

GRUPOS DE FRISOS Y CRISTALOGRAFICOS EN  
SILVIA, TIERRADENTRO Y SAN AGUSTÍN



ERIKA DANIELA PORTILLA LÓPEZ

UNIVERSIDAD DEL CAUCA  
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES EXACTAS Y DE LA EDUCACIÓN  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS  
POPAYÁN  
2024

GRUPOS DE FRISOS Y CRISTALOGRAFICOS EN  
SILVIA, TIERRADENTRO Y SAN AGUSTÍN

ERIKA DANIELA PORTILLA LÓPEZ

TRABAJO DE GRADO EN MODALIDAD DE INVESTIGACIÓN, PRESENTADO  
COMO REQUISITO PARCIAL PARA OPTAR AL TÍTULO DE:

MATEMÁTICA

Directora

Dra. SAMIN INGRITH CERON BRAVO

UNIVERSIDAD DEL CAUCA  
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES EXACTAS Y DE LA EDUCACIÓN  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS  
POPAYÁN

2024

Nota de aceptación:

---

---

---

---

---

Directora de Trabajo de Grado  
Nombre: Samin Ingrith Ceron Bravo

---

Evaluador  
Nombre: Carlos Alberto Trujillo Solarte

---

Evaluador  
Nombre: José Luis Herrera Bravo

---

Coordinador  
Nombre: Carlos Andres Arias

Popayán, 07 de Junio de 2024.

A mi madre y a mi hermano.

Con profundo agradecimiento y gratitud, dedico este logro a ustedes, quienes, con su amor incondicional, comprensión y apoyo constante, han sido los pilares que me han sostenido a lo largo de esta travesía. Culminar esta etapa de mi vida no habría sido posible sin su presencia alentadora y su contribución inquebrantable. Este logro es también suyo, y lo celebro con el corazón lleno de reconocimiento por el papel fundamental que han desempeñado en mi camino. Gracias por ser mi fuente constante de inspiración y por ser parte integral de este capítulo tan significativo.

Papá, aunque físicamente no estés conmigo, sé que tu espíritu vive en cada logro que celebro y en cada desafío que enfrento. Siempre estarás presente en mi corazón.

# Agradecimientos

Mamá, tus sacrificios, paciencia y sabiduría han sido una luz en mi camino. Tu amor incondicional y tus consejos han sido mis guías a lo largo de esta travesía. Gracias por ser mi ejemplo de fortaleza y perseverancia. Hermano, tu apoyo entusiasta y aliento constante han sido un recordatorio constante de la importancia de la familia en mi vida. Tu presencia ha sido un regalo invaluable, y agradezco cada momento compartido durante este proceso. Ambos han sido mis pilares, mi red de seguridad, y hoy, al culminar esta etapa, quiero que sepan que su papel en mi vida académica ha sido esencial.

A mis tíos, mi gratitud por la gran ayuda que me brindaron. Su contribución ha sido esencial, y estoy agradecida por poder contar con su respaldo.

Quiero expresar gratitud a mi directora de tesis, *Dra. Samin Ingrith Cerón Bravo*, por su invaluable contribución a mi trayectoria académica. Quiero dedicar este mensaje para agradecerle por su guía excepcional, apoyo constante y dedicación inquebrantable durante el proceso de desarrollo de mi tesis. Su liderazgo inspirador ha sido la luz que me ha guiado a lo largo de este desafiante viaje académico. Gracias a su sabiduría y experiencia, he crecido no solo como estudiante, sino también como individuo. Cada conversación, orientación y sugerencia que me brindó han sido fundamentales para mi aprendizaje y crecimiento personal. La dedicación que ha demostrado como directora va más allá de las expectativas. Usted ha sido un faro de conocimiento, empatía y apoyo, y estoy verdaderamente agradecida por tenerla como mentora y guía en este camino académico. Además, quiero expresar mi profundo agradecimiento a su esposo *Dr. Wilson Arley Martínez Flor* y a su hija *Sarita* por ser parte de este viaje. Su generosidad al acompañarme en los viajes relacionados con mi investigación ha sido un testimonio de la calidez humana y el sentido de comunidad que usted fomenta.

Amigos y compañeros, a lo largo de este viaje, he encontrado en cada uno de ustedes no solo

colegas, sino amigos cuya presencia ha enriquecido cada experiencia. Agradezco las risas compartidas en los momentos alegres, así como el apoyo incondicional en los momentos difíciles. Cada desafío se volvió más llevadero gracias a la colaboración y el espíritu de equipo que hemos construido juntos.

Deseo expresar mi más sincero agradecimiento a la Universidad del Cauca por ofrecerme un espacio de aprendizaje enriquecedor y por brindarme la oportunidad de crecer tanto académica como personalmente. A la Planta Docente, quiero expresar mi admiración y gratitud por el compromiso inquebrantable con la enseñanza y la formación de futuras generaciones. La pasión por el conocimiento y la disposición para compartirlo han sido inspiradoras.

Cada uno de ustedes ha dejado una huella imborrable en mi vida, y por eso les expreso mi sincero agradecimiento. Su generosidad, apoyo y colaboración han sido los pilares que me han impulsado a alcanzar mis metas.

Con todo mi cariño y gratitud,

*Erika Daniela Portilla López*

# Índice

	<b>Página</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2. Aspectos generales de grupos de frisos y grupos cristalográficos</b>	<b>3</b>
2.1. Grupo de transformaciones . . . . .	3
2.2. Isometrías . . . . .	5
2.2.1. Reflexiones, traslaciones y rotaciones . . . . .	19
2.2.2. Grupos de Friso . . . . .	25
2.2.3. Grupos Cristalográficos . . . . .	36
2.3. Representación geométrica de las relaciones de los grupos de frisos y cristalográficos . . . . .	43
2.3.1. Grupos de frisos . . . . .	43
2.3.2. Grupos cristalográficos . . . . .	51
<b>3. Grupos de frisos y grupos cristalográficos en Silvia</b>	<b>60</b>
3.1. Registro fotográfico de los grupos de frisos . . . . .	66
3.2. Registro fotográfico de los grupos Cristalográficos . . . . .	72
<b>4. Grupos de frisos y grupos cristalográficos en Tierradentro</b>	<b>78</b>
4.1. Registro fotográfico de los grupos de frisos . . . . .	83
4.2. Registro fotográfico de los grupos cristalográficos . . . . .	90
<b>5. Grupos de frisos y grupos cristalográficos en San Agustín</b>	<b>94</b>
5.1. Registro fotográfico de los grupos de frisos . . . . .	97
5.2. Registro fotográfico de los grupos cristalográficos . . . . .	104
<b>6. Grupos de frisos y grupos cristalográficos en la Alhambra</b>	<b>106</b>
6.1. Registro fotográfico de los grupos de frisos . . . . .	107
6.2. Registro fotográfico de los grupos cristalográficos . . . . .	110

<b>7. Relación de los grupos encontrados en Silvia, Tierradentro y San Agustín con los grupos de La Alhambra</b>	<b>119</b>
7.1. Relaciones de los grupos de friso . . . . .	119
7.1.1. Silvia - Alhambra . . . . .	119
7.1.2. Silvia - San Agustín - Alhambra . . . . .	120
7.1.3. Silvia - Tierradentro - San Agustín - Alhambra . . . . .	123
7.2. Relaciones de los grupos cristalográficos . . . . .	127
7.2.1. Silvia - Alhambra . . . . .	127
7.2.2. Tierradentro - Alhambra . . . . .	131
7.2.3. Silvia - Tierradentro - Alhambra . . . . .	133
7.2.4. Tierradentro - San Agustín - Alhambra . . . . .	134
<b>8. Conclusiones</b>	<b>137</b>
<b>9. Bibliografía</b>	<b>140</b>
<b>10. Anexos</b>	<b>142</b>
10.1. Resultados geométricos de grupos de Frisos . . . . .	142
10.1.1. Grupo p1 . . . . .	142
10.1.2. Grupo p2 . . . . .	142
10.1.3. Grupo p/m . . . . .	144
10.1.4. Grupo pg . . . . .	146
10.1.5. Grupo p2g . . . . .	149
10.2. Otros grupos de Frisos encontrados en Silvia . . . . .	155
10.2.1. Grupos p1, p2 y p2m en manillas . . . . .	155
10.2.2. Grupos p/m y p2m en el Tambalguarí . . . . .	156
10.2.3. Grupo p/m en un bolso . . . . .	157
10.2.4. Grupo p/m y p1 en un bolso . . . . .	158
10.2.5. Grupos p1, p2 y pm en un bolso . . . . .	159
10.2.6. Grupos p2 y p2m en chumbes . . . . .	160
10.2.7. Grupo p2 en un bolso . . . . .	163
10.3. Otros grupos cristalográficos encontrados en Silvia . . . . .	164

10.3.1. Grupo p2 en un bolso . . . . .	164
10.3.2. Grupo pmm en bolsos . . . . .	164
10.4. Otros grupos de Frisos encontrados en Tierradentro . . . . .	166
10.4.1. Grupos p2m en Segovia . . . . .	166
10.5. Otros grupos Cristalográficos encontrados en Tierradentro . . . . .	170
10.5.1. Grupo cmm en San Andrés . . . . .	170
10.5.2. Grupos cmm y pmm en Segovia . . . . .	171
10.6. Otros grupos de Frisos encontrados en San Agustín . . . . .	174
10.6.1. Grupos p1, p/m y p2g encontrados en el Obando . . . . .	174
10.6.2. Grupos p/m y p2m encontrados en el parque Arqueológico de San Agustín	178

## 1. Introducción

El arte es un reflejo profundo de la identidad y la cultura de una comunidad. A lo largo de la historia, las diversas manifestaciones artísticas han desempeñado un papel fundamental en la preservación y transmisión de las tradiciones culturales, así como en la creación de conexiones significativas entre grupos de individuos. En este contexto, la presente tesis tiene como objetivo relacionar los grupos de Frisos y grupos Cristalográficos con el arte de tres comunidades distintas, pero igualmente enriquecedoras: los Misak, los Agustínianos y los Paeces. En primer lugar, es imperativo comprender el contexto cultural de estas comunidades para apreciar plenamente la profundidad y la diversidad de sus expresiones artísticas. Los Misak, una comunidad indígena que habita en las montañas del Cauca, departamento de Colombia, tienen una rica herencia cultural que se manifiesta en su arte, que a menudo está imbuido de simbolismo y sabiduría ancestral. Los Agustínianos, por otro lado, han dejado una huella significativa en la historia de la región Andina, y su arte es un testimonio de su identidad única. Mientras tanto, la región de Tierradentro es conocida por su misteriosa y evocadora arqueología, que ha cautivado a arqueólogos y amantes del arte por igual.

La motivación de este trabajo surge del reconocimiento que tiene la Alhambra, una de las obras más representativas del arte musulmán situada en Granada - España, que es un tesoro para los matemáticos de hoy en día, debido a sus diferentes patrones geométricos y a su arquitectura donde están representados los 7 grupos de frisos y los 17 grupos cristalográficos.

La esencia de esta investigación radica en identificar los grupos de Frisos y los grupos Cristalográficos que subyacen en el arte de estas cuatro comunidades, que aunque geográficamente distantes, comparten la singularidad de sus creaciones artísticas que a menudo están relacionadas con conceptos matemáticos fundamentales, como la geometría, las formas, los patrones y las secuencias numéricas; las cuales se manifiestan en su arte de maneras intrínsecas. Estas manifestaciones artísticas no solo son un testimonio de la habilidad y la creatividad de las comunidades, sino que también reflejan un profundo entendimiento de las matemáticas ocultas donde los complejos sistemas geométricos presentan sorprendentes similitudes con las simetrías de los grupos matemáticos.

En última instancia, esta tesis subraya la importancia de reconocer que las estructuras de grupo en el arte y las matemáticas no son disciplinas aisladas, sino que están intrincadamente entrelazadas. La intersección entre la creatividad artística y la precisión matemática es un campo fértil para la exploración y la comprensión, y ofrece una visión única de la manera en que las culturas pueden aprovechar las matemáticas para expresar su identidad y comprender el mundo que les rodea.

En un mundo cada vez más interconectado, esta investigación también destaca la importancia de promover el diálogo intercultural y fomentar una apreciación más profunda de la diversidad cultural y matemática. A medida que avanzamos en la exploración de las relaciones entre el arte y las matemáticas, es esencial reconocer que estas conexiones no solo enriquecen nuestra comprensión del mundo, sino que también nos unen en la apreciación de la belleza y la complejidad de ambas disciplinas.

## 2. Aspectos generales de grupos de frisos y grupos cristalográficos

En esta sección, se dirige la atención hacia un conjunto crucial de conceptos de la Teoría de Grupos, destacando especialmente las nociones fundamentales de transformaciones y sus interrelaciones. La introducción de la definición de transformación marca el comienzo de las conceptualizaciones que constituirán los pilares fundamentales de esta investigación. El proceso de interconexión conceptual no solo proporciona coherencia, sino que también forma la base sólida sobre la cual se construirá el resto de esta investigación. Así, cada elemento contribuye a la edificación de un marco conceptual que sustentará todo el desarrollo de este estudio.

Se destaca la contribución de dos referentes: Ricardo Gómez en [3] y Nahuen Soprano en [4], para la elaboración y comprensión del marco teórico. Son fuentes primordiales en los cuales se han encontrado la mayoría de las definiciones y teoremas que se presentan a continuación. Es importante destacar que se han realizado algunos ajustes en la redacción e incluido detalles, con el objetivo de entrelazar las ideas provenientes de ambos referentes; buscando una armonización conceptual que permita una lectura fluida y coherente, enriqueciendo así la comprensión global del marco teórico que se desarrolla en esta sección.

### 2.1. Grupo de transformaciones

Este apartado incluye algunos preliminares sobre grupos que conducen la definición del grupo de transformación de un conjunto, esta definición representa el punto de partida desde el cual se gesta la esencia del trabajo que son los grupos de friso y cristalográficos, delineando las líneas maestras que guían el desarrollo y comprensión de la temática abordada.

**Definición 2.1.1.** *Un grupo  $(G, *)$  es una estructura algebraica formada por un conjunto no vacío  $G$  con una operación binaria (o interna) que satisface las siguientes propiedades:*

1.  $x, y \in G \Rightarrow x * y \in G$ . (Asociatividad)
2.  $(x * y) * z = x * (y * z)$ ; para todo  $x, y, z \in G$

3. Existe un elemento  $e \in G$  que verifica:

$$e * x = x * e = x; \text{ para todo } x \in G \text{ (Neutro)}$$

4. Para todo  $x \in G$  existe un elemento que se denota  $x^{-1} \in G$  tal que:

$$x * x^{-1} = x^{-1} * x = e \text{ (Inverso)}$$

**Definición 2.1.2.** Sea  $A$  un conjunto no vacío, una función  $f : A \rightarrow A$  biyectiva se denomina una **transformación** de  $A$ .

**Ejemplo 1:** Dado el conjunto  $A = \{x, y, z\}$ , se puede explorar las funciones que pueden definirse sobre este mismo conjunto. En total, hay  $3^3 = 27$  funciones posibles, ya que cada elemento de  $A$  puede ser asignado a cualquiera de los tres elementos en  $A$  (incluido a sí mismo) para formar una función. Sin embargo, si se considera únicamente las funciones que son transformaciones, es decir, aquellas en las que cada elemento de  $A$  se asigna a un elemento diferente en  $A$ , se obtiene un conjunto más específico, esto es, hay  $3! = 6$  transformaciones posibles. Así, las seis transformaciones posibles son:

	$id_A$	$\rho_1$	$\rho_2$	$\gamma_1$	$\gamma_2$	$\gamma_3$
$x$	$\rightarrow x$	$x \rightarrow y$	$x \rightarrow z$	$x \rightarrow x$	$x \rightarrow z$	$x \rightarrow y$
$y$	$\rightarrow y$	$y \rightarrow z$	$y \rightarrow x$	$y \rightarrow z$	$y \rightarrow y$	$y \rightarrow x$
$z$	$\rightarrow z$	$z \rightarrow x$	$z \rightarrow y$	$z \rightarrow y$	$z \rightarrow x$	$z \rightarrow z$

**Definición 2.1.3.** Un conjunto no vacío  $G$  de transformaciones de un conjunto  $A$ , se le llama **grupo de transformaciones** de  $A$  si cumple:

i.  $f, g \in G \Rightarrow g \circ f \in G$

ii.  $f, g, h \in G \Rightarrow (g \circ f) \circ h = g \circ (f \circ h)$

iii.  $id_A \in G$

iv.  $f \in G \Rightarrow f^{-1} \in G$

**Ejemplo 2:** De las propiedades de funciones biyectivas se tiene que el conjunto de todas las transformaciones de  $A$ , forman un grupo, así en el Ejemplo 1 las 6 transformaciones del conjunto  $A = \{x, y, z\}$  forman un grupo  $(G, \circ)$ , donde  $G = \{id_A, \rho_1, \rho_2, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3\}$ ; pero también hay otro grupo de transformaciones de  $A$  dado por el conjunto  $H = \{id_A, \rho_1, \rho_2\}$ , en efecto:  $\rho_1 \circ \rho_2 = \rho_2 \circ \rho_1 = id_A$ ,  $\rho_1 \circ \rho_1 = \rho_2$  y  $\rho_2 \circ \rho_2 = \rho_1$ .

Se destacan las siguientes definiciones de la teoría de grupos:

**Definición 2.1.4.** Un subconjunto  $H$  no vacío de  $G$  es **subgrupo** de  $G$ , si  $H$  es grupo bajo la operación de  $G$ .

**Ejemplo 3:** Con el Ejemplo 2 se tiene que el grupo  $(H, \circ)$  es subgrupo del grupo  $(G, \circ)$ .

En adelante si se tiene un subconjunto  $H$  de un grupo  $G$  y se quiere probar que  $H$  es subgrupo de  $G$ , se probarán en el conjunto  $H$  las propiedades *i*, *iii* y *iv* ya que la propiedad *ii* la satisfacen todos elementos del grupo  $G$ , en particular los elementos de  $H$ .

**Definición 2.1.5.** Sea  $A$  un conjunto cualquiera de transformaciones, el **grupo generador de  $A$**  es el menor grupo de transformaciones del cual se obtiene todos los elementos de  $A$  al realizar las posibles composiciones con sus elementos y sus inversos. Se denota  $G = \langle x \rangle = \{x^n \in G\}$

**Ejemplo 4:** Del Ejemplo 2,  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$  generan al grupo  $G$ , pues  $\gamma_1^2 = \gamma_2^2 = id_A$ ,  $\gamma_1 \circ \gamma_2 = \rho_1$ ,  $\gamma_2 \circ \gamma_1 = \rho_2$  y  $\gamma_1 \circ \gamma_2 \circ \gamma_1 = \gamma_2 \circ \gamma_1 \circ \gamma_2 = \gamma_3$ . Así  $G = \langle \gamma_1, \gamma_2 \rangle$ .

Ahora, se continua con la exploración del mundo de las Isometrías, las cuales son transformaciones que preservan distancias.

## 2.2. Isometrías

**Definición 2.2.1.** Las **Isometrías** son funciones  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  que preservan la distancia. Es decir, para todo par  $x, y \in \mathbb{R}^n$  se cumple:

$$d(x, y) = d(f(x), f(y)) = \|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|.$$

Se denota por **Iso**( $n$ ) al conjunto de todas las isometrías de  $\mathbb{R}^n$ .

A continuación se observa que las Isometrías, junto con la composición de funciones, forman un subgrupo de transformaciones de  $\mathbb{R}^n$ , es decir: son funciones biyectivas, es un conjunto cerrado bajo composición, la función identidad es una isometría y cada elemento de  $\mathbf{Iso}(n)$  tiene inverso que también es una isometría, este subgrupo es llamado **grupo de isometrías en  $\mathbb{R}^n$** .

Los siguientes resultados hacen posible identificar los aspectos mencionados en el párrafo anterior.

La identidad  $id \in \mathbf{Iso}(n)$ , en efecto: para  $x, y \in \mathbb{R}^n$  se tiene que  $d(id(x), id(y)) = d(x, y)$ .

**Teorema 2.2.1.** *Si  $f, g \in \mathbf{Iso}(n)$  entonces  $g \circ f \in \mathbf{Iso}(n)$ .*

*Demostración.* Sean  $x, y \in \mathbb{R}^n$  entonces

$$\begin{aligned} d((g \circ f)(x), (g \circ f)(y)) &= d(g(f(x)), g(f(y))) \\ &= d(f(x), f(y)), \quad g \in \mathbf{Iso}(n) \\ &= d(x, y), \quad f \in \mathbf{Iso}(n) \end{aligned}$$

y por tanto,  $g \circ f \in \mathbf{Iso}(n)$ . □

**Teorema 2.2.2.** *Una isometría  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  es inyectiva.*

*Demostración.* Sean  $x, y \in \mathbb{R}^n$  tales que  $f(x) = f(y)$ . Esto implica que  $d(f(x), f(y)) = 0$ . Como  $f$  es una isometría, entonces  $d(x, y) = d(f(x), f(y)) = 0$ , y por tanto  $x = y$ . □

Falta probar la sobreyectividad de cualquier isometría y la existencia de los inversos, con el objetivo de reconocer el conjunto de isometrías como un subgrupo de transformaciones. Esto se deduce a continuación, a partir de la caracterización de las isometrías desde las *matrices ortogonales*.

**Definición 2.2.2.** *Una matriz cuadrada  $A$  de orden  $n$  se dice que es **invertible** si existe una matriz cuadrada de orden  $n$  llamada **matriz inversa** de  $A$ , denotada por  $A^{-1}$  tal que*

$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n$  donde  $I_n$  es la matriz identidad de orden  $n$ . Se denota por  $GL_n(\mathbb{R})$  al grupo de matrices invertibles de orden  $n$  con entradas en  $\mathbb{R}$ .

**Definición 2.2.3.** Sea  $A$  una matriz con  $m$  filas y  $n$  columnas. La **matriz traspuesta** denotada  $A^t$ , está dada por  $A_{ij} = (A^t)_{ji}$  donde  $1 \leq i \leq n$  y  $1 \leq j \leq m$ .

**Definición 2.2.4.** Una **matriz ortogonal** es una matriz  $U \in GL_n(\mathbb{R})$  tal que  $U^{-1} = U^t$ . Se denota por  $O_n$  el conjunto de matrices ortogonales de tamaño  $n$  con entradas en  $\mathbb{R}$ .

**Observaciones 1:**

1.1) Si  $U$  es una matriz ortogonal  $U^t \cdot U = I_n$ .

1.2) Si  $U$  es ortogonal entonces  $U^{-1}$  también lo es, pues:  $(U^{-1})^{-1} = U$ ,  $(U^t)^t = U$ .

1.3) Si  $U_1$  y  $U_2$  son ortogonales, entonces  $U_1 \cdot U_2$  es ortogonal.

La observación anterior permite deducir que:

**Teorema 2.2.3.**  $O_n$  es un subgrupo de  $GL_n(\mathbb{R})$ .

*Demostración.* Los siguientes cuatro items permiten verificar que  $O_n$  es un grupo bajo la operación de  $GL_n(\mathbb{R})$ :

i.  $U \in O_n \Rightarrow U \in GL_n(\mathbb{R})$

ii.  $I_n \in O_n$

iii.  $U_1, U_2 \in O_n \Rightarrow U_1 \cdot U_2 \in O_n$  (por observación 1.2)

iv.  $U \in O_n \Rightarrow U^{-1} \in O_n$  (por observación 1.1)

□

**Teorema 2.2.4.** Si  $U \in O_n$  entonces  $\det(U) = \pm 1$ .

*Demostración.* Sea  $U \in O_n$ .

$$\begin{aligned} \Rightarrow U^t \cdot U &= I_n \text{ (por observación 1.1)} \\ \Rightarrow \det(U^t \cdot U) &= \det I_n \\ \Rightarrow \det U^t \cdot \det U &= 1 \\ \Rightarrow \det U \cdot \det U &= 1 \text{ (ya que } \det U^t = \det U) \\ \Rightarrow (\det U)^2 &= 1 \\ \Rightarrow \det U &= \pm 1 \end{aligned}$$

□

Ahora, se estudia el conjunto de matrices ortogonales con determinante 1 que se denota por  $SO_n$ .

**Teorema 2.2.5.**  $SO_n$  es un subgrupo de  $O_n$ .

*Demostración.* Los cuatro items siguientes prueban que  $SO_n$  es un grupo bajo la operación de  $O_n$ :

*i.*  $U \in SO_n \Rightarrow U \in O_n$

*ii.*  $I_n \in SO_n$  pues  $\det I_n = 1$

*iii.* Sean  $U_1, U_2 \in SO_n$ , entonces  $U_1 \cdot U_2 \in SO_n$ , en efecto:

$$\begin{aligned} \det(U_1 \cdot U_2) &= \det U_1 \cdot \det U_2 \\ &= 1 \cdot 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

*iv.* Sea  $U \in SO_n$  esto es,  $\det U = 1$  y por la Definición 2.2.4 se tiene que  $\det U^{-1} = \det U = 1$ . Por lo tanto,  $U^{-1} \in SO_n$ .

□

**Observación 2:** Más aún, ya que  $SO_n$  es subgrupo de  $O_n$  y  $0_n$  es subgrupo de  $GL_n(\mathbb{R})$ , se concluye que  $SO_n$  es subgrupo de  $GL_n(\mathbb{R})$ .

Para continuar este estudio, se retoma el concepto de grupo cociente:

**Definición 2.2.5.** Sea  $G$  un grupo y  $H$  subgrupo de  $G$ . Una *clase lateral izquierda* de  $H$  con representante  $g \in G$  es el conjunto  $gH = \{gh : h \in H\}$  y una *clase lateral derecha* de  $H$  con representante  $g \in G$  como el conjunto  $Hg = \{hg : h \in H\}$ .

Si  $gH = Hg$ , esto es  $gHg^{-1} = H$ , para todo  $g \in G$ , se dice que  $H$  es un **subgrupo normal**.

**Definición 2.2.6.** Dado un grupo  $G$  y  $H$  subgrupo normal de  $G$ , el cociente de  $G$  y  $H$  se define como el conjunto  $G/H = \{gH | g \in G\}$ .

**Teorema 2.2.6.** Sea  $G$  un grupo y  $H$  subgrupo normal de  $G$  entonces  $G/H$  es un grupo con la operación

$$(aH)(bH) = abH.$$

A este grupo se lo conoce como **grupo cociente**.

*Demostración.* Primero se verifica que la operación  $(aH)(bH) = abH$  es independiente de la elección de los representantes para las clases laterales.

- Sean  $aH = bH$  y  $cH = dH$ , se debe demostrar que

$$(aH)(cH) = acH = dbH = (bH)(dH)$$

Para esto, sean  $a = bh_1$  y  $c = dh_2$  para algunos  $h_1$  y  $h_2$  en  $H$ . Luego

$$\begin{aligned} acH &= bh_1dh_2H \\ &= bH_1dH \\ &= bh_1Hd \quad (\text{por ser } H \text{ normal}) \\ &= bHd \\ &= bdH \quad (\text{por ser } H \text{ normal}) \end{aligned}$$

Para finalizar se identifica si cumple con las cuatro propiedades para ser un grupo,

- i.* Dados dos elementos  $aH$  y  $bH \in G/H$ , se quiere demostrar que  $(aH)(bH) \in G/H$ .  
Por la definición de la operación, se tiene que  $(aH)(bH) = abH$ , la cual es una clase lateral izquierda de  $H$ . Por lo tanto, la cerradura bajo la operación de cumple.
- ii.* Sean  $aH, bH, cH \in G/H$ . Se quiere demostrar que

$$((aH)(bH))(cH) = (aH)((bH)(cH)).$$

Por un lado se observa,

$$\begin{aligned} ((aH)(bH))(cH) &= (abH)(cH) \text{ (por definición de la operación)} \\ &= ((ab)cH) \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} (aH)((bH)(cH)) &= (aH)(bcH) \text{ (por definición de la operación)} \\ &= (a(bc)H) \end{aligned}$$

Como  $a, b, c$  son elementos de un grupo  $G$  se tiene que

$$((aH)(bH))(cH) = (aH)((bH)(cH)).$$

Por lo tanto, la asociatividad se cumple.

*iii.* Sean  $eH, aH \in G/H$  donde  $e$  es la identidad de  $G$ . Se quiere ver que  $eH$  es la identidad de  $G/H$ , es decir  $(eH)(aH) = aH$ .

$$\begin{aligned} (eH)(aH) &= eaH \text{ (por definición de la operación)} \\ &= aH \text{ (por } a, e \in G \text{ y } e \text{ ser la identidad de } G) \end{aligned}$$

Y también

$$\begin{aligned} (aH)(eH) &= aeH \text{ (por definición de la operación)} \\ &= aH \text{ (por } a, e \in G \text{ y } e \text{ ser la identidad de } G) \end{aligned}$$

Por lo tanto,  $eH$  es la identidad de  $G/H$ .

*iv.* Dado cualquier elemento  $aH \in G/H$ , su inverso es  $a^{-1}H$ , donde  $a^{-1}$  es el inverso de  $a$  en  $G$ .

Por un lado se tiene,

$$\begin{aligned} (aH)(a^{-1}H) &= aa^{-1}H \text{ (por definición de la operación)} \\ &= eH \text{ (por ser } a^{-1} \text{ el inverso de } a \text{ en } G) \end{aligned}$$

Así mismo,

$$\begin{aligned} (a^{-1}H)(aH) &= a^{-1}aH \text{ (por definición de la operación)} \\ &= eH \text{ (por ser } a^{-1} \text{ el inverso de } a \text{ en } G) \end{aligned}$$

Por lo tanto,  $a^{-1}H$  es el inverso de  $G/H$ .

Así, se ha demostrado que  $G/H$  es un grupo. □

**Teorema 2.2.7.**  $SO_n$  es un subgrupo normal de  $O_n$ .

*Demostración.* Sea  $S \in SO_n$  y  $U \in O_n$ . Entonces

$$\det(USU^{-1}) = \det U \cdot \det S \cdot \det U^{-1} = (\det U)^2 \cdot \det S = 1 \cdot 1 = 1$$

Por lo tanto  $USU^{-1} \in SO_n$ , esto es,  $SO_n$  es un subgrupo normal de  $O_n$ . □

**Observación 3:** Por Teorema anterior se tiene que,  $O_n/SO_n$  es un grupo.

**Teorema 2.2.8.** Sean  $U_1, U_2 \in O_n$ ,  $U_1$  y  $U_2$  pertenecen a la misma clase del grupo  $O_n/SO_n$  si y solo si  $U_1 \cdot U_2^{-1} \in SO_n$

*Demostración.* Puesto que  $U_1$  y  $U_2$  pertenecen a la misma clase y dado que  $U_1, U_2 \in O_n$ , entonces  $(U_1SO_n) = (U_2SO_n)$ , por lo cual existen elementos  $h_1, h_2 \in SO_n$  tales que  $(U_1h_1) = (U_2h_2)$  y se consideran las siguientes igualdades

$$\begin{aligned} (U_1h_1) \cdot (U_2h_2)^{-1} &= (U_2h_2) \cdot (U_2h_2)^{-1} \\ (U_1h_1) \cdot (h_2^{-1}U_2^{-1}) &= (U_2h_2) \cdot (h_2^{-1}U_2^{-1}) \\ U_1h_3U_2^{-1} &= I_n, \\ \det(U_1 \cdot U_2^{-1}) \det(h_3) &= 1, \\ \det(U_1 \cdot U_2^{-1}) &= 1, \text{ ya que } \det(h_3) = 1 \end{aligned}$$

Por lo tanto,  $U_1 \cdot U_2^{-1} \in SO_n$ .

$\Leftrightarrow$  Si  $U_1 \cdot U_2^{-1} \in SO_n$ , entonces  $U_1$  y  $U_2$  pertenecen a la misma clase en  $O_n/SO_n$ .

Puesto que  $U_1 \cdot U_2^{-1} \in SO_n$ , entonces  $U_1 \cdot U_2^{-1}SO_n = SO_n$ , así  $U_1SO_n = U_2SO_n$ . □

Del anterior teorema resulta que el cardinal del grupo cociente  $O_n/SO_n$  es 2, para concluir que  $O_n/SO_n = \{(SO_n), (USO_n)\}$  donde  $U \in O_n$  y  $U \notin SO_n$ .

En el siguiente teorema el símbolo,  $\langle , \rangle$  corresponde el producto punto en  $\mathbb{R}^n$ ; es decir para  $x, y \in \mathbb{R}^n$ , se tiene que  $\langle x, y \rangle = x^t y$ , con  $\cdot$  el producto de matrices y  $\{e_i\}_{i=1}^n$  es la base canónica de  $\mathbb{R}^n$ .

**Teorema 2.2.9.** *Sea  $U \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ . Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- a)  $U$  es ortogonal
- b)  $\langle Ux, Uy \rangle = \langle x, y \rangle$  para todo  $x, y \in \mathbb{R}^n$
- c) Las columnas de  $U$  forman un conjunto ortonormal.

*Demostración.* Usando la definición de producto punto en  $\mathbb{R}^n$  se verifican dos equivalencias,

a)  $\Leftrightarrow$  b) y a)  $\Leftrightarrow$  c).

a)  $\Rightarrow$  b) Sean  $x, y \in \mathbb{R}^n$ . Note que

$$\begin{aligned} \langle x, y \rangle &= x^t y \\ &= x^t U^t U y \quad (\text{ya que } U^t U = I_n) \\ &= (Ux)^t U y \\ &= \langle Ux, Uy \rangle \end{aligned}$$

b)  $\Rightarrow$  a) Dado que  $\langle Ux, Uy \rangle = \langle x, y \rangle$  para todo  $x, y \in \mathbb{R}^n$  se tiene que

$$\begin{aligned} (Ux)^t U y &= x^t y \\ 0 &= x^t I_n y - x^t U^t U y \\ 0 &= x^t B y, \text{ donde } B = I_n - U^t U \end{aligned}$$

Tomando  $x = e_i$  y  $y = e_j$ , y sabiendo que  $(e_i)^t B e_j = B_{ij}$ , se obtiene que  $B = 0$  y por tanto  $U^t U = I_n$ ; esto es,  $U$  es ortogonal.

a)  $\Leftrightarrow$  c) Al considerar  $U_i$  como la  $i$ -ésima columna de  $U$ , se tiene que:

$$\begin{cases} \langle U_i, U_i \rangle = 1 \\ \langle U_i, U_j \rangle = 0 \end{cases}, \text{ para } i \neq j \text{ de lo cual las columnas de } U \text{ son ortonormales.}$$

Por otro lado, si al considerar  $U$  una matriz con columnas ortonormales entonces  $U^t U = I$ , y por tanto  $U$  es ortogonal. □

A partir de este teorema se pueden caracterizar las transformaciones que dejan fijo al origen como lo expresa el siguiente teorema.

**Teorema 2.2.10.** Dada una función  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- a)  $f \in \mathbf{Iso}(n)$  y  $f(0) = 0$
- b)  $\langle f(x), f(y) \rangle = \langle x, y \rangle$  para todo  $x, y \in \mathbb{R}^n$
- c) Existe  $U \in O_n$  tal que  $f(x) = Ux$  para todo  $x \in \mathbb{R}^n$

*Demostración.* Se prueban tres implicaciones que permiten verificar la equivalencia de las afirmaciones:  $a) \Rightarrow b), b) \Rightarrow c), c) \Rightarrow a)$ .

$a) \Rightarrow b)$ . Dado que  $f$  es una isometría en  $\mathbb{R}^n$  y  $f(0) = 0$ , entonces

$$\|x\|^2 = d^2(x, 0) = d^2(f(x), f(0)) = d^2(f(x), 0) = \|f(x)\|^2 \text{ para todo } x \in \mathbb{R}^n$$

Por consiguiente

$$\langle x, x \rangle = \langle f(x), f(x) \rangle \tag{1}$$

Además, teniendo en cuenta la Definición 2.2.1 y (1) se tiene

$$\|x - y\|^2 = \|f(x) - f(y)\|^2 \tag{2}$$

Del lado izquierdo de la igualdad (2)

$$\begin{aligned} \|x - y\|^2 &= \langle x - y, x - y \rangle \\ &= \langle x - y, x \rangle - \langle x - y, y \rangle \\ &= \langle x, x \rangle - \langle y, x \rangle - \langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle \\ &= \|x\|^2 - 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2. \end{aligned}$$

De manera similar, el lado derecho de la igualdad (2)

$$\|f(x) - f(y)\|^2 = \|f(x)\|^2 - 2\langle f(x), f(y) \rangle + \|f(y)\|^2$$

Por consiguiente, igualando los resultados del lado izquierdo y del lado derecho de (2) se tiene que

$$\|x\|^2 - 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2 = \|f(x)\|^2 - 2\langle f(x), f(y) \rangle + \|f(y)\|^2$$

Puesto que  $\|x\| = \|f(x)\|$  para todo  $x \in \mathbb{R}^n$ , se llega a la igualdad:

$$\langle x, y \rangle = \langle f(x), f(y) \rangle$$

probando lo requerido.

b)  $\Rightarrow$  c) Sea  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  una función que preserva el producto punto de  $\mathbb{R}^n$ , el conjunto  $\{f(e_i)\}_{i=1}^n$  es ortonormal, por consiguiente una base de  $\mathbb{R}^n$ . Sea  $U$  la matriz cuyas  $i$ -ésimas columna  $U_i$  es tal que  $U_i = f(e_i)$  para  $i = 1, 2, \dots, n$ , así, por Teorema 2.2.9,  $U \in O_n$ .

Ahora, se verifica que  $f(x) = Ux$  para todo  $x \in \mathbb{R}^n$ . Por la definición de la matriz  $U$  se tiene que

$$Ux = (U_1, U_2, \dots, U_n) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 U_1 + x_2 U_2 + \dots + x_n U_n = \sum_{i=1}^n x_i f(e_i)$$

Por el otro lado se puede escribir  $f(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i f(e_i)$ , ya que  $\{f(e_i)\}_{i=1,2,\dots,n}$  es base.

