NIVELES DE COMPRENSIÓN DE LA REPRESENTACIÓN DE LA FAMILIA DE SOLUCIONES DE ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS LINEALES DE PRIMER ORDEN EN UNA SITUACIÓN DIDÁCTICA

SANDRA MARCELA CHITO CERÓN

UNIVERSIDAD DEL CAUCA

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES, EXACTAS Y DE LA EDUCACIÓN

CENTRO DE POSGRADOS

MAESTRÍA EN EDUCACIÓN

POPAYÁN

2016

NIVELES DE COMPRENSIÓN DE LA REPRESENTACIÓN DE LA FAMILIA DE SOLUCIONES DE ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS LINEALES DE PRIMER ORDEN EN UNA SITUACIÓN DIDÁCTICA

SANDRA MARCELA CHITO CERÓN

Directora: Mg. Yeny Leonor Rosero Rosero

UNIVERSIDAD DEL CAUCA

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES, EXACTAS Y DE LA EDUCACIÓN

CENTRO DE POSGRADOS

MAESTRÍA EN EDUCACIÓN

POPAYÁN

2016

Nota de Aceptación

_____

_____

_____

_____

_____

Directora: Mg. Yeny Leonor Rosero Rosero

_____

Jurado: Mg. Ángel Hernán Zúñiga Solarte

_____

Jurado: Dra. Myriam Belisa Vega Restrepo

Fecha de sustentación: Popayán, Julio de 2016

Dedicatoria

¡A Dios por la vida; a mis padres por su amor, apoyo y sacrificio; a mis hermanas por su cariño; a Mauricio por sus revisiones, sugerencias y por tanto amor!

Agradecimientos

A la Mg. Yeny Leonor Rosero, mi asesora de tesis, por su paciencia y continuos aportes durante el desarrollo de la investigación; a mis profesores por sus valiosas enseñanzas; a mis estudiantes por sus trabajos, tiempo, compromiso y dedicación; a mis compañeros de maestría por todos los aprendizajes y risas compartidas.

Resumen

Siendo la comprensión de los objetos matemáticos por parte de los estudiantes uno de los intereses principales de los maestros esta investigación centró la atención en la caracterización de los niveles de comprensión manifestados por cinco estudiantes del curso Ecuaciones Diferenciales del programa Ingeniería de sistemas de una universidad privada de la ciudad de Popayán, Colombia, al coordinar básicamente tres representaciones semióticas distintas, la algebraica, la gráfica y la verbal, de la familia de soluciones de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden, dentro de una situación didáctica. Entendiendo la comprensión desde la Teoría de los Registros de Representación Semiótica planteada por Duval (1993). Esta investigación consistió en un trabajo de microingeniería, Artigue (1995) .

Palabras clave

Comprensión - Situación didáctica - Ecuaciones Diferenciales-Ingeniería didáctica

Abstract

It is understanding of mathematical objects by students one of the main interests of teachers this research focused attention on the characterization of levels of understanding expressed by five students of the course Differential Equations of Engineering Systems program at a private university city of Popayan, Colombia, to coordinate basically three different semiotic representations, algebraic, graphical and verbal, of the family of solutions of linear differential equations of the first order, in a didactic situation. Understanding understanding from the Theory of Semiotics Representation Registers raised by Duval (1993). This research consisted of a micro-engineering work, Artigue (1995).

Keywords

Comprehension - Didactic Situation - Differential Equations - Didactic Engineering

TABLA DE CONTENIDO

Dedicatoria 4

Agradecimientos 5

Resumen 6

Abstract 6

Introducción 13

Capítulo I 16

Aspectos generales de la investigación 16

1.1 Presentación de la problemática de investigación 16

1.2 Justificación 19

1.3 Estado del Arte 21

1.4 Objetivos 24

1.4.1 Objetivo General 24

1.4.2 Objetivos Específicos 24

Capítulo II 25

Marco teórico y metodología de la investigación 25

2.1 Teoría de los Registros de Representación Semiótica 25

2.1.1 Tipos de registros utilizados en matemáticas 26

2.1.2 Transformación de representaciones semióticas 27

2.1.3 Códigos de MatLab 28

2.1.4 La comprensión entendida desde la Teoría de los Registros de Representación Semiótica 30

2.2 Teoría de las Situaciones Didácticas 32

2.2.1 Medio 32

2.2.2 Situación didáctica 32

2.2.3 Situación a-didáctica 32

2.2.4 Fases en una situación didáctica 33

2.3 La Ingeniería Didáctica como metodología 33

Capítulo III 35

Primera fase: análisis preliminares de la investigación 35

3.1 Dimensión histórico-epistemológica de la solución de las ecuaciones diferenciales ordinarias lineales de primer orden 35

3.1.1 El desarrollo de la ecuación polinómica previo a la EDO lineal de primer orden 35

3.1.2 El objeto matemático función y su relación con la solución de una EDO lineal de primer orden 38

3.1.3 Métodos de solución de una EDO lineal de primer orden y representaciones de su solución 39

3.1.3.1 La solución de ecuaciones diferenciales ordinarias lineales de primer orden y su relación con el cálculo diferencial e integral 41

3.2 Dimensión cognitiva de los estudiantes con respecto a la solución de las ecuaciones diferenciales ordinarias lineales de primer orden 43

3.2.1 Dificultades en el estudio de la función como solución de una EDO lineal de primer orden 44

3.2.2 El uso de las derivadas e integrales al determinar la solución de una EDO lineal de primer orden 46

3.2.3 ¿Esa es la respuesta? ¿Ahí queda? 47

3.2.4 Mediación de la tecnología en la resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias lineales de primer orden 48

3.3 Dimensión didáctica de la solución de las ecuaciones diferenciales ordinarias lineales de primer orden .. 49

3.3.1 La solución de la EDO lineal de primer orden como familia de soluciones 49

3.3.2 El uso exclusivo de procedimientos algorítmicos punto en común de los distintos Cálculos 50

3.3.3 La enseñanza "tradicional" de la resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias lineales de primer orden 51

3.3.4 Libros de texto universitarios de Ecuaciones Diferenciales 54

Capítulo IV 57

Segunda fase: concepción de diseño y análisis a priori 57

4.1 Síntesis de las conclusiones de los análisis preliminares 57

4.1.1 Desde lo histórico-epistemológico 57

4.1.2 Desde lo cognitivo 58

4.1.3 Desde lo didáctico 59

4.2 Hipótesis de análisis 59

4.3 La situación didáctica 60

4.3.1 Actividad 1. Reconocimiento del entorno de MatLab 60

4.3.2 Actividad 2. Resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias lineales de primer orden 61

4.3.3 Actividad 3. Gráficas de la solución de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden 61

4.3.4 Actividad 4. Problemas de aplicación que involucran ecuaciones diferenciales ordinarias lineales de primer orden 61

4.3.5 Análisis a priori 62

Capítulo V 70

Tercera fase: experimentación 70

5.1 Descripción de las sesiones 70

5.2 Situación Didáctica 74

5.2.1 Taller 0 74

5.2.2 Taller 1 76

5.2.3 Taller 2 82

5.2.4 Taller 3 87

5.2.5 Taller 4 93

5.2.6 Taller 5 102

5.2.7 Taller 6 107

Capítulo VI 110

Cuarta fase: análisis a posteriori y evaluación **110**

6.1 Comparación entre los análisis a priori y los encontrados en la experimentación **110**

6.1.1 Del reconocimiento del entorno de MatLab 110

6.1.2 De la resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias lineales de primer orden 111

6.1.3 De las gráficas de la solución de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden 113

6.1.4 De los problemas de aplicación que involucran ecuaciones diferenciales ordinarias lineales de primer orden 115

6.2 Evaluación **117**

Capítulo VII **125**

Resultados **125**

7.1 Caracterización de Niveles de Comprensión **125**

7.1.1 Registros monofuncionales discursivos 125

7.1.2 Registros monofuncionales no discursivos apoyados con MatLab 126

7.1.3 Registros plurifuncionales discursivos 128

7.1.4 Niveles de comprensión 129

7.2 Consideraciones finales **130**

7.3 Conclusiones **131**

7.4 Recomendaciones **132**

7.5 Sugerencias para futuras investigaciones **132**

Bibliografía **134**

ANEXOS **136**

Lista de Figuras

Figura 1. Esquema de las actividades diseñadas 60
Figura 2. Respuesta a la pregunta 5. Taller 0. Est.Ang 74
Figura 3. Respuesta a la pregunta 1. Taller0. Est.Bry 75
Figura 4. Algunas de las respuestas a la pregunta 1, ítem A.Taller 1. 76
Figura 5. Algunas de las respuestas a la pregunta 1, ítem B. Taller 1. 76
Figura 6. Respuesta a la pregunta 4. Taller 1. Est.Ale. 25-02-2015 78
Figura 7. Respuesta a la pregunta 4.3. Taller 1. Est.Ale. 25-02-2015. 79
Figura 8. Respuesta a la pregunta 5. Taller 2. Est.Jhe 82
Figura 9. Respuesta a la pregunta A.3. Taller 2. Est.Jhe. 04-03-2015 82
Figura 10. Respuesta a la pregunta A.3. Taller 2. Est.Bry 83
Figura 11. Respuesta a la pregunta A.1. Taller 2. Est.Ale 83
Figura 12. Respuesta a la pregunta A.1. Taller 2. Est.Jhe. 25-02-2015. 84
Figura 13. Respuesta a la pregunta B.1. Taller 2. Est.Jhe 84
Figura 14. Respuesta a la pregunta B.1. Taller 2. Est.Bry 84
Figura 15. Respuesta a la pregunta B.2. Taller 2. Est.Jhe 85
Figura 16. Respuesta a la pregunta 3. Taller 2. Est.Jhe 87
Figura 17. Algunas respuestas de los estudiantes al ítem D. Parte 1 90
Figura 18. Respuesta a la pregunta 1. Parte 1. Taller 3. Est.Jhe. 11-03-2015. 90
Figura 19. Respuesta a la pregunta 1. Parte 1. Taller 3. Est.Ang. 11-03-2015. 91
Figura 20. Respuesta a la pregunta 3. Parte 1. Taller 3. Est.Jhe 91
Figura 21. Algunas respuestas de los estudiantes a la pregunta 2. Parte 1. Taller 3. 11-03-2015 92
Figura 22. Respuesta a la pregunta 1, ítem A. Taller 4. Est.Ale 93
Figura 23. Respuesta a la pregunta 1, ítem B. Taller 4. Est.Jhe. 94
Figura 24. Respuesta a la pregunta 1, ítem B. Taller 4. Est.Ang 94
Figura 25. Respuesta a la pregunta 1, ítem C. Taller 4. Est.Ang 94
Figura 26. Respuesta a la pregunta 1, ítem C. Taller 4. Est.Ang 95
Figura 27. Respuesta a la pregunta 2, ítem B. Taller 4. Est.Bry 95
Figura 28. Respuesta a la pregunta 2, ítem B. Taller 4. Est.Jhe. 95
Figura 29. Respuesta a la pregunta 2, ítem B. Taller 4. Est.Hei. 95
Figura 30. Respuesta a la pregunta 2, ítem A. Taller 4. Est.Bry. 96
Figura 31. Respuesta a la pregunta 2, ítem A. Taller 4. Est.Bry. 96
Figura 32. Respuesta a la pregunta 2, ítem A. Taller 4. Est.Jhe 97
Figura 33. Respuesta a la pregunta 3. Taller4. Est.Ale 97
Figura 34. Respuesta a la pregunta 3. Taller 4. Est.Ale. 97
Figura 35. Respuesta a la pregunta 3. Taller 4. Est.Jhe 98
Figura 36. Respuesta a la pregunta 3. Taller 4. Est.Jhe 98
Figura 37. Algunas respuestas de los estudiantes a la pregunta 1 del cuestionario. Taller 4 99
Figura 38. Respuesta a la pregunta 1 del cuestionario. Taller 4. Est.Hei 99
Figura 39. Algunas respuestas de los estudiantes a la pregunta 3. Taller 4 100
Figura 40. Respuestas tomadas de algunos trabajos de los estudiantes. Taller 4. 101

Figura 41. Respuesta a la pregunta 1. Taller 4. Est.Ale..... 101
Figura 42. Respuesta a la pregunta 1, ítem A. Taller 4. Est.Jhe.22-04-2015..... 102
Figura 43. Respuesta a la pregunta 1, ítem A. Taller 4. Est.Ale.22-04-2015 102
Figura 44. Respuesta a la pregunta 1. Taller 5. Est.Ale..... 103
Figura 45. Respuesta a la pregunta 2. Taller 5. Est.Bry 104
Figura 46. Respuesta a la pregunta 3. Taller 5. Est.Jhe 104
Figura 47. Respuesta a la pregunta 3. Taller 5. Est.Jhe 105
Figura 48. Respuesta a la pregunta 4. Taller 5. Est.Jhe 105
Figura 49. Respuesta a la pregunta 5. Taller 5. Est.Jhe 105
Figura 50. Respuestas tomadas de algunos trabajos de los estudiantes. Taller 5..... 106
Figura 51. Respuesta a la pregunta 6. Taller 5. Est.Ang..... 107
Figura 52. Respuesta a la pregunta 1. Taller 6. Est.Ale..... 107
Figura 53. Respuesta a la pregunta 1. Taller 6. Est.Ale..... 108
Figura 54. Respuesta a la pregunta 2. Taller 6. Est.Jhe 108
Figura 55. Respuesta a la pregunta 2. Taller 6. Est.Jhe 108
Figura 56. Respuesta a la pregunta 2. Taller 6. Est.Bry 109
Figura 57. Se indican los espacios de trabajo que se utilizarán con mayor frecuencia..... 136
Figura 58. Iconos que se utilizarán y espacio de trabajo en el cual se escribirán los códigos..... 137
Figura 59. Ejemplo de una gráfica arrojada por MatLab 137

Lista de Tablas

Tabla 1. Tipos de registros de representación 27
Tabla 2. Comandos y funciones para la solución de las EDO lineales de primer orden..... 28
Tabla 3. Codificación de los participantes..... 70
Tabla 4. Registros de presentación semiótica..... 71

Introducción

La presente investigación "*Niveles de comprensión de la representación de la familia de soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias lineales de primer orden en una situación didáctica"* se encuentra inscrita en el Programa de Maestría en Educación de la Universidad del Cauca.

