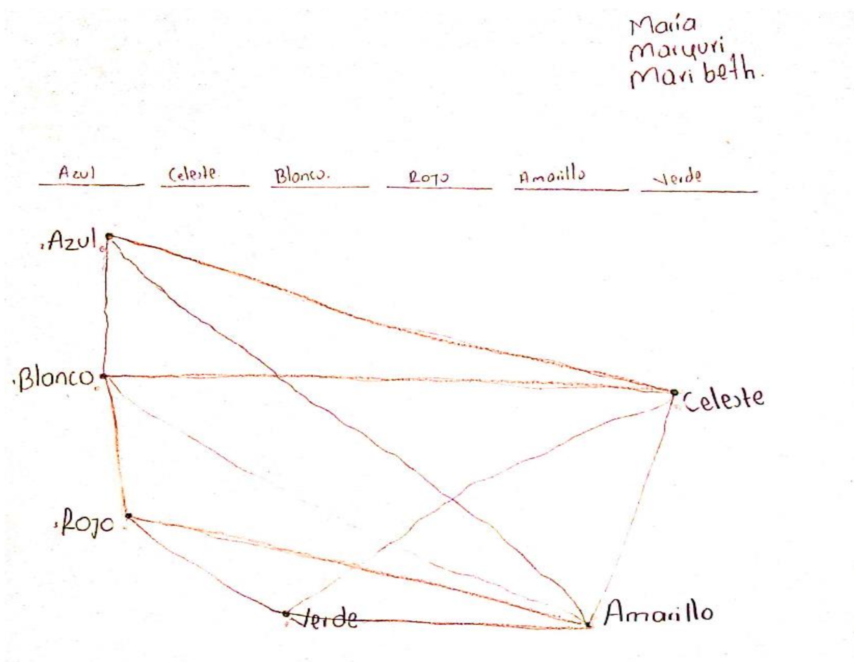
Imagen 14 *Primer resultado actividad caminando entre colores. Caso2*



Fuente: Fotografía propia.

En el primer caso (imagen 13), una vez se aclaró que la idea del ejercicio era encontrar una fila de colores teniendo en cuenta todas las posibilidades que tenía cada color, los estudiantes lograron observar que se obtendría no sola una respuesta sino varias, pues podían variar la posición de los colores en la fila, de acuerdo a sus posibilidades de relacionarse con otro color. Del mismo modo, al orientar en el segundo caso (imagen 13), que no se podían repetir colores, tuvieron la intuición de considerar su trabajo como un “laberinto de líneas” en el que debían hallar un camino, idea que me pareció interesante como analogía al concepto que se busca construir, así, se pidió al grupo que explicara su trabajo a los demás buscando aclarar que no se pueden repetir colores y que el camino a encontrar pasaba por cada color una única vez, luego se obtuvieron de todos los estudiantes resultados similares al siguiente:

Imagen 15 *Resultado final actividad caminando entre colores.*



Fuente: Fotografía propia

En la imagen 15, se puede observar que están todas las posibles relaciones que tiene cada color de acuerdo con las condiciones dadas, y que tal y como se precisó antes, se halló un camino que parte desde el color azul y llega al color verde.

Primer acercamiento a la noción de grafo: Una vez todos los estudiantes encontraron la fila deseada, se continúa con una pregunta abierta encaminada hacia la noción de grafo, mencionando que el trabajo realizado por ellos es en efecto un grafo, de acuerdo con esa idea se preguntó entonces ¿Cuál creen podría ser el concepto de grafo?, en una participación muy activa las respuestas fueron acertadas y descriptivas, algunas de sus respuestas fueron:

a) Líneas que relacionan a los colores

b) Un laberinto de líneas

c) Varias líneas y varios colores

Al escuchar sus conjeturas mencioné que estaban cerca al concepto de grafo, y tratando de orientar sus ideas hacia una definición un poco formal, pregunté por dichas líneas ¿qué función están cumpliendo?, ¿podría cambiar el nombre de los colores por nombres de frutas, personas, incluso objetos?, haciendo que gradualmente notaran que las líneas representan relaciones entre datos, en su caso colores, y que esas relaciones a la vez están determinadas por ciertas condiciones. (Como ejemplo, las condiciones del ejercicio realizado).

Por otro lado, noté que algunos estudiantes optaron por hacer coincidir las líneas con puntos en cada dato (color), hecho que resulto útil en este proceso, aclarando a quienes no lo hicieron, no cometieron necesariamente un error, solo que es conveniente encontrar un punto de coincidencia para las líneas, pues al fin de cuentas las líneas conducen a un mismo dato, representado en un punto, y en la estructura matemática que se estaba conociendo los puntos son de gran importancia. Así se precisó la noción de líneas y puntos que llamaríamos aristas y vértices respectivamente, además se evocó la palabra “varias” haciendo alusión a la noción de un conjunto de objetos que en este caso son líneas y vértices, transformando la respuesta (c), en un conjunto de líneas y datos para luego generalizarla definiendo un grafo como un conjunto de objetos llamados vértices o nodos unidos por enlaces llamados aristas que permiten representar relaciones binarias entre elementos de un conjunto..

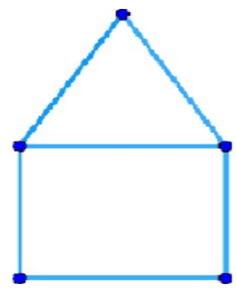
De este modo, se abrió paso a la idea de que los grafos permiten estudiar y representar relaciones que existen entre unidades que interactúan con otras, así como los colores tenían posibilidad de relacionarse con otros colores bajo ciertas condiciones, reconociendo aquí su utilidad, pues los estudiantes notaron que con esta estructura se pueden representar diversas situaciones que involucran relaciones, por ejemplo una red de amistad en Facebook, hecho que en las sesiones resulto fácil de comprender, los estudiantes realizaron un grafo usando la relación de amistad que algunos tenían con sus compañeros en esta red social, tomando cada relación de amistad como una arista y cada estudiante como un vértice.

El recorrido de grafo en un juego conocido: En esta parte fue posible explorar algunos grafos con la idea de verificar si tenían un camino o recorrido que permitiera trazarlos sin alzar el lápiz del papel, como ejemplo preliminar se enseñó el grafo de la ilustración 1, el cual para la mayoría resulto familiar a un juego o reto que consiste en realizar determinado dibujo de un solo trazo, y en este caso ya conocían como se podría dibujar, denominándolo “el juego de la casita”.

Imagen 16 *Estudiantes analizando el recorrido de algunos grafos*

Fuente: Fotografía propia

Ilustración 18 *Grafo "el juego de la casita"*



Fuente: Elaboración propia

El conocimiento previo de dicho juego, facilitó el siguiente paso en esta actividad. Entregué una hoja de papel con algunos grafos[7], y solicité a los estudiantes que al igual que en el juego, analizaran si estos cumplían o no con la característica de ser dibujados de un solo trazo, aquí los estudiantes discutían e intercambiaban opiniones y se mostraban intrigados por los grafos presentados, un ejercicio aparentemente sencillo, pero que ponía a prueba su habilidad intuitiva frente a los grafos. Durante su análisis, hallaron una sorprendente y oportuna conexión, relacionando uno de los grafos mostrados con la forma de hexágonos y con un esqueleto de hidrocarburos que conocieron en su curso de química, lo que, junto con la relación del juego hallada antes, de una u otra forma permitió orientar la idea de que los grafos son estructuras con las que han estado familiarizados sin ser conscientes de ello.

Terminado el análisis de todos los estudiantes, se hizo una mesa redonda donde los alumnos expusieron y compararon e incluso debatieron sus resultados, hasta que llegaron a un consenso en sus respuestas. Posteriormente se definió el grado de un vértice, ejemplificando los grados de cada vértice en uno de los grafos analizados, noción que fue entendida fácilmente. Cuando se preguntó si había dudas, surgió un comentario de uno de los estudiantes inspirado en el grafo del ejemplo de la red de

[7] Se recuerda que en la actividad 1, se muestran ocho grafos a, b, c, d, e, f, g, h con lo que se completaron la tabla 1.

amigos en Facebook, solo que no tomó la relación de amistad, sino una relación de pareja real, expresando:

"Profe, o sea que, si por ejemplo el grafo es con redes de novios, Maryuri que es mi novia seria de grado 1, porque soy su único novio, pero si me pone los cachos con otros dos, ella sería de grado 3"

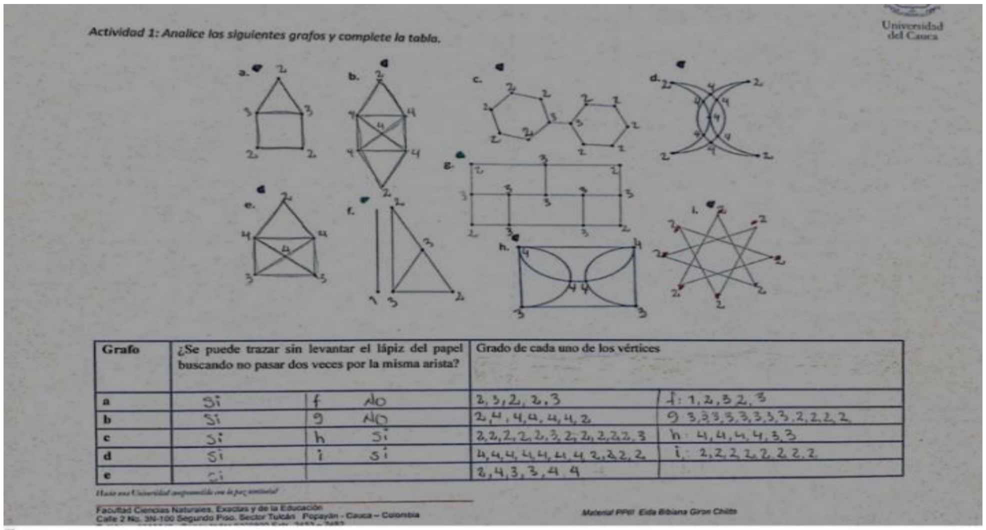
Comentario que generó un ambiente cómico para todos, y en respuesta a ese comentario otro de los jóvenes alentado por el ambiente de confianza responde "y a mí, que nadie me hace caso, seré un vértice de grado 0" mientras todos reímos, fue grato escuchar estas analogías, pues implícitamente en ellas relacionaron la noción de vértice y grado de un vértice con ejemplos reales, les mencione que efectivamente sus ejemplos eran correctos, felicité a los estudiantes por su aporte mencionándoles que esperaba esa situación no se les presentara realmente, aquí note que poco a poco algunos estudiantes se sentían más seguros al momento de preguntar y opinar en clase.

Se retomó el comentario relacionado con un vértice de grado cero, ya que hizo propicio el espacio para definir el concepto de vértice aislado y además para pensar en la idea de que la vida como en un grafo, presentara personas con las que podrán establecer conexiones y también otras con las que no, y para ello hay que tomar sabias decisiones.

De acuerdo con el concepto de grado de un vértice orientado, se solicitó que analizaran el grado de todos los vértices en cada uno de los grafos trabajados antes, completando así la tabla[8] como se muestra a continuación:

[8] Se recuerda que en la actividad 1, se plantearon los grafos y tabla con que se trabajó en esta etapa de la actividad.

__Imagen 17__ Grafos y Tabla 1 solucionada por estudiantes



Fuente: Fotografía propia.

El objetivo de este último ejercicio fue que los estudiantes lograran identificar características en común relacionadas con el grado de los vértices tanto en los grafos que tuvieron recorrido completo como en los que no, para reconocer características que permitieran conjeturar cuando un grafo se puede trazar sin alzar el lápiz del papel, teniendo como información base, el grado de los vértices. Claramente, no se obtendrían respuestas inmediatas, pues se requiere de un análisis complejo y detallado de patrones en los números obtenidos, es preciso mencionar que se pretendía llegar a las conclusiones del trabajo de Leonhard Euler en el problema de los siete puentes de Königsberg, resultado que permite reconocer cuando se puede hallar un recorrido completo en un grafo.

Evidentemente, los estudiantes no tienen ninguna interacción con dicho problema, incluso desconocen al prolífico escritor de matemáticas Leonhard Euler, por lo que en esta actividad solo se buscaba un acercamiento a tal resultado, pues más adelante en la actividad 3, se orientaría y analizaría dicho problema y solución con más detalle. Así, en ese momento, opté por sugerirles la idea de observar números pares e impares en los grados de los vértices de cada grafo, pues sabía que este análisis les daría una base sólida para comprender la solución de Euler en relación con el grado de cada vértice más adelante.

Imagen 18 *Estudiantes analizando algunos grafos*

Fuente: Fotografía propia

Con la sugerencia dada, los estudiantes se tomaron su tiempo, dedicándose a encontrar similitudes en los grados de los vértices de cada grafo, al final algunos de los estudiantes obtuvieron las siguientes observaciones:

- En los grafos a, c, e, y h, hay dos vértices de grado 3 es decir de grado impar y los cuatro grafos se pueden dibujar de un solo trazo.
- Los grafos b, d, i, tienen todos sus vértices de grado par y se pueden dibujar de un solo trazo.
- Para los grafos restantes, f y g, los estudiantes no encontraron ninguna relación aparente.

A partir de estas observaciones se estableció de forma general la conjetura, **un grafo se puede dibujar de un solo trazo, si tiene todos sus vértices de grado par o si tiene exactamente dos vértices de grado impar.**

Se mostraron ejemplos con estas características en el tablero para que los estudiantes evidenciaran que dicha afirmación siempre se cumplía, jugando con los grados de los vértices entre números pares e impares. Además, se retomaron los grafos f y g, grafos en los que los estudiantes no encontraron relación aparente en el grado de sus vértices, ultimando que los dos grafos no se podían realizar de un solo trazo, pues no cumplían con las condiciones de la conjetura planteada, haciendo énfasis en la idea de que se puede crear un grafo que no se pueda dibujar de un solo trazo, al crearlo de tal forma que sus vértices no cumplan con las características de la conjetura. Señalando que podrían divertirse, retando a sus amigos a realizar determinado grafo, sabiendo anticipadamente si es posible o no recorrerlo completamente sin alzar el lápiz del papel.

