



UNIVERSIDAD DEL CAUCA
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES, EXACTAS Y DE LA EDUCACIÓN
INSTITUTO DE POSGRADOS
MAESTRÍA EN EDUCACIÓN

REPRESENTACIONES DE LOS TUTORES UNIVERSITARIOS ACERCA DE LAS
DIFICULTADES DE COMPRESIÓN MATEMÁTICA DE ESTUDIANTES EN
PRIMEROS CURSOS DE MATEMÁTICAS:
EL CASO DE LA UNIVERSIDAD DEL CAUCA.

JHOANA KATHERYNE SANDOVAL SERNA

POPAYÁN, 2016



UNIVERSIDAD DEL CAUCA
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES, EXACTAS Y DE LA EDUCACIÓN
INSTITUTO DE POSGRADOS
MAESTRÍA EN EDUCACIÓN

REPRESENTACIONES DE LOS TUTORES UNIVERSITARIOS ACERCA DE LAS
DIFICULTADES DE COMPRESIÓN MATEMÁTICA DE ESTUDIANTES EN
PRIMEROS CURSOS DE MATEMÁTICAS:
EL CASO DE LA UNIVERSIDAD DEL CAUCA.

JHOANA KATHERYNE SANDOVAL SERNA

Director
PhD. YILTON RIASCOS FORERO

Trabajo presentado como requisito para optar al título de Magister en Educación,
Línea de Investigación en Educación Matemática

POPAYÁN, 2016

NOTA DE ACEPTACIÓN:

Director: _____

Ph D. YILTON OVIRNE RIASCOS FORERO

Jurado: _____

MSc. HELMER JESÚS RUÍZ DÍAZ

Jurado: _____

MSc. WILLINGTON ALGERÍ BENÍTEZ CHARÁ

Fecha de sustentación: Popayán, 16 de noviembre de 2016

AGRADECIMIENTOS

A mi familia por creer en mí, por todo su apoyo y comprensión, especialmente a mi madre María Elena, a mi padre Carlos y mi hermano Jhon Alexander, quienes siempre me han brindado la fortaleza necesaria para continuar en este proceso formativo.

A Felipe, por su amor, comprensión, paciencia y apoyo incondicional.

Al profesor Yilton Riascos Forero por su amistad, sabiduría, apoyo, tiempo, paciencia, dedicación y colaboración. A los profesores y administrativos de la Universidad del Cauca que de alguna manera me acompañaron, colaboraron y participaron en este proyecto.

A mis amigos y compañeros de la Universidad del Cauca, por su confianza, sus aportes significativos y apoyo incondicional a lo largo de mis estudios.

Al proyecto CLAVEMAT, a los tutores y a los profesores que aportaron para el diseño y realización del escenario de tutorías.

A Olguita y Emilia, por escucharme, apoyarme y confiar en mí.

En general a todas aquellas personas que de una forma u otra participaron en este trabajo de grado, mis más sinceros agradecimientos.

TABLA DE CONTENIDO

RESUMEN.....	8
INTRODUCCIÓN	10
PARTE I. FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA	13
CAPÍTULO 1. TUTORÍA UNIVERSITARIA Y EL PAPEL DEL TUTOR EN LOS MODELOS EDUCATIVOS UNIVERSITARIOS EN EL ÁREA DE MATEMÁTICAS.....	13
1.1 La tutoría en la universidad: su origen y desarrollo.....	13
1.2 La tutoría y los modelos educativos de educación superior.....	17
1.3 El papel del tutor en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas a nivel superior.....	19
CAPITULO 2. EL ESTUDIO DE LAS REPRESENTACIONES MENTALES EN LA DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS.....	20
2.1 Didáctica de las Matemáticas	20
2.2 La investigación en Didáctica de las Matemáticas.....	22
2.3 Corriente psicológica.....	25
2.4 Obstáculos, Errores y Dificultades en el aprendizaje de las Matemáticas	26
2.5 El concepto de representación mental.....	32
2.6 Representaciones mentales en didáctica de las matemáticas:	35
CAPÍTULO 3. ANTECEDENTES DEL ESTUDIO	37
3.1 Investigaciones sobre tutorías universitarias y su papel en los modelos educativos de educación superior	37
3.2 Estudios sobre tutoría universitaria en el campo de la Didáctica de las Matemáticas	38
3.3 Investigaciones sobre representaciones en Didáctica de las Matemáticas:.....	42
PARTE II: EL ESTUDIO	45
CAPÍTULO 4. EL PROBLEMA Y EL MÉTODO	45
4.1 El problema	45
4.2 Escogencia del método.	47

4.2.1 Acciones del tutor en el programa de tutorías	55
4.2.2 Procedimiento para la recolección de datos	55
4.3 Procedimiento para el análisis de datos	56
PARTE III: RESULTADOS, ANÁLISIS Y DISCUSIÓN	59
CAPÍTULO 5: RESULTADOS	59
5.1 Tutores que no se representaron los errores ni dificultades de comprensión de los estudiantes.....	59
5.2 Tutores que se representaron los errores de los estudiantes, pero no sus dificultades de comprensión.	61
5.3 Tutores que se representaron los errores y las dificultades de comprensión de los estudiantes.....	73
CAPÍTULO 6. ANÁLISIS Y DISCUSIÓN	74
6.1 Categoría 1: Tutores que no se representaron los errores ni dificultades de comprensión de los estudiantes.	75
6.2 Categoría 2: Tutores que se representaron los errores de los estudiantes, pero que no sus dificultades de comprensión.....	77
CONSIDERACIONES FINALES.....	81
BIBLIOGRAFÍA.....	86
ANEXOS.....	90
FORMATO DE INFORME DE TUTORÍA.....	90

ÍNDICE DE IMÁGENES

<i>Imagen 1</i> Página web de solicitud de tutorías.....	50
<i>Imagen 2</i> Condiciones para la solicitud de tutorías	51
<i>Imagen 3</i> Sugerencias para la solicitud de una tutoría.....	51
<i>Imagen 4</i> Formularios para realizar una solicitud de una tutoría.	51
<i>Imagen 5</i> Formulario de inscripción para solicitar una tutoría.....	52
<i>Imagen 6</i> Asignación de tutores.	52

<i>Imagen 7 Información para los usuarios y los tutores sobre las tutorías programadas.....</i>	<i>53</i>
<i>Imagen 8 Formato de informe de tutoría.</i>	<i>56</i>
<i>Imagen 9 Caso típico de la Categoría 1.</i>	<i>60</i>
<i>Imagen 10 Caso típico 1 de la Categoría 2.....</i>	<i>62</i>
<i>Imagen 11 Identificación de un error en la solución de una ecuación lineal.</i>	<i>62</i>
<i>Imagen 12 Caso típico 2 de la categoría 2.</i>	<i>63</i>
<i>Imagen 13 Identificación de un error en la resta de dos fracciones algebraicas.....</i>	<i>64</i>
<i>Imagen 14 Identificación de un error en la solución de una ecuación lineal.</i>	<i>64</i>
<i>Imagen 15 Dificultades de comprensión matemática representadas por el tutor 2.</i>	<i>65</i>
<i>Imagen 16 Caso típico 3 de la categoría 2.</i>	<i>66</i>
<i>Imagen 17 Caso típico 4 de la categoría 2.</i>	<i>68</i>
<i>Imagen 18 Identificación de errores en la solución de una inecuación con valor absoluto.....</i>	<i>68</i>
<i>Imagen 19 Representación de dificultades de comprensión matemática hechas por el tutor.....</i>	<i>69</i>
<i>Imagen 20 Obstáculo cognitivo. Extensión de la propiedad de valor absoluto $x \leq k \Leftrightarrow -k \leq x \leq k$ haciéndola verdadera en $x > k$</i>	<i>70</i>
<i>Imagen 21 Obstáculo cognitivo. Extensión de la propiedad de valor absoluto $x \leq k \Leftrightarrow -k \leq x \leq k$ haciéndola verdadera en $x = k$</i>	<i>70</i>
<i>Imagen 22 Identificación de errores en la solución de una inecuación de primer grado.</i>	<i>71</i>

ÍNDICE DE FIGURAS

<i>Figura 1 Resumen del número de tutorías por materias.....</i>	<i>54</i>
<i>Figura 2 Resumen del número de estudiantes que solicitaron tutorías y los programas académicos a los que pertenecían.</i>	<i>54</i>

ÍNDICE DE TABLAS

<i>Tabla 1 Relación de temas del curso de Matemáticas Generales y el número de veces en los que solicitaron tutorías.</i>	<i>57</i>
<i>Tabla 2 Relación de los errores y las dificultades representadas por el tutor</i>	<i>67</i>

RESUMEN

Las instituciones de educación superior, dentro de sus procesos de formación, ofrecen programas de acompañamiento estudiantil denominados tutorías académicas universitarias. Estos programas están enfocados hacia áreas que son puntos cruciales para la deserción estudiantil. Dichos acompañamientos, los realizan profesionales y estudiantes a un grupo reducido de estudiantes.

Estos programas son un tema de interés para las universidades, dada la necesidad de brindar a los estudiantes nuevas oportunidades de aprendizaje y siendo éste un motivo para realizar investigaciones sobre su diseño e implementación a nivel superior en matemáticas al considerarse un área de interés para los investigadores en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

Cuando se hacen trabajos investigativos que involucran estos tipos de programas, se encuentran diversos fenómenos de estudio, entre los cuales, las representaciones que los tutores se hacen sobre las dificultades de comprensión matemática de los estudiantes, es uno de ellos.

En tal sentido, y en particular para este trabajo, estudiar estas representaciones es muy importante, puesto que es posible dar explicaciones a ciertos fenómenos soportados en la identificación de obstáculos cognitivos que son inferidos por las manifestaciones de errores que generan los estudiantes cuando emiten una respuesta errónea a una situación matemática.

A partir de este análisis, se posibilita proponer un programas de tutorías académicas universitarias, que tenga en cuenta las necesidades académicas de

los estudiantes; la logística; la capacitación y la orientación a los tutores; y la evaluación constante de su impacto, estudiando el rendimiento académico de los estudiantes en los cursos de matemáticas, y así reducir el índice de deserción académica.

PALABRAS CLAVE: errores, dificultades, enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, tutorías, obstáculos cognitivos, representaciones, tutores, universidad.

INTRODUCCIÓN

El trabajo presentado aquí se estructura en cuatro partes. La primera parte denominada *Fundamentación teórica*, se compone de tres capítulos: Tutoría universitaria y el papel del tutor en los modelos educativos universitarios en el área de matemáticas, El estudio de las representaciones mentales en la Didáctica de las Matemáticas, y Los antecedentes del estudio.

En el primer capítulo se presenta una aproximación a la definición de tutor universitario ligado a las diferentes concepciones de universidad que se han desarrollado desde la edad media hasta la actualidad; resaltando en cada etapa histórica, los diversos arquetipos de universidad que se han gestado. También, se caracteriza a la tutoría como un componente inherente de la formación universitaria y el importante papel que juegan los tutores académicos realizando funciones de acompañamiento a los estudiantes en sus procesos de aprendizaje. Teniendo presente que los tutores pueden ser profesores o estudiantes de semestres avanzados, se definen a las “tutorías entre pares”, como aquellas en las cuales los estudiantes de niveles superiores (tutores) resuelven dudas de otros estudiantes (beneficiarios).

En el segundo capítulo, se define el campo de la Didáctica de las Matemáticas (D'Amore); se describe la investigación en Didáctica de las matemáticas (Gutiérrez) como un trabajo apoyado en un marco teórico y dirigido al descubrimiento de lo desconocido y a la mejora de los conocimientos existentes sobre un tema; se enuncia la corriente psicológica Piagetiana; y se hace una presentación sobre las definiciones de obstáculos, errores, dificultades en el

aprendizaje de las matemáticas y representaciones mentales en el campo de la Didáctica de las matemáticas.

Finalmente en el capítulo tres, se describen los antecedentes, empezando por las investigaciones sobre tutorías universitarias y su papel en los modelos educativos de educación superior, continuo a esto, se hace una exposición de estudios sobre tutoría universitaria y representaciones en el campo de la Didáctica de las Matemáticas.

La segunda parte de este trabajo llamado *El estudio*, está compuesto por un solo capítulo denominado: el problema y el método. Aquí se narra el problema de investigación; se describe la metodología con la cual trabajó esta investigación; se describen los sujetos participantes y, los instrumentos y procedimientos para la recolección de los datos. Procurando dar cuenta del alcance pretendido, se define como método el enfoque de investigación cualitativo, y como herramientas el "método de recogida de datos" y el "análisis de contenido" de informes de tutorías académicas. También, a partir de los datos obtenidos se establecen las unidades de análisis de esta investigación y las categorías.

La tercera parte del trabajo denominada, *Resultados, análisis y discusión*; se divide en t capítulos. En el primer capítulo llamado Resultados, se exponen los resultados obtenidos, de acuerdo con las representaciones de los tutores sobre las dificultades de comprensión de los estudiantes y las categorías. En el segundo capítulo: Análisis y discusión, se realizan los análisis de los resultados y la discusión de los mismos, profundizando en ellos mediante un contraste con la teoría.

En la cuarta parte del trabajo, denominado *Consideraciones finales*, se presentan las conclusiones, recomendaciones y alcance del trabajo de investigación. Este trabajo cierra con las referencias y un anexo, consistente en el instrumento que se utilizó en la investigación para obtener los datos y analizar las representaciones

que los tutoriados se realizaron sobre los errores y las dificultades de comprensión matemática de los estudiantes del primer curso de matemáticas.

PARTE I. FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA

CAPÍTULO 1. TUTORÍA UNIVERSITARIA Y EL PAPEL DEL TUTOR EN LOS MODELOS EDUCATIVOS UNIVERSITARIOS EN EL ÁREA DE MATEMÁTICAS

1.1 La tutoría en la universidad: su origen y desarrollo

La ocupación de tutor de una persona es una de las actividades más antiguas de los seres humanos; sus funciones han sido las de guiar, acompañar y apoyar a otra persona para que alcance un objetivo. La definición formal de esta ocupación, en la universidad, se encuentra ligada a las diferentes concepciones de universidad que se han desarrollado en la historia. Para comprender mejor esto, Porta (1998) ofrece una propuesta de arquetipos de universidad que se han gestado en cada etapa histórica desde la edad media hasta la actualidad permitiendo así comprender la propia evolución de la tutoría y sus determinantes. A continuación se presenta una breve descripción de tales modelos. Una mayor ampliación puede encontrarse en Rodríguez (2012).

La universidad medieval, en sus orígenes, buscaba la transmisión del conocimiento o saber absoluto, el respeto a la verdad y el desarrollo del espíritu de estudio. Como arquetipo de universidad, el papel del profesor-tutor¹ era el de guiar, orientar, tutoriar la conducta moral, social e intelectual de sus estudiantes en la búsqueda del conocimiento. Por su parte, la universidad renacentista, teniendo presente el valor de la búsqueda de la verdad científica, aúna la enseñanza y la

¹ El profesor realiza funciones de tutor cuando asesoraba a sus estudiantes sobre temas de matemáticas por fuera de clase.

investigación entre sus fines. Ahora lo importante será la reflexión crítica sobre los conocimientos adquiridos (Rodríguez S. , 2012, pp. 14-15).

Históricamente la concepción estricta del papel de los docentes es difícil de superar hasta el siglo XIX, pues durante este siglo se consolidan otros arquetipos universitarios, los cuales extienden su influencia hacia las universidades americanas y europeas.

El modelo Humboldtiano (1810), representa el arquetipo de universidad científico-educativa que actualmente se profesa en muchas partes del mundo. Este modelo sitúa como valores fundamentales la autonomía de las instituciones, la libertad del profesorado y al alumno como elemento fundamental para que la persona desarrolle sus capacidades. La función tutorial (profesor) es procurar un ambiente universitario que facilite la creación de ciencia; y a partir de ello, el concepto de tutoría en grupos pequeños se consolida con el desarrollo de las materias, se discute el proceso académico y se contribuye a fortalecer, en el alumno, un método para el desarrollo del conocimiento. (p. 15) Para cumplir esta misión formativa, los profesores catedráticos debían desarrollar simultáneamente la docencia y la investigación y utilizar el seminario como método de enseñanza. A su turno, la universidad debía gozar de las libertades esenciales de la academia — de enseñanza, aprendizaje, investigación y erudición— y el Estado protegerlas, limitándose a nombrar a los profesores y a financiar a las instituciones, sin interferir con su autonomía. (Bruner, 2014, pág. 19)

La tradición inglesa (1840) representa el modelo de arquetipo educativo de universidad. Éste se desarrolla en centros educativos como Oxford y Cambridge, que tienen un sistema tutorial diferenciado, ya que son responsables de velar por la formación moral y científica de un reducido número de estudiantes. Este arquetipo influyó en la tradición de importantes centros norteamericanos. (Rodríguez S. , 2012, p. 15)

El modelo profesional francés (1806-1808) introduce una universidad caracterizada por las necesidades de profesionalización que tenían los estados nacientes (p. 15). De este modo, a través de la centralización de la administración educacional y la nacionalización de la profesión docente, el régimen imperial estableció una estructura unitaria con poder de administrar también la educación privada (Bruner, 2014, pág. 19)

A partir del siglo XX los fines de cada universidad dan un giro, ya que se encuentran marcados por las necesidades de formación profesional que impone el desarrollo de la era industrial; situación que obliga a que los diversos modelos de universidad se modifiquen e inclusive se provoquen fusiones entre ellos. Así, las universidades ligadas a la creación y transmisión de la ciencia, incorporan los centros de formación de técnicos y profesionales, y hacen de la formación integral de los profesionales uno de sus fines fundamentales. (Rodríguez S. , 2012, p. 16)

La relación que existe entre los fines de la universidad y la función tutorial va más allá de una mirada histórica. Las tradiciones de cada universidad justifican hoy la coexistencia de diferentes modelos de universidad que llevan anexos las diferentes concepciones del papel de los docentes y las tutorías a estudiantes. Entre estos modelos se encuentran:

- Modelo académico: (ligado a la tradición alemana) Es aquel que “centra las funciones de la universidad en el desarrollo académico de los estudiantes, sin un fin exclusivamente profesionalizador, y en el estímulo de la ciencia”. En este modelo “el papel del docente se restringe a los aspectos académicos, desvinculando la formación de las necesidades de desarrollo del estudiante. En este contexto la responsabilidad del profesor está en informar sobre aspectos académicos de su asignatura y/o parcela de conocimiento sin traspasar las paredes del aula”. (pp. 16-17)
- Modelo de desarrollo personal: (vinculado a la tradición anglosajona) Es aquí donde “la universidad presta mayor atención al bienestar y desarrollo de los

alumnos, incluyendo la orientación académica, profesional y personal”. De manera general “la etapa universitaria se considera clave en la formación como personas y suele tenderse a la movilidad geográfica de ese periodo, por lo que la vida extracadémica dentro de los campus es, en algunos casos, objeto de intervención del docente” (p. 17)

- Modelo de desarrollo profesional: En éste “el papel del profesor y tutor es asegurar la capacitación profesional y el ajuste al mercado laboral, con la colaboración de otras figuras tutoriales del entorno organizacional” (p. 17)

Interpretadas desde los diferentes modelos de universidad, estas tradiciones, generadoras de su propia concepción del profesor-tutor, permiten la coexistencia de estos modelos en el mundo actual, ya que cada universidad a partir de sus objetivos se adapta a ellos y los acoge, teniendo como meta primordial responder a las necesidades del estudiante.