La investigación que se realizó constituye un acercamiento a la problemática que plantea la línea de Educación Matemática. Se generó como un intento por estudiar los problemas relacionados con los procesos de enseñanza y de aprendizaje de las matemáticas, en particular de un tema del curso ecuaciones diferenciales que conforma el plan de estudios del programa Ingeniería de Sistemas de una universidad privada de Popayán.

En la investigación fue pertinente examinar algunos aspectos vinculados al proceso de aprendizaje, uno de ellos, en especial, tiene que ver con la comprensión de objetos como la familia de soluciones de una ecuación diferencial ordinaria lineal de primer orden; y así mismo con el proceso de enseñanza al reflexionar sobre la importancia de usar diferentes sistemas de representación que permitan la coordinación de registros y con esto analizar la comprensión integrativa tal como la denomina Duval (1999), en estudiantes que se encuentran cursando estudios de educación superior.

La investigación asume por objetivo general:

Caracterizar niveles de comprensión de la familia de soluciones de ecuaciones diferenciales Ordinarias lineales de primer orden, en una situación didáctica, a partir de la coordinación de registros de representación semiótica por parte de los estudiantes involucrados en el proceso de enseñanza.

Para cumplir con este objetivo, y como parte del proceso de investigación, se diseña y aplica a un grupo de estudiantes de quinto semestre de la Facultad de Ingenierías, una situación didáctica, cuyo diseño se hizo en un ambiente de aprendizaje diferente al sistema de enseñanza tradicional, teniendo como metodología la ingeniería didáctica, propuesta por Artigue (1995). A partir de esta se hizo la respectiva validación de los resultados.

Este documento está organizado en siete capítulos: aspectos generales de la investigación; marco teórico y metodología de la investigación; análisis preliminares de la investigación; concepción de diseño y análisis a priori; experimentación; análisis a posteriori y evaluación; resultados.

En el capítulo I "Aspectos generales de la investigación" incluye algunas ideas respecto a la manera cómo se genera y concibe el problema de investigación. Se resumen los aspectos más importantes de este estudio, de los cuales se obtienen las principales ideas que sustentan el planteamiento del problema de

investigación, en especial, las relacionadas con la necesidad de diseñar e implementar una situación didáctica que sirva para analizar el proceso de aprendizaje de los estudiantes.

De esta forma, el problema se formula como sigue: *¿Qué niveles de comprensión de la familia de soluciones de ecuaciones diferenciales Ordinarias lineales de primer orden se pueden caracterizar, en una situación didáctica, a partir de la coordinación de registros de representación semiótica por parte de los estudiantes involucrados en el proceso de enseñanza?*

En el capítulo II "Marco teórico y metodología de la investigación" se resumen las referencias teóricas que servirán de apoyo al diseño de la situación didáctica, su desarrollo y el posterior análisis de los resultados. Estas son la Teoría de los Registros de Representación Semiótica y la Teoría de las Situaciones Didácticas, igualmente los principales fundamentos de la Ingeniería Didáctica asumida como metodología.

En el capítulo III "Primera Fase: Análisis preliminares de la investigación" se abordan los principales fundamentos teóricos con respecto a la dimensión histórico-epistemológica, cognitiva y didáctica referente a los objetos matemáticos relacionados con la familia de soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias lineales de primer orden. Se resalta dentro de la dimensión histórico-epistemológica la importancia de profundizar en los objetos matemáticos que son requeridos en las definiciones o métodos de resolución; dentro de la dimensión cognitiva las implicaciones que tiene el aprendizaje del tema para los estudiantes y dentro de la dimensión didáctica los factores más relevantes relacionados con las acciones del profesor involucrado en el proceso de enseñanza.

En el capítulo IV "Segunda Fase: Concepción de diseño y análisis a priori" se describen los aspectos sobresalientes que resultaron de los análisis preliminares con respecto a cada una de las dimensiones. A partir de estos, se presenta la situación didáctica: las actividades diseñadas, la programación de las mismas, los análisis a priori con respecto a lo esperado de los estudiantes al momento de interactuar con el medio.

En el Capítulo V: "Tercera Fase: Experimentación". En primer lugar se describen a grandes rasgos los participantes e igualmente las distintas sesiones teniendo en cuenta las actividades realizadas y las fases de la situación didáctica. Además, se presentan los resultados del desarrollo de las actividades.

En el Capítulo VI: "Cuarta fase: Análisis a posteriori y evaluación". Aquí se presenta la comparación entre el análisis a priori y los resultados encontrados en la experimentación, también la evaluación que resultó de estos.

En el Capítulo VII: “Resultados” comprende el cierre de la investigación con la caracterización de los niveles de comprensión y la respectiva propuesta de estos. Se escriben algunas consideraciones, conclusiones y recomendaciones para continuar abordando este tipo de investigaciones. Además, algunas sugerencias para que sean tenidas en cuenta en estudios posteriores.

Capítulo I

Aspectos generales de la investigación

1.1 Presentación de la problemática de investigación

En el aula de clase convergen muchos factores relacionados con los procesos de enseñanza y de aprendizaje. Es el lugar donde se manifiestan las motivaciones de los estudiantes, sus conocimientos previos, las facilidades y dificultades que presentan en el aprendizaje de un tema, y así mismo, donde el profesor pone a prueba su preparación, carisma, metodología, forma de comunicación y estrategias de evaluación.

En este sentido, dado que las matemáticas hacen parte de la estructura curricular de la Educación Básica y Media, lo descrito en el párrafo anterior también se manifiesta dentro de los procesos de enseñanza y de aprendizaje de las matemáticas, una de las áreas tenidas en cuenta en la formación escolar de un estudiante, puesto que, en los *Estándares Básicos de competencias*[1] se afirma que "hace ya varios siglos que la contribución de las matemáticas a los fines de la educación no se pone en duda en ninguna parte del mundo" (p. 47). Contribución que es tenida en cuenta por algunos programas académicos de Educación Superior, en donde la formación en matemáticas también se convierte en uno de los componentes fundamentales de sus currículos académicos, en especial, los programas de ingeniería.

La ingeniería es referenciada por la Asociación Colombiana de Facultades como "la profesión en la cual los conocimientos de las ciencias naturales y matemáticas se adquieren mediante el estudio, la experiencia y la práctica" (Parra, 2010, p. 77). De ahí que programas de pregrado como Ingeniería de Sistemas incluya en su plan de estudios cursos de matemáticas organizados en el área de conocimiento denominada Ciencias Básicas[2]. En esta área se encuentra el curso Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, el cual, debido a su importancia histórica en el desarrollo de las matemáticas y a las aplicaciones en muchos campos de la ingeniería, sigue siendo relevante como objeto de estudio (Salvador & Molero, 2007).

La inclusión del curso en el plan de estudios exige del profesor una planeación que tenga como propósito la enseñanza de diferentes temas, en especial el tema ecuaciones diferenciales ordinarias lineales de primer orden y, en consecuencia, los métodos de resolución mediante la representación de la familia de soluciones , según

[1] Formulados por el Ministerio de Educación Nacional de Colombia.
[2] Forma de organización realizada por una universidad privada de Popayán.

Duval (1993) "sólo por medio de representaciones semióticas es posible una actividad sobre los objetos matemáticos" (p. 98).

En el estudio de las ecuaciones diferenciales ordinarias los estudiantes deben recurrir a las definiciones y métodos para hallar la correspondiente familia de soluciones. Sin embargo, en ocasiones hacen uso exclusivo de la representación algebraica por tener mayor experiencia en el manejo de este tipo de expresiones, es común dentro de la formación escolar usar expresiones algebraicas para estudiar los objetos matemáticos. Al dar prioridad a esta representación, la resolución de las ecuaciones depende considerablemente de las técnicas de derivación e integración. Cuando los estudiantes no recuerdan tales conocimientos, encuentran mayor dificultad para resolverlas. Luego, al resolver una ecuación diferencial, algunos se concentran en la aplicación de métodos algebraicos requeridos, y, en ocasiones, la solución obtenida no tiene mayor relevancia para ellos, puesto que no logran interpretar e significado de su contenido[3].

Lo expuesto se manifiesta, cuando un objeto matemático es requerido en distintos contextos haciendo uso de diferentes representaciones y el alumno no logra diferenciarlas, en cuyo caso la representación y el objeto representado no se diferencian, y por ende no se reconocen que tales representaciones se refieren a un mismo objeto. Esta situación se genera cuando los alumnos conocen otras notaciones, otros sistemas de representación pero no reconocen los objetos que representan ni la relación que existe entre unos y otros, de esta forma no relacionan los conocimientos nuevos a partir de los conocimientos previos, situación que refleja la falta de coordinación entre los diferentes registros de representación semiótica y por ende la usencia de comprensión integrativa.

Contar con diferentes sistemas de representación de un mismo objeto matemático permite desarrollar, según Duval, las actividades cognitivas de formación, tratamiento y conversión. Cada una de estas favorece de diferente forma la comprensión de un objeto matemático dado. En particular, se espera que al trabajar con distintas representaciones de la familia de soluciones de la ecuación diferencial ordinaria (EDO), desarrollen las actividades cognitivas mencionadas dentro de cada registro de representación semiótica y además realicen la coordinación entre diferentes registros. Por lo tanto, esta investigación responde a la pregunta:

[3] Frecuentemente, la constante C no la relacionan con la generalización de una familia de soluciones, sino que la escriben de forma mecánica.

¿Qué niveles de comprensión de la familia de soluciones de ecuaciones diferenciales Ordinarias lineales de primer orden se pueden caracterizar, en una situación didáctica, a partir de la coordinación de registros de representación semiótica por parte de los estudiantes involucrados en el proceso de enseñanza?

Para dar respuesta a la pregunta se tuvo en cuenta lo que afirma Duval sobre asumir el reto de preocuparse no solo por saber cuáles contenidos enseñar sino la forma de introducirlos en clase, analizando las razones estructurales que tienen que ver con los problemas de comprensión y con los cuales se enfrenta la mayoría de los alumnos de distintos niveles de enseñanza.

1.2 Justificación

En los procesos de enseñanza y de aprendizaje de las matemáticas, la relación entre el estudiante y el profesor en la cual este simplemente provee los contenidos e instruye al estudiante quien a su vez captura dichos conceptos y los reproduce tal cual le han sido administrados es la tradicional (Chavarría, 2006).

A nivel de educación superior, esta relación se mantiene en la enseñanza y aprendizaje de las ecuaciones diferenciales, en donde cada clase está determinada por un tiempo específico para abordar un número concreto de temas y para los procesos de evaluación respectivos. Así mismo, la resolución de este tipo de ecuaciones se enfoca en el uso de la representación algebraica de la familia de soluciones de las ecuaciones diferenciales ordinarias lineales de primer orden, lo cual lleva a que los estudiantes identifiquen la familia de soluciones por la representación utilizada, dificultando la diferenciación entre el objeto matemático y su representación. En este sentido Duval (1999) afirma:

> Toda confusión entre el objeto y su representación provoca, en un plazo más o menos amplio, una pérdida en la comprensión. Los conocimientos adquiridos se hacen rápidamente inutilizables por fuera de su contexto de aprendizaje, sea por no recordarlos, o porque permanecen como representaciones "inertes" que no sugieren ninguna transformación productora (pp. 13-14).

Según Duval "aunque nadie niega la existencia de muchas especies de representación, con mucha frecuencia se olvida su importancia para la descripción y para la explicación de los procesos cognitivos" (p. 37). Luego, es necesario recurrir a diferentes representaciones de un mismo objeto, pero esto no es suficiente. Contar con dos o más registros de representación de un objeto matemático no le permite al estudiante diferenciar el objeto de su representación, puesto que como el mismo autor lo afirma "es necesario que un sujeto haya llegado al estadio de la coordinación de representaciones semióticamente heterogéneas, para que pueda discriminar el representante y lo representado, o la representación y el contenido conceptual que esta representación expresa o ilustra" (p. 60). El manejo de diferentes sistemas de representación y por consiguiente la conversión entre unos y otros no es suficiente para obtener lo que Duval denomina una comprensión integrativa. Para esto se deben crear condiciones donde sea posible establecer una coordinación entre los diferentes registros de representación.

En consecuencia, el interés se centra en generar las condiciones que les permitan a los estudiantes llevar a cabo la coordinación de los registros de representación utilizados. Para lograrlo, se analizan las ventajas que ciertos sistema de representación ofrecen en la comprensión de un objeto matemático, en ocasiones, ignoradas por los profesores y, con mayor razón, por los alumnos. Al disponer de diferentes sistemas de representación, los

alumnos tienen la oportunidad de reconocer el objeto desde diferentes miradas, y en particular, de estudiarlo dentro de cada uno de ellos.

De este modo, con el propósito de contribuir en los procesos de enseñanza y de aprendizaje del tema se considera pertinente tener en cuenta el trabajo con los estudiantes y su relación con el objeto matemático a través de una situación didáctica, sin perder de vista los registros de representación y la coordinación de los mismos. Y así, los esfuerzos tanto del profesor como del alumno se concentran en estudiar un mismo objeto dentro de diferentes sistemas de representación para analizar la forma como se pasa de un registro a otro y a partir de esto caracterizar los niveles de comprensión.

1.3 Estado del Arte

La comprensión de los objetos matemáticos dentro de los procesos de enseñanza y de aprendizaje ha sido el interés de muchos autores. La teoría de las Situaciones Didácticas de Brousseau (1998) y la teoría de las representaciones semióticas desarrollada por Duval (1999) ha sido el referente teórico de varias investigaciones. Es el caso de las investigaciones en Educación Matemática centradas en el aprendizaje de las ecuaciones diferenciales ordinarias como el trabajo de Hernández (2009) *Las Ecuaciones Diferenciales ordinarias lineales de primer y segundo orden en el contexto del movimiento uniforme* donde se hace énfasis en la necesidad de cambiar la metodología de enseñanza de los temas del curso Ecuaciones Diferenciales puesto que es común que se centren en los procedimientos que resuelven las ecuaciones pero no se reflexiona en los problemas de aplicación, por lo tanto se realiza esta propuesta de enseñanza de las ecuaciones diferenciales de primer y segundo orden en el contexto del movimiento uniforme. La finalidad de la investigación consistió en tener en cuenta los conocimientos previos de los estudiantes, las representaciones usadas por ellos y sus creencias. Uno de los resultados obtenidos en la investigación es que los estudiantes tienen claro los procedimientos de solución de una ecuación diferencial pero un significado parcial en cuanto a la solución obtenida y aplicada al fenómeno particular tratado.