Finalmente, para cerrar la introducción a la teoría de grafos, se solucionó el problema "Red de amistades"[9] en el que debían representar en un grafo una situación hipotética y responder los ítems que se detallan a continuación:

a) Para ayudar a Laura, representar mediante un grafo esta red de amistades.

b) ¿Cuántos amigos tienen cada uno en Facebook dentro de esta red de amistades?

c) Supongamos que los que NO son actualmente amigos en Facebook se quisieran agregar, exceptuando a María, ¿Cuántas solicitudes de amistad se mandarían en total?, ¿Quién tendría que agregar a un menor número de amigos?, ¿Por qué?

d) Representar mediante un grafo la situación hipotética del apartado c.

En este ejercicio, para el ítem a, algunos estudiantes voluntariamente decidieron salir al tablero y realizar dicho grafo, sus compañeros por su parte, sugirieron las relaciones a representar en el grafo resultante, con estos aportes no se omitió ninguna información y se solucionó colectivamente. Un ejemplo de cómo la confianza y colaboración entre los estudiantes puede ser una herramienta poderosa

[9] Problema que consiste en ayudar a Laura quien desea organizar una reunión con ocho de sus antiguos compañeros de clase, recurriendo a Facebook donde encuentra el perfil de Carla, a partir del cual establece algunas conexiones con los demás compañeros, exceptuando a María que no tiene perfil en Facebook.

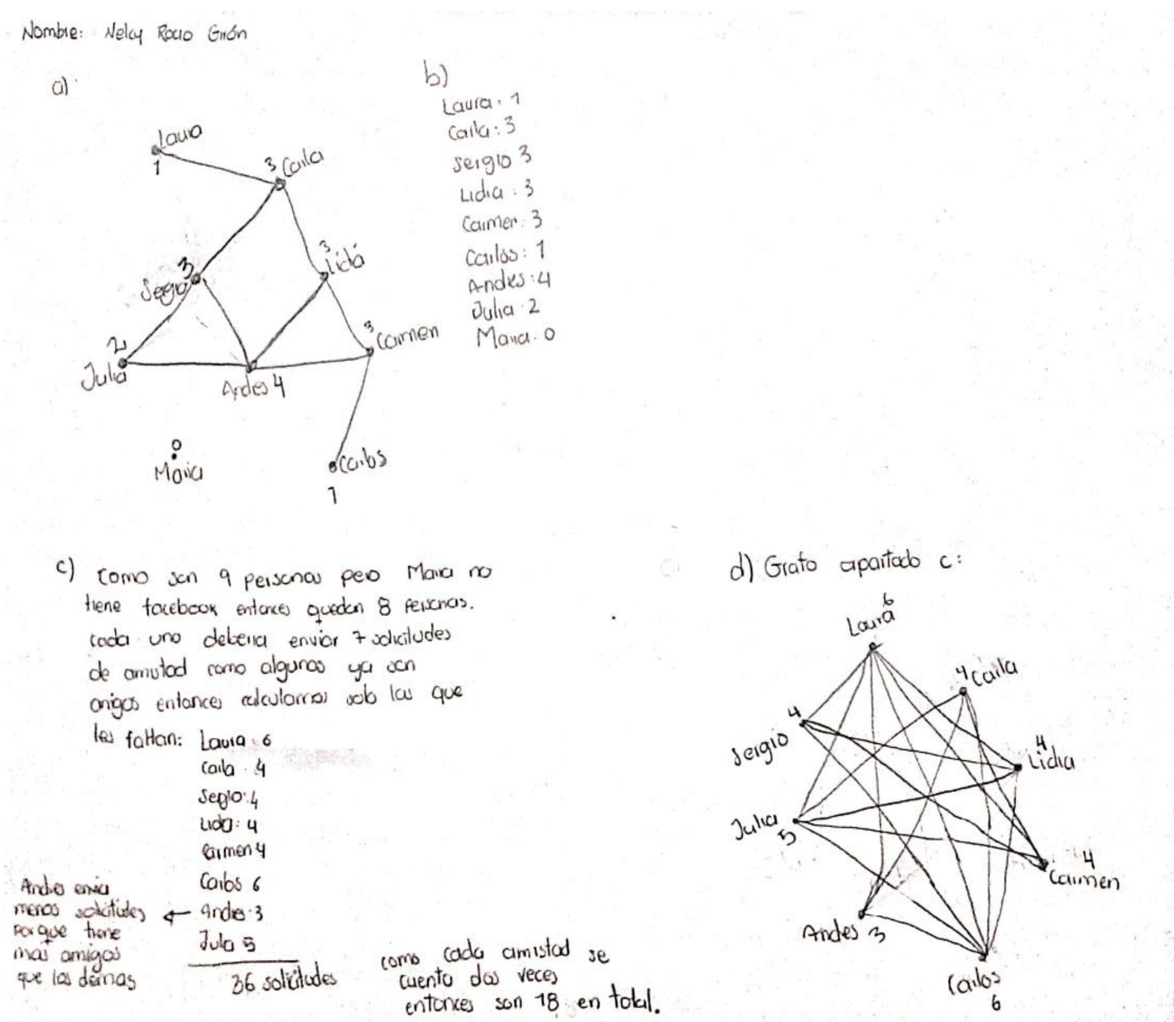
para superar retos y lograr objetivos de manera eficiente, al mismo tiempo que fomenta el aprendizaje y el compromiso de todos, no solo de quienes tomaron iniciativa a participar, pues los demás apoyaron su trabajo participando activamente.

Imagen 19 *Estudiantes solucionando el problema Red de amistades*

Fuente: Fotografía propia.

Con respecto a la solución de las demás preguntas, se pudo observar que para los estudiantes fue sencillo identificar que el grado de cada vértice en el grafo indicaba la cantidad de amigos de cada persona respondiendo rápidamente el ítem b, y para los restantes, tampoco hubo dificultad alguna, pues una vez analizada la información encontraron fácilmente las respuestas correctas como se evidencia a continuación en la respuesta de una de las estudiantes.

Imagen 20 *Solución problema Red de amistades*



Fuente: Fotografía propia

Es posible que su cercanía e interacción con las redes sociales, les permitiera comprender fácilmente este tipo de problemas, pues por ejemplo el análisis de la situación donde se debían calcular la cantidad total de solicitudes de amistad, la mayoría de estudiantes reconoció el hecho de que cada relación de amistad estaba contándose dos veces, pues con una sola solicitud de amistad bastaba para que dos personas fueran amigos en Facebook, y los pocos estudiantes que no tuvieron en cuenta este hecho, fueron orientados por sus compañeros superando esta pequeña dificultad y solucionando correctamente este ejercicio.

De este modo, se completó el desarrollo de la actividad 1, mencionando a todos los estudiantes mi gratitud por su participación, pues sus aportes, opiniones e inquietudes permitieron que esta actividad se desarrollara de la mejor manera permitiendo una introducción a la teoría de grafos como base para continuar explorando este fascinante tema.

Bitácora II ¿Por Qué Son Solo Cinco Sólidos Platónicos?

En esta actividad se ilustraron propiedades y características de los poliedros platónicos, explorando el teorema de Euler que establece una relación entre las caras (C), vértices(V) y aristas (A) de un poliedro, expresada en la fórmula $C-A+V = 2$, ecuación que revela una conexión entre estos tres elementos que a la vez permiten comprender las restricciones geométricas que determinan la existencia y naturaleza de los poliedros Platónicos, lo que facilita responder la cuestión de por qué solo existen cinco poliedros platónicos. Además, fue de interés la representación gráfica de estos poliedros examinando la disposición de sus vértices y aristas para continuar familiarizándonos con los grafos.

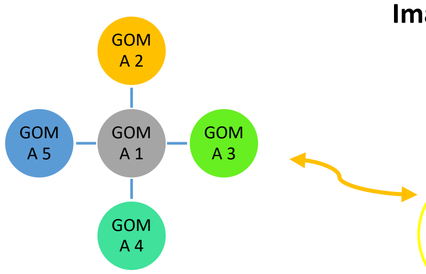
El tiempo compartido con los estudiantes hizo que estuviéramos familiarizados con la metodología de trabajo, había un ambiente de confianza que facilitó el inicio de la segunda actividad. Vale la pena recordar que, antes de asumir el rol de profesora en este proceso, fueron los estudiantes quienes ayudaron a reconocer mis fortalezas y debilidades afrontando esta experiencia. Su singularidad y personalidad me enseñaron que todos estamos en un constante proceso de crecimiento y mejora.

En esta actividad, el objetivo inicial fue introducir a los estudiantes en el mundo de los poliedros platónicos, ya que son estructuras con las que tenían poca familiaridad. Para lograr esto, proporcioné palillos de igual tamaño y gomas comestibles, un material manipulable con el que pudieran construir algunos poliedros de acuerdo con sus características. Es importante señalar que no se mencionaron explícitamente estas características a los estudiantes. La idea era que las reconocieran al tener estos cuerpos en sus manos. Por lo tanto, solo se dieron algunas indicaciones para construirlos, de manera que, al finalizar el proceso, pudieran deducir dichas características por sí mismos.

Cuando entregué este material, los estudiantes demostraron intriga y emoción, un momento que destaco, ya que en procesos educativos con grados superiores como décimo y undécimo, a menudo se tiende a dejar de lado actividades y materiales que se consideran exclusivos para niños. Sin embargo, observé que, al igual que cualquier persona, se sintieron entusiasmados cuando se les brindó la oportunidad de manipular y crear con sus manos. Fue notable su entusiasmo cuando preguntaban con curiosidad, ¿Qué hacemos con las gomitas? ¿Vamos a hacer grafos con gomitas?, mientras terminaba de repartir los palillos. Les expliqué que efectivamente se armarían algunas figuras y que estaría relacionado también con los grafos. Sin embargo, les indiqué que, por el momento, no se mencionarían nombres ni conceptos, solo algunas indicaciones a seguir para lograrlo juntos, siguiendo la metodología planteada en la actividad 2. Ejemplifiqué algunos pasos para construir el tetraedro, recurriendo a las nociones de vértice, arista y grado de un vértice estudiadas previamente en la actividad 1, relacionando las gomitas como vértices y los palillos como aristas.

Entre las indicaciones hubo expresiones como*, tomar un vértice y hacer confluir en él tres aristas*, explicando que se había construido un vértice de grado tres, recordando dicha noción en este paso.

Imagen 21 *Construcción vértice de grado tres*



Fuente: Fotografía propia.

La meta era construir una figura con seis aristas y cuatro vértices donde todos los vértices fueran de grado tres, un problema que permitió explorar y analizar algunas opciones de respuesta, me abstuve de dar sugerencias pues noté que en sus diálogos discutían sobre la forma en que podrían ubicar los demás vértices para tal fin, la actividad fue evolucionando en una dinámica cada vez más colectiva, presentándose situaciones que permitían ver y analizar si era acertada la forma en que se ubicaba cada vértice o arista, por ejemplo en el proceso llegaron a ubicar las gomas en forma de una cruz, como se muestra a continuación:

Imagen 22 *Construcción vértice de grado cuatro*

Fuente: Fotografía propia.

Situación que permitió clarificar nuevamente las características con que se buscaba la figura, preguntando por ejemplo ¿la figura construida por su compañera (la cruz) cumpliría o permitiría seguir construyendo una figura con las condiciones solicitadas? Y tanto ella como sus compañeros notaron que, por un lado, tenía un vértice de grado cuatro, que no respondía al objetivo y además no estaba usando la cantidad total de aristas pues era necesario agregar dos aristas más, lo que implicaba reubicar una de las aristas para obtener un vértice de grado tres y continuar analizando donde ubicar las demás aristas, logrando así obtener ideas que los acercaban cada vez más a encontrar una respuesta.

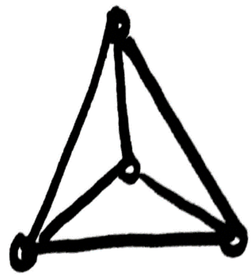
Como se mencionó, el objetivo de este ejercicio era construir el tetraedro, sin embargo, a la idea de construir una figura con todos sus vértices de grado tres, los estudiantes respondieron con dos figuras que cumplen esa característica.

En el primer caso lograron construir una figura como el tetraedro, donde cada vértice tenía el mismo grado, y sus caras eran triángulos.

Imagen 23 *Construcción del tetraedro*

Fuente: Fotografía propia

Ilustración 19 *Modelo estructura creada (imagen 22)*



Fuente: Creación propia

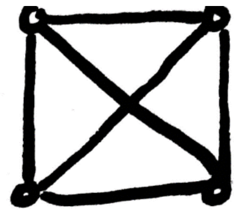
Tras un dialogo analizando características en el primer caso, como cantidad de vértices, aristas, numero de caras, y el polígono resultante en cada cara, se concluyó una definición formal del tetraedro, como un poliedro regular con cuatro caras que son triángulos equiláteros, con seis aristas y cuatro vértices, encontrando la razón de su nombre.

En el segundo caso, algunos estudiantes ubicaron los cuatro vértices en forma de un cuadrado, usando cuatro aristas como sus lados y con las dos restantes, cruzaron las diagonales.

Imagen 24 *Estructura plana con características del tetraedro*

Fuente: Fotografía propia

Ilustración 20 *Modelo estructura creada (imagen 23)*



Su construcción, cumplía claramente con los requisitos solicitados. No obstante, señalé que el objetivo era construir cuerpos con volumen, es decir, superficies no planas; buscábamos poliedros como en el primer caso, con todas sus caras poligonales regulares. Como se pudo observar, esta última estructura no cumplía con dichas características. Aun así, ambas respuestas fueron acertadas, ya que era evidente que las dos estructuras logradas cumplían con el objetivo principal y eran útiles para orientar el ejercicio posterior, es decir, la creación del grafo de tetraedro.