Además, por la hipótesis con  $y = e_j$  se obtiene

$$\langle f(x), f(e_j) \rangle = \langle x, e_j \rangle \quad (3)$$

Al calcular el lado izquierdo de la igualdad (3) se tiene

$$\begin{aligned} \langle f(x), f(e_j) \rangle &= \langle \sum_{i=1}^n \alpha_i f(e_i), f(e_j) \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \alpha_i \langle f(e_i), f(e_j) \rangle \\ &= \alpha_j \langle f(e_j), f(e_j) \rangle \text{ por } \{f(e_i)\}_{i=1}^n \text{ ser ortonormal} \\ &= \alpha_j. \end{aligned}$$

Al calcular el lado derecho de la igualdad (3) se obtiene

$$\begin{aligned} \langle x, e_j \rangle &= x_j \langle e_j, e_j \rangle, \text{ por } \{e_i\}_{i=1}^n \text{ ser ortonormal} \\ &= x_j \end{aligned}$$

Así,  $\alpha_i = x_i$  para todo  $i = 1, 2, \dots, n$ . Por tanto,  $Ux = f(x)$ .

c)  $\Rightarrow$  a)

Sea  $U \in O_n$  y  $f(x) = Ux$ , al evaluar esta igualdad en  $x = 0$  se identifica  $f(0) = 0$ .

Ahora, se verifica que  $f \in \mathbf{Iso}(n)$ , esto es:  $\|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|$ , en efecto:

$$\begin{aligned}
\|f(x) - f(y)\|^2 &= \langle f(x) - f(y), f(x) - f(y) \rangle \\
&= \langle f(x) - f(y), f(x) \rangle - \langle f(x) - f(y), f(y) \rangle \\
&= \langle f(x), f(x) \rangle - \langle f(y), f(x) \rangle - \langle f(x), f(y) \rangle + \langle f(y), f(y) \rangle \\
&= \langle Ux, Ux \rangle - \langle Uy, Ux \rangle - \langle Ux, Uy \rangle + \langle Uy, Uy \rangle \\
&= \langle x, x \rangle - \langle y, x \rangle - \langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle.
\end{aligned}$$

Además

$$\begin{aligned}
\|x - y\|^2 &= \langle x - y, x - y \rangle \\
&= \langle x - y, x \rangle - \langle x - y, y \rangle \\
&= \langle x, x \rangle - \langle y, x \rangle - \langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle.
\end{aligned}$$

Restando las dos expresiones se obtiene  $\|f(x) - f(y)\|^2 - \|x - y\|^2 = 0$ . Por lo tanto,  $f \in \mathbf{Iso}(n)$ .

□

Hasta el momento en este documento se han estudiado resultados de isometrías en  $\mathbb{R}^n$ , se prosigue con un teorema que afirma que todas las isometrías de  $\mathbb{R}^n$  se identifican con una matriz ortogonal y una traslación, lo cual permite concluir que el conjunto  $\mathbf{Iso}(n)$  con la composición de funciones es un grupo.

Dado  $b \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ , se denota mediante  $t_b : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  la traslación dada por  $b$ ,

$$t_b(x) = x + b.$$

Las traslaciones son isometrías que no dejan fijo al origen, pero preservan las distancias entre puntos, en efecto

$$d(t_b(x), t_b(y)) = \|(x + b) - (y + b)\| = \|x - y\| = d(x, y).$$

Además cumplen que  $t_{b_1} \circ t_{b_2} = t_{b_1+b_2}$ , también  $t_0 = \text{Id}$  y en consecuencia  $t_b^{-1} = t_{-b}$ , de lo cual el conjunto de transformaciones forma un subgrupo del grupo  $\mathbf{Iso}(n)$ .

**Teorema 2.2.11.** *Para cada isometría  $f$  de  $\mathbb{R}^n$  existe una matriz ortogonal  $U_f$  y un vector  $b_f$  tal que  $f(x) = t_{b_f}(U_f \cdot x)$  para todo  $x \in \mathbb{R}^n$ .*

*Demostración.* Para empezar, se considera  $b_f = f(0)$  lo cual permite garantizar que la isometría  $t_{-b_f} \circ f$  deja fijo al origen, en efecto:

$$\begin{aligned} t_{-b_f} \circ f(0) &= t_{-b_f}(b_f) \\ &= b_f - b_f \\ &= 0. \end{aligned}$$

Usando el Teorema 2.2.10, existe  $U_f \in O_n$  tal que

$$(t_{-b_f} \circ f)(x) = U_f \cdot x \text{ para todo } x \in \mathbb{R}^n.$$

Así, aplicando  $t_{b_f}$  en ambos lados de la igualdad anterior se obtiene lo requerido por demostrar:

$$t_{b_f} \circ t_{-b_f} \circ f(x) = \text{Id} \circ f(x) = f(x) = t_{b_f}(U_f \cdot x).$$

□

Del anterior teorema se puede inferir que las isometrías son invertibles y por tanto, también son sobreyectivas, hecho que muestra que  $\mathbf{Iso}(n)$  es un grupo, tal y como se menciona al principio de esta sección.

**Observación 4:**

4.1) Dada una isometría  $f$ , la elección de su matriz  $U_f$  y su vector  $b_f$  asociados es única.

4.3) Si una isometría  $f$  es una traslación, la matriz  $U_f$  es la matriz  $I_n$ .

4.3) Como  $\det U_f = \pm 1$ , se puede definir el signo de  $f$  así:

$$sg(f) := \det U_f.$$

Se dice que  $f$  preserva la orientación si  $sg(f) = 1$  e invierte la orientación si  $sg(f) = -1$ .

3) Por el Teorema 2.2.11, si  $f_1$  y  $f_2$  son isometrías, entonces  $sg(f_1 \circ f_2) = sg(f_1) \cdot sg(f_2)$ , en efecto:

$$\begin{aligned} f_1(f_2(x)) &= U_{f_1}f_2(x) + b_{f_1} \\ &= U_{f_1}(U_{f_2}x + b_{f_2}) + b_{f_1} \\ &= (U_{f_1}U_{f_2})x + (U_{f_1}b_{f_2} + b_{f_1}). \end{aligned}$$

Dicho lo anterior, se examinarán dos tipos de isometrías de  $\mathbb{R}^2$  además de la traslación, las funciones  $\rho_\theta$  que es la rotación alrededor del punto  $(0,0)$  y  $\gamma_l$  la **reflexión** con respecto a la recta  $l$  en  $\mathbb{R}^2$  que pasa por el punto  $(0,0)$  y forma un ángulo  $\psi$  con el eje  $x$ . Estas funciones van de  $\mathbb{R}^2$  en  $\mathbb{R}^2$  tal que para  $x \in \mathbb{R}^2$  su imágenes son  $\rho_\theta(x) = U_\theta x$  y  $\gamma_l(x) = U_l x$  con  $U_\theta$  y  $U_l$  son matrices de tamaño  $2 \times 2$  respectivamente:

$$U_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sen\theta \\ \sen\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \text{ y } U_l = \begin{pmatrix} \cos 2\psi & \sen 2\psi \\ \sen 2\psi & -\cos 2\psi \end{pmatrix}$$

Por tanto, usando el Teorema 2.2.10 ítem c), las funciones  $\rho_\theta$  y  $\gamma_l$  son isometrías en  $\mathbb{R}^2$  ya que sus columnas son ortonormales, mas aún estas isometrías permiten clasificar en dos tipos las isometrías de  $\mathbb{R}^2$  que dejan fijo el origen de coordenadas  $(0,0)$ , el cual en adelante se expresa como  $\mathbf{0}$ .

**Teorema 2.2.12.** a) Para las rotaciones en  $\mathbb{R}^2$  alrededor del punto  $0 \in \mathbb{R}^2$  se tiene la igualdad de conjuntos  $\{ \rho_\theta \mid \theta \in \mathbb{R} \} = \{ f \mid f \text{ es isometría en } \mathbb{R}^2, f(0) = 0, sg(f) = 1 \}$

b) Para las reflexiones con respecto a un eje  $l$  que pasa por el punto  $0 \in \mathbb{R}^2$  se tiene la igualdad de conjuntos  $\{ \gamma_l \mid 0 \in l \} = \{ f \mid f \text{ es isometría en } \mathbb{R}^2, f(0) = 0, sg(f) = -1 \}$

*Demostración.* Se verifican las igualdades de los ítems a) y b).

a) •  $\{ \rho_\theta \mid \theta \in \mathbb{R} \} \subseteq \{ f \mid f \text{ es isometría en } \mathbb{R}^2, f(0) = 0, sg(f) = 1 \}$ .

Esta contención se demuestra a partir del Teorema 2.2.10 con la matriz  $U_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sen\theta \\ \sen\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ , se tiene que  $\det(U_\theta) = sg(\rho_\theta) = 1$ .

•  $\{ f \mid f \text{ es isometría en } \mathbb{R}^2, f(0) = 0, sg(f) = 1 \} \subseteq \{ \rho_\theta \mid \theta \in \mathbb{R} \}$ .

Por Teorema 2.2.10 si  $f \in \mathbf{Iso}(2)$  y  $f(0) = 0$  existe una matriz ortogonal  $U$  tal que  $f(x) = Ux$ , si además se considera que  $sg(f) = 1$  es decir  $\det U = 1$  se garantiza que  $f$  es una rotación en  $\mathbb{R}^2$  alrededor del punto  $0$ , en efecto, por ser  $U$  ortogonal, si la primera columna de  $U$  denotada  $U_1$  es un vector unitario, esto es,  $\|U_1\|_2 = 1$ ; y por tanto existe una rotación  $\rho_\theta(U_1) = e_1$ . Como  $\rho_\theta(U_1) = \rho_\theta(U \cdot e_1) = (\rho_\theta \cdot U)_1$ , donde se ha llamado del mismo modo a la rotación que a la matriz que le representa,

la primera columna de  $\rho_{\hat{\theta}} \cdot U$  es  $e_1$ . La matriz  $\rho_{\hat{\theta}} \cdot U$  según lo anterior, es ortogonal y perteneciente a  $SO_2$  (por serlo tanto  $\rho_{\theta}$  como  $U$ ) así

$$(\rho_{\hat{\theta}} \cdot U)(\rho_{\hat{\theta}} \cdot U)^t = I_2 \text{ y por lo anterior } \rho_{\hat{\theta}} \cdot U = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & y \end{pmatrix} \text{ de lo cual}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ de manera que:}$$

$$1 + x^2 = 1, \text{ entonces } x^2 = 0 \text{ por lo cual } x = 0.$$

$$0 + y^2 = 1, \text{ entonces } y^2 = 1 \text{ por lo cual } y = \pm 1, \text{ además ya que } sg(f) = 1, \text{ entonces } y = 1.$$

Se concluye que la matriz  $U = \rho_{\hat{\theta}}^{-1}$  la matriz de rotación:  $U = \begin{pmatrix} \cos \hat{\theta} & \text{sen} \hat{\theta} \\ -\text{sen} \hat{\theta} & \cos \hat{\theta} \end{pmatrix}$  esto es  $f = \rho_{\theta}$ .

De este resultado se sigue que la inversa de una rotación es otra rotación.

$$b) \bullet) \{ f \mid f \text{ es isometría en } \mathbb{R}^2, f(0) = 0, sg(f) = -1 \} \subseteq \{ \gamma_l \mid 0 \in l \}$$

Haciendo un proceso análogo al inciso a) pero teniendo en cuenta  $sg(f) = -1$ , se

$$\text{llega a que } \rho_{\hat{\theta}} \cdot U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \text{ De lo cual}$$

$$\begin{aligned} U &= \rho_{\hat{\theta}}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(-\theta) & -\text{sen}(-\theta) \\ \text{sen}(-\theta) & \cos(-\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(-\theta) & \text{sen}(-\theta) \\ \text{sen}(-\theta) & -\cos(-\theta) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Por lo tanto  $U$  es una matriz de reflexión con respecto a una recta que pasa por el 0 de ángulo  $\psi = -\theta/2$ .

Así,  $U = \rho_{\hat{\theta}}^{-1} \gamma = \rho_{\theta} \gamma$  con  $\theta = -\hat{\theta}$  y  $\gamma$  la reflexión con respecto al eje  $x$  representado

$$\text{por la matriz } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

□

### 2.2.1. Reflexiones, traslaciones y rotaciones

En  $\mathbb{R}^2$  también se cuenta con funciones que permiten rotar al rededor de cualquier punto  $p \in \mathbb{R}^2$  y reflexiones con respecto a una recta  $l$  que no necesariamente pase por el origen de coordenadas, las cuales se denotan:

- $\rho_\theta^p$  la **rotación** en un ángulo  $\theta$  en sentido antihorario al rededor del punto  $p$  en  $\mathbb{R}^2$ .
- $\gamma_r$  la **reflexión** con respecto a la recta  $r$  en  $\mathbb{R}^2$ .

Para lo cual se cumplen las siguientes igualdades que se denotan como (4)

- $\rho_\theta^p = t_p \circ \rho_\theta \circ t_{-p}$

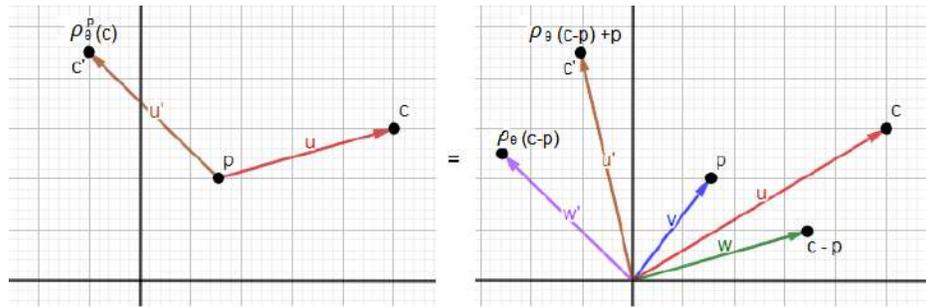


Imagen 1. Representación gráfica de una rotación sobre un punto fijo  $p$ .

Fuente. Autoría propia (GeoGebra)

- $\gamma_r = t_b \circ \gamma_l \circ t_{-b}$

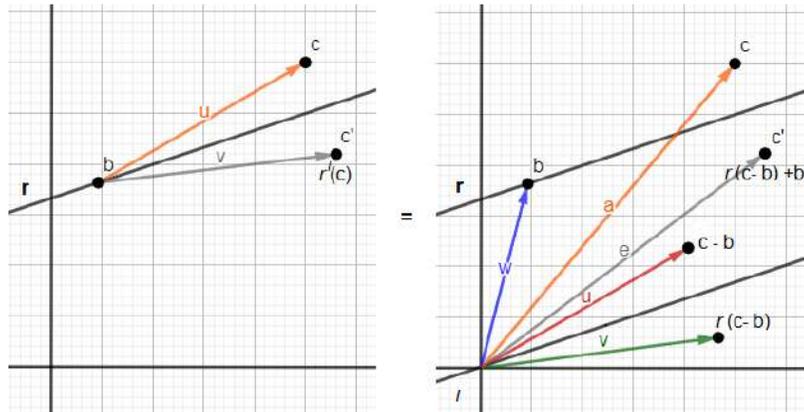


Imagen 2. Representación gráfica de una reflexión sobre una recta  $r$ .

Fuente. Autoría propia (GeoGebra)

donde  $b$  es un punto de  $r$  y por lo tanto  $l$  es la recta paralela a  $r$  que pasa por el cero ( $\mathbf{0}$ ), se deduce que  $\rho_\theta^p$  y  $\gamma_r$  también son isometrías.

Se probará que las traslaciones  $t_b$ ; las rotaciones  $\rho_\theta$  alrededor del  $\mathbf{0}$  y la reflexión  $\gamma$  alrededor del eje  $x$ , generan a  $\mathbf{Iso}(2)$ .

**Teorema 2.2.13.** *Sea  $f \in \mathbf{Iso}(2)$ . Si  $sg(f) = 1$  entonces,  $f$  es de la forma  $t_b\rho_\theta$ . Si  $sg(f) = -1$  entonces,  $f$  es de la forma  $t_b\rho_\theta\gamma$ . Además su escritura está expresada de forma única.*

*Demostración.* Por el Teorema 2.2.11 se sabe que toda isometría  $f$  es de la forma  $t_b \cdot U$  con  $U \in O_2$ , considerando  $t_b$  como la matriz y la traslación del mismo modo por facilidad en la escritura:

- a) Si  $\det U = 1$  por el Teorema 2.2.12 aplicado a  $U$  se tiene que  $U = \rho_\theta$  y por tanto  $f = t_b \circ \rho_\theta$ .
- b) Si  $\det U = -1$  entonces, nuevamente por el Teorema 2.2.12 aplicado a  $U = \rho_\theta \circ \gamma$  y por tanto  $f = t_b \circ \rho_\theta \circ \gamma$ .

Para demostrar la unicidad:

- a) Se considera  $f = t_b \circ \rho_{\theta_1}$  y  $f = t_b \circ \rho_{\theta_2}$  así operando a izquierda por  $t_b^{-1}$  se tiene que  $\rho_{\theta_1} = \rho_{\theta_2}$  luego  $\theta_1 = \theta_2$ .
- b) Se considera  $f = t_b \circ \rho_{\theta_1} \circ \gamma$  y  $f = t_b \circ \rho_{\theta_2} \circ \gamma$  así al operar a izquierda por  $t_b^{-1}$  y derecha por  $\gamma^{-1}$  se tiene que  $\rho_{\theta_1} = \rho_{\theta_2}$  luego  $\theta_1 = \theta_2$ .

□

Las siguientes propiedades, que se denotan como (5), son de traslaciones  $t$ , rotaciones  $\rho$  y la reflexión  $\gamma$ , de las dos últimas funciones se usa su representación matricial:

- $t_{b_1} \circ t_{b_2} = t_{(b_1+b_2)}$ . Para  $x \in \mathbb{R}^2$  se tiene

$$\begin{aligned}
 (t_{b_1} \circ t_{b_2})(x) &= t_{b_1}(t_{b_2}(x)) \\
 &= t_{b_1}(b_2 + x) \\
 &= b_1 + (b_2 + x) \\
 &= (b_1 + b_2) + x \\
 &= t_{(b_1+b_2)}(x)
 \end{aligned}$$

Así  $(t_b)^{-1} = t_{-b}$

▪  $\rho_{\theta_1} \circ \rho_{\theta_2} = \rho_{(\theta_1 + \theta_2)}$

Se consideran las matrices que representan a las funciones  $\rho_{\theta_1}$ ,  $\rho_{\theta_2}$  y  $\rho_{\theta_1} \circ \rho_{\theta_2}$  respecti-

vamente:  $U_{\theta_1} = \begin{pmatrix} \cos\theta_1 & -\text{sen}\theta_1 \\ \text{sen}\theta_1 & \cos\theta_1 \end{pmatrix}$ ,  $U_{\theta_2} = \begin{pmatrix} \cos\theta_2 & -\text{sen}\theta_2 \\ \text{sen}\theta_2 & \cos\theta_2 \end{pmatrix}$  y

$$U_{\rho_{\theta_1} \circ \rho_{\theta_2}} = \begin{pmatrix} \cos(\theta_1 + \theta_2) & -\text{sen}(\theta_1 + \theta_2) \\ \text{sen}(\theta_1 + \theta_2) & \cos(\theta_1 + \theta_2) \end{pmatrix}$$

conociendo que  $\rho_{\theta_1} \circ \rho_{\theta_2}$  tiene matriz  $U_{\theta_1}U_{\theta_2}$ , basta probar que  $U_{\theta_1}U_{\theta_2} = U_{\rho_{\theta_1} \circ \rho_{\theta_2}}$  (en adelante se omitirá tanto detalle y se trabaja con las matrices que representan las funciones).

Usando las fórmulas de seno y coseno de la suma y resta de ángulos.

$$\begin{aligned} U_{\theta_1}U_{\theta_2} &= \begin{pmatrix} \cos\theta_1 & -\text{sen}\theta_1 \\ \text{sen}\theta_1 & \cos\theta_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta_2 & -\text{sen}\theta_2 \\ \text{sen}\theta_2 & \cos\theta_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos\theta_1\cos\theta_2 - \text{sen}\theta_1\text{sen}\theta_2 & -\cos\theta_1\text{sen}\theta_2 - \text{sen}\theta_1\cos\theta_2 \\ \text{sen}\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\text{sen}\theta_2 & -\text{sen}\theta_1\text{sen}\theta_2 + \cos\theta_1\cos\theta_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\theta_1 + \theta_2) & -\text{sen}(\theta_1 + \theta_2) \\ \text{sen}(\theta_1 + \theta_2) & \cos(\theta_1 + \theta_2) \end{pmatrix} \\ &= U_{(\theta_1 + \theta_2)} \end{aligned}$$

Así  $(\rho_{\theta})^{-1} = \rho_{-\theta}$

▪  $\gamma_l^2 = Id$

Se considera la matriz que representa a  $U_l = \begin{pmatrix} \cos 2\psi & \text{sen} 2\psi \\ \text{sen} 2\psi & -\cos 2\psi \end{pmatrix}$  entonces

$$\begin{aligned}
U_l U_l &= \begin{pmatrix} \cos 2\psi & \operatorname{sen} 2\psi \\ \operatorname{sen} 2\psi & -\cos 2\psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos 2\psi & \operatorname{sen} 2\psi \\ \operatorname{sen} 2\psi & -\cos 2\psi \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos^2 2\psi + \operatorname{sen}^2 2\psi & \cos 2\psi \operatorname{sen} 2\psi - \cos 2\psi \operatorname{sen} 2\psi \\ \operatorname{sen} 2\psi \cos 2\psi - \operatorname{sen} 2\psi \cos 2\psi & \cos^2 2\psi + \operatorname{sen}^2 2\psi \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= I_2
\end{aligned}$$

Así  $(\gamma_l)^{-1} = \gamma_l$  y en particular  $\gamma^2 = Id$  (la reflexión sobre el eje  $x$ , tomando  $\psi = 0$ )

- $\gamma \circ \rho_\theta = \rho_{-\theta} \circ \gamma$

$$\begin{aligned}
U_x \circ U_\theta &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\operatorname{sen} \theta \\ \operatorname{sen} \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos \theta & -\operatorname{sen} \theta \\ -\operatorname{sen} \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
U_{-\theta} U_x &= \begin{pmatrix} \cos -\theta & -\operatorname{sen} -\theta \\ \operatorname{sen} -\theta & \cos -\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos \theta & -\operatorname{sen} \theta \\ -\operatorname{sen} \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

- $\rho_\theta \circ \gamma$ , es la reflexión respecto a la recta que pasa por el origen de coordenadas en  $\mathbb{R}^2$  y forma un ángulo de  $\theta/2$  con el eje  $x$ . En efecto:

$$\begin{aligned}
U_\theta U_x &= \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

- $\rho_\theta \circ t_b = t_{\hat{b}} \circ \rho_\theta$ ,  $\hat{b} = \rho_\theta(b)$ , en efecto

$$\rho_\theta \circ t_b(x) = U_\theta(x + b) = U_\theta x + U_\theta b = \rho_\theta(x) + \rho_\theta(b) = t_{\rho_\theta(b)} \circ \rho_\theta$$

- $\gamma \circ t_b = t_{\hat{b}} \circ \gamma$ ,  $\hat{b} = \gamma(b)$  en efecto trabajando por componentes.

$$\begin{aligned}
\gamma \circ t_b(x) &= \gamma(x + b) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 + b_1 \\ x_2 + b - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + b_1 \\ -x_2 - b_2 \end{pmatrix} \\
t_{\gamma(b)} \circ \gamma(x) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} n \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + b_1 \\ -x_2 - b_2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

**Teorema 2.2.14.** *Todas las isometrías en  $\mathbb{R}^2$  que preservan orientación son bien traslaciones o bien rotaciones (no necesariamente alrededor del origen), mientras que todas las que invierten orientación son la composición de una reflexión  $\gamma_r$  y una traslación por un vector paralelo a  $r$  (a esta clase de isometría se le llama reflexión deslizante); en el caso de tomar como vector de traslación al vector nulo, se obtiene una reflexión.*

*Demostración.* Sea  $f$  una isometría en  $\mathbb{R}^2$  con  $sg(f) = 1$  es decir, preserva orientación, y suponiendo que  $f$  no es una traslación, se debe probar que  $f$  es una rotación. Por el Teorema 2.2.13 se sabe que  $f$  es de la forma  $t_b \circ \rho_\theta$  con  $\theta \neq 0$ . Para identificar que  $f$  es una rotación se debe tener un punto fijo es decir un elemento  $p \in \mathbb{R}^2$  tal que:  $f(p) = U_f(p) + b = p$ , de lo cual se tiene el sistema matricial  $I_2(p) - U_f(p) = b$  esto es  $(I_2 - U_f)p = b$  el cual tiene única solución, ya que

$$\begin{aligned}
\det(I_2 - U_f) &= \det \begin{pmatrix} 1 - \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & 1 - \cos\theta \end{pmatrix} \\
&= (1 - \cos\theta)^2 + \operatorname{sen}^2\theta \\
&= 1 - 2\cos\theta + \cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta \\
&= 2(1 - \cos\theta)
\end{aligned}$$

pues así  $\det(I_2 - U_f) \neq 0$  ya que  $\theta \neq 0$ .

Además, se tiene que  $(I_2 - U_f)p = b$  si y solo si  $p + \rho_\theta(-p) = b$  ya que  $-U_f(p) = U_f(-p)$ , y por lo tanto  $t_p \circ t_{\rho_\theta(-p)} = t_b$ .

Ya que  $\rho_\theta(-p) = U_f(-p) = -U_f(p) = b - p$ , entonces  $t_p \circ t_{\rho_\theta(-p)} = t_b$ . Finalmente usando la primera igualdad de (4) y la penúltima igualdad en (5):

$$\rho_\theta^p = t_p \circ \rho_\theta \circ t_{-p} = t_p \circ t_{\rho_\theta(-p)} \circ \rho_\theta = t_b \circ \rho_\theta = f$$

como se quería demostrar.

Ahora, sea  $f$  una isometría en  $\mathbb{R}^2$  con  $sg(f) = -1$  como se observó en (5),  $f$  es de la forma  $t_b \circ \rho_\theta \circ \gamma$ . De lo cual para  $b = 0$  se tiene que  $f = \rho_\theta \circ \gamma$  es una reflexión con respecto a una recta  $l$  que pasa por el origen y forma un ángulo de  $\theta/2$  con el eje  $x$ .

Si  $b \neq 0$ , entonces se descompone como  $b = b_1 + b_2$  donde  $b_1$  es la proyección de  $b$  sobre la recta  $l$  y  $b_2$  es la proyección de  $b$  sobre la recta perpendicular a  $l$  que pasa por el origen denotada por  $l^\perp$ , considerando la base ortonormal  $u = (\cos(\theta/2), \sin(\theta/2))$ ,  $u^\perp = (-\sin(\theta/2), \cos(\theta/2))$  se tiene que:

$b_1 = (b \cdot u)u$  es paralela a la recta  $l$  y

$b_2 = (b \cdot u^\perp)u^\perp$  es ortogonal a la recta  $l$

de tal forma que  $f(x) = Ux + b_1 + b_2 = (Ux + b_2) + b_1 = t_{b_1} \circ t_{b_2} \circ \rho_\theta \circ \gamma$ . Se verifica a continuación que  $t_{b_2} \circ \rho_\theta \circ \gamma = t_{b/2} \circ \gamma_l \circ t_{-b/2}$ , usando algunas de las propiedades (5) se obtiene las siguientes equivalencias:

$$\begin{aligned} t_{b/2} \circ \rho_\theta \circ \gamma \circ t_{-b/2} &= t_{-b/2} \circ \rho_\theta \circ t_{\gamma(-b/2)} \\ &= t_{b/2} \circ t_{\rho_\theta \circ \gamma(-b/2)} \circ \rho_\theta \circ \gamma \\ &= t_{b/2 + \rho_\theta \circ \gamma(-b/2)} \circ \rho_\theta \circ \gamma \end{aligned}$$

de lo cual para garantizar igualdad  $t_{b_2} \circ \rho_\theta \circ \gamma = t_{b/2} \circ \gamma_l \circ t_{-b/2} = t_{b/2 + \rho_\theta \circ \gamma(-b/2)} \circ \rho_\theta \circ \gamma$ , solo se necesita verificar que  $t_{b_2} = t_{b/2 + \rho_\theta \circ \gamma(-b/2)}$ , que es equivalente a probar que  $b_2 = b/2 - U(b/2)$ ,

ya que  $\rho_\theta \gamma(x) = Ux$ , así se reduce a probar que  $2b_2 = b - U(b/2)$ . Al considerar  $b = (z, y)$ :

$$\begin{aligned} b - U(b/2) &= \begin{pmatrix} z \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\text{sen}(\theta) \\ \text{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} z(1 - \cos\theta) + y\text{sen}\theta \\ -z\text{sen}\theta + y(1 + \cos\theta) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Por otra parte

$$\begin{aligned} 2b_2 &= 2 \left\langle \begin{pmatrix} -\text{sen}(\theta/2) \\ \cos(\theta/2) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z \\ y \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} -\text{sen}(\theta/2) \\ \cos(\theta/2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} z2\text{sen}^2(\theta/2) + y2\cos(\theta/2)\text{sen}(\theta/2) \\ -z2\text{sen}(\theta/2)\cos(\theta/2) + y2\cos^2(\theta/2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} z(1 - \cos\theta) + y\text{sen}\theta \\ -z\text{sen}\theta + y(1 - \cos\theta) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

la última igualdad es cierta a partir de tres identidades trigonoméricas básicas. Por lo tanto

$$f = t_b \circ \rho_\theta \circ \gamma = t_{b_1} \circ t_{b/2} \circ \gamma_l \circ t_{-b/2} = t_{b_1} \circ \gamma_L$$

donde  $L$  es paralela a  $l$  (por (4)) y como  $b_1$  es la proyección de  $b$  sobre  $L$  se cumple que  $b_1$  es paralelo a  $l$ , obteniendo lo requerido. □

### 2.2.2. Grupos de Friso

Los frisos se representan bajo la forma de bandas decorativas entre bordes paralelos que continúan en ambos sentidos, los motivos que los componen se repiten a igual distancia entre ellos.

A continuación, se exhibe un ejemplo de un friso encontrado en los hipogeos de Tierradentro en el departamento del Cauca.



Imagen 3. Friso encontrado dentro de los hipogeos de Tierradentro.

Fuente. Autoría propia (GeoGebra)

Para definir de manera rigurosa un friso, se cuenta con las siguientes definiciones.

**Definición 2.2.7.** Sea  $F \subseteq \mathbb{R}^2$ . Se define el grupo de simetrías de  $F$  como

$$\text{Sim}(F) := \{f \in \mathbf{Iso}(2) : f(F) = F\}.$$

**Ejemplo 6:** Sea  $F = \{(0, y), y \in \mathbb{R}\}$ , entonces  $\gamma(F) = F$ , así  $\gamma \in \text{Sim}(F)$ , además si  $w \in \mathbb{R}$  entonces  $t_{(0,w)}(F) = F$ , así  $t_{(0,w)} \in \text{Sim}(F)$ .

**Definición 2.2.8.** El conjunto de traslación de  $\text{Sim}(F)$  se define como el conjunto

$$L_{\text{Sim}(F)} := \{b \in \mathbb{R}^2 : t_b \in \text{Sim}(F)\}.$$

En el ejemplo anterior  $(0, a) \in L_{\text{Sim}(F)}$ . Para cualquier  $a \in \mathbb{R}$

**Definición 2.2.9.** Un subconjunto  $F$  de  $\mathbb{R}^2$  es un friso si existe  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^2 - \{0\}$  tal que

$$L_{\text{Sim}(F)} = \{n\mathbf{a} : n \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{Z}\mathbf{a}.$$

Los frisos contienen traslaciones en una sola dirección ya que, para todo  $b \in L_{\text{Sim}(F)}$  existe  $a \in \mathbb{R}^2 - \{0\}$  de forma que  $b = na$  para algún  $n \in \mathbb{Z}$ .

**Definición 2.2.10.** Un subgrupo  $\mathcal{G}$  de  $\mathbf{Iso}(2)$  es un grupo-friso si existe un friso  $F$  tal que  $\mathcal{G} = \text{Sim}(F)$ .

De la Imagen 1. se identifica que las únicas isometrias que deja invariante el friso son una traslación y cualquier múltiplo entero de ella.

**Teorema 2.2.15.** Sea  $F$  un friso tal que  $L_{\text{Sim}(F)} = \{n\mathbf{a} : n \in \mathbb{Z}\}$ .

- i. Si  $t_{\mathbf{b}\rho\theta} \in \text{Sim}(F)$ , entonces  $\theta = k\pi$  para algún  $k \in \mathbb{Z}$ .
- ii. Si  $\gamma_l \in \text{Sim}(F)$ , entonces  $l$  es paralela o perpendicular a  $\mathbf{a}$ .

iii. Si  $t_{\mathbf{b}}\gamma_l \in \text{Sim}(F)$  con  $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$  en la recta  $l$ , entonces  $l$  es paralela a  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{b} = \frac{k}{2}\mathbf{a}$  para algún  $k \in \mathbb{Z}$ .

*Demostración.* Sean  $c \in \mathbb{R}^2$  y  $t_{\mathbf{b}}\rho_\theta \in \text{Sim}(F)$  considerando las últimas propiedades en (5) se tiene:

$$\begin{aligned}
(t_{\mathbf{b}} \circ \rho_\theta) \circ t_{\mathbf{c}} \circ (t_{\mathbf{b}} \circ \rho_\theta)^{-1} &= t_{\mathbf{b}} \circ \rho_\theta \circ t_{\mathbf{c}} \circ \rho_\theta^{-1} \circ t_{-\mathbf{b}} \\
&= t_{\mathbf{b}} \circ t_{\hat{\mathbf{c}}} \circ \rho_\theta \circ \rho_\theta^{-1} \circ t_{-\mathbf{b}}; \quad \hat{\mathbf{c}} = \rho_\theta(\mathbf{c}) \\
&= t_{\mathbf{b}} \circ t_{\hat{\mathbf{c}}} \circ t_{-\mathbf{b}} \\
&= t_{\mathbf{b} + \rho_\theta(\mathbf{c}) - \mathbf{b}} \\
&= t_{\rho_\theta(\mathbf{c})}. \tag{6}
\end{aligned}$$

De lo cual, si  $t_{\mathbf{c}} \in \text{Sim}(F)$  también  $t_{\rho_\theta(\mathbf{c})} \in \text{Sim}(F)$ , y por lo tanto deben ser  $\mathbf{c}$ ,  $\mathbf{c} = na$  y  $\rho_\theta(\mathbf{c})$ ,  $\rho_\theta(\mathbf{c}) = ma$  paralelos, de donde  $\theta = k\pi$  para algún  $k \in \mathbb{Z}$ .

Sea  $c \in \mathbb{R}^2$  y  $\gamma_l = t_{\mathbf{b}}\rho_\theta\gamma$ , nuevamente considerando las últimas propiedades en (5) se tiene:

$$\begin{aligned}
(t_{\mathbf{b}} \circ \rho_\theta \circ \gamma) \circ t_{\mathbf{c}} \circ (t_{\mathbf{b}} \circ \rho_\theta \circ \gamma)^{-1} &= t_{\mathbf{b}} \circ \rho_\theta \circ \gamma \circ t_{\mathbf{c}} \circ \gamma^{-1} \circ \rho_{-\theta} \circ t_{-\mathbf{b}} \\
&= t_{\mathbf{b}} \circ \rho_\theta \circ t_{\hat{\mathbf{c}}} \circ \gamma \circ \gamma^{-1} \circ \rho_{-\theta} \circ t_{-\mathbf{b}}; \quad \hat{\mathbf{c}} = \gamma(\mathbf{c}) \\
&= t_{\mathbf{b}} \circ t_{\hat{\mathbf{c}}} \circ \rho_\theta \circ \gamma \circ \gamma^{-1} \circ \rho_{-\theta} \circ t_{-\mathbf{b}}; \quad \hat{\hat{\mathbf{c}}} = \rho_\theta(\gamma(\mathbf{c})) \\
&= t_{\mathbf{b}} \circ t_{\hat{\hat{\mathbf{c}}}} \circ t_{-\mathbf{b}} \\
&= t_{\hat{\hat{\mathbf{c}}}}. \tag{7}
\end{aligned}$$

Si  $t_{\mathbf{c}} \in \text{Sim}(F)$  también  $t_{\hat{\hat{\mathbf{c}}}} = t_{\rho_\theta \circ \gamma(\mathbf{c})} \in \text{Sim}(F)$ , esto es  $\mathbf{c}$  y  $\rho_\theta \circ \gamma(\mathbf{c})$  son paralelos, como se vió en [5]  $\rho_\theta\gamma$ , es la reflexión respecto a la recta  $\hat{l}$  que pasa por el origen de coordenadas en  $\mathbb{R}^2$  y forma un ángulo de  $\theta/2$  con el eje  $x$ , luego  $\rho_\theta \circ \gamma(\mathbf{c}) = \gamma_{\hat{l}}(\mathbf{c})$ , forman un ángulo  $0^\circ$  o de  $180^\circ$  es decir  $\hat{l}$  es paralela a  $\mathbf{a}$  o  $\hat{l}$  es perpendicular a  $\mathbf{a}$ , por lo que también debe ser  $l$  paralela a  $\mathbf{a}$  o  $l$  es perpendicular a  $\mathbf{a}$ .