En la investigación de Morales (2009) *Enfoques y dificultades en la enseñanza de las ecuaciones diferenciales* el propósito es brindar una perspectiva sobre los entornos y enfoques asociados a la enseñanza de las ecuaciones diferenciales y establecer ciertos argumentos sobre la relación entre estos enfoques y las posibles problemáticas relacionadas al aprendizaje de este tema. En la investigación se recurrió al método algebraico, geométrico y métodos numéricos para determinar la solución de las ecuaciones diferenciales planteadas. Uno de los resultados de la investigación consistió en conocer la opinión que tienen los estudiantes sobre el curso de ecuaciones diferenciales, quienes sostuvieron que el curso trataba específicamente de saber aplicar los pasos algebraicos para obtener una respuesta correcta. En la investigación el autor concluye que si se trabajan los tres enfoques cuando se desarrolla el curso existe más oportunidad de conocer cuál es el sentido de estudiar las EDO.

En la investigación de Guerrero (2010) *Dificultades de los estudiantes en la interpretación de las soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias que modelan un problema* se analizan algunas de las dificultades que surgen cuando se interpretan las soluciones de una ecuación diferencial ordinaria (EDO) expresadas de forma gráfica y algebraica. Esta investigación arrojó como resultado que cuando los estudiantes dominaban algunas herramientas algebraicas para resolver una EDO, no las utilizaban para interpretar el comportamiento de las soluciones dentro del registro gráfico. Además, cuando se trabajó con el campo de

direcciones para obtener información sobre las soluciones de la EDO su uso fue sólo local, puesto que centraron su atención en regiones relativamente pequeñas del campo de direcciones. Con la investigación pudieron constatar que existen dificultades por parte de los estudiantes a la hora de interpretar las soluciones de una EDO, tanto cuando se dispone de información gráfica como al expresar algebraicamente lo que se observa gráficamente.

Así mismo, en el trabajo de Ospina (2012) titulado *Las representaciones semióticas en el aprendizaje del concepto de función lineal* muestra el uso del software en la enseñanza del concepto de función matemática, debido a sus diversas aplicaciones especialmente en el cálculo. En esta investigación se hace énfasis en la actividad cognitiva de conversión.

En la tesis doctoral *El papel de los sistemas de representación en la comprensión y modelación de situaciones con Ecuaciones Diferenciales Ordinarias* de Pardo (2013) se afirma que:

> El desconocimiento o aplicación mecánica, aspecto figurativo, de las reglas de correspondencia semiótica en el marco de la teoría de Duval entre el registro de representaciones gráficas y el de la escritura algebraica o soluciones analíticas dificulta la comprensión de las soluciones de las EDO de primer y segundo orden. En consecuencia postulamos el diseño de situaciones didácticas que hagan necesario usar e identificar unidades significativas de cada registro semiótico y sus respectivas relaciones propiciaría una actividad operatoria orientada a la conversión de registros, que resulta indispensable como parte de la comprensión del concepto objeto de estudio (p. 6).

La investigación de Pardo se centra en la actividad cognitiva de conversión, resaltando dicha actividad como indispensable para la comprensión de un objeto matemático.

La investigación de Estrada, Mendoza y Castillo titulada *Representaciones semióticas, una estrategia didáctica para el aprendizaje de Ecuaciones Diferenciales de Primer Orden (EDOPOs)* (2013) tiene como objetivo evaluar los efectos generados al aplicar una propuesta didáctica que involucra distintas representaciones semióticas: gráfico, algebraico, numérico y verbal con apoyo del software geogebra en el aprendizaje de los estudiantes del Área de Ciencias Básicas e Ingenierías de la Universidad Autónoma de Nayarit. Esta investigación aún no se encuentra terminada, hasta este momento se ha realizado el análisis bibliográfico y se está trabajando en el desarrollo de las actividades.

En la investigación de Barbarán y Fernández (2014) *El análisis de errores en la resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias. Una metodología para desarrollar la competencia matemática* se observó que el uso continuado en el aula de una metodología basada en el análisis de errores cuando estudian ecuaciones diferenciales ordinarias mejora el desarrollo de la competencia matemática. Los resultados obtenidos muestran que la metodología basada en el análisis de errores es mejor que la metodología tradicional para el desarrollo de la competencia matemática.

En la investigación *Ecuaciones diferenciales de 1er. orden. Una perspectiva didáctica con geometría dinámica,* Sandoval (s. f.) presenta un bosquejo de la problemática de la enseñanza y aprendizaje de las ecuaciones diferenciales de primer orden, ilustrando las dificultades que se pueden presentar cuando se busca la coordinación de los registros de representación gráfico, numérico y algebraico en una situación tradicional de enseñanza. En esta investigación se diseñaron actividades de exploración en un ambiente de geometría dinámica: Cabri-Géomètre. Aquí se observa que el énfasis radica en la interpretación geométrica de las ecuaciones diferenciales y las familias de soluciones a través de una percepción cinestésica, es decir, se recurre a otros sistemas semióticos proporcionados por el software mencionado, también hace énfasis en la actividad cognitiva de conversión.

En la investigación *Enseñanza–aprendizaje de las ecuaciones diferenciales ordinarias. "Una ingeniería didáctica utilizando la teoría de los registros de representación semiótica y las situaciones didácticas con apoyo del software winplot"* Loya (s. f.) resalta la influencia que ejercen los cambios de registros de representación semiótica a través de Situaciones Didácticas en el aprendizaje de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, este trabajo también centra su interés en que los alumnos se enfrenten a diferentes registros de representación en este caso haciendo uso del software, para que de esta forma diferencien el objeto de su representación y así lo comprendan.

Lo expuesto, evidencia el interés que el estudio de las ecuaciones diferenciales ha despertado en el campo de la educación matemática. Algunas investigaciones se concentran en los procesos de enseñanza y de aprendizaje, dándole importancia a la incorporación de la tecnología en el aula de clase, a los problemas de aplicación al momento de abordar los diferentes temas que lo conforman, entre ellos las ecuaciones diferenciales ordinarias lineales de primer orden, y al uso de una metodología diferente a la del modelo pedagógico tradicional. Así mismo, se establece la teoría de las situaciones didácticas y la teoría de las representaciones semióticas como marcos de referencia que contribuyen a analizar la comprensión de este objeto matemático.

Por su parte, los resultados de la investigación que se presentan en este documento se concentran en la caracterización de niveles de comprensión de las representaciones de la familia de soluciones de las ecuaciones

diferenciales ordinarias lineales de primer orden dentro de una situación didáctica diseñada para que los estudiantes lleven a cabo la coordinación de diferentes registros de representación semiótica teniendo en cuenta la comprensión tal como la plantea Duval.

1.4 Objetivos

1.4.1 Objetivo General

- Caracterizar niveles de comprensión de la familia de soluciones de ecuaciones diferenciales Ordinarias lineales de primer orden, en una situación didáctica, a partir de la coordinación de registros de representación semiótica por parte de los estudiantes involucrados en el proceso de enseñanza.

1.4.2 Objetivos Específicos

- Identificar las unidades significantes dentro de los registros de la familia de soluciones de ecuaciones diferenciales Ordinarias lineales de primer orden usados por los estudiantes.
- Diseñar una situación didáctica que permita identificar niveles de comprensión por parte de los estudiantes a partir de unidades significantes dentro del registro de representación utilizado en la solución de ecuaciones diferenciales ordinarias lineales de primer orden.
- Analizar la coordinación en los distintos registros de representación utilizados por los estudiantes.

Capítulo II

Marco teórico y metodología de la investigación

La comprensión de los objetos matemáticos es fundamental dentro del campo de la Educación Matemática. Algunos autores han centrado su interés en este aspecto creando teorías que han servido de punto de referencia para muchas investigaciones. Entre estos autores se encuentran Raymond Duval con la Teoría de los Registros de Representación Semiótica (1999) y Guy Brousseau con la Teoría de las Situaciones Didácticas (1998).

Esta investigación de micro-ingeniería asume las teorías nombradas como marco de referencia, así mismo tiene en cuenta de manera local la complejidad de los fenómenos de clase, usando como metodología la Ingeniería didáctica de Michelle Artigue (1995)

2.1 Teoría de los Registros de Representación Semiótica

Para Duval es claro que "no es posible estudiar los fenómenos relativos al conocimiento sin recurrir a la noción de representación" (2004, pág. 25). En particular, el aprendizaje de las matemáticas constituye un campo de estudio privilegiado para el análisis de las actividades cognitivas ya que un objeto matemático no se puede conocer sino a través de sus representaciones. Las *representaciones semióticas* son entendidas como las producciones constituidas por el empleo de signos, es decir, el medio del cual dispone un individuo para exteriorizar sus *representaciones mentales*. Estas últimas son tomadas como el conjunto de imágenes y de concepciones que dicho individuo tiene sobre un objeto, en particular, el objeto matemático, o sea, los números, las funciones, las rectas, etc.

Las representaciones semióticas y las representaciones mentales no pueden oponerse como dominios diferentes, surgiendo lo que se denomina *semiosis y noesis*. La semiosis es la producción de una representación semiótica, mientras que la noesis son los actos cognitivos como la aprehensión de un objeto. La semiosis implica no sólo una variedad de sistemas semióticos sino además su correspondencia. Los sistemas semióticos deben permitir el desarrollo de las tres actividades cognitivas inherentes a toda representación: la formación, la conversión y el tratamiento.

La *formación* consiste en "recurrir a un (os) signo (os) para actualizar o para sustituir la visión de un objeto" (p. 41). Es decir, recurrir a una selección en el conjunto de los caracteres y las determinaciones, por medio de los cuales, permitirían constituir lo que se desea representar.

El *tratamiento* es "la transformación de una representación (inicial) en otra representación (terminal), respecto a una cuestión, a un problema o a una necesidad" (p. 42). Al realizarse, es posible que se conserve todo el contenido de la representación inicial, o bien una parte de dicho contenido. Las acciones de tratamiento se llevan a cabo dentro del mismo registro de representación o sistema.

La *conversión* es "la transformación de la representación de un objeto, de una situación o de una información dada en un registro, en una representación de este mismo objeto, esta misma situación o de la misma información en otro registro" (p. 44). Consiste en una transformación externa al registro de la representación de partida. Por tal motivo, puede darse el caso de que la representación obtenida cubra parcialmente el contenido de la representación de partida.

Los sistemas semióticos que desarrollen estas tres actividades cognitivas fundamentales se denominan *registros de representación semiótica*. La relación entre semiosis y noesis se da solamente en este tipo de sistemas semióticos. Así mismo, en los registros de representación se tienen presentes las *unidades significantes*, que pueden ser entendidas como las variaciones posibles dentro del mismo registro, teniendo en cuenta que "la discriminación de las unidades significantes propias a cada registro, debe ser el objeto de un aprendizaje específico" (Duval, 1999, p. 73)

2.1.1 Tipos de registros utilizados en matemáticas

Se puede decir que en matemáticas se movilizan cuatro tipos de registros de representación. De una parte, se encuentran los registros discursivos y los registros no discursivos. Los primeros "permiten describir, inferir, razonar, calcular, mientras que los registros no discursivos permiten visualizar lo que nunca es dado de manera visible" (Duval, 2004, pág. 51). De otra parte, se tienen los registros plurifuncionales y los registros monofuncionales. Los plurifuncionales "son registros que se utilizan en todos los dominios de la vida cultural y social", son conocidos como registros verbales o de lengua natural; en este tipo de registros los tratamientos no son algoritmizables. Los registros monofuncionales, por el contrario, permiten desarrollar algoritmos y están especializados en un solo tratamiento.

Duval afirma que "todos los alumnos utilizan espontáneamente lo registros plurifuncionales antes de la enseñanza de las matemáticas y por fuera de ellas, y aprenden registros monofuncionales con las matemáticas" (2004, pág. 51). Sin embargo, los profesores de matemáticas privilegian los registros monofuncionales, puesto que estos permiten desarrollar algoritmos y por ende procedimientos.

Tabla 1. Tipos de registros de representación

	Representación discursiva	Representación no discursiva
Registros plurifuncionales	Lengua natural	Figuras geométricas
Registros monofuncionales	Sistemas de escritura	Grafos cartesianos

Las regiones sombreadas indican los registros que se utilizaron en la presente investigación.

2.1.2 Transformación de representaciones semióticas

La transformación de las representaciones semióticas se puede dar de dos formas: por tratamiento o por conversión. Por tratamiento existen las algorítmicas (registros monofuncionales) y no algorítmicas (registros plurifuncionales). Por conversión de un registro a otro se puede dar siendo los dos registros plurifuncionales, los dos monofuncionales o siendo uno plurifuncional y el otro monofuncional. Para Duval "las dificultades más importantes y las más decisivas de cambio de registro no se dan entre dos registros de tipo monofuncional sino entre un registro de tipo monofuncional y uno de tipo plurifuncional" (2004, p. 53).

Para analizar la conversión entre dos representaciones del mismo objeto matemático en diferente registro, en particular la familia de soluciones de una ecuación diferencial de primer orden, se tienen en cuenta los siguientes criterios:

1. La posibilidad de una correspondencia semántica entre los elementos significantes: a cada unidad significante simple de una de las representaciones se puede asociar una unidad significante elemental de la otra representación.
2. La univocidad semántica terminal: a cada unidad significante elemental de la representación de salida, no le corresponde más que una única significante elemental en el registro de la representación de llegada.
3. El tercer criterio es relativo a la organización de las unidades significantes. Las organizaciones respectivas de las unidades significantes de las dos representaciones comparadas, conduce a que las unidades en correspondencia semántica sean aprehendidas en el mismo orden en las dos representaciones. Este criterio de correspondencia en el orden del arreglo de las unidades que componen cada una de las dos representaciones es pertinente solo cuando éstas tienen el mismo número de dimensiones.