Para realizar el grafo el tetraedro, consideramos el número de aristas, vértices y sus respectivos grados. El resultado fue una estructura similar a la del segundo caso, pero con algunas aristas cruzadas. Buscábamos evitar este cruce, ya que aspirábamos a diseñar un grafo plano, sin intersecciones entre aristas. En esta parte de la actividad, propuse observar el tetraedro desde arriba para obtener una perspectiva de cómo ubicar los vértices y las aristas con el fin de obtener el grafo, aprovechando que en ese momento tenían el tetraedro físicamente con las gomitas. El resultado fue un grafo similar al dibujo de la estructura encontrada en el primer caso.

En un proceso análogo a lo realizado con el tetraedro, se analizaron las características del hexaedro, octaedro, dodecaedro e icosaedro, para continuar con su representación en grafos, donde los estudiantes poco a poco descubrieron sus elegantes y curiosos diseños que conservaban la relación de aristas vértices y caras, algunos mostrados con ayuda de imágenes y videos, ya que requerían de una visualización detallada.

Imagen 25 *Construcción grafos de los poliedros platónicos.*

Fuente: Fotografía propia

Asimismo, se dio una mirada a la historia de los poliedros y como en un yacimiento neolítico, se encontraron figuras de barro de aproximadamente 2000 a.C. similares a estos. Este hallazgo suscitó reflexiones sobre cómo las antiguas civilizaciones concebían y aplicaban formas geométricas en sus construcciones, durante el diálogo los estudiantes incluso mencionaron las pirámides de Egipto y la ciudad de piedra en Perú, resaltando la creatividad y habilidad de esas civilizaciones para construir sin la tecnología actual. Esta conversación concluyó con la admiración por la sorprendente destreza de épocas pasadas en la construcción de estructuras impresionantes.

Respondiendo a la pregunta ¿Es posible hallar más cuerpos de este tipo?

Recordando a los estudiantes que se habían conocido cinco poliedros, tres con caras triangulares, uno con caras cuadradas y otro con caras pentagonales, entonces podrían por ejemplo imaginarse un poliedro con caras hexagonales, heptagonales, octagonales, etc.

Claramente es una pregunta cuya respuesta no se obtiene instantáneamente en estos grados, pues requiere de un análisis profundo y detallado, por lo que recurriendo a la conexión de wifi que se tenía en la institución, quise despertar el espíritu de investigación de los estudiantes animándolos a sacar sus dispositivos móviles y usar la herramienta de Internet para buscar información relevante que pudiera iluminar la discusión.

Hecho que me recuerda que, con el avance tecnológico, la mayoría de nosotros tenemos acceso a un mundo de conocimiento en nuestros bolsillos, lo que permite explorar y analizar diferentes perspectivas e información, recursos que no habríamos tenido disponibles en el pasado. Asimismo, es un recordatorio de que, cuando se utiliza adecuadamente, la tecnología puede ser una poderosa aliada en el proceso de aprendizaje y una herramienta valiosa para estimular la curiosidad y facilitar el acceso a información.

Efectivamente, encontraron imágenes y animaciones de los poliedros estudiados, confirmando parte de la información presentada en la primera etapa de la actividad. Además, identificaron otros poliedros regulares con una característica distintiva: no eran convexos, un concepto conocido por algunos y desconocido por otros. Por ende, se abordaron las nociones de cóncavo y convexo, especificando que una característica crucial de los poliedros platónicos es su condición de convexidad. Sin embargo, a pesar de esta información, aún no se contaba con indicios para responder a la pregunta inicial.

Hasta que poco a poco encontraron otros poliedros convexos, sin embargo, se hizo notar que no cumplían con que todas sus caras fueran regulares, o sus vértices no tenían en común la misma cantidad de caras y aristas, lo que permitió conocer otros cuerpos que lucían atractivos y eran desconocidos para ellos, y a propósito de conocer estos cuerpos se mencionó y mostró como por ejemplo en el diseño del balón de fútbol hay hexágonos y pentágonos regulares, mostrando en animaciones que esto es el resultado de truncar el dodecaedro, mencionando que “truncar", significa que se corta las esquinas de este dodecaedro de tal manera que los vértices se reemplazan por otros polígonos regulares, en este caso hexágonos, entendiendo así que un balón de fútbol no es una esfera perfecta, aunque a simple vista pueda parecerlo.

Es preciso mencionar que la exploración de cuerpos geométricos puede ofrecer a los estudiantes un acercamiento intuitivo a nociones topológicas, la manipulación de poliedros, su representación en grafos, el truncar el dodecaedro para formar un balón de fútbol, de una u otra manera permiten experimentar y acercarse inconscientemente a transformaciones geométricas que pueden fomentar una apreciación de la conexión entre la geometría y la topológica que a veces suele ser tan difícil de comprender en la educación superior.

Luego de conocer otros cuerpos, aún se buscaba responder por qué solo hay cinco poliedros platónicos, por lo que opté por abordar la fórmula $C - A + V = 2$, teorema de Euler para poliedros[10] que establece la relación entre las caras (C), vértices (V) y aristas (A) de un poliedro convexo, mencionando que se convirtió en un hito en la historia de la geometría y la topología. Esto debido a que, a lo largo de los años, esta fórmula ha sido aplicada de manera extensa en diversas ramas de las matemáticas y ha contribuido significativamente al desarrollo del campo. Además, sigue siendo un pilar fundamental en la comprensión de las propiedades geométricas de los sólidos.

Buscando interactuar con esta fórmula, en un primer momento los estudiantes confirmaron que en cada uno de los cinco poliedros estudiados se cumplía la relación C– A+V = 2, el objetivo era utilizar esta fórmula para concluir que solo existen cinco sólidos regulares desde un análisis algebraico y deductivo.

[10] l teorema de Euler para poliedros fue formulado por el matemático suizo Leonhard Euler en el siglo XVIII. Euler presentó esta teoría en su obra "Elementa Doctrinae Solidorum," publicada en 1758.

Reconocía el hecho de que los estudiantes tenían poca interacción con la demostración matemática, y como posteriormente se llevaría a cabo un proceso deductivo para demostrar que son solo cinco poliedros platónicos, expliqué detalladamente una a una las relaciones entre aristas, lados, caras y vértices, que se pueden dar en un poliedro regular convexo, tal y como se describen en la segunda actividad, entre dichas relaciones destaco que desde la actividad 1, fácilmente reconocieron que una arista se cuenta dos veces, pues las aristas representan relaciones binarias lo que hace que se cuenten dos veces en los vértices, y este mismo hecho permitió que asimilaran con facilidad la idea de que para hallar la cantidad total de aristas en un poliedro cualquiera se debe dividir entre dos.

Por otro lado, cuando se analizaba la cantidad de aristas (a) que podría tener un polígono, para algunos era sencillo entender la expresión $l \geq 3$, pues reconocían que son necesarios tres lados como mínimo para construir un polígono, sin embargo, noté que cuando se usa el símbolo mayor o menor en inecuaciones con más variables se sentían un poco inseguros.

Fue evidente que los estudiantes estaban acostumbrados a trabajar con ecuaciones, por lo que les resulto más fácil enfrentarse a expresiones de este tipo, tal vez debido a la familiaridad y comodidad que brinda la igualdad, por lo que fue natural que, en un principio, algunos estudiantes no se sintieran cómodos al tratar desigualdades, pues se destacaban en la manipulación algebraica de igualdades, pero al enfrentarse a las desigualdades, parecía como si estuvieran en un territorio desconocido, sin saber por dónde empezar ni cómo avanzar, por lo que creí esencial recordarles que las desigualdades son simplemente una extensión de las expresiones algebraicas. Son un camino para representar relaciones más complejas en el mundo real, donde no todo es igual.

Así se tomó el tiempo necesario para orientar algunos ejemplos de cómo tratar desigualdades, mostrándoles que es poca la diferencia de trabajar con el signo igual, hasta superar esa pequeña dificultad.

Al continuar con el análisis planteado en la segunda actividad, para responder a la incógnita de si es posible otros poliedros regulares, noté que al final algunos estudiantes no quedaron totalmente convencidos de que no se pudieran encontrar otros poliedros regulares con más o diferentes caras poligonales a las de los sólidos platónicos. Pues si bien al final del proceso, seguían variando los valores en las desigualdades encontradas, con la expectativa de encontrar expresiones que permitieran inferir la existencia de un nuevo poliedro, pero fueron notando que ese proceso podría ser muy extenso, pues los números son infinitos, y siempre encontrarían ese tipo de expresiones, finalmente se concluyó que no podía haber poliedros con caras heptagonales, octagonales, eneagonales, etc.

Así se comenzó a introducir a los estudiantes a la demostración matemática, ciertamente fue un desafío, pues resalto que el trabajar con desigualdades en lugar de igualdades fue un cambio importante y no muy común en la experiencia matemática para la mayoría de los estudiantes, pero el resultado fue valioso, pues, por un lado, afrontar una desigualdad ya no era una actividad tan extraña para ellos, logrando deducir e interpretar la información que representan dichas expresiones, además se estimuló la habilidad de razonar e identificar relaciones y características que no siempre se muestran explícitamente en los procesos matemáticos.

Finalmente, para tener una idea más clara de por qué solo existen cinco poliedros platónicos, mostré el video del canal de YouTube de Eleanor Abernathy[11], que ilustra la importancia de la suma de los ángulos internos que convergen en un vértice. Esta suma es un factor crucial para determinar si es posible o no la construcción de un poliedro regular, con determinada cara poligonal. A través de las animaciones, el video permitió observar cómo se descartaban caras poligonales como la del hexaedro, heptaedro, etc. Por ejemplo, se pudo observar la imposibilidad de un poliedro en el que cuatro caras

[11] Enlace video: https://youtu.be/zdKq_hXYlz4?si=G0ixR2CDp_DlbCWn

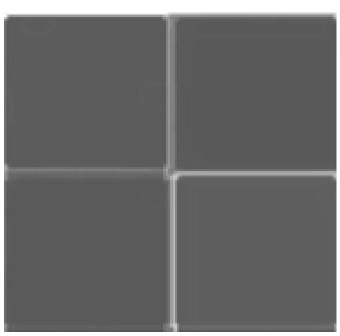
cuadradas sean comunes a un vértice, pues estas cuatro caras suman 360 grados lo que la convierte en una figura plana nuevamente, así se ratificó que solo se pueden usar tres caras cuadradas comunes a un vértice para poder armar un poliedro, y este resulta ser el hexaedro, análogamente para el caso de las caras triangulares y pentagonales.

Imagen 26 *Herramienta audiovisual*

Fuente: Creación propia

Esta herramienta audiovisual resultó de gran utilidad para que los estudiantes comprendieran de otra manera más intuitiva por qué solo existen cinco poliedros platónicos en el mundo de la geometría tridimensional, incluso resultando ser una herramienta persuasiva, que logró convencer a aquellos estudiantes que antes no estaban completamente convencidos de que no existieran más poliedros platónicos.

Ilustración 21 *Cuatro caras cuadradas formando una superficie plana*



Fuente: Fotografía propia

Es importante resaltar la convincente naturaleza de las imágenes en el proceso educativo, especialmente cuando se trata de conceptos matemáticos. En un mundo académico en el que a veces se resalta la resolución de problemas mediante fórmulas y ecuaciones en una clase magistral, la inclusión de imágenes desafía la costumbre y demuestra que la persuasión no siempre se encuentra únicamente en los números, como fue en este caso.

Así, para muchos estudiantes, que están acostumbrados a un enfoque exclusivamente matemático, la capacidad de llegar a conclusiones a través de imágenes representa una perspectiva novedosa y valiosa, mientras que, para otros, la observación directa se percibe como la prueba más fidedigna y concreta con la que les agrada interactuar.

En este proceso también se puede reconocer como el enfoque algebraico permitió a los estudiantes apreciar la importancia de las matemáticas como un lenguaje que puede traducir los aspectos geométricos en fórmulas y ecuaciones, aunque notaron cómo las letras y los números podían representar las relaciones entre las caras, los vértices y los lados de los poliedros, al no estar acostumbrados a este tipo de relación, algunos desconfiaron un poco de las conclusiones a las que llegamos por método algebraico mientras que de manera visual el video terminó por convencerlos de que solo existen cinco poliedros platónicos.

Aquí, destaco la importancia de incorporar diferentes formas de presentación de conceptos, reconociendo que la variedad de enfoques no solo enriquece la comprensión, sino que también estimula un pensamiento más flexible y abierto a distintas modalidades de aprendizaje. Como en este caso las animaciones y ejemplos visuales permitieron complementar una comprensión significativa y nos ayudaron a asimilar la singularidad de estos sólidos geométricos.

Bitácora III Resolviendo El Problema de los Siete Puentes de Königsberg

Durante esta actividad me propuse “sumergir” a los estudiantes en la mente del matemático Leonhard Euler, explorando la ingeniosa solución que propuso para el problema de los siete puentes de Königsberg[12], buscando entender cómo abordó este problema, siguiendo algunos de los pasos que lo llevaron a concluir su teorema para grafos. Además, se buscó resaltar que su trabajo no solo nos proporcionó una solución a un problema aparentemente simple, sino que también brindo una mirada general que nos introduce en el nacimiento de la Teoría de Grafos.

Inicialmente, introduje a los estudiantes del problema a abordar, mencionando que este se formuló en el siglo XVIII, propagándose a modo de juego y de problema matemático, siendo resuelto por Leonhard Euler en 1736, un matemático muy productivo y creativo, de quien sus ideas siguen siendo fundamentales en la actualidad, pues realizó contribuciones importantes en diversas áreas de las matemáticas, como la mecánica, la hidrodinámica, la teoría de números, la teoría de las ecuaciones diferenciales, el análisis matemático y claramente la Teoría de Grafos.

Antes de ilustrar en qué consistía el problema, haciendo uso de la herramienta de internet, los estudiantes indagaron durante algunos minutos la vida de Euler, conociendo algunos aspectos de este matemático suizo y compartiéndolos con sus compañeros en un diálogo. Entre los aspectos encontrados causó admiración el saber que desde sus trece años ya estaba estudiando en la universidad, lo que permitió reconocer la capacidad mental que tuvo desde una edad temprana. Además, saber que pudo continuar largos años con su labor a pesar de perder la vista en un ojo, y que más tarde quedó casi ciego, cautivo a los estudiantes, pues reconocer que tal circunstancia, no afectó su calidad de calculista mental, fue un ejemplo de dedicación y perseverancia.