Rodríguez (2012) afirma que:

...la evolución de estas premisas en el seno de cada modelo de universidad justifica, desde nuestra perspectiva, que el nivel de desarrollo de los sistemas tutoriales presente enormes divergencias en función de los países. Así, las universidades americanas tienen una gran tradición en la introducción de servicios de orientación integrados para responder a las necesidades de desarrollo de los estudiantes, como los *academic advising centers* responsables de la atención a las cuestiones académicas. En el mismo nivel de preocupación por el alumno destaca el modelo tutorial británico, que cuenta también con una larga tradición universitaria. En el otro polo podemos citar los países mediterráneos, donde la incorporación de tutorías es más reciente. (p. 18)

En conclusión, teniendo presente lo expuesto aquí, y las circunstancias internas y externas a la vida universitaria, todos estos modelos coinciden en destacar el importante papel que cumplen los tutores y sus funciones en los procesos académicos que viven los estudiantes en su paso por la universidad. En otras palabras, se puede considerar que un *tutor universitario* es aquel que brinda un acompañamiento a los estudiantes dentro de su formación universitaria, para complementarla y ayudarles a alcanzar sus metas académicas. En el siguiente apartado, se hablará sobre las características de la tutoría universitaria y su participación en los modelos educativos que las desarrollan.

1.2 La tutoría y los modelos educativos de educación superior

Rodríguez (2012), afirma que la tutoría es un componente inherente de la formación universitaria. Comparte sus fines y contribuye a su logro a través de facilitar su adaptación a la universidad, el aprendizaje y el rendimiento académico, la orientación curricular y profesional.

Los tutores son personas que juegan un papel importante y primordial en el avance de la calidad de la educación de cada centro educativo, ya que sus principales funciones son las de acompañar a los estudiantes en sus procesos de aprendizaje; brindar los medios para el desarrollo de las capacidades cognitivas y metacognitivas, de identidad personal y equilibrio emocional, de las físicas y motoras, y de las capacidades de relación e integración, y facilitar un desarrollo integral que lo prepare para la vida. (pp. 34-46)

De la misma manera Molina (2004) define la tutoría como: “la atención personalizante y comprometida del tutor en su relación con el alumno, que consiste en orientar, guiar, informar y formar al alumno en diferentes aspectos y en diferentes momentos de su trayectoria académica, integrando las funciones administrativas, académicas, psicopedagógicas, motivacionales y de apoyo personal.

Para Fernández y Escribano (2008) la tutoría no sólo consiste en resolver dudas de una asignatura en concreto, sino que el concepto es mucho más amplio y contiene un carácter orientador inequívoco. Además de orientación sobre la vida académica en todos los sentidos, existen otros tipos de orientación respecto a la vida después de la carrera, supervivencia en la universidad, hábitos de estudio, búsqueda de empleo o elección de otros estudios post-universitarios. El tutor deberá, entonces, facilitar al estudiante una ayuda basada en una relación personalizada, para conseguir sus objetivos académicos, profesionales y personales mediante el uso de la totalidad de los recursos institucionales y comunitarios.

En la universidad, la función de un tutor universitario la realizan profesionales y estudiantes vinculados a la misma, particularmente la de tutor académico la hacen profesores y estudiantes. Los docentes en sus procesos de enseñanza de temas relativos a los contenidos disciplinares, además de las clases, también tienen momentos de atención a los estudiantes (profesor-tutor), pero por falta de tiempo surge la necesidad de que la universidad abra otros tipo de espacios como programas de tutorías constituidos por estudiantes de semestres avanzados, los cuales apoyan a sus compañeros brindando refuerzo en momentos puntuales de los procesos de aprendizaje.

Las tutorías en las cuales los estudiantes de niveles superiores (tutores) resuelven dudas de otros estudiantes (beneficiarios) se conocen como *tutorías entre pares* (peer tutoring) (Goodlad & Hirst, 1989); por un lado, el tutor refuerza los conocimientos en la asignatura que asesora y, por otro, el estudiante se beneficia del asesoramiento académico y de las recomendaciones que hace su tutor a su proceso de aprendizaje. (Botello & Parada, 2013). Así, los tutores se sienten en un espacio con oportunidad para desarrollarse profesionalmente y como una experiencia en que pone a prueba lo aprendido en su educación inicial.

La tutoría universitaria, poco a poco, se ha venido convirtiendo en un tema de interés para las instituciones educativas superiores, dada la necesidad de brindar a los estudiantes nuevas oportunidades de aprendizaje, en las cuales ellos sean los principales actores. Sin embargo, no se debe olvidar el importante papel que tiene el profesor como guía en la estrategia tutorial, pues el estudiante tutor necesita afianzar y fortalecer su rol, acompañado y guiado por un profesor que le ayude y le permita, en diferentes momentos del proceso, adquirir las bases y herramientas tutoriales requeridas para esta labor pedagógica. (Cardozo, 2011)

1.3 El papel del tutor en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas a nivel superior

En las universidades, la mayoría de los programas de tutorías académicas están enfocados hacia las áreas donde el bajo rendimiento académico de los estudiantes son puntos cruciales para la deserción estudiantil. Los cursos de matemáticas son un ejemplo de éstas y particularmente en los primeros semestres de la universidad.

Para hablar de los procesos de enseñanza y de aprendizaje es necesario hablar de la triada didáctica: *profesor, alumno y saber, ubicadas en la estructura didáctica* (Joshua & Dupin, 1993). Para que dicha estructura funcione, el profesor debe tener una intención de enseñar un saber y el estudiante tener el propósito de aprenderlo (contrato didáctico). Cuando ésta estructura se ponen en relación entre pares, se manifiestan diversos fenómenos educativos que son de interés para la Didáctica de las Matemáticas.

Teniendo presente que sólo existen dos figuras de tutor académico: profesor-tutor y tutoría entre pares (peer tutoring), en esta investigación sólo se tendrá en cuenta la segunda, por lo que se entenderá que su participación será externa a la clase y ajena al profesor.

En este sentido el tutor y el profesor tienen como función mediar para que el estudiante construya un conocimiento, es allí donde el tutor en un momento puntual del proceso de aprendizaje del estudiante refuerza la labor del docente, brindándole apoyo al estudiante para que sus procesos cognitivos se complementen, hasta ser evidenciados mediante la verbalización de dicho conocimiento.

CAPITULO 2. EL ESTUDIO DE LAS REPRESENTACIONES MENTALES EN LA DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS

2.1 Didáctica de las Matemáticas

La raíz etimológica de la palabra didáctica es griega, *didakticós*, participio pasado de *didaskién* que corresponde a *enseñar*. El término didáctica tiene varias acepciones y significados dependiendo del tema al cual se esté refiriendo, en este sentido, D'Amore (2006) describe que tradicionalmente se usaba *didáctica* para referirse a la actividad de la *enseñanza*, pero cuenta que en una edición actualizada del diccionarios de la lengua italiana de N. Zingarelli corresponde al "sector de la pedagogía que tiene por objeto el estudio de los métodos de enseñanza"; sin embargo en Francia, Foulquié en su dictionnaire de la langue pédagogique, *didáctica se refiere o tiene por objeto la enseñanza, es decir, es la técnica o arte de la enseñanza y es el estudio de los métodos de enseñanza.* (págs. 36-37)

El término *Didáctica* es usado en ocasiones como adjetivo y en otras como sustantivo, la diferencia radica en aquellas personas que se ocupan de la *didáctica* como ámbito científico de investigación. El país donde inició este uso explícito del sustantivo y del adjetivo fue Francia, pero en las últimas décadas se ha debatido bastante el sentido que tiene una *didáctica general* y unas *didácticas disciplinarias*, siendo éstas últimas aquellas didácticas que se ocupan de la enseñanza de cada una de las materias o disciplinas; por ejemplo la *didáctica de las matemáticas* se ocupa de la enseñanza de las matemáticas. (pág. 37)

Un acercamiento a la definición de *didáctica de las matemáticas*, son las presentadas por Douady (1984) y por Vergnaud (1985) citados por D'Amore, para la primera la *didáctica de las matemáticas* es: para la primera es "el estudio de los procesos de transmisión y de adquisición de los diferentes contenidos de esta ciencia y se propone describir y explicar los fenómenos relativos a las relaciones entre su enseñanza y su aprendizaje. No se reduce a buscar una buena forma de enseñar una determinada noción"; y para el segundo es "el estudio de los procesos de transmisión y de adquisición relativos al dominio específico de esta disciplina, o de las ciencias cercanas con las cuales interactúa".

La idea aquí no es exponer todos los puntos de vista sobre *didáctica general* ni de *didáctica de las matemáticas* en particular, pero si se puede mostrar que para enseñar matemáticas no basta con saber matemáticas, es necesario estudiar y realizar investigaciones sobre sus maneras de ser enseñadas y aprendidas teniendo en cuenta el presente en el cual los sujetos están inmersos.

Para hablar hoy sobre investigación en didáctica de las matemáticas, es necesario aclarar el modo de verla, según los tipos de didáctica de las matemáticas propuestos por D'Amore:

A: como divulgación de las ideas, fijando por lo tanto la atención en la fase de la enseñanza (**Arte**).

B. como investigación empírica, fijando la atención en la fase del aprendizaje (epistemología del aprendizaje de las matemáticas). (pág. 53)

Para D'Amore, la didáctica de tipo **A** es de fundamental importancia, puesto que es en ella donde reposan algunas actividades que caen bajo el nombre de "uso de la historia de la matemática como instrumento didáctico", contemplando el análisis crítico de la evolución de las ideas, el desarrollo de los hechos y la anecdótica. Pero ésta tipología de la didáctica tiene sus límites en cuanto a su seria investigación empírica, pues fatalmente tiende a convertirse en investigaciones de

tipo **B**, ya que si se efectúan éstas, con oportunos y bien estudiados dispositivos experimentales, sobre los resultados cognitivos obtenidos con actividades del tipo **A**, entonces se pasa a la investigación considerada experimental, esto es, se entra en el campo de la *epistemología del aprendizaje* es decir a la didáctica de tipo **B**. (págs. 63-65).

Toda la investigación en didáctica de las matemáticas tipo **B** concentra su atención en el fenómeno del aprendizaje, pero desde el punto de vista de los fundamentos y por lo tanto sin aceptar un único modelo de teoría del aprendizaje (aunque en este momento parece ser que la psicología cognitiva es la candidata más autorizada para asumir el papel de organizadora fundacional para muchas experiencias de investigación). (págs. 73-74).

Antes de finalizar esta introducción sobre el término de *didáctica de las matemáticas*, es importante señalar que algunos autores hablan de *educación matemática* y de *didáctica de las matemáticas*. En el mundo anglosajón se prefiere la primera como el área de conocimiento que se refiere a los procesos de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, en Francia, Alemania, España, entre otros, normalmente usan *didáctica de las matemáticas*, sin embargo Steiner (1985) y Godino (1991) usan los dos términos, relacionando uno como parte del otro.

Para el desarrollo de este trabajo investigativo, Didáctica de las Matemáticas y Educación Matemáticas son sinónimos.

2.2 La investigación en Didáctica de las Matemáticas

La investigación es “*un trabajo apoyado en un marco teórico y dirigido al descubrimiento de algo desconocido y a la mejora de los conocimientos existentes sobre un tema*” (Gutiérrez, 1991, pág. 2), en particular la actividad investigadora dentro de la Didáctica de las Matemáticas tiene como misión preferente “*ofrecer respuestas a los problemas planteados por los profesores y diseñadores de*

currículum cuando quieren conseguir que las matemáticas sean comprendidas mejor y aprendidas más profundamente por los estudiantes” (La Investigación en Didáctica de las Matemáticas, pág. 1).

Las características primarias de la investigación en Didáctica de las Matemáticas son: **a)** el perfeccionamiento de las actuales formas de actuación de los profesores de Matemáticas y la búsqueda de otras nuevas, con el objetivo final de promover una mejor enseñanza de herramientas y conceptos matemáticos a los estudiantes, y **b)** el logro de una mejor comprensión de los mecanismos mentales ligados a la actividad de aprendizaje de las Matemáticas, para así poder organizar buenos entornos formativos para los estudiantes y poder proporcionarles los medios necesarios para facilitar su aprendizaje (La Investigación en Didáctica de las Matemáticas, pág. 2).

Lesh (1979 citado en Gutiérrez 1991) dice que *“el objetivo de la investigación es desarrollar un cuerpo de conocimientos útiles relacionados con temas importantes de la Didáctica de las Matemáticas”* (La Investigación en Didáctica de las Matemáticas, pág. 2), en donde *“desarrollar conocimientos útiles”* hace referencia a: identificar problemas importantes para la enseñanza de las matemáticas; plantear conjuntos de cuestiones concretas (y resolubles) relacionadas entre sí contribuyendo a mejorar el conocimiento disponible sobre el tema subyacente; encontrar respuestas a esas cuestiones que sean útiles en una diversidad de contextos, eliminando la información poco válida o inútil, y comunicar los resultados y conclusiones de forma que sean comprensibles por profesores e investigadores (La Investigación en Didáctica de las Matemáticas, pág. 2).

Dentro de la investigación educativa existen enfoques de Investigación Cualitativa, que estudian *la realidad en su contexto natural, tal y como sucede, intentando sacar sentido de, o interpretar los fenómenos de acuerdo con, los significados que tienen para las personas implicadas.* (Rodríguez, Gil, & García, 1996). Gutiérrez (1991), afirma que éste método tiene como principios básicos su forma de

entender la educación, que los estudiantes son diferentes y que su comportamiento o su éxito en el aprendizaje no depende sólo de su habilidad o capacidad, sino que están relacionados con una serie de variables de tipo social que deben ser tenidas en cuenta (entorno familiar, escolar,...). Por su forma de interpretar el aprendizaje de las Matemáticas, los métodos cualitativos se utilizan preferentemente en aquellos estudios centrados en el análisis de la formación de conceptos y que, en general, tratan de indagar sobre cómo se desarrolla un proceso cognitivo o de entender el proceso completo y la influencia de los diferentes elementos que intervienen en él (1991, pág. 10).

Para llevar a cabo una investigación en didáctica de las matemáticas, es necesario hacer uso de herramientas o técnicas que permitan conseguir información y, a partir de ella analizar y obtener conclusiones. Para esto, los investigadores utilizan diversos métodos, entre estos, los métodos de recogida de datos y el análisis de contenido.

Los métodos de recogida de datos, son formas de obtener datos directamente de los sujetos en los que se basa la investigación (Gutiérrez, 1991). Una de las principales técnicas usadas para la recolección de datos durante el “trabajo de campo” en investigación es el “análisis de errores”, ya que en determinados contextos, generalmente al hacer un análisis de comportamiento, resulta útil proponer a los estudiante una serie de problemas seleccionados, con el fin de analizar sus métodos de resolución y formas de uso de los conceptos y métodos matemáticos; en tales casos esta técnica se revela como una estrategia muy útil para hacer inferencias acerca de los procesos mentales de los estudiantes (pág. 14).

El análisis de contenido, es el conjunto de actividades que consisten en explicitar y sistematizar el contenido de los mensajes y la expresión de ese contenido con la ayuda de indicios cuantificables o no, todo ello con la finalidad de efectuar deducciones lógicas y justificables concernientes a la fuente (el emisor y su

contexto), eventualmente, a los efectos de los mensajes tomados en consideración. (López, 2002, pág. 175)

2.3 Corriente psicológica

Piaget (1959/1972) señala que *“la inteligencia es una adaptación”* (El nacimiento de la inteligencia en el niño, p. 5), en particular es una adaptación biológica. Afirmar esto, es suponer que la inteligencia es una organización y su función consiste en estructurar el universo como el organismo estructura el medio inmediato. Para él todos los organismos tienen inteligencia, entre los cuales los seres humanos tienen la capacidad de razonar.

La adaptación y la organización son invariantes funcionales, es decir que no cambian a lo largo del desarrollo cognitivo (transformaciones que se dan en el transcurso de la vida, por las cuales se aumentan los conocimientos y habilidades para percibir, pensar y comprender), además son inseparables y complementarios de un mecanismo único (El nacimiento de la inteligencia en el niño, p. 7). La adaptación está constituida por dos procesos: asimilación y acomodación, la primera es la forma por la cual los seres humanos ingresan nuevos elementos exteriores a los esquemas mentales existentes en él, y la segunda es el proceso consistente en la reorganización de los esquemas mentales preexistentes y la incorporación de nuevos elementos.

Piaget indica que la mente solo puede adaptarse a una realidad mediante una acomodación perfecta, es decir, si en esta realidad nada puede modificar los esquemas del sujeto; puede darse la posibilidad que la persona asimile y no acomode, pero por ningún motivo se presentará lo contrario. Para Piaget: *“la asimilación jamás puede ser pura, ya que, al incorporar los elementos nuevos a los esquemas anteriores, la inteligencia modifica sin cesar estos últimos para ajustarlos a los nuevos datos”* (El nacimiento de la inteligencia en el niño, p. 7). La adaptación solo se completa cuando da lugar a un sistema estable, o sea cuando existe equilibrio entre acomodación y asimilación.

Cuando se habla de esquema mental, se está aludiendo a la idea de herramientas u objetos mentales, que hacen posible que la persona organice y obtenga conocimientos del mundo exterior. Son acciones que pueden ser aplicadas directamente sobre los objetos (de acción) o sobre su representación tras ser interiorizados (operatorios).

La evolución de la inteligencia muestra la aparición progresiva de diferentes etapas, las cuales se diferencian entre sí por la construcción de esquemas cualitativamente diferentes. Según las edades de los niños, Piaget identifica cuatro periodos o estadios del desarrollo cognitivo que van desde que se nace hasta la adolescencia, denominadas: *sensorio motor* (hasta los 2 años de edad), *pre operacional* (de los 2 hasta los 7 años), de las *operaciones concretas* (de los 7 a los 11 años) y de las *operaciones formales* (a partir de los 11 años de edad) permitiendo mostrar cómo las estructuras psicológicas se desarrollan a partir de los reflejos innatos, se organizan durante la infancia en esquemas de conducta, se internalizan durante el segundo año de vida como modelos de pensamiento y se desarrollan durante la infancia y la adolescencia en complejas estructuras intelectuales que caracterizan la vida adulta.