Finalmente, si  $t_b \circ \gamma_l \in \text{Sim}(F)$  como  $b \in l$  entonces  $\gamma_l(b) = b$ , y por propiedades en (5), así

$$t_{\mathbf{b}} \circ \gamma_l \circ t_{\mathbf{b}} \circ \gamma_l = t_{\mathbf{b}} \circ t_{\gamma_l(\mathbf{b})} \gamma_l \circ \gamma_l = t_{2\mathbf{b}} \in \text{Sim}(F)$$

Se concluye que  $t_{2\mathbf{b}}$  es de la forma  $t_{k\mathbf{a}}$ , con  $k \in \mathbb{Z}$  y  $l$  es paralela a  $\mathbf{a}$ . □

**Teorema 2.2.16.** *Si  $F$  un friso, entonces existe una recta  $l_F$  tal que  $\text{Sim}(F) \subseteq \text{Sim}(l_F)$*

*Demostración.* Usando el anterior Teorema 2.2.15, se demostrará éste por casos:

*Caso 1:* Si  $Sim(F)$  no contiene ni rotaciones ni reflexiones, solo contiene reflexiones perpendiculares a  $\mathbf{a}$ : en este caso cualquier recta  $l_F$  paralela a  $\mathbf{a}$  cumple lo requerido.

*Caso 2:* Si  $Sim(F)$  contiene rotaciones por el teorema anterior se puede suponer que  $\rho_\pi \in Sim(F)$ . Se va a comprobar que sirve elegir  $l_F$  como la recta generada por  $\mathbf{a}$ . Es claro que cualquier reflexión perpendicular a  $\mathbf{a}$  la deja invariante. Además, cualquier reflexión deslizante  $t_{\frac{k}{2}\mathbf{a}} \circ \gamma_l$  (permitiendo  $k = 0$ ) debe cumplir  $l = l_F$ , pues de no ser así  $t_{\frac{k}{2}\mathbf{a}} \circ \gamma_l \circ \rho_{\frac{k}{2}\mathbf{a}} \circ \gamma_l \circ \rho_\pi$  sería una traslación perpendicular a  $\mathbf{a}$ , de lo que se deduce que  $t_{\frac{k}{2}\mathbf{a}} \circ \gamma_l \in Sim(l_F)$ . Por último, si  $\rho_\pi^{\mathbf{p}} = t_{2\mathbf{p}} \circ \rho_\pi$  es otra rotación en  $Sim(F)$ , debe ser también  $(t_{2\mathbf{p}} \circ \rho_\pi) \circ \rho_\pi = t_{2\mathbf{p}} \in Sim(F)$ , lo que implica que  $2\mathbf{p}$  es un múltiplo entero de  $\mathbf{a}$ , es decir que  $\mathbf{p} \in l_F$ , y por lo tanto  $t_{2\mathbf{p}} \circ \rho_\pi \in Sim(l_F)$ .

*Caso 3:*  $Sim(F)$  no contiene rotaciones pero sí contiene reflexiones deslizantes paralelas a  $\mathbf{a}$ : notar que solo puede haber una reflexión deslizante paralela a  $\mathbf{a}$  pues de haber dos, al multiplicarlas se obtendría una traslación no paralela a  $\mathbf{a}$ , de lo cual  $l_F = l$ .

Del anterior teorema, se tiene que cada friso tiene un eje salvo paralelismo, el cual se denotará  $l_F$ , en particular se considera el caso  $l_F$  es el eje  $x$  que permite definir un caso específico de grupos-friso.

□

**Definición 2.2.11.** Un grupo-friso  $\mathcal{G}$  se llama grupo-friso estandar si  $\mathcal{G}$  satisface que:

$$L_{\mathcal{G}} = \{n\mathbf{e}_1 | n \in \mathbb{Z}\} \text{ y } \mathcal{G} \subseteq Sim(\text{eje } x).$$

La siguiente definición permite establecer una relación de equivalencia sobre el conjunto de grupos subgrupos-friso de  $\mathbf{Iso}(2)$ .

**Definición 2.2.12.** Sea  $\alpha > 0$ , las funciones  $d_\alpha : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  definidas por  $d_\alpha(\mathbf{x}) = \alpha\mathbf{x}$  son estiramientos los cuales cumplen las siguientes propiedades:

i)  $d_1 = I$ ,

ii)  $d_\alpha \circ d_\beta = d_{\alpha\beta}$ , y por lo tanto  $d_\alpha^{-1} = d_{1/\alpha}$ ,

iii) Si  $f \in \mathbf{Iso}(2)$  es de la forma  $f(\mathbf{x}) = U\mathbf{x} + \mathbf{b}$  entonces

$$d_\alpha f(\mathbf{x}) = \alpha(U\mathbf{x}) + \alpha\mathbf{b} = U(\alpha\mathbf{x}) + \alpha\mathbf{b} = \hat{f}d_\alpha(\mathbf{x})$$

donde  $\hat{f} \in \mathbf{Iso}(2)$  está definida por  $\hat{f}(\mathbf{x}) = U\mathbf{x} + \alpha\mathbf{b}$ ,

iv) A pesar de no ser los estiramientos isometrías, el conjugado de una isometría por un estiramiento sigue siendo una isometría.

Al considerar el conjunto  $\Omega$  de todos los subgrupos-friso de  $\mathbf{Iso}(2)$  y definir ahí la relación  $\mathcal{G}_1 \sim \mathcal{G}_2 \Leftrightarrow$  existen  $\alpha > 0$  y  $f \in \mathbf{Iso}(2)$ , con  $sg(f) = 1$ , tales que, como conjuntos  $(d_\alpha \circ f)\mathcal{G}(d_\alpha \circ f)^{-1} = \mathcal{G}_2$ , específicamente: si  $h \in \mathcal{G}(d_\alpha \circ f) \circ h \circ (d_\alpha \circ f)^{-1} \in \mathcal{G}_2$ . Dado que  $\sim$  es una relación de equivalencia se puede hablar entonces del conjunto cociente  $\Omega / \sim$ .

Todo elemento de  $\Omega / \sim$  tiene un representante  $\mathcal{G}$  tal que  $L_{\mathcal{G}} = \{n\mathbf{e}_1 | n \in \mathbb{Z}\}$  y tal que  $\mathcal{G} \subseteq Sim(ejex)$ . En efecto, para ver esto basta con ver que el eje de todo friso puede ser llevado al eje  $x$ , para lo cual alcanza una isometría de signo positivo (que es una rotación), y que luego se puede hacer unitario su vector asociado  $\mathbf{a}$ , que también es posible mediante  $d_{\|\mathbf{a}\|_2}^{-1}$ . De lo cual un friso puede relacionar con un grupo-friso estándar.

Como se vió al inicio del estudio de transformaciones en  $\mathbb{R}^2$ , éstas forman un subgrupo de  $\mathbf{Iso}(n)$ , así en la siguiente proposición  $\mathcal{T}$  denota el subgrupo de  $\mathbf{Iso}(2)$  formado por las traslaciones.

**Proposición 2.3.2:** Si  $\mathcal{G}$  es un grupo-friso estándar entonces  $\mathcal{T} \cap \mathcal{G}$  es un subgrupo normal de  $\mathcal{G}$  y  $\mathcal{G}/(\mathcal{T} \cap \mathcal{G})$  tiene estructura de grupo.

*Demostración.* Ya que la intersección de dos subgrupos de un grupo es nuevamente un subgrupo, se considera  $t_c \in \mathcal{T} \cap \mathcal{G}$ . Si  $g \in \mathcal{G}$  puede ser  $g = t_{\mathbf{b}} \circ \rho_\theta$  o bien  $g = t_{\mathbf{b}} \circ \rho_\theta \circ \gamma$ , con  $\theta = k\pi$ . En ambos casos, por las igualdades (6) y (7), teniendo en cuenta que  $\gamma(\mathbf{c}) = \mathbf{c}$  por pertenecer  $c$  al eje  $x$  se llega a  $g \circ t_c \circ g^{-1} = t_{\pm\mathbf{c}} \in \mathcal{T} \cap \mathcal{G}$ , por tanto  $\mathcal{T} \cap \mathcal{G}$  es un grupo normal y del teorem 2.2.6 se sigue que  $\mathcal{G}/(\mathcal{T} \cap \mathcal{G})$  tiene estructura de grupo.

□

**Teorema 2.2.17.** *Sea  $\mathcal{G}$  un grupo-friso estándar. Entonces  $\mathcal{G}/(\mathcal{T} \cap \mathcal{G})$  es o bien el grupo trivial, o bien un grupo de orden 2 o bien isomorfo al grupo de Klein de 4 elementos.*

*Demostración.* Se verá las posibles formas que puede tener un elemento  $g \in \mathcal{G}$ . Por Teorema 2.2.11 con  $U = \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} \\ U_{21} & U_{22} \end{pmatrix} \in O_2$  y  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^2$  se tiene  $g(\mathbf{x}) = U\mathbf{x} + \mathbf{b}$  con  $\mathbf{b} = g(\mathbf{0})$ .

Considerando  $b = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)$ . Dado que  $g$  deja invariante al eje  $x$  es decir  $g(0) = (\mathbf{b}_1, 0)$ , entonces  $\mathbf{b}_2 = 0$ ; se puede escribir entonces  $\mathbf{b} = \mathbf{b}_1 \mathbf{e}_1$  donde  $\mathbf{e}_1$  es el vector unitario  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ . De lo anterior  $g(x) = Ux + b_1 \mathbf{e}_1$  y al evaluar  $g$  en  $\mathbf{e}_1$  se tiene  $g(\mathbf{e}_1) = U\mathbf{e}_1 + \mathbf{b}_1 \mathbf{e}_1 = U_1 + \mathbf{b}_1 \mathbf{e}_1$ , donde  $U_1$  es la primera columna de  $U$

$U_1 + \mathbf{b}_1 \mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} U_{11} \\ U_{21} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{11} + b_1 \\ U_{21} \end{pmatrix}$  y como  $g$  deja invariante el eje  $x$ , se tiene

que  $g(\mathbf{e}_1) = \begin{pmatrix} r \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $r \in \mathbb{R}$ , así  $U_{21} = 0$ , esto es  $U = \begin{pmatrix} U_{11} + b_1 & U_{12} \\ 0 & U_{22} \end{pmatrix}$  y como  $U$  es matriz ortogonal, entonces por Teorema 2.2.4  $\det(U) = \pm 1$  de lo cual, usando la igualdad

$U^{-1} = \frac{1}{\det(U)} \begin{pmatrix} U_{22} & -U_{12} \\ 0 & U_{11} + b_1 \end{pmatrix}$  y que  $U^t = U^{-1}$  entonces se tiene dos posibilidades:

- Cuando  $\det(U) = 1$ , se tiene que  $\begin{pmatrix} U_{11} + b_1 & 0 \\ U_{12} & U_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{22} & -U_{12} \\ 0 & U_{11} + b_1 \end{pmatrix}$  así,  $U_{12} = 0$

y  $U_{22} = U_{11} + b_1$  de lo cual  $\begin{pmatrix} U_{22} & 0 \\ 0 & U_{22} \end{pmatrix}$ . Ya que  $\det U = U_{22}U_{22} = 1$  por tanto  $U_{22} = \pm 1$ .

- Cuando  $\det(U) = -1$  se tiene de manera similar que  $U_{12} = 0$  y  $U_{22} = -(U_{11} + b_1)$ , luego  $U = \begin{pmatrix} -U_{22} & 0 \\ 0 & U_{22} \end{pmatrix}$ . Por tanto  $\det(U) = -U_{22}U_{22} = -1$ , esto es  $U_{22} = \pm 1$ .

Así, las cuatro posibilidades para  $U$  son  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $U = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ,  $U = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Si  $U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  entonces  $g \in \mathcal{G}$  es una traslación, por lo que, usando que  $\mathcal{G}$  es estándar,

debe ser  $b_1 \in \mathbb{Z}$ . En cambio, si  $U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$  resulta ser  $g = t_{b_1 e_1} \circ \gamma \in \mathcal{G}$ , y por lo tanto  $g^2 = t_{2b_1 e_1} \in \mathcal{G}$ , de donde  $2b_1 \in \mathbb{Z}$ .

De estos comentarios se desprenden las siguientes posibilidades:

1) Si  $U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  entonces  $g(x) = x + b$  por tanto  $g = t_b = t_{b e_1}$  así  $g = t_{\mathbf{b}_1 e_1}$ ,  $\mathbf{b}_1 \in \mathbb{Z}$ ;

2) Si

$$\begin{aligned} U = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ entonces } g(x) &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \rho_\pi(x) + b_1 e_1 \\ &= t_{b_1 e_1} \circ \rho_\pi(x) \end{aligned}$$

así  $g = t_{\mathbf{b}_1 e_1} \circ \rho_\pi$ ,  $\mathbf{b}_1 \in \mathbb{R}$ ;

3) Si

$$\begin{aligned} U = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ entonces } g(x) &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \rho_\pi \circ \gamma(x) + b_1 e_1, \text{ con } \gamma \text{ la reflexión con el eje } x \\ &= t_{b_1 e_1} \circ \rho_\pi \circ \gamma(x) \end{aligned}$$

así  $g = t_{\mathbf{b}_1 e_1} \circ \rho_\pi \circ \gamma$ ,  $\mathbf{b}_1 \in \mathbb{R}$ ;

4) Si

$$\begin{aligned} U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ entonces } g(x) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ &= \gamma(x) + b_1 e_1 \\ &= t_{b_1 e_1} \circ \gamma(x), \text{ con } \gamma \text{ la reflexión con el eje } x \end{aligned}$$

así  $g = t_{\mathbf{b}_1 e_1} \circ \gamma$ ,  $\mathbf{b}_1 \in \mathbb{Z}$ ;

5) ya que  $2b_1 \in \mathbb{Z}$ , entonces  $b_1 = t/2$  con  $t \in \mathbb{Z}$ , de lo cual  $g = t_{(\mathbf{b}_1 + 1/2) e_1} \circ \gamma$ ,  $\mathbf{b}_1 \in \mathbb{Z}$ .

Notar que si  $g$  y  $h$  son del mismo tipo en la lista, al realizar las cuentas posibles de  $g^{-1} \circ h$  se obtiene una traslación, por lo que se tiene la igualdad de clases laterales  $g(\mathcal{T} \cap \mathcal{G}) = h(\mathcal{T} \cap \mathcal{G})$ , lo que implica que  $\mathcal{G}/(\mathcal{T} \cap \mathcal{G})$  tiene a lo sumo cinco elementos. Por otra parte si  $g \in \mathcal{G}$  al hacer

los calculos se obtiene que  $g^2 \in (\mathcal{T} \cap \mathcal{G})$ , por lo que  $g(\mathcal{T} \cap \mathcal{G})g(\mathcal{T} \cap \mathcal{G}) = g^2(\mathcal{T} \cap \mathcal{G}) = (\mathcal{T} \cap \mathcal{G})$  de lo que se deduce que cada elemento de  $\mathcal{G}/(\mathcal{T} \cap \mathcal{G})$  tiene orden dos. Como el orden de un elemento divide al orden del grupo entonces  $\mathcal{G}/(\mathcal{T} \cap \mathcal{G})$  es par y por tanto solo debe ser de orden 1, 2 o 4, y en caso de ser de orden 4 no puede ser cíclico (pues todos los elementos son de orden 2), por lo que se llega al grupo de Klein de 4 elementos.

□

**Teorema 2.2.18.**  $\Omega/\sim$  tiene 7 elementos, con representantes:

$$\langle t_{\mathbf{e}_1} \rangle \tag{8}$$

$$\langle t_{\mathbf{e}_1}, \rho_\pi \rangle, \langle t_{\mathbf{e}_1}, \rho_\pi \gamma \rangle, \langle t_{\mathbf{e}_1}, \gamma \rangle, \langle t_{\mathbf{e}_1}, t_{\frac{1}{2}\mathbf{e}_1} \circ \gamma \rangle \tag{9}$$

$$\langle t_{\mathbf{e}_1}, \rho_\pi, \gamma \rangle, \langle t_{\mathbf{e}_1}, \rho_\pi, t_{\frac{1}{2}\mathbf{e}_1} \circ \gamma \rangle \tag{10}$$

*Demostración.* Sea  $\mathcal{G}$  un grupo-friso estándar. Se debe probar que  $\mathcal{G}$  está relacionado con alguno de los grupos listados en el Teorema anterior, así se obtiene los siguientes casos:

Caso 1)  $\mathcal{G}/(\mathcal{T} \cap \mathcal{G})$  es el grupo trivial: en este caso  $\mathcal{G} = \mathcal{T} \cap \mathcal{G}$  y por lo tanto  $\mathcal{G}$  es de la forma (8) ya que son traslaciones.

Caso 2)  $\mathcal{G}/(\mathcal{T} \cap \mathcal{G})$  es de orden 2: aquí  $\mathcal{G} = (\mathcal{T} \cap \mathcal{G}) \cup g(\mathcal{T} \cap \mathcal{G})$  es decir que  $\mathcal{G} = \langle t_{\mathbf{e}_1}, g \rangle$ , donde  $g$  es de tipo 2), 3) 4) ó 5) de la lista anterior:

- Si es de tipo 2), a partir de las relaciones  $t_{-\mathbf{b}_1/2} \circ g \circ t_{-\mathbf{b}_1/2}^{-1} = \rho_\pi$  y  $t_{-\mathbf{b}_1/2} \circ t_{\mathbf{e}_1} \circ t_{-\mathbf{b}_1/2}^{-1} = t_{\mathbf{e}_1}$  se obtiene que  $t_{-\mathbf{b}_1/2} \mathcal{G} t_{-\mathbf{b}_1/2}^{-1} = \langle t_{\mathbf{e}_1}, \rho_\pi \rangle$ .

- Si es de tipo 3), se toma nuevamente  $t_{\mathbf{b}_1/2}$  como elemento conjugador y se obtiene

$$t_{-\mathbf{b}_1/2} \mathcal{G} t_{-\mathbf{b}_1/2}^{-1} = \langle t_{\mathbf{e}_1}, \rho_\pi \circ \gamma \rangle.$$

- Si es de tipo 4), los grupos  $\langle t_{\mathbf{e}_1}, t_{\mathbf{b}_1\mathbf{e}_1} \circ \gamma \rangle$  y  $\langle t_{\mathbf{e}_1}, \gamma \rangle$  coinciden.

- Si es del tipo 5), los grupos  $\langle t_{\mathbf{e}_1}, t_{(\mathbf{b}_1+1/2)\mathbf{e}_1} \circ \gamma \rangle$  y  $\langle t_{\mathbf{e}_1}, t_{1/2\mathbf{e}_1} \circ \gamma \rangle$  son iguales.

Caso 3)  $\mathcal{G}/(\mathcal{T} \cap \mathcal{G})$  es el grupo de Klein de 4 elementos, además no puede contener elementos del tipo 4) y elementos del tipo 5) al mismo tiempo pues  $t_{1/2\mathbf{e}_1} \in \mathcal{G}$ , lo que contradice que  $\mathcal{G}$  es un grupo-friso estándar, de lo cual, siendo  $g_i$  del tipo  $i$   $\mathcal{G}$  toma alguna de las siguientes formas:

$$(\mathcal{T} \cap \mathcal{G}) \cup g_2(\mathcal{T} \cap \mathcal{G}) \cup g_3(\mathcal{T} \cap \mathcal{G}) \cup g_4(\mathcal{T} \cap \mathcal{G}) \quad (11)$$

$$(\mathcal{T} \cap \mathcal{G}) \cup g_2(\mathcal{T} \cap \mathcal{G}) \cup g_3(\mathcal{T} \cap \mathcal{G}) \cup g_5(\mathcal{T} \cap \mathcal{G}) \quad (12)$$

En ambos casos,  $\mathcal{G} \ni g_2 = t_{\mathbf{b}_1 \mathbf{e}_1} \circ \rho_\pi$ ; conjugando con  $h = t_{-\mathbf{b}_1/2\mathbf{e}_1}$  podemos asumir que  $g_2 = \rho_\pi$ . Dado que  $t_{\mathbf{b}_1 \mathbf{e}_1} \circ \rho_\pi \circ \gamma = g_3 \in \mathcal{G}$ , resulta  $g_3 \circ g_2 = t_{-\mathbf{b}_1 \mathbf{e}_1} \gamma \in \mathcal{G}$ . En el caso (11)  $g_3 \circ g_2$  debe ser del tipo 4) por lo que  $\mathbf{b}_1 \in \mathbb{Z}$  y por lo tanto  $\mathcal{G} = \langle t_{\mathbf{e}_1}, \rho_\pi, \gamma \rangle$ , mientras que en el caso (12)  $g_3 \circ g_2$  debe ser del tipo 5), que implica  $\mathbf{b}_1 + 1/2 \in \mathbb{Z}$  y por lo tanto  $\mathcal{G} = \langle t_{\mathbf{e}_1}, \rho_\pi, t_{1/2\mathbf{e}_1} \circ \gamma \rangle$ .

□

Con el objetivo de mejorar la legibilidad y simplificar la notación de los grupos de friso, se realizarán algunos cambios en su simbología. Para una representación más clara, se emplearán símbolos más concisos y descriptivos. En particular, se considerará una nueva notación para los elementos clave, como:

- $t_{\mathbf{e}_1} = t$  (Traslación).
- $\rho_\pi = \rho$  (Rotación de 180°).
- $\gamma = \gamma$  ( $\gamma$  es la reflexión con el eje  $x$ )
- $\rho_\pi \gamma = \gamma_y$  ( $\gamma_y$  es la reflexión sobre el eje  $y$ ). En este caso, se tendrá en cuenta el nombre del grupo, ya que según éste, la reflexión la hace paralela o perpendicular al vector de traslación; si el nombre del grupo tiene "/" se tiene en cuenta que la reflexión que se hace es perpendicular al vector de traslación, de lo contrario, si no aparece dicho símbolo, se tiene en cuenta que la reflexión es paralela al vector de traslación.
- $t_{\frac{1}{2}\mathbf{e}_1} \gamma = D$  (Deslizamiento).

Considerando lo anterior, se exhiben ahora los grupos de friso tras un minucioso análisis de sus generadores. Este proceso incluyó cálculos detallados para establecer las relaciones fundamentales que caracterizan a cada grupo, proporcionando así una visión clara de su estructura y propiedades. Denotando  $t^\gamma = t$  como el conjugado, donde  $t^\gamma = \gamma^{-1} \circ t \circ \gamma = t$ .

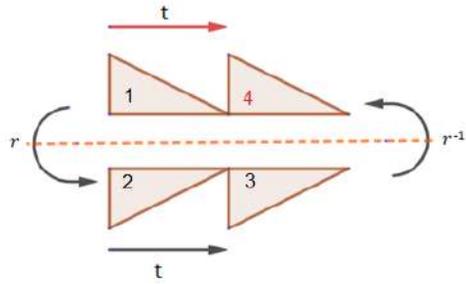


Imagen 5. Representación gráfica del conjugado  $t^\gamma = t$ .

Fuente. Autoría propia (GeoGebra)

Para cada relación se realizó un análisis gráfico como el que se presenta en la Imagen 5, donde los números representan el paso a paso de los movimientos que la figura base está efectuando, siendo el número 1, la figura base.

1)  $p1 = \langle t \rangle$

El grupo  $p1$  está generado por traslaciones.

2)  $p2 = \langle t, \rho \rangle; \rho^2 = I, t^\rho = t^{-1}$

El grupo  $p2$  está generado por traslaciones y rotaciones.

3)  $pm = \langle t, \gamma \rangle; \gamma^2 = I, t^\gamma = t$

El grupo  $pm$  está generdo por traslaciones y reflexiones.

4)  $p/m = \langle t, \gamma_y \rangle; \gamma^2 = I, t^\gamma = t^{-1}$

El grupo  $p/m$  está generado por traslaciones y reflexiones perpendiculares al vector de traslación.

5)  $pg = \langle t, D \rangle; D^2 = t, t^D = t$

El grupo  $pg$  está generado por traslaciones y deslizamientos.

6)  $p2m = \langle t, \rho, \gamma \rangle; \gamma^2 = I, \rho^2 = I, t^\rho = t^{-1}, t^\gamma = t, \gamma^\rho = \gamma$

El grupo  $p2m$  está generado por traslaciones, rotaciones y reflexiones.

7)  $p2g = \langle t, \rho, D \rangle; \rho^2 = I, D^2 = t, t^\rho = t^{-1}, t^D = t, \rho^D = \rho^{-1}$

El grupo  $p2g$  está generado por traslaciones, rotaciones y deslizamientos.

A continuación, se muestra un gráfico que representa geoméricamente cada grupo de frisos. Cada uno de estos grupos es único, lo que significa que cualquier figura con un patrón se puede analizar para determinar su figura base, y a partir de los movimientos realizados se puede concluir a qué grupo de frisos pertenece esa figura.

### Representación gráfica de los grupos de Friso

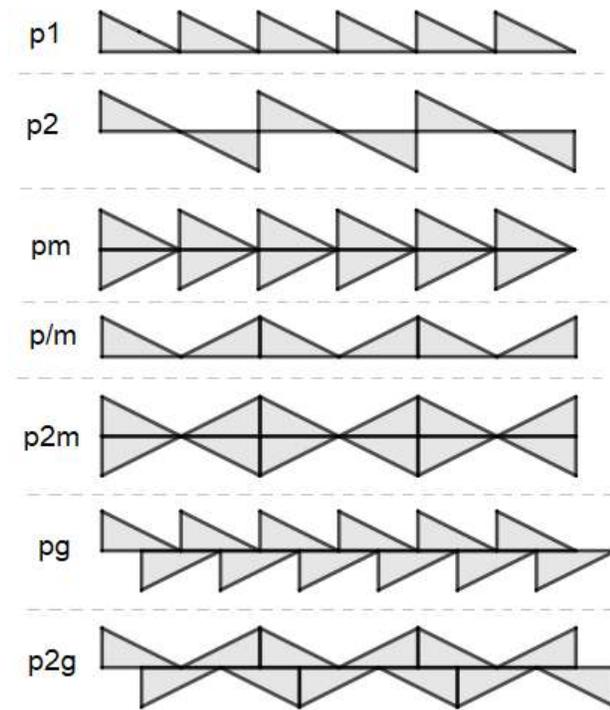


Imagen 6. Representación gráfica de los grupos de Friso.

Fuente. Autoría propia (GeoGebra)

### 2.2.3. Grupos Cristalográficos

A diferencia de los grupos de friso, que se centran en simetrías en una única dirección, los grupos cristalográficos abarcan una mayor diversidad de simetrías bidimensionales, incluyendo rotaciones, reflexiones y traslaciones en el plano. Esta expansión en las operaciones permitidas da lugar a una mayor riqueza estructural y simétrica en el análisis de los grupos cristalográficos.



Imagen 7. Grupo cristalográfico encontrado en tejido Misak.

*Fuente. Artesanías Misak, Silvia - Cauca.*

En esta sección, se tomaron como puntos de referencia a [1] y [2] para llevar a cabo la clasificación de los grupos. La demostración detallada de la clasificación se presenta en [1], mientras que en [2], contiene la enumeración de los grupos junto con sus correspondientes relaciones.

Para nombrar a los grupos cristalográficos se consideran varios factores. Primero se toma en cuenta el paralelogramo fundamental que define la celda básica del patrón repetitivo. Luego, se analizan las simetrías presentes en el grupo. La nomenclatura resultante consta de cuatro símbolos que describen detalladamente las características de simetría del grupo cristalográfico:

- 1) Letra **p** o **c**: Estas letras representan el paralelogramo fundamental.

**p** : Significa que el paralelogramo fundamental es un cuadrado, un rectángulo o un paralelogramo.

**c** : Significa que este grupo tiene como paralelogramo fundamental un rombo.

2) Numeración: **1, 2, 3, 4** o **6**: Estos números representan el orden de los giros.

- Orden 1: No contiene giros.
- Orden 2: Contiene giros de  $180^\circ$ .
- Orden 3: Contiene giros de  $120^\circ$ .
- Orden 4: Contiene giros de  $90^\circ$ .
- Orden 6: Contiene giros de  $60^\circ$ .

3) Letras **m** o **g**: Representan el tipo de simetría.

**m** : Estos grupos contienen reflexiones (espejo = mirror).

**g** : Estos grupos contienen deslizamientos (deslizamiento = glide)

4) Letra **m** o **g**: Igual que la clasificación anterior pero teniendo en cuenta si hay una segunda simetría.

En la referencia [1], se destaca que la demostración para la clasificación de los grupos se desarrolla considerando sus reflexiones como un factor determinante, éste divide los grupos dependiendo la cantidad de reflexiones que tiene y así poder llevar a cabo la clasificación.

- **Grupos planos sin reflexiones:** En este caso se encuentran los grupos  $p1$ ,  $p2$ ,  $p3$ ,  $p4$  y  $p6$ , los cuales son los grupos que solo contiene rotaciones.
- **Grupos planos con una reflexión:** Dentro de los grupos que contiene una sola reflexión están los grupos  $cm$ ,  $pm$  y  $pg$ .
- **Grupos planos con más de una reflexión:** Esta es la clasificación más grande, pues hay 9 grupos que la conforman, los cuales son  $cmm$ ,  $pmm$ ,  $pmg$ ,  $pgg$ ,  $p31m$ ,  $p3m1$ ,  $p4m$ ,  $p4g$  y  $p6m$ .

En la referencia [2], se sigue un enfoque específico al iniciar identificando los órdenes de los grupos antes de proceder con la clasificación correspondiente. Para llevar a cabo este proceso, se presentan dos teoremas que establecen fundamentos clave en la categorización de los grupos.

Al igual que en los grupos de friso, en los grupos cristalográficos también se realizó un análisis detallado de cada una de las relaciones dentro de cada grupo.

**Teorema 2.2.19.** *Sea  $\mathcal{G}^+$  un grupo cristalográfico que conserva la orientación. Entonces  $\mathcal{G}^+$  está generado por  $T_2 = \mathcal{G}^+ \cap \mathcal{T}$  y una única rotación de orden  $n$ , con  $n = 1, 2, 3, 4$  ó  $6$ . Así pues,  $\mathcal{G}^+$  adopta una de las formas siguientes:*

- 1)  $\mathcal{G}_1 = \langle t_v, t_w \rangle$ .
- 2)  $\mathcal{G}_2 = \langle t_v, t_w, \rho \rangle$  donde  $\rho^2 = I$ ,  $t_v^\rho = t_{-v}$ ,  $t_w^\rho = t_{-w}$ .
- 3)  $\mathcal{G}_3 = \langle t_v, t_w, \rho \rangle$  donde  $\rho^3 = I$ ,  $t_v^\rho = t_{-w}$ ,  $t_w^\rho = t_{v-w}$ .
- 4)  $\mathcal{G}_4 = \langle t_v, t_w, \rho \rangle$  donde  $\rho^4 = I$ ,  $t_v^\rho = t_{-w}$ ,  $t_w^\rho = t_v$ .
- 5)  $\mathcal{G}_6 = \langle t_v, t_w, \rho \rangle$  donde  $\rho^2 = I$ ,  $t_v^\rho = t_{v-w}$ ,  $t_w^\rho = t_v$ .

En el teorema siguiente se listan los grupos cristalográficos planos  $\mathcal{G}$  correspondientes a cada uno de los posibles subgrupos directos  $\mathcal{G}^+ = \mathcal{G}_i$  para  $i = 1, 2, 3, 4, 6$ .

**Teorema 2.2.20.** .

a) *Para el subgrupo  $\mathcal{G}_1$  (no tiene rotaciones) tenemos exactamente cuatro tipos distintos de grupos cristalográficos:*

a.1)  $p1 = \langle t_v, t_w \rangle$ .

*El grupo  $p1$  está generado por las traslaciones  $t_v$  y  $t_w$ .*

a.2)  $cm = \langle t_v, t_w, \gamma \rangle$ ,  $\gamma^2 = I$ ,  $t_v^\gamma = t_w$ ,  $t_w^\gamma = t_v$ .

*El grupo  $cm$  está generado por las traslaciones  $t_v$ ,  $t_w$  y por la reflexión  $\gamma$ .*

a.3)  $pg = \langle t_v, t_w, D \rangle$ ,  $D^2 = t_v$ ,  $t_v^D = t_v$ ,  $t_w^D = t_{-w}$ .

*El grupo  $pg$  está generado por las traslaciones  $t_v$ ,  $t_w$  y por el deslizamiento  $D$ .*

a.4)  $pm = \langle t_v, t_w, \gamma \rangle$ ,  $\gamma^2 = I$ ,  $t_v^\gamma = t_v$ ,  $t_w^\gamma = t_{-w}$ .

*El grupo pm está generado por las traslaciones  $t_v$ ,  $t_w$  y por la reflexión  $\gamma$ .*

b) Para el subgrupo  $\mathcal{G}_2$  (tiene rotaciones de  $180^\circ$ ) se tiene exactamente cinco tipos distintos de grupos cristalográficos:

b.1)  $p2 = \langle t_v, t_w, \rho \rangle$ ,  $\rho^2 = I$ ,  $t_v^\rho = t_{-v}$ ,  $t_w^\rho = t_{-w}$

*El grupo p2 está generado por las traslaciones  $t_v$ ,  $t_w$  y por la rotación  $\rho$ .*

b.2)  $cmm = \langle t_v, t_w, \gamma, \rho \rangle$ ,  $\rho^2 = I$ ,  $\gamma^2 = I$ ,  $(\gamma \circ \rho)^2 = I$ ,  $t_v^\rho = t_{-v}$ ,  $t_w^\rho = t_{-w}$ ,  $t_v^\gamma = t_w$ ,  $t_w^\gamma = t_v$

*El grupo cmm está generado por las traslaciones  $t_v$ ,  $t_w$ , la reflexión  $\gamma$  y la rotación  $\rho$ .*

b.3)  $pmm = \langle t_v, t_w, \gamma, \rho \rangle$ ,  $\rho^2 = I$ ,  $\gamma^2 = I$ ,  $(\gamma \circ \rho)^2 = I$ ,  $t_v^\rho = t_{-v}$ ,  $t_w^\rho = t_{-w}$ ,  $t_v^\gamma = t_v$ ,  $t_w^\gamma = t_{-w}$

*El grupo pmm está generado por las traslaciones  $t_v$ ,  $t_w$ , la reflexión  $\gamma$  y la rotación  $\rho$ .*

b.4)  $pmg = \langle t_v, t_w, \gamma, \rho \rangle$ ,  $\rho^2 = I$ ,  $\gamma^2 = I$ ,  $(\gamma \circ \rho)^2 = I$ ,  $t_v^\rho = t_{-v}$ ,  $t_w^\rho = t_{-w}$ ,  $t_v^\gamma = t_{-v}$ ,  $t_w^\gamma = t_w$

*El grupo pmg está generado por las traslaciones  $t_v$ ,  $t_w$ , la reflexión  $\gamma$  y la rotación  $\rho$ .*

b.5)  $pgg = \langle t_v, t_w, D, \rho \rangle$ ,  $\rho^2 = I$ ,  $D^2 = t_v$ ,  $(D \circ \rho)^2 = I$ ,  $t_v^\rho = t_{-v}$ ,  $t_w^\rho = t_{-w}$ ,  $t_v^D = t_v$ ,  $t_w^D = t_w$

*El grupo pgg está generado por las traslaciones  $t_v$ ,  $t_w$ , el deslizamiento  $D$  y la rotación  $\rho$ .*

c) Para el subgrupo  $\mathcal{G}_3$  (tiene rotaciones de  $120^\circ$ ) tenemos exactamente tres tipos distintos de grupos cristalográficos:

c.1)  $p3 = \langle t_v, t_w, \rho \rangle$ ,  $\rho^3 = I$ ,  $t_v^\rho = t_{-w}$ ,  $t_w^\rho = t_{v-w}$

*El grupo p3 está generado por las traslaciones  $t_v$ ,  $t_w$  y la rotación  $\rho$ .*

$$c.2) p31m = \langle t_v, t_w, \gamma, \rho \rangle, \quad \rho^3 = I, \quad \gamma^2 = I, \quad (\gamma \circ \rho)^2 = t_w, \quad t_v^\rho = t_{-w}, \quad t_w^\rho = t_{v-w}, \quad t_v^\gamma = t_{-w}, \quad t_w^\gamma = t_{-v}$$

*El grupo  $p31m$  está generado por las traslaciones  $t_v, t_w$ , la reflexión  $\gamma$  y la rotación  $\rho$ .*

$$c.3) p3m1 = \langle t_v, t_w, \gamma, \rho \rangle, \quad \rho^3 = I, \quad \gamma^2 = I, \quad (\gamma \circ \rho)^2 = I, \quad t_v^\rho = t_{-w}, \quad t_w^\rho = t_{v-w}, \quad t_v^\gamma = t_w, \quad t_w^\gamma = t_v$$

*El grupo  $p3m1$  está generado por las traslaciones  $t_v, t_w$ , la reflexión  $\gamma$  y la rotación  $\rho$ .*

d) Para el subgrupo  $\mathcal{G}_4$  (tiene rotaciones de  $90^\circ$ ) tenemos exactamente tres tipos distintos de grupos cristalográficos:

$$d.1) p4 = \langle t_v, t_w, \rho \rangle, \quad \rho^4 = I, \quad t_v^\rho = t_{-w}, \quad t_w^\rho = t_v$$

*El grupo  $p4$  está generado por las traslaciones  $t_v, t_w$  y la rotación  $\rho$ .*

$$d.2) p4m = \langle t_v, t_w, \gamma, \rho \rangle, \quad \rho^4 = I, \quad \gamma^2 = I, \quad (\gamma \circ \rho)^2 = I, \quad t_v^\rho = t_{-w}, \quad t_w^\rho = t_v, \quad t_v^\gamma = t_v, \quad t_w^\gamma = t_{-w}$$

*El grupo  $p4m$  está generado por las traslaciones  $t_v, t_w$ , la reflexión  $\gamma$  y la rotación  $\rho$ .*

$$d.3) p4g = \langle t_v, t_w, D, \rho \rangle, \quad \rho^4 = I, \quad D^2 = t_v, \quad (D \circ \rho)^2 = I, \quad t_v^\rho = t_{-w}, \quad t_w^\rho = t_v, \quad t_v^D = t_v, \quad t_w^D = t_w$$

*El grupo  $p4g$  está generado por las traslaciones  $t_v, t_w$ , el deslizamiento  $D$  y la rotación  $\rho$ .*

e) Para el subgrupo  $\mathcal{G}_5$  (tiene rotaciones de  $60^\circ$ ) tenemos exactamente dos tipos distintos de grupos cristalográficos:

$$e.1) p6 = \langle t_v, t_w, \rho \rangle, \quad \rho^6 = I, \quad t_v^\rho = t_{v-w}, \quad t_w^\rho = t_v$$

*El grupo  $p6$  está generado por las traslaciones  $t_v, t_w$  y la rotación  $\rho$ .*

$$e.2) p6m = \langle t_v, t_w, \gamma, \rho \rangle, \quad \rho^6 = I, \quad \gamma^2 = I, \quad (\gamma \circ \rho)^2 = I, \quad t_v^\rho = t_{v-w}, \quad t_w^\rho = t_v, \quad t_v^\gamma = t_v, \quad t_w^\gamma = t_{v-w}$$

*El grupo  $p6m$  está generado por las traslaciones  $t_v, t_w$ , la reflexión  $\gamma$  y la rotación  $\rho$ .*

## Representación gráfica de los grupos cristalográficos

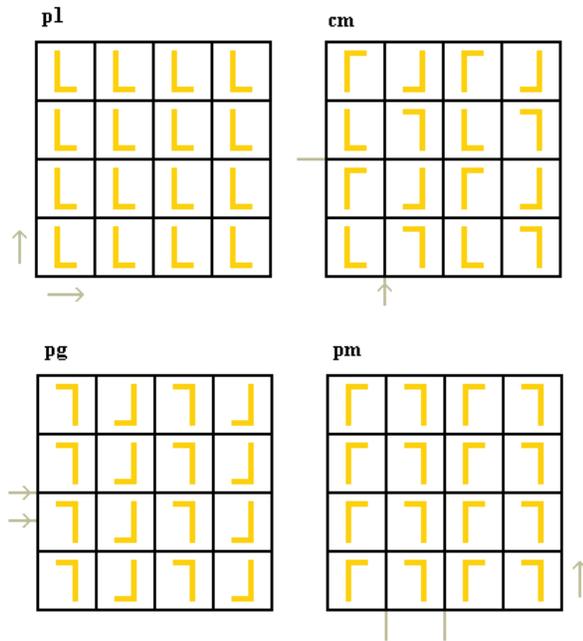


Imagen 8. Grupos cristalográficos de Orden 1.