[12] En la ciudad de Königsberg, en Prusia, hay una isla A llamada Kneiphof, rodeada por los brazos del río Pregel. Hay siete puentes a, b, c, d, e, f y g que cruzan los dos brazos del río, la cuestión consiste en determinar si una persona puede realizar un paseo de tal forma que cruce cada uno de estos puentes una sola vez.

La vida de Euler capto en gran medida la atención de los estudiantes, despertando curiosidad por saber más sobre su trabajo, lo que llevó a rescatar de la anterior actividad, la ecuación $C - A + V = 2$, recordando es un teorema que Euler formulo en 1750, convirtiéndose en una contribución clave en la geometría, pues como se observó en sesiones anteriores, nos permitió analizar y comprender las características esenciales de los sólidos platónicos.

Así, quise estudiar detenidamente con los estudiantes como abordó no solo un problema específico, sino como buscó patrones y principios que pudieran aplicarse de manera más amplia desde las matemáticas.

De esta manera, presenté gráficamente el enunciado del problema de los siete puentes de Königsberg, dando un espacio para que analizaran e interpretaran lo que el problema planteaba, una vez se entendió que la cuestión consiste en determinar si una persona puede realizar un paseo que cruce cada uno de estos puentes una sola vez, los estudiantes intentaron hallar una respuesta.

Imagen 27 *Grafico problema puentes de Königsberg*

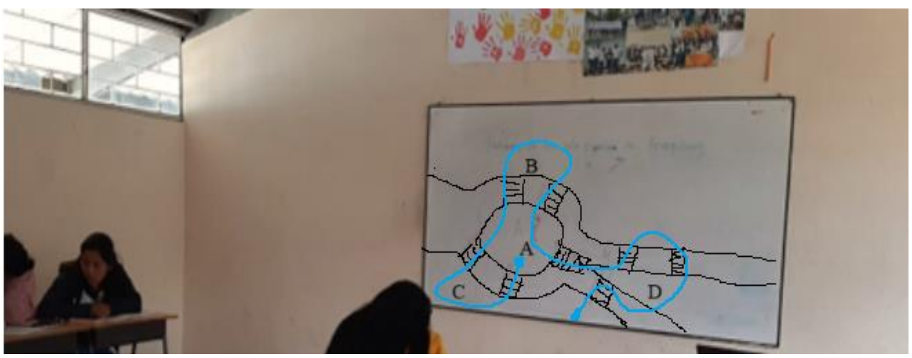
Fuente: Fotografía propia

En principio surgió la idea de elegir la región correcta desde la cual partir, pues así se lograría encontrar el recorrido. Como resultado de dicha idea, tras algunos intentos, se logró reconocer que sin importar la región de donde se partiera, el recorrido no se lograba completar, pues siempre se encontraba un puente que quedaba sin cruzar, conjeturando que no era posible encontrar dicho recorrido.

Claramente no se contemplaron todas las posibilidades existentes, pues debe reconocerse que para iniciar el recorrido y cruzar el primer puente se tienen siete opciones a elegir, para el segundo puente a cruzar seis opciones, para el tercero cinco y así sucesivamente hasta llegar al último puente, es decir una cantidad de siete factoriales posibilidades, una cantidad difícil de realizar con lápiz y papel.

Para tal situación, se propuso una nueva característica al problema, añadiendo otro puente a una de las regiones, notando que así, sí se podría encontrar un recorrido que pasara por todos los puentes solo una vez,

Imagen 28 *Grafico un puente más en el problema de Königsberg*



Fuente: Creación propia

La particular variación en el número de puentes, permitió entender que la solución a este problema tiene mucha relación con el número de puentes, sin embargo, sería muy difícil encontrar el recorrido en una situación que involucrara una cantidad de puentes muy grande, pues hasta ese momento la forma de buscar respuesta era desde "papel y lápiz", con ensayo y error variando la región de partida, pero para un problema cada vez más grande, con un número mayor de regiones se nos dificultaría realizar el mismo proceso.

Con tal aclaración, parecía que el problema inicial con los siete puentes, efectivamente no tenía el recorrido buscado, sin embargo, el objetivo era tener un argumento más preciso de por qué no se puede hallar el recorrido en cualquier problema de este tipo, por lo que seguir el análisis de Leonhard Euler en su solución a este problema fue oportuno, pues sus conclusiones nos permitirían reconocer cuando existe o no el recorrido mencionado en problemas incluso más complejos, sin la necesidad de explorar y realizar fallidos intentos.

De esta manera se inició el estudio de algunos pasos fundamentales realizados por Euler, para abordar este problema de manera integral, sumergiéndonos en su razonamiento, con la intención de ejemplificar su enfoque deductivo y llegar a las conclusiones que él halló, como se muestra a continuación.

Importancia de la simbología matemática: En primer lugar, se incluyó la notación de letras mayúsculas para identificar cada región y para el paso de una región a otra, por ejemplo, dado el recorrido de un caminante que inició en la región A, paso a la región B, luego a la región D y terminó en C, será representado por la sucesión de letras ABDC, resaltando el hecho de que los recorridos AB y BD se condensan en el recorrido ABD, no hay necesidad de repetir una letra que designa una región a la que se llega y se abandona enseguida.

Esta notación permitió reconocer una relación importante entre la cantidad de puentes y la cantidad de letras de un recorrido, pues observamos que dado el recorrido AB se sabe que se cruzó solo un puente entre estas dos regiones, notando que el número de letras es mayor en uno a la cantidad de puentes cruzados, luego si se agrega otra región al recorrido, sea este ABD, se habrá cruzado otro puente para llegar a D, es decir se cruzaron dos puentes entre estas tres regiones, nuevamente el número de letras es mayor en uno a la cantidad de puentes cruzados. Si se continúa agregando regiones al recorrido se mantiene esta relación. El descubrir este patrón permitió responder a preguntas como ¿si tuviera que cruzar cinco puentes entonces cuantas letras representaría dicho recorrido?, para los estudiantes fue claro que serían necesarias seis letras, respuesta que se obtendría sumando uno a la cantidad de letras, esto como consecuencia de la relación analizada, lo que en términos generales permitió deducir y/o afirmar que **si un caminante pasa por una cantidad cualquiera n de puentes entonces el recorrido quedará representado por una cantidad n+1 de letras.**

A partir de esa afirmación para el problema en cuestión, se logró reconocer que, si existiera el recorrido buscado, la cantidad de letras necesarias para representarlo serían **ocho**, pues el problema cuenta con siete puentes, esta afirmación nos arrojó valiosa información que nos acercaba a concluir que innegablemente es imposible hallar tal recorrido, como se verá más adelante.

Al asignar letras a cada región visitada, como en la secuencia ABDC, se encontró una expresión compacta que condensa la información esencial del recorrido, no solo facilitó la visualización del trayecto, sino que también permitió establecer patrones y relaciones de manera clara y concisa. De esta forma, se reveló un recurso fundamental en este proceso, pues permitió la comprensión de aspectos importantes como la conexión directa entre la longitud o cantidad de letras de la secuencia y la cantidad de puentes cruzados. Al observar estas representaciones, los estudiantes lograron identificar patrones que abren camino a generalizaciones y abstracciones más profundas. Es notable observar que, en este, como en muchos casos, la notación en letras actúa como un vehículo cognitivo, llevando a los estudiantes desde el análisis específico de un problema hacia la formulación de reglas generales.

En consecuencia, este paso no solo nos encaminó a la solución del problema de los Siete Puentes de Königsberg, sino que también destacó la importancia de la abstracción y la notación en el proceso deductivo al afrontar problemas matemáticos.

El número de puentes en una región*:* Como se observó antes, la cantidad de puentes en cada región tiene gran influencia en el recorrido buscado, por lo que un aspecto importante a analizar era precisamente como la cantidad de puentes de una región se relaciona o afecta las veces que aparecerá tal región (su letra representativa) en la sucesión de letras del recorrido.

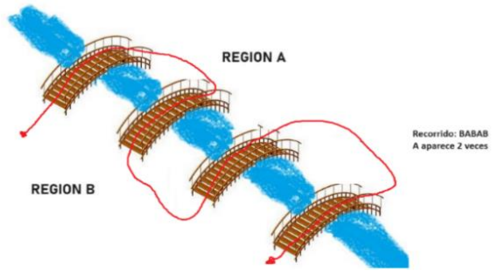
En ese sentido, fue necesario considerar un número cualquiera de puentes en una región, al que llamamos $\boldsymbol{n}$, y para facilitar este análisis, dibujé un río que dividía dos regiones A y B donde podríamos variar el número n de puentes, imagen que nos ayudaba a visualizar tal situación. A sabiendas de que $\boldsymbol{n}$ podría ser par o impar, se realizó un análisis en ambos casos, enfatizando el análisis a la región A, región desde donde el recorrido podría o no iniciar, aspecto que también tendríamos en cuenta en nuestro análisis.

Cuando hay una cantidad par de puentes, es decir cuando $\boldsymbol{n}$ **es par**, en el primer caso $\boldsymbol{n} = \mathbf{2}$, se analizó como sería la representación de las letras para los recorridos así:

- Si un caminante inicia el recorrido en la región A, entonces cruzará un puente para salir hacia la otra región y luego podrá regresar a la región A cruzando el segundo puente, de esta forma el recorrido es ABA, puede notarse que la letra A apareció dos veces.
- Si un caminante no inicia el recorrido en la región A, entonces podrá cruzar un puente para entrar a esta región y luego usar el otro puente para salir, de esta forma el recorrido es BAB y puede notarse que la letra A aparecerá solo una vez.

Para los siguientes pares, se realizó el mismo análisis, durante ese proceso el dibujo del rio y los puentes fue una gran herramienta, pues los estudiantes analizaban el posible recorrido, trazandolo sobre los puentes y contando las veces que entraba y salia a la region, una forma intuitiva y genuina de experimentar cada recorrido desde el papel y lapiz. Por ejemplo para n=4 un recorrido podria ser el de la ilustracion 23, donde se puede concluir que A aparece 2 veces. En la imagen 28 se pueden notar los dibujos usados para completar la tabla 3 como se planteo en la actividad.

Ilustración 22 *Dibujo caso n=4 (cuatro puentes en una región)*



Fuente: Elaboración propia

Imagen 29 *Análisis cantidad de puentes en una región*

Fuente: Fotografía propia

Serecuerda que la tabla 3 planteada antes es la siguiente:

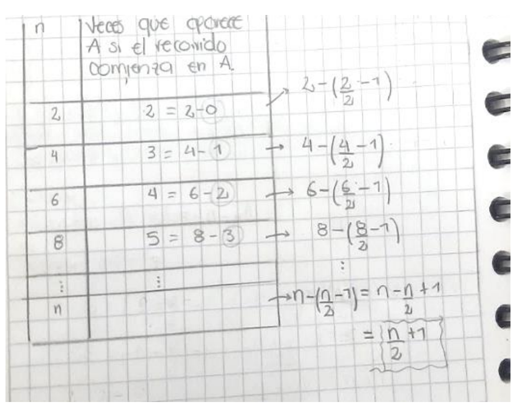
Número de puentes (par)	Veces que aparecerá A si el recorrido comienza en A	Veces que aparecerá A si el recorrido NO comienza en A
2	2	1
4	3	2
6	4	3
8	5	4
⋮	⋮	⋮
n	$\frac{n}{2}+1$	$\frac{n}{2}$

Note que en la primera fila está el caso n=2 descrito antes. En la última fila de la tabla se pueden observar dos expresiones generales, para concluir estas generalizaciones fue conveniente realizar una comparación entre las columnas, buscando que los estudiantes identificaran patrones y características que nos permitieran inferir una relación entre ellas, por ejemplo, fue sencillo reconocer que los valores de la tercera columna correspondían a la mitad de la primera columna, esto es la mitad de cada número par, lo que permitió concluir que para n par, si el recorrido no comienza en la región A considerada, entonces dicha letra aparecería $\frac{\boldsymbol{n}}{\mathbf{2}}$ veces.

No obstante, al comparar la primera y segunda columna no fue posible identificar inmediatamente la expresión $\frac{\boldsymbol{n}}{\mathbf{2}}+\mathbf{1}$, como en el caso anterior, pero los estudiantes llegaron a un patrón que cumplían los valores de la segunda columna, este consistía en restar a cada número par la sucesión de números naturales incluyendo el cero.

Para los estudiantes es difícil "formalizar" o "modelar" tal patrón a una forma general, pues esto implica traducir la observación a una representación matemática precisa, proceso complejo con el que no están muy familiarizados, por lo solo que buscaba avivar la intuición y concentración sin exigir este tipo de manipulación algebraica. En la imagen 29 se puede observar que el reescribir dichos naturales en relación con el par correspondiente en cada fila, se puede llegar a la misma expresión general, es decir que el patrón hallado por los estudiantes conducía a la generalización buscada.

Imagen 30 *Interpretación del patrón hallado por los estudiantes*

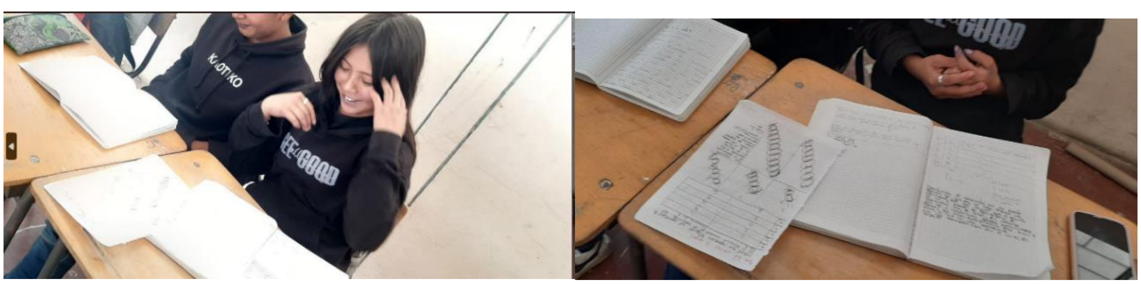


Fuente; Fotografía propia

Luego, *cuando hay una cantidad impar de puentes, es decir para* $\boldsymbol{n}$ ***impar***, en un proceso análogo al caso anterior, dejé que exploraran este caso con los primeros números impares, iniciando con $\boldsymbol{n=1}$, particularmente en este caso, se podía notar que si la región A tiene un solo puente entonces esta letra aparecerá solo una vez en la sucesión de letras, pues es claro que es posible un movimiento ya sea salir o entrar a esta región es decir el recorrido será BA o AB, por lo que no hay diferencia si el recorrido inicia o no en A, en ambos casos aparecerá el mismo número de veces.