2.1.3 Códigos de MatLab

El uso de las tecnologías dentro del aula de clase como recurso didáctico es una realidad. Por tal motivo, en muchas instituciones de educación superior se ha incorporado softwares de aplicación como MatLab. Esto hace que la enseñanza de un tema no dependa únicamente del profesor, pues, el estudiante a través de la manipulación directa de las líneas de código y comandos propios del software puede lograr ciertos resultados, como por ejemplo la solución de diferentes ecuaciones bien sean polinómicas o diferenciales lineales de primer orden, y no solo eso sino también obtener las gráficas de las funciones que representan.

Según Jímenez (s.f) "el uso de MatLab como un recurso didáctico de apoyo en la solución de problemas, propicia y despierta el interés por la parte algorítmica y analítica que contiene los Métodos Numéricos" (p. 2). Este autor también resalta que no consiste en darle un estatus al software como garantía de eficacia pedagógica, pero afirma que resulta conveniente tenerlos en cuenta al momento de abordar un tema en el aula de clase.

MatLab, al ser un software matemático, tiene su propio lenguaje, sin su dominio respectivo es prácticamente imposible generar buenos resultados. En esta investigación se compartieron los códigos necesarios que le permitieron al estudiante resolver con éxito una ecuación diferencial y, posteriormente, realizar las gráficas de la familia de soluciones de las distintas ecuaciones.

La Tabla 2 muestra los comandos y funciones de MatLab empleadas en las diferentes actividades que conformaron la situación didáctica que se diseñó y puso en acto en la ejecución de esta investigación:

Tabla 2. Comandos y funciones para la solución de las EDO lineales de primer orden

Función	Descripción
hold off	Cierra la ventana.
axis([a b c d])	Rango para los ejes de la gráfica, en donde a, b especifican el intervalo a graficar en el eje x y c, d especifican el intervalo a graficar en el eje y.
hold on	Mantiene una sola ventana para todas las gráficas.

x=a:c:b	Valores que toma la variable x desde a hasta b, a pasos dados por c.
inline('f(x)','x');	Convierte una cadena de caracteres en una función, en donde f(x) es la función a convertir y "x" es la variable de dicha función.
plot(x,f(x),'r')	La función plot grafica la función dada, primero debe ir la variable independiente "x" y luego la variable dependiente "f(x)". Además, "r" es el color de la gráfica generada.
xlabel('Eje x') ; ylabel('Eje y')	Escribe el título al eje x; Escribe el título al eje y.
grid on	Genera la cuadrícula de la gráfica.
close all; clear all;	Comandos que cierran todos los archivos que fueron utilizados y además limpia las variables para dar inicio a cada EDO.
[y] = dsolve('Dy = x*y', 'y(0) = C','x');	La función desolve resuelve la EDO lineal de primer orden.
vectorize(y)	La función vectorize reemplaza los operadores *, ^ y / por .*, .^ y ./ respectivamente.
yv = inline(vectorize(y), 'x', 'C')	La función inline transforma la solución en una función que depende del tiempo y la condición inicial para ser evaluada.
plot(x, yv(x, C))	La función plot grafica una función vectorizada.
p = [1 -1 -7 1 6];	Forma de escribir un vector, en este caso cada elemento es un coeficiente de un polinomio de grado.
roots(p)	Función que encuentra las raíces (soluciones) de la

ecuación.

2.1.4 La comprensión entendida desde la Teoría de los Registros de Representación Semiótica

La comprensión de los objetos matemáticos por parte de los estudiantes es uno de los principales objetivos de los maestros. Infortunadamente, todo lo relacionado con las representaciones mentales de los estudiantes, es decir, con el conjunto de imágenes y concepciones que pueden tener acerca de un objeto matemático, no se pueden revisar tal como se haría con una tarea o dentro de la evaluación misma, por tal motivo, es necesario recurrir a las representaciones externas que los estudiantes realizan. Además, según Duval (1999), la función de tratamiento sólo la pueden llevar a cabo las representaciones semióticas y no las representaciones mentales, por ende la utilización de representaciones semióticas es primordial para la actividad matemática.

Dentro de los procesos de enseñanza y de aprendizaje, los estudiantes casi siempre se dedican a efectuar operaciones dentro de un único registro, es decir, el estudiante es capaz de realizar tratamientos dentro de un mismo registro; aunque esto no excluye el desarrollo de alguna forma de comprensión en ellos, permite ser evaluada fácilmente y a corto término puede ser satisfactoria, "una comprensión mono-registro es una comprensión que no permite ninguna transferencia. Solo una comprensión integrativa, es decir, una comprensión fundada en la coordinación de los registros, da tales posibilidades de transferencia" (p. 72). En adelante, se denominará compresión integrativa a la comprensión de las representaciones semióticas que procede de una coordinación de registros, puesto que, según el autor, cuando no se lleva cabo la coordinación entre diferentes registros, la comprensión conceptual de algún tema tarde o temprano podría converger a un fracaso.

El autor entiende por registros de representación semiótica a:

> Los registros que constituyen los grados de libertad de los que puede disponer un sujeto para objetivarse él mismo una idea aún confusa, un sentimiento latente, para explorar las informaciones o, simplemente, para comunicarlas a un interlocutor, por ejemplo, el lenguaje natural, las lenguas simbólicas, los gráficos, las figuras geométricas (p. 29).

Además, un registro de representación semiótica debe permitir llevar a cabo las actividades cognitivas de formación, tratamiento y conversión del objeto. Se sabe por definición, que no es posible el despliegue de la

actividad cognitiva de conversión sin que ocurra también la de tratamiento y la de formación; y no puede haber actividad cognitiva de tratamiento sin que haya habido una de formación.

En conclusión, para efectos de esta investigación se asumió la comprensión de un objeto matemático bajo la óptica de la coordinación de registros de representación, puesto que, como se afirmó, el acceso a los objetos matemáticos se hace necesariamente a través de las representaciones semióticas, y allí es preciso tener en cuenta que "no puede haber comprensión en matemáticas si no se distingue un objeto de su representación" (Duval, 1999, p. 13), lo cual se logra cuando los estudiantes realizan tratamientos dentro de cada registro y así mismo diferencian dos registros de un mismo objeto matemático, ya que "es necesario que un sujeto haya llegado al estadio la coordinación de representaciones semióticamente heterogéneas, para que pueda discriminar el representante y lo representado, o la representación y el contenido conceptual que esta representación expresa o ilustra" (p. 60).

Para la caracterización de los niveles de comprensión se tuvo en cuenta esta perspectiva, considerando que la coordinación de registros de representación semiótica contribuye en la comprensión de objetos matemáticos, de relaciones y procesos. Tal como Duval afirma:

> El análisis del desarrollo de los conocimientos y de los obstáculos encontrados en los aprendizajes fundamentales relativos al razonamiento, a la comprensión de textos y a la adquisición de tratamientos lógicos y matemáticos, enfrenta tres fenómenos necesarios:
>
> 1. Diversificación de los registros de representación semiótica.
> 2. Diferenciación entre representante y representado o, al menos, entre forma y contenido de una representación semiótica.
> 3. Coordinación entre los diferentes registros de representación semiótica disponibles.

Por tal motivo, en esta investigación los estudiantes trabajaron el objeto matemático a través de, por lo menos, dos registros de representación semiótica diferentes que les permitiera acceder al objeto representado, con el objetivo de realizar tratamientos dentro de cada uno y convertir de un registro a otro. Teniendo presente que no es "sólo con criterios de aciertos (obtención de la respuesta buena) que se deben valorar las adquisiciones de los estudiantes, sino con criterios de "madurez": rapidez de tratamiento, espontaneidad de las conversiones, potencia de las transferencias" (pp. 67-68).

2.2 Teoría de las Situaciones Didácticas

Para Brousseau (1998) una situación es didáctica cuando un individuo (generalmente el profesor) tiene la intención de enseñar a otro individuo (generalmente el alumno) un saber matemático dado explícitamente y debe darse en un medio.

2.2.1 Medio

El medio, según Brousseau, se entiende como el conjunto de condiciones en las cuales vive y se desarrolla un individuo humano. Este juega un papel importante en la determinación de los conocimientos que el sujeto debe desarrollar para controlar una situación de acción.

> El medio, sea físico, social, cultural u otro juega un papel en la utilización y el aprendizaje de los conocimientos por el enseñante o por el alumno, se le solicite o no en la relación didáctica. (...). La teoría de situaciones no toma como objeto "medio" el universo en su conjunto: esta ambición holística absoluta sería evidentemente condenada de antemano. Modeliza solamente el entorno específico de un saber o de uno de sus aspectos. Pero esta modelización es necesaria porque los conocimientos de los alumnos y de los profesores funcionan manifiestamente de forma diferente de los saberes sabios correspondientes (Brousseau, 1998)

2.2.2 Situación didáctica

Brousseau (1986) define una situación didáctica como "un conjunto de relaciones establecidas entre un grupo de alumnos, el medio y un sistema educativo (representado por el profesor) con la finalidad de lograr que estos alumnos se apropien de un saber constituido (p. 13).

2.2.3 Situación a-didáctica

Al respecto Brousseau (2007) afirma:

> Concepciones actuales de la enseñanza van a exigir al maestro que provoque en el alumno, por medio de los problemas, las adaptaciones deseadas. Esos problemas deben lograr que el alumno pueda aceptarlos, y que por su propio movimiento, actué, hable, reflexione y evolucione. Entre el momento en que el alumno acepta el problema como suyo y aquel en que él produce su respuesta, el profesor se rehúsa a intervenir en calidad de oferente de los conocimientos que quiere ver aparecer (p. 31).

2.2.4 Fases en una situación didáctica

Brousseau tiene en cuenta cuatro fases dentro de una situación didáctica, describiéndolas así:

- *Situaciones de acción,* la enseñanza de las matemáticas debe permitir al alumno hacerse cargo de un problema, emitir hipótesis, elaborar procedimientos, ponerlos en práctica, y según los efectos producidos adaptarlos, rechazarlos o hacerlos evolucionar, automatizar los que son más solicitados y ejercer un control sobre los resultados obtenidos
- *Situaciones de formulación,* una buena reproducción por parte del alumno de la actividad matemática exige que este intervenga en ella, lo cual significa que formula enunciados y prueba proposiciones, que construye modelos, lenguajes, conceptos y teorías y los pone a prueba e intercambia con otros. Reconoce los que están conformes con la actividad matemática y toma los que le son útiles para continuarla
- *Situaciones de validación,* el alumno debe poder validar la situación, es decir, la propia situación tiene que informar al alumno sobre si lo ha hecho bien o no, si su solución es buena, sin tener que recurrir a la ayuda del maestro.
- *Situaciones de institucionalización,* tras las anteriores situaciones, debe haber un reconocimiento de lo aprendido. El maestro debe poner el punto de claridad a la intención didáctica de la actividad destinada a establecer convenciones sociales.

A través de la situación didáctica que tiene como *medio* la situación problema y sigue las fases descritas se busca que los estudiantes, al examinar las soluciones de la ecuaciones diferenciales lineales de primer orden, estén en condiciones de:

1. *representarlas* en un registro dado.
2. *tratar* tales representaciones al interior de un mismo registro.
3. *convertir* tales representaciones de un registro a otro.

Así mismo, de coordinar diferentes registros de representación, en donde cada registro considera las condiciones enumeradas anteriormente.

2.3 La Ingeniería Didáctica como metodología

La ingeniería didáctica propuesta por Artigue (1995) se caracteriza por ser un esquema experimental el cual se basa en las "realizaciones didácticas" en clase. En esta se distinguen los niveles de Micro-ingeniería y de Macro-ingeniería. Este proceso se delimita en cuatro fases:

1. *Análisis preliminar:* en esta fase se tiene en cuenta una serie de análisis como por ejemplo el análisis de la enseñanza tradicional y sus efectos, análisis de las concepciones de los estudiantes, dificultades y obstáculos que determinan su evolución, entre otros. Así mismo, las restricciones que se efectúan distinguiendo tres dimensiones: la dimensión *histórico-epistemológica* referido al saber en juego, la dimensión *cognitiva* referida a las características cognitivas del público al cual se dirige la enseñanza y la dimensión *didáctica* referida al funcionamiento del sistema de enseñanza.

2. *Concepción de diseño y análisis a priori de las situaciones didácticas de la ingeniería:* en este momento se analizan las variables inherentes al problema estudiado y que no se consideran dentro de las restricciones, llamadas variables de comando, es decir, *las variables macro-didácticas o globales y* las *variables micro-didácticas o locales.* Ambas variables se relacionan puesto que se tiene en cuenta lo general dentro de la invención, organización y el devenir pero referido a las situaciones locales.

En esta fase el profesor observa como el estudiante se encuentra la mayor parte del tiempo interactuando con el medio, es decir surgen las "relaciones estudiante/medio con respecto al saber".

Los análisis a priori se conciben como un *análisis de control de significado*, es decir, sirve de referencia a esta metodología, pretende constituirse en una teoría de control de las relaciones entre el significado y las situaciones. De ahí que su objetivo consiste en escoger las situaciones determinadas que permitan controlar el comportamiento de los estudiantes y sus significados.

3. *Experimentación:* observaciones realizadas de las secuencias de enseñanza, de las producciones de los estudiantes en clase y fuera de ella.
4. *Análisis a posteriori y evaluación:* en la confrontación de los dos análisis, el a-priori y a-posteriori, se fundamenta en esencia la validación de las hipótesis formuladas en la investigación. Sin embargo, las hipótesis en los trabajos de ingeniería en muchas ocasiones no necesariamente se involucran en un verdadero proceso de validación, puesto que los procesos de aprendizaje que ella involucra son a largo plazo.

Capítulo III

Primera fase: análisis preliminares de la investigación

En matemáticas, en algunas ocasiones, si se desea entender la definición de un objeto en particular es necesario el conocimiento y dominio de otros, este es el caso del objeto ecuaciones diferenciales ordinarias lineales de primer orden, el cual involucra otros objetos como el de función, ecuación, derivadas e integrales que son necesarios tanto para comprender su definición como en el tratamiento del mismo, es decir, cuando se recurre a procedimientos para su resolución. Por tal motivo, en este capítulo se hace un análisis del objeto matemático mencionado bajo tres dimensiones: histórico-epistemológica, cognitiva y didáctica.

3.1 Dimensión histórico-epistemológica de la solución de las ecuaciones diferenciales ordinarias lineales de primer orden

El proceso de resolución de una ecuación diferencial ordinaria lineal de primer orden requiere de otros objetos matemáticos. Cada uno de ellos tiene su propio momento en el desarrollo de las matemáticas, su aparición no fue fortuita y la relación entre ellos es tan estrecha que a veces se desconoce que del surgimiento y desarrollo de un objeto dependió la aparición de otros.