Fuente. Tumblr. Baldosas y Canguros.

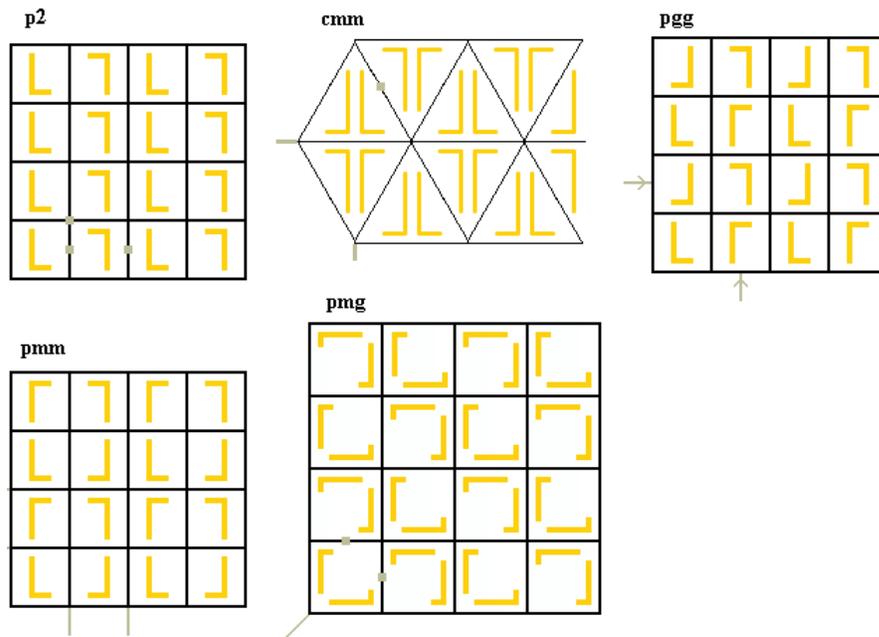


Imagen 9. Grupos cristalográficos de Orden 2.

Fuente. Tumblr. Baldosas y Canguros.

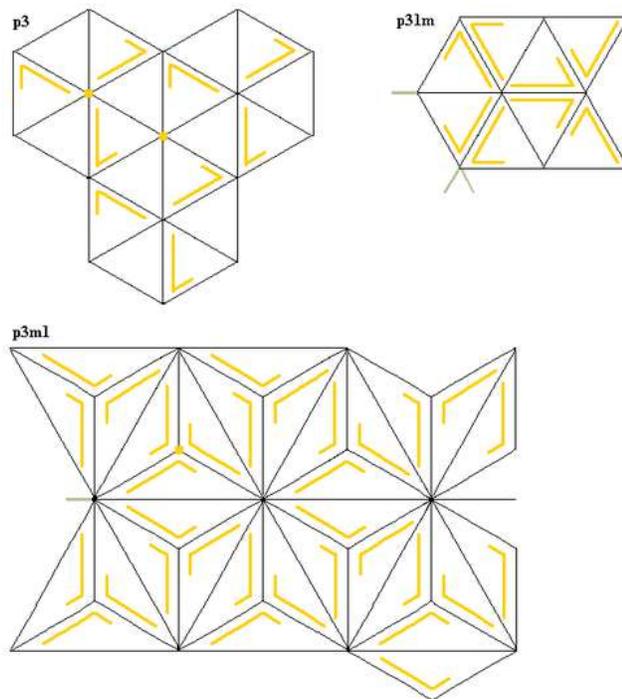


Imagen 10. Grupos cristalográficos de Orden 3.

Fuente. Tumblr. Baldosas y Canguros.

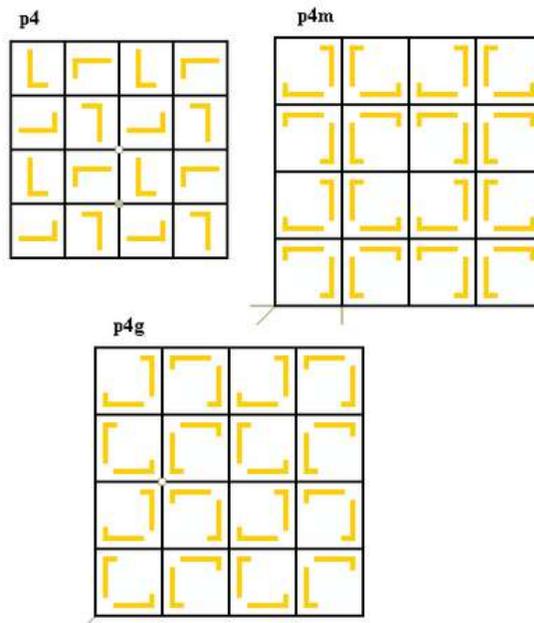


Imagen 11. Grupos cristalográficos de Orden 4.

Fuente. Tumblr. Baldosas y Canguros.

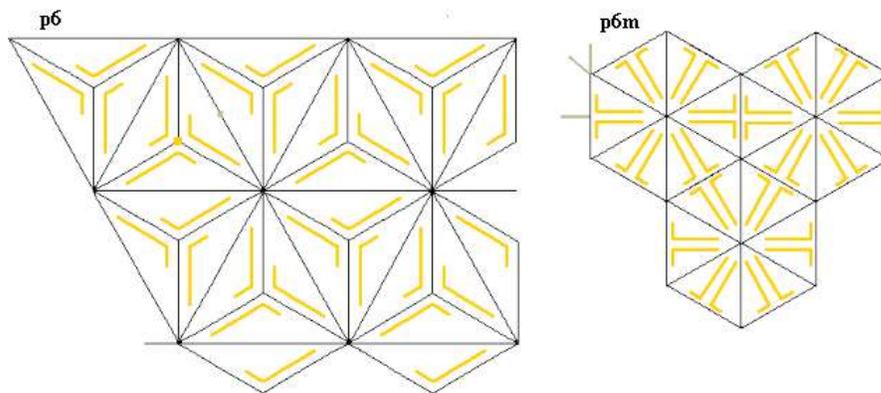


Imagen 12. Grupos cristalográficos de Orden 6.

Fuente. Tumblr. Baldosas y Canguros.

### 2.3. Representación geométrica de las relaciones de los grupos de frisos y cristalográficos

En esta sección, se llevará a cabo una representación geométrica detallada de los grupos de frisos y los grupos cristalográficos mencionados previamente. El propósito de esta representación es obtener una clasificación visual y seleccionar adecuadamente los registros fotográficos que se presentarán en las secciones 3, 4 y 5. La combinación de la presentación visual y la fundamentación teórica contribuirá a una comprensión integral de los grupos de friso y los grupos cristalográficos.

#### 2.3.1. Grupos de frisos

A continuación, se representa geoméricamente los grupos de frisos **pm** y **p2m**, teniendo en cuenta una figura base, los generadores y las relaciones de cada grupo. El análisis de los otros grupos de friso se encuentran en el anexo 10.1: **Resultados geométricos de grupos de frisos**.

- Grupo  $pm = \langle t, \gamma \rangle$ ;  $\gamma^2 = I$ ,  $t^\gamma = t$

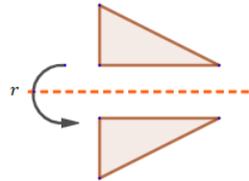
Pasos gráficos para obtener la relación:

- $\gamma^2 = \gamma \circ \gamma = I$

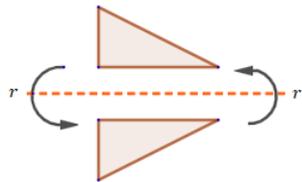
Paso 1



Paso 2



Resultado



Gráfica 1. Pasos para realizar la relación  $\gamma^2 = I$  del Grupo  $pm$ .

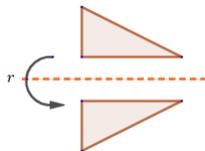
Fuente. Autoría propia (GeoGebra).

- $t^\gamma = \gamma^{-1} \circ t \circ \gamma = t$

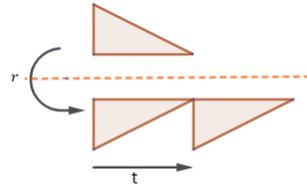
Paso 1



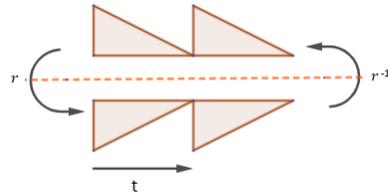
Paso 2



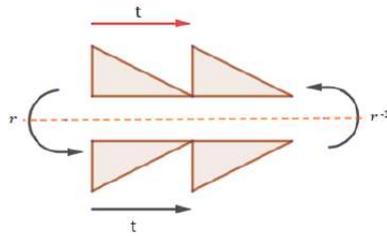
Paso 3



Paso 4



Resultado



Gráfica 2. Pasos para realizar la relación  $t^\gamma = t$  del Grupo  $pm$ .

Fuente. Autoría propia (GeoGebra).

- Grupo  $p2m = \langle t, \gamma, \rho \rangle$ ;  $\gamma^2 = I, \rho^2 = I, t^\rho = t^{-1}, t^\gamma = t, \gamma^\rho = \gamma$

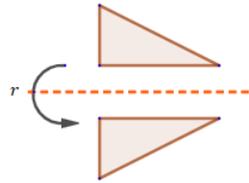
Pasos gráficos para obtener la relación:

- $\gamma^2 = \gamma \circ \gamma = I$

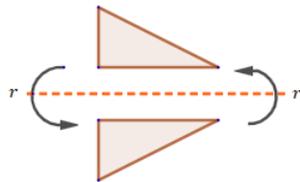
Paso 1



Paso 2



Resultado



Gráfica 3. Pasos para realizar la realción  $\gamma^2 = I$  del Grupo  $p2m$ .

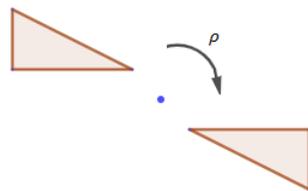
Fuente. Autoría propia (GeoGebra).

- $\rho^2 = \rho \circ \rho = I$

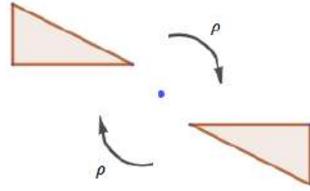
Paso 1



Paso 2



Resultado



Gráfica 4. Pasos para realizar la relación  $\rho^2 = I$  del Grupo  $p2m$ .

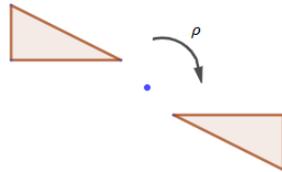
Fuente. Autoría propia (GeoGebra).

- $t\rho = \rho^{-1} \circ t \circ \rho = t^{-1}$

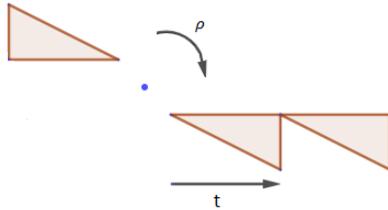
Paso 1



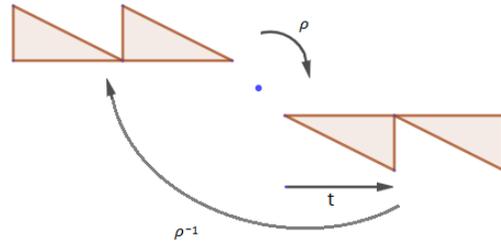
Paso 2

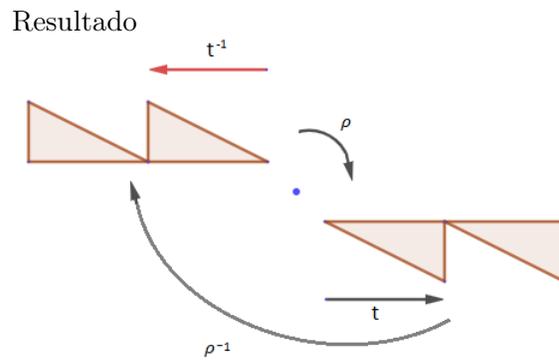


Paso 3



Paso 4





Gráfica 5. Pasos para realizar la relación  $t^\rho = t^{-1}$  del Grupo  $p2m$ .

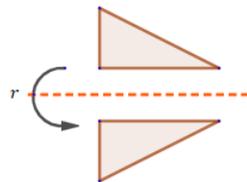
Fuente. Autoría propia (GeoGebra).

- $t^\gamma = \gamma^{-1} \circ t \circ \gamma = t$

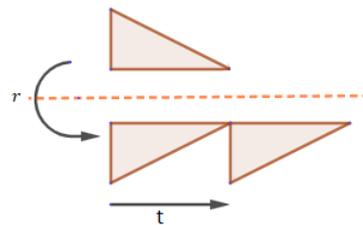
Paso 1



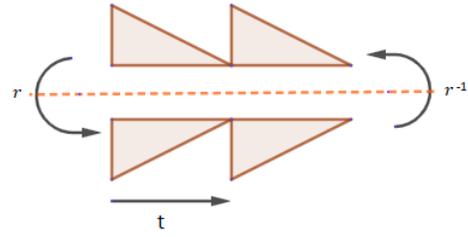
Paso 2



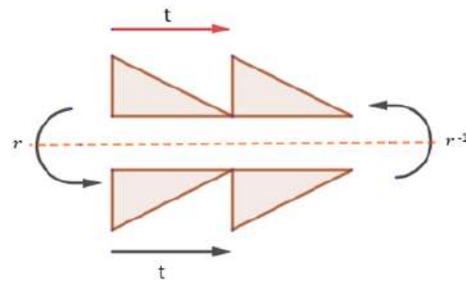
Paso 3



Paso 4



Resultado



Gráfica 6. Pasos para realizar la relación  $t^l = t$  del Grupo  $p2m$ .

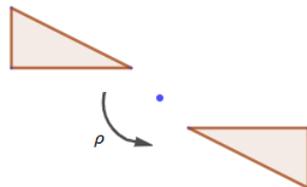
Fuente. Autoría propia (GeoGebra).

- $\gamma^\rho = \rho^{-1} \circ \gamma \circ \rho = \rho$

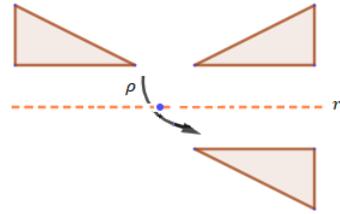
Paso 1



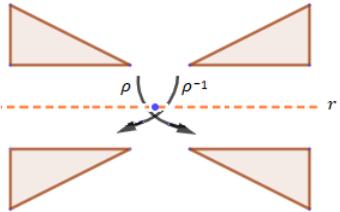
Paso 2



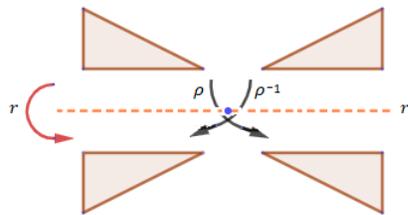
Paso 3



Paso 4



Resultado



Gráfica 7. Pasos para realizar la relación  $\gamma^\rho = \rho$  del Grupo  $p2m$ .

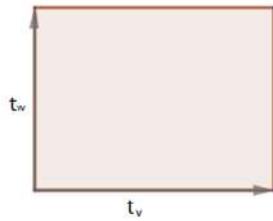
Fuente. Autoría propia (GeoGebra).

### 2.3.2. Grupos cristalográficos

Realizando un análisis geométrico, análogo al estudio realizado en los frisos, se obtienen las relaciones en los grupos cristalográficos **pm**, **cmm**, **p3m1**, **p4** y **p6**.

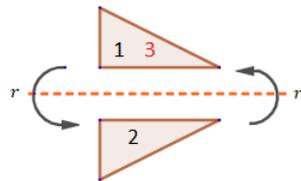
Representación gráfica de un grupo de Orden 1:

- Grupo  $pm = \langle t_v, t_w, \gamma \rangle$ ,  $\gamma^2 = I$ ,  $t_v^\gamma = t_v$ ,  $t_w^\gamma = t_{-w}$

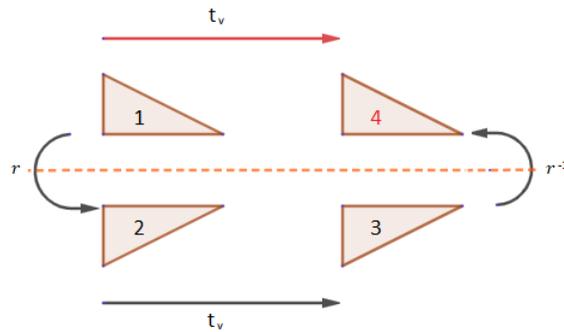


Paralelogramo fundamental

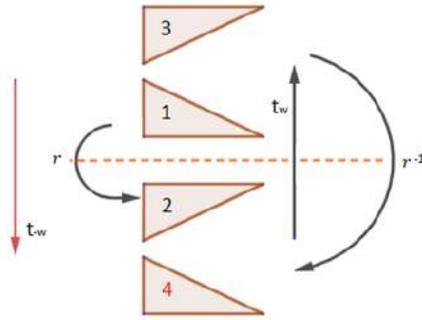
- $\gamma^2 = \gamma \circ \gamma = I$



- $t_v^\gamma = \gamma^{-1} \circ t_v \circ \gamma = t_v$



- $t_w^\gamma = \gamma^{-1} \circ t_w \circ \gamma = t_{-w}$

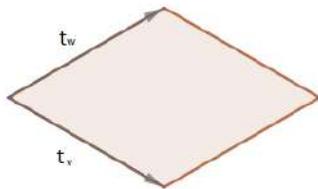


Gráfica 8. Representación de cada una de las relaciones del Grupo pm.

Fuente. Autoría propia (GeoGebra).

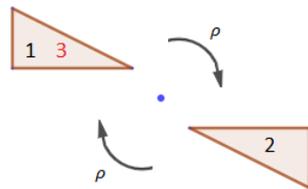
Representación gráfica de un grupo de Orden 2:

- Grupo  $cmm = \langle t_v, t_w, \gamma, \rho \rangle$ ,  $\rho^2 = I$ ,  $\gamma^2 = I$ ,  $(\gamma \circ \rho)^2 = I$ ,  $t_v^\rho = t_{-v}$ ,  $t_w^\rho = t_{-w}$ ,  $t_v^\gamma = t_w$ ,  $t_w^\gamma = t_v$

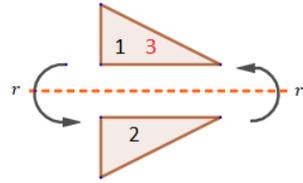


Paralelogramo fundamental

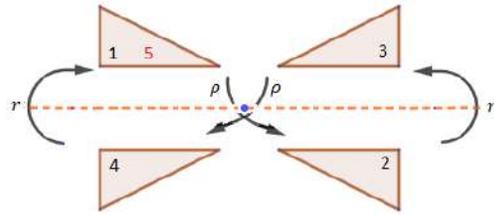
- $\rho^2 = \rho \circ \rho = I$



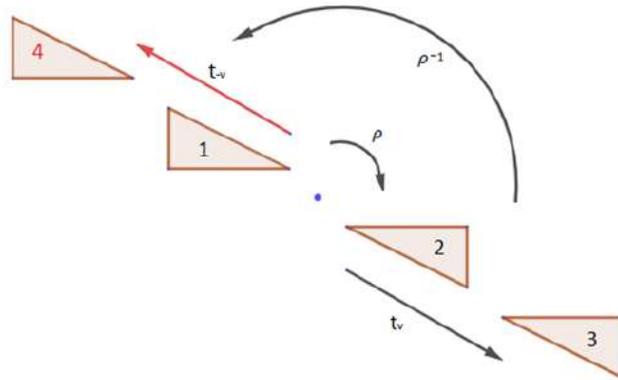
- $\gamma^2 = \gamma \circ \gamma = I$



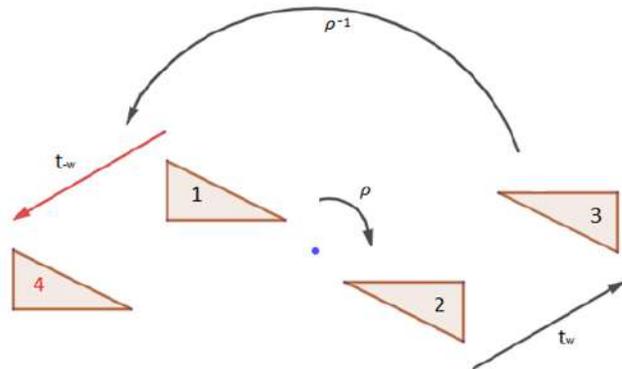
- $(\gamma \circ \rho)^2 = (\gamma \circ \rho) \circ (\gamma \circ \rho) = I$



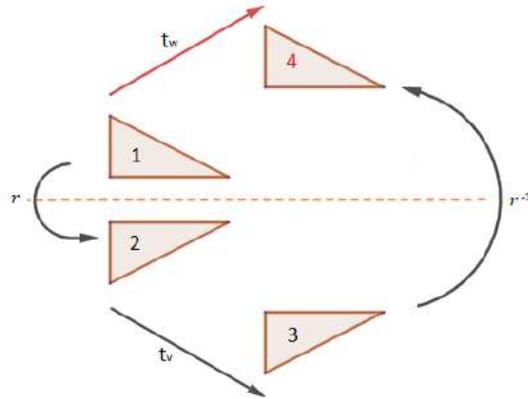
- $t_v^\rho = \rho^{-1} \circ t_v \circ \rho = t_{-v}$



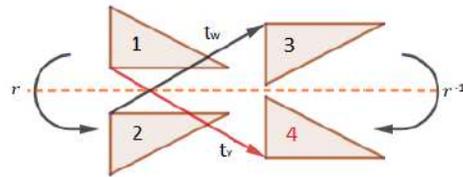
- $t_w^\rho = \rho^{-1} \circ t_w \circ \rho = t_{-w}$



- $t_v^\gamma = \gamma^{-1} \circ t_v \circ \gamma = t_w$



- $t_w^\gamma = \gamma^{-1} \circ t_w \circ \gamma = t_v$

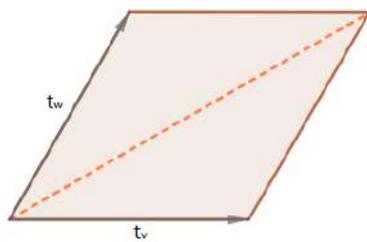


Gráfica 9. Representación de cada una de las relaciones del Grupo  $cmm$ .

Fuente. Autoría propia (GeoGebra).

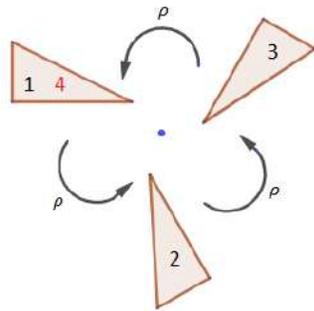
Representación gráfica de un grupo de Orden 3:

- Grupo  $p3m1 = \langle t_v, t_w, \gamma, \rho \rangle$ ,  $\rho^3 = I$ ,  $\gamma^2 = I$ ,  $(\gamma \circ \rho)^2 = I$ ,  $t_v^\rho = t_{-w}$ ,  $t_w^\rho = t_{v-w}$ ,  $t_v^\gamma = t_w$ ,  $t_w^\gamma = t_v$

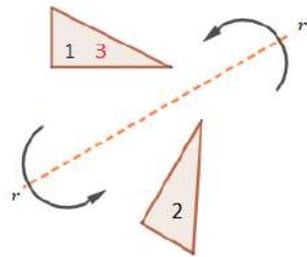


Paralelogramo fundamental

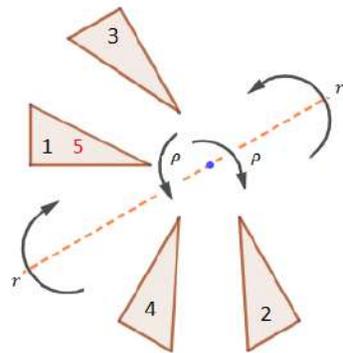
- $\rho^3 = \rho \circ \rho \circ \rho = I$



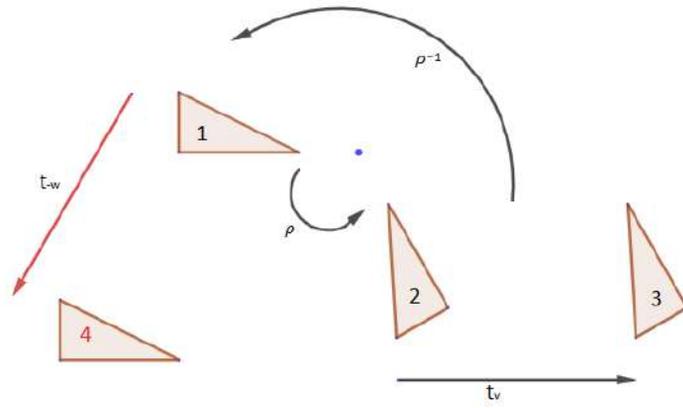
- $\gamma^2 = \gamma \circ \gamma = I$



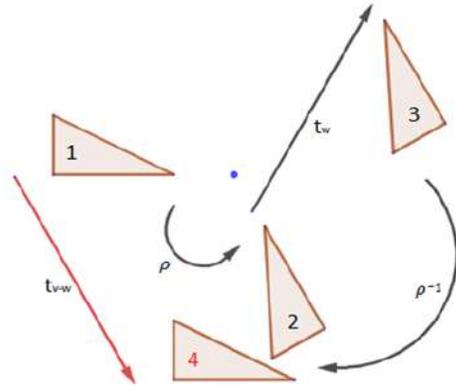
- $(\gamma \circ \rho)^2 = (\gamma \circ \rho) \circ (\gamma \circ \rho) = I$



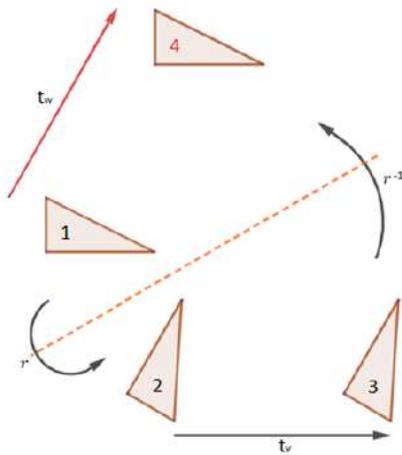
- $t_v^\rho = \rho^{-1} \circ t_v \circ \rho = t_{-w}$



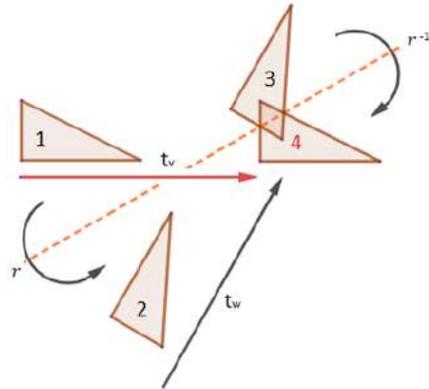
- $t_w^\rho = \rho^{-1} \circ t_w \circ \rho = t_{v-w}$



- $t_v^\gamma = \gamma^{-1} \circ t_w \circ \gamma = t_w$



- $t_w^\gamma = \gamma^{-1} \circ t_w \circ \gamma = t_v$

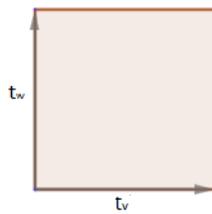


Gráfica 10. Representación de cada una de las relaciones del Grupo  $p3m1$ .

Fuente. Autoría propia (GeoGebra).

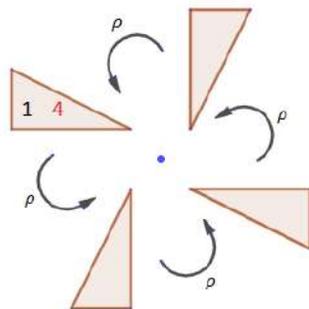
Representación gráfica de un grupo de Orden 4:

- Grupo  $p4 = \langle t_v, t_w, \rho \rangle$ ,  $\rho^4 = I$ ,  $t_v^\rho = t_{-w}$ ,  $t_w^\rho = t_v$

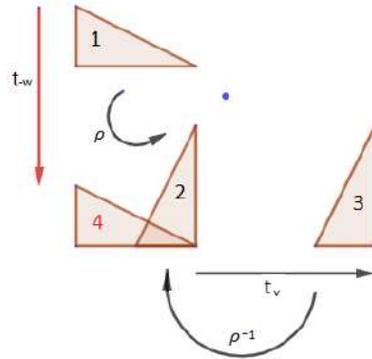


Paralelogramo fundamental

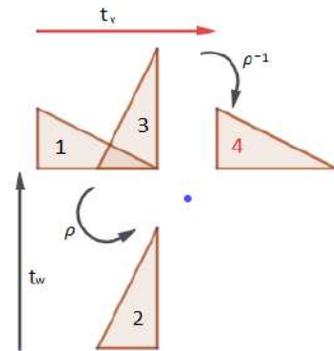
- $\rho^4 = \rho \circ \rho \circ \rho \circ \rho = I$



- $t_v^\rho = \rho^{-1} \circ t_v \circ \rho = t_{-w}$



- $t_w^\rho = \rho^{-1} \circ t_w \circ \rho = t_v$

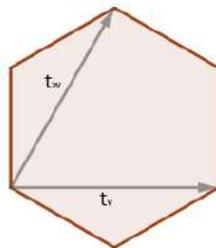


Gráfica 11. Representación de cada una de las reacciones del Grupo  $p4$ .

Fuente. Autoría propia (GeoGebra).

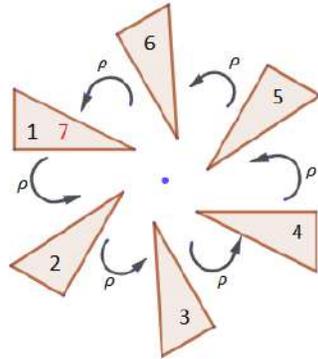
Representación gráfica de un grupo de Orden 6:

- Grupo  $p6 = \langle t_v, t_w, \rho \rangle$ ,  $\rho^6 = I$ ,  $t_v^\rho = t_{v-w}$ ,  $t_w^\rho = t_v$

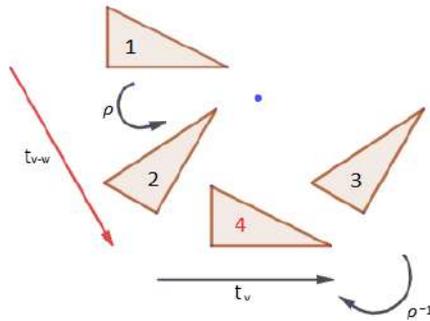


Paralelogramo fundamental

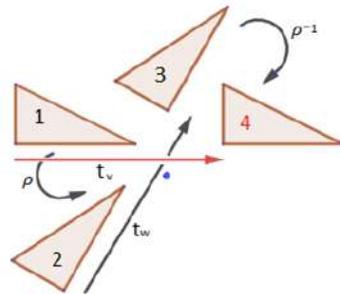
- $\rho^6 = \rho \circ \rho \circ \rho \circ \rho \circ \rho \circ \rho = I$



- $t_v^\rho = \rho^{-1} \circ t_v \circ \rho = t_{v-w}$



- $t_w^\rho = \rho^{-1} \circ t_w \circ \rho = t_v$



Gráfica 12. Representación de cada una de las relaciones del Grupo  $p6$ .

Fuente. Autoría propia (GeoGebra).

Los anteriores capítulos, lograron sumergir en los cimientos esenciales de la simetría, sentando así las bases sólidas que constituyeron en el epicentro de esta investigación. Estas nuevas secciones encenderán la llama de la curiosidad, guiando visualmente hacia los fascinantes mundos de los grupos de Friso y los grupos Cristalográficos, llevándonos más allá de los límites de la teoría pura hacia la apreciación de la matemática como una forma de arte.

Dos antecesores en este tipo de estudio, que indentifican estos patrones en los grupos de Friso y grupos Cristalográficos, son Víctor Albis y José Valencia, como se evidencia en el estudio referenciado en [8]. En esta investigación, Albis y Valencia se enfocan en realizar un análisis estadístico de la frecuencia de aparición de estos grupos en los diseños de cerámica presentes en la región Central de Panamá con el objetivo de validar y respaldar la existencia de una división periódica de las decoraciones cerámicas en dicha región. En Colombia, Albis realizó un estudio en la ornamentación de diversas culturas, como la Quimbaya, Muisca, Tairona y de Pupiales. Los diversos hallazgos constituyen valiosos antecedentes en el ámbito de los grupos cíclicos, grupos diédricos, grupos de friso y grupos cristalográficos. El estudio de Albis representa un importante avance multidisciplinario que vincula la matemática, la geometría y la antropología [13].

Ahora bien, ¡Prepárate para un viaje repleto de belleza, arte y la asombrosa armonía que la matemática tiene para revelar!

### **3. Grupos de frisos y grupos cristalográficos en Silvia**

Silvia, rincón mágico en el corazón de la región del Cauca-Colombia, es un lugar que irradia historia, cultura y comunidad. La visita a Silvia, permitió una experiencia única donde las tradiciones ancestrales se entrelazan con la vida cotidiana y donde la comunidad juega un papel central en la creación y preservación de su rica herencia cultural.

El viaje a Silvia no solo fue un viaje de descubrimiento cultural, sino también un intento de comprender cómo las estructuras implícitas de grupo en esta comunidad se reflejan en su arte, tradiciones y formas de vida. Se espera que, a medida que se avance en estas páginas, el

lector se sumerja en la riqueza cultural de Silvia y descubra las conexiones entre la creatividad artística y las estructuras sociales de esta comunidad que ha logrado preservar sus tradiciones de generación en generación.

A continuación, se presentan unas imágenes que capturan momentos significativos que buscan enriquecer la comprensión de la preservación de la herencia cultural de la comunidad Misak. Estas imágenes no solo son testimonios visuales de las prácticas culturales arraigadas en la comunidad, sino que también ofrecen pistas sobre las conexiones que hay entre la creatividad artística y las estructuras sociales.

En el tejido del tambalguari, que es el sombrero típico de la comunidad Misak, el cual se refleja la transmisión intergeneracional de habilidades y conocimientos. La Imagen 13 tomada en la institución Misak Mamá Manuela, ilustra cómo las tradiciones culturales se transmiten de manera práctica y vivencial, con los niños aprendiendo las técnicas ancestrales bajo la guía de sus mayores. Este acto de tejido no solo es una manifestación artística, sino también un vínculo tangible con la historia y la identidad cultural de la comunidad.



Imagen 13. *Tejido del Tambalguarí por el estudiante Heiber Velasco del grado séptimo de la Institución Educativa Misak Mamá Manuela.*

*Fuente. Autoría propia.*

La escuela Misak Mamá Manuela se convierte en un espacio donde la educación formal se entrelaza con la transmisión de conocimientos tradicionales y así el actuar docente refleja el papel crucial de la educación en la transmisión y preservación de la herencia cultural. La siguiente imagen ilustra cómo la comunidad se involucra activamente en la preservación de su cultura, con el docente desempeñando un papel clave en este proceso.



Imagen 14. *Segundo Yalanda, docente de la Institución Educativa Misak Mamá Manuela, junto a sus estudiantes del grado noveno.*

*Fuente. Autoría propia.*

La Imagen 15 de las artesanas tejiendo no solo muestran la destreza técnica, sino también la importancia del tejido como una forma de expresión artística arraigada en las estructuras sociales de la comunidad.

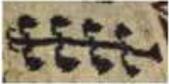


Imagen 15. *Artesanas del pueblo Misak. A la izquierda Clemencia Montano, a la derecha Diana Patricia Tunubalá.*

*Fuente. Autoría propia.*

En resumen, las imágenes ofrecen una ventana visual a las dinámicas sociales del pueblo Misak, destacando la preservación de la herencia cultural. Cada fotografía cuenta una historia única que contribuye a la comprensión integral de la riqueza cultural de la comunidad.