Con el siguiente número impar de puentes $\boldsymbol{n}$**=3**, ocurre lo mismo, si el recorrido inicia en la región A entonces el caminante usará un primer puente para salir, un segundo para entrar, y el ultimo para salir nuevamente, y el recorrido será ABAB donde A aparece solo dos veces. En caso contrario el recorrido será BABA, donde A también aparecerá dos veces, por lo que nuevamente no importa si el recorrido inicia o no en A, en ambos casos la letra aparecerá el mismo número de veces. Con este mismo análisis se completó la tabla 4 planteada antes.

Imagen 31 *Análisis una cantidad impar de puentes en una región*



Fuente: Fotografía propia

Se recuerda que la Tabla 4 planteada antes es la siguiente:

Número de puentes (impar)	**Veces que aparecerá A si el recorrido comienza en A**	**Veces que aparecerá A si el recorrido NO comienza en A**

1	1	1
3	2	2
5	3	3
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n+1}{2}$

Al analizar los primeros casos con los impares, es posible ver que se mantiene dicha relación, coincidiendo la segunda y tercera columna, esta misma característica fue notada por los estudiantes, no había distinción si el recorrido iniciaba o no en la región A, siempre aparecería la misma cantidad de veces con cualquier número impar de puentes, análogamente se encontró la generalización

$\boldsymbol{\frac{n+1}{2}}$ en este caso.

De esta manera se obtuvieron conclusiones que permiten reconocer cuantas veces aparecerá A en la secuencia de letras que representa un recorrido, dependiendo de la cantidad $\boldsymbol{n}$ de puentes así:

- $\boldsymbol{\frac{n}{2}}$ Sí $\boldsymbol{n}$ es par y no se inicia el recorrido en la región A
- $\boldsymbol{\frac{n}{2}+1}$ Sí $\boldsymbol{n}$ es par y se inicia el recorrido en la región A
- $\boldsymbol{\frac{n+1}{2}}$ Sí $\boldsymbol{n}$ es impar y se inicie o no el recorrido en la región A

Como se explicó al plantear la actividad, dichas conclusiones nos permitieron analizar las cuatro regiones presentes en el problema de los puentes de Königsberg y observar que el recorrido que cruza una vez los siete puentes entre estas regiones debe ser representado por una secuencia de **nueve letras**, sin embargo, antes se pudo afirmar que debían ser solo **ocho letras** las que representaban el recorrido, pero si tal recorrido se lograra encontrar deberían coincidir estas dos cantidades, pues brindan información de un mismo recorrido, de esta manera se continuó afirmando que para el problema de los siete puentes de Königsberg no es posible hallar un recorrido que cruce cada puente una única vez.

Posteriormente, reconociendo la coincidencia que debe existir entre la cantidad de letras que representa un recorrido y la suma de las veces que aparecerá cada letra en total, lograríamos identificar cuando se puede realizar un recorrido que cruce cada puente una vez en cualquier problema, como se podrá ver a continuación.

Análisis a un problema general: En el análisis realizado antes, se destacó un aspecto crucial observado en las tablas, la suma total de los puentes, representada por la segunda columna, es el doble de la cantidad de puentes, ya que cada puente conecta dos regiones y, por lo tanto, se cuenta dos veces al completar la tabla.

Este número par en la suma total de la segunda columna sugiere dos posibilidades, o bien la suma consiste en números pares o hay una cantidad par de números impares. En consecuencia, se descarta la existencia de problemas con un número impar de regiones que tienen un número impar de puentes, por ejemplo, un caso donde tres regiones tienen un solo puentes. Es decir que solo serán posibles:

- problemas en los que todas las regiones tienen una cantidad par de puentes
- problemas en los que hay una cantidad par de regiones con una cantidad impar de puentes.

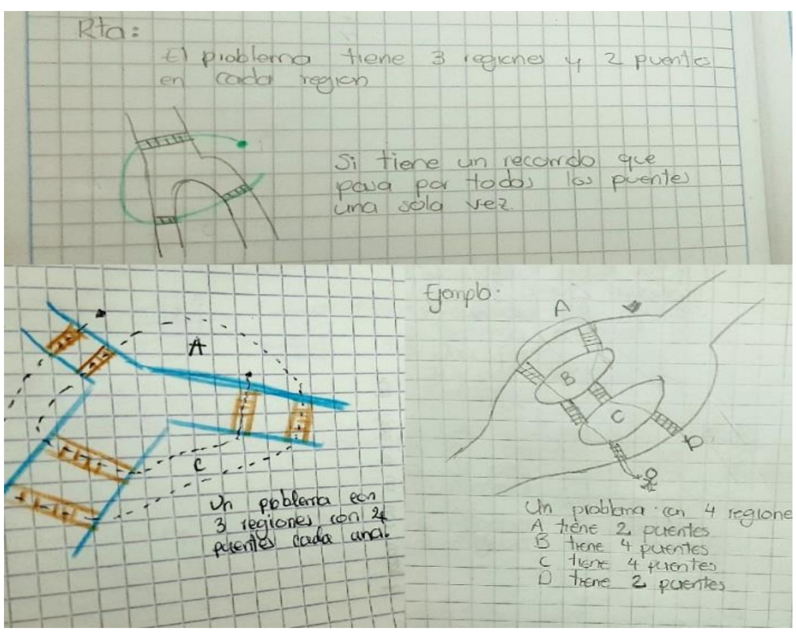
Para ilustrar este enfoque, planteé a los estudiantes la resolución de un problema genérico que requiere determinar la posibilidad de cruzar cualquier cantidad de puentes en un número variable de regiones. Se inició el análisis suponiendo un número " $\boldsymbol{n}$ " de regiones representadas por $\boldsymbol{A_1}, \boldsymbol{A_2}, \dots \boldsymbol{A_n}$, con una cantidad correspondiente de puentes $\boldsymbol{n_1}, \boldsymbol{n_2}, \dots, \boldsymbol{n_n}$La variable $\boldsymbol{n}$ actuó como un comodín, esencial para desarrollar una solución adaptable a diversas situaciones.

Siguiendo cada paso planteado en la actividad, se examinó la frecuencia de cada letra en los recorridos de cada posible problema para saber si era posible o no hallar el recorrido buscado. Como ya se mencionó, fue vital reconocer que si el recorrido se puede hallar deben coincidir dos cantidades, la suma de las veces que debe aparecer cada letra, que llamamos Q (suma de la tercer columna), con la cantidad de letras que representa el recorrido P+1, en los diferentes problemas se encontró que:

- **Problemas en los cuales todas las regiones cuentan con un número par de puentes:** En este caso se cumple la igualdad por lo que se logró concluir que en todo problema donde las regiones tienen un número par de puentes, se puede encontrar un recorrido que cruza todos los puentes una única vez y este inicia en cualquiera de las regiones.

Para reafirmar este resultado como ejemplo, cada estudiante construyó un problema particular con la característica de tener todas las regiones con un número par de puentes, esto con el fin de evidenciar que sea cual sea el problema, lograrían encontrar el recorrido buscado. Tomando como referencia la ilustración del problema de los siete puentes de Königsberg algunos ejemplos de los problemas resultantes se muestran en la imagen 31.

Imagen 32 *Problemas con regiones pares*

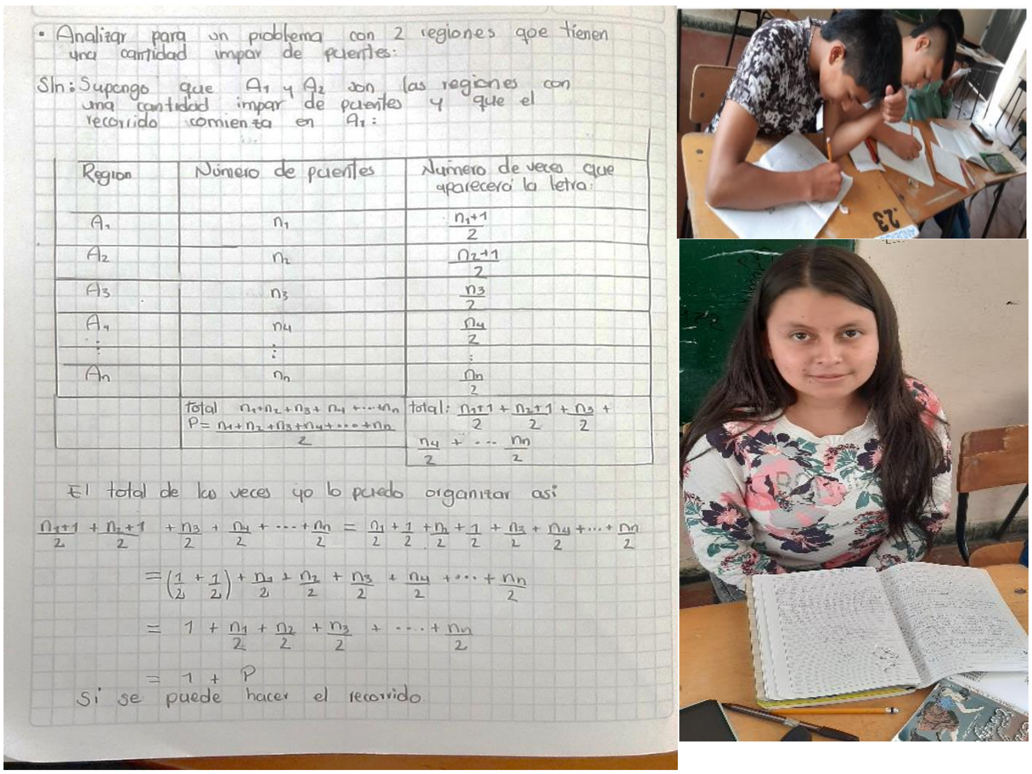


Fuente: Fotografía propia.

Propuse a los estudiantes que completaran las tablas para otra situación posible, por ejemplo, cuando hay **un número par, sea este 2, de regiones con una cantidad impar de puentes**, distinguiendo los siguientes casos:

- Caso 1: El recorrido que inicia en una región impar

Imagen 33 *Análisis problemas con dos regiones impares. Caso 1*



• Analizar para un problema con 2 regiones que tienen una cantidad impar de puentes:

Sln: Supongo que A_1 y A_2 son las regiones con una cantidad impar de puentes y que el recorrido comienza en A_1:

Region	Número de puentes	Número de veces que aparecerá la letra:
A_1	n_1	$\frac{n_1+1}{2}$
A_2	n_2	$\frac{n_2+1}{2}$
A_3	n_3	$\frac{n_3}{2}$
A_4	n_4	$\frac{n_4}{2}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
A_n	n_n	$\frac{n_n}{2}$
	total $n_1+n_2+n_3+n_4+\cdots+n_n$ $P=\frac{n_1+n_2+n_3+n_4+\cdots+n_n}{2}$	total: $\frac{n_1+1}{2}+\frac{n_2+1}{2}+\frac{n_3}{2}+\frac{n_4}{2}+\cdots\frac{n_n}{2}$

El total de las veces yo lo puedo organizar así

$$\frac{n_1+1}{2}+\frac{n_2+1}{2}+\frac{n_3}{2}+\frac{n_4}{2}+\cdots+\frac{n_n}{2}=\frac{n_1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{n_2}{2}+\frac{1}{2}+\frac{n_3}{2}+\frac{n_4}{2}+\cdots+\frac{n_n}{2}$$

$$=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)+\frac{n_1}{2}+\frac{n_2}{2}+\frac{n_3}{2}+\frac{n_4}{2}+\cdots+\frac{n_n}{2}$$

$$=1+\frac{n_1}{2}+\frac{n_2}{2}+\frac{n_3}{2}+\cdots+\frac{n_n}{2}$$

$$=1+P$$

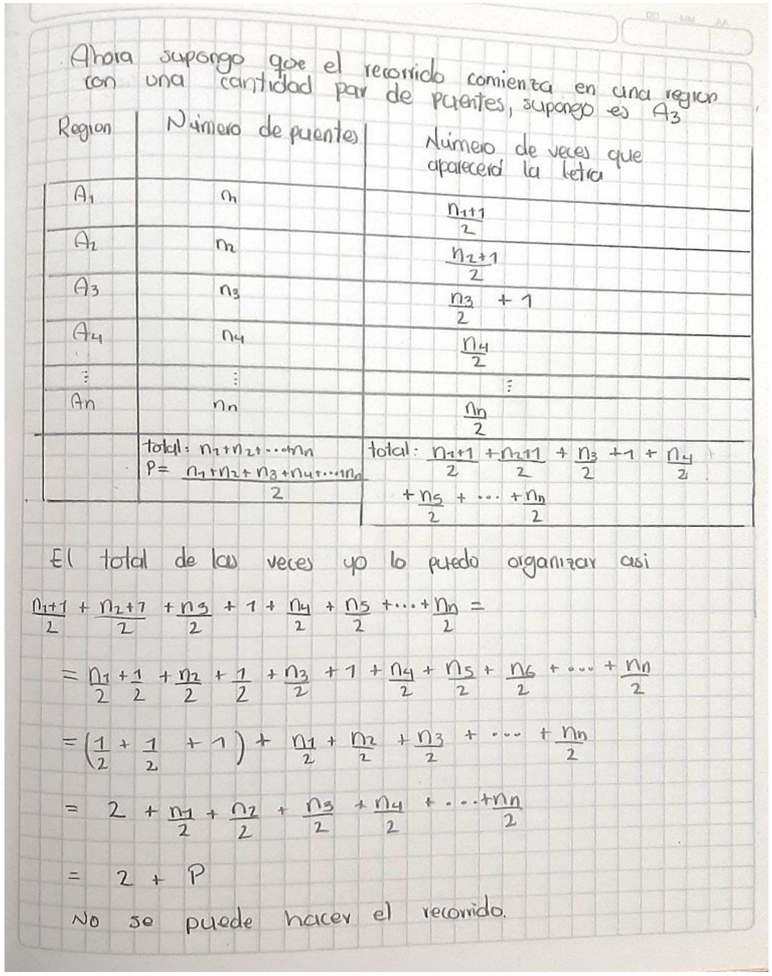
Sí se puede hacer el recorrido

Fuente: Fotografia popia

En este caso se pudó notar que coinciden la suma de las veces que debe aparecer cada letra con la cantidad de letras que representa el recorrido P+1, por lo que se logró concluir que si hay dos regiones con una cantidad impar de puentes, se puede hallar el recorrido que cruza todos los puentes una unica vez iniciando en una de estas dos regiones.