En conclusión, Piaget, investigador en el campo de la psicología genética y creador de la teoría del desarrollo cognitivo denominado Epistemología Genética, muestra cómo las personas construyen conocimiento constantemente a partir de sus relaciones con el entorno y de qué forma logran interiorizarlo. También afirma que todos los sujetos son inteligentes y que aprenden de manera diferente.

2.4 Obstáculos, Errores y Dificultades en el aprendizaje de las Matemáticas

2.4.1 Obstáculos en el aprendizaje de las matemáticas

El filósofo francés Gastón Bachelard en su libro: "la formación del espíritu científico", desde una perspectiva epistemológica y en relación al desarrollo del pensamiento científico, afirma que "cuando se investigan las condiciones

psicológicas del progreso de la ciencia, se llega muy pronto a la convicción de que hay que plantear el problema del conocimiento científico en términos de obstáculos. No se trata de considerar los obstáculos externos, como la complejidad o la fugacidad de los fenómenos, ni de incriminar a la debilidad de los sentidos o del espíritu humano: es en el acto mismo de conocer, íntimamente, donde aparecen, por una especie de necesidad funcional, los entorpecimientos y las confusiones. Es ahí donde mostraremos causas de estancamiento y hasta de retroceso, es ahí donde discerniremos causas de inercia que llamaremos obstáculos epistemológicos”. (2000, pág. 15)

Luis Rico (1998) parafraseando a Bachelard, dice que “el conocimiento de lo real es una luz que siempre proyecta alguna sombra; jamás es inmediata y plena. Al volver sobre un pasado de errores se encuentra la verdad. En efecto, se conoce en contra de un conocimiento anterior, destruyendo conocimientos mal adquiridos o superando aquello que, en el espíritu mismo, obstaculiza. La noción de obstáculo epistemológico puede ser estudiada en el desarrollo histórico del pensamiento científico y en la práctica de la educación”. (pág. 73)

Esta noción de obstáculo es retomada años después por el investigador del campo de la Didáctica de la Matemática Guy Brousseau en su documento “les obstacles epistemologiques et les problèmes en mathématiques” (1983) en donde por primera vez, explicita la idea de obstáculo epistemológico y su posible relación con la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Es en éste artículo, en el que resalta los trabajos de Piaget (1975), y afirma que, el error y el fracaso no tienen el papel mínimo que suelen poseer: “el error no es solamente el efecto de la ignorancia, de la incertidumbre, del azar, que se cree en las teorías empiristas y behavioristas del aprendizaje, sino el efecto de un conocimiento anterior, que tenía su interés, sus éxitos, pero que, ahora, se revela falso, o simplemente inadecuado. Los errores de este tipo no son intermitentes o imprevisibles, están constituidos en obstáculos” (Palarea Medina & Socas Robayna, 1994).

Según Palarea y Socas (1994), en 1976 Brousseau define *obstáculos cognitivos* como obstáculos que se dan en la construcción de conocimientos matemáticos por los estudiantes. Indica también que estos obstáculos se manifiestan mediante errores, pero que no son errores por azar, ni intermitentes, sino reproducibles y persistentes.

Según Brousseau, en el sistema didáctico existen tres tipos de obstáculos:

1. De origen *psicogenético* o *cognitivos*, provenientes de condiciones genéticas específicas de los estudiantes.
2. De origen *didáctico*, provenientes de la enseñanza.
3. De origen *epistemológico*, relacionado con el propio concepto.

Para efectos de este trabajo, cuando se hable de obstáculos, se hace referencia a los obstáculos psicogenéticos o cognitivos.

Los obstáculos cognitivos son considerados como conocimientos que han sido satisfactorios para la resolución de ciertos problemas durante un tiempo, se fijan en la mente y, sin embargo, resultan inadecuados y de difícil adaptación al tenerse que enfrentar el alumno a los problemas. (Palarea Medina & Socas Robayna, 1994)

Los obstáculos se estudian a través del análisis de los errores más frecuentes de los estudiantes. A continuación se define el *error* en el aprendizaje de las matemáticas.

2.4.2 Errores en el aprendizaje de las matemáticas

Luis Rico (1998) en el apartado de "Fundamentos Epistemológicos" de su escrito *Errores y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas* afirma que según los planteamientos constructivistas:

- Todo conocimiento es construido y, particularmente el conocimiento matemático, es construido a través de un proceso de abstracción reflexiva.

- Existen estructuras cognitivas que se activan en los procesos de construcción.
- Las estructuras cognitivas están en desarrollo continuo.
- Los errores son elementos usuales en el camino hacia el conocimiento verdadero. (pág. 74)

En el aprendizaje de las matemáticas cuando un estudiante emite una respuesta incorrecta a una situación matemática que se le plantea, se dice que su respuesta es errónea y la solución proporcionada es un *error* en relación con la cuestión propuesta; estas respuestas incorrectas, son consideradas como señales de serias deficiencias e incluso el fracaso en el logro de un aprendizaje.

Es por este motivo que el estudio y análisis de errores en el aprendizaje de las matemáticas ha sido de mucho interés en el campo de la Educación Matemática, particularmente por las corrientes de pedagogía y psicología, las cuales han organizado los siguientes grupos:

1. Estudios relativos al análisis de errores, causas que los producen y clasificaciones de los errores. Aquí también se incluyen las aproximaciones teóricas hechas desde planteamientos epistemológicos, que tratan de establecer estructuras para los errores debidas a la propia naturaleza de los objetos matemáticos, los trabajos sobre obstáculos son un ejemplo de esta opción.
2. Estudios dedicados al tratamiento curricular de los errores del aprendizaje en matemáticas, la cual trata de prever los errores, detectarlos y proponer medios para su corrección.
3. Estudios dedicados a determinar qué conviene que aprendan los profesores en formación en relación con los errores que cometen los estudiantes. Se trata de estudios relativos a la formación del profesorado y al papel que la observación, análisis, interpretación y tratamiento de los errores de los alumnos, tienen en este proceso de formación.

Los errores en el proceso de construcción de los conocimientos van a aparecer de forma sistemática, y por tanto, este proceso de construcción deberá incluir su diagnóstico, detección, corrección y superación, mediante actividades que promuevan el ejercicio de la crítica sobre las propias producciones. (Rico, 1998)

Además de esto, Rico concluye, en primer lugar, que los errores pueden contribuir positivamente en el proceso de aprendizaje; en segundo lugar, los errores no aparecen por azar sino que surgen en un marco conceptual consistente, basado en conocimientos adquiridos previamente; en tercer lugar, argumentar la necesidad de que cualquier teoría de instrucción modifique la tendencia a condenar los errores culpabilizando a los estudiantes de los mismos, reemplazándolo por la previsión de errores y su consideración en el proceso de aprendizaje; y por último, señalar que todo proceso de instrucción es potencialmente generador de errores.

Con respecto al análisis, causas y clasificación de errores, una característica diferenciadora de la aproximación cognitiva al estudio de aprendizaje con respecto a los estudios conductistas es la necesaria postulación de procesos mentales en la realización de tareas. Estos procesos mentales al no ser visibles, los investigadores deben recurrir a métodos indirectos de observación que permitan hacer inferencias plausibles sobre los procesos mentales considerados. (Rico, 1998, pág. 87)

Para esto, se considera que la teoría del procesamiento de la información es importante para el estudio del pensamiento matemático. Ésta teoría se basa en la suposición de que los problemas matemáticos se descomponen en varios componentes del procesamiento, los cuales, al ser internos por naturaleza, requieren de métodos indirectos de observación. Entre estas estrategias indirectas, se encuentra el análisis de los errores de los sujetos psicológicos en sus desarrollos matemáticos.

Existen diversas maneras de clasificar errores. A partir del procesamiento de información, se hace una clasificación de errores en cinco categorías:

1. Errores debidos a dificultades de lenguaje.
2. Errores debidos a dificultades para obtener información espacial.
3. Errores debidos a un aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos previos.
4. Errores debidos a asociaciones incorrectas o a rigidez del pensamiento (por perseveración, asociación, inferencia, asimilación, transferencia negativa a partir de tareas previas).
5. Errores debidos a la aplicación de reglas o estrategias irrelevantes. (Rico, 1998, págs. 89-90)

Cuando un estudiante realiza una tarea matemática con éxito, es porque encuentra gran parte de la información necesaria en los esquemas mentales que posee, que no están presentes en los enunciados de la tarea propuesta. (Rico, 1998, pág. 89).

2.4.2 Dificultades en el aprendizaje de las matemáticas

La palabra *dificultad* proveniente del término latino *difficultas*, y hace referencia al problema o inconveniente que surge cuando una persona intenta lograr algo. También se entiende por dificultad como aquel inconveniente o barrera que hay que superar para conseguir un determinado objetivo.

En el campo del aprendizaje de las matemáticas, existen diversas dificultades que impiden la construcción de un conocimiento matemático. Particularmente los obstáculos son dificultades que no se pueden superar e impiden avanzar en el nuevo conocimiento.

En este documento, la dificultad en el aprendizaje de las matemáticas se considera como la descripción de la aparición del error a partir del obstáculo. Esta definición puede diferir de la mirada que tienen otros autores sobre dificultad al

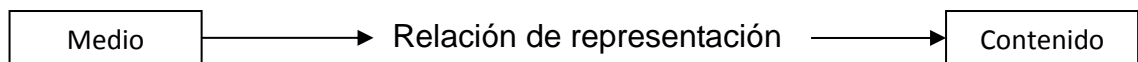
atribuir elementos externos al obstáculo, pero que pueden contribuir a él, como por ejemplo, problemas del lenguaje; que pueden influir en el obstáculo, pero aquí no son considerados como parte del mismo.

2.5 El concepto de representación mental

Josef Perner, investigador austriaco, neopiagetiano y gran representante de estudios sobre la comprensión de las mentes representacionales, ha elaborado una propuesta sobre la *representación* de algo y las relaciones que se tejen cuando de explicarlo se trata (Perner, 1994).

Debido a las tantas ambigüedades que se han gestado alrededor de la palabra *representación*, Perner realiza una serie de aclaraciones terminológicas, con las cuales hace un acercamiento formal de definición:

- El *medio* o *medio representacional* es una imagen o imagen externa. Por ejemplo, un dibujo, trazos, un cuadro, una foto,...
- El *contenido* o *contenido representacional* hace referencia a lo descrito o representado.
- La relación o *relación de representación* es el nexo que se establece entre *medio* y el *contenido*. (Comprender la mente representacional, 1994, pp. 29-30)



Perner (1994) afirma que cuando se habla de *representación*, se hace referencia al *medio representacional* (imagen); pero habrá ocasiones en las cuales la imagen es un ente no existente (por ejemplo, un unicornio), y que a pesar de su particularidad de no ser tangible y no tener donde ubicarlo, se dirá que esta imagen es una *representación*. Es en estos casos, donde no se usará el término *representación* para referirse a la imagen (medio representacional), sino a su

contenido representacional. (Comprender la mente representacional, 1994, pp. 30-31)

Una representación es algo que mantiene una relación de representación con otra cosa. Perner (1994).

Con este significado que plantea Perner sobre *representación*, se puede observar que la naturaleza de la *relación de representación* que se da entre el *medio* y el *contenido* es fundamental para su comprensión. A continuación se presentarán algunas características:

1. Existe una gran diferencia entre *representación* y la *representación como*. Para explicar esto, Goodman (1974, p. 29), plantea el siguiente ejemplo: Suponga que una persona dice: ¡tengo un cierto caballo negro!, y después muestra una foto instantánea, en la que aparece una "manchita de luz a la distancia". Usted esperaría que en la foto apareciera un caballo negro, pero el problema aquí es que no representa su caballo negro como caballo negro; pero no indica que no represente el caballo negro. A esto Perner lo resume en que "las *representaciones* no representan tan solo algo (contenido), sino que *representan algo como algo*. (Comprender la mente representacional, 1994, p. 33).
2. Se utiliza la palabra *referente* cuando se quiera decir *qué* representa una representación. A este también se le denomina, *objeto* de representación, *denotación*, o *tema*.
3. Al *sentido* se le suele denominar *significado* o *comentario*, es decir cuando hable de cosas representadas *en tanto sean de una determinada manera*.
4. La *asimetría*, es cuando una imagen representa algo, pero ese algo no representa la imagen (por ejemplo, la foto de un niño).
5. Se hace referencia a la *singularidad* de una representación, cuando por ejemplo, se tienen dos fotografías de dos gemelos por separados, cada imagen sólo representará a uno, aunque sean idénticos.

6. Una *representación errónea* se presenta cuándo el contenido de la representación no coincide con la imagen. Por ejemplo, una fotografía en donde aparece un niño con los ojos rojos por el flash de la cámara fotográfica. Esta foto es una representación errónea de los ojos cafés del niño.
7. La *no existencia* de una representación es exactamente el caso del ejemplo del unicornio. Es decir que “el objeto o situación descrita en una imagen no tiene necesidad de existir”. (Perner, 1994, p. 34).

Todas estas caracterizaciones de la naturaleza de la *relación de representación*, permiten decidir si algo cuenta como instancia de representación o no.

Perner, de acuerdo con Alan Leslie (1987), dice que para que un sistema establezca qué significan sus elementos representacionales, “es importante, ante todo, que funcione en estrecho contacto causal con el mundo que se ha de representar”; a las representaciones que cumplen esta función se les llama *representaciones primarias*. (Perner, 1994, p. 20). Teniendo en cuenta que las *representaciones erróneas* se dan cuando el sistema no funciona correctamente, estos percances más adelante pueden convertirse en algo positivo, ya que un sujeto no utilizará las representaciones de las cosas del mundo para representar cómo son esas cosas, sino para representar cómo podrían ser. A estas últimas se les conoce con el nombre de *representaciones secundarias*. Estas representaciones son “voluntariamente separadas “desdobladas” de la realidad y constituyen un fundamento de nuestra capacidad para considerar el pasado, el futuro posible e incluso el que no existe y para razonar hipotéticamente” (Perner, 1994, p. 21).

Cognitivamente, una explicación a este fenómeno, lo presenta Perner en el siguiente párrafo:

...las representaciones secundarias son parasitarias respecto de la existencia de representaciones primarias. Sin el nexo causal con la realidad representada en el funcionamiento primario, los estados internos carecerían de función representacional. Sólo después de que el funcionamiento primario ha dado sentido a los estados internos, se los puede “desdoblar” de la realidad para emplearlos como

representaciones en una función secundaria. (Comprender la mente representacional, 1994, p. 21)

Analizar algo que sucedió con lo que debía haber sucedido, es un ejemplo de representación secundaria, ya que necesita la representación de algo que no existe, de lo ideal. El desarrollo de esta última es necesaria para que pueda haber representación del concepto de representación. A esto último se le conoce como *metarrepresentación (representación de una representación)*.

2.6 Representaciones mentales en didáctica de las matemáticas:

Vicenç Font (2001) en su artículo *Representation in Mathematics Education* afirma que para la psicología cognitiva

la cognición consiste en la manipulación mental de representaciones (símbolos que se refieren a "algo"). Los símbolos mentales se consideran con una cierta corporeidad (palabras pensadas, evocación de objetos, etc.). Los objetos representados por los símbolos mentales pueden ser objetos no-ostensivos (conceptos, ideas, etc.) y objetos ostensivos (con soporte material, intersubjetivos en el sentido que se pueden mostrar a otro). Los objetos ostensivos que forman parte de las experiencias materiales de las personas, de acuerdo con el punto de vista realista representacionista, se consideran perceptos (representaciones personales de objetos reales exteriores al sujeto). Los no-ostensivos se consideran como objetos personales del sujeto. (p. 10)

Es importante resalta que cuando se hable de *objetos no-ostensivo*, se está haciendo referencia a objetos que son propios del sujeto, y que son el resultado de una construcción social a partir de prácticas realizadas. Una posición opuesta a esta es la platónica, que considera una existencia de estos objetos independiente de las personas.

En Didáctica de las matemáticas, se considera a los objetos reales o experiencias materiales de las personas (*objetos ostensivos*) *representaciones externas*; a los símbolos mentales u *objetos personales (no-ostensivos)* *representaciones internas*. Estos dos tipos de representaciones no se pueden estudiar de manera disyunta, ya que estas influyen mutuamente en la actividad cognitiva. Por ejemplo, muchas investigaciones tienen por objeto de estudio *representaciones internas*, porque consideran que la comprensión matemática de los estudiantes está

relacionada con el incremento en el número de conexiones entre diferentes tipos de *representaciones internas*, lo cual se puede conseguir estableciendo conexiones y traducciones entre diferentes tipos de *representaciones externas*. (p. 11).

En el campo de la investigación en Didáctica de las Matemáticas, investigadores se han centrado en comprender el término “representación” y el papel que juegan estas en el proceso de comprensión de los contenidos matemáticos. Pues, la naturaleza de las representaciones matemáticas ostensivas influye en el tipo de comprensión que genera el alumno, y, recíprocamente, el tipo de comprensión que tiene el alumno determina el tipo de representación ostensiva que puede generar o utilizar.

Durante muchos años de estudios, desde el campo de la Didáctica de la Matemática, se han desarrollado diversos puntos de vista sobre “representación”; entre estos: Dubinsky, Sfard y Tall; Tall y Vinner; Dörfler; Duval; Kaput y Brown; Delgado y Àlvares; la teoría antropológica y la dimensión pragmática de la representación, que seguramente deberán ser objeto de consulta y análisis por parte de futuras investigaciones.

CAPÍTULO 3. ANTECEDENTES DEL ESTUDIO

3.1 Investigaciones sobre tutorías universitarias y su papel en los modelos educativos de educación superior

La función tutorial constituye una de las acciones principales de la universidad, la llevan a cabo docentes y estudiantes en sus cursos y programas de tutorías de la misma universidad. La tutoría académica permite tener un acercamiento a las necesidades educativas de los estudiantes, realizar seguimientos a sus procesos de aprendizajes, y brindar apoyo en la adaptación de los estudiantes al entorno académico.

Sebastián Rodríguez Espinar (2012) en colaboración con otros investigadores de la Universidad de Barcelona España, elaboraron el libro: Manual de tutoría universitaria. En él ofrecen un compendio histórico de los diferentes modelos de acciones tutoriales universitarios, una descripción de los diversos perfiles de los estudiantes universitarios y las implicaciones en la acción tutorial, una profundización sobre lo que se conoce como tutoría grupal e individual; y aparte, una sección dedicada a las diferentes estrategias y recursos para la acción tutorial como propuesta universitaria que es aplicada en esta universidad.