En seguida se presenta una tabla que detalla el significado de algunos símbolos descubiertos en Silvia. Esta herramienta visual proporciona una referencia clara y concisa para comprender la simbología presente en la comunidad, permitiendo a los lectores adentrarse en el significado profundo y cultural que estos símbolos encierran. Dichos significados fueron brindados por la artesana Diana Patricia Tunubalá.

Nombre	Símbolo	Significado	Grupo que lo contiene
Curva		Para los Misak, está relacionado con las montañas y el entorno.	 Grupo de Friso p1
Espiral		Representa la vida del Misak y el paso al plano espiritual.	 Grupo de Friso p2
Hoja de maíz		Representa la comida típica Misak.	 Grupo Cristalográfico pm

Zig zag		Representa las montañas en representación de la naturaleza y los caminos difíciles.	 <p>Grupo de Friso p/m</p>
Estrella		Representa los doce meses del año, lo que es el calendario Misak; y el centro representa lo que es la familia.	 <p>Grupo de Friso p2m</p>
Ojo de agua		Representa las lagunas sagradas que se tiene en los páramos.	 <p>Grupo de Friso p/m</p>

Tabla 1: Nombre y significado de algunos de los símbolos encontrados en Silvia.

El estudio de los grupos de frisos y cristalográficos en la cultura Misak revela una profunda conexión entre la simbología ancestral y las expresiones artísticas contemporáneas. Durante las visitas a la Institución Educativa Misak Mamá Manuela, la Misak Universidad, el local Artesanías Misak y el stand de arte Misak en el parque Caldas de Popayán, se logró recopilar un valioso registro fotográfico que destaca la riqueza cultural de este pueblo indígena.

Entre los grupos de frisos y cristalográficos identificados, se observa una diversidad de formas y patrones que se reflejan en diversos objetos como bolsos, chumbes, manillas, collares y en el tejido del tambalguarí. Estos elementos no solo son manifestaciones estéticas, sino que también poseen un profundo significado cultural que se transmite de generación en generación.

La Institución Educativa Misak Mamá Manuela y la Misak Universidad en la vereda Santiago, resguardo indígena de Guambía, se erigen como guardianes de la tradición cultural, enseñando a las nuevas generaciones la importancia de preservar y transmitir de manera inconsciente los conocimientos relacionados con los grupos de frisos y cristalográficos. Además, el local Artesanías Misak en el barrio El Porvenir del casco urbano de Silvia y el stand de arte Misak en el parque Caldas de Popayán son espacios donde estas expresiones culturales se exhiben y comparten con el público.

La selección y clasificación de las fotografías se realizó cuidadosamente, teniendo en cuenta los generadores y las relaciones presentes en los grupos de frisos y cristalográficos previamente descritos. Este proceso permitió resaltar la complejidad y la belleza de las figuras encontradas, proporcionando una visión más profunda de la cosmovisión Misak y su habilidad para fusionar lo tradicional con lo contemporáneo en sus expresiones artísticas.

### **3.1. Registro fotográfico de los grupos de frisos**

Para los grupos de Friso, se enfocará en capturar la esencia de las simetrías unidimensionales, destacando las traslaciones, rotaciones y reflexiones que caracterizan a estos grupos. Se buscará proporcionar una visión clara de la repetición y regularidad en una sola dirección.

Para ello, se inició el proceso con la realización de un registro fotográfico exhaustivo, el cual posteriormente sirvió como base para llevar a cabo una selección y clasificación meticulosa de las imágenes capturadas.

Durante la selección, se tuvo en cuenta las cualidades específicas de cada elemento bajo estudio, otorgando prioridad a las formas geométricas presentes en las imágenes y estableciendo un vínculo directo con los principios matemáticos previamente abordados. A partir de la figura base identificada, se procedió a estudiar cada movimiento efectuado por dicha figura. Este enfoque permitió realizar una clasificación sistemática en los distintos grupos de Friso.

En el proceso de clasificación, se llegó a la conclusión de que en Silvia, los tejidos representan de manera destacada los 7 grupos de frisos. Cada uno de estos grupos refleja patrones específicos que se manifiestan en los tejidos, proporcionando así una conexión tangible entre las manifestaciones visuales y los conceptos matemáticos subyacentes. Este enfoque integrado entre la observación visual y la teoría matemática permitió una clasificación precisa y reveladora de los elementos geométricos presentes en los tejidos de Silvia.

Se seleccionó un total de 15 fotografías que evidencian la presencia de los grupos de Friso. De manera representativa, se ha seleccionado un miembro de cada grupo, acompañado de su generador o figura base, así como una descripción detallada de sus respectivos movimientos. Para ampliar la perspectiva, se incluyen otros ejemplos de grupos de Friso en el Anexo 10.2: **Otros Grupos de Frisos Encontrados en Silvia**. Estos ejemplos adicionales brindan una visión más completa de la diversidad y riqueza de patrones geométricos presentes en los tejidos y manifestaciones visuales de la región.

El análisis detallado de cada representante, junto con la exposición de los generadores y movimientos asociados, permite una comprensión más profunda y apreciativa de la conexión entre la geometría matemática y las expresiones visuales en los tejidos de Silvia. Estas fotografías y su análisis contribuyen significativamente a la documentación visual y matemática de los grupos de frisos presentes en la región.

- Grupo  $p1 = \langle t \rangle$



Gráfica 13. Bolso tejido en hilo guajiro donde se identifica el grupo  $p1$ .

Fuente. Autoría propia.

- Grupo  $p2 = \langle t, \rho \rangle$



Gráfica 14. Bolso tejido en hilo guajiro donde se identifica el grupo  $p2$ .

Fuente. Autoría propia.

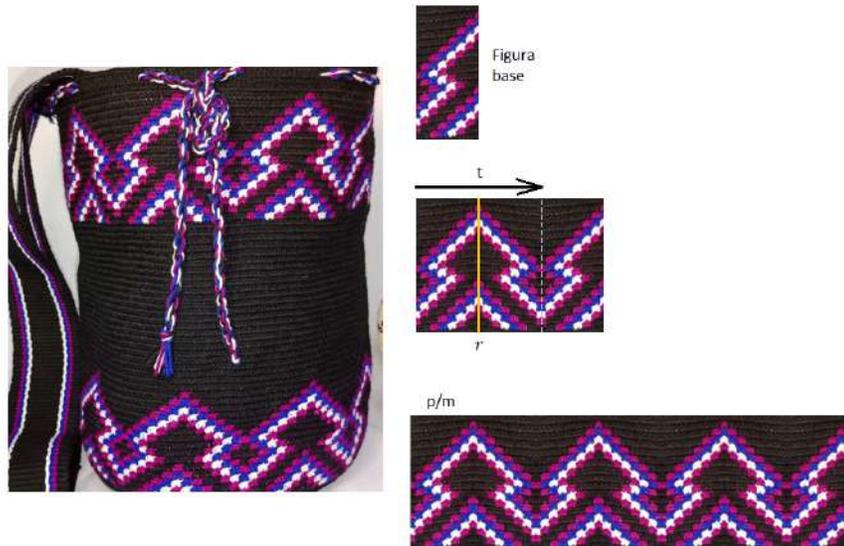
- Grupo  $pm = \langle t, \gamma \rangle$



Gráfica 15. Bolso tejido en lana natural y lana procesada combinados, donde se identifica el grupo  $pm$ .

Fuente. Autoría propia.

- Grupo  $p/m = \langle t, \gamma_y \rangle$



Gráfica 16. Bolso tejido en hilo guajiro donde se identifica el grupo  $p/m$ .

Fuente. Autoría propia.

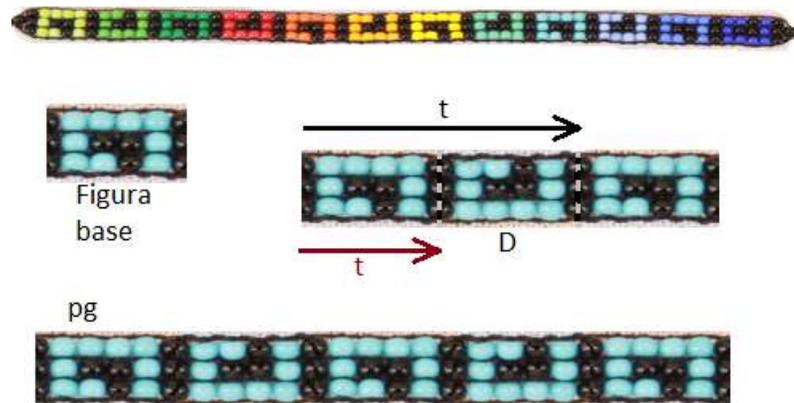
- Grupo  $p2m = \langle t, \rho, \gamma \rangle$



Gráfica 17. Bolso tejido en hilo guajiro donde se identifica el grupo  $p2m$ .

Fuente. Autoría propia.

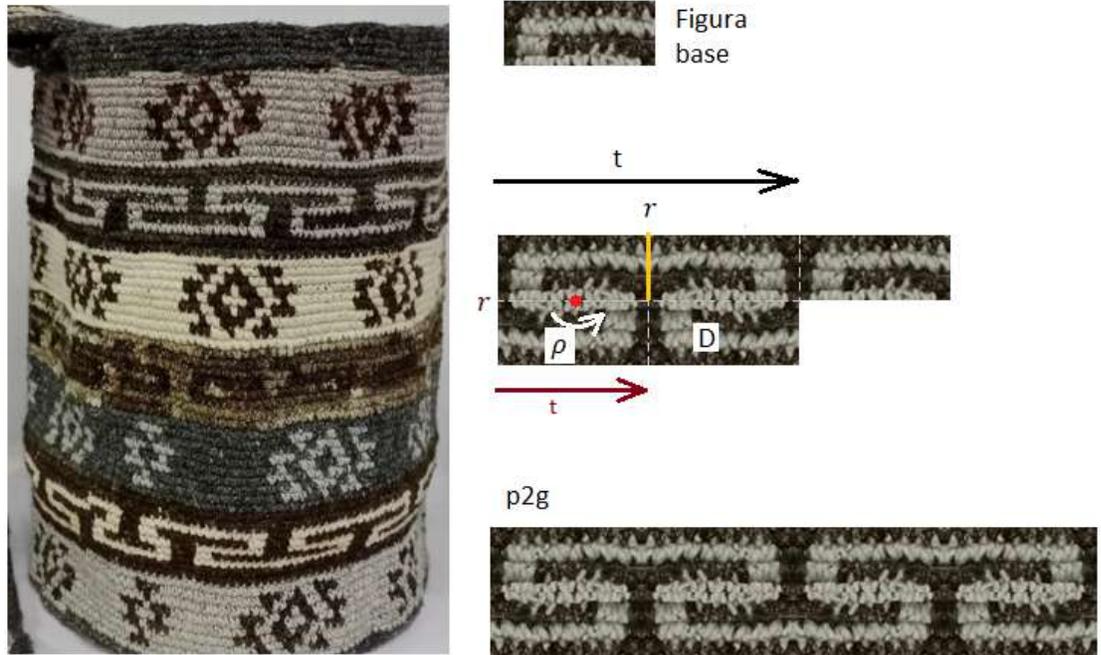
- Grupo  $pg = \langle t, D \rangle$



Gráfica 18. Manilla tejida en chaquiras donde se identifica el grupo  $pg$ .

Fuente. Autoría propia.

- Grupo  $p2g = \langle t, \rho, D \rangle$



Gráfica 19. *Bolso tejido en lana nartural y lana procesada combinados donde se identifica el grupo  $p2g$ .*

*Fuente. Autoría propia.*

### 3.2. Registro fotográfico de los grupos Cristalográficos

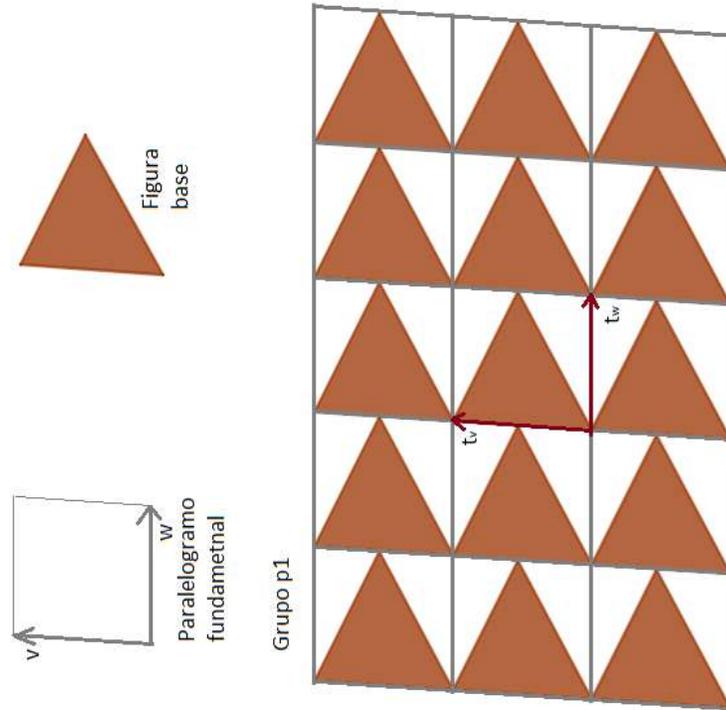
En cuanto a los grupos Cristalográficos, su análisis será más complejo y abarcador. Se incluirán elementos visuales que reflejen las simetrías bidimensionales presentes en estos grupos, incorporando rotaciones, reflexiones y traslaciones en el plano. Para ello, el proceso inició con la realización de un detallado registro fotográfico, que posteriormente sirvió como base para llevar a cabo una selección y clasificación meticulosa de las imágenes capturadas.

Durante la selección, se consideraron las cualidades específicas de cada elemento a estudiar, dando prioridad a las figuras geométricas presentes en las imágenes y estableciendo un sólido vínculo con los principios matemáticos; el análisis se centró en identificar patrones recurrentes de los cuales se extrajo la figura base, el paralelogramo fundamental, se estudió cada movimiento de dichos patrones dentro del paralelogramo y a partir de los movimiento efectuados, se identificaron una distintos grupos Cristalográficos.

Del registro fotográfico obtenido en Silvia se encontraron representados en sus tejidos 5 grupos Cristalográficos, específicamente:  $p1$ ,  $p2$ ,  $cm$ ,  $pm$  y  $pmm$ . Estos grupos capturan las esencias geométricas presentes en los tejidos, revelando una rica diversidad de patrones que se alinean con los conceptos matemáticos subyacentes. Este enfoque integrado entre la observación visual y la teoría matemática proporcionó una clasificación precisa y reveladora de los elementos geométricos presentes en los tejidos de Silvia.

Se seleccionó un total de 9 fotografías que exhiben algunos de los grupos cristalográficos presentes en Silvia. Para cada grupo seleccionado, se presenta un representante acompañado de su generador o figura base, el paralelogramo fundamental asociado, un análisis detallado dentro de este paralelogramo, y la construcción del grupo con respecto a los vectores de traslación. En el Anexo 10.3: **Otros Grupos Cristalográficos Encontrados en Silvia**, se incluyen ejemplos adicionales de grupos cristalográficos, cada uno con su figura base y el paralelogramo respectivo. Esta amplia variedad de ejemplos proporciona una visión más completa de la diversidad de patrones geométricos presentes en los tejidos y manifestaciones visuales de la región.

- Grupo  $p1 = \langle t_v, t_w \rangle$



Gráfica 20. Bolso tejido en hilo guajiro donde se identifica el grupo  $p1$ .

Fuente. Autoría propia.

- Grupo  $p2 = \langle t_v, t_w, \rho \rangle$



Gráfica 21. Bolso tejido en hilo guajiro donde se identifica el grupo  $p2$ .

Fuente. Autoría propia.

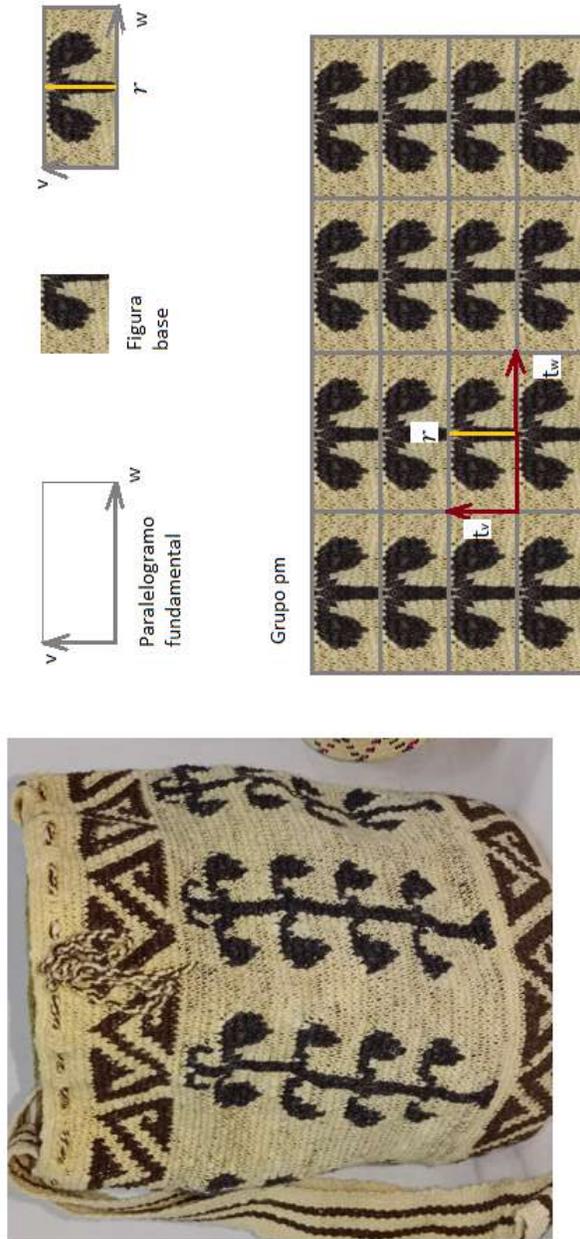
- Grupo  $cm = \langle t_v, t_w, \gamma \rangle$



Gráfica 22. Bolso tejido en hilo guajiro donde se identifica el grupo  $cm$ .

Fuente. Autoría propia.

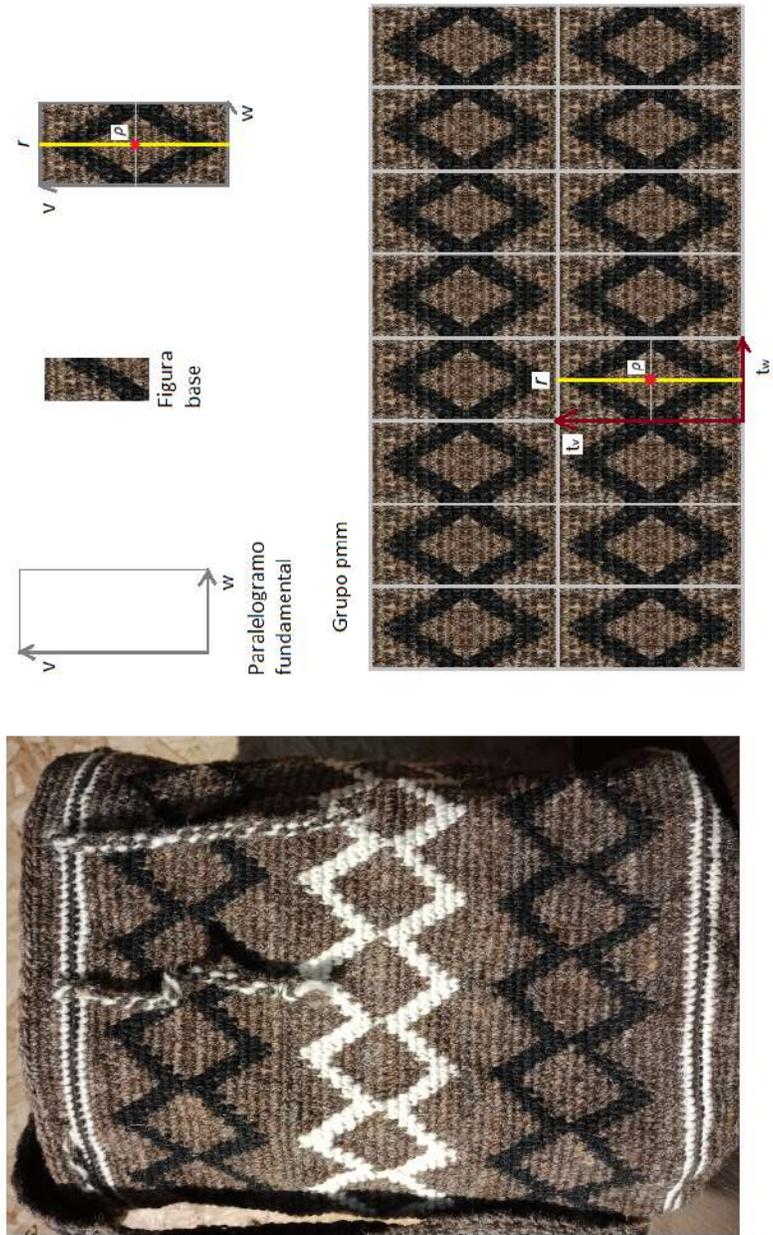
- Grupo  $pm = \langle t_v, t_w, \gamma \rangle$



Gráfica 23. Bolso tejido en lana natural hilada donde se identifica el grupo  $pm$ .

Fuente. Autoría propia.

- Grupo  $pmm = \langle t_v, t_w, \gamma, \rho \rangle$



Gráfica 24. Bolso tejido en lana natural y lana procesada combinada, donde se identifica el grupo  $pmm$ .

Fuente. Autoría propia.

## 4. Grupos de frisos y grupos cristalográficos en Tierradentro

La región de Tierradentro, en el corazón de Colombia, es un lugar donde la historia y la cultura se entrelazan en un misterio cautivante. Aventurarse en esta tierra es adentrarse en el pasado, explorar el enigma de antiguas civilizaciones y sumergirse en la maravilla de los hipogeos, tesoros arqueológicos escondidos bajo la tierra.

El viaje a Tierradentro fue una experiencia inolvidable. Mientras se deambula por este paisaje de verdes colinas y cielos azules, se persive la promesa de descubrimientos en las profundidades de la tierra. Los hipogeos, misteriosos sepulcros subterráneos excavados por los antiguos habitantes de la región, se alzan como testimonios silenciosos de una cultura olvidada. Cada paso hacia estas estructuras ancestrales desenterraba no solo la historia, sino también la posibilidad de revelar las complejas estructuras de grupo que podrían haber en ellas.

Este viaje permite explorar en detalle los hipogeos, capturando sus características y analizando las pistas que podrían sugerir la existencia de estructuras de grupo en la creación y utilización de estas maravillosas estructuras arqueológicas. Las preguntas surgen de manera natural: ¿Cómo se organizaron las comunidades para construir estos hipogeos? ¿Qué simbolismo y significado subyacen en las formas y patrones en sus muros?

En este estudio, se comparte el registro fotográfico del viaje a Tierradentro y el análisis de los hipogeos, con el propósito de descubrir estructuras de grupo en el arte de esta enigmática región.

En Tierradentro se visitaron los siguientes lugares: *Segovia, el Duende, San Andrés y el Aguacate*. Las imágenes que a continuación se comparten ofrecen una cautivadora visión de las maravillas que Tierradentro tiene para ofrecer. Estas fotografías capturan la esencia de un lugar que fusiona la grandiosidad de su entorno natural con la maravilla de los hipogeos. La majestuosidad del paisaje se entrelaza armoniosamente con la riqueza histórica, creando un escenario único donde la naturaleza y la herencia arqueológica convergen en una experiencia asombrosa.

■ Segovia



Imagen 16. *Segovia - Tierradentro.*

*Fuente. Autoría propia.*



Imagen 17. *Entrada a los hipogeos. Segovia - Tierradentro.*

*Fuente. Autoría propia.*

- El Duende



Imagen 18. *Vista desde El Duende - Tierradentro.*

*Fuente. Autoría propia.*

- San Andrés



Imagen 19. *San Andrés - Tierradentro.*

*Fuente. Autoría propia.*



Imagen 20. *Vista de San Andrés - Tierradentro.*

*Fuente. Autoría propia.*

■ Alto de El Aguacate



Imagen 21. *Alto de El Aguacate - Tierradentro.*

*Fuente. Autoría propia.*



Imagen 22. *Entrada a los hipogeos. Alto de El Aguacate - Tierradentro.*

*Fuente. Autoría propia.*



Imagen 23. *Análisis de las fotografías dentro de las tumbas. Alto de El Aguacate - Tierradentro. De izquierda a derecha: Samin Cerón, Sara Martínez y Erika Portilla.*

*Fuente. Autoría propia.*

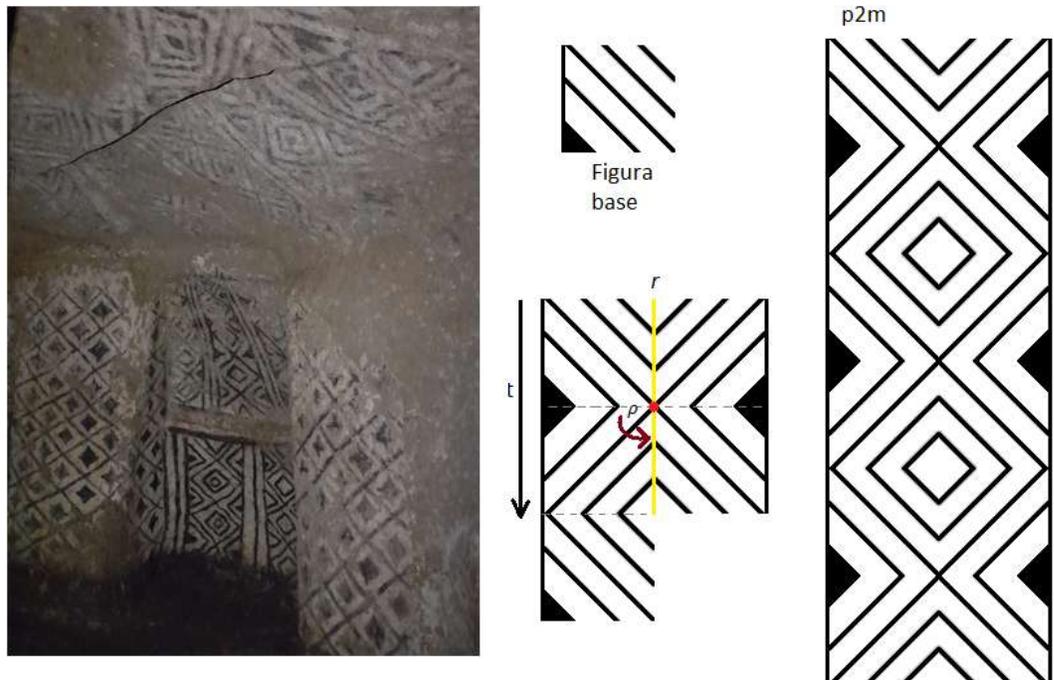
#### 4.1. Registro fotográfico de los grupos de frisos

En el análisis del registro fotográfico que se obtuvo en Tierradentro se identificaron en las pinturas de sus hipogeos de manera destacada 3 grupos de Friso, específicamente:  $p2m$ ,  $pm$  y  $p/m$ . Estos grupos capturan las esencias geométricas presentes en las pinturas, revelando una rica diversidad de patrones que se alinean con los conceptos matemáticos subyacentes.

Se seleccionó un conjunto de 12 fotografías que capturan los distintos grupos de frisos presentes en Tierradentro. De cada lugar visitado, se exhiben dos representantes de frisos. En el Anexo 10.4: **Otros Grupos de Friso Encontrados en Tierradentro**, se presentan ejemplos adicionales de grupos de frisos.

- San Andrés

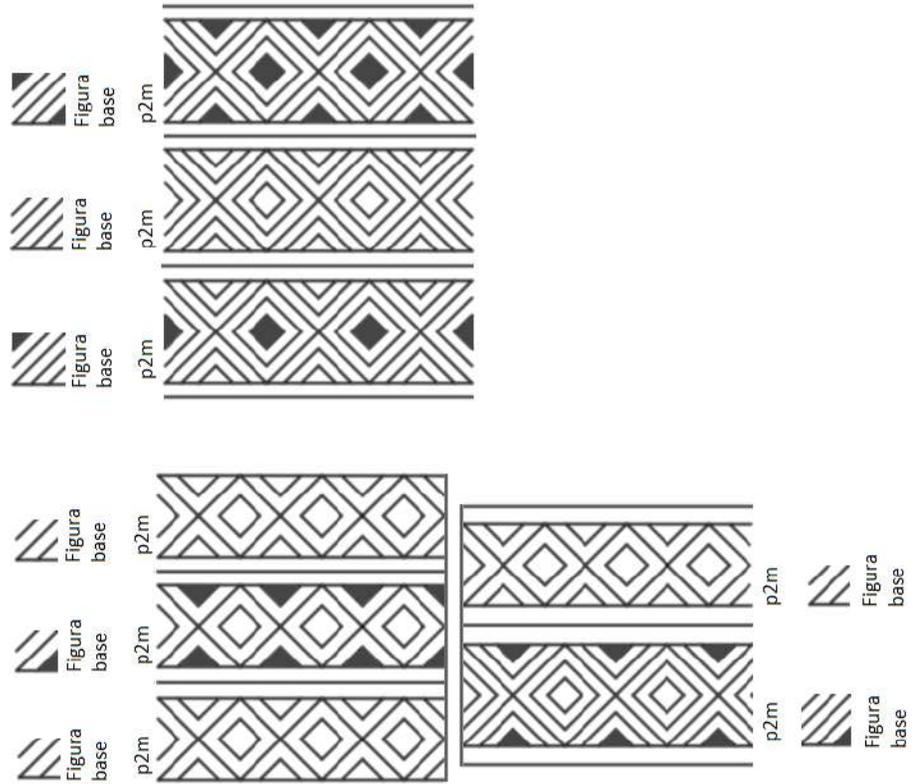
- Grupo  $p2m = \langle t, \rho, \gamma \rangle$



Gráfica 25. Hipogeo SA5, San Andrés, Tierradentro.

Fuente. Autoría propia.

- Grupo  $p2m = \langle t, \rho, \gamma \rangle$



Gráfica 26. *Hipogeo SA5, San Andrés, Tierradentro.*

*Fuente. Autoría propia.*

■ Segovia

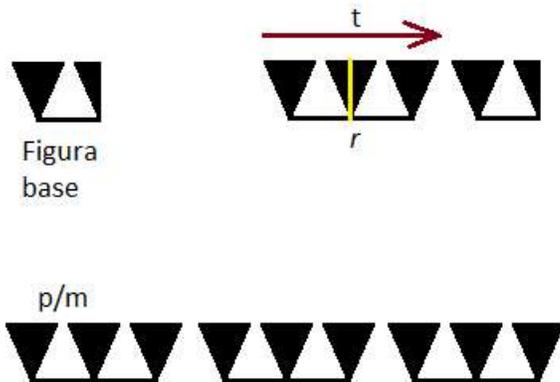
- Grupo  $pm = \langle t, \gamma \rangle$



Gráfica 27. *Hipogeo T9, Segovia, Tierradentro.*

*Fuente. Autoría propia.*

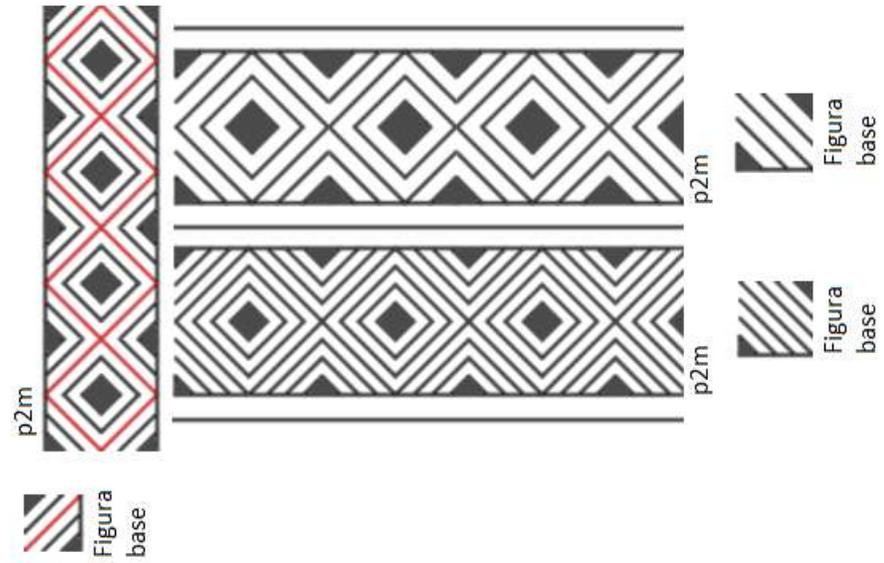
- Grupo  $p/m = \langle t, \gamma_y \rangle$



Gráfica 28. Hipogeo T30, Segovia, Tierradentro.

Fuente. Autoría propia.

- Grupo  $p2m = \langle t, \rho, \gamma \rangle$

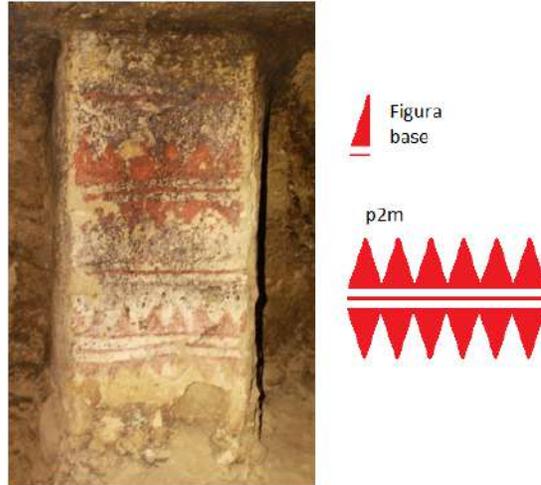


Gráfica 29. *Hipogeo T10, Segovia, Tierradentro.*

*Fuente. Autoría propia.*

- El Duende

- Grupo  $p2m = \langle t, \rho, \gamma \rangle$

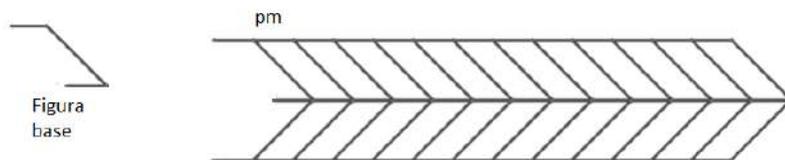


Gráfica 30. *Hipogeo T3, El Duende, Tierradentro.*

*Fuente. Autoría propia.*

- El Aguacate

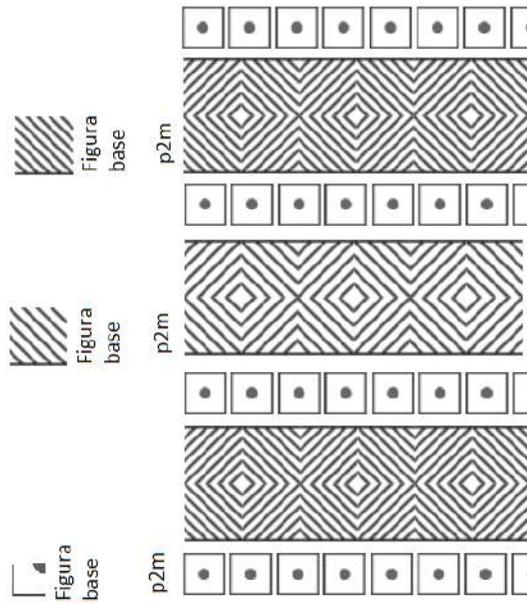
- Grupo  $pm = \langle t, \gamma \rangle$



Gráfica 31. *Hipogeo, EL Aguacate, Tierradentro.*

*Fuente. Autoría propia.*

- Grupo  $p2m = \langle t, \rho, \gamma \rangle$



Gráfica 32. *Hipogeo, El Aguacate, Tierradentro.*

*Fuente. Autoría propia.*

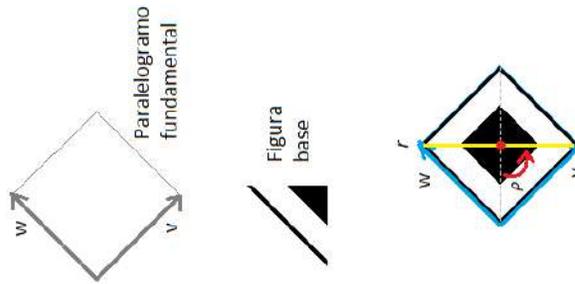
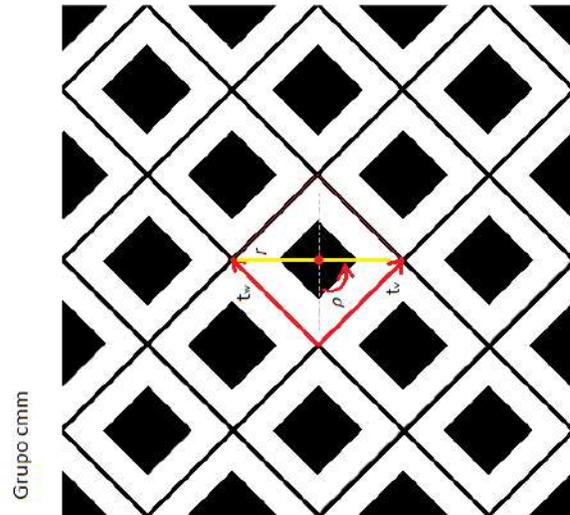
## 4.2. Registro fotográfico de los grupos cristalográficos

De los patrones que se encontraron en el registro fotográfico se identificó la figura base, el paralelogramo fundamental y al estudiar los movimiento efectuados dentro del paralelogramo, se encontraron presentes en Tierradentro 3 grupos Cristalográficos, especialmente:  $cmm$ ,  $p4m$  y  $pmm$ .