- Caso 2: El recorrido que inicia en una región par

Imagen 34 *Análisis problemas con dos regiones impares. Caso 1*



Ahora supongo que el recorrido comienza en una region con una cantidad par de puentes, supongo es A_3

Region	Número de puentes	Número de veces que aparecerá la letra
A_1	n_1	$\frac{n_1+1}{2}$
A_2	n_2	$\frac{n_2+1}{2}$
A_3	n_3	$\frac{n_3}{2}+1$
A_4	n_4	$\frac{n_4}{2}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
A_n	n_n	$\frac{n_n}{2}$
	total: $n_1+n_2+\cdots+n_n$ $P=\frac{n_1+n_2+n_3+n_4+\cdots+n_n}{2}$	total: $\frac{n_1+1}{2}+\frac{n_2+1}{2}+\frac{n_3}{2}+1+\frac{n_4}{2}+\frac{n_5}{2}+\cdots+\frac{n_n}{2}$

El total de las veces yo lo puedo organizar asi

$$\frac{n_1+1}{2}+\frac{n_2+1}{2}+\frac{n_3}{2}+1+\frac{n_4}{2}+\frac{n_5}{2}+\cdots+\frac{n_n}{2}=$$

$$=\frac{n_1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{n_2}{2}+\frac{1}{2}+\frac{n_3}{2}+1+\frac{n_4}{2}+\frac{n_5}{2}+\frac{n_6}{2}+\cdots+\frac{n_n}{2}$$

$$=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+1\right)+\frac{n_1}{2}+\frac{n_2}{2}+\frac{n_3}{2}+\cdots+\frac{n_n}{2}$$

$$=2+\frac{n_1}{2}+\frac{n_2}{2}+\frac{n_3}{2}+\frac{n_4}{2}+\cdots+\frac{n_n}{2}$$

$$=2+P$$

No se puede hacer el recorrido.

Fuente: Fotografía propia

En este caso se logró notar que no coinciden la suma de las veces que debe aparecer cada letra con la cantidad P+1, concluyendo que si hay dos regiones con una cantidad impar de puentes, no se puede hallar el recorrido que cruza todos los puentes una única vez si este no inicia en una de estas dos regiones. Además, en los valores de las tablas se puede notar que si aumentan la cantidad de regiones con un numero par de puentes se sigue aumentando una unidad en la suma de la tercer columna, por lo que no se cumplira la igualdad en ningun caso, por tanto no se podrá hallar el recorrido buscado.

Resalto que el completar las tablas era sencillo para la mayoría de los estudiantes, aplicaban las conclusiones correctamente diferenciando la cantidad de veces que debe aparecer una letra de acuerdo con la cantidad de puentes que tiene cada región, sin embargo, al momento de concluir si coincidían o no la suma de las veces que debe aparecer cada letra(total tercer columna), con la cantidad de letras que representa el recorrido P+1, se sentían inseguros de afirmar o negar el resultado, esto debido a que para obtener la igualdad era necesario asociar y sumar fracciones, una pequeña manipulación algebraica que hizo dudaran.

Es frecuente que los estudiantes experimenten inseguridad al enfrentar con dificultad cálculos aparentemente simples. No obstante, cometer errores en estas situaciones no indica falta de habilidad matemática ni refleja un bajo desempeño en la materia. Este fenómeno es común y afecta a todos, incluyendo a profesores y matemáticos experimentados.

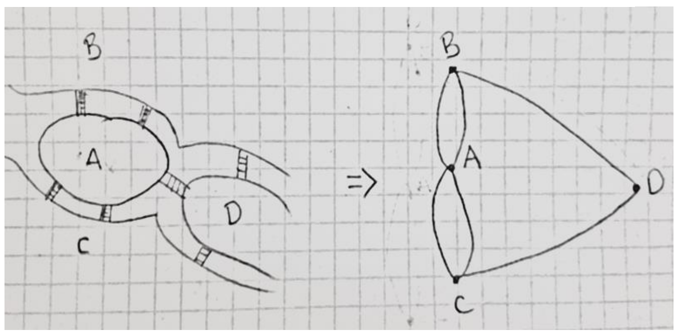
Consecuentemente, de todo este proceso se rescataron las siguientes conclusiones:

- *Si todas la regiones tienen un numero par de puentes entonces se puede hacer el recorrido*.
- *Si son mas de dos regiones a las cuales conducen un numero impar de puentes, entonces no se puede encontrar el recorrido*
- *Si solamente hay dos regiones con un numero impar de puentes entonces se puede hallar el recorrido iniciando en una de estas dos regiones*

De esta manera, en nuestro problema inicial de los siete puentes de Königsberg se ratificó teóricamente que no es posible hallar un recorrido que cruce cada puente una única vez, pues sus cuatro regiones tienen un número impar de puentes.

Al llegar a estas conclusiones, algunos estudiantes notaron la similitud con las afirmaciones obtenidas en la actividad 1, efectivamente, cuando todos revisaron y evocaron los grafos estudiados, recordaron que "*un grafo se puede dibujar de un solo trazo si tiene todos sus vértices de grado par o si tiene exactamente dos vértices de grado impar*". Claramente estaban relacionados, lo que nos llevaba a responder: ¿cómo están relacionados los grafos con los problemas analizados? Para ello, nuevamente seguimos las lecciones de Euler, explicando su método para representar el problema con un grafo. Es decir, denotar cada región como un vértice y cada puente como una arista, obteniendo para nuestro problema inicial la siguiente representación:

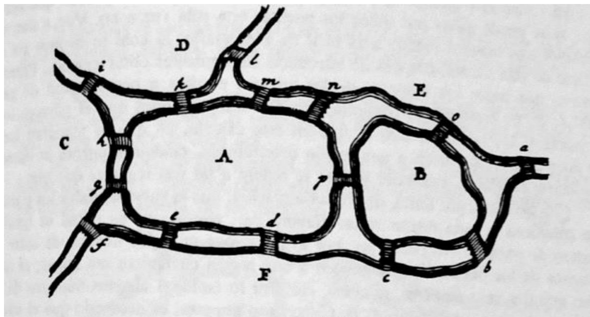
Imagen 35 *Dibujo grafo puentes de Königsberg*



Fuente: fotografía propia

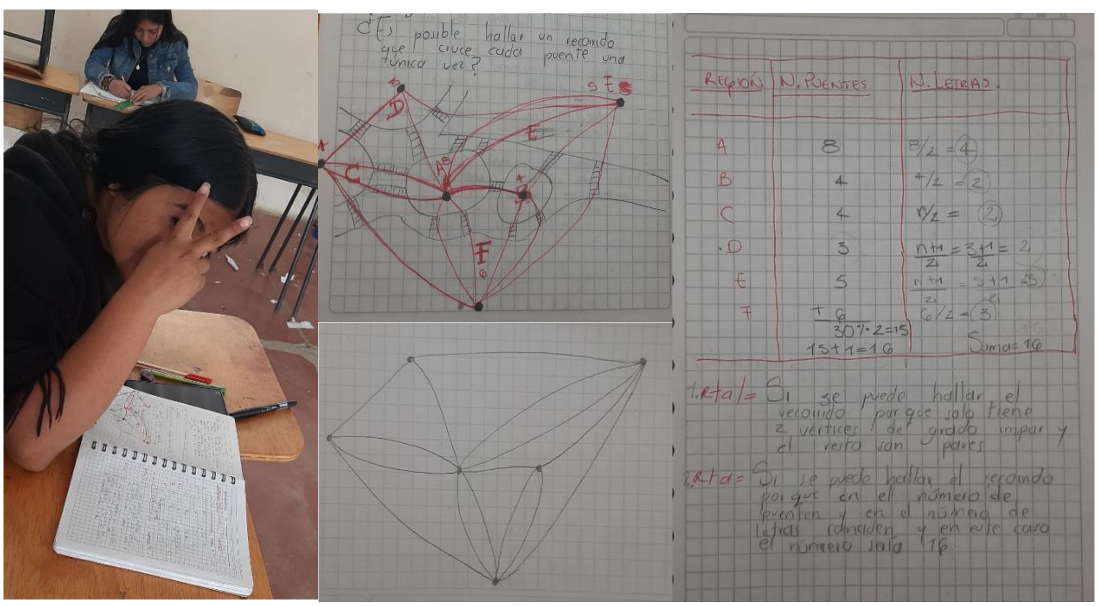
Esta representación permitió analizar en cada región si hay una cantidad par o impar de puentes, pero con la connotación de grado par o impar de un vértice, encontrando la relación entre la afirmación de la actividad 1, y las ultimas conclusiones halladas. Además, se puede reconocer que buscar el recorrido en un mapa con un número de puentes es equivalente a buscar el recorrido en su grafo. Aquí notamos otra estrategia ingeniosa de Euler, pues el grafo permite visualizar claramente las conexiones entre las regiones y los puentes, transformando un problema complejo en algo más manejable, y asimismo con las conclusiones halladas, analizar un recorrido en cualquier grafo resultaría aún más sencillo, teniendo así una sólida base teórica, como resultado de un razonamiento matemático excepcional, en el que Euler no solo demostró su destreza matemática, sino también su agudo ingenio para encontrar soluciones innovadoras.

Finalmente, como se planteó en la actividad 3, para afianzar la aplicación del resultado obtenido, los estudiantes analizaron la cuestión ¿Es posible hacer o no un recorrido por todas las regiones cruzando solo una vez cada puente en el siguiente mapa?



La respuesta resultaba de la aplicación de las conclusiones halladas o bien directamente al problema.

Imagen 36 Solución problema 15 puentes en 6 regiones



Fuente: Fotografía propia

De este modo, el explorar el razonamiento de Euler en la solución de los puentes de Königsberg resultó ser una experiencia enriquecedora, inicialmente, tenía cierto temor sobre la receptividad de los estudiantes, ya que la resolución implicaba un nivel de abstracción y deducción al que a veces no están acostumbrados en su experiencia académica. Sin embargo, los estudiantes se sumergieron en el desafío, reconociendo la importancia de “familiarizarse” y comprender lo que el problema sugiere, para poder dirigir, potenciar y concebir un plan, como se hizo en cada uno de los pasos realizados.

Son de gran valor los momentos en los que por comodidad y sin afán dejé que se ubicaran dentro o fuera del salón, en un sitio donde se sintieran cómodos y analizaran con calma las diferentes situaciones que se nos iban presentando, y siempre que tenían dudas regresaban buscando aclarar y guiar sus pensamientos, llevando un proceso consciente y eficiente de aprendizaje. La disposición a enfrentar un reto y a comprometerse con un pensamiento más profundo, permitió que surgieran sugerencias, opiniones y deducciones conforme avanzábamos en el proceso.

Bitácora IV Coloreando Grafos

Durante esta actividad mi objetivo fue introducir a los estudiantes en el Teorema de los cuatro colores y aplicarla a la estructura de grafos, como una nueva estrategia para abordar y resolver problemas.

Inicialmente realicé una breve introducción a la noción de coloración en matemáticas, por medio de algunas imágenes del libro Matemáticas de Colores, para reconocer una coloración como una función entre dos conjuntos, el primero de objetos por colorear y el segundo de colores. Las imágenes que constaban de un colibrí, permitieron que la noción de coloración como una función, no solo se volviera más sencilla de percibir, sino que también añadió una capa adicional de interés y curiosidad, convirtiendo las coloraciones en experiencias que avivan el pensamiento lógico y creativo de los estudiantes, fomentando una apreciación más profunda de las conexiones entre el arte y las matemáticas.

Ahora bien, era importante orientar a los estudiantes hacia nociones básicas como el número cromático, el grafo completo y el número cromático de un grafo completo, tal como se estipuló en la actividad 4. Pues al comprender y aplicar estos conceptos en el contexto de las coloraciones, los estudiantes no solo participarían en una experiencia artística y lúdica, sino que también podrían introducirse en nuevas herramientas matemáticas para abordar problemas más complejos relacionados con la teoría de grafos

En ese sentido se definieron:

- Número cromático: El menor número de colores que son necesarios para colorear un grafo de tal forma que los vértices adyacentes no compartan un mismo color
- Un Grafo completo es un grafo con n vértices y todas las posibles aristas que estos vértices puedan formar, denotados por $\mathcal{K}_n$ donde n denota el grado del grafo, es decir cuántos vértices tiene.
- Para los grafos completos se tiene que el número cromático es igual al grado de su grafo, ejemplo el número cromático de $\mathcal{K}_3$ es 3.