Las investigadoras Gabriela Fernández y María del Carmen Escribano (2008), de la Fundación Universitaria San Pablo CEU de Madrid, España, desarrollaron el proyecto: Las tutorías en la formación académica y humana de los alumnos en la Universidad San Pablo CEU. En donde realizaron una descripción formal sobre

qué se entiende por tutoría universitaria y por función tutorial en la Universidad, y de qué manera estos mecanismos pueden y deben contribuir a la formación académica y humana de los alumnos universitarios; y los desafíos a los que se enfrenta para adaptarse a los cambios que exige el Espacio Europeo de Educación Superior

3.2 Estudios sobre tutoría universitaria en el campo de la Didáctica de las Matemáticas

Islenis Botello y Sandra Parada, de la Universidad Industrial de Santander (UIS) de Colombia, desarrollaron la investigación denominada: *Tutorías académicas universitarias: un laboratorio para profesores de matemáticas en formación*. (2013) y *Tutorías entre pares: un camino potencial para la formación de profesores de matemáticas* (2013).

Los problemas centrales de estas investigaciones fueron determinar el papel de un programa de tutorías como espacio de formación para futuros docentes; programa que pudo proponerse debido al bajo rendimiento académico y la alta tasa de deserción académica en el área de matemáticas de los estudiantes de la UIS en el primer semestre, situación que la universidad enfrenta permanentemente.

En esta propuesta los estudiantes de Licenciatura en Matemáticas, del curso de Didáctica del Cálculo, participan como tutores, por tanto, analizando la estructura curricular de estos programas de tutoría y las distintas relaciones que se tejen, a través de ellas, entre tutores y tutorados, y que a la vez resultan de interés del campo de la Educación Matemática, surgieron las preguntas de investigación: *¿cómo los programas de tutorías académicas en los primeros niveles universitarios pueden constituirse en espacios de formación para los futuros profesores de matemáticas?* y *¿Qué aporta en la formación profesional del futuro profesor de matemáticas la experiencia de ser tutor?*

Estos trabajos se abordaron utilizando una metodología cualitativa; la población objetivo fueron los tutores-estudiantes del curso de Didáctica del Cálculo (primer y segundo semestre) de la UIS. Para el diseño, recolección de información, análisis de datos, ejecución, y posterior evaluación de la alternativa, los proyectos se desarrollaron en siete y ocho fases respectivamente.

A continuación se listan de manera general las fases²: *Fase 0. Un primer acercamiento, Fase I. Diseño de alternativa, Fase II. Primera implementación del programa tutorial (ASAE I: Atención, Seguimiento y Acompañamiento a Estudiantes), Fase III. Análisis de los resultados de la fase II (rediseño del programa), Fase IV. Rediseño e Implementación formal del programa tutorial (ASAE II), Fase V. Análisis de los datos de la fase IV, Fase VI: Documentación del programa de tutorías entre pares en la UIS (Planteamiento de un programa de acompañamiento y seguimiento académico del cálculo diferencial para estudiantes de la UIS para el proyecto de investigación uno), Fase VII: Institucionalización de ASAE (sólo proyecto de investigación dos).*

El marco teórico específico de la Educación Matemática bajo el cual se desarrolló la investigación fue el de formación inicial de profesores, teoría de tutorías entre pares (Goodlad & Hirst, 1989), laboratorio de matemáticas, entre otros.

Los principales resultados se ubicaron en tres aspectos: 1) Reflexiones de los tutores sobre su experiencia en el programa; 2) El papel del pensamiento matemático durante el desarrollo de la tutoría; y 3) Aspectos relacionados al pensamiento didáctico. Todos ellos en su mayoría, apuntaron a favorecer el papel del programa como un espacio de formación que favorece al futuro docente y adicionalmente presta un servicio de complemento al proceso de formación de estudiantes con dificultades de aprendizaje.

Claudia Figueroa, Cristina Vargas, Anahí Obredor, y Patricia Vera, desarrollaron el proyecto de investigación: *El examen final: las Tutorías Universitarias como apoyo*

² Desde la Fase 0 hasta la Fase V son iguales para ambos proyectos.

pedagógico para la promoción de la asignatura Análisis Matemático II. (2010). Teniendo en cuenta las diversas problemáticas que presentan los estudiantes en el área de matemáticas de la Universidad Tecnológica Nacional de Mendoza (UTN), Argentina; y el sistema de Tutorías Universitarias que la Facultad Regional Mendoza de la UTN ofrece desde hace cuatro años (pensado como una estrategia de apoyo y de orientación, que se brinda a los alumnos con la finalidad de otorgarles un soporte para mejorar el rendimiento en los estudios y orientarlos para solucionar las dificultades que se presentan en la vida), nació esta propuesta de trabajo; la cual se basó en orientar al estudiante en la preparación y maduración de la asignatura para el examen final de Análisis Matemático II; cuyo índice de aprobación de los educandos, ha evidenciado por muchos años, un continuo rendimiento negativo en las distintas carreras que se dictan en esta Facultad Regional de Mendoza.

Este trabajo investigativo se enmarcó en la teoría Vygotskyana y su teoría de la colaboración entre pares y la zona de desarrollo próximo. El desarrollo de su metodología se realizó mediante sesiones de tutorías (grupales e individuales) previas a los exámenes finales del curso de Análisis Matemático II durante el año 2007-2008, en los cuales se repasaron los temas prácticos y teóricos del programa académico.

A través de esta experiencia, Figueroa, Vargas, Obredor y Vera, pudieron: “conocer algunas dificultades pedagógicas y sociales de los alumnos durante el cursado y en las evaluaciones; abrir un panorama mayor de estrategias y metodologías a aplicar en el futuro y, permitieron que, al ser comunicados los resultados de opiniones, volcadas por los alumnos asistentes en encuestas y entrevistas, el equipo de la cátedra integrara nuevos aportes que fueron incorporándose en su desarrollo” (2010, p. 10).

Además de esto, destacaron que la tutoría no intenta suplantar a la docencia, ni interferir en el desarrollo u organización de la cátedra tutoriada, sino que la viene a

complementar y a enriquecer como una forma de atención centrada en el estudiante y sus problemas.

La universidad del Cauca, en su ánimo de fortalecer la educación en Colombia y en Latinoamérica se vinculó al proyecto CLAVEMAT (Clases Virtuales de Matemática y Tutoría) desde el año 2012.

En este proyecto internacional e interdisciplinario financiado por la Unión Europea a través del programa Alfa III, participaron siete universidades socias de Europa y América Latina: la Universidad del Cauca (Cauca-Colombia), la universidad Nacional de Colombia (Bogotá-Colombia), la Escuela Politécnica Nacional (Quito-Ecuador), la Universidad Católica de Temuco (Temuco-Chile), la Universidad de Granma (Granma-Cuba), The Technische Universiteit Delft (Delft-Holanda), y Technischen Universität (Berlín-Alemania); y su coordinación estuvo a cargo de la Escuela Politécnica Nacional de Quito y de Technischen Universität.

El objetivo principal de CLAVEMAT fue ampliar las posibilidades de acceso de los estudiantes provenientes de sectores urbano y rural a las carreras universitarias, apoyándolos en sus procesos de aprendizaje en el área de las matemáticas con la consolidación de una comunidad virtual y programas de tutoría académica.

Sus objetivos estratégicos fueron consolidar la comunidad virtual de CLAVEMAT con la participación activa de docentes y estudiantes; mejorar las competencias de los profesores de secundaria en contenidos y metodologías de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas a través de cursos virtuales y semipresenciales; y apoyar a los estudiantes de colegio y universidad en el área de las matemáticas mediante la realización de cursos virtuales, presenciales y tutorías virtuales y presenciales de matemáticas.

3.3 Investigaciones sobre representaciones en Didáctica de las Matemáticas:

En el campo de la Didáctica de las matemáticas, se realizan investigaciones que estudian las representaciones mentales de los alumnos sobre determinados conceptos matemáticos. Estos estudios se plantean la problemática de un sujeto que se representa un objeto matemático y no suelen explicitar el punto de vista epistemológico desde el que se desarrolla la investigación, que mayoritariamente es un punto de vista realista-representacional. (Font V. , 2001)

...con relación a la representación mental del mundo real, existen básicamente dos alternativas: la "representacional" y la "no-representacional". El representacionalismo parte de los siguientes supuestos: 1) Existe un mundo exterior predefinido 2) Nuestra cognición aprehende este mundo, aunque sea en forma parcial; y 3) La manera de conocer este mundo predefinido es representarnos los rasgos más característicos y después actuar sobre la base de dichas representaciones. Estos supuestos epistemológicos del representacionalismo parten de las dualidades interno/externo y realidad/mente, ya que consideran dos mundos diferentes: el mundo real de los objetos exteriores al sujeto y el mundo mental del sujeto. Dicho de otra manera: presupone que las personas tienen una mente en la que se producen procesos mentales, y que los objetos externos a las personas generan representaciones mentales internas...

...El término "no-representacional" puede tener significados muy diferentes. Aquí lo utilizaremos en sentido amplio, ya que con él nos referiremos a todos los puntos de vista que cuestionan el representacionalismo. Este cuestionamiento puede ir desde: 1) La negación de todo ser trascendente respecto de los contenidos inmanentes de la conciencia, 2) O bien, atenuadamente, el agnosticismo teórico sobre esta trascendencia, 3) O más atenuadamente aún, el agnosticismo sobre la posibilidad que los contenidos inmanentes de la conciencia sean homeomórficos a objetos trascendentes, sin poner en duda la existencia del mundo trascendente... (Font V. , pág. 2)

Para la Psicología cognitiva, la cognición consiste en la manipulación mental de representaciones (símbolos que se refieren a "algo"). Los símbolos mentales se consideran con una cierta corporeidad (palabras pensadas, evocación de objetos, etc.). Los objetos representados por los símbolos mentales pueden ser objetos no-ostensivos (conceptos, ideas, etc.) y objetos ostensivos (con soporte material, intersubjetivos en el sentido que se pueden mostrar a otro). Los objetos ostensivos que forman parte de las experiencias materiales de las personas, de acuerdo con el punto de vista realista representacionalista, se consideran perceptos (representaciones personales de objetos reales exteriores al sujeto). Los no-ostensivos se consideran como objetos personales del sujeto. En el proceso de

instrucción se pretende que estos no-ostensivos personales se correspondan con unos no-ostensivos objetivos, lo cual plantea el problema de la naturaleza de estos no-ostensivos objetivos, ya que si no se tiene una idea clara de lo que son los objetos matemáticos, difícilmente se podrá evaluar si una persona los ha aprendido.

Según Dubinsky, Las representaciones no se pueden considerar desligadas del proceso de abstracción y, más en general, de los procesos cognitivos movilizados por los contenidos matemáticos. Desde esta perspectiva, en el campo del pensamiento matemático avanzado, se han realizado diferentes investigaciones. Dubinsky (1991) (1996) ha intentado aplicar, después de una revisión, algunas de las ideas de Piaget al pensamiento matemático avanzado. La principal dificultad que ha encontrado en este intento ha sido que la teoría de Piaget tiene su origen en la manipulación de objetos físicos, pero a medida que el nivel matemático aumenta, se hace necesario construir nuevos objetos, no físicos sino mentales, y manipularlos para construir las ideas matemáticas. Dubinsky (1996) considera que un problema importante en la educación matemática consiste en encontrar sustitutos apropiados para los objetos físicos y cree que los ordenadores se pueden utilizar para este propósito.

Por otro lado, las investigaciones de Duval (1995) sobre las representaciones, se posicionan en el punto de vista representacionalista. Duval se formula la pregunta: ¿Las actividades de aprehensión, conceptualización, razonamiento o comprensión son independientes de la existencia de una pluralidad de registros semióticos de representación? y considera que la respuesta afirmativa implica postular primero algún tipo de existencia para los objetos matemáticos, sin confundir de este modo el objeto matemático con su representación. En segundo lugar, implica postular la existencia de representaciones mentales internas y de representaciones semióticas externas, que están subordinadas a las representaciones mentales internas, y de las cuales son una exteriorización a efectos de comunicación. En definitiva, la respuesta afirmativa implica considerar que la semiosis está dirigida

por la noesis, entendiendo por semiosis la aprehensión o la producción de una representación semiótica y por noesis actos cognitivos como la aprehensión conceptual de un objeto, la comprensión de una inferencia, etc. Duval no está de acuerdo con que la noesis dirige a la semiosis, sino que es partidario de la hipótesis contraria: “no hay noesis sin semiosis, es decir, es la semiosis la que determina las condiciones de posibilidad de la noesis” (Duval, 1995, pág. 4).

PARTE II: EL ESTUDIO

CAPÍTULO 4. EL PROBLEMA Y EL MÉTODO

4.1 El problema

Tradicionalmente las instituciones de educación superior, dentro de sus procesos de formación, ofrecen programas de acompañamiento estudiantil denominados *tutorías académicas universitarias* o *monitorias académicas*; estas son un componente dentro de sus procesos académicos, que intentan facilitar la adaptación universitaria, brindar apoyo académico, y contribuir a la orientación profesional y personal de los alumnos.

En las universidades, la mayoría de los programas de tutorías académicas están enfocados hacia las áreas donde el bajo rendimiento académico de los estudiantes, son puntos cruciales para la deserción estudiantil. Dichos acompañamientos, los realizan profesionales y estudiantes de últimos semestres denominados *tutores* o *monitores* de la universidad, mediante la atención personalizada o a un grupo reducido de estudiantes.

Es importante señalar que las tutorías no suplen la docencia, ni las clases; así como tampoco son espacios diseñados para sólo resolver dudas de un tema académico específico; pues también es de su responsabilidad dar orientaciones que se reflejen en el rendimiento académico y en las decisiones personales de los estudiantes, como son: la supervivencia en la universidad, los hábitos de estudio, la búsqueda de empleo o elección de otros estudios de pos grado.

La Universidad del Cauca, ofrece diversos programas de acompañamiento académicos estudiantiles. Esta institución desarrolla tutorías en diversas áreas, enfocadas en los primeros semestres con el objetivo de mejorar el nivel académico de los estudiantes y reducir el índice de deserción estudiantil. La mayor demanda de tutorías se presenta en el área de Matemáticas, y los tutores o monitores, como son denominados en esta Universidad, son estudiantes de últimos semestres de carreras afines con las matemáticas, en particular de los programas de Matemáticas y Licenciatura en Matemáticas.

Estas tutorías, realizadas entre estudiantes, se denominan *tutorías entre pares*, y son consideradas como uno de los espacios más importantes dentro de los procesos académicos complementarios, ya que los estudiantes beneficiados, al no sentirse observados ni señalados por los docentes, pueden libremente expresar sus dificultades académicas y personales; y los tutores, próximos a graduarse y muy posiblemente a ejercer la labor de docentes de matemáticas, pueden poner en marcha sus conocimientos sobre educación y matemáticas, para darle todo el apoyo a los tutoriados y así ayudarles a conseguir sus objetivos académicos, profesionales y personales.

Dentro de los procesos de enseñanza y de aprendizaje de las matemáticas, la comprensión de conceptos matemáticas es protagonista. Por este motivo, el campo de la Didáctica de las Matemáticas se preocupa por estudiar los fenómenos que se presentan dentro de estos procesos y los elementos que se relacionan cuándo de lograr construir conocimiento matemático se trata.

Un ejemplo de estos, son las representaciones mentales internas (propias del sujeto, tales como palabras pensadas, evocación de objetos, conceptos, ideas...) y las representaciones mentales externas (representaciones personales de objetos reales exteriores al sujeto); ya que a partir de estas los investigadores han llegado a concluir que la comprensión matemática de los estudiantes está relacionada con el incremento en el número de conexiones entre diferentes tipos de

representaciones internas, lo cual se puede conseguir estableciendo conexiones y traducciones entre diferentes tipos de *representaciones externas*. (Font V. , 2001)

Teniendo en cuenta que la Universidad del Cauca, se encuentra comprometida con la mejora de los procesos de enseñanza y de aprendizaje de las matemáticas, y con la contribución al fortalecimiento de los procesos de reflexión en el campo de la Didáctica de las Matemáticas, es importante que se realicen continuos seguimientos sobre las tutorías académicas en matemáticas que ésta realiza, para velar por el bienestar de sus compromisos.

Por tanto, es importante y pertinente que se realicen estudios e investigaciones sobre el papel que están desempeñando los tutores en estos espacios en el área de matemáticas, particularmente sobre las diferentes representaciones que los tutores (pares académicos) están construyendo sobre las dificultades que los estudiantes tienen en dichos cursos, y los efectos que estas puedan causar en los objetivos institucionales.

En este sentido, la pregunta que guía esta investigación es: *¿Qué caracteriza las representaciones que los tutores universitarios tienen sobre las dificultades de comprensión matemática de los estudiantes de primeros cursos de matemáticas de la Universidad del Cauca?*, y la delimitación de los alcances de este trabajo pretende: construir un escenario de realización de tutorías en Matemáticas en la Universidad del Cauca, y caracterizar las representaciones que los tutores universitarios tienen sobre las dificultades de comprensión matemática de los estudiantes de primeros cursos de matemáticas.

4.2 Escogencia del método.

El hombre interesado por comprender los fenómenos que se presentan en el diario vivir, en particular en el ámbito educativo, utiliza medios como la investigación para alcanzar estos fines (Cohen & Manion, 2002). Dentro de la investigación educativa existen los enfoques de la Investigación Cualitativa, que estudian: *la*

realidad en su contexto natural, tal y como sucede, intentando sacar sentido de, o interpretar los fenómenos de acuerdo con los significados que tienen para las personas implicadas. (Rodríguez, Gil, & García, 1996).

En este sentido, el estudio a desarrollar se identifica con el método de investigación cualitativa, ya que su intención está enmarcada en identificar y caracterizar las representaciones que los tutores universitarios tienen sobre las dificultades de comprensión matemática de los estudiantes de primeros cursos de matemáticas de la Universidad del Cauca.

Para llevar a cabo esta investigación se usan como herramientas o técnicas el “método de recogida de datos” y el “análisis de contenido”, ya que permiten conseguir información durante el trabajo de campo y, a partir de éstos analizar y obtener conclusiones.

En la fase del diseño de este trabajo investigativo, se hizo una revisión de antecedentes, libros, artículos y todo tipo de fuentes enfocadas en: investigaciones sobre tutorías universitarias y su papel en los modelos educativos de educación superior, estudios sobre tutoría universitaria en el campo de la Didáctica de las Matemáticas, investigaciones de representación de los tutores sobre dificultades de comprensión matemática, desarrollo cognitivo, representaciones mentales, errores y dificultades de comprensión matemática, para así llegar a la formulación del problema.

Para ello, se dio paso a la construcción del escenario de realización de tutorías en matemáticas, aprovechando que la Universidad del Cauca participaba en el proyecto CLAVEMAT³, y que uno de sus objetivos estratégicos era apoyar a los estudiantes de la universidad en el área de las matemáticas mediante la realización de tutorías presenciales, por lo cual este trabajo investigativo tuvo lugar en el marco de desarrollo de ese proyecto.

³ www.clavemat.org

Para la construcción del escenario, fue necesario reunir los programas académicos de todos los cursos de matemáticas de la universidad, con el objetivo de conocer los temas y subtemas que son orientados por asignatura, así como elegir a los tutores para el proyecto, mediante una convocatoria pública para estudiantes de semestres avanzados de los programas de Matemáticas y Licenciatura en matemáticas de la universidad que quisieran trabajar en el proyecto como tutores.