Se seleccionó 7 fotografías en las que se observa algunos de los grupos Cristalográficos. De cada sitio visitado y donde se econtró algún grupo, se deja el representante del grupo con su generador (o figura base), su paralelogramo fundamental, el análisis dentro del paralelogramo y la construcción del grupo respecto a los vectores de traslación; en el anexo 10.5: **Otros grupos Cristalográficos encontrados en Tierradentro** se tienen otros ejemplos de los grupos encontrados, cada uno de estos con la figura base y su respectivo paralelogramo.

- San Andrés

- Grupo  $cm\bar{m} = \langle t_v, t_w, \gamma, \rho \rangle$

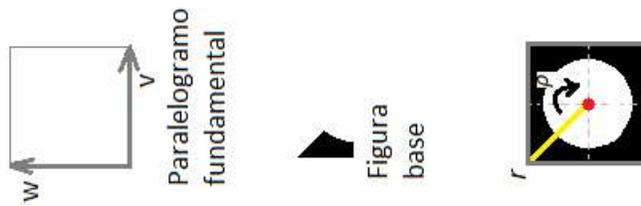
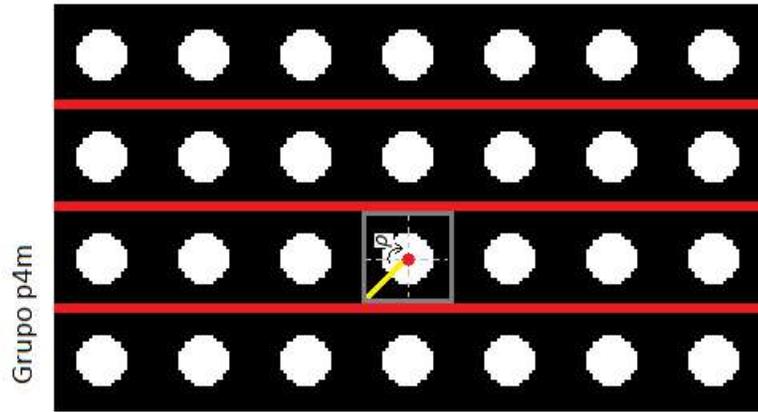


Gráfica 33. Hipogeo SA5, San Andrés, Tierradentro.

Fuente. Autoría propia.

- Segovia

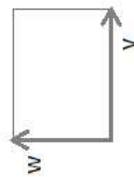
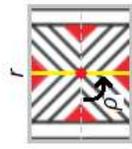
- Grupo  $p4m = \langle t_v, t_w, \gamma, \rho \rangle$



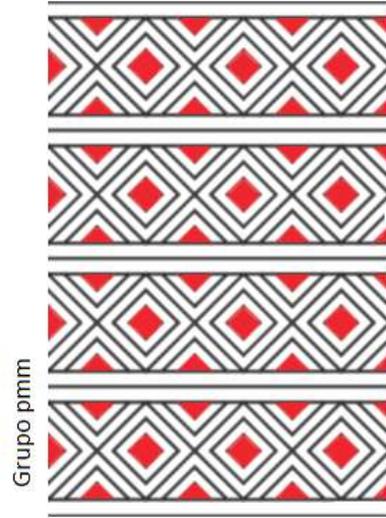
Gráfica 34. *Hipogeo T30, Segovia, Tierradentro.*

*Fuente. Autoría propia.*

- Grupo  $pmm = \langle t_v, t_w, \gamma, \rho \rangle$



Paralelogramo  
fundamental



Gráfica 35. *Hipogeo T9, Segovia, Tierradentro.*

*Fuente. Autoría propia.*

## 5. Grupos de frisos y grupos cristalográficos en San Agustín

El Parque Arqueológico de San Agustín, ubicado en las majestuosas montañas del suroeste de Colombia, es un lugar que destila misterio y asombro en cada rincón. Como un testigo silente de civilizaciones antiguas, este sitio arqueológico es un tesoro cultural, un escenario donde la piedra cobra vida en formas esculpidas con ingenio y devoción. La visita a este parque no solo fue un viaje en el tiempo, sino una inmersión en la belleza y la complejidad de las creaciones de la antigua civilización de San Agustín.

Cada monumento en San Agustín invita a descubrir y analizar obras de arte arqueológico, cada escultura parecía hablar un lenguaje antiguo, y el objetivo era descifrarlo y compartir los hallazgos con aquellos interesados en la intersección entre estos monumentos y las matemáticas con el propósito de explorar la posible existencia de estructuras de grupo en el arte y la arquitectura de esta enigmática región. Tratando de comprender cómo las comunidades se organizaron para dar forma a estas impresionantes creaciones y cómo la influencia de las estructuras de grupo perdura en estas manifestaciones culturales.

Las imágenes que a continuación se comparten ofrecen una breve pero cautivadora visión de las maravillas que San Agustín tiene para ofrecer. Estas fotografías capturan la esencia de un lugar que fusiona la majestuosidad de su entorno natural con el legado arqueológico de una civilización antigua.



Imagen 24. Parque y Museo arqueológico de Obando. El Obando, San Agustín - Huila.  
*Fuente. Autoría propia.*



Imagen 25. Casa de la familia Ñañez Avirama. El Obando, San Agustín - Huila. De izquierda  
a derecha: Samin Cerón y Sara Martínez.  
*Fuente. Autoría propia.*



Imagen 26. *Puente encima de la Fuente del Lavapatás, San Agustín - Huila. De izquierda a derecha: Samin Cerón, Sara Martínez y Wilson Martínez.*  
*Fuente. Autoría propia.*

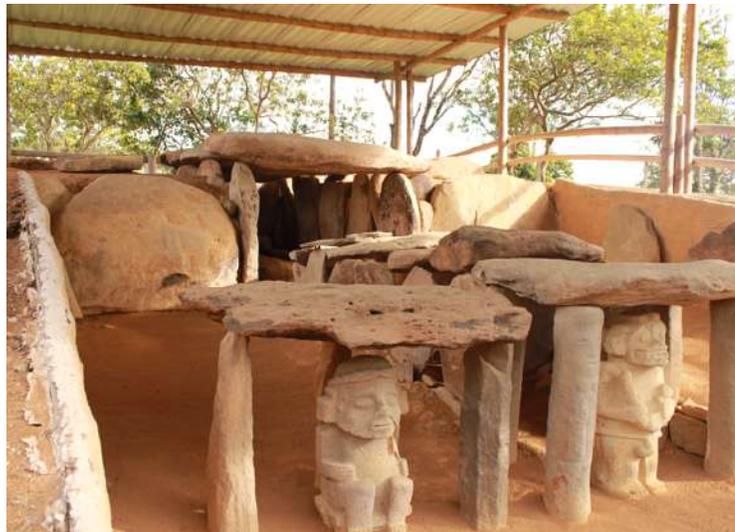


Imagen 27. *Tumba perteneciente al Parque Arqueológico de San Agustín - Huila.*  
*Fuente. Autoría propia.*



Imagen 28. *Estatua perteneciente al Parque Arqueológico Alto de los Ídolos, Isnos - Huila. En la fotografía se encuentra Erika Portilla.*

*Fuente. Autoría propia.*

### 5.1. Registro fotográfico de los grupos de frisos

En la clasificación del registro fotográfico que se obtuvo en San Agustín, se determinó que en San Agustín se encuentran representados 6 grupos de Friso, específicamente:  $p1$ ,  $p2$ ,  $pm$ ,  $p/m$ ,  $p2m$  y  $p2g$ . Esta diversidad de grupos captura las esencias geométricas presentes en las expresiones artísticas de San Agustín, revelando una rica variedad de patrones que se alinean con los conceptos matemáticos subyacentes.

Se seleccionó un total de 14 fotografías que capturan los diversos grupos de Friso presentes en los lugares visitados en San Agustín. De cada sitio explorado, se exhiben dos elementos representativos de frisos. En el anexo 10.6: **Otros Grupos de Friso Encontrados en San Agustín**, se presentan ejemplos adicionales de grupos de Friso.

- El Obando, San Agustín - Huila.

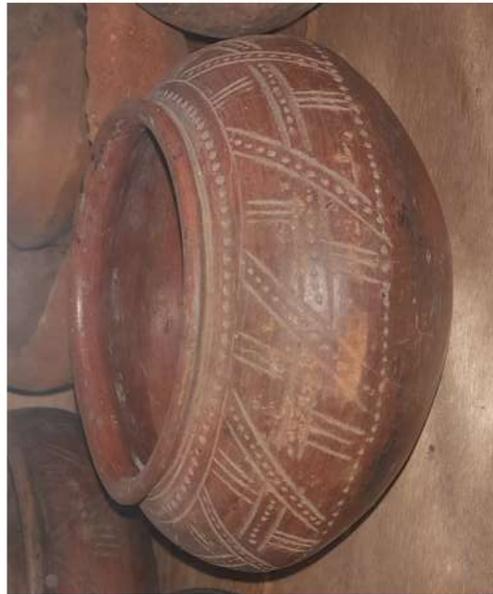
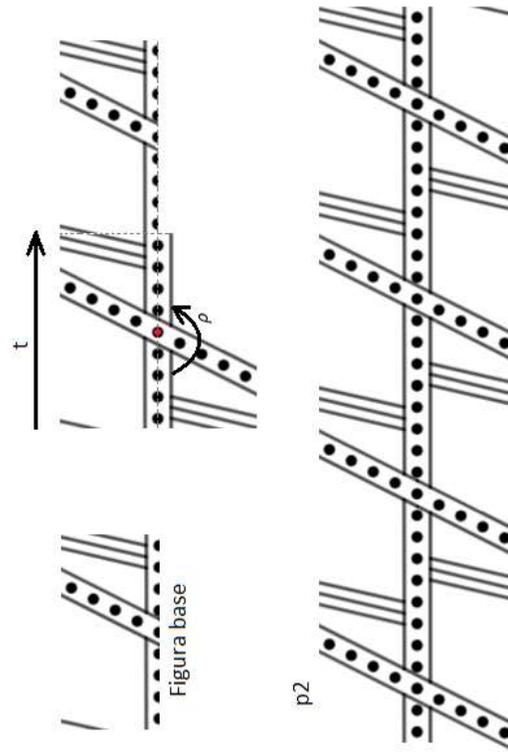
- Grupo  $p1 = < t >$



Gráfica 36. Vasija perteneciente al Museo arqueológico de Obando, San Agustín - Huila.

Fuente. Autoría propia.

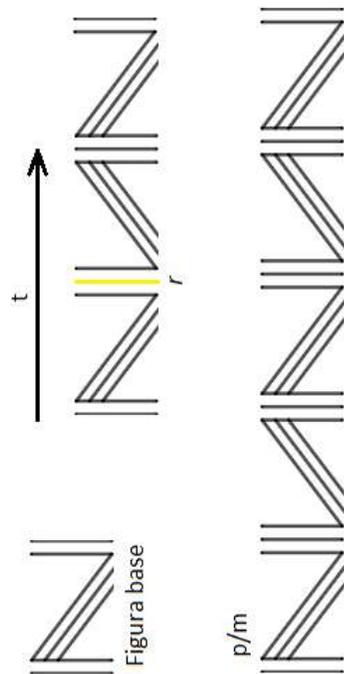
- Grupo  $p2 = \langle t, \rho \rangle$



Gráfica 37. Vasija perteneciente a la familia Ñañez Avirama en el Obando, San Agustín - Huila.

Fuente. Autoría propia.

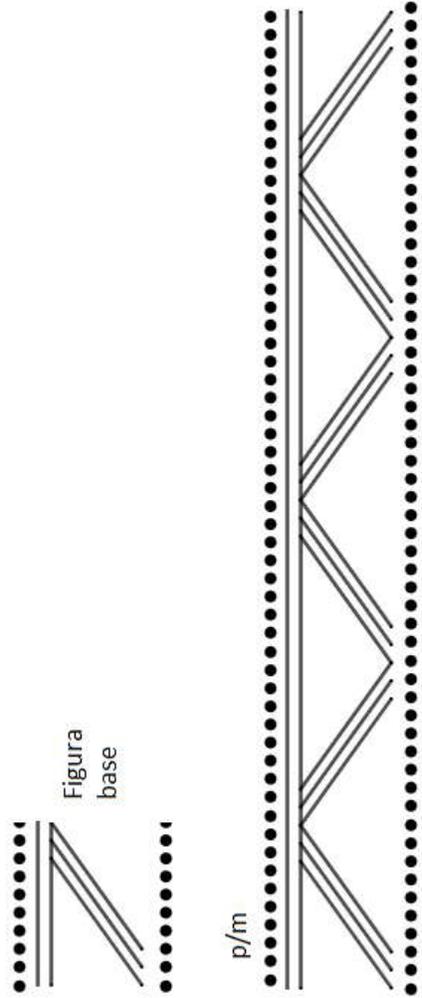
- Grupo  $p/m = \langle t, \gamma_y \rangle$



Gráfica 38. *Vasija perteneciente a la familia Ñañez Avirama en el Obando, San Agustín - Huila.*

*Fuente. Autoría propia.*

- $p/m = \langle t, \gamma_y \rangle$

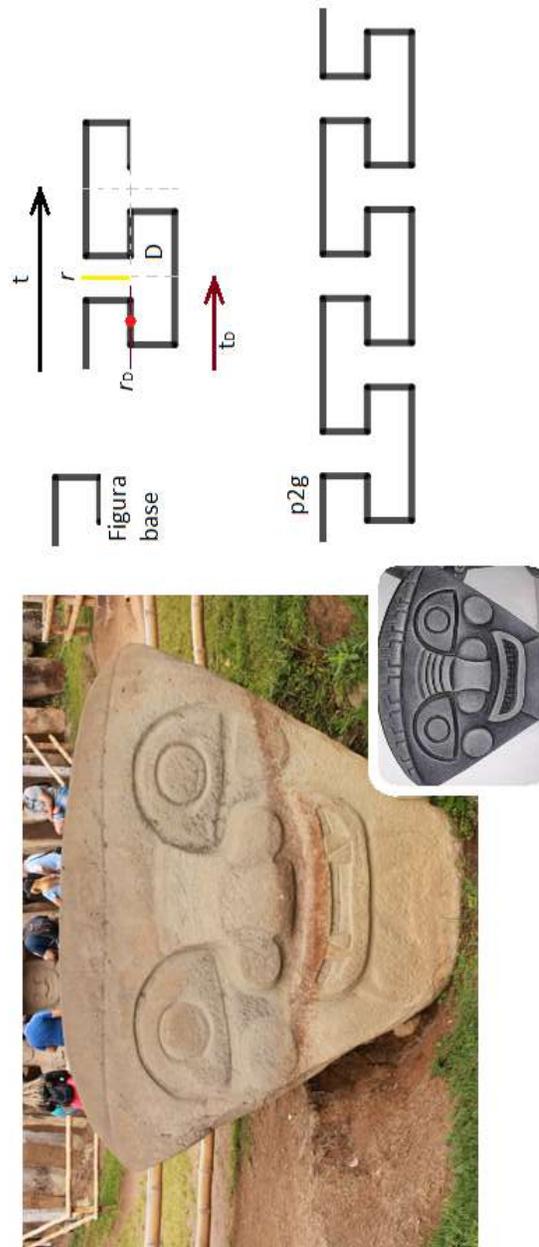


Gráfica 39. Vasija perteneciente al Museo arqueológico de Obando, San Agustín - Huila.

Fuente. Autoría propia.

- Parque Arqueológico de San Agustín - Huila

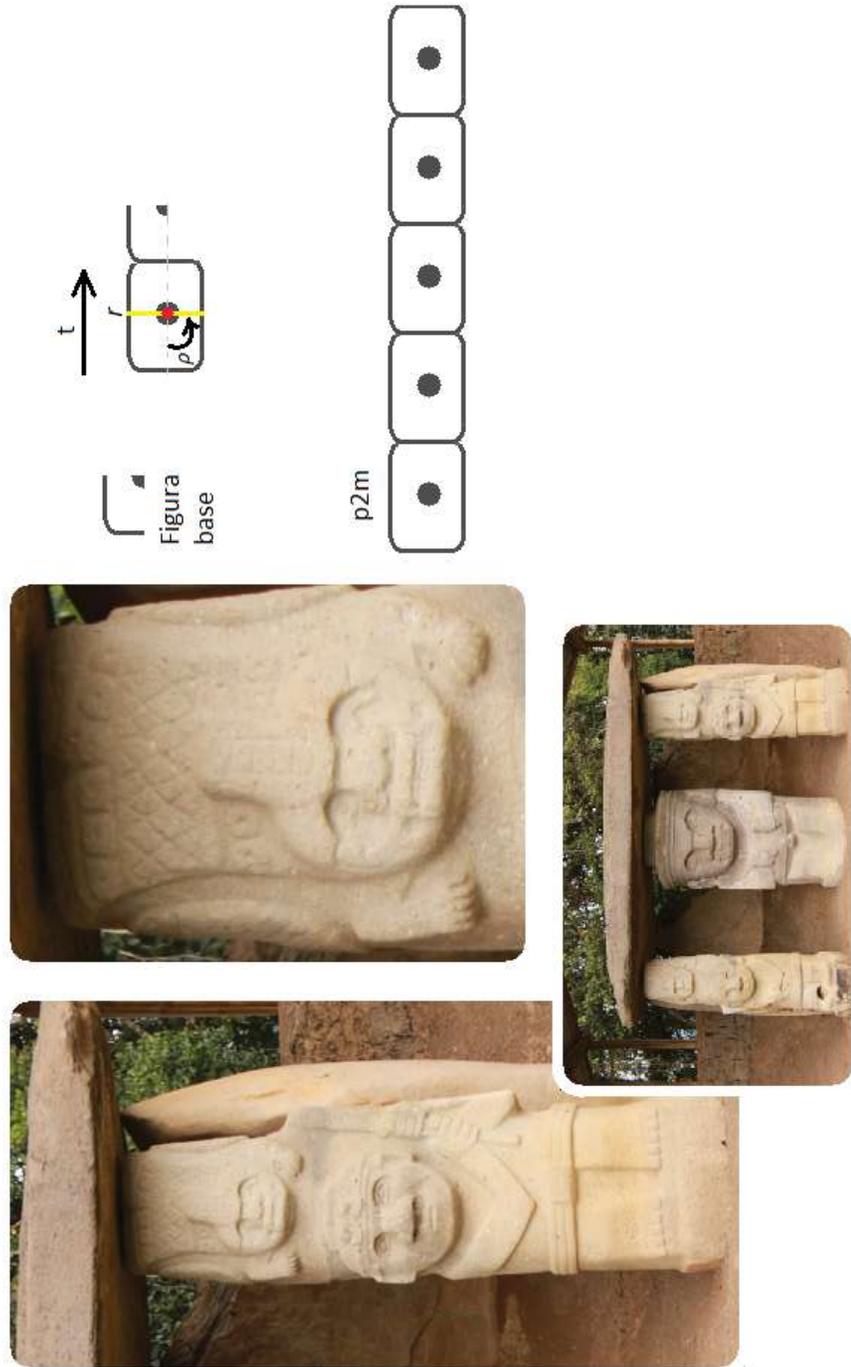
- Grupo  $p2g = \langle t, \rho, D \rangle$



Gráfica 40. *Monumento funerario situado en el parque Arqueológico de San Agustín - Huila.*

*Fuente. Autoría propia.*

- Grupo  $p2m = \langle t, \rho, \gamma \rangle$



Gráfica 41. *Estatua del montículo oriental situada en el parque Arqueológico de San Agustín - Huila.*

*Fuente. Autoría propia.*

- Parque arqueológico Alto de los Ídolos, Isnos - Huila

- Grupo  $pm = \langle t, \gamma \rangle$



Gráfica 42. Pintura sobre una piedra de una de las tumbas pertenecientes al Parque Arqueológico Alto de los Ídolos, Isnos - Huila.

Fuente. Autoría propia.

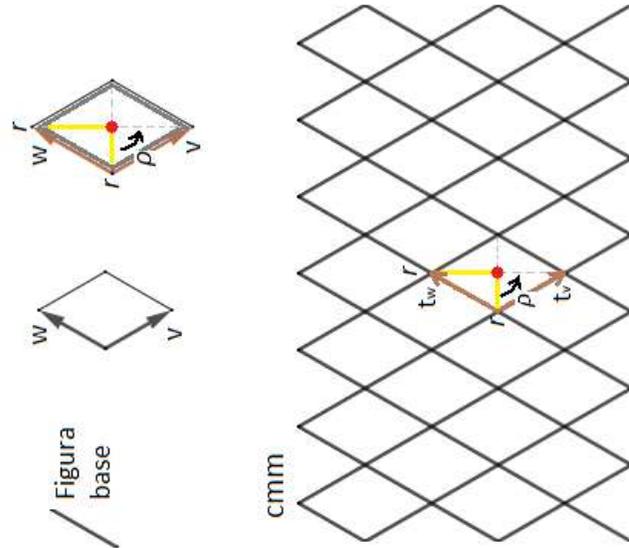
## 5.2. Registro fotográfico de los grupos cristalográficos

En la clasificación del registro fotográfico se encontró que una estatua de San Agustín contine el grupo cristalográfico  $pmm$ . Siendo San Agustín, el lugar con menos grupos cristalográficos encontrados.

Se seleccionó una foto en la que se observa un grupo Cristalográfico  $pmm$ ; de este grupo se identifica el representante con su generador (o figura base), su paralelogramo fundamental, el análisis dentro del paralelogramo y la construcción del grupo respecto a los vectores de traslación.

- Parque Arqueológico de San Agustín - Huila.

- Grupo  $pmm = \langle t_v, t_w, \gamma, \rho \rangle$



Gráfica 43. Grupo  $cmm$  encontrado en estadua situada en el parque Arqueológico de San Agustín - Huila.

Fuente. Autoría propia.

## 6. Grupos de frisos y grupos cristalográficos en la Alhambra

La Alhambra, majestuoso palacio ubicado en Granada, España, construido durante el siglo XIV por gobernantes islámicos, se erige como un tesoro invaluable para los matemáticos. Su renombrada arquitectura destaca por la precisión, la complejidad de sus patrones geométricos y las proporciones arquitectónicas cuidadosamente calculadas. Se sostiene que este monumento presenta, en su estructura, al menos un ejemplo de cada uno de los grupos de Friso y grupos Cristalográficos mencionados anteriormente. La Alhambra es reconocida no solo por su esplendor visual, sino también por la riqueza matemática que subyace en cada detalle arquitectónico.

Este palacio no solo constituye un testimonio histórico y artístico, sino que también representa un recurso invaluable para la exploración matemática de los grupos de Friso y Cristalográficos. La Alhambra, con su amalgama de arte y matemáticas, continúa siendo un fascinante campo de estudio y admiración para aquellos que buscan entender la intersección entre la creatividad arquitectónica y la precisión matemática e inspiración investigativa, como lo fue para este trabajo.

A continuación, se presentan algunas imágenes que capturan la esencia y la majestuosidad de la Alhambra, estas imágenes revelan las maravillas artísticas que han perdurado a lo largo de los siglos.



Imagen 29. *Patio de la Acequia, Alhambra. Granada - España.*

*Fuente. AlhambraDeGranada.org*



Imagen 30. *Salón de Embajadores, Alhambra. Granada - España.*

*Fuente. AlhambraDeGranada.org*



Imagen 31. *Mexuar, Alhambra. Granada - España.*

*Fuente. AlhambraDeGranada.org*

### **6.1. Registro fotográfico de los grupos de frisos**

Se dice que la Alhambra es un lugar singular que alberga los siete grupos de frisos en su arquitectura, un fenómeno que resalta la extraordinaria riqueza artística de este monumento.

A continuación se presentan los 7 grupos de Friso que están presentes en la Alhambra.

- Grupo  $p1 = \langle t \rangle$



Imagen 32. Grupo  $p1$  presente en la Alhambra.

Fuente. B. Lynn Bodner.

- Grupo  $p2 = \langle t, \rho \rangle$



Imagen 33. Grupo  $p2$  presente en la Alhambra.

Fuente. B. Lynn Bodner.

- Grupo  $pm = \langle t, \gamma \rangle$



Imagen 34. Grupo  $pm$  presente en la Alhambra.

Fuente. B. Lynn Bodner.

- Grupo  $p/m = \langle t, \gamma_y \rangle$



Imagen 35. Grupo  $p/m$  presente en la Alhambra.

Fuente. B. Lynn Bodner.

- Grupo  $p2m = \langle t, \rho, \gamma \rangle$



Imagen 36. Grupo  $p2m$  presente en la Alhambra.

Fuente. B. Lynn Bodner.

- Grupo  $pg = \langle t, D \rangle$



Imagen 37. Grupo  $pg$  presente en la Alhambra.

Fuente. B. Lynn Bodner.

- $p2g = \langle t, \rho, D \rangle$

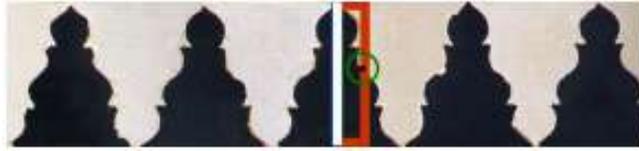


Imagen 38. Grupo  $p2g$  presente en la Alhambra.

Fuente. B. Lynn Bodner.

## 6.2. Registro fotográfico de los grupos cristalográficos

En 1987 Rafael Pérez Gómez encontró modelos de los 17 grupos cristalográficos presentes en la Alhambra, incorporando la consideración de colores en esta clasificación. Este enfoque no solo resalta la complejidad geométrica de la arquitectura, sino que también destaca la importancia estética de los elementos cromáticos en la ornamentación de la Alhambra, ver referencia [12].

- **Grupos de orden 1:** No tienen rotaciones.

- $p1 = \langle t_v, t_w \rangle$ .



$p1$

Imagen 39. Grupo Cristalográfico  $p1$ . Sala de la Barca. Alhambra, Granada - España.

Fuente. Elora Prados Raya (YouTube)

- $cm = \langle t_v, t_w, \gamma \rangle$

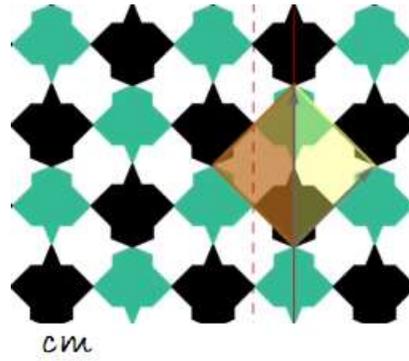


Imagen 40. Grupo Cristalográfico  $cm$ . Salón del Trono. Alhambra, Granada - España.

Fuente. Elora Prados Raya (YouTube)

- $pg = \langle t_v, t_w, D \rangle$

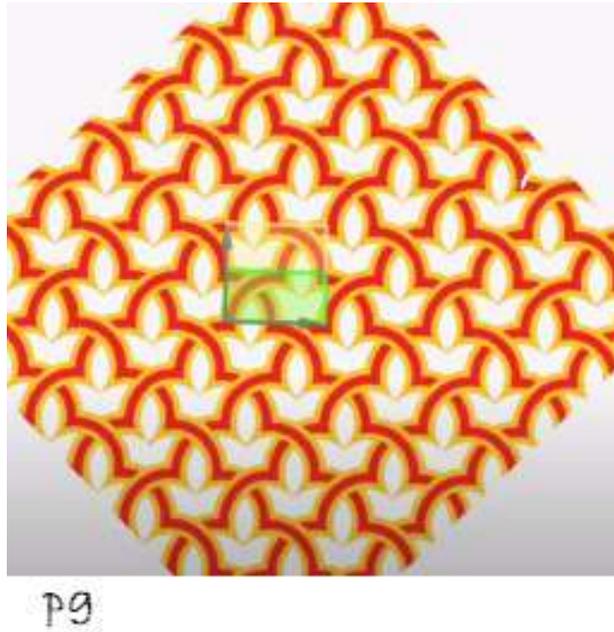


Imagen 41. Grupo Cristalográfico  $pg$ . Puerta del Vino. Alhambra, Granada - España.

Fuente. Elora Prados Raya (YouTube)

- $pm = \langle t_v, t_w, \gamma \rangle$

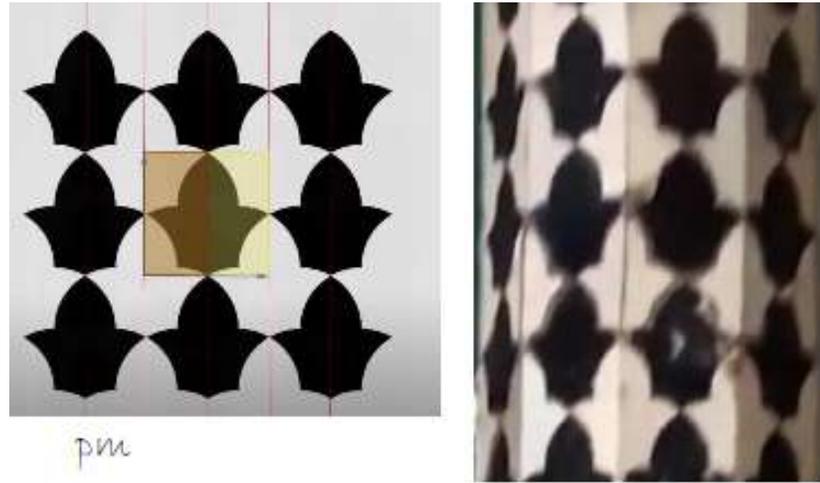


Imagen 42. Grupo Cristalográfico  $pm$ . Sala de la Barca. Alhambra, Granada - España.

Fuente. Elora Prados Raya (YouTube)

- **Grupos de orden 2:** Tiene rotaciones de  $180^\circ$ .

- $p2 = \langle t_v, t_w, \rho \rangle$

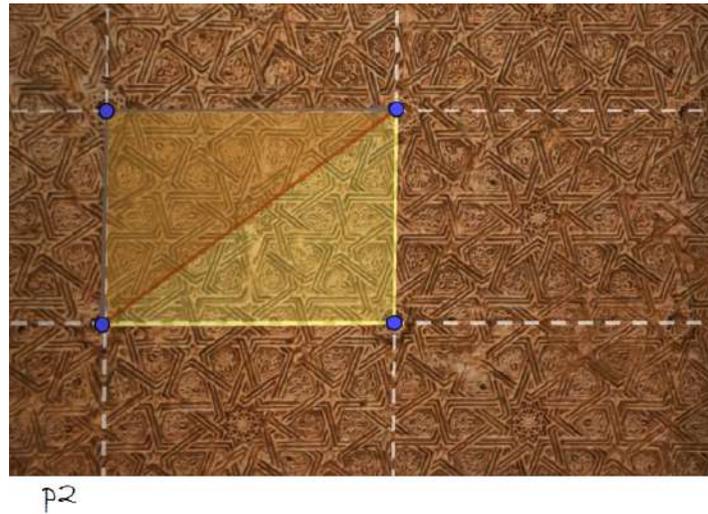
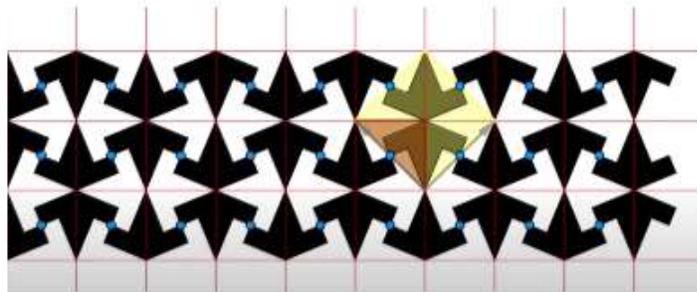


Imagen 43. Grupo Cristalográfico  $p2$ . Patio de la Acequia. Alhambra, Granada - España.

Fuente. Elora Prados Raya (YouTube)

- $cmm = \langle t_v, t_w, \gamma, \rho \rangle$

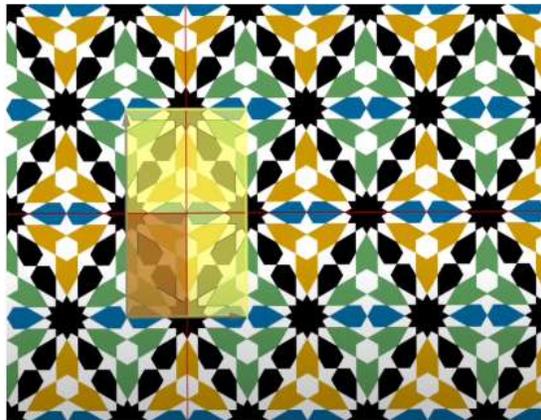


*cmm*

Imagen 44. Grupo Cristalográfico *cmm*. Mexuar. Alhambra, Granada - España.

Fuente. Elora Prados Raya (YouTube)

- $pmm = \langle t_v, t_w, \gamma, \rho \rangle$



*pmm*



Imagen 45. Grupo Cristalográfico *pmm*. Sala de los Reyes. Alhambra, Granada - España.

Fuente. Elora Prados Raya (YouTube)

- $pmg = \langle t_v, t_w, \gamma, \rho \rangle$

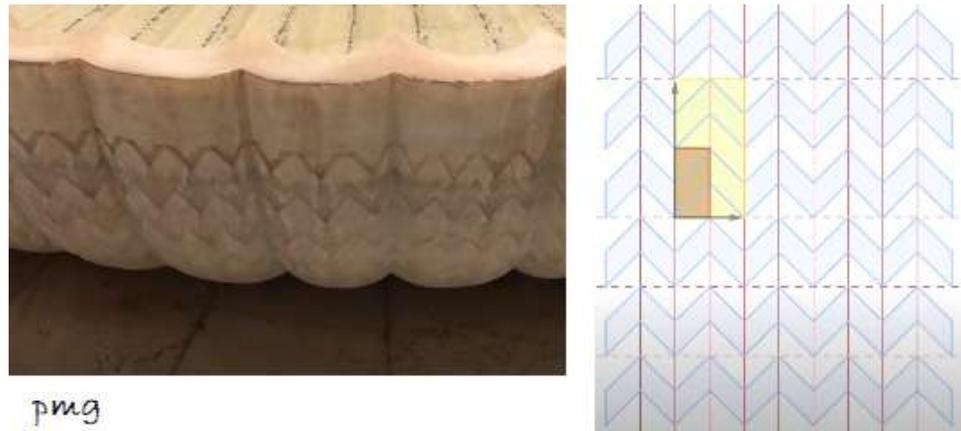


Imagen 46. Grupo Cristalográfico  $pmg$ . Patio Dorado. Alhambra, Granada - España.

Fuente. Elora Prados Raya (YouTube)

- $pgg = \langle t_v, t_w, D, \rho \rangle$



Imagen 47. Grupo Cristalográfico  $pgg$ . Mexuar. Alhambra, Granada - España.

Fuente. Elora Prados Raya (YouTube)

- **Grupos de orden 3:** Tiene rotaciones de  $120^\circ$ .

- $p3 = \langle t_v, t_w, \rho \rangle$

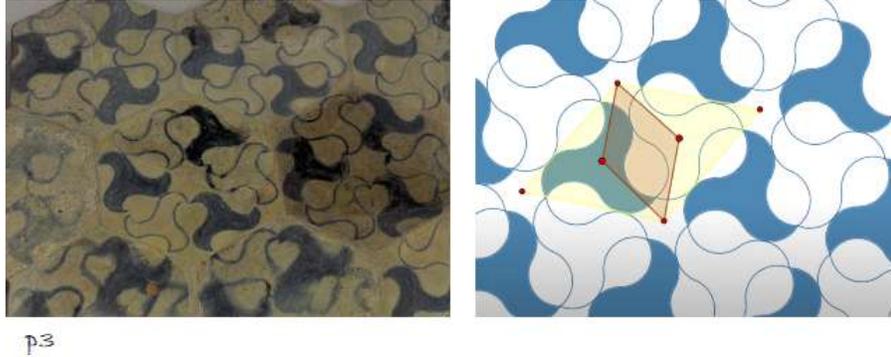


Imagen 48. Grupo Cristalográfico  $p3$ . Alhambra, Granada - España.

Fuente. Elora Prados Raya (YouTube)

- $p31m = \langle t_v, t_w, \gamma, \rho \rangle$

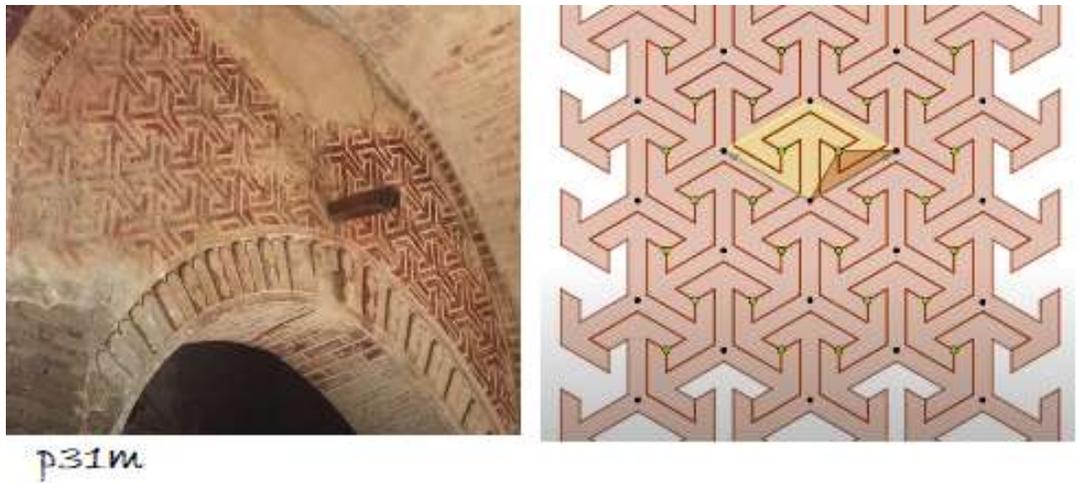


Imagen 49. Grupo Cristalográfico  $p31m$ . Puerta del vino. Alhambra, Granada - España.