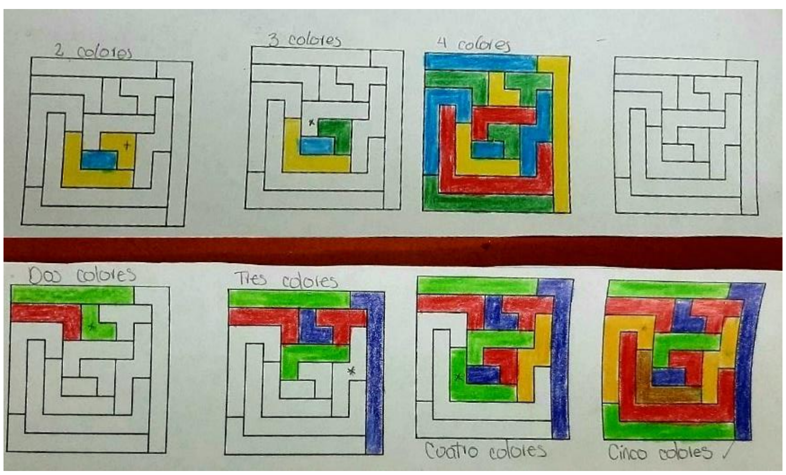
Imagen 37 *Sesión de trabajo con coloraciones*

Fuente: Fotografía propia

Una vez claras estas nociones, se continuó con el coloreo de la ilustración 12, que consta de una serie de regiones rectangulares, teniendo en cuenta una condición, las regiones que comparten una frontera no pueden tener el mismo color, de esta manera, en las figuras impresas que les entregué podían iniciar a colorear con dos colores, e ir aumentando la cantidad de colores si era necesario para descartar y/o notar cual era la cantidad mínima de colores con la que podían pintar toda la figura.

En el trabajo de algunos estudiantes se puede observar cómo descartan la cantidad de colores a medida que avanzan en el coloreo de las regiones, inicialmente con dos colores descartaron la posibilidad de colorearlo completamente, pues fue evidente que no se podría, análogamente con tres colores, pues encontraban una región que no tenía más posibilidades que compartir color con otra región continua, algunos completaron la coloración con cuatro colores, otros llegaron a la cantidad de cinco colores.

Imagen 38 *Acercamiento al teorema de los cuatro colores*



Fuente: Fotografía propia

Una de las estrategias que usaron los estudiantes para pintar la figura, fue colocar pequeños puntos con un color sobre cada región, indicando el color con el que posiblemente sería pintada, antes de colorearla por completo, previniendo errar en la distribución de la coloración requerida para no arruinar las cuatro figuras o posibilidades entregadas, pero esto hacia más difícil la distribución pues visualmente es difícil percibir si hay dos o más regiones que comparten frontera con el mismo color, aun así, algunos concluyeron que con cuatro colores si es posible pintar la figura mientras que otros aseguraban que se podía con cinco.

En ese momento, fue conveniente mencionar a los estudiantes que la mínima cantidad para colorear la figura con tales condiciones, son cuatro colores, ejemplificando las coloraciones halladas por algunos de sus compañeros, mientras que para quienes encontraron que era necesario cinco colores se hizo notar que dicho resultado se obtiene buscando una distribución correcta de colores, pues si bien la coloración obtenida con cinco colores cumplía con la condición requerida, buscaríamos usar la mínima cantidad de colores.

En ese sentido, realicé una breve introducción del teorema de los cuatro colores y su afirmación "*cualquier mapa con cualquier número de regiones y con cualquier forma, se puede colorear con solo cuatro colores sin que dos regiones continuas tengan el mismo color*", aunque como se había notado antes, no siempre es fácil encontrar una repartición de los cuatro colores sobre un mapa, por lo que se puede llegar a dudar y pensar que no se podrá optando por añadir otro color a la coloración, no obstante más adelante se estudió una forma de encontrar tal distribución usando un grafo.

Me pareció interesante que conocieran un poco de la historia de este teorema dentro de la comunidad matemática, y el video *Teorema de los cuatro colores* realizado por Eduardo Sáenz de Cabezón en su canal de YouTube denominado Derivando, fue oportuno para que conocieron un poco acerca de este teorema, pues revela algunas de los aspectos que lo han hecho tan famoso, como por ejemplo que intentaron probarlo de todas las formas posibles, pero nadie podía estar totalmente seguro de que siempre se cumplía, y esto causó mucha controversia en la comunidad matemática, pues algunos matemáticos creían que era verdad, mientras que otros tenían dudas y pensaban que podría haber excepciones, tal discusión se volvió tan intensa que se convirtió en un gran desafío probar o refutar esta teoría.

Para los estudiantes era nuevo saber que un teorema necesita una demostración o prueba, por lo que fue necesario aclarar nociones de una conjetura y de un teorema, sirvió como ejemplo nuestro trabajo en la anterior actividad, en el que seguimos el trabajo realizado por Euler para el Problema de los Puentes de Königsberg, donde demostró de manera rigurosa y lógica, que no era posible recorrer todos los puentes exactamente una vez en un paseo continuo, de no haber demostrado tal afirmación, seguiría siendo una conjetura, pero ya conocíamos la demostración por lo que ahora sabíamos es un teorema.

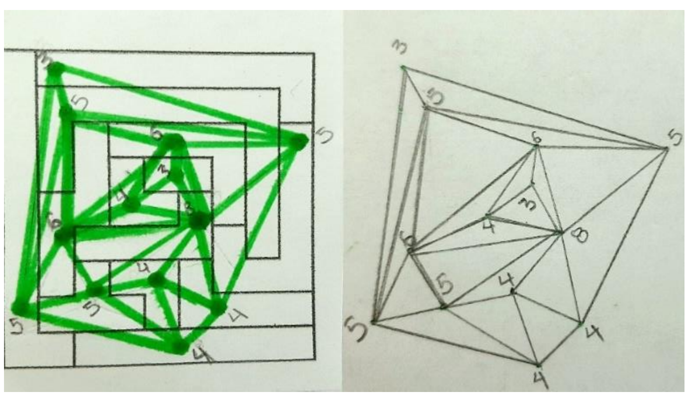
Pero la novedad de la demostración del teorema de los cuatro colores, es que finalmente, en 1976, dos matemáticos, Kenneth Appel y Wolfgang Haken, utilizaron la ayuda de la computadora para realizar una prueba exhaustiva, aquí los estudiantes se percataron de la dificultad que pueden tener algunas pruebas, pues por ejemplo en este caso debieron revisar millones de casos posibles y así concluir que solo se necesitaban cuatro colores para colorear cualquier mapa.

No obstante, también fue interesante hablar sobre la controversia que genero este hecho, pues así como algunos matemáticos discuten sobre la validez de usar la computadora de esa manera en una demostración matemática, incluso los estudiantes debatieron y respaldaron su opinión frente al tema, abogando que incluso la tecnología es resultado del ingenio humano mientras que otros sugerían un aspecto negativo de esto, pues señalaron que la inteligencia artificial podría superarnos y remplazar el trabajo de los humanos, noté que esta historia provocó una variedad de puntos de vista y fomentó la reflexión y la discusión entre los estudiantes, se asumió tal discusión como un ejemplo de cómo en matemáticas, al igual que en muchas otras áreas, la diversidad de opiniones puede ser clave para avanzar en el conocimiento, mientras se mantenga una crítica contundente pero respetuosa.

Observación: El propósito de esta actividad, no radicaba en que los estudiantes asimilen la demostración del teorema de los cuatro colores, dado su carácter intrincado y sofisticado. Más bien, la meta es cultivar en ellos una apreciación genuina hacia la belleza y la profundidad inherentes a las matemáticas.

A continuación, era hora de poner en práctica el teorema de los cuatro colores a nuestra estructura protagonista, los grafos, ya habíamos notado que la figura 1 si se puede colorear con cuatro colores, pero fue claro que, si se tenía una figura o un mapa con una cantidad mayor de regiones, sería un trabajo laborioso encontrar una distribución correcta de los colores, y como se mencionó antes, los grafos serian de ayuda para facilitar tal proceso. Para esto, inicialmente era necesario convertir la figura en un grafo, tal y como se había hecho en la actividad anterior, esto es representar cada región como un vértice y cada frontera como una arista, obteniendo un grafo similar al que se muestra a continuación.

Imagen 39 *Construcción grafo sobre el mapa*



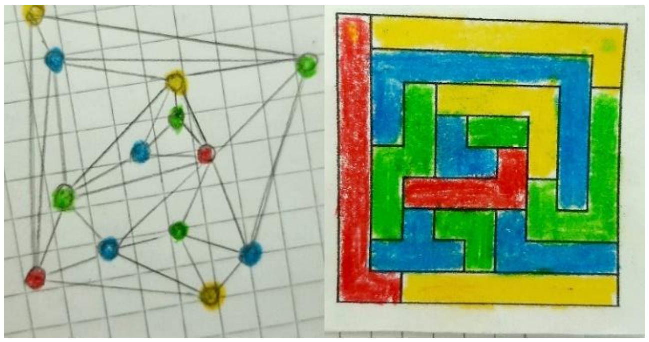
Fuente: Fotografía Propia

El paso a seguir era colorear el grafo, así como los estudiantes optaban por colocar puntos sobre las regiones para distribuir los colores, en este paso se haría lo mismo, esos puntos serían los vértices, pero para asignarles un color se siguieron las reglas [13]establecidas en la actividad cuatro. Coloreando los vértices con cuatro colores ordenados rojo, verde, azul y amarillo, de manera que obtuvimos una

[13] Buscando obtener una coloración propia, es decir una coloración donde cada vértice debe tener un color diferente a sus vértices vecinos o adyacentes, se inicia coloreando los vértices de mayor grado, siguiendo un conjunto ordenado de colores.

coloración propia, es decir, cada vértice tenía un color diferente a sus vértices vecinos. Una vez que el grafo estuvo coloreado, procedimos a colorear cada región de la figura o mapa según el color de su vértice correspondiente para verificar que era una coloración que cumplía con la condición solicitada.

Imagen 40 *Coloración de acuerdo al grafo asociado al mapa*



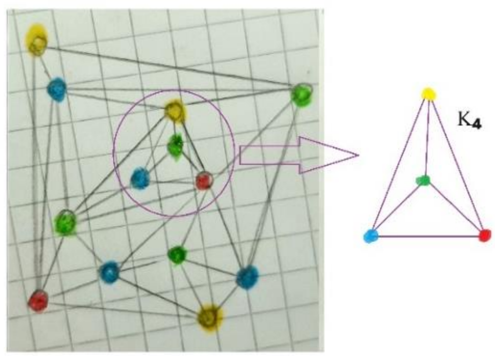
Fuente: Fotografía propia

Se destacó que la coloración encontrada, cumple con la condición de no tener dos regiones que compartan frontera con el mismo color, ya que dos vértices vecinos representan dos regiones que comparten frontera y en una coloración propia dos vértices vecinos no comparten el mismo color, y de este modo, sería fácil aplicar esta estrategia a mapas o figuras más complejas con una cantidad mayor de regiones, pues el grafo facilita la visualización y distribución de colores para un mapa.

Cuando abordamos la tarea de colorear un grafo, mi objetivo era que los estudiantes identificaran el menor número posible de colores necesarios para colorearlo, es decir, el valor mínimo que puede asumir el número cromático de un grafo. Por un lado, ya se sabía que el número cromático de un grafo completo $\mathcal{K}_n$, era n, y lo curioso de este dato es que estos grafos completos pueden encontrarse como subgrafos dentro de un grafo más grande, y al identificar el subgrafo completo de mayor grado en el grafo, se puede hallar una característica esencial y es que el número cromático del grafo no puede ser menor que el número cromático del subgrafo completo de mayor grado. Esto se debe a que la coloración del subgrafo completo representa una coloración propia, donde cada vértice tiene un color único y no se repite en ningún otro vértice. Por lo tanto, al colorear el grafo, nos aseguramos de que su número cromático no sea menor que el grado del subgrafo completo identificado.

Por ejemplo, en el grafo correspondiente a la figura 1 encontramos el subgrafo $\mathcal{K}_4$, es decir que el número cromático del subgrafo no puede ser menor que cuatro.

Imagen 41 *Subgrafo completo* $\mathcal{K}_4$



Fuente: Fotografia propia

A continuacon, quise que los estudiantes notaran como dicha cantidad puede usarse en la resolución del problema *Mujeres matemáticas,* el cual estudió en parejas de trabajo, aquí debían deducir la cantidad de clases necesarias para que quince alumnos presenten dos exposiciones acerca de dos mujeres matemáticas, las cuales se seleccionaron de entre las ocho mujeres listadas a continuación, con las condiciones de que un mismo alumno no puede presentar sus dos exposiciones el mismo día, pero en un mismo día sí se pueden repetir las presentaciones sobre una misma mujer matemática.

- Teáno de Crotona, primera mujer matemática
- Hypatia de Alejandría, primera mujer astrónoma
- María Gaetana de Agnesi, primera profesora de universidad
- Sophie Germaine, la mejor matemática de la historia según Carl Friedrich Gauss
- Ada Lovelace, la primera persona programador

- Emmy Noether, fundadora del álgebra moderna
- Maryam Mirzakhani, primera mujer en recibir la medalla Fields
- Sonia Kovalévskaya, primera mujer que se doctoró en Matemáticas

Imagen 42 *Estudiantes solucionando el problema Mujeres matemáticas*

Fuente: Fotografía propia

En un primer momento la lectura y comprensión del enunciado o contexto del problema fue la base de la actividad, es común que la falta de familiaridad con el enfoque gráfico o la ansiedad matemática, no permite que los estudiantes interpreten y apliquen las estrategias requeridas, por lo que solo hasta que todos tuvieron claro que era lo que problema requería como respuesta, se involucró un grafo, pues los estudiantes ya le consideraban una herramienta visual que podía simplificar la comprensión de relaciones entre diferentes elementos, en este caso, entre los quince estudiantes y sus dos elecciones.