3.1.1 El desarrollo de la ecuación polinómica previo a la EDO lineal de primer orden

La rama de las matemáticas que tiene como papel determinante el estudio de las ecuaciones polinómicas es el Álgebra. Según Ortega (s.f) su progreso ha tomado el tiempo necesario, dividiéndose en álgebra retórica, álgebra sincopada y álgebra simbólica.

Para este autor, cada una está descrita de la siguiente forma:

> a) álgebra retórica: no existen abreviaturas, ni símbolos especiales. Época paleobabilónica entre 2000 y 1600 a. n. e.
>
> b) álgebra sincopada: este término lo ideó Nesselman en 1842. Se usan ya algunos términos técnicos y abreviaturas. Ejemplo la Aritmética de Diofanto. Siglo III.
>
> c) álgebra simbólica: es ya un álgebra mucho más parecida a la que usamos hoy. Con símbolos especiales, incógnitas, etc. Siglos XVI y XVII, Vièta (p. 2).

Según él, los babilonios resolvieron ecuaciones cuadráticas mediante fórmulas, pero el desconocimiento de los números negativos los llevó a no tener en cuenta las raíces negativas de las ecuaciones y el

desconocimiento del cero les generó problemas al interpretar las cantidades. Por su parte, los egipcios trabajaron problemas con una incógnita, mientras que los chinos se preocuparon por problemas económicos y administrativos como por ejemplo la medición de campos, construcción de canales y cálculo de impuestos. Estos últimos reconocieron los números negativos gracias al uso de un procedimiento algorítmico para resolver sistemas lineales, similar al método de Gauss conocido hoy en día. Además, el desarrollo del álgebra en esta época dio lugar a la utilización del cero. Los indios al igual que las tres civilizaciones anteriores no tenían ningún tipo de formalismo teórico; sobre su actividad matemática se sabe que:

> En los siglos "VIII y VII a.C" los indicios matemáticos se referían a aplicaciones geométricas para la construcción de edificios religiosos. Entre los siglos "V-XII d.C." sus principales características se refieren al predominio de las reglas del cálculo, correcta utilización de los números negativos y la introducción del cero; además de "profundizar en la obtención de reglas de resolución de ecuaciones lineales y cuadráticas, en las cuales las raíces negativas eran interpretadas como deudas" (p. 5).

Por otro lado, el signo de igualdad aparece en el año 1557, debido a los trabajos de Recorde, mientras que en 1737 Descartes aporta a la escritura de potencias. Además, se puede ver que desde siglos XVI y XVII, se viene desarrollando el álgebra semejante a la que se conoce en la actualidad.

De ahí que el desarrollo de las fórmulas, el uso del cero, la resolución de problemas con una incógnita, la aparición del signo de igualdad, la escritura de potencias y el desarrollo de reglas usadas en la resolución de ecuaciones polinómicas fueron algunos de los fundamentos necesarios para que en el siglo XVII apareciera el Cálculo.

Una de las definiciones de ecuación polinómica es la que sigue:

> Una ecuación polinómica es aquella que se puede expresar de la siguiente forma general:
>
> $$a_0 + a_1x^1 + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_nx^n = 0$$
>
> Donde $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ son coeficientes numéricos cualesquiera pertenecientes al dominio de los reales; n es un número entero el cual indica el grado de la ecuación, siempre y cuando $n > 0, a_n \neq 0$; finalmente las raíces del polinomio son los valores que puede tomar x, tal que al reemplazar en la ecuación polinómica se obtiene $0 = 0$ (Gustin & Avirama, 2014, p. 31).

Las ecuaciones diferenciales, a diferencia de las ecuaciones polinómicas, al contener derivadas requirieron de un estudio específico. Nápoles y Negrón (2002) resaltan un suceso determinante en la historia de las ecuaciones diferenciales cuando Newton le comunica a Leibniz el siguiente anagrama: $6a\ cc\ d\ ae\ 13e\ ff\ 7i\ el\ 9n\ 4o\ 4q\ rr\ 4s\ 9t\ 12\ v\ x,$ el cual en latín quiere decir "Data aequetione quotcuntque fluentes quantitaes involvente fluxiones invenire et viceversa" (p. 36), que en español significa, "Dada una ecuación con cantidades fluentes, determinar las fluxiones y viceversa" (p. 36), en donde por "fluentes" se refiere a cada una de las cantidades variables $x, y, \ldots$ y por "fluxiones" a sus respectivas velocidades $\dot{x}, \dot{y}, \ldots$, puesto que "Newton concibe las cantidades matemáticas como el movimiento continuo de un punto que traza una curva" (Lozano, 2011, p. 21). Según los autores anteriormente mencionados, fue Newton quien al profundizar en esta teoría dio la primera clasificación de las ecuaciones diferenciales. El término aequatio differentialis, "fue primeramente usado por Leibniz (en un sentido bastante restringido) en 1676 para denotar una relación entre las diferenciales dx y dy y dos variables x e y" (Nápoles & Negrón, 2011, p. 33). Esta forma de escribir dicha relación se ha mantenido hasta la actualidad, conocida como "notación de Leibniz".

Lo anterior hace parte del surgimiento de las ecuaciones diferenciales; el progreso en el estudio de las mismas, ha permitido que actualmente, una ecuación diferencial se defina así:

> Se dice que una ecuación que contiene las derivadas de una o más variables dependientes con respecto a una o más variables independientes es una **ecuación diferencial (ED)**.
>
> Si una ecuación contiene sólo derivadas ordinarias de una o más variables dependientes con respecto a una sola variable independiente se dice que es una **ecuación diferencial ordinaria (EDO).**
>
> El **orden de una ecuación diferencial** es el orden de la derivada mayor en la ecuación. (Zill, 2006, pp. 4-5)[4]

Teniendo presente que por variable dependiente se refiere a la función a determinar y por variable independiente a las variables en las que la función está indicada, se puede plantear que una ecuación diferencial de la forma $a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x)(1)$ es una ecuación diferencial ordinaria de primer orden, en donde la variable dependiente es y y la independiente es x. Además, la ecuación (1) es una ecuación lineal en la variable dependiente y, puesto que según Zill (2006), dos propiedades características para que una EDO sea lineal son:

[4] Los términos se resaltan en negrilla tal como aparece en el libro.

1. La variable dependiente y y todas sus derivadas son de primer grado, es decir, la potencia de cada término en que interviene y es 1.
2. Los coeficientes de y y sus derivadas dependen sólo de la variable independiente x.

Luego, como la ecuación (1) cumple estas dos propiedades, termina siendo una EDO lineal de primer orden. Con esto se tiene una aproximación a su solución, objeto de interés de esta investigación.

3.1.2 El objeto matemático función y su relación con la solución de una EDO lineal de primer orden

El término función es considerado por muchos autores el más importante en matemáticas (Ospina, 2012). La evolución en la construcción de este objeto contempla tres periodos: Época Antigua, Edad Media, y Periodo Moderno en los que se destacan algunos momentos por los que la matemática occidental ha tenido que pasar (Quintero & Cadavid, 2009).

Para Quintero y Cadavid en la época antigua se encuentran dos periodos. El primer periodo denominado prehélenico se caracteriza porque las cantidades se describen verbal o gráficamente. En este periodo el conteo implica correspondencia, además existe la noción de función en el desarrollo del concepto de número y en el desarrollo de las cuatro operaciones. El siguiente periodo es el Helénico (500ac-500dc) caracterizado por desarrollar problemas con la noción de función implícita. Durante este periodo se construyeron las tablas de acordes y senos; se realizaron cálculos de longitudes, áreas y volúmenes, fracciones, cuerdas de un círculo; y se trabajaron magnitudes geométricas variables y en especial, la trigonometría.

La Edad Media (476-1453) se caracteriza por hacer uso de la representación gráfico-geométrica; estudiaron los fenómenos naturales como: calor, luz, color, movimiento; llevaron a cabo descripciones verbales y gráficas; se caracterizó por no usar fórmulas.

El período moderno sobresale por la unión entre álgebra y geometría (Fermat, Descartes), el surgimiento de la extensión del concepto de número (Bombelli, Stifel) y la aparición del algebra simbólica (Vieta, Descartes). Además, se profundiza en el estudio del movimiento en la ciencia y se proponen explicaciones de fenómenos naturales (Kepler, Galileo). Se desarrolla la función en forma analítica y la dependencia entre variables Descartes. Aparecen letras como variables (Vieta) y los números en gráficas. Surgen las proporciones (pp. 5-6).

El objeto función desde la antigüedad ha servido para estudiar diferentes situaciones, pues como afirma Ospina (2012) “este concepto permite modelar situaciones del mundo real, en las cuales se presenta la relación

entre variables" (p. 10). Al describir de forma aproximada un fenómeno o evento, se ha recurrido a ella en diferentes áreas de la ciencia.

Según Napoles y Negrón (2002), el progreso en la construcción del objeto ecuación diferencial dependió notablemente de la época, puesto que en el siglo XVII, época de Newton y Leibniz, el concepto de función se encontraba restringido a la idea de curva geométrica; por tanto, los problemas todavía eran abordados con una visión desde la geometría euclideana. Para construir la definición de solución de una ecuación diferencial fue necesario avanzar primero en el desarrollo de la definición de función. Goursat, citado por Zúñiga (2009), en 1923 dio la definición de función que aparece en la mayoría de los libros de texto de hoy en día, "se dice que y es una función de x si a cada valor de x le corresponde un (único) valor de y. Esta correspondencia se indica mediante la ecuación $y = f(x)$" (p. 30).

El objeto matemático función tiene una estrecha relación con las ecuaciones diferenciales puesto que hace parte de la definición de solución de una ecuación diferencial, "cuando **una función $\boldsymbol{\phi}$**, definida en **algún** intervalo I, se sustituye en una **ecuación diferencial** y transforma esa **ecuación** en una identidad, se **dice** que es una **solución** de **la ecuación** en el intervalo (Zill, 2006, p. 5). Definición que se cumple para las ecuaciones diferenciales ordinarias lineales de primer orden, puesto que estas últimas son ecuaciones diferenciales con un tipo particular (ordinarias), un orden específico (primer orden) y la característica de ser lineales.

Las ecuaciones diferenciales ordinarias lineales de primer orden se han relacionado con diversas aplicaciones de las ciencias físicas y químicas e ingeniería, resaltando la importancia de su solución, debido a que para resolver los problemas planteados dentro de estas disciplinas se requiere determinar la función que satisface la ecuación que contiene sus derivadas, sirviendo como modelo matemático (Molero, Salvador, Menarguez & Garmendia, p. 368).

3.1.3 Métodos de solución de una EDO lineal de primer orden y representaciones de su solución

Ciertas ecuaciones diferenciales ordinarias lineales de primer orden han surgido por los esfuerzos de los científicos que han dedicado su tiempo en plantearlas con el objetivo de resolver un problema específico, este es el caso de la ecuación diferencial $\frac{dT}{dt} = k(T - T_m)$ que aparece en la Ley de Newton del enfriamiento, y en general aquellas ecuaciones diferenciales relacionadas con problemas que tienen que ver con razón de cambio y derivadas. Sin embargo, una vez se determina la solución, el trabajo no termina puesto que se continúa en el estudio de sus propiedades. A esta búsqueda se le denomina método analítico, cuyo propósito se centra en encontrar la solución explícita, es decir aquella "solución en la que la variable dependiente se expresa solamente

en términos de la variable independiente y constantes" (Zill, 2006, p. 6), en caso contrario se denomina implícita. En ocasiones determinar la solución explícita se toma casi imposible.

Uno de los métodos utilizados para determinar la solución de forma algebraica consiste en el método de variables separables. No todas las ecuaciones diferenciales ordinarias lineales de primer orden se pueden resolver haciendo uso de este método; sólo es posible cuando tienen la forma $\frac{dy}{dx} = g(x)h(y)$.

Cuando una ecuación diferencial no se puede resolver a través de los métodos analíticos, se busca aproximar de alguna manera los valores de la solución desconocida, lo que se distingue como método numérico. A partir de estas ecuaciones diferenciales se construyen algoritmos con aproximaciones muy precisas que permiten acercarse a la solución, a través de las curvas solución o usando los campos de direcciones. Según Zill (2006),

> Si se evalúa f de forma sistemática en una red de puntos rectangular en el plano xy y se traza un elemento lineal en cada punto (x, y) de la red con pendiente $f(x, y)$, entonces la colección de estos elementos lineales se llama **campo de dirección** o **campo de pendientes** de la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ (p. 40).

Lo anterior permite que en ocasiones se llegue a una expresión algebraica aproximada de la solución. Es conocido el método de Euler o el uso de la recta tangente, aunque en ambos métodos no se resuelve directamente la ecuación diferencial.

Así mismo, una EDO lineal de primer orden se puede resolver con software como MatLab, Mathematica y Maple que producen la solución de forma algebraica, a través de los comandos dsolve y además las correspondientes gráficas o campos de direcciones, ahorrando tiempo que puede ser usado en el análisis de la representación.

Las gráficas dadas por estos programas, al contener un conjunto finito de las curvas solución de la ecuación diferencial, permiten analizar el comportamiento de las demás curvas, aunque solo se cuente con una parte de la solución en un eje de coordenadas cartesianas, se puede extraer conclusiones, propiedades, resultados. En este caso, los programas mencionados son útiles en la resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales.

3.1.3.1 La solución de ecuaciones diferenciales ordinarias lineales de primer orden y su relación con el cálculo diferencial e integral

Lozano (2011) plantea que fue a finales del siglo XVII y principios del siglo XVIII que se dio origen al cálculo diferencial a partir de problemas como el trazado de la tangente a una curva; la determinación de la velocidad y la aceleración de un cuerpo si se conoce la distancia en función del tiempo; cuando una función alcanza un valor máximo o mínimo.

Este autor declara que los primeros matemáticos en abordar los problemas que involucraban la construcción de tangentes a una curva en un punto dado fueron Fermat (1601, 1665) y Descartes (1596-1650). Igualmente, Newton (1642-1727) y Leibniz (1646-1716). Pero fue Bolzano (1781-1848) quien definió por primera vez la derivada como un límite y a partir de estos aportes fue Cauchy (1789, 1857) quien continuó el trabajo en este tema.