Fuente. Elora Prados Raya (YouTube)

- $p3m1 = \langle t_v, t_w, \gamma, \rho \rangle$

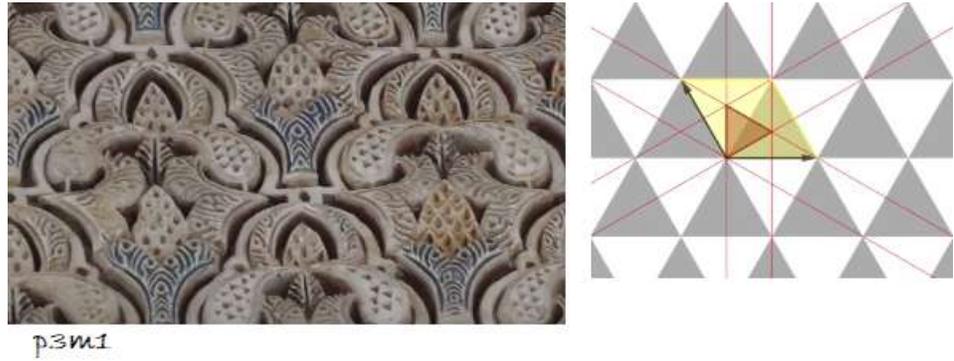


Imagen 50. Grupo Cristalográfico  $p3m1$ . Sala de los Abencerrajes. Alhambra, Granada - España.

Fuente. Elora Prados Raya (YouTube)

- **Grupos de orden 4:** Tiene rotaciones de  $90^\circ$ .

- $p4 = \langle t_v, t_w, \rho \rangle$

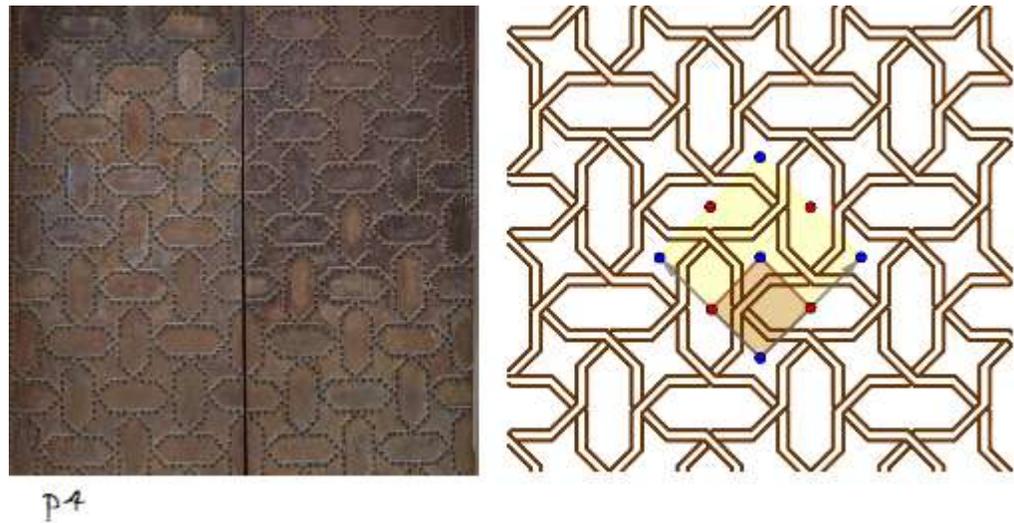


Imagen 51. Grupo Cristalográfico  $p4$ . Patio Dorado. Alhambra, Granada - España.

Fuente. Elora Prados Raya (YouTube)

- $p4m = \langle t_v, t_w, \gamma, \rho \rangle$



Imagen 52. Grupo Cristalográfico  $p4m$ . Sala de los Reyes. Alhambra, Granada - España.

Fuente. Elora Prados Raya (YouTube)

- $p4g = \langle t_v, t_w, D, \rho \rangle$

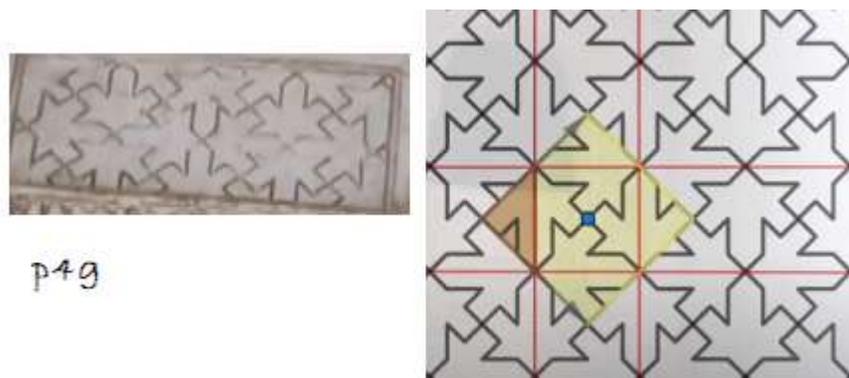


Imagen 53. Grupo Cristalográfico  $p4g$ . Sala de los Abencerrajes. Alhambra, Granada - España.

Fuente. Elora Prados Raya (YouTube)

- **Geupos de orden 6:** Tienen rotaciones de  $60^\circ$ .

- $p6 = \langle t_v, t_w, \rho \rangle$



Imagen 54. *Grupo Cristalográfico p6. Sala de los Reyes. Alhambra, Granada - España.*

*Fuente. Elora Prados Raya (YouTube)*

- $p6m = \langle t_v, t_w, \gamma, \rho \rangle$

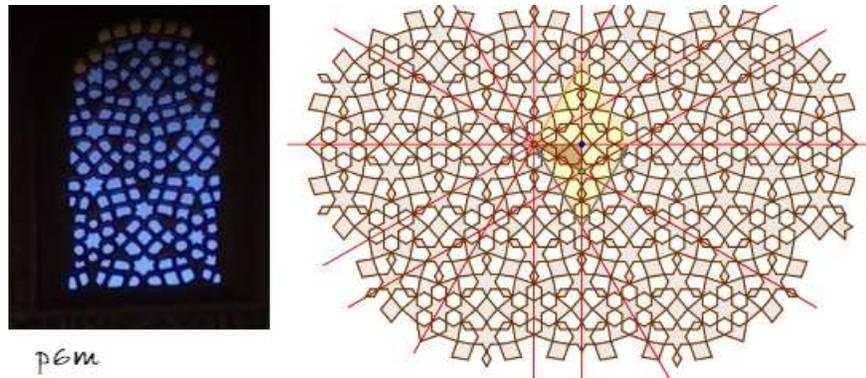


Imagen 55. *Grupo Cristalográfico p6m. Oratorio del Mexuar. Alhambra, Granada - España.*

*Fuente. Elora Prados Raya (YouTube)*

## 7. Relación de los grupos encontrados en Silvia, Tierradentro y San Agustín con los grupos de La Alhambra

En esta sección, se llevará a cabo una comparación entre los grupos de Friso y grupos Cristalográficos identificados en Silvia, Tierradentro y San Agustín con aquellos presentados en la Alhambra, este análisis pretende explorar las similitudes y diferencias en la manifestación de los grupos de Friso y los grupos Cristalográficos en estos distintos lugares, resaltando la diversidad de expresiones geométricas presentes en cada contexto culturales y arquitectónicos. Las fotografías expuestas en este documento fueron extraídas de los referentes [5], [6] y [7].

### 7.1. Relaciones de los grupos de friso

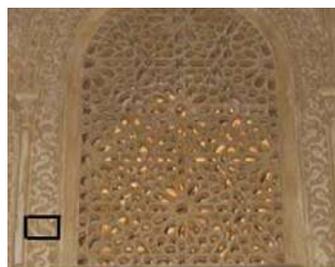
#### 7.1.1. Silvia - Alhambra

- Grupo  $pg = \langle t, D \rangle$

La siguiente comparación gráfica revela disparidades significativas en lo que respecta a la complejidad en la formación del grupo  $pg$  en la Alhambra. No obstante, se destaca una marcada semejanza en cuanto a la estructura fundamental, ya que ambos exhiben una tendencia a adoptar la forma de una espiral. Aunque la complejidad varía sustancialmente, la similitud en la figura base sugiere la presencia de patrones geométricos comunes en la creación de ambos grupos.



Grupo de friso  $pg$  en manilla de Silvia



$pg$

Grupo de friso  $pg$  en la Alhambra

Gráfica 44. Comparación del grupo de friso  $pg$  entre Silvia y la Alhambra.

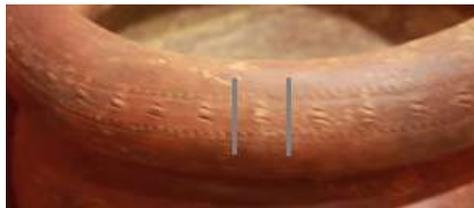
### 7.1.2. Silvia - San Agustín - Alhambra

- Grupo  $p1 = \langle t \rangle$

La comparación gráfica que a continuación se presenta revela marcadas diferencias en los patrones entre distintas manifestaciones artísticas. En el tejido de Silvia, la naturaleza se despliega de manera sublime, evidenciando la belleza inherente del entorno natural, con su símbolo de motañas. Por otro lado, en el tallado de las vasijas en San Agustín, se percibe una aparente señal de conteo, donde líneas y puntos se entrelazan en un patrón sugerente de registros numéricos o simbólicos. En el contexto de la Alhambra, la representación alcanza su máxima expresión en inscripciones que, en su mayoría, adoptan la forma de poesía.



Grupo de friso p1 en bolso de Silvia



Grupo de friso p1 en vasija de San Agustín



Grupo de friso p1 en la Alhambra

Gráfica 45. Comparación del grupo de Friso p1 entre Silvia, San Agustín y la Alhambra

- Grupo  $p2 = \langle t, \rho \rangle$

La comparación entre los patrones de Silvia y la Alhambra tienen una fascinante similitud, revelando una armoniosa disposición de formas que se entrelazan creando patrones visuales atractivos. En contraste, al examinar los patrones en San Agustín, se destaca un posible conteo mediante puntos y líneas. Este enfoque podría indicar una forma distinta de expresión artística o incluso funciones prácticas, como la representación de sistemas numéricos. Estas diferencias en los patrones entre Silvia, la Alhambra y San Agustín resaltan la diversidad cultural y artística presente en diferentes regiones y épocas. Mientras Silvia y la Alhambra comparten ciertos rasgos estilísticos, San Agustín presenta una aproximación única con su énfasis en puntos y líneas.



Grupo de friso  $p2$  en bolso de Silvia



Grupo de friso  $p2$  en vasija de San Agustín

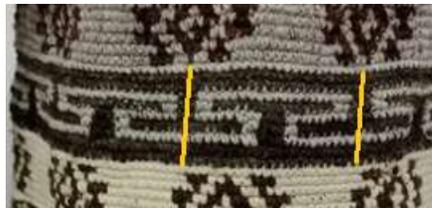


Grupo de friso  $p2$  en la Alhambra

Gráfica 46. Comparación del grupo de Friso  $p2$  entre Silvia, San Agustín y la Alhambra.

■ Grupo  $p2g = \langle t, \rho, D \rangle$

En la siguiente comparación, se destaca la presencia de un patrón de tipo *Zig Zag* en las diversas expresiones artísticas, siendo más complejo en el caso de Silvia en comparación con el patrón observado en San Agustín y La Alhambra. En el patrón de Silvia, se aprecia una complejidad mayor en la configuración del *Zig Zag*, esta complejidad podría indicar una atención especial a la simetría y la precisión en la creación del diseño, posiblemente reflejando valores estéticos o simbólicos. Por otro lado, la simplicidad del *Zig Zag* en San Agustín no implica necesariamente una falta de sofisticación, ya que podría estar vinculada a propósitos funcionales o estilísticos específicos de esa tradición artística. Mientras que en La Alhambra, la presencia del *Zig Zag* podría estar influenciada por el estilo arquitectónico islámico, que a menudo incorpora patrones geométricos de manera elegante y simbólica.



Grupo de friso  $p2g$  en bolso de Silvia



Grupo de friso  $p2g$  en vasija de San Agustín



$p2g$

Grupo de friso  $p2g$  en la Alhambra

Gráfica 47. Comparación del grupo de Friso  $p2g$  entre Silvia, San Agustín y la Alhambra.

### 7.1.3. Silvia - Tierradentro - San Agustín - Alhambra

La siguiente comparación revela una fascinante coincidencia entre distintos patrones, ya que todos comparten una característica distintiva en forma de flecha (o "v"). A pesar de surgir en contextos culturales y temporales, diversos, estas representaciones exhiben sorprendentes similitudes en la elección de este elemento geométrico específico. La observación de esta particularidad subraya la interconexión entre expresiones artísticas aparentemente diversas, destacando la capacidad de ciertos elementos visuales para trascender fronteras y resonar en diferentes contextos culturales.

- Grupo  $pm = \langle t, \gamma \rangle$



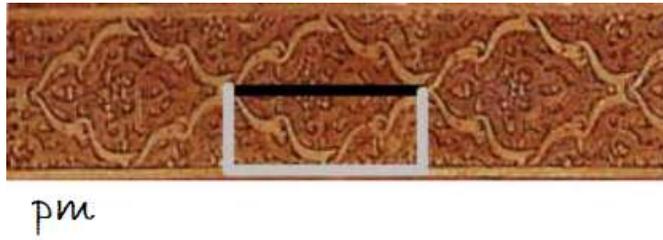
Grupo de friso pm en bolso de Silvia



Grupo de friso pm en hipogeo de Tierradentro



Grupo de friso pm en tumba de San Agustín

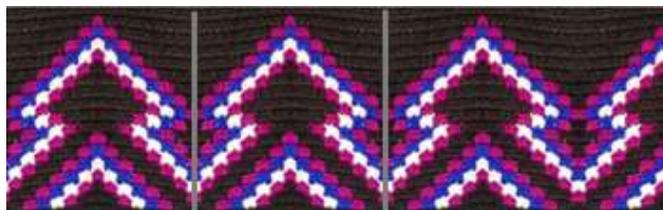


Grupo de friso pm en la Alhambra

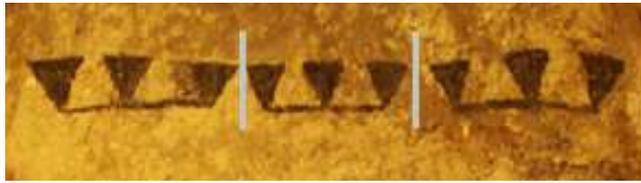
Gráfica 48. Comparación del grupo de Friso pm entre Silvia, Tierradentro, San Agustín y la Alhambra

■ Grupo  $p/m = \langle t, \gamma_y \rangle$

En el contexto de Silvia, San Agustín y Tierradentro, se destaca una interesante similitud en la organización de patrones, ya que en los tres casos se pueden identificar agrupaciones de elementos distintos. En Silvia, este fenómeno se manifiesta a través de la agrupación de colores, en Tierradentro se observa en las formas geométricas y en San Agustín, las líneas sugieren una posible organización vinculada a un conteo o registro. Contrastando con estas observaciones, la Alhambra presenta una marcada disparidad, ya que no muestra la misma agrupación de elementos. Sin embargo, al dirigir la atención hacia la parte geométrica, se revela una notable similitud de patrones entre la Alhambra y el tejido Misak. Este vínculo geométrico podría indicar influencias compartidas o una convergencia estilística, a pesar de las diferencias culturales y geográficas. Esta observación sugiere que, aunque las expresiones artísticas de estas regiones difieren en algunos aspectos, existe una conexión visual que trasciende sus contextos individuales.



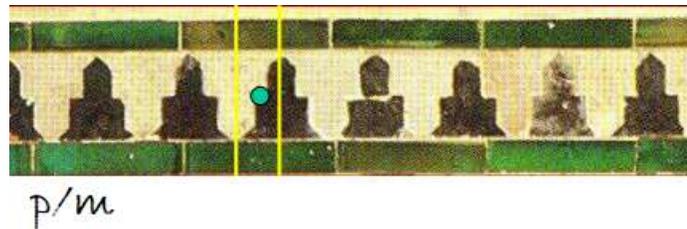
Grupo de friso p/m en bolso de Silvia



Grupo de friso p/m en hipogeo de Tierradentro



Grupo de friso p/m en vasija de San Agustín



Grupo de friso p/m en la Alhambra

Gráfica 49. Comparación del grupo de Friso p/m entre Silvia, Tierradentro, San Agustín y la Alhambra.

▪ **Grupo  $p2m = \langle t, \rho, \gamma \rangle$**

En los patrones de los grupos  $p2m$  se destaca una notoria similitud al presentar estructuras que incluyen rombos. Esta característica es evidente en varios de los grupos  $p2m$ , estableciendo un vínculo visual entre ellos a través de la presencia común de esta figura geométrica. No obstante, es importante señalar que el patrón encontrado en San Agustín se diferencia al no incorporar rombos en su estructura. La presencia consistente de rombos en los demás grupos  $p2m$  sugiere una posible conexión estilística o simbólica entre estas expresiones artísticas. Los rombos podrían llevar consigo significados culturales o geométricos que son compartidos por

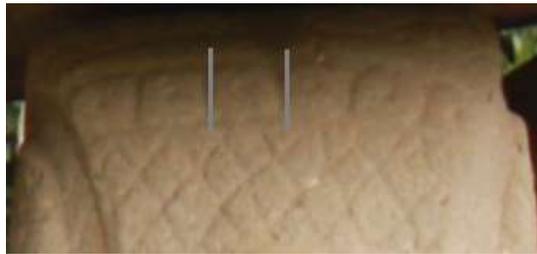
las comunidades que crearon estos patrones.



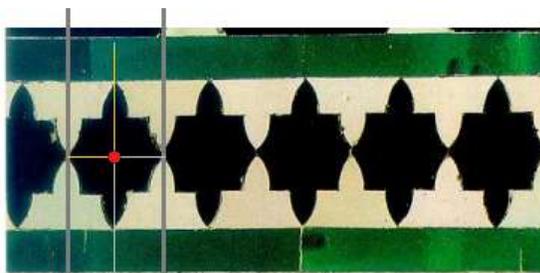
Grupo de friso p2m en chumbe de Silvia



Grupo de friso p2m en hipogeo de Tierradentro



Grupo de friso p2m en escultura de San Agustín



p2m

Grupo de friso p2m en la Alhambra

Gráfica 50. Comparación del grupo de Friso p2m entre Silvia, Tierradentro, San Agustín y la Alhambra.

En resumen, la observación de patrones en estas diversas culturas revela no solo similitudes y diferencias estéticas, sino también la riqueza de expresiones artísticas y la variabilidad en las formas en que las comunidades han utilizado el arte para transmitir sus valores, creencias y conocimientos.

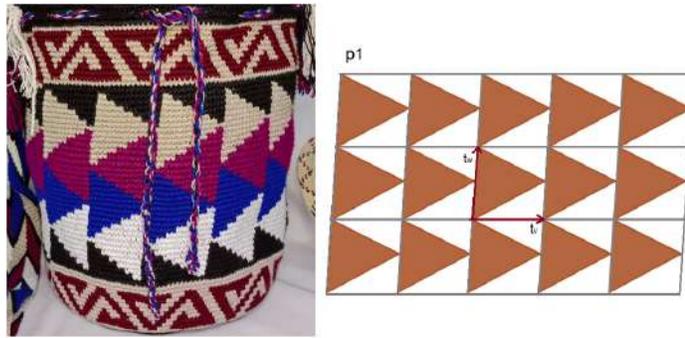
## **7.2. Relaciones de los grupos cristalográficos**

En esta sección, se llevará a cabo una comparación entre los grupos cristalográficos identificados en Silvia, Tierradentro, San Agustín y la Alhambra. Al realizar esta comparación se busca identificar tanto las diferencias como las similitudes en las expresiones artísticas de estas culturas, proporcionando una visión más completa de cómo la simetría y la geometría han sido utilizadas en el contexto cultural de cada región, enriqueciendo así el conocimiento sobre la diversidad cultural y estilística a lo largo del tiempo y el espacio.

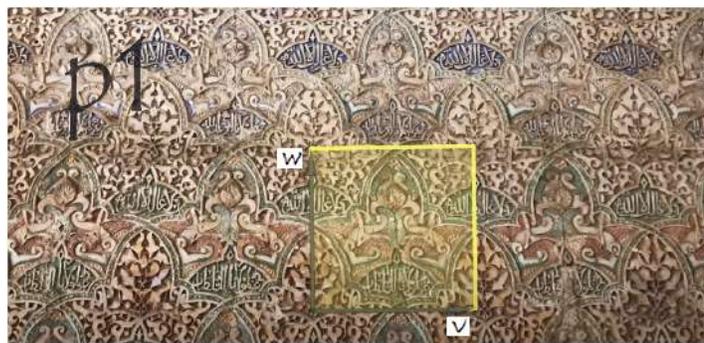
### **7.2.1. Silvia - Alhambra**

- **Grupo p1**

En la siguiente comparación, se evidencia una marcada diferencia en los patrones artísticos entre Silvia y La Alhambra. En Silvia, se observan patrones que se caracterizan por la presencia de figuras geométricas, sugiriendo una estética que enfatiza la simplicidad y la organización geométrica en el diseño. Por otro lado, en La Alhambra, se destacan patrones considerablemente más complejos, los cuales no solo incorporan figuras geométricas sofisticadas, sino que también incluyen elementos decorativos y, en algunos casos, palabras. Así, la diferencia entre los patrones de Silvia y La Alhambra no solo está en la presencia de figuras geométricas frente a patrones más complejos, sino también en la inclusión de elementos caligráficos y palabras en La Alhambra.



Grupo cristalográfico p1 en bolso de Silvia



Grupo cristalográfico p1 en la Sala de la Barca - Alhambra

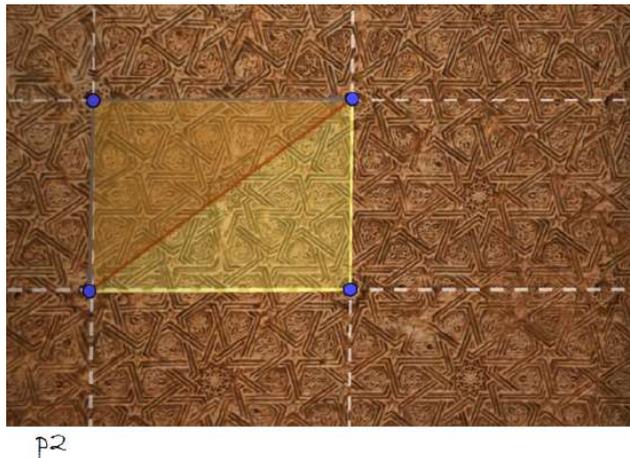
Gráfica 51. Comparación del grupo Cristalográfico p1 entre Silvia y la Alhambra.

■ Grupo p2

En la siguiente comparación, se destaca una interesante similitud en los patrones entre La Alhambra y Silvia. En La Alhambra, se observa la presencia de un patrón que puede describirse como una sucesión de líneas en forma de *Zig Zag*. Notablemente, al unir la figura base de Silvia con este patrón de La Alhambra, se puede apreciar una correspondencia visual.



Grupo cristalográfico p2 en bolso de Silvia

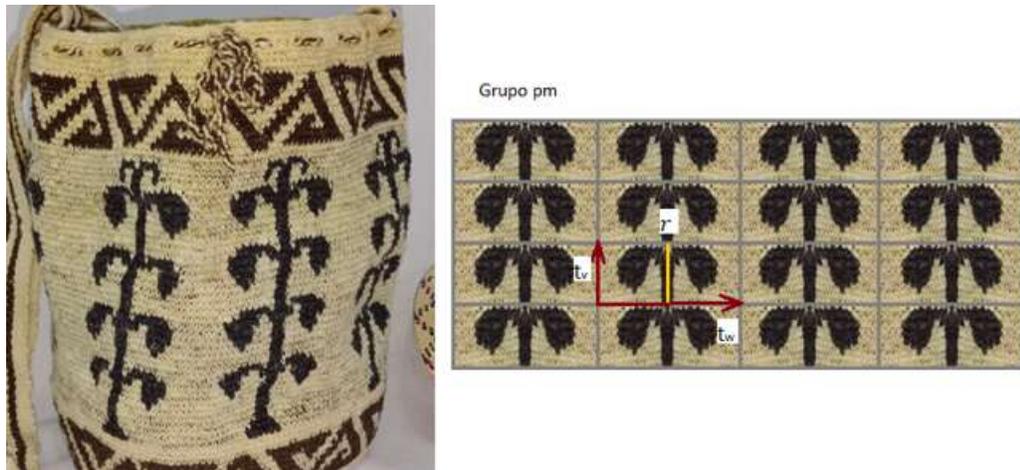


Grupo cristalográfico p2 en el Patio de la Acequia - Alhambra

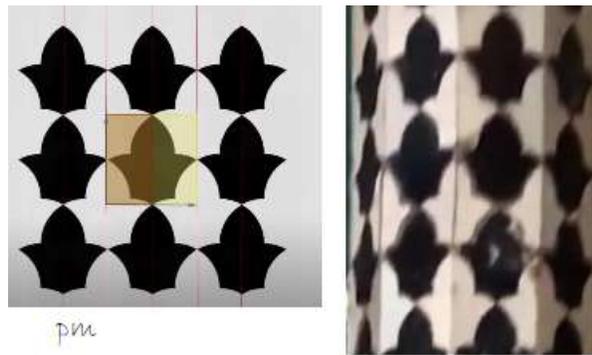
Gráfica 52. Comparación del grupo Cristalográfico p2 entre Silvia y la Alhambra.

▪ **Grupo pm**

En el análisis de ambos grupos, se destaca una notable similitud en sus patrones, sin embargo, se evidencia una diferencia distintiva entre Silvia y la Alhambra en cuanto a la manifestación de la caída hacia los lados. En el caso de Silvia, la caída de la hoja se presenta de manera más evidente y pronunciada, captando la atención de manera notoria. Por otro lado, en la Alhambra, la caída se manifiesta de manera más sutil, otorgando un matiz de delicadeza.



Grupo cristalográfico pm en bolso de Silvia



Grupo cristalográfico pm en la Sala de la Barca - Alhambra

Gráfica 53. Comparación del grupo Cristalográfico pm entre Silvia y la Alhambra.

#### ▪ Grupo cm

En el análisis comparativo entre Silvia y la Alhambra, se destaca una notable similitud en sus patrones, ya que ambos comparten el paralelogramo fundamental. Sin embargo, al observar más detalladamente, se aprecia una diferencia distintiva en la configuración de sus figuras. En Silvia, la figura exhibe una mayor cantidad de picos en los lados, otorgándole un rasgo más pronunciado y distintivo en comparación con la figura presente en la Alhambra. La presencia de estos picos en Silvia añade un elemento visual único, que se diferencia de la figura en la Alhambra, la cual podría caracterizarse por una estructura más suave o menos acentuada en

los bordes.



Grupo cristalográfico cm en bolso de Silvia



Grupo cristalográfico pm en la segunda alcoba del Salón del Trono - Alhambra

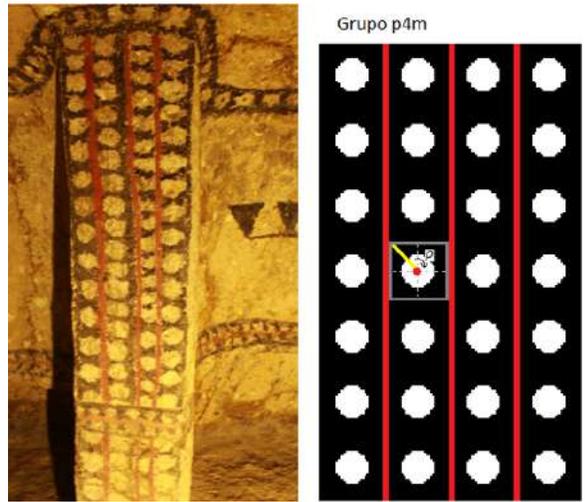
Gráfica 54. Comparación del grupo Cristalográfico cm entre Silvia y la Alhambra

### 7.2.2. Tierradentro - Alhambra

#### ■ Grupo p4m

En la siguiente comparación, se destaca tanto la similitud como la diferencia entre los patrones observados. Ambos comparten la característica de ser creados en torno a una forma circular. Sin embargo, la distinción entre ellos radica en la complejidad de su diseño. En el patrón de

Tierradentro, la formación se limita a la disposición de círculos que conforman el grupo. En contraste, el patrón de la Alhambra exhibe una mayor complejidad, evidenciando la presencia de múltiples figuras geométricas entrelazadas dentro de su esquema circular.



Grupo cristalográfico p4m en hipogeo de Tierradentro



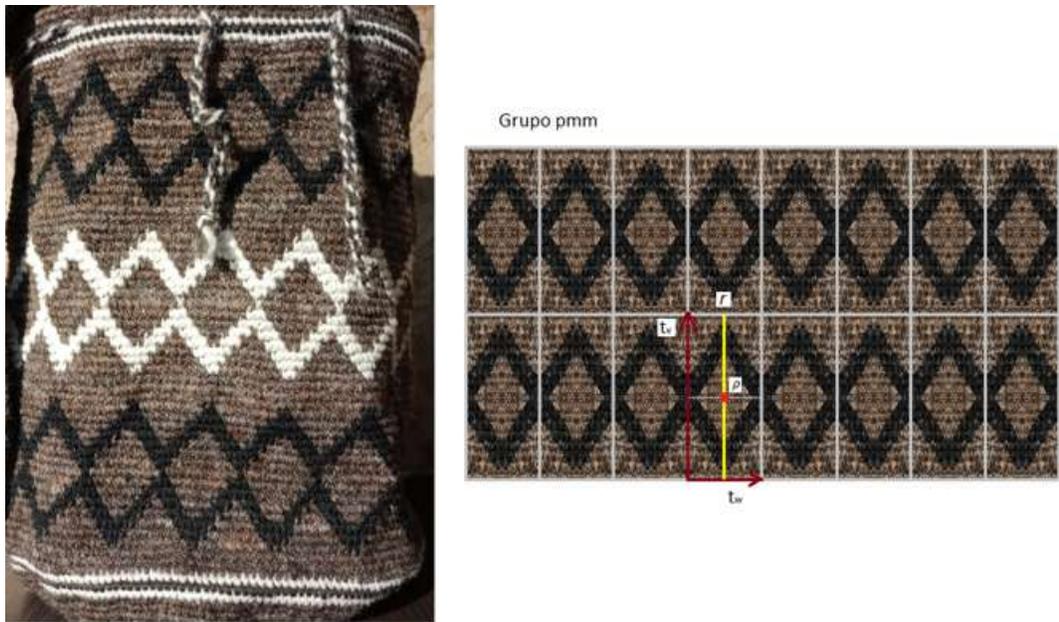
Grupo cristalográfico es la Sala de los Reyes - Alhambra

Gráfica 55. Comparación del grupo Cristalográfico  $p4m$  entre Tierradentro y la Alhambra

### 7.2.3. Silvia - Tierradentro - Alhambra

- Grupo pmm

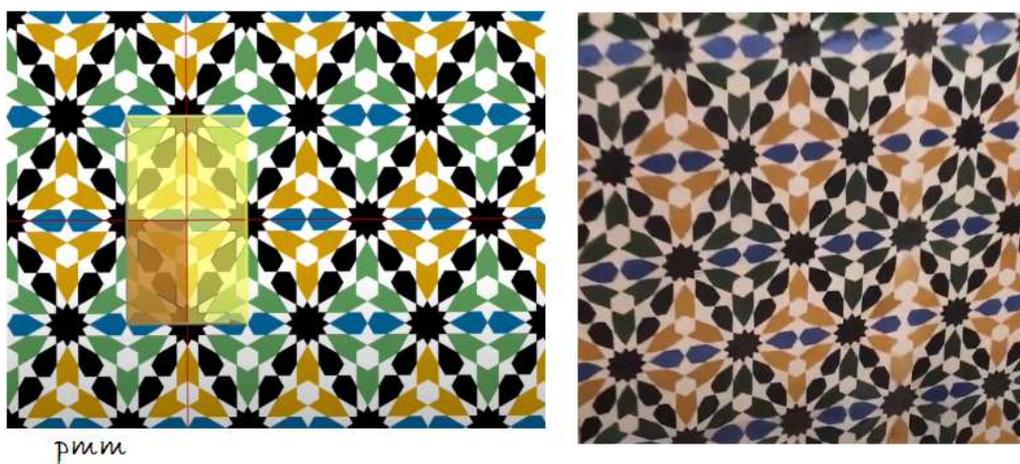
En esta comparación, resulta innegable la similitud entre Silvia, Tierradentro y la Alhambra en lo que respecta a la presencia destacada de rombos dentro de sus estructuras. Sin embargo, al profundizar en los detalles, se revelan notables diferencias en la ejecución de este patrón. En Silvia, la presencia del rombo se limita a esta figura geométrica singular, sin incorporar otras formas adicionales. Por otro lado, Tierradentro va más allá al incluir varios rombos dentro de su estructura, generando una mayor complejidad visual. Mientras tanto, en la Alhambra, el patrón se caracteriza por la inclusión de una multiplicidad de figuras geométricas, y aunque el rombo puede ser identificado, se ve complementado por una diversidad de formas.



Grupo cristalográfico pmm en bolso de Silvia



Grupo cristalográfico pmm en hipogeo de Tierradentro



Grupo cristalográfico pmm en la Sala de los Reyes - Alhambra

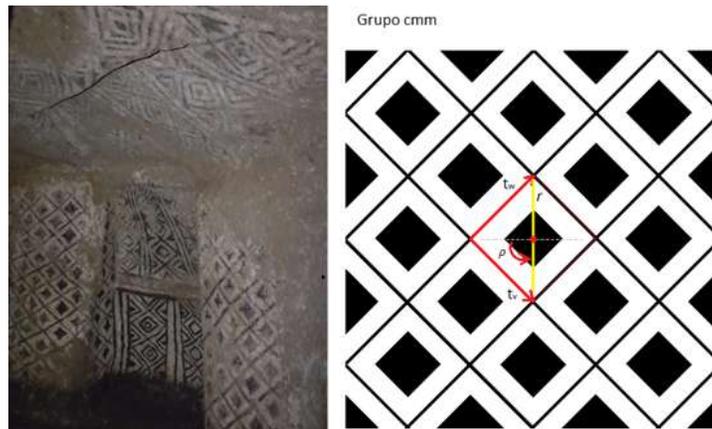
Gráfica 56. Comparación del grupo Cristalográfico pmm entre Silvia, Tierradentro y la Alhambra

#### 7.2.4. Tierradentro - San Agustín - Alhambra

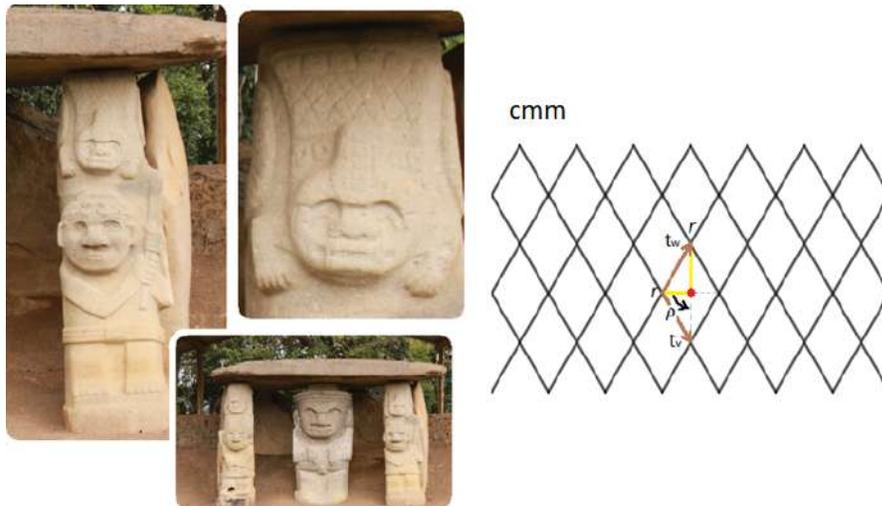
- Grupo cmm

En la siguiente comparación, se evidencia una marcada diferencia en los patrones de la Alham-

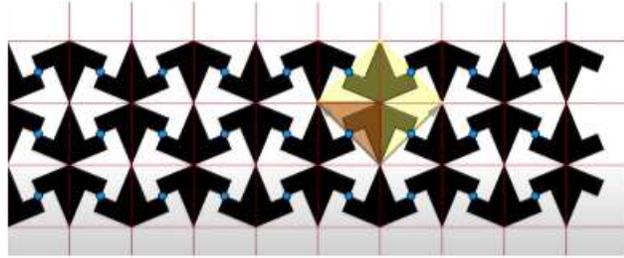
bra, Tierradentro y San Agustín, a pesar de compartir el paralelogramo fundamental. La distinción más sobresaliente radica en la complejidad de la figura presente en la Alhambra en comparación con las de Tierradentro y San Agustín. En la Alhambra, la figura exhibe una mayor complejidad. En contraste, en Tierradentro y San Agustín, las estructuras parecen seguir una línea más sencilla, con menos elementos geométricos o una disposición más directa del paralelogramo.