Para la selección de los tutores se tuvo en cuenta la hoja de vida, los promedios académicos de los semestres cursados, y una entrevista donde se trataron los temas: error, obstáculos, dificultad, enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, y tutoría académica. El objetivo, fue conocer los conocimientos previos que cada uno tenía sobre estos temas y el interés de participar en el escenario de tutorías académicas.

Con base en lo anterior, se eligieron 16 tutores, donde la mitad pertenecía al programa de Licenciatura en Matemáticas y la otra mitad al programa de Matemáticas. Los semestres que los estudiantes cursaban, variaban entre el sexto y el décimo; y algunos se encontraban desarrollando su trabajo de grado.

Una vez seleccionados los tutores, se les orientó sobre Didáctica de las Matemáticas, errores, obstáculos y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas, desarrollo cognitivo y métodos para realizar una tutoría académica en matemáticas; tomando como referentes teóricos a investigadores del campo (Kilpatrick, D'Amore, Rico, Brousseau, Godino, Piaget y Rodríguez), y antecedentes sobre tutorías en matemáticas; para que construyeran nociones básicas sobre estos temas, que son fundamentales para el desarrollo de las tutorías académicas.

Para administrar la solicitud de una tutoría y asignar al tutor se diseñó la página web <https://sites.google.com/site/unicaucaclavemat/> a través de tecnologías de Google

Sites en la cual se vincularon archivos generados con Google Drive (ver imagen 1).



Imagen 1 Página web de solicitud de tutorías

Teniendo en cuenta las materias de matemáticas que se orientan en la universidad, y los objetivos del proyecto, se eligieron los cursos correspondientes a los primeros semestres de todas las carreras, los cuales fueron: Matemáticas Generales, Calculo I (Cálculo inferencial), Calculo II (Cálculo Integral), Álgebra Lineal, Estadística y Probabilidad, Geometría Euclidiana, Geometría Analítica, y Lógica y Conjuntos (ver imagen 2).

Un estudiante para hacer una solicitud de tutoría mediante este sitio web, debía tener en cuenta las condiciones (imagen 2, 3 y 4) y diligenciar un formulario ingresando los datos personales, el correo electrónico, el programa, semestre, tiempo de disponibilidad para asistir a la tutoría, curso, seleccionar el tema, los subtemas y escribir el motivo (ver imagen 5).



Imagen 2 Condiciones para la solicitud de tutorías

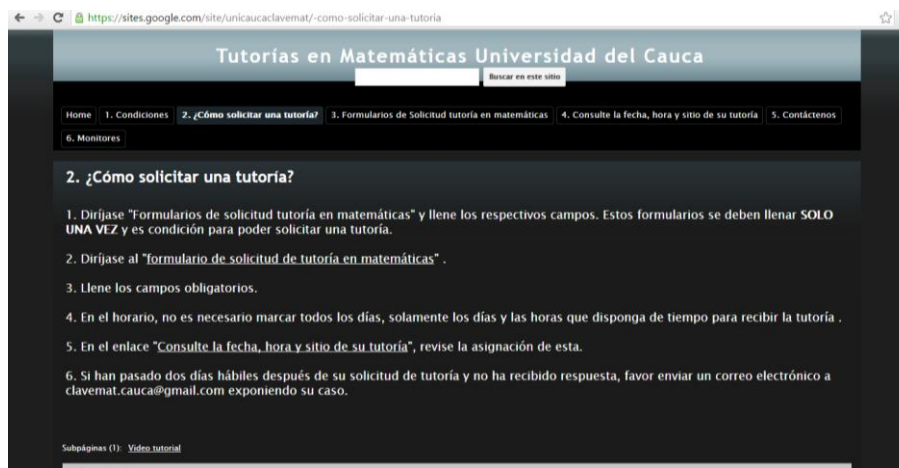


Imagen 3 Sugerencias para la solicitud de una tutoría.



Imagen 4 Formularios para realizar una solicitud de una tutoría.

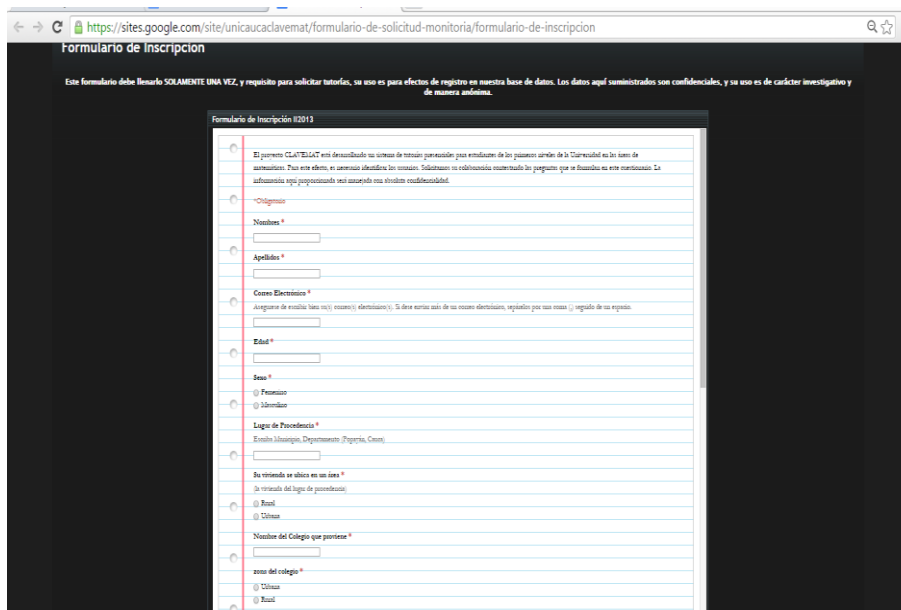


Imagen 5 Formulario de inscripción para solicitar una tutoría.

Para asignar una tutoría y un texto, los coordinadores del programa de tutorías al final de cada día, con las solicitudes registradas por los estudiantes, filtran por tema y subtemas, se intersectaban los horarios de disponibilidad y se conformaban grupos de hasta cinco estudiantes, teniendo en cuenta, el motivo y si se encontraba repitiendo la materia (ver imagen 6).

listado de tutorías dadas, canceladas y repetidas-temuco - Excel

Apellido	Correo Electrónico	Programa	Grupos Especiales	Estrato	Materia	Clase a la que asiste	Tema Especifico - Matemáticas	Tema Especifico - Calculo I	Tema Especifico - Calculo II	Tema Especifico - Algebra Lineal	Tema Especifico - Estadística	Tema Especifico - Geometría	Tema Especifico - Geometría	Tema Especifico - Logica y Conjuntos	Tema Especifico - Logica y Conjuntos	Motivo de la Tutoria	Horario de Tutoria Lunes	Horario de Tutoria Mates	Horario de Tutoria Lunes	Horario de Tutoria Mates
Lopez Quiñdo	juan.k1500@hotmail.com	Ingeniería Civil	No Aplica	0 a 2	algebra lineal	Algebra lineal-La función de un elemento de definición y propiedades	NA	NA	NA	NA	NA	NA	NA	NA	No Aplica	Se me dificulta aplicar el procedimiento	10-11			
delgado	angedev@h.comal.com	Ingeniería Ambiental	Campesino	0 a 2	matemáticas generales	Matemáticas Generales - Factorización	9-10	NA	NA	NA	NA	NA	NA	NA	Campesino	es que estoy repitiendo la materia y me gustaría repasar el cálculo 1 y voy a hacer curso de verano de	10-11, 11-12	9-10	11-12	9-10
delgado	jakov@11b.comal.com	Ingeniería Electrónica y Telecomunicaciones	Campesino	0 a 2	calculo 2	Calculo II - Integral definida	NA	11-12	Calculo II - Integral definida	NA	NA	NA	NA	NA	Campesino	Octubre, es el primer parcial y no estoy entendiendo mas los conceptos matemáticos	11-12	11-12	11-12	11-12
Martinez Muñoz	idencia_05@hotmail.es	Ingeniería Ambiental	No Aplica	0 a 2	matemáticas generales	Matemáticas Generales - Factorización	10-11, 11-12	NA	NA	NA	NA	NA	NA	NA	No Aplica		11-12	10-11, 11-12	11-12	10-11

Imagen 6 Asignación de tutores.

El tiempo máximo para responder a una solicitud era de dos días y al estudiante como máximo se le asignaban, por curso, hasta tres tutorías a la semana. Cada tutoría tenía una duración de 50 minutos máximo.

Los estudiantes recibían la información a través de la agenda en la página web; la cual contenía el horario, el día y el salón en que se le asignaba la tutoría (Ver imagen 7).

El tutor recibía la información a través de la agenda en la página web; de tal manera que con antelación el tutor conocía el nombre o los nombres de los estudiantes, tema, subtemas, motivos, salón y horario. El objetivo es que tuviera el tiempo necesario para preparar los temas a tratar en la tutoría, la realidad y las necesidades académicas del o los estudiantes (ver imagen 7).

4. Consulte la fecha, hora y sitio de su tutoría

Busque en la siguiente tabla la hora, fecha y sitio de la asignación de su tutoría, si no se le ha asignado una todavía, por favor revíselo más tarde.

Fecha	Hora	sitio	Nombre	Apellido	Materia
	41515	0.4166666667 oficina 314 ed-p1 Contables	Ana Margarita	Solarte Borrero	Geometría Euclidiana
	41512	0.375 Contables oficina 314 ed-p1	liceth	urea	Matemáticas Generales
	41513	0.4583333333 oficina 314 ed-p1 Contables	Juan Ignacio	Oviedo Pino	Estadística y Probabilidad
	41514	0.6666666667 oficina 314 ed-p1 Contables	odyner femey	ramos pechene	Cálculo I
	41515	0.625 Contables oficina 314 ed-p1	Andres Felipe	Muñoz Gomez	Álgebra Lineal
	41515	0.625 Contables oficina 314 ed-p1	Andres Felipe	Muñoz Gomez	Álgebra Lineal
miércoles 28/08/2013		0.4166666667 oficina 314 ed-p1 Contables	paola andrea	maca rodriguez	Cálculo II
miércoles 28/08/2013		0.4166666667 oficina 314 ed-p1 Contables	maria camila	zurfiga	Cálculo II
miércoles 28/08/2013		0.4583333333 oficina 314 ed-p1 Contables	Duvan Felipe	Muñoz	Geometría Euclidiana
jueves 29/08/2013		0.4583333333 oficina 314 ed-p1 Contables	Carolina	Quirá	Cálculo II
miércoles 28/08/2013		0.375 Contables oficina 314 ed-p1	juan carlos	palomares	Álgebra Lineal
viernes 30/08/2013		0.625 Contables oficina 314 ed-p1	ALEJANDRA	TAPIA	Cálculo II
viernes 30/08/2013		0.6666666667 oficina 314 ed-p1 Contables	jose miguel	vallejo	Cálculo I
jueves 29/08/2013		0.5902777778 Contables oficina 314 ed-p1	yineth adriana	cuaspud rosero	Cálculo II
horario no disponible	horario no disponible	horario no disponible	monica	estupillan martinez	Cálculo II

Imagen 7 Información para los usuarios y los tutores sobre las tutorías programadas.

La divulgación del programa de tutorías fue constante y se hizo mediante volantes, publicidad en las carteleras de las facultades, redes sociales, correos electrónicos institucionales, e información en los salones de clase.

Este programa de tutorías tuvo una duración de tres semestres consecutivos. Se solicitaron 2017 tutorías y se atendió a 644 estudiantes, en las distintas asignaturas, tal como se observa en la Figura 1 y programas, en la Figura 2.

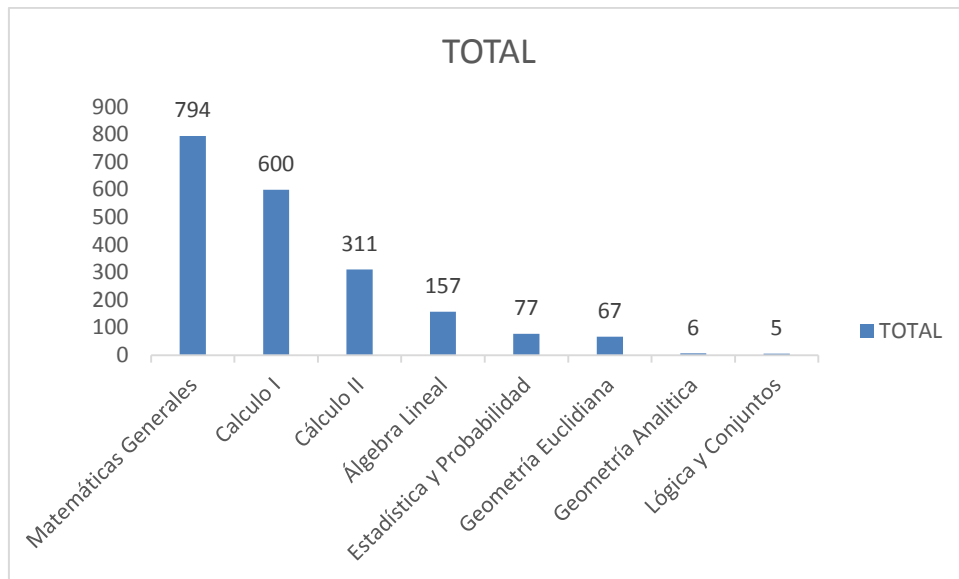


Figura 1 Resumen del número de tutorías por materias

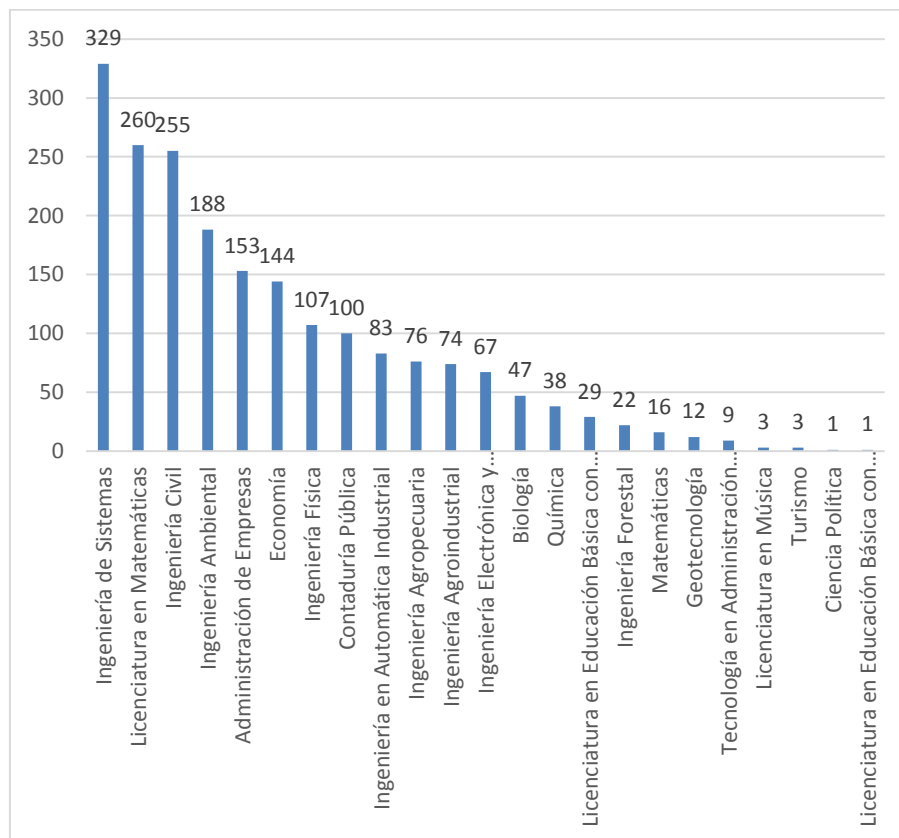


Figura 2 Resumen del número de estudiantes que solicitaron tutorías y los programas académicos a los que pertenecían.

4.2.1 Acciones del tutor en el programa de tutorías

Las acciones de un tutor en un programa de tutoría empezaban mucho antes de conocerse personalmente con el o los estudiantes beneficiarios, de tal manera, que cuando el tutor y el tutoriado se encontraran, el primero ya había hecho una representación del segundo bajo la situación académica descrita en su solicitud.

Cuando el tutor interactuaba con el estudiante y al plantearle una situación matemática, la solución proporcionada por él era un error en relación con la cuestión propuesta, entonces el tutor debía identificar que éstas respuestas incorrectas son señales del fracaso en el logro de un aprendizaje. Una manera para lograr que el estudiante superara dichas barreras, era que el tutor bajo las representaciones mentales de lo que sucedió en la estructura cognitiva del tutoriado, infiriera los obstáculos cognitivos que están provocando dichas dificultades en el aprendizaje.

El objetivo era que el tutor a partir de estas representaciones sobre las dificultades de comprensión de ciertos objetos matemáticos, propusiera situaciones que le ayudaran al estudiante a superar sus obstáculos cognitivos.

4.2.2 Procedimiento para la recolección de datos

Para poder obtener la información necesaria para esta investigación, se diseñó un formato que los tutores debían diligenciar después de cada tutoría (ver imagen 8). En él los tutores registraban los errores que los tutoriados manifestaban y describían las dificultades de comprensión matemática que los estudiantes tenían, soportados en sus obstáculos cognitivos.



Nombre del tutor:		
Fecha:	Hora de inicio:	Hora finalización:
Nombre del estudiante:		
Correo Electrónico:	Teléfono:	
Programa:	Semestre:	
Curso:	Semestre del curso:	
Tema:		
Motivo:	Repite por:	
Profesor:	NR 1 2 3	

Informe de la tutoría del estudiante:

Imagen 8 Formato de informe de tutoría.

4.3 Procedimiento para el análisis de datos

Después de obtener todos los informes de tutoría, éstos se dividieron por programas académicos y se organizaron por temas. Teniendo presente los objetivos de esta investigación y el número de solicitudes de tutoría por materia; se eligieron todos los informes de tutorías del primer curso universitario de matemáticas: Matemáticas Generales; y se procedió a leer cada uno de éstos, teniendo presente la estructura de escritura que cada tutor realizó sobre los errores y las dificultades de los estudiantes atendidos.