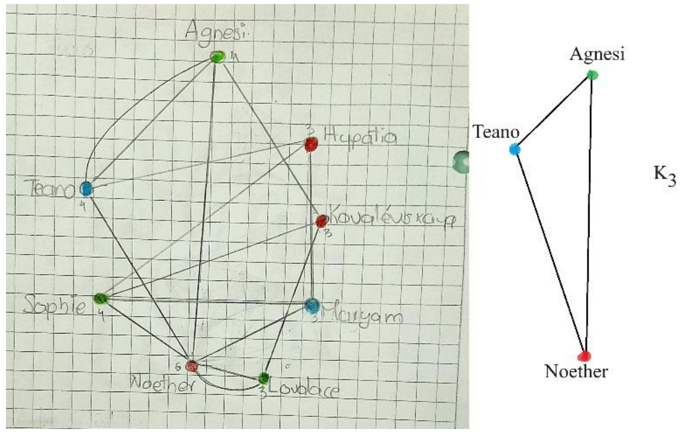
Con su interpretación representaron un grafo con los datos explícitos del problema, note que para los estudiantes la creación del grafo era una tarea sencilla. En este proceso, asignaron a cada uno de los vértices una de las ocho mujeres matemáticas y utilizaron aristas para representar las elecciones de los quince estudiantes. Cada arista conectaba dos vértices, es decir, las dos mujeres matemáticas seleccionadas por un estudiante específico, cuando solicitaba su explicación por el grafo construido en general partieron de reconocer que las aristas en un grafo simbolizan relaciones **bilaterales** y esto hizo que asociaran correctamente cada arista con las **dos** elecciones de los alumnos hipotéticos.

A continuación, la cuestión de interés era reconocer a partir del grafo obtenido, la cantidad mínima de sesiones necesarias para hacer todas las presentaciones de los quince estudiantes acatando las condiciones dadas, cuando se hablaba de cantidad mínima busqué relacionaran esta característica con la cantidad mínima de colores necesarios para colorear un grafo, tal y como se había estudiado antes, al colorear el grafo con una coloración propia se garantiza que dos vértices vecinos no tengan el mismo color, lo que en relación al problema representaría la condición de no presentarse las dos exposiciones de un estudiante el mismo día.

De manera que los vértices que comparten el mismo color serían las presentaciones que si se pueden realizar en una misma sesión, conllevando a la idea de que cada color representaba las sesiones necesarias para que los quince estudiantes presentaran sus exposiciones, de esta forma, cada grupo al estudiar el número cromático del grafo sabrían la cantidad mínima de sesiones buscada.

De esta manera, se usó el conjunto ordenado de colores C= {rojo, verde, azul, amarillo} para que todos manejaran la misma coloración, y un ejemplo de la coloración hallada es la siguiente, donde además se puede observar que el subgrafo completo mayor es $\mathcal{K}_3$, por lo que la cantidad mínima de colores para colorear los vértices del grafo es tres, lo que en relación al problema significa que son necesarias tres sesiones como mínimo para realizar las presentaciones de los quince estudiantes, sin que un estudiante presente sus dos exposiciones el mismo día.

Imagen 43 *Grafo y subgrafo completo* $\mathcal{K}_3$



Fuente: Fotografía propia

Es interesante observar cómo, una vez que entendieron el proceso de colorear el grafo, los estudiantes se esforzaron por seguir paso a paso las condiciones necesarias para lograr una coloración propia. La colaboración entre ellos también jugó un papel significativo, ya que compartieron descubrimientos y se consultaron mutuamente para validar sus resultados, por ejemplo, cuando se debía encontrar el mayor subgrafo completo, buscaban coincidir con sus compañeros lo que reveló el anhelo de respaldar la solidez de sus conclusiones. Además, que lograran concluir que se requieren al menos tres colores para colorear el grafo principal demuestra una comprensión sólida y lógica de las implicaciones del problema.

Finalmente, el compromiso y entusiasmo durante este proceso de aprendizaje matemático, abrió camino a la resolución de problemas complejos, mediante una nueva estrategia, la coloración de grafos.

CONCLUSIONES

Al concluir esta experiencia, no puedo dejar de destacar la riqueza de aprendizajes que he adquirido a lo largo de todo este proceso. Desde el momento en que decidí abordar una temática poco convencional como la teoría de grafos con estudiantes de mi propia comunidad, me embarqué en un viaje que superó mis expectativas. Aunque siempre he tenido un gusto por las matemáticas y por la enseñanza, esta práctica me brindó la oportunidad de reflexionar sobre mi propia formación de una manera más profunda pues he tenido la oportunidad de identificar y analizar mis fortalezas y debilidades, algunas de las cuales quizás no era consciente.

Al interactuar con los estudiantes, he visto reflejada en ellos una versión de mí misma. Recordé mis años de colegio, en los mismos salones, a la adolescente que, en sus clases, quizás nunca se imaginó en el papel de educadora, guiando procesos de aprendizaje, ha sido revelador y conmovedor, notar el camino que he recorrido y las metas que he logrado alcanzar, mismas que tal vez cada alumno se plantea durante su formación y que espero puedan cumplir.

Ahora bien, desde una perspectiva general, durante este proceso he identificado ciertos aspectos que considero importantes tener en cuenta para futuras experiencias en el campo de las matemáticas y el proceso de enseñanza. Estos aspectos no solo son relevantes para mi propio crecimiento profesional, sino que también espero sean de ayuda para aquellos que deseen explorar las matemáticas en experiencias similares a esta.

Por un lado, la experiencia de introducir contenidos inusuales en el aula como la teoría de grafos, junto con su historia, origen y en este caso con la contribución de grandes mentes como Leonhard Euler, puede estimular a los estudiantes hacia un proceso de aprendizaje más profundo y más consiente, pues a menudo, pasamos por alto el valioso legado de la historia de las matemáticas, sin reconocer el profundo impacto que ha tenido en nuestra comprensión del mundo. Al explorar estos conceptos históricos y conocer a figuras destacadas como Euler, los estudiantes se sienten motivados y conectados con las matemáticas de una manera nueva y emocionante.

Además, con este enfoque se puede rescatar la idea de que la enseñanza de las matemáticas va más allá de la transmisión de conocimientos; se trata de inspirar a los estudiantes a explorar, cuestionar y descubrir por sí mismos. Al conectar los conceptos matemáticos con su contexto histórico y mostrando su relevancia en el mundo actual, podemos cultivar una apreciación más profunda por esta fascinante disciplina y motivar a los estudiantes a alcanzar su máximo potencial en el aprendizaje de las matemáticas.

Por otro lado, como educadora en formación, la experiencia de incorporar elementos visuales y construcciones tangibles en el proceso educativo ha sido reveladora. En un entorno donde la enseñanza de las matemáticas a menudo se centra en la resolución de problemas mediante fórmulas y ecuaciones, la inclusión de imágenes desafía esta convención y resalta la importancia de diferentes enfoques pedagógicos. Para muchos estudiantes, acostumbrados a un enfoque exclusivamente numérico, el uso de imágenes representa una nueva perspectiva valiosa. La capacidad de llegar a conclusiones a través de la observación directa ofrece una alternativa poderosa y concreta para comprender conceptos matemáticos complejos.

Sin embargo, no desmerito el uso del enfoque algebraico, pues ha permitido a los estudiantes apreciar las matemáticas como un lenguaje versátil que puede traducir aspectos geométricos en fórmulas y ecuaciones. En este proceso, aunque algunos inicialmente desconfiaban de las conclusiones derivadas del método algebraico, la combinación de enfoques visuales y algebraicos resultó convincente. Lo que destaca la importancia de presentar conceptos de diversas maneras, reconociendo que la variedad de enfoques enriquece la comprensión y promueve un pensamiento flexible.

En esta experiencia, las actividades planteadas nos brindaron una oportunidad de un acercamiento a la demostración matemática. A pesar de que al principio parecía una tarea desafiante, la disposición y el compromiso mostrados por los estudiantes hicieron que el proceso fuera enormemente gratificante. A veces se subestima a los estudiantes, a su habilidad y creatividad, pero estoy segura de que se pueden llevar a cabo este tipo de procesos que, aunque se asumen son complejos, se pueden idear estrategias que permitan a los estudiantes estimular su pensamiento matemático y desenvolverse cómodamente en este tipo de razonamiento. En este caso, al llegar a conclusiones y respuestas a interrogantes como por qué solo existen cinco poliedros platónicos o determinar si es posible recorrer los siete puentes de Königsberg una única vez, experimentamos una satisfacción genuina. Esta experiencia nos permitió a los estudiantes, y a mí, disfrutar de un profundo sentido de logro al llevar a cabo razonamientos y reflexiones matemáticas de esta índole.

Finalmente dirijo estas palabras a todos los profesores en formación y en ejercicio, espero reconozcamos que como es de esperarse, no todo siempre resultará según lo planeado en el proceso educativo. A medida que se planea e imagina el desarrollo de las actividades con los estudiantes, se visualiza un escenario ideal en el que todo fluye conforme a lo previsto. Sin embargo, es importante reconocer que la motivación y la atención de los estudiantes pueden fluctuar. Los estudiantes están en etapas de desarrollo en las que cuestionan y toman decisiones, influenciados por diversos factores.

Durante esta práctica pedagógica, con estudiantes de grado décimo y once me enfrenté a momentos de rebeldía por parte de algunos estudiantes, lo cual me hizo cuestionar la eficacia de mis esfuerzos. No obstante, comprendí que no siempre se cumplirá todo lo planeado, ya que estamos guiando a individuos cuya mentalidad está en constante evolución y que enfrentan diversas motivaciones y conflictos personales. Es nuestro deber ser conscientes de estas realidades, ser flexibles y comprender su comportamiento, ya que muchas veces está condicionado por experiencias personales difíciles. Superar estos desafíos no solo enriquece nuestra práctica educativa, sino que también nos permite ofrecer un apoyo más comprensivo y efectivo a nuestros estudiantes en su camino hacia el crecimiento y el aprendizaje.

Desde esa perspectiva, valoro profundamente cada momento compartido durante esta experiencia. Conocer la humildad, el carisma, las formas de pensar, las alegrías e incluso las frustraciones de mis estudiantes ha dejado una huella memorable en mí, una que atesoraré siempre con gratitud. Abrazo esta experiencia con gran significado en mi camino, esperando con ansias nuevas oportunidades para crecer y contribuir al aprendizaje del as matemáticas.

REFERENCIAS

Alsina, C. (2011). Mapas del metro y redes neuronales: la teoría *de grafos*. RBA. https://granatensis.ugr.es/permalink/34CBUA_UGR/1p2iirq/alma991000812599704990

Bahamonde, S. y Viceña, J. (2011). Resolución de problemas matemáticos. (Tesis de pregrado). Universidad de Magallanes, Punta Arenas, Chile.umag.cl/biblioteca/tesis/bahamonde_villarroel_2011.pdf

Braicovich, T.C. (2010). *Grafos y su potencial educativo.* En Malaspina, Uldarico (Ed.), V Congreso Internacional sobre Enseñanza de las Matemáticas (pp. 293-304). Perú: Pontificia Universidad Católica del Perú.

Braicovich, T., & Cognigni, R. (2011). Coloreando la geografía desde el plano al toroide. Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas, 76, 135-148. http://funes.uniandes.edu.co/17075/

Braicovich, T. C. (2012*).* Una propuesta: incorporar algunos conceptos de grafos en distintos niveles de escolaridad. En España, Francisco Javier; Sepúlveda, M.ª Belen (Eds.), XIV Congreso de Educación y Aprendizaje Matemático (pp. 291-295). Málaga, España: S.A.E.M. THALES. https://thales.cica.es/xviiceam/

Braicovich, T. C. (2022). Enseñanza de Grafos: Un breve recorrido en distintos niveles educativos. *UNIÓN - REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA*, *18*(65). Recuperado a partir de https://revistaunion.org/index.php/UNION/article/view/1406

Daza, D. F. (2015). Desarrollo del pensamiento matemático a través de tres problemas clásicos (Publicación n.º 1) [Trabajo degrado, Universidad del Cauca]. Repositorio Unicauca. http://repositorio.unicauca.edu.co:8080/xmlui/handle/123456789/4034

¿Es cierto que 4 colores son suficientes para pintar cualquier mapa sin que ningún país vecino tenga el mismo color? (2019, 31 de marzo). Semana. https://www.semana.com/educacion/articulo/es-cierto-que-4-colores-son-suficientes-para-pintar-cualquier-mapa-sin-que-ningun-pais-vecino-tenga-el-mismo-color-y-por-que-importa/607683/

Euler, L. (1735). Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis. Comentarii acacdemiae petropolitane and annum MDCCXXXIVI.

Godino, J. D., Batanero, C., & Vicenç, F. (2004). Didáctica de las matemáticas para maestros. Universidad de Granada. Recuperado de: https://www.ugr.es/~jgodino/edumatmaestros/manual/9_didactica_maestros.pdf

Gutiérrez, M. E. (2020) Actividades Introductorias De Los Grafos En Las Matemáticas De Secundaria (Trabajo fin máster, Universidad DE BURGOS). Repositorio institucional http://hdl.handle.net/10259/5738

Guzmán, M. (1984). Juegos matemáticos en la enseñanza. Documento en línea, disponible en: Juegos Matemáticos en la enseñanza (ucm.es)

Montejano, A. (2022). *Matemática de colores*. Fondo de cultura económica (FCE). (Obra original publicada en 2022)

Pólya, G. (1981). Cómo plantear y resolver problemas. Recuperado de: https://es.scribd.com/doc/218324353/g-Polya-Como-Plantear-y-Resolver-Problemas-Bookfi-

Rosenstein, J.G., Franzblau, D.S., & Roberts, F.S. (1997). Matemáticas discretas en las escuelas. Serie DIMACS en Matemáticas Discretas y Ciencias de la Computación Teórica, Volumen 36. Discrete

Mathematics in the Schools. DIMACS Series in Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science, Volume 36. | Semantic Scholar

Sánchez Benito M., Angosto, C., Paenza, A., Sáenz de Cabezón, E., Pol i Llompart, J. L., Lucas Alonso, N. d., Pérez Sanz, A., R. Parrondo, J. M., Macho Stadler, M., Luque, B., Maestre Blanco, N. A. [., Martín de Diego, D., Muñoz, V., Castrillón, M. (2018). GARDNER PARA AFICIONADOS: Juegos de matemática recreativa. España: Ediciones SM España. BEM.GARDNER PARA AFICIONADOS "Juegos de matemática recreativa". Paenza, Adrián. 978-84-675-9085-2. Publiarq - Publicaciones y libros sobre arquitectura y arte.

Teorema de los cuatro colores. (2024, 19 de marzo). Wikipedia, La enciclopedia libre. Fecha de consulta: 09:14, marzo 19, 2024 desde https://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Teorema_de_los_cuatro_colores&oldid=158905324.