A lo largo de la historia se menciona que fue Newton quien descubrió y construyó el cálculo diferencial e integral en los años 1665 a 1666. Otros sostienen que Leibniz también lo descubrió debido a que se concentró en el cálculo de las tangentes a las curvas entendiendo que se trataba de un método inverso al de encontrar áreas y volúmenes a través de sumas. En 1684 publicó un artículo en el cual daba a conocer su método, el cual trataba de una aproximación geométrica y no analítica como la ofrecida por Newton. En este artículo expresaba los símbolos dx y dy, que representaban cantidades arbitrariamente pequeñas (diferenciales o infinitesimales) con lo cual construyó su cálculo diferencial o "cálculo de tangentes". Para Leibniz "el cociente real de estos diferenciales infinitamente pequeños es nuevamente un número ordinario llamado derivada" (Lozano, 2011, p. 21). Por su parte Bolzano en 1817 definió por primera vez la derivada como un límite, pero es Cauchy quien la describe posteriormente.

En consecuencia, la derivada ha tenido y tiene diferentes interpretaciones, y así mismo representaciones, lo cual conduce a una definición y notación específica dependiendo del interés de la persona dedicada a resolver un problema dado. De esta forma la derivada se ha estudiado como pendiente, como cociente incremental, método de fluxiones o derivada en física.

Luego, los problemas de aplicación dieron lugar a la aparición y desarrollo de diversos objetos matemáticos. Aunque ahora no es tan frecuente, como antes, este tipo de problemas, sigue siendo centro de interés en el estudio de algunos temas en matemáticas. Fernández (2011) afirma que se han dedicado más de veinte siglos en intentos por dar respuesta a problemas relativos a fenómenos naturales.

Otro problema al que los matemáticos de diferentes épocas dedicaron su atención consistió en el cálculo del volumen y la superficie de diferentes objetos. Para Fernández (2011), fue Arquímedes de Siracusa (287-212 a.c) quien haciendo uso del método exhaustivo desarrollado por Eudoxo de Cnido (908-355 a.c), le permitió calcular el volumen y la superficie de una esfera y de un cono, entre otros. El método consistía en inscribir y circunscribir polígonos regulares en una circunferencia para calcular áreas y volúmenes. También sostiene que Johannes Kepler (1571-1630) se interesó por el problema de los volúmenes motivado por la inexactitud de los métodos usados por los tratantes de vinos al momento de determinar el volumen de los barriles. Los estudios que Kepler realizó sobre los movimientos planetarios le permitieron desarrollar un método para encontrar el área de sectores de una elipse. Mientras que Bonaventura Cavalieri (1598-1647) se basó en las ideas de Kepler para exponer "la idea fundamental de que un área está formada por segmentos indivisibles y un volumen por segmentos o áreas indivisibles" (Fernández, 2011, p. 4). Fermat (1601-1665) produjo un avance sobre la obra de Cavalieri pero fue Jhon Wallis (1617-1703) quien "asignó valores numéricos a los indivisibles de Cavalieri y convirtió el cálculo de áreas, hasta el momento algo meramente geométrico, en cálculos aritméticos" (Fernández, 2011, p. 7). Posteriormente, fue Isaacc Barrow (1630-1677) quien demostró por primera vez el carácter inverso de los problemas de tangentes y los problemas de cuadratura. Todo este dio origen al Cálculo Integral.

En el último cuarto del siglo XVII, Newton y Leibniz definieron lo que hoy se conoce como derivada e integral; desarrollaron las reglas de derivación y demostraron que ambos conceptos son inversos, esto último a través del Teorema Fundamental del Cálculo. Además Leibniz en 1680 introdujo en su obra la notación para la integral que hasta ahora se usa.

Las interpretaciones particulares dadas a un objeto lleva a distintos resultados y avances; es el caso del trabajo realizado por Johann Bernoulli (1667-1748) quien "vio la integración simplemente como la operación inversa de la diferenciación y, con esta aproximación, obtuvo muchos éxitos integrando ecuaciones diferenciales" (Fernández, 2011, p. 8). Además, fue el primero en escribir un curso sistemático del cálculo integral publicado en 1742.

Debido a los trabajos de Leonhard Euler (1707-1783) los métodos de integración indefinida continuaron para que en la primera mitad del siglo XIX Cauchy con el desarrollo de los límites le diera una fundamentación adecuada para finalmente ser rigurosamente formalizada por Benhard Riemann (1826-1866).

A partir de los estudios sobre derivadas e integrales se pudo modelar situaciones que requerían de ambos objetos en el planteamiento de las ecuaciones y así describir los diferentes fenómenos. Lo logrado dentro del

cálculo integral permitió resolver las ecuaciones diferenciales planteadas debido a que se trataba de procesos inversos, como se dijo anteriormente. A pesar de esto, fue necesario desarrollar una teoría propia para las ecuaciones diferenciales, a la cual matemáticos como Riccati, Clairaut, D´Alembert dieron importantes aportes; pero fue Euler quien realizó la primera sistematización de los trabajos anteriores. Así mismo, según ellos, el concepto de Ecuación Diferencial nace (a fines del siglo XVII) como una ecuación que relaciona diferenciales, afirmando que:

> Este concepto se mantiene estable hasta que Cauchy (hacia 1821) agrega la derivada, esta última definición es la que se conserva en la actualidad "desapareciendo" las diferenciales, aunque cuando se exponen los métodos de resolución de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de primer orden se usa la primera concepción sin explicitarla (es decir, la derivada ya no es la derivada, sino un cociente entre diferenciales) (Fernández, 2011, p. 47).

En la última década del siglo XVII, los hermanos Bernoulli (James y Johan) introducen el proceso de "separación de variables" (separatio indeterminatarum) de una ecuación diferencial. Sin embargo, se puede decirque en el siglo XVIII el trabajo de los matemáticos de la época consistía en la solución de ecuaciones particulares específicas, por consiguiente, "la atención se dirigió a la resolución de dichas ecuaciones y no a la obtención de métodos generales o de propiedades generales de las soluciones" (Napoles et al, 2002, p. 49). Con esto se nota el interés por resolver casos particulares, dejando de lado la generalización.

Estos son los inicios del manejo algebraico predominante hasta la actualidad, pues al verse la derivada como un cociente de diferenciales, el método de solución conocido como variables separables, se convierte en "una herramienta "apetecible" desde el punto de vista didáctico" (Napoles et al, 2002, p. 47). Al inicio la atención se concentraba en las diferentes ecuaciones diferenciales ordinarias lineales de primer orden, sus soluciones se buscaban en forma de funciones algebraicas, en donde se tendían en cada ecuación diferencial a separar las variables. De ahí que se podría decir que "este método, con el que actualmente comienzan los textos sistemáticos de la teoría de ecuaciones diferenciales, resultó, al parecer, históricamente el primero" (Napoles et al, 2002, p. 35).

3.2 Dimensión cognitiva de los estudiantes con respecto a la solución de las ecuaciones diferenciales ordinarias lineales de primer orden

La comprensión de la definición de EDO lineal de primer orden encierra el conocimiento sobre otros objetos matemáticos; por esta razón se requiere que los estudiantes los tengan presentes ya que son útiles para la

comprensión del nuevo objeto matemático. Algunos objetos como función, ecuación, derivada e integral son estudiados en los diferentes cursos de cálculo, anteriores al curso de Ecuaciones Diferenciales. Por ende, es importante considerar los conocimientos previos para llegar a la construcción de los nuevos, esto debido a que "los estudiantes no aprenden conceptos en forma aislada, mediante un proceso de decontextualización y deconstrucción, adoptan experiencias significativas anteriores a situaciones actuales y acceden así al nuevo conocimiento" (Sánchez & Camacho, s.f, p. 2); al darse esto, lo estudiado anteriormente sería más que un vago recuerdo en los estudiantes, pues algunas veces consideran que luego de evaluados no se utilizarán nuevamente.

3.2.1 Dificultades en el estudio de la función como solución de una EDO lineal de primer orden

El objeto matemático función trae consigo serias dificultades en su aprendizaje. El estudiante, durante la mayor parte de su formación escolar, lleva a cabo un trabajo algebraico sobre la función matemática, por lo que para él no es sencillo relacionarla con otras representaciones. Guevara (2011) afirma que "tradicionalmente se reconocen, en la mayoría de los estudiantes, grandes dificultades para establecer relaciones lógicas entre los conceptos como se definen en clase y la aplicación de estos en la representación gráfica" (p. 22); los estudiantes no entienden que se trata del mismo objeto matemático cuando se les enseña una representación u otra de manera independiente:

> …tradicionalmente las representaciones semióticas de este concepto matemático se han presentado a los estudiantes de forma desarticulada lo cual ha generado dificultades en la comprensión del concepto matemático, ya que posteriormente le es difícil al estudiante unificar diferentes representaciones para darles un significado integral, es así como el estudiante observa diversos objetos matemáticos donde solo hay uno (Ospina, 2012, pp. 10-11).

Los estudiantes no encuentran relación alguna entre la función matemática y su utilidad en la realidad no obstante que la función tiene "como finalidad básica servir como instrumento para el estudio del cambio en el mundo físico" (Moleto et. al, s.f, p. 366). La falta de experiencia en la resolución de problemas de aplicación en los que es necesario el uso de funciones matemáticas les dificulta corresponder los conocimientos aprendidos en las clases teóricas con sus respectivas aplicaciones, generando confusión en ellos cuando no se dice de forma textual que se trata de determinado objeto matemático. Por ende los estudiantes consideran que las ecuaciones diferenciales ordinarias lineales de primer orden están alejadas de cualquier aplicación en la vida real, ignorando la estrecha relación que existe con el modelado de poblaciones, puentes suspendidos, cadenas descendentes, crecimiento y decaimiento, enfriamiento y calentamiento de un objeto, etc. (Zill, 2006). Este tipo de aplicaciones son poco conocidas para los estudiantes pero solicitadas por los mismos.

Teniendo en cuenta lo anterior, resolver una EDO lineal de primer orden se convierte prácticamente en un problema algebraico para los estudiantes, en donde su preocupación consiste en encontrar la solución que la satisface, sin preguntarse por lo que esta representa y menos aún analizar que la solución de este tipo de ecuaciones está compuesta no sólo por una función, sino por una familia de funciones. Esto se puede notar de una forma más clara cuando se utiliza la representación gráfica de su solución. Por medio de las gráficas se puede visualizar que la solución de la ecuación diferencial mencionada consiste en una familia de curvas, en donde cada una representa una función y en conjunto su solución. Infortunadamente, la representación gráfica de una sola función genera inconvenientes en los estudiantes, quienes no logran identificar el tipo de función que están representando, puesto que en ocasiones no tienen experiencia al respecto, como García (2005) afirma la competencia de un estudiante en la construcción e interpretación de representaciones gráficas dependen de las oportunidades que se le ofrezcan para generar representaciones gráficas cada más distantes de los fenómenos representados

Por ende, los estudiantes le dan más importancia al método necesario para hallar la solución, que a la interpretación de la misma, una vez ésta ha sido encontrada. En el trabajo de Camacho, Perdomo y Santos-Trigo (2009) se determinó que:

> Muchos de los estudiantes concibieron el concepto de ecuación diferencial como una entidad matemática aislada desconectada de otras nociones que ellos conocen. Para los estudiantes, resolver una ecuación diferencial es una cuestión meramente de buscar una expresión algebraica explícita o implícita de la solución. Así, ellos consideraron que la información relevante suministrada en una ecuación diferencial, fue la información que podría conducirlos a aplicar algún método para encontrar la solución (p. 131).

El estudiante adquiere destreza en el uso de diferentes métodos de solución en los que la característica común es que todos recurren a representaciones algebraicas. En la investigación realizada por Artigue (1989) sobresale el hecho de que los procedimientos algebraicos son los más desarrollados por los estudiantes, puesto que los estudiantes dependen de las estrategias implementadas por los profesores para abordar todo lo referido a las ecuaciones diferenciales, en donde no es común usar otro tipo de escenario para llevar a cabo estos procesos de aprendizaje. Esto lo confirman otras investigaciones, en las cuales se ha concluido que los estudiantes "ven en las ecuaciones diferenciales, problemas matemáticos, totalmente algebraicos, no las relacionan con modelos que representan variaciones, y que pueden ser representados mediante valores numéricos o gráficas" (Rivera, s. f, p. 6).

3.2.2 El uso de las derivadas e integrales al determinar la solución de una EDO lineal de primer orden

Algunos estudiantes se dedican a memorizar las reglas de derivación en lugar de darle importancia a la definición de derivada; por esta razón, Artigue (citada en Lozano, 2011) "expresa que si bien muchos estudiantes pueden aprender a realizar de forma mecánica cálculos de derivadas, primitivas y resolver algunos problemas, se encuentran graves dificultades para alcanzar una verdadera comprensión de los conceptos" (p. 5). Cuando los estudiantes memorizan las reglas, se dedican a resolver los ejercicios que requieren la aplicación directa de la fórmula, y como no implica mayor esfuerzo, es suficiente para ellos.

Así mismo, sobre los procesos cognitivos de los estudiantes, Lozano (2011) toma en cuenta los resultados de la investigación realizada por Orton (1980) en la cual se puede notar que "los estudiantes manifiestan un buen nivel en la manipulación algebraica que aparece en los cálculos de funciones derivadas, pero a su vez mostraron dificultad significativa en la conceptualización de los procesos de límite que sustentan el concepto de derivada (p. 31).

Para Azcárate (1996)los estudiantes demuestran dificultades, errores conceptuales y de técnicas de cálculo cuando trabajan con conceptos básicos como la velocidad, pendiente de una recta y tasa de variación.

Con respecto al concepto de integral, Fernández (2011) afirma que "los alumnos finalizan la educación secundaria con dificultades para relacionar los distintos significados y representaciones de la integral" (p. 12). Según Fuster y Sandoja (1997) generalmente, los estudiantes identifican integral con primitiva. Para ellos, "un estudiante puede conocer distintos métodos de integración e, incluso, saber aplicarlos con cierta soltura…y, al mismo tiempo, no ser capaz de aplicarlos al cálculo de un área o ignorar por completo que son las sumas de Riemann, etc" (p. 62). También plantean, que las integrales definidas se identifican con la regla de Barrow, incluso cuando esta no pueda aplicarse. Es decir, el símbolo $\int_a^b f(x)dx$ representa solo un paso más del cálculo de primitivas, la aplicación de la regla de Barrow" (p. 62). Finalmente, los estudiantes, no relacionan el concepto de área con el de integral, "persiste una interpretación puramente algebraica de la integral" (p. 63), prefieren lo que denominan el contexto algebraico-formal al visual-geométrico, sencillamente porque no han comprendido la relación entre ambos.