Temas específicos matemáticas generales	TOTAL
No aplica	246
Matemáticas Generales – Factorización	56
Matemáticas Generales - Ecuaciones y desigualdades con valor absoluto	35
Matemáticas Generales - Solución de sistemas de ecuaciones	33
Matemáticas Generales - Función constante, lineal, cuadrática, potencial, polinómica	30
Matemáticas Generales - Números Reales: desigualdades	24
Matemáticas Generales - Álgebra de proposiciones y argumentos	23
Matemáticas Generales - Polinomios, y operaciones entre polinomios	20
Matemáticas Generales - Números Racionales, orden en Q, operaciones y propiedades	19
Matemáticas Generales - Función, definición, dominio y rango, gráfica	18

Matemáticas Generales - Números Reales: propiedades	18
Matemáticas Generales - Producto cartesiano, relaciones	18
Matemáticas Generales - Números Reales: Potenciación y radicación	16
Matemáticas Generales - Expresiones algebraicas y operaciones básicas	13
Matemáticas Generales - Proposiciones simples y compuestas	13
Matemáticas Generales - Función exponencial y logarítmica	11
Matemáticas Generales - Métodos de demostración, directos e indirectos	10
Matemáticas Generales - Números Complejos: operaciones y propiedades	10
Matemáticas Generales - Funciones trigonométricas, trigonométricas inversas	9
Matemáticas Generales - Conjuntos, Operaciones entre conjuntos	8
Matemáticas Generales – Racionalización	8
Matemáticas Generales - Funciones hiperbólicas	7
Matemáticas Generales - Números Enteros Z, operaciones y propiedades	6
Matemáticas Generales - Números Naturales: Orden N, operaciones y propiedades	5
Matemáticas Generales - Números Reales: axiomas de cuerpo	4
Matemáticas Generales - Dominio y rango de una relación	3
Matemáticas Generales - Valor absoluto, Propiedades del valor absoluto	3
Matemáticas Generales - Funciones inyectivas, sobreyectivas y biyectivas	2
Matemáticas Generales - Operaciones con funciones: suma, diferencia, producto	2
Matemáticas Generales - División sintética	1
Matemáticas Generales - Función inversa	1
Matemáticas Generales - Números Reales: completitud de los números reales	1
Matemáticas Generales - Raíces de polinomios, teorema del residuo	1
Matemáticas Generales - Relaciones de orden y equivalencia	1
Matemáticas Generales - Teorema del factor, teorema fundamental del álgebra	1
Números Reales: Potenciación y radicación	1

Tabla 1 Relación de temas del curso de Matemáticas Generales y el número de veces en los que solicitaron tutorías.

Organizados los informes, se procedió a establecer las unidades de análisis, cada una de las cuales está compuesta por indicadores para dar respuesta a los objetivos planteados⁴, para lo cual se opta por analizar la información suministrada y clasificar los informes de la siguiente manera:

Categoría 1: Tutores que no se representaron los errores ni las dificultades de comprensión de los estudiantes.

⁴ Objetivo general: identificar las representaciones que los tutores universitarios tienen sobre las dificultades de comprensión matemática de los estudiantes de primeros cursos de matemáticas de la Universidad del Cauca. Objetivos Específicos: 1. Construir un escenario de realización de tutorías en Matemáticas en la Universidad del Cauca. 2. Caracterizar las representaciones que los tutores universitarios tienen sobre las dificultades de comprensión matemática de los estudiantes de primeros cursos de matemáticas.

Categoría 2: Tutores que se representaron los errores de los estudiantes, pero no sus dificultades de comprensión.

Categoría 3: Tutores que se representaron los errores y las dificultades de comprensión de los estudiantes.

Seleccionadas las unidades de análisis, se procede a elegir casos típicos de cada clasificación de informes de tutorías, particularmente del curso de Matemáticas Generales, y luego a realizar un análisis de sus representaciones.

PARTE III: RESULTADOS, ANÁLISIS Y DISCUSIÓN

CAPÍTULO 5: RESULTADOS

Para realizar un análisis de los informes de tutoría que permitiese la clasificación de las representaciones que los tutores se hacen sobre las dificultades de comprensión matemática de los estudiantes, se decidió establecer las tres unidades de análisis propuestas al final del capítulo anterior.

Es necesario señalar que para realizar el análisis de contenido de cada informe, se realizó una discusión metodológica, debido a que lo escrito por los tutores son representaciones (contenidos representacionales) de las representaciones (mentales) que ellos realizaron de los errores de los tutoriados cuando interactuaron con ellos.

A continuación, se presentan las descripciones características de cada una de las categorías de análisis, acompañadas de casos típicos de informes de tutoría del curso de Matemáticas Generales.

5.1 Tutores que no se representaron los errores ni dificultades de comprensión de los estudiantes

En esta categoría, que contó con el 28,1% del total de reportes de tutorías, la mayoría de los estudiantes (76%) se encontraban cursando el primer semestre; en cuanto a los temas consultados, se reportaron 13 temas y el espacio de la tutoría lo utilizaron sobre todo para reforzar los conocimientos (40%) o resolver falencias del tema (24%). En esta categoría fueron incluidos todos los reportes de tutoría en los cuales se evidenció la falta de citación de los elementos requeridos, es decir

no se mencionó, directa e indirectamente, los conceptos de error ni dificultad asociados al proceso de aprendizaje de los estudiantes, ni se encontraron rastros de su búsqueda. Igualmente, aparecen aquellos reportes que aludieron a un sin número de causas que hacían parte, más de la imaginación o creencia de lo que al tutor le interesaba que de las evidencias que los estudiantes manifestaron, en relación con sus inconvenientes, durante la sesión de trabajo.

Así, en la imagen 9 se pueden observar afirmaciones de carácter subjetivo que no encuentran asidero en argumentos, de tal forma que la especulación resulta ser el mayor elemento en esta categoría.

Proyecto Alfa III - CLAVEMAT
"Virtual Classrooms of mathematics and mentoring"
Universidad del Cauca

Nombre del tutor	[Redacted]	
Fecha	Hora de inicio: 9:10 am	Hora finalización: 10:00 am
Nombre del estudiante	[Redacted]	
Curso Electrónico	Programa	Teléfono
		Semestre
Curso: Matemáticas Generales	Semestre del curso: I	
Tema: Métodos de Demostración		
Nota: Parcial	Repite por: NR X 2 J	
Profesor		

Informe de la tutoría del estudiante:

La mayor dificultad que poseía la estudiante era la parte de su escritura. Tenía claro los métodos de demostración más dudaba de su conocimiento, así que deseaba una aprobación por parte del tutor.

La escritura era pobre ya que saltaba algunos pasos a la hora de la demostración y suprimía las variables en cuestión (por ejemplo por inducción; tomaba S_{n+1} y decía: probemos, y suprimía la S_{n+1}); hacía algunos cálculos y no concluía la respuesta a la que llegaba.

Imagen 9 Caso típico de la Categoría 1.

Se deduce que durante la tutoría, se observó que el estudiante hizo cosas como: escribir muy pocos detalles de la demostración debido a no seguir todos los pasos requeridos para la misma ni identificar elementos importantes; en palabras del tutor, "...la escritura era pobre ya que saltaba algunos pasos a la hora de la demostración y suprimía variables...", "...hacía algunos cálculos y no concluía a la respuesta a la que llegaba..." lo que permite inferir que aunque el tutoriado desarrolló al menos una situación matemática que le implicara usar un método de

demostración, la falta de información respecto de su propuesta de solución y sus respuestas incorrectas no permiten realizar una asociación en relación con los errores, los obstáculos y las dificultades que pudieron hacerse presente.



Recordando que los errores son la manifestación de uno o varios obstáculos cognitivos que señalan serias deficiencias en el logro de un aprendizaje, Brousseau (1983), es claro que las dificultades deben justificarse a partir de la manifestación de las representaciones mentales que el tutor se hace sobre los obstáculos cognitivos del estudiante; así que, expresiones como “...*la mayor dificultad que poseía el estudiante es la parte de su escritura...*” y “...*el estudiante dudaba de su conocimiento...*”; no resultan ser más que creencias del tutor que no poseen fundamentos en representaciones acerca de los procesos cognitivos del estudiante.

5.2 Tutores que se representaron los errores de los estudiantes, pero no sus dificultades de comprensión.

Esta categoría se encontró conformada por el 76,1% de los informes de tutorías, aquí también la mayoría de los estudiantes (73,4%) se encontraban cursando el primer semestre; en cuanto a los temas consultados, se reportaron 27 temas y el espacio de la tutoría lo utilizaron sobre todo para resolver falencias del tema (29,7%) o reforzar los conocimientos (28,1%). En esta categoría se ubican todos los informes en los cuales los tutores plasmaron representaciones de los errores que los tutoriados presentaron durante la sesión, pero no mostraron evidencias de las representaciones de las dificultades asociadas a su proceso de aprendizaje.

En las imágenes 10, 12, 16 y 20, se presentan ejemplos de cómo los tutores comienzan con la aproximación a la identificación de errores a partir del proceso de solución proporcionado por el estudiante, en relación con la situación propuesta, identificación que en términos de dificultades evidencian el fracaso de un logro en el aprendizaje, pero además de esto, en los reportes se indican diversas causas que hacen parte, más de la imaginación de los tutores que de lo

que los estudiantes manifestaron en relación con sus inconvenientes, lo que no resulta ser una explicación basada en obstáculos cognitivos evidenciados durante la sesión de trabajo. De tal forma que la especulación, acerca de las causas de los errores, se convierte también en un elemento en esta categoría.


Proyecto Alfa III - CLAVEMAT
"Virtual Classrooms of mathematics and mentoring"
Universidad del Cauca


Nombre del tutor: [Redacted]		
Fecha: [Redacted]	Hora de inicio: 9:00 am	Hora Finalización: 10:00 am
Nombre del estudiante: [Redacted]		
Correo Electrónico: [Redacted]	Teléfono: [Redacted]	
Programa: Química	Semestre: I	
Curso: Matemáticas Generales	Semestre del curso: I	
Tema: Solución de ecuaciones		
Motivo: Falta de atención con el tema.		Repite por: NR 1 2 3
Profesor: [Redacted]		

Informe de la tutoría del estudiante:

Tenia dificultades en el álgebra; no reconocía como operar dos ecuaciones lineales, una con otra para dar respuesta a mi sistema de ecuaciones lineales. Tenía grandes dificultades a la hora de despejar, ya que por ejemplo tenía:

$$\frac{3X}{2} + 5 = 8 \quad \text{y despejaba: } 3X + 5 = 16$$

$$\text{y luego } 3X = 11$$

$$X = \frac{11}{3}$$

Imagen 10 Caso típico 1 de la Categoría 2

En los informes se observan intenciones de identificar los errores cuando el estudiante realiza una tarea sobre el tema de la tutoría, sin alcanzar a ser explícito, tal como aparece en la imagen 11.

$$\frac{3X}{2} + 5 = 8 \quad \text{y despejaba: } 3X + 5 = 16$$

$$\text{y luego } 3X = 11$$




$$X = \frac{11}{3}$$

Imagen 11 Identificación de un error en la solución de una ecuación lineal.

De forma similar se observaron intentos por explicar la causa del error, aludiendo a aspectos de orden general, tal como ocurre al decir que “Tenía dificultades en álgebra”, “no reconocía como operar dos ecuaciones lineales, una con otra para dar respuesta al sistema de ecuaciones lineales”; también, que “tenía grandes dificultades a la hora de despejar” intentando justificar su argumento como ocurre en el ejemplo mencionado antes.

De esta manera se puede evidenciar que las representaciones del tutor, clasificadas en su escrito como dificultades, no corresponden a tal cosa, ya que en ningún momento identifica las dificultades ni los obstáculos cognitivos del estudiante-beneficiario a partir del error. Además, el tutor termina considerando que "las dificultades" son generales y que los errores son ejemplos de ellas.

En la imagen 12 se presenta un informe de tutoría a partir del cual se puede evidenciar la forma como son listando los errores identificados por el tutor en las soluciones de actividades matemáticas hechas por el tutoriado.


Proyecto Alfa III - CLAVEMAT
"Virtual Classrooms of mathematics and mentoring"
Universidad del Cauca



Nombre del tutor: [Redacted]		
Fecha: [Redacted]	Hora de inicio: 11:20 Cm	Hora finalización: 12:20 Pm
Nombre del estudiante: [Redacted]		
Correo Electrónico: [Redacted]		Teléfono: [Redacted]
Programa: Ing. Ambiental		Semestre: II
Curso: Matemáticas Generales		Semestre del curso: II
Tema: Ecuaciones lineales, cuadráticas		
Motivo: No entiende el tema se altera el comportamiento.		

Informe de la tutoría del estudiante:

Errores por parte del estudiante:

1) A la expresión $2 - \frac{1}{2+1}$ el estudiante opera dando la siguiente respuesta $\frac{2(2+1)(2+1)}{2+1}$, lo cual indica una confusión en cuanto al manejo de la diferencia con el producto, se toma en cuenta cuando se le indaga acerca de como obtuvo tal resultado y admite que hay algo extraño en ello, podría hablarse de desorientación.

2) En la siguiente ecuación $2+1 = \frac{2}{2}$ establece que $2+1 = \frac{2}{2}$. De donde, se puede pensar que reconoce un hecho y es el de señalar las variables, no obstante olvida el número +1 y es ahí cuando se produce una señal de alerta para el tutor, haciendo el llamado a la lógica matemática.

DIFICULTADES:

- Podría hablarse de desorientación y falta por parte del estudiante hacia la solución del problema, entendiéndose los errores mencionados. Sin embargo, el estudiante es consciente de que se han suscitado situaciones matemáticas desafortunadas en la resolución de los problemas ya que al alterar un procedimiento como la solución de ecuaciones cambia la situación del tiempo de ejercicio y lo lleva a otro contexto.

Imagen 12 Caso típico 2 de la categoría 2.

Regularmente, el tutor ante cada error realiza una descripción de lo sucedido, mostrando unas deducciones, producto de las representaciones mentales que él se hizo cuando el estudiante realizaba cada actividad matemática (ver imágenes 13 y 14).

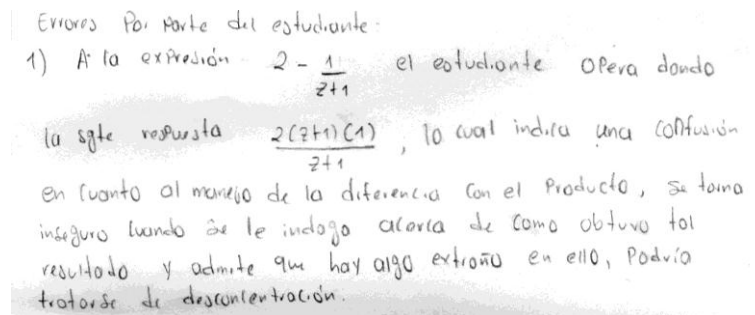


Imagen 13 Identificación de un error en la resta de dos fracciones algebraicas.

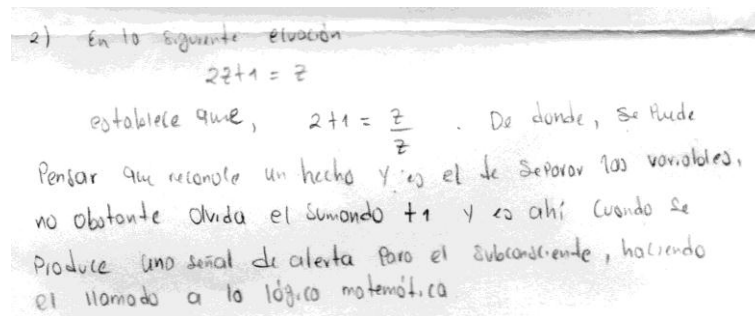


Imagen 14 Identificación de un error en la solución de una ecuación lineal.

Después de organizar los errores, el tutor mediante un subtítulo, en este caso "dificultades", escribe un párrafo con lo que él consideró dificultades de comprensión matemática (ver imagen 15).



DIFICULTADES:

- Podría hablarse de desconcentración y prisa por parte del estudiante hacia la solución del problema, encontrando los errores mencionados. Sin embargo, el estudiante es consciente de que le han sucedido sucesos matemáticos desafortunados en la resolución de los problemas ya que al alterar un procedimiento como la solución de ecuaciones cambia la situación del tipo de ejercicio y lo lleva a otro contexto.

Imagen 15 Dificultades de comprensión matemática representadas por el tutor 2.

Éstos se convierten en señalamientos de problemáticas que a juicio del tutor el estudiante presenta, tales como la “desconcentración” y la “prisa”, y que a su parecer influyen negativamente en la solución de cualquier problema matemático, particularmente en las tareas propuestas en la tutoría. Sin embargo, estas situaciones no son dificultades de comprensión matemática, pues no se infieren de un análisis cognitivo de los errores que el estudiante cometió, ni se soportan adecuadamente en las evidencias presentadas.

El informe de tutoría presentado en la imagen 16 sirve como ejemplo para mostrar, de forma esquemática, la forma de proceder de muchos de los tutores ubicados en esta categoría. Tal esquematización se presenta en la tabla 2.


Proyecto Alfa III - CLAVEMAT
"Virtual Classrooms of mathematics and mentoring"
Universidad del Cauca


Nombre del tutor: [Redacted]		
Fecha: [Redacted]	Hora de inicio: 5 AM	Hora finalización: 10 AM
Nombre del estudiante: [Redacted]		
Correo Electrónico: [Redacted]	Teléfono: [Redacted]	
Programa: [Redacted]	Semestre: I	
Curso: Matemáticas Generales	Semestre del curso: I	
Tema: Radicación / Números Racionales / Irracionales		
Motivo: No entiende algunas operaciones		
Informe de la tutoría del estudiante:		
<p>Exercices</p> <ul style="list-style-type: none"> • $\sqrt{2} + \sqrt{3} = \sqrt{5}$ • No aplica correctamente la propiedad $X^{\frac{2}{3}} \cdot X^{\frac{-2}{2}} = X^{\frac{2}{3} - (-\frac{2}{2})}$ • $X^{\frac{2}{3}} \cdot X^{\frac{-2}{2}} = X^{\frac{2}{3} - (-\frac{2}{2})}$ • $\sqrt{\frac{X^{-5/6}}{Y^{15/6}}} = \sqrt{Y^{15/6} \cdot X^{5/6}}$ • $1^{1/2} = 0,5$ • $2,3 = \frac{23}{10}$ • $X = 0,50$ entonces $100X = 05,0$ - Dificultades • Tiene dificultad en aplicar correctamente las propiedades de los radicales. • No diferencia en su forma decimal un número racional de un número irracional 		

Imagen 16 Caso típico 3 de la categoría 2.

En esta tabla se representan y describen las situaciones, los errores, obstáculos y dificultades presentadas por el tutor, con base en sus observaciones.