Grupo cristalográfico cmm en hipogeo de Tierradentro



Grupo cristalográfico cmm en escultura de San Agustín



cmm

Grupo cristalográfico cmm en Mexuar de la Alhambra

Gráfica 57. *Comparación del grupo Cristalográfico cmm entre Tierradentro, San Agustín y la Alhambra.*

## 8. Conclusiones

- El estudio de la teoría de grupos proporcionó una base sólida y fundamental para la identificación de los diferentes patrones geométricos que se fueron encontrando a lo largo de esta investigación. La comprensión profunda de los principios matemáticos subyacentes en la teoría de grupos ha facilitado la interpretación y clasificación precisa de los patrones presentes en los sitios arqueológicos estudiados, contribuyendo significativamente a la apreciación y documentación de la riqueza geométrica en estas expresiones artísticas y arquitectónicas
- Según el registro fotográfico originado de las visitas en Silvia, Tierradentro y San Agustín, en los meses de mayo y julio del año 2023, se destaca que en Silvia se descubrió los 7 grupos de Friso en sus tejidos, evidenciando la presencia integral de esta rica variedad geométrica en las manifestaciones textiles de la región. Por otro lado, en San Agustín se identificaron 6 grupos de Friso en sus esculturas y vasijas, mientras que en Tierradentro se hallaron 3 grupos en las pinturas de sus hipogeos, mostrando la diversidad de expresiones artísticas en cada lugar.

Grupos de friso			
Grupo	Silvia	Tierradentro	San Agustín
p1	✓		✓
p2	✓		✓
pm	✓	✓	✓
p/m	✓	✓	✓
pg	✓		
p2g	✓		✓
p2m	✓	✓	✓

Tabla 2: *Grupos de friso encontrados en Silvia, Tierradentro y San Agustín.*

En cuanto a los grupos Cristalográficos, se logró obtener un total de 7 grupos, de los cuales 5 grupos fueron encontrados en los tejidos de los Misak, 3 grupos en las pinturas de los hipogeos de Tierradentro y 1 grupo en las esculturas de San Agustín. Estos hallazgos resaltan la presencia de estos grupos en diversas formas de expresión artística, revelando conexiones matemáticas en los tejidos, esculturas y pinturas de las culturas estudiadas.

Grupos Cristalográficos			
Grupo	Silvia	Tierradentro	San Agustín
p1	✓		
cm	✓		
pg			
pm	✓		
p2	✓		
cmm		✓	✓
pmm	✓	✓	
pmg			
pgg			
p3			
p31m			
p3m1			
p4			
p4m		✓	
p4g			
p6			
p6m			

Tabla 3: *Grupos cristalográficos encontrados en Silvia, Tierradentro y San Agustín.*

- Haciendo un análisis a las diferentes investigaciones que se han hecho sobre la Alhambra, como en el referente [5], se observa que los grupos encontrados en dicho palacio se han estudiado no solo centrándose en las simetrías de los elementos sino que también se tiene en cuenta los colores. En este trabajo, el análisis se hizo sin tener en cuenta el color de las representaciones; lo cual genera otro punto de partida para trabajos futuros al considerar el color en estas expresiones artísticas.
- Este trabajo ha proporcionado una enriquecedora visión de la intersección que hay entre el arte y la matemática. Cada visita realizada como parte de esta investigación ha revelado una complejidad artística y matemática en cada sitio. La riqueza de patrones geométricos presentes en los tejidos de Silvia, las pinturas de hipogeos en Tierradentro y las esculturas en San Agustín, destaca la habilidad de estas culturas para integrar principios matemáticos en sus expresiones artísticas. Esta investigación no solo ha contribuido a la documentación y comprensión de los grupos geométricos presentes en estos lugares, sino que también ha destacado la profundidad de la relación entre el arte y las matemáticas en distintas culturas y periodos históricos. Este cruce entre disciplinas ofrece una perspectiva única que enriquece nuestra apreciación de la creatividad humana y su capacidad para incorporar conceptos matemáticos en formas expresivas y estéticas.

## 9. Bibliografía

1. Coba C. Pilar. Clasificación de grupos cristalográficos planos. Trabajo Fin de Grado. Sevilla: Universidad de Sevilla. Facultad de Matemáticas. Departamento de Álgebra. [Consultado: 22 de Noviembre de 2022]. Disponible en: <https://idus.us.es/bitstream/handle/11441/134381/Coba%20Carpio%20Pilar%20TFG.pdf?sequence=1&isAllowed=y>
2. Alegría E. Pedro, et al. Las simetrías y el teorema enorme. En: La utilidad de las matemáticas. España, Ed, Antonio Vera López, 2002. Disponible en: <https://docplayer.es/29159118-Las-simetrias-y-el-teorema-enorme.html>
3. Gómez A. Ricardo. Transformaciones. Capítulo 3. UNAM. Instituto de Matemáticas. pag:109 - 182. [Consultado: 22 de Noviembre de 2022]. Disponible en: <https://www.matem.unam.mx/~rgomez/geometria/Capitulo3.pdf>
4. Soprano L. Nahuel. Simetrías. Marzo del 2009. Disponible en: <https://www.mate.unlp.edu.ar/~demetrio/Monografias/Materias/EA/23.%20Simetrias%20-%20Nahuel%20Soprano%20Loto%20-%202009..pdf>
5. Prados R. Elora. Los grupos cristalográficos en la Alhambra [video]. España: YouTube, Geometry UGR. 19:33 minutos. 22 de julio de 2021. Consultado: 25 de Octubre de 2023]. Disponible en: [https://www.youtube.com/watch?v=KWAEM4\\_QDN0&t=310s](https://www.youtube.com/watch?v=KWAEM4_QDN0&t=310s)
6. Ruiz G. Ceferino. Enseñar Matemáticas en el siglo XXI: Visita matemática (virtual) a la Alhambra [Diapositivas]. 9 de Julio de 2009. 125 diapositivas. [Consultado: 22 de diciembre de 2023]. Disponible en: [file:///C:/Users/HP/Downloads/Alhambra%20\(1\).pdf](file:///C:/Users/HP/Downloads/Alhambra%20(1).pdf)
7. Bodner B. Lynn. Frieze Patterns of the Alhambra. En: Bridges Donostia Mathematics, Music, Art, Architecture, Culture. 2007. pag: 203 - 208. Disponible en: <https://archive.bridgesmathart.org/2007/bridges2007-203.pdf>
8. Albis G. Víctor y Valencia O. José. Una aplicación de los grupos de simetría a la confirmación de periodos y subperiodos estilísticos en la cerámica de la region central de panamá. 67. ed. Revista de la Academica Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y

- Naturales, 1990. vol 17. Disponible en: [https://www.accefyn.com/revista/Volumen\\_17/67/703-714.pdf](https://www.accefyn.com/revista/Volumen_17/67/703-714.pdf)
9. GeoGebra. Geogebra Clásico (s.f.). Disponible en: <https://www.geogebra.org/classic?lang=es>
  10. Alhambra De Granada. Visita virtual de los Palacios Nazaríes. España. [Consultado: 11 de Enero de 2024]. Disponible en: <https://www.alhambradegranada.org/es/info/palaciosnazaries.asp>
  11. Baldosas y Canguros. Grupos cristalográficos planos o cuántos tipos de mosaicos pueden crearse. [Consultado: 20 de Diciembre de 2023]. Disponible en: <https://baldosasycanguros.tumblr.com/post/49669311444/grupos-cristalogr%C3%A1ficos-planos-o-cu%C3%A1ntos-tipos-de>
  12. Glisanz M. María y Martínez C. María. Grupos de simetría en el esgrafiado segoviano. I jornada de investigación en edificación. E.U. Arquitectura Técnica. Universidad Politécnica de Madrid. 10 - 11 mayo 2007. Disponible en: <https://oa.upm.es/4704/1/P10.pdf>
  13. Albis G. Víctor. Arte prehispánico y matemáticas. Revista de la Universidad Nacional de Colombia, 2a. época, II No. 7 (1986), 29-34. Disponible en: <https://revistas.unal.edu.co/index.php/revistaun/article/view/11803/12338>

## 10. Anexos

### 10.1. Resultados geométricos de grupos de Friso

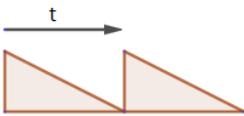
En esta sección se presentarán los resultados geométricos faltantes de los Grupos de Friso.



Figura base

#### 10.1.1. Grupo p1

$$p1 = \langle t \rangle$$



#### 10.1.2. Grupo p2

$$p2 = \langle t, \rho \rangle ; \quad \rho^2 = 1, \quad t^\rho = t^{-1}$$

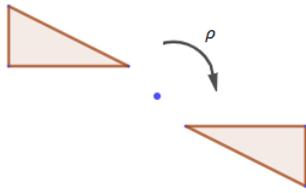
Pasos gráficos para obtener la relación:

- $\rho^2 = \rho \circ \rho = 1$

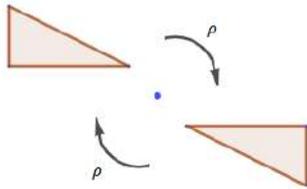
Paso 1



Paso 2



Resultado:

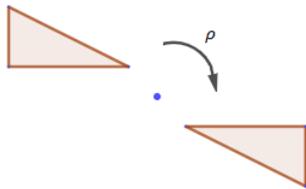


- $$t^\rho = \rho^{-1} \circ t \circ \rho = t^{-1}$$

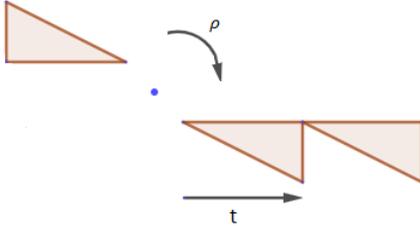
Paso 1



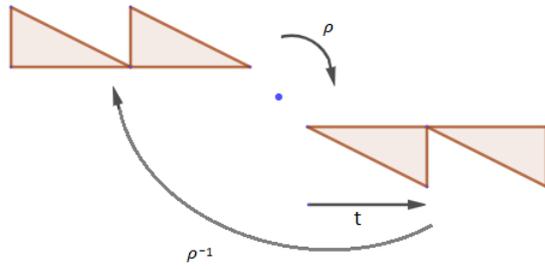
Paso 2



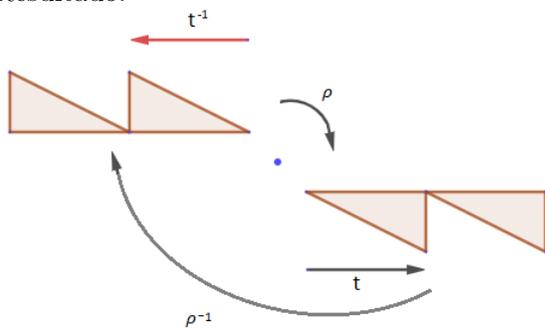
Paso 3



Paso 4



Resultado:



### 10.1.3. Grupo p/m

$$p/m = \langle t, \gamma_y \rangle ; \gamma_y^2 = 1, t^{\gamma_y} = t^{-1}$$

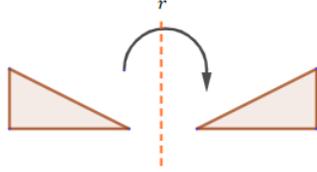
Pasos gráficos para obtener la relación:

- $\gamma_y^2 = \gamma_y \circ \gamma_y = 1$

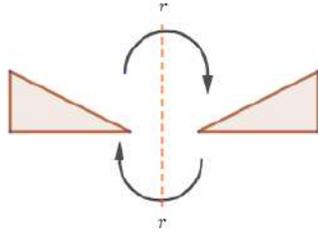
Paso 1



Paso 2



Resultado

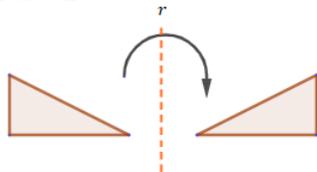


■  $t\gamma_y = \gamma_y^{-1} \circ t \circ \gamma_y = t^{-1}$

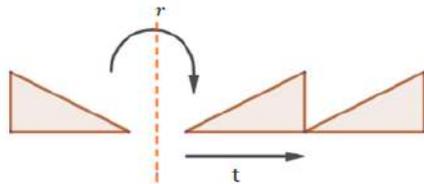
Paso 1



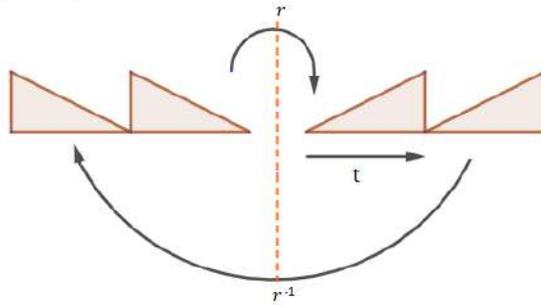
Paso 2



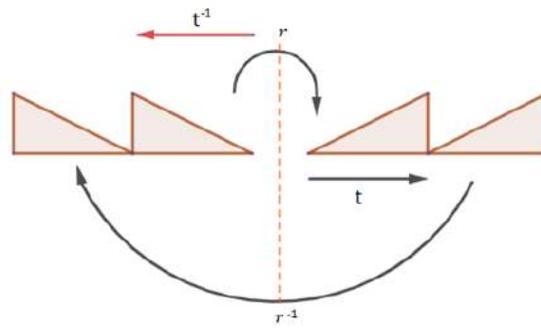
Paso 3



Paso 4



Resultado



#### 10.1.4. Grupo $pg$

$$pg = \langle t, D \rangle; \quad D^2 = t, \quad t^D = t$$

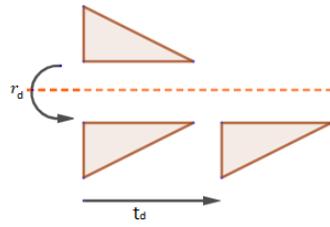
Pasos gráficos para obtener la relación:

- $D^2 = D \circ D = t$

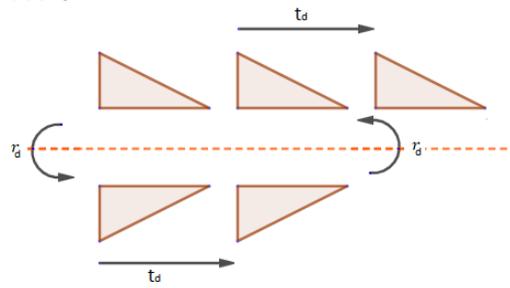
Paso 1



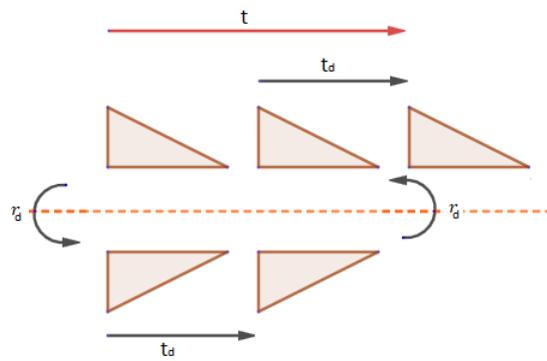
Paso 2



Paso 3



Resultado

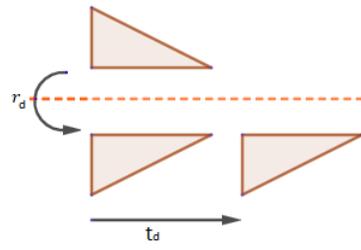


■  $t^D = D^{-1} \circ t \circ D = t$

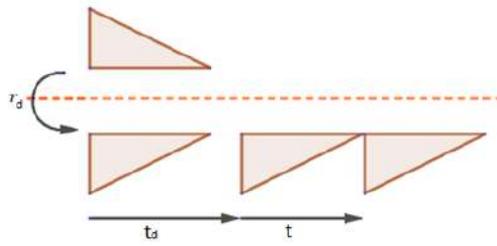
Paso 1



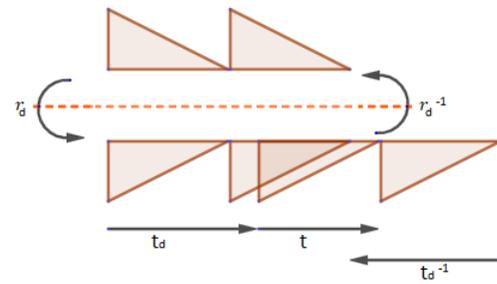
Paso 2



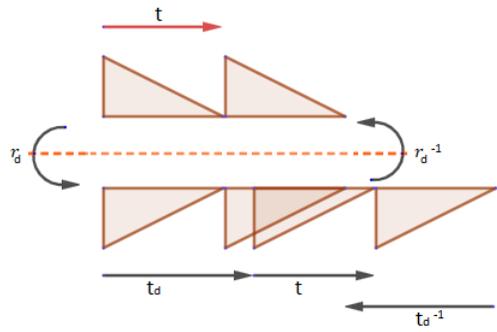
Paso 3



Paso 4



Resultado



### 10.1.5. Grupo p2g

$$p2g = \langle t, \rho, D \rangle; \quad \rho^2 = I, \quad D^2 = t, \quad t^\rho = t^{-1}, \quad t^D = t, \quad \rho^D = \rho^{-1}$$

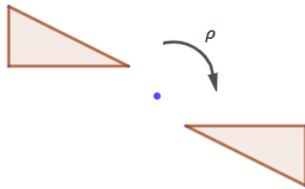
Pasos gráficos para obtener la relación:

- $\rho^2 = \rho \circ \rho = I$

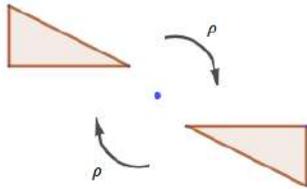
Paso 1



Paso 2



Resultado

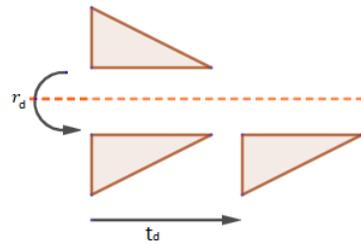


- $D^2 = D \circ D = t$

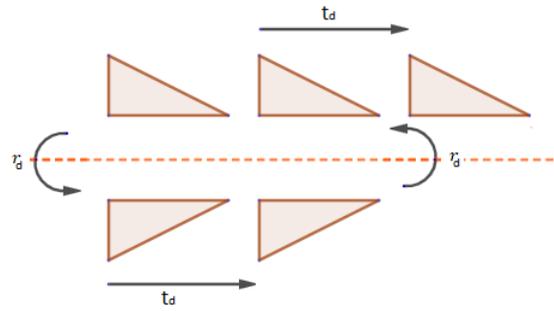
Paso 1



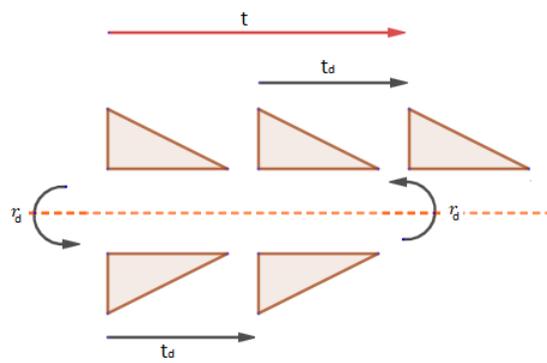
Paso 2



Paso 3



Resultado

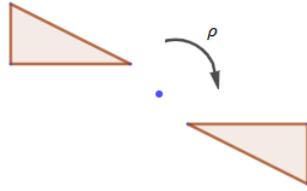


■  $t^\rho = \rho^{-1} \circ t \circ \rho = t^{-1}$

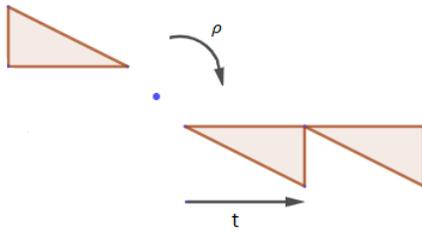
Paso 1



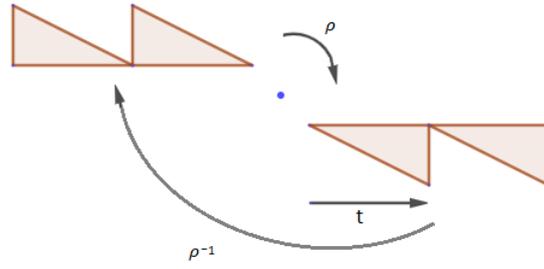
Paso 2



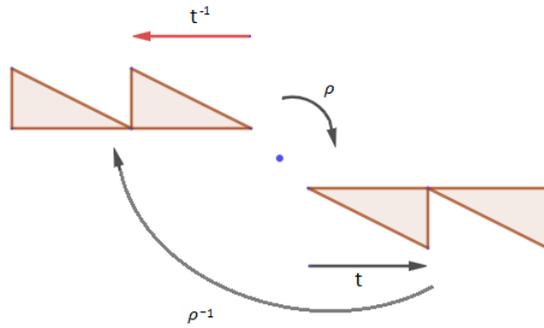
Paso 3



Paso 4



Resultado

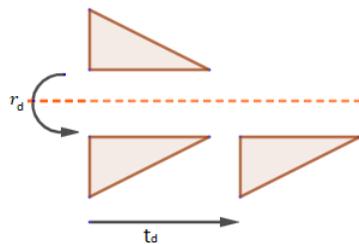


- $t^D = D^{-1} \circ t \circ D = t$

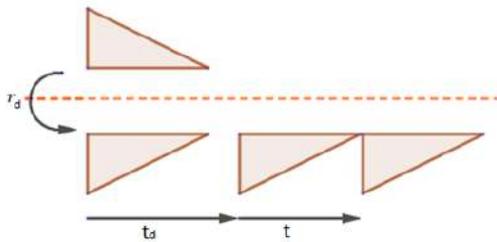
Paso 1



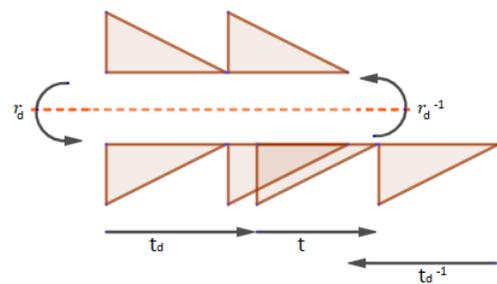
Paso 2



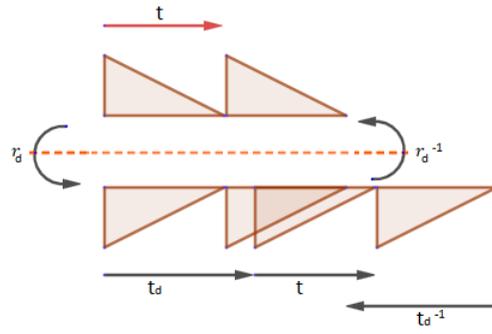
Paso 3



Paso 4

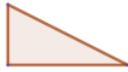


Resultado

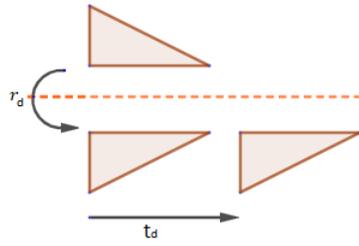


■  $\rho^D = D^{-1} \circ \rho \circ D = \rho^{-1}$

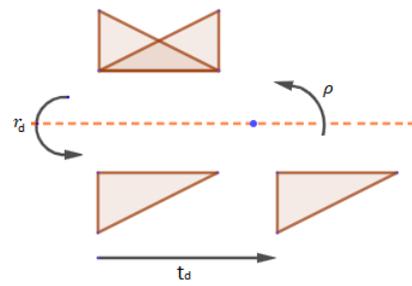
Paso 1



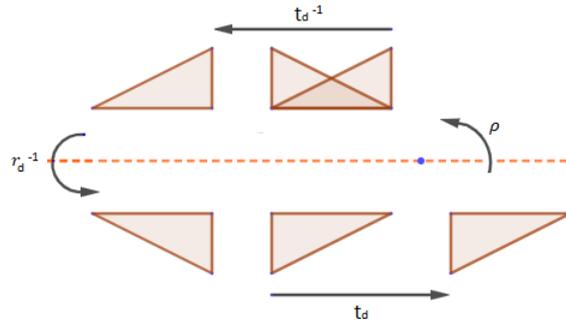
Paso 2



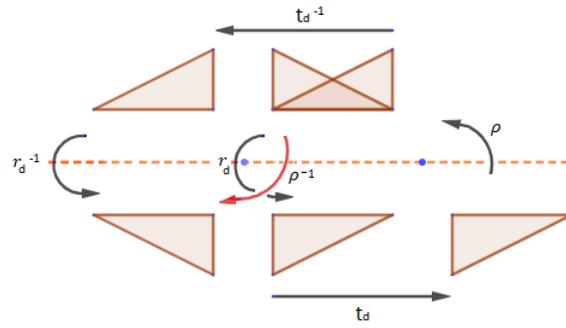
Paso 3



Paso 4



Resultado



## 10.2. Otros grupos de Frisos encontrados en Silvia

En esta sección se presentarán los grupos de friso encontrados en otras prendas utilizadas por los Misak.

### 10.2.1. Grupos p1, p2 y p2m en manillas



### 10.2.2. Grupos p/m y p2m en el Tambalguarí



Figura base

p/m



Figura base

p2m



Figura base

p/m



10.2.3. Grupo p/m en un bolso



Figura base

p/m



10.2.4. Grupo p/m y p1 en un bolso



Figura  
base

p/m

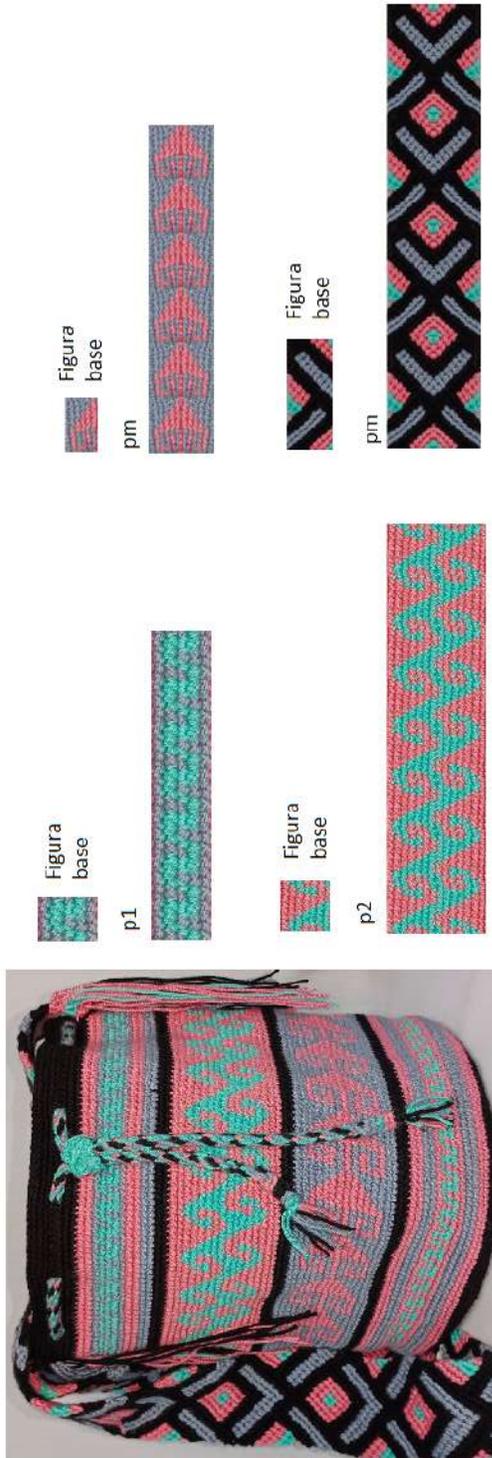


Figura  
base

p1



10.2.5. Grupos p1, p2 y pm en un bolso



10.2.6. Grupos p2 y p2m en chumbes



p2



p2m



p2m





Figura  
base

p2



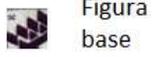
Figura  
base

p2m





p2



p2m



10.2.7. Grupo p2 en un bolso



Figura  
base

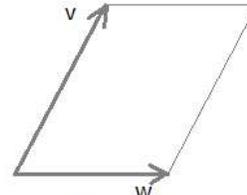
p2



### 10.3. Otros grupos cristalográficos encontrados en Silvia

#### 10.3.1. Grupo p2 en un bolso

Grupo p2



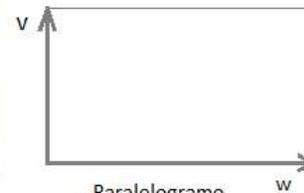
Paralelogramo fundamental



Figura base

#### 10.3.2. Grupo pmm en bolsos

Grupo pmm



Paralelogramo fundamental



Figura base

Grupo pmm



Paralelogramo fundamental



Figura base

Grupo pmm



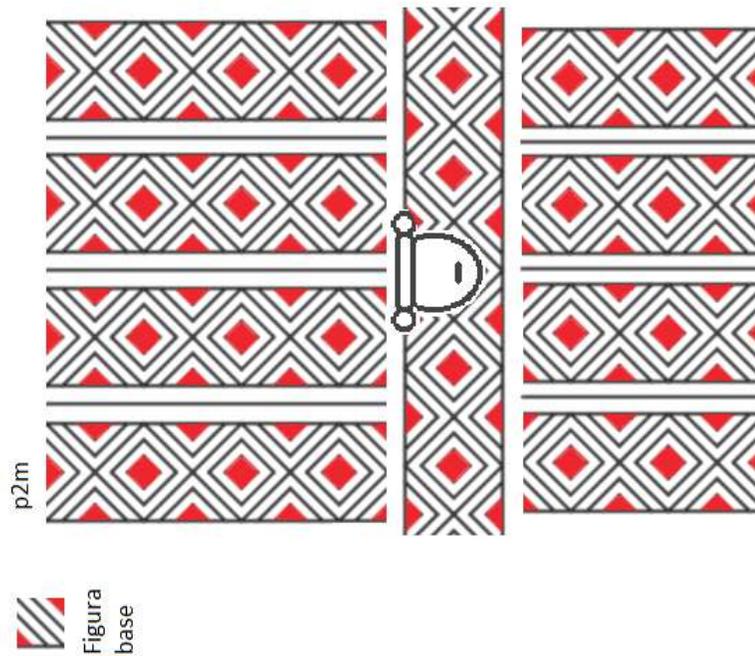
Paralelogramo fundamental



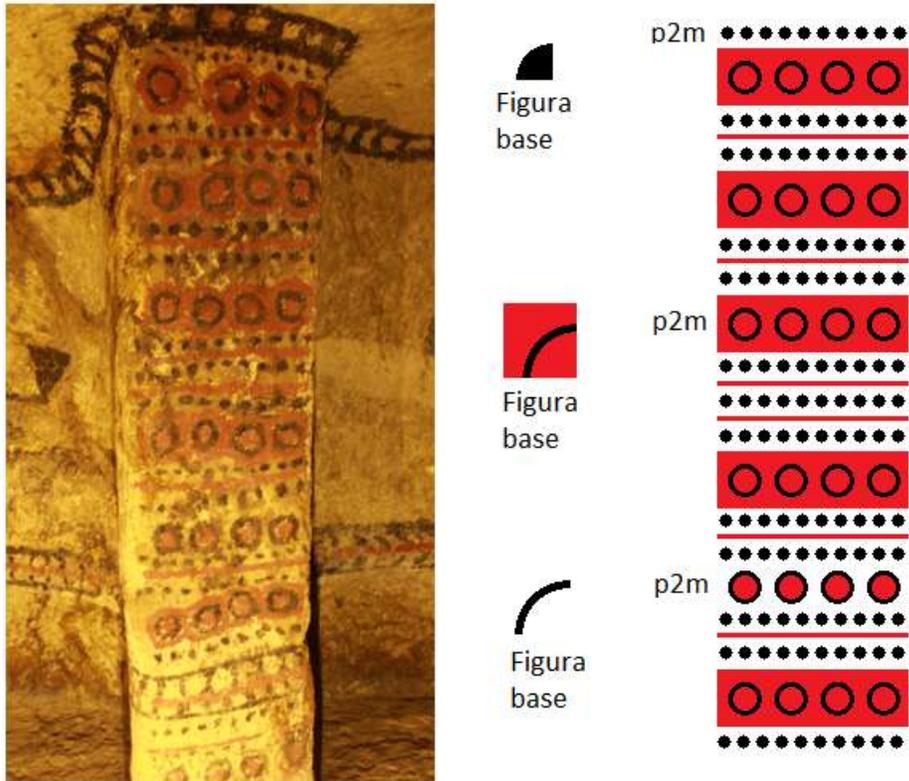
Figura base

## 10.4. Otros grupos de Frisos encontrados en Tierradentro

### 10.4.1. Grupos p2m en Segovia



Gráfica 58. *Hipogeo T9, Segovia, Tierradentro*



Gráfica 59. *Hipogeo T30, Segovia, Tierradentro*



┌ Figura  
base

Grupo p2m



┌ Figura  
base

Grupo p2m



Gráfica 60. *Hipogeo T30, Segovia, Tierradentro*



Figura  
base

p2m

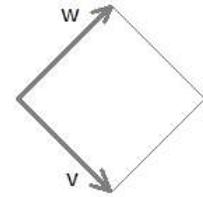
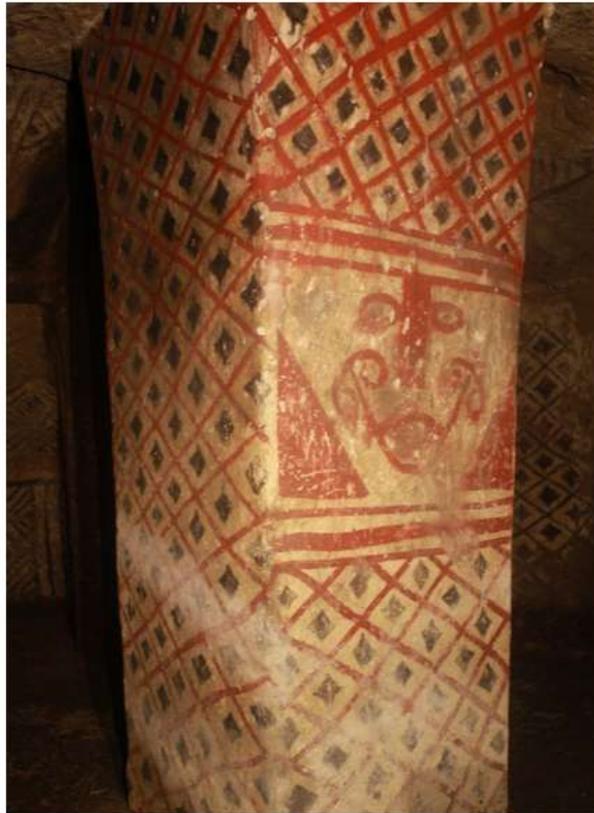


Gráfica 61. *Hipogeo T10, Segovia, Tierradentro*

## 10.5. Otros grupos Cristalográficos encontrados en Tierradentro

### 10.5.1. Grupo cmm en San Andrés

Grupo cmm



Paralelogramo  
fundamental



Figura  
base

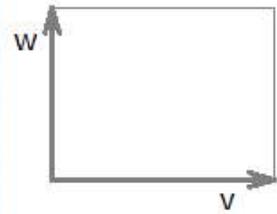
Gráfica 62. *Hipogeo SA5, San Andrés, Tierradentro*

### 10.5.2. Grupos cmm y pmm en Segovia



Gráfica 63. *Hipogeo T9, Segovia, Tierradentro*

Grupo pmm



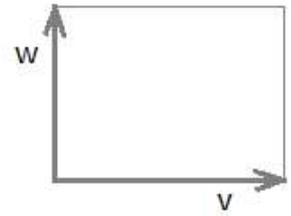
Paralelogramo  
fundamental



Figura  
base

Gráfica 64. *Hipogeo T10, Segovia, Tierradentro*

Grupo pmm



Paralelogramo  
fundamental

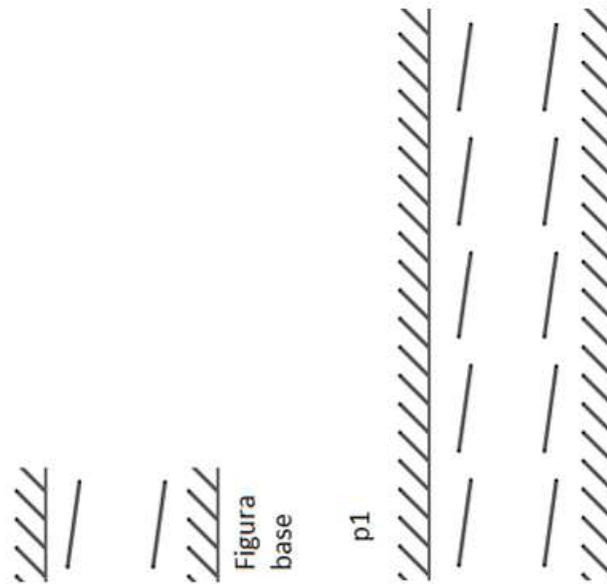


Figura  
base

Gráfica 65. *Hipogeo T10, Segovia, Tierradentro*

10.6. Otros grupos de Frisos encontrados en San Agustín

10.6.1. Grupos p1, p/m y p2g encontrados en el Obando



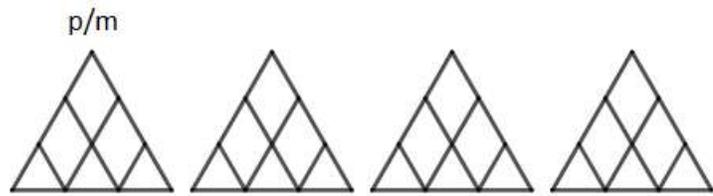
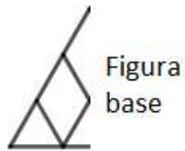




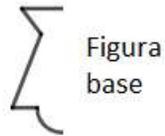
Figura base

p2g





10.6.2. Grupos p/m y p2m encontrados en el parque Arqueológico de San Agustín



p/m

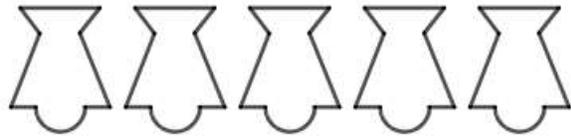




Figura  
base

p/m



Figura  
base



p2m