Las dificultades en el estudio de las derivadas y las integrales se incrementan cuando el estudiante en sus estudios de educación superior debe enfrentarse a la resolución de ecuaciones diferenciales. En este momento es indispensable hacer uso de los objetos anteriormente nombrados. El dominio de tales objetos le permite al

estudiante realizar algunos aspectos determinantes en los diferentes métodos de resolución. A pesar de esto, los métodos que tienen que ver especialmente con las ecuaciones diferenciales ordinarias lineales de primer orden también se reducen al dominio de la parte algebraica.

Las ecuaciones diferenciales ordinarias lineales de primer orden son tema central en el campo de las ecuaciones diferenciales, pero en ocasiones, se desconecta de sus aplicaciones; por esta razón, hay quienes afirman que se desaprovecha "la importancia del curso de ecuaciones diferenciales para las carreras de ingeniería, ya que son el enlace entre los cursos de matemáticas puras y los problemas propios de ingeniería; es aquí donde el alumno debiera darse cuenta de la utilidad de las matemáticas" (Rivera, s. f. p. 1). Como muchos de los temas sobre derivadas e integrales han sido mecanizados, no les permite ser recordados luego de un tiempo, pues no tienen certeza sobre si es así o de otra forma, se encuentran limitados por lo que recuerden en el momento, presentando dificultades para resolver cualquier ecuación diferencial y así mismo, relacionarla con problemas de la vida diaria en donde del conocimiento sobre el planteamiento de las ecuaciones diferenciales lineales de primer orden y los métodos de resolución, depende la solución de los problemas abordados.

3.2.3 ¿Esa es la respuesta? ¿Ahí queda?

Estas son preguntas típicas que formulan los estudiantes cuando están interesados en indagar sobre la veracidad de la respuesta encontrada al resolver una ecuación diferencial. Como tienen dificultad para comprender el concepto de ecuación, al momento de probar que una función es la solución de una ecuación diferencial, a pocos se les ocurre derivar y reemplazar tanto la función como sus derivadas, y verificar que si la igualdad se satisface, entonces la función encontrada es la buscada.

Sobre el concepto de ecuación, Gustin y Avirama (2014) plantean que en el aprendizaje y estudio del álgebra escolar, los objetos matemáticos poseen un carácter de mayor abstracción. La necesidad de hacer uso de letras para representar valores numéricos genera dificultades en los estudiantes. Para estos autores, los estudiantes presentan errores en la transición del pensamiento aritmético al algebraico, puesto que el signo igual tiene diferentes significados o interpretaciones, dependiendo del procedimiento que se esté realizando. En ocasiones

> El estudiante mantiene la idea de que el signo igual es la señal de "hacer algo", lo cual se extiende de la aritmética, y esto a su vez permite entender ecuaciones de tipo $2x + 3 = 8$, pero no expresiones tales como $2x + 3 = x + 9$. Así mismo, conciben el signo igual como un separador entre la secuencia de operaciones y esto hace que no tenga en cuenta las propiedades de simetría y transitividad de la igualdad (p. 15).

Luego, al verificar si una función encontrada corresponde a la solución de una EDO lineal de primer orden, los estudiantes presentan dificultades cuando tratan de identificar los productos indicados dentro de la EDO, tampoco reconocen el signo igual como un indicador para comparar ambos lados de la igualdad y además los errores en el tratamiento de una ecuación polinómica se extienden a este tipo de ecuaciones.

Por su parte, Gallardo y Rojano (1988) han encontrado que los estudiantes no aceptan las letras como notación de valores simbólicos. En la parte operacional, los errores más comunes que persisten en la solución de ecuaciones es la inversión de las operaciones, debido a la falta de comprensión de las nociones del opuesto, el inverso, las propiedades de la igualdad y operaciones entre números en general, "sin la claridad de estas nociones es difícil que el estudiante comprenda y halle el significado de la ecuación" (p. 15). Estas dificultades aumentan la complejidad cuando entre las variables de la ecuación se encuentran derivadas. La debilidad en el manejo de más objetos matemáticos obstaculiza la comprensión de este tema, generando más interrogantes en los estudiantes.

3.2.4 Mediación de la tecnología en la resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias lineales de primer orden

En la actualidad, las tecnologías de la información y la comunicación (TIC) y el uso del internet, permiten a los estudiantes buscar en la red canales de videos tutoriales que explican los temas de ecuaciones diferenciales, en particular, las ecuaciones diferenciales ordinarias lineales de primer orden. Debido a que pueden reproducir los videos cuantas veces sea necesario y que, según ellos, explican los temas de una forma más "sencilla", recurren con mayor frecuencia a este medio. Buscan solucionarios de ejercicios para estudiar su solución, sin necesidad de resolverlos a partir de sus conocimientos, como afirma Ramos (2010) "la consecuencia lógica de estos fenómenos es que en la formación de los estudiantes la escuela ya no es la única fuente de conocimientos".

Algunos de los videos tutoriales que les permiten a los estudiantes reforzar los diferentes temas se encuentran en la web. Por ejemplo, a la fecha se cuenta con el canal de tutoriales: https://www.youtube.com/user/Tareasplus en donde están publicados 126 videos sobre temas de ecuaciones diferenciales. En especial, sobre ecuaciones diferenciales ordinarias lineales de primer orden están disponibles algunas direcciones electrónicas, por ejemplo en el enlace https://www.youtube.com/watch?v=94YQF2BWis0 se pueden apreciar las explicaciones de las principales definiciones; en https://www.youtube.com/watch?v=7HYcQTTKPdA aplican un método de solución y en https://www.youtube.com/watch?v=7MTPfWY1VLg desarrollan el conocido método de variables separables. Así mismo, los estudiantes visitan frecuentemente la página http://www.julioprofe.net/p/matematicas-

superiores.html, que se caracteriza por manejar una terminología menos formal y más conocida por los estudiantes.

También disponen de software libres o con licencia como MatLab, los cuales permiten resolver ecuaciones diferenciales encontrando la expresión algebraica e igualmente la representación gráfica de su solución. Para esto se debe escribir cierto código y tener claro el lenguaje apropiado, teniendo presente esto, la resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias lineales de primer orden se convierte en una tarea sencilla para los estudiantes.

3.3 Dimensión didáctica de la solución de las ecuaciones diferenciales ordinarias lineales de primer orden

Enseñar a resolver ecuaciones diferenciales ordinarias lineales de primer orden es un reto para los profesores puesto que como se ha insistido guarda estrecha relación con otros objetos matemáticos. El olvido de los objetos involucrados evidenciado por los estudiantes puede deberse a diversas acciones propias del profesor en la enseñanza de cada uno de los objetos relacionados con el nuevo. Por esta razón, es importante señalar las acciones que realizan los profesores al enseñar cada uno de estos objetos y que no dan lugar al aprendizaje de los mismos.

3.3.1 La solución de la EDO lineal de primer orden como familia de soluciones

La resolución de una ecuación diferencial, y el hecho de que su solución se compone de funciones, da lugar a serias inquietudes en los maestros, pues a la enseñanza de los métodos de solución se adiciona la dificultad de hacer notar que la solución se conforma de infinitas funciones.

Desde los grados inferiores, los estudiantes empiezan a familiarizarse con el término de función, particularmente cuando se hace referencia a correspondencia, dependencia, variable, transformación, etc. Sin embargo, este objeto no es sencillo de enseñar pues su propia aparición y desarrollo implicó tiempo y trabajo para los matemáticos que se dedicaron a su estudio.

De acuerdo a García, Serrano y Espitia (1997) “la enseñanza fragmentada del concepto de función respecto a sus diferentes representaciones, genera restricciones en su conceptualización como objeto matemático” (p. 1). Los profesores tienden a enseñar dicho concepto haciendo uso de diferentes representaciones pero en diferentes momentos, por tal motivo, el estudiante no se da cuenta que se trata del mismo objeto matemático. Esta actitud se mantiene cuando se enseña a resolver una EDO lineal de primer orden y no se tiene en cuenta otro tipo de representación para presentar su solución.

Por su parte, para Quintero y Cadavid (s.f):

> Una enseñanza de la que somos conscientes, se practica desde un instrumentalismo tal, que privilegia el tratamiento mecánico del concepto, limitado a la elaboración de tablas, gráficas y esquemas algebraicos, lo cual sabemos, no asegura que en el proceso se esté construyendo un concepto de función con sentido (p. 2).

Estos autores plantean que "el privilegio de un único sistema de representación crea significaciones restringidas del concepto, oculta la riqueza y complejidad de su noción como objeto matemático" (p. 6). Luego, gran parte de la responsabilidad la tienen los profesores al enseñar un concepto haciendo uso del registro de representación semiótica que conocen, dominan o consideran apropiado; como afirman Sánchez y Camacho (s.f) "las concepciones y en este caso los conocimientos teóricos de los docentes apoyan o detienen la correcta comprensión del concepto por parte de los estudiantes" (p. 9). En este sentido, cuando el profesor utiliza diferentes registros de representación semiótica con la clara intención de enseñar un mismo objeto matemático en diferentes contextos le permite al estudiante tener mayor conocimiento del mismo.

3.3.2 El uso exclusivo de procedimientos algorítmicos punto en común de los distintos Cálculos

Según Lozano (2011), la enseñanza de la derivada está influenciada notablemente por la concepción sobre las matemáticas del cálculo de los profesores, "la mayoría de las veces esta concepción está inscrita en la tradición axiomática-deductiva prevaleciendo las representaciones formales" (p. 8). Además, manifiesta que los profesores convierten "los conceptos básicos, límite y derivada, en un conocimiento algorítmico desde lo algebraico" (p. 8). Para él, tal enseñanza ha sido marcada por dos tendencias: una en la cual se desarrolla el enfoque clásico formal para luego buscar sus aplicaciones y la otra en la que se basa el desarrollo del pensamiento matemático desde la resolución de problemas como el problema de la tangente, razón de cambio y significados físicos. Sin embargo, para Dolores (citada por Lozano, 2011) "ambas tendencias se manifiestan mediante enfoques que priorizan la estructura del contenido, tales como: algebraico, numérico, formal, infinitesimal, aproximación afín local e innovadores tales como geométrico, variacional y computacional" (p. 25).

Fernández (2011) expone que los profesores "se limitan en la mayoría de los casos a evaluar las técnicas de cálculo de integrales y de áreas entre gráficas de funciones" (p. 12).

Por su parte Depool (2005) manifiesta que:

> Existe una predisposición al uso casi exclusivo de procedimientos algorítmicos para la resolución de los diferentes problemas que se plantean. Una gran cantidad de libros de texto favorecen esa concepción de la enseñanza dado que en general se dedican tal como señala Tall (Tall 1997), a la resolución de ejercicios rutinarios una parte importante, entre un 30 y 50% (p. 5).

Al ser mecanizados muchos de los procedimientos usados dentro del Cálculo Integral y Diferencial, cuando son requeridos en la resolución de una EDO lineal de primer orden, los estudiantes ya no los tienen presentes. Debido a que la mayoría de los teoremas que son utilizados en la enseñanza de este tema no son constructivos, termina convirtiéndose en una extensión de los temas trabajados en los cálculos. Sin embargo, "su tratamiento se ha mantenido pues permite una formulación matemática razonable, aún en el ambiente algebraico en que está inmerso" (p. 45). Entonces, la labor del profesor radica prácticamente en comunicar estos teoremas y explicar la forma como se usan, sin profundizar en el origen de los mismos y en la necesidad que hubo para que surgieran. Por el contrario, la instrucción común se centra en una algebrización intensiva de análisis, es decir, la manipulación de fórmulas y la aplicación de métodos para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias lineales de primer orden "sin desarrollar un enfoque numérico o gráfico general a la solución" (Napoles et al, p. 34).

Por otra parte, algunos profesores han ido incorporando el uso de algún software en la enseñanza de las ecuaciones diferenciales ordinarias lineales de primer orden, tales como Maple, Mathematica, Matlab, Mathcad, DERIVE, etc. Según Ramos (2010) "este nuevo rol del docente le exige ampliar su bagaje cultural y tecnológico, ser innovador para llegar a formar estudiantes autónomos capaces de "gestionar" su aprendizaje".

3.3.3 La enseñanza "tradicional" de la resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias lineales de primer orden

Según Gustin & Avirama (2014) la enseñanza de la resolución de ecuaciones diferenciales se ha caracterizado por ser la tradicional, donde el profesor presenta un tema, da algunos ejemplos y deja como trabajo la realización de una serie de ejercicios cuyas soluciones son similares a los ejemplos presentados en clase. En ocasiones, "el profesor presenta actividades descontextualizadas que se reducen a la ejercitación mecánica de procedimientos y que no aportan a la comprensión del concepto algebraico" (p. 48), situación que pocas veces es modificada por el profesor dentro del aula de clase, por lo tanto, el estudiante seguirá estudiando los temas de la misma forma.

En cuanto al contenido, es frecuente que los profesores enseñen las temáticas tal como son planteadas en los libros. Al no incorporarse en ellos una perspectiva procedimental-estructural en el aprendizaje de las

matemáticas es difícil ver cómo los objetos matemáticos han evolucionado históricamente. Por consiguiente, no es usual que al introducir una ecuación que ahora contiene derivadas, se refuerce que se trata de un tipo particular de ecuación y que, en consecuencia, su solución debe recibir especial atención.

La resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias lineales de primer orden se enseña usando un solo registro de representación semiótica, el estudiante se concentra en aprender lo que se le está enseñando de la manera como se le está enseñando, y en la mayoría de los casos dicho registro es el algebraico. Al respecto Napoles y Negrón (2002) afirman "esta concepción algorítmica-algebraica dominante en la enseñanza de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, da lugar a que los estudiantes tengan una imagen muy limitada sobre los diferentes acercamientos que existen para encontrar la solución de una ecuación diferencial" (p. 33). El profesor no hace uso de diferentes registros de representación semiótica, ignorando que "las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias que se utilizan, requieren, en muchas ocasiones, acercamientos geométricos y numéricos y articular, en la mayoría de los casos, las diferentes representaciones que se dan para la solución entre estos tres acercamientos" (Nápoles & Negrón, 2002, p. 33).