Situación	Error identificado por el tutor	Obstáculos cognitivos representados por el tutor	Dificultades representadas por el tutor
$\sqrt{2} + \sqrt{3}$	$\sqrt{5}$	Ninguno	Tiene dificultad en aplicar correctamente las propiedades de los radicales
$X^{\frac{2}{3}} \cdot X^{\frac{-2}{2}}$	$X^{\frac{2}{3} - (-\frac{2}{2})}$	Ninguno	No aplica correctamente la propiedad $X^a \cdot X^b = X^{a+b}$
$\sqrt{\frac{X^{-5/6}}{Y^{15/6}}}$	$\sqrt{Y^{15/6} \cdot X^{5/6}}$	Ninguno	Tiene dificultad en aplicar correctamente las propiedades de los radicales
$1^{1/2}$	0,5	Ninguna	Tiene dificultad en aplicar correctamente las propiedades de los radicales

$2,\overline{3}$	$\frac{23}{10}$	Ninguna	Ninguna
$x = 0,5\overline{0}$	$100x = 05,\overline{0}$	Ninguna	Ninguna
Ninguna	Ninguna	Ninguna	No diferencia en su forma decimal un número racional de un número irracional.

Tabla 2 Relación de los errores y las dificultades representadas por el tutor

Con base en las teorías de aprendizaje de las matemáticas, las dificultades deben justificarse con las representaciones que el tutor se hace de los obstáculos cognitivos del estudiante, y éstos a su vez se infieren a partir de la manifestación del error. Es por éste motivo que, a nuestro juicio, ninguna de las dificultades propuestas por los tutores en esta categoría, se acerca a la definición de dificultad de comprensión matemática que los tutoriados manifestaron en sus acciones.

En la imagen 17 se tiene un informe de tutoría que permite describir la forma de actuar de otro grupo de tutores de esta categoría, en relación con la identificación de los errores y el intento por identificar las dificultades de comprensión de los estudiantes. Se realizará una descripción detallada de este informe, junto con sus comentarios que pretenden mostrar la generalidad de la situación.

14611

Proyecto Alfa III - CLAVEMAT
"Virtual Classrooms of mathematics and mentoring"
Universidades del Cauca

Nombre del tutor	[Redacted]	
Fecha	3/05	Hora Finalización 4:00
Nombre del estudiante	[Redacted]	
Correo Electrónico	[Redacted]	Teléfono
Programa	[Redacted]	Semestre
Curso	Matemáticas Generales	Semestre del curso: II
Tema	Desigualdades con valor absoluto	
Motivo	No entiendo el tema	
Profesor	[Redacted]	Región por: NR 1 2 3

Informe de la tutoría del estudiante:

$\bullet \quad 3x+5 > 73$ $-3 > 3x+5 > 3$ $-3-5 > 3x > 3-5$ $-8 > 3x > -2$ $-8-3 > x > -2-3$ $-11 > x > -5$ $[-11, -5] \rightarrow \text{solución}$	$ 5x+10 = 4$ $-4 \leq 5x+10 \leq 4$ $-14 \leq 5x \leq -6$ $-14 \leq x \leq -11$ $\bullet \text{ Solución } [-11, -11]$
---	---

Dificultades:

- Desconocimiento del significado y propiedades del valor Absoluto.
- Confunde la forma de resolver desigualdades con valor absoluto que involucran menor y mayor, e igual.
- No diferencia entre inverso multiplicativo e opuesto aditivo.

Continúe al reverso de la hoja →

No relaciona que el conjunto solución como aquellos números que satisfacen una ecuación.

Desconoce como encontrar solución de expresiones como $x \geq 3$ ó $x \leq -5$, $x \geq 2$ y $x < 3$.

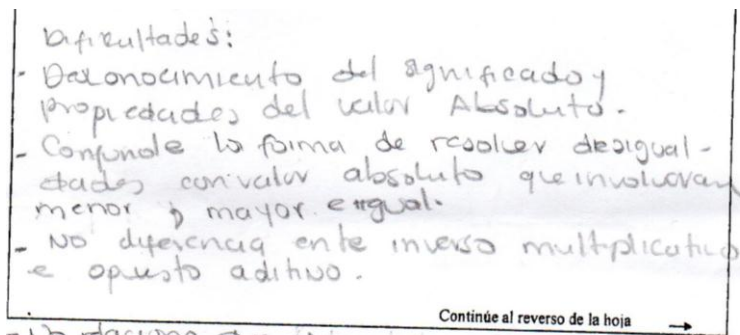
Imagen 17 Caso típico 4 de la categoría 2.

Al igual que muchos otros, este informe está estructurado en dos secciones, la primera contiene la solución de dos situaciones, en las que se observan varios errores, en este caso relacionados con las inecuaciones con valor absoluto (ver imagen 18). La segunda, contiene un listado de dificultades relacionadas con los errores expuestos en la primera sección (ver imagen 19).

Informe de la tutoría del estudiante:

$\bullet \quad 3x+5 > 73$ $-3 > 3x+5 > 3$ $-3-5 > 3x > 3-5$ $-8 > 3x > -2$ $-8-3 > x > -2-3$ $-11 > x > -5$ $[-11, -5] \rightarrow \text{solución}$	$ 5x+10 = 4$ $-4 \leq 5x+10 \leq 4$ $-14 \leq 5x \leq -6$ $-14 \leq x \leq -11$ $\bullet \text{ Solución } [-11, -11]$
---	---

Imagen 18 Identificación de errores en la solución de una inecuación con valor absoluto



- No relaciona que el conjunto solución como aquellos números que satisfacen una ecuación.

- Desconoce como encontrar solución de expresiones como $x \geq 3$ ó $x \leq -5$, $x \geq 2$ y $x < 3$.

Imagen 19 Representación de dificultades de comprensión matemática hechas por el tutor.

De la descripción de la primera dificultad, “*desconocimiento del significado y propiedades del valor absoluto*”, se puede deducir, teniendo en cuenta que los obstáculos cognitivos son identificados como aquellos conocimientos que han sido satisfactorios para la resolución de ciertos problemas durante un tiempo, que se “fijan” en la mente y, sin embargo, resultan inadecuados en la solución de otros problemas; que éste enunciado no puede corresponder con una dificultad, ya que ésta debe estar soportada en la representación de al menos un obstáculo cognitivo.

De una manera más concreta, y según el informe, él tutoriado reconoce el objeto matemático “valor absoluto”, y en su estrategia de solución extiende la propiedad $|x| \leq k \Leftrightarrow -k \leq x \leq k$, siendo k un número real positivo, y la hace verdadera en $|x| > k$, cambiando los signos de desigualdad \leq por $>$ en la propiedad anterior; lo cual efectivamente se convierte en un obstáculo cognitivo (ver imagen 20).

$$\bullet \quad |3x+5| > 3$$

$$-3 > 3x+5 > 3$$

Imagen 20 Obstáculo cognitivo. Extensión de la propiedad de valor absoluto $|x| \leq k \Leftrightarrow -k \leq x \leq k$ haciéndola verdadera en $|x| > k$.

Se pudo concluir que cuando el estudiante se enfrenta a la situación $|x| = k$ hace verdadera la propiedad aprendida por él anteriormente y que fue exitosa en otras situaciones $|x| \leq k \Leftrightarrow -k \leq x \leq k$; una explicación cognitiva de esto es que en sus esquemas mentales el símbolo “menor o igual que” \leq incluye la opción de igualdad, y para dar una respuesta, automáticamente asume que es totalmente idéntico usar $=$ o \leq en $-k \leq x \leq k$. Lo que se define como un obstáculo cognitivo (ver imagen 21).

$$|5x+10| = 4$$

$$-4 \leq 5x+10 \leq 4$$

Imagen 21 Obstáculo cognitivo. Extensión de la propiedad de valor absoluto $|x| \leq k \Leftrightarrow -k \leq x \leq k$ haciéndola verdadera en $|x| = k$.

De forma similar, en la descripción de la segunda dificultad: “*confunde la forma de resolver desigualdades con valor absoluto que involucran menor, mayor e igual*”; se deduce que no es una dificultad, puesto que el tutor no soporta este enunciado bajo la representación de al menos un obstáculo cognitivo del tutoriado.

De manera más explícita, según el informe, el estudiante en el momento de solucionar la tarea, “activa” sus esquemas mentales, reconociendo el objeto matemático “valor absoluto” y deja evidencias de que tiene construido el conocimiento que $|x| \leq k$ si y solo si $-k \leq x \leq k$, para cualquier número real k ; por tanto, en sus estrategias de solución, obliga a que todas las desigualdades

existentes tienen que ser semejantes a $|x| \leq k$, y que para resolverlas sólo es necesario cambiar los símbolos $>$ y \geq por \leq en $-k \leq x \leq k$; y asumir que $=$ al ser una posibilidad en \leq , puede usarlas como idénticas, lo cual es un obstáculo cognitivo (ver imagen 18).

De la descripción de la tercera dificultad: ‘*No diferencia entre inverso multiplicativo y opuesto aditivo*’, se puede concluir, teniendo en cuenta que una representación errónea se presenta cuando el contenido de la representación no coincide con la imagen; que este enunciado es una representación de contenido errónea, puesto que la imagen 22 evidencia que el estudiante tiene construido el concepto de inverso aditivo y lo usa sin ninguna dificultad, pero no se puede reconocer que también haya construido en concepto de inverso multiplicativo, por lo tanto, él no puede diferenciarlos. Así que no es una dificultad.

Imagen 22 Identificación de errores en la solución de una inecuación de primer grado.

Continuando con el listado de dificultades hecha por el tutor (imagen 19), la número cuatro corresponde a: “*no relaciona el conjunto solución como aquellos números que satisfacen mi inecuación*”. De esta descripción, se puede deducir que más que una dificultad es un señalamiento que el tutor hace al hecho de que la solución dada por el estudiante, en efecto, no corresponde con la inecuación propuesta, lo que lleva a concluir que no es una dificultad en el aprendizaje de las matemáticas. Con esto, se presenta otro ejemplo de informe que contienen creencias del tutor sin fundamentos en representaciones de los procesos cognitivos del estudiante.

A partir del informe de esta tutoría, el estudiante reconoce que el ejercicio finaliza y lo llama “solución” cuando escribe entre corchetes y separados por una coma (,) los dos números que quedan en los extremos de las dos desigualdades (de

izquierda a derecha), que resultan de hacer operaciones “necesarias por él” para dejar la “ x ” como aquella variable solitaria con coeficiente uno.

De manera más concreta, si se hace un análisis detallado en términos de obstáculos, el estudiante en situaciones matemáticas anteriores con seguridad solucionó ejercicios de la forma $-k \leq x + b \leq k$ con k y b números reales, y en su mayoría las respuestas fueron acertadas, puesto que el conjunto solución de estas inecuaciones son todos los números reales x que pertenecen al conjunto $[-k - b, k - b]$; y que en efecto, corresponde con la forma de escritura de solución de cualquier inecuación que el estudiante concluya.

Por lo tanto, cada vez que el estudiante se enfrenta a un nuevo problema de inecuación, repetirá este proceso y emitirá una respuesta que a su vez es inadecuada, buscando tener éxito como en experiencias pasadas. Lo cual efectivamente es un obstáculo cognitivo.

Complementario a lo anterior, se puede concluir también que el estudiante no ha construido el concepto de inecuación, incluyendo aquellas que involucran la función valor absoluto. Pues sólo se ha aprendido un paso a paso (algoritmo) para obtener una expresión “parecida” a experiencias antiguas con éxito, para después decir que la solución es aquella que tiene dos paréntesis descritos anteriormente.

Sumada a las anteriores dificultades, este reporte incluye una última, “*Desconoce cómo encontrar solución de expresiones como $x \geq 3$ o $x \leq -5$, $x \geq \sqrt{2}$ y $x < 3$* ”, la cual evidencia un caso particular de la falta de citación de los elementos requeridos para hablar de dificultades del aprendizaje de las matemáticas, esto es, en la sección de errores (imagen 18) el tutor no mencionó, directamente los o el error que permitiera hacerse representaciones y así acreditar la asociación del desconocimiento, por parte del tutoriado, de encontrar solución a inecuaciones

como las que plantea, dejando al descubierto afirmaciones subjetivas que no tienen justificación en sus argumentos.

5.3 Tutores que se representaron los errores y las dificultades de comprensión de los estudiantes.

Después de Analizar los informes de las tutorías del curso de Matemáticas Generales según las dimensiones de análisis, ninguno cumplió con la exigencia de que los tutores se representaran los errores y las dificultades de comprensión de los estudiantes del curso. Por ese motivo ésta clasificación se encontró desierta.

CAPÍTULO 6. ANÁLISIS Y DISCUSIÓN

Generalmente los programas universitarios de tutorías o monitorias académicas en matemáticas buscan estudiantes de semestres avanzados, con buen rendimiento académico, para que “ayuden” o “atiendan” a otros estudiantes con dificultades en el aprendizaje de las matemáticas.

Estas universidades, administrativamente, generan una propuesta de vinculación de tutores a través de, o con la participación de los departamentos de matemáticas, para realizar la selección de los estudiantes, los distribuye en salones en diversos horarios del día, realizan publicidad entre los demás estudiantes, de tal forma que los tutores deben esperar el momento en que uno o varios estudiantes lleguen a solicitar su servicio.

Este tipo de programa de tutorías genera una dinámica en la que es asignada toda la responsabilidad de resultados del programa a los estudiantes-tutores, dejando la impresión de que con esto la institución cumple con el compromiso de atención al problema de la deserción estudiantil en lo que se refiere al rendimiento académico.

Cuando se hacen trabajos investigativos que involucran estos tipos de programas académicos, se encuentran muchos fenómenos de estudio, entre los cuales, la participación de los tutores puede ser abordada a partir de las representaciones mentales que sobre las dificultades de comprensión matemática de los estudiantes universitarios ellos se puedan hacer.

En este caso, se presenta una mirada investigativa de un programa de tutorías y se realiza un análisis y discusión de los resultados a partir de los informes de

tutoría que hicieron los tutores y la forma como ellos se representan las dificultades de comprensión matemática de los estudiantes del curso de Matemáticas Generales de la Universidad del Cauca.

Esta sesión se desarrollará siguiendo el orden de presentación de las categorías que se hizo en el capítulo anterior.

6.1 Categoría 1: Tutores que no se representaron los errores ni dificultades de comprensión de los estudiantes.

Los tutores pertenecientes a esta categoría, son aquellos que en sus reportes de tutoría no mencionaron, de forma directa o indirecta, los conceptos de error ni dificultad asociados al proceso de aprendizaje de los tutoriados, y que aludieron a un sin número de causas que hacían parte, más de su imaginación, de lo que le interesaba, que de las evidencias que los estudiantes manifestaron, en relación con sus inconvenientes durante la sesión de trabajo.

De manera más explícita, desde la teoría de aprendizaje de las matemáticas, ninguna de las dificultades propuestas por los tutores se acerca a las dificultades de comprensión matemática del tutoriado, puesto que estas deben justificarse con las representaciones que ellos se hacen de los obstáculos cognitivos de los estudiantes, y estos a su vez se infieren por la manifestación del error.

Las representaciones que los tutores se deben realizar sobre los tutoriados son fundamentales para poder dar explicaciones cognitivas a los impases que los estudiantes tienen en el momento de resolver una tarea matemática; dichas representaciones deben iniciar en el momento en que el tutor tiene informaciones primarias tales como: programa, materia, necesidad académica, nivel de repitencia, entre otros, que le dan insumos para preparar la tutoría tanto en el contenido matemático a tratar, como en la búsqueda de situaciones que le permitan en las acciones de sujeto (estudiante) dar cuenta de las posibles

dificultades que presenta el tutoriado, y que lo ha llevado a recurrir a este espacio académico.

Según lo analizado en el capítulo cinco, cuando el estudiante realiza una respuesta errónea a una tarea matemática propuesta, el tutor no muestra rastros de identificación de errores ni dificultades, pero si hace señalamientos, críticas y especulaciones sobre la forma en que él lo solucionaría, sin fijarse en las estrategias que el sujeto emitió cuando se enfrentó a esta actividad. Todo esto permite concluir que, en el momento que el tutor suprime al tutoriado, es decir no lo reconoce en acción cuando soluciona la tarea, él se queda sin herramientas para hacerse representaciones de los obstáculos cognitivos del estudiante, y no le queda otra opción que emitir sus creencias como justificaciones a las dificultades.

En otras palabras, cuando el tutor observa al estudiante resolver erróneamente una situación matemática, se pone en el lugar de él haciendo el ejercicio y no reconoce al tutoriado como el portador de esos obstáculos cognitivos que le generan dificultades, sino que lo critica y le hace señalamientos de cómo él lo haría.

A pesar de que en el proyecto CLAVEMAT se tuvo presupuestada la capacitación a todos los tutores sobre errores, dificultades, obstáculos, enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y tutorías académicas, este grupo de tutores, no alcanzan a reconocer al tutoriado como un sujeto pensante, que poseen estructuras cognitivas y que siempre están en procesos de construcción de conocimiento. Es decir, estos tutores no se representan a los tutoriados como "otros", sino que se miran a sí mismos en las soluciones de situaciones matemáticas.

Cuando el tutor reconozca al estudiante como un sujeto psicológico⁵, será el momento en que sea capaz de representarse los errores, y con esto inferir los

⁵ En relación con Bärbel Inhelder: Sujeto real, encarnado.

obstáculos cognitivos, para dar una explicación a estas dificultades de comprensión matemática.

Es por este motivo, que se resalta la importancia de un proceso de capacitación continuo sobre las temáticas antes mencionadas, para que los tutores den cuenta del tutoriado y puedan representarse sus dificultades.

6.2 Categoría 2: Tutores que se representaron los errores de los estudiantes, pero que no sus dificultades de comprensión.

Los tutores que se ubican en esta categoría son los que en sus reportes de tutoría plasmaron representaciones de los errores que los tutoriados presentaron durante la tutoría, pero no escribieron representaciones de las dificultades asociadas a su proceso de aprendizaje fundamentadas en obstáculos cognitivos. A cambio de esto, los tutores mostraron varias causas que hacen parte, más de su creencia, que de lo que los estudiantes revelaron en la interacción, de tal forma, que la especulación acerca de las causas de los errores, es también un elemento en esta categoría.

Es a partir de este momento, en que se observa un gran cambio en la presentación de los informes de tutoría, pues estos tutores hacen una primera aproximación a la identificación de errores en la solución de una situación planteada por el estudiante; pero a pesar que señalan que el proceso es erróneo y que la respuesta es un error, según las evidencias de los reportes, no logran representarse los obstáculos cognitivos que le están generando una barrera al estudiante en el aprendizaje de estos conocimientos matemáticos.

En otros términos, estos tutores a diferencia de los de la anterior categoría, ya reconocen la presencia de un sujeto en acto, con unos procesos cognitivos, pero, cuando el tutor hace el ejercicio de metarepresentarse las acciones del sujeto con el que interactúa en busca explicaciones, recurre a su pasado, olvidándose por completo del tutoriado y una vez más, relaciona los procedimientos matemáticos

hechos por el estudiante, con los que debieron ser y lo que conocen (su pasado), creando así especulaciones y generando representaciones erróneas de la situación.

La mayoría de las tutorías en matemáticas que se dan en las instituciones, consisten en solo mostrar por parte del tutor, un paso a paso de la solución correcta de un ejercicio matemático que el tutoriado (que no se sabe quién es) no pudo resolver; pero hacer esto, es no dar cuenta del estudiante, de sus acciones, de lo que quiere, de sus necesidades académicas, por eso, cuando se le anticipa información del tutoriado, es para que se represente al sujeto y esté presto a atenderlo, bajo la concepción que la tutoría debe ir más allá de resolver el problema matemático en cuestión, pues también es de sus funciones indagar y dialogar con el tutoriado en torno a sus necesidades.

Es por esta razón, que las tutorías no tienen impacto directo en la deserción estudiantil generada por el bajo rendimiento académico en matemáticas, pues financiar un programa de tutorías que tenga como objetivo resolver problemas de matemáticas en vez de problemas de conocimiento del estudiante, es desperdiciar los esfuerzos de los tutores y sus buenas intenciones.

Para lograr que un programa de tutorías en las instituciones de educación superior sea efectivo en la atención a las dificultades en el aprendizaje de las matemáticas de los estudiantes, es necesario diseñar un espacio de formación de tutores en educación matemática, en torno al hecho de que enseñar matemáticas es prestar atención al estudiante, a sus acciones y necesidades.

En esta investigación se pudo evidenciar cómo a través de charlas sobre errores, dificultades, enseñanza, aprendizaje, tutorías, procesos cognitivos, obstáculos cognitivos, errores, esquemas mentales, representaciones etc.; de mostrar la importancia de representarse (mentalmente) al estudiante desde que solicita la tutoría hasta el final de la misma; y de tratar de generar consciencia que dar una tutoría es ir más allá de solucionar los ejercicios matemáticos, los tutores se

podieron clasificar en tres niveles, quedando una mayor concentración de estos en el segundo nivel. Entonces, con seguridad, si el proceso tuviese continuidad, en cuenta al tiempo de capacitación y las condiciones logísticas, los tutores tendrían la capacidad de alcanzar el más alto nivel de clasificación.

Teniendo en cuenta los resultados de esta investigación, el compromiso de mejorar los procesos de enseñanza y de aprendizaje de las matemáticas, y de reducir la deserción estudiantil a nivel superior; se propone un programa de tutorías universitarias en matemáticas que debe estar construido de la siguiente manera:

1. Conocer con antelación el tema y subtemas en los que un estudiante requiere tutoría, el motivo, y la condición social (estrato socioeconómico, raza, etnia, entre otros). Ya que con éstas informaciones, el tutor puede preparar la tutoría; tanto en los temas de matemáticas, como en la labor pedagógica a realizar.
2. Condiciones logísticas: Oficina, salones y materiales como marcadores, borradores, etc.
3. Selección de un grupo de tutores-estudiantes de Matemáticas y Licenciatura en Matemáticas de la universidad interesados en realizar funciones en tutorías académicas.
4. Diseño de una herramienta tecnológica que permita almacenar la información de los estudiantes que están interesados en recibir las tutorías; administrar la asignación de los espacios físicos (salones, salas de estudio y oficinas); y organizar en grupos de no más de cinco estudiantes con condiciones similares y que hayan solicitado la tutoría. Para esto se recomienda Google, ya que cuenta con un conjunto de herramientas integradas e interoperables que permiten satisfacer todas las necesidades, tales como “Google Sites” y “Google Drive”⁶.

⁶ Google Sites permitirá visualizar los contenidos en Internet referentes a las tutorías, con secciones públicas y privadas. Se propone que en la parte pública se encuentren “incrustados” formularios para el registro de estudiantes y solicitud de

5. Designar personal que administre la página web de Google mencionada en el punto anterior⁷. Actualizar constantemente información en la página web.
6. Conformar un grupo de profesores expertos en el área de Educación Matemática y en tutorías académicas universitarias; para que lidere el proceso de capacitación, selección y seguimiento de los tutores interesados en pertenecer al programa de tutorías de la universidad⁸
7. Un equipo de personas que hagan seguimientos académicos a los estudiantes tutoriados y medir el impacto de las tutorías en el rendimiento académico de los estudiante en sus cursos de matemáticas. El objetivo es que con este programa se reduzca el índice de deserción estudiantil en la institución de educación superior al reducir el fracaso académico en los cursos de matemáticas.

tutorías, asignación del horario y sitio de atención, e información general; y en la parte privada de los tutores, haya un espacio para la lectura de los estudiantes que van a tutorear, el tema y subtemas, los motivos, el espacio físico y horario asignado. Para administrar estos contenidos, se recomienda acudir a Google Drive, la cual a través de las hojas de cálculo generadas a partir de los formularios de solicitud de tutoría, los toma como base principal para la exportación de éstos datos a otras hojas de cálculo para realizar programación de las tutorías acorde con los horarios de disponibilidad de los tutores y de los beneficiarios, y la prioridad según la pertenencia a un grupo vulnerable; para después mostrarlos en dos grupos, uno para los estudiantes con los datos básicos y otro para los tutores con datos adicionales necesarios para la planeación de las tutorías que debe realizar

⁷ Dentro de las funciones de esta persona estarán: de acuerdo con las necesidades de los estudiantes, el curso, los temas, conformar grupos de hasta cinco estudiantes; asignar a estos grupos tutores, horarios y salones; proveer a los tutores de los materiales necesarios para la tutoría.

⁸ El compromiso de este grupo de profesores debe ser constante, ya que deben estar al frente de todas las intervenciones de los tutores, particularmente de la forma en que están dando las tutorías: hacer seguimientos, observar los reportes de las mismas y la evaluación de las representaciones que se están haciendo sobre las dificultades de comprensión que los estudiantes tienen y cómo interactúan con los estudiantes.

CONSIDERACIONES FINALES

La función tutorial dentro de los procesos académicos, constituye una de las acciones principales de la universidad, permite tener un acercamiento a las necesidades educativas de los estudiantes, realizar seguimientos a sus procesos de aprendizajes, y brindar apoyo en la adaptación de los estudiantes al entorno académico.

Los programas de tutoría, en su mayoría, están enfocados hacia las áreas donde el bajo rendimiento académico de los estudiantes, son puntos cruciales para la deserción estudiantil, y generalmente las tutorías las llevan a cabo docentes y estudiantes de la misma universidad.

Aunque la mayoría de trabajos que en el campo de la Didáctica de las Matemáticas se han desarrollado apuntan a medir el impacto de estos programas de tutoría, mediante estudios cualitativos y cuantitativos de la cantidad de estudiantes beneficiados y el rendimiento académico de los mismos en los cursos de matemáticas; éste trabajo, rompiendo con estos esquemas, se centra en tratar de identificar, mediante unos reportes de tutorías personalizadas, las representaciones mentales que los tutores universitarios se hacen sobre las dificultades de comprensión matemáticas de los estudiantes, cuando interactúan en la sesión de trabajo.

Para cumplir con éste objetivo, se apoyó en un marco teórico sobre la tutoría universitaria y el papel del tutor en los modelos educativos universitarios en matemáticas, las representaciones mentales en la Didáctica de las Matemáticas, la teoría piagetiana, los obstáculos, errores y dificultades en el aprendizaje de las

matemáticas; sin olvidar que existen otras explicaciones teóricas que podrían haber sido igualmente útiles para esto; pero además de esto, se elaboró una metodología que permitiera, articular todo lo anterior y generar las condiciones para el desarrollo del trabajo.

Los resultados de esta investigación, evidencian que los fenómenos encontrados cuando se pone en marcha un programa de tutorías, son de gran complejidad. Es por esta razón y muchas otras, que evaluar el impacto que tiene un programa de tutorías académicas en el campo de la Didáctica de la Matemática tiene gran relevancia.

En virtud de todo lo que aquí se reporta, se puede asegurar que se hace necesario establecer un programa de tutorías que responda a las condiciones que exige: un cuerpo administrativo universitario que permita financiarlo y fortalecerlo en el tiempo, conformando un equipo de expertos del campo de la Didáctica de la Matemática que seleccione y forme tutores en el área; también se hace necesario, para asegurar el buen funcionamiento del programa, contar con un espacio continuo de formación de tutores para la atención de estudiantes con dificultades en el aprendizaje de las matemáticas; un monitoreo constante que permita medir el impacto de los resultados de las tutorías, en cuanto a sus rendimiento académicos, y finalmente, mediante investigaciones, seguir evaluando y ajustando estos programas.

El diseño de un programa de tutorías con estas características, favorece particularmente a aquellos estudiantes que ingresaron a la universidad bajo una condición especial (desplazamiento, provenientes de zonas rurales, entre otros), brindándoles un método o plan, para que puedan permanecer en la institución y alcanzar los objetivos académicos propuestos. Siendo así, éste una estrategia, para reducir el fracaso académico y lograr que no sea más un motivo de la deserción estudiantil.

Las investigaciones sobre los programas de tutorías académicas, y particularmente, sobre las representaciones sobre las dificultades de comprensión matemáticas de los estudiantes; ofrecen un amplio panorama y cuestiona directamente la forma en que se están llevando a cabo las tutorías, sus condiciones logísticas, el objetivo y la manera de implementarlas en nuestras universidades. Además pueden servir de punto de partida para nuevas investigaciones, tanto en la formulación de programas de tutorías, o en la modificación de otros; como en el estudio de los fenómenos que emergen en los procesos de enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas de las tutorías; y en métodos y técnicas de evaluación del impacto de los programas de tutorías en el área de las matemáticas.

Si bien es cierto que falta mucho por considerar y mejorar, las distintas ideas presentadas permiten pensar en algunas posibles maneras de continuar la investigación:

- Proyectar el diseño y ejecución de programas de tutorías hacia otras áreas donde también existe fracaso académico, como por ejemplo en, las Ciencias: Química, Física, Biología, entre otros., y temas propios de la Ingeniería.
- Integrar investigadores del campo de la Didáctica de otras áreas como de la Ciencia y la Ingeniería, para proponer estrategias académicas universitarias que permita sacar del espectro de la deserción estudiantil el fracaso académico en los cursos de sus carreras.
- Profundizar en el estudio y análisis de los diferentes modelos educativos universitarios en el área de las matemáticas, teniendo en cuenta el recorrido histórico de creación de ciencia.
- Profundizar en el estudio de las representaciones mentales en el campo de la Didáctica de las Matemáticas, particularmente en las representaciones sobre las dificultades de comprensión matemática de las personas.

- Diseñar estrategias de evaluación de programas de tutorías académicas universitarias en el área de las matemáticas, y realizar estudios complementarios que permitan analizar y minimizar el bajo rendimiento académico.
- Crear en los programas de formación de docente, como las Licenciaturas en Matemáticas, un espacio para que los estudiantes se fortalezcan en el área de las tutorías académicas universitarias, y complementen sus estudios, tomando los programas tutorías como “laboratorios” para el estudio e investigaciones de temáticas del campo de la Educación Matemática.
- Integrar expertos de ingeniería electrónica, ingeniería de sistemas y de Educación Matemática, para hacer investigaciones una posible algoritmo implementado en una página web que permita integrar las necesidades académicas de los estudiantes, el curso, los temas y subtemas en que requiere la tutoría y las disponibilidades de los tutores, y generar una agenda de tutorías; optimizando el trabajo de asignación de tutorías a nivel universitario.

Finalmente, es importante resaltar que el desarrollo y resultados de esta investigación se han ido divulgando ante la comunidad educativa y de investigadores en diversos eventos nacionales e internacionales:

- Ponente del artículo *“Proyecto Clavemat-Universidad del Cauca: Integración de TIC como apoyo para la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas Congreso Internacional de Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas mediadas por tic”*. CIMATIC 2014. Universidad del Quindío. Armenia, Colombia.
- Expositora del artículo *“Uso de herramientas TIC como apoyo para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en educación media, superior y continuada: Universidad del Cauca- proyecto CLAVEMAT”*. Congreso Internacional de Didáctica de la Matemática: una mirada

epistemológica y empírica 2015. Universidad de la Sabana. Santa Marta, Colombia.

- Ponente del artículo *“La tutoría universitaria y el papel del tutor en los modelos educativos universitarios: el área de matemáticas”*. Coloquio Internacional de Educación 2016. Universidad del Cauca. Popayán, Colombia.
- Expositora del artículo *“Herramientas web de Google para organizar la logística del programa de tutorías masivas universitarias en matemáticas”*. Escuela de Invierno en Matemática Educativa: La tecnología como una herramienta para fortalecer la Educación Matemática 2016. Universidad Autónoma de Nayarit, CINVESTAV. Tepic, Nayarit, México.

BIBLIOGRAFÍA

Bachelard, G. (2000). *LA FORMACIÓN DEL ESPÍRITU CIENTÍFICO. Contribución a un psicoanálisis del conocimiento objetivo*. Buenos Aires, Argentina: Siglo XXI.

Botello, I., & Parada, S. (2013). Tutorías académicas universitarias: un laboratorio para profesores de matemáticas en formación. *VII SIBEM*, 4706-4713.

Botello, I., & Parada, S. (2013). Tutorías entre pares: un camino potencial para la formación de profesores de matemáticas. *Uni-pluri/versidad Vol.13. N° 3*, 29-42.

Brousseau, G. (1983). les obstacles epistemologiques et les problemas en mathématiques. *Recherches en Didactique des mathématiques Vol 4,2*.

Bruner, J. J. (2014). La idea de la Universidad Pública en América Latina: Narraciones en escenarios divergentes. *Educación XXI*, 17(2), 17-34.

Cardozo, C. (2011). Tutoría entre pares como una estrategia pedagógica univertaria. *Universidad de la Sabana Facultad de Educación*, 309-325.

- Cohen, L., & Manion, L. (2002). *Métodos de investigación educativa*. Madrid: La muralla.
- D'Amore, B. (2006). *Didáctica de las Matemáticas*. Editorial Magisterio.
- Dubinsky, E. (1991). Reflective Abstraction in Advanced Mathematical Thinking. *Advanced mathematical thinking*, 95-123.
- Dubinsky, E. (1996). Aplicación de la perspectiva piagetiana a la educación matemática universitaria. *Educación Matemática*. Vol. 8, 24-41.
- Duval, R. (1995). *Sémioses et pensee humaine*. Berna: Peter Lang S.A.
- Fernández , G., & Escribano, M. (2008). Las tutorías universitarias en la formación académica y humana de los alumnos en la Universidad San Pablo CEU. *XVI Jornadas ASEPUMA – IV Encuentro Internacional. Rect@ Vol Actas_16 Issue 1:605* (págs. 1-11). Cartagena: ASEPUMA.
- Figueroa, C., Vargas, C., Obredor, A., & Vera, P. (2010). El examen final: las Tutorías Universitarias como apoyo pedagógico para la promoción de la asignatura Análisis Matemático II. *7mo. Congreso Internacional de Educación Superior "Universidad 2010"*, 1-10.
- Font, V. (2001). Algunos puntos de vista sobre las representaciones en Didáctica de las Matemáticas. *Departamento de Didáctica de las CCEE y la matemática de la Universidad de Barcelona*, 34.
- Font, V. (2001). Representation in Mathematics Education: Algunos Puntos de Vista Sobre las Representaciones en Didáctica de las Matemáticas. *Philosophy of Mathematics Education*, 14, 1-35.
- García, S. (2006). La importancia de la tutoría en la vida universitaria. *PACIFIC CIRCLE CONSORTIUM CONFERENCE* (págs. 2-15). Ciudad de México: Universidad Autónoma del Estado de México.

- Goodlad, S., & Hirst, B. (1989). *Peer tutoring: A guide to learning by teaching*. (N. P. Co, Ed.) Engalnd: Kogan Page Ltd.
- Goodman, N. (1974). *Los lenguajes del arte*. Barcelona: Seix Barral.
- Gutiérrez. (1991). *LA INVESTIGACIÓN EN DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS*.
- Gutiérrez, Á. (1991). La Investigación en Didáctica de las Matemáticas. En Á. Gutiérrez (Ed.), *Área de Conocimiento Didáctica de la Matemática* (colección "Matemáticas: Cultura y Aprendizaje" no.1 ed., págs. 149-194). Madrid, España: Síntesis.
- Joshua, S., & Dupin, J.-J. (1993). *Introductio à la Didactique des Sciences et des Mathématiques*. (G. Castrillón, & M. Vega, Trads.) Pais, Francia: PUF.
- López, F. (2002). El análisis de cotenido como método de investigación. *Revista de Educación*, 167-179.
- Molina, M. (2004). LA TUTORÍA. Una estrategia para mejorar la calidad de la Educación Superior. *Unión de universidades de américa latina (UDUAL)*, (págs. 35-39). Distrito Federal, México.
- Palarea Medina, M. M., & Socas Robayna, M. M. (1994). Algunos obstáculos cognitivos en el aprendizaje del lenguaje algebraico. *Suma*(16), 91-98.
- Perner, J. (1994). *Comprender la mente representacional*. Barcelona: Paidós.
- Piaget, J. (1959/1972). *El nacimiento de la inteligencia en el niño*. (L. F. Cancela, Trans.) Madrid: Aguilar.
- Porta, J. (1998). La universidad en el cambio de siglo. En *Arquetipos de universiddes: de la transmisión de saberes a la institución multifuncional* (págs. 22-66). Madrid: Alianza.
- Proyecto Clavemat - alfa III. (06 de 2012). *Clavemat, Aula virtual de Matemática y Tutoría*. Recuperado el 17 de 06 de 2013, de www.clavemat.org

- Rico, L. (1998). Errores y dificultades en el aprendizaje de las Matemáticas. En *EDUCACIÓN MATEMÁTICA: Errores y Dificultades de los estudiantes. Resolución de Problemas. Evaluación. Historia* (págs. 69-104). Bogotá, Colombia.
- Rico, L., & Sierra, M. (1999). Didáctica de la Matemática e Investigación. 39.
- Rodríguez Espinar, S. (2012). *MANUAL DE TUTORÍA UNIVERSITARIA Recursos para la acción*. Barcelona España: OCTAEDRO.
- Rodríguez, G., Gil, J., & García, E. (1996). *Metodología de la Investigación Cualitativa*. Granada, España: Aljibe.
- Rodríguez, S. (2012). *Manual de tutoría universitaria*. Barcelona: Octaedro/ICE-UB.
- Rodríguez, S. (2012). *MANUAL DE TUTORÍA UNIVERSITARIA Recursos para la acción*. Barcelona España: OCTAEDRO.

ANEXOS

FORMATO DE INFORME DE TUTORÍA



Proyecto Alfa III - CLAVEMAT
"Virtual Classrooms of mathematics and mentoring"
Universidad del Cauca



Nombre del tutor:		
Fecha:	Hora de inicio:	Hora finalización:
Nombre del estudiante:		
Correo Electrónico:	Teléfono:	
Programa:	Semestre:	
Curso:	Semestre del curso:	
Tema:		
Motivo:	Repite por:	
Profesor:	NR 1 2 3	

Informe de la tutoría del estudiante:

Continúe al reverso de la hoja →