Por otro lado, afirman que Lacroix fue el primer maestro en recopilar los contenidos referidos a este tema, considerando los objetivos educativos en la reestructuración del conocimiento matemático. La mayor parte de este saber re-estructurado se enseñó hasta mediados del siglo XX, en donde en un curso elemental de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias se enseñaban las técnicas algebraicas para resolver diferentes tipos de ecuaciones diferenciales. Estos autores sostienen que "una de las primeras cosas que el principiante debe aprender es la identificación del tipo al que pertenece una Ecuación Diferencial dada" (p. 49), sin embargo, los acercamientos numéricos y geométricos para encontrar la solución de una ecuación diferencial no se mencionan a lo largo de toda la obra.

Según Nápoles y Negrón (2002), los escenarios para abordar los métodos usados en la búsqueda de las soluciones de las ecuaciones diferenciales ordinarias lineales de primer orden son "el algebraico, el numérico, el geométrico, cada uno con procedimientos distintos y representaciones diferentes para la solución, a saber: una fórmula o una serie infinita, un conjunto (obtenidos por un proceso iterativo) y una familia de curvas" (p. 47). Sin embargo, resaltan que hoy en día el algebraico es el más frecuente en los libros de texto, a diferencia de los otros dos, debido a "la relación tan cercana que existe entre el desarrollo del álgebra (como búsqueda de las raíces de un polinomio en términos de radicales) y de las ecuaciones diferenciales lineales (en cuanto a su integración por cuadraturas)" (p. 48).

Por esta razón, es de poco conocimiento para los estudiantes el uso de las ecuaciones diferenciales ordinarias lineales de primer orden en la modelación de problemas planteados en determinadas ramas de la ingeniería o de las ciencias como física, química, economía. Aquí es importante mencionar que para poder llevar a cabo los procesos de modelación se necesita del dominio de otros objetos pertenecientes a otras ciencias, en algunos casos, este desconocimiento no permitiría modelar problemas relacionados con las ecuaciones diferenciales puesto que no se tendrían en cuenta todas las variables implicadas, como afirma el autor:

> No se puede considerar el fenómeno en estudio exactamente como se presenta en la naturaleza, puesto que existe una gran cantidad de aspectos que deberían considerarse y a la consecuente necesidad de conocimientos matemáticos demasiados complejos, por lo tanto, al momento de modelar un fenómeno a través de una Ecuación Diferencial se necesita la idealización del problema en el cual no se consideran aquellos aspectos que no tienen gran influencia en el objeto de estudio aquí. (p. 53)

Cuando no se hace lo anterior, el profesor contribuye a que se genere una percepción limitada de los temas, como demuestra la investigación realizada por Rivera (s. f) en la cual se ha encontrado que "los profesores y alumnos ven a las ecuaciones diferenciales como herramientas para resolver problemas algebraicos, los significados en los contextos físicos, gráfico y numérico, representan un porcentaje mínimo de sus concepciones" (p. 1) Además, afirma que los profesores se apoyan en los textos, privilegiando el marco algebraico y desaprovechando los marcos numérico y gráfico; sostiene que son muy pocos los profesores que se valen de la tecnología actual, como calculadoras, graficadoras o microcomputadoras para visualizar objetos, generar habilidad de análisis; y si las utilizan sólo son como herramienta para hacer cálculos y comprobar resultados.

Moreno y Azcárate (2003) al llevar a cabo una investigación sobre las concepciones y creencias de determinados profesores al enseñar las ecuaciones diferenciales ordinarias lineales de primer orden, obtuvieron ciertas conclusiones. Algunas se refirieron a la metodología de enseñanza, afirmando que en el ámbito universitario la dominante es la clase magistral, es decir, aquella "en la que el profesor de matemáticas ocupa un papel central y relevante" (p. 276). Sobre la práctica docente afirman que es esencialmente instrumentalista, haciendo énfasis en la enseñanza de métodos de resolución de tipos de ecuaciones diferenciales integrables. También plantean que los profesores tienen claro que la presentación de los temas sin el contenido teórico que lo sustenta queda incompleta; sin embargo, trabajan con estudiantes cuyo nivel de competencia matemático elemental es un impedimento para que utilicen de forma significa los conocimientos teóricos. Así mismo, la

enseñanza de la modelización y de las aplicaciones a situaciones de la vida real está determinada por la enseñanza mecánica e instrumental de los métodos de resolución de este tipo de ecuaciones diferenciales.

3.3.4 Libros de texto universitarios de Ecuaciones Diferenciales

Algunos autores ofrecen en sus respectivos libros una definición propia para EDO lineal de primer orden.

Acero (2007) la define así:

> Son aquellas en las que aparecen relacionadas la variable independiente x, la dependiente o función incógnita $y(x)$ y su primera derivada.
>
> Una ecuación de este tipo puede expresarse de diversas formas:
>
> - Forma normal: $y'(x) = f[x, y(x)]$
> - Forma implícita: $F[x, y(x), y'(x)] = 0$
> - Forma diferencial $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ (p. 35)

Denomina *solución* de una EDO a toda función $y = f(x)$ que satisface dicha ecuación. El proceso de hallar las soluciones de una ecuación diferencial se llama *integrar* la ecuación.

Para Edwards y Penney (2001) "una *solución general* de una ecuación diferencial de primer orden, es simplemente una familia de soluciones con un parámetro" (p. 11). Es decir, la solución general incluye una constante arbitraria C. Cuando se realiza una apropiada elección de C, se obtiene una solución particular que satisface la condición inicial $y(x_0) = y_0$.

Arias y Rúa (2005), la define como sigue

> Una ecuación diferencial de la forma $a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = h(x)$, donde $a_1(x) \neq 0$, $a_0(x)$, $h(x)$ son continuas en una región R, es una ecuación diferencial lineal en yy de primer orden.
>
> Otra forma de representar una ecuación diferencial de primer orden es
>
> $$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)$$

Las ecuaciones diferenciales de primer orden pueden ser expresadas de las siguientes formas $y' = f(x, y), \frac{dy}{dx} = f(x, y), dy - f(x, y)dx = 0$ y también como $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ (p. 47).

Sobre solución de una EDO lineal de primer orden plantean:

Sea $F(x, y, y') = 0$ una ecuación diferencial de primer orden y definida en una región R del plano xy, la relación $G(x, y, c) = 0$ se denomina solución de la ecuación diferencial si $G(x, y, c) = 0$ es diferenciable y además satisface idénticamente a $F(x, y, y') = 0$ en donde c es una constante arbitraria (p. 19).

Las otras soluciones las definen así:

Cuando a la solución general $G(x, y, c) = 0$ se le asigna un valor a la constante c se obtiene una solución particular.

Soluciones suprimidas (o agregadas), se le llama solución agregada o suprimida porque desaparece en el proceso algebraico.

Existen (a veces) soluciones que no son generales ni particulares ni suprimidas, a éstas se les llama soluciones singulares. (p. 20)

En esta investigación se adopta la definición de solución de una EDO lineal de primer orden planteada por Zill (2006):

Cuando **una función $\boldsymbol{\phi}$**, definida en **algún** intervalo I, se sustituye en una **ecuación diferencial** y transforma esa **ecuación** en una identidad, se **dice** que es una **solución** de **la ecuación en el** intervalo (p. 5).

Este autor no solo hace alusión dentro de la definición de solución de una ecuación diferencial al término función sino también al hecho de que una solución general corresponde a una familia n-paramétrica, en particular menciona

Cuando se evalúa una antiderivada o integral indefinida en cálculo, se usa una sola constante c de integración. De manera análoga, al resolver una ecuación diferencial de primer orden $F(x, y, y') = 0$, *por lo común* se obtiene una solución que contiene una sola constante

> arbitraria o parámetro c. Una solución que contiene una constante arbitraria representa un conjunto $G(x, y, c) = 0$ de soluciones al que se le da el nombre de **familia uniparamétrica de soluciones** (p. 7).

Para él, una solución se llama **solución particular** cuando está libre de parámetros. Además, expresa que cuando una solución no se puede obtener al especificar el parámetro de la familia de soluciones, es una solución extra denominada **solución singular.**[5]

[5] Se han resaltado los términos en negrilla porque aparecen así en el respectivo libro.

Capítulo IV

Segunda fase: concepción de diseño y análisis a priori

Para el diseño de la situación didáctica se tienen en cuenta los aspectos que resultaron de los análisis preliminares, así mismo se plantean la hipótesis de análisis y los análisis a priori, este último se refiere a la descripción de los tipos de interacciones con el medio y los comportamientos que se esperan.

4.1 Síntesis de las conclusiones de los análisis preliminares

4.1.1 Desde lo histórico-epistemológico

En la dimensión histórico-epistemológica se puede notar que para la construcción de la definición de EDO lineal de primer orden fue necesario el desarrollo de otros objetos matemáticos. Al conocer la historia de la transformación de cada uno de ellos se puede notar la complejidad que su definición encierra, por lo tanto, no es sencillo adquirir dominio en su resolución en menos de dos horas de clase, en donde solo una parte de este tiempo se dedica a su explicación.

Por lo anterior, la comprensión de un objeto matemático implica la comprensión de otros objetos matemáticos que de manera implícita o explícita se requieren. Así mismo, es claro que la representación que más se utiliza en el estudio de los diferentes objetos es la algebraica, lo cual ha influido en el desarrollo de los mismos.

Sobre la función existen varios estudios en los cuales se resalta la necesidad de utilizar dicho objeto para modelar situaciones del mundo real, esto refleja la relación entre las aplicaciones y los objetos matemáticos. Para construir la definición de solución de una ecuación diferencial fue necesario avanzar primero en el desarrollo de la definición de función

Algunos objetos matemáticos, como por ejemplo la derivada, utilizan diferentes representaciones según sea la interpretación que se le esté dando; esto facilita la resolución de un problema. Luego, en la situación didáctica se tiene en cuenta que los objetos matemáticos que están relacionados con el nuevo objeto a enseñar no se pueden ignorar, por el contrario, se refuerza en esto para que su manejo no se convierta en un obstáculo al momento de resolver las ecuaciones diferenciales ordinarias lineales de primer orden. Por esta razón, se consideran importantes objetos como derivada, integral, ecuación y por supuesto la función matemática, todos relacionados de una u otra forma con la ecuación diferencial.

Para hacer uso de otro registro de representación semiótica se presenta un software que permite apreciar otra representación de la solución. Ellos dispondrán de los códigos necesarios para generar las gráficas, como su formación profesional es en ingeniería de sistemas, la manipulación de los códigos no se convierte en un obstáculo para ellos.

4.1.2 Desde lo cognitivo

A partir de las investigaciones que se analizaron, se puede concluir que los estudiantes que participaron en ellas no están acostumbrados a resolver ecuaciones diferenciales ordinarias lineales de primer orden desde diferentes registros de representación semiótica, por tal motivo, no es claro para ellos que dos registros de representación pueden hacer alusión al mismo objeto. Además, no encuentran la utilidad de los conocimientos matemáticos dentro de su realidad o vida cotidiana.

Los estudiantes están familiarizados con ecuaciones polinómicas; sin embargo, cuando trabajan ecuaciones diferenciales, cuya solución es una familia de funciones, tienen mayor dificultad. Aunque reconocen de forma apropiada que se trata de otro tipo de ecuación, no tienen en cuenta que si una expresión se considera su solución al sustituirla debe verificar la igualdad.

Por otra parte, el estudio de algunos objetos como la derivada o la integral incluyen el dominio de una serie de reglas, en las cuales la memoria juega un papel importante; infortunadamente, los estudiantes se dedican a memorizar dichas reglas dejando de lado la definición del objeto como tal. La idea de dedicarse solamente a resolver ejercicios que implican el uso exclusivo de fórmulas, no permite que se fortalezca la resolución de problemas, que requiere de mayor esfuerzo y podría favorecer la comprensión del mismo.

Los objetos matemáticos mencionados tienen diferentes significados dependiendo de la representación que se utilice; pero el estudiante cuando hace uso de otra representación, poco familiar o estudiada en otro contexto, considera que se trata de diferentes objetos; por lo tanto, no relaciona las diferentes interpretaciones que se pueden dar a un mismo objeto matemático de acuerdo a sus representaciones.

Los estudiantes no están acostumbrados a la representación gráfica de las funciones, por tal motivo cuando deben graficar la solución de una EDO lineal de primer orden, que consiste en una familia de funciones presentan dificultades.

En el diseño de la situación didáctica es preciso considerar los conocimientos previos de los estudiantes y partir de estos para que reconozcan la relación que existe entre los diferentes objetos que se estudian. Es

importante que se profundice cuando se evidencia olvido de los conocimientos previos puesto que si se parte de la idea de que deben ser dominados por los estudiantes se generan más dificultades.

4.1.3 Desde lo didáctico

Como el análisis didáctico muestra que las ecuaciones diferenciales ordinarias lineales de primer orden se enseñan haciendo uso del método algebraico, se pretende que el estudiante disponga de más de un registro de representación semiótica y a partir de su coordinación analizar niveles de comprensión manifestados por los estudiantes al momento de determinar las correspondientes familias de soluciones.

En consecuencia se requieren al menos dos registros de representación semiótica, en esta investigación se trabajaron el algebraico y el gráfico. Para este último se usó el software MatLab porque:

1. Permite resolver ecuaciones diferenciales ordinarias lineales de primer orden y graficar sus correspondientes soluciones.
2. Los estudiantes tienen interés por el uso del software debido a que su formación como ingenieros de sistemas les lleva a dominar diferentes programas.
3. MatLab[6] es un programa muy potente que tiene herramientas de cálculo científico, técnico y de visualización gráfica, así como un lenguaje de programación especializado, apropiado para estudiantes de Ingeniería de Sistemas.
4. Es un programa que requiere del pago de una licencia para ser usada dentro de la formación profesional de los estudiantes, como la institución educativa en donde se llevó a cabo la investigación cuenta con ella, se considera importante sacar provecho de este aspecto.
5. Los estudiantes deben usar este software en otros cursos como por ejemplo, Simulación, por lo tanto, es conveniente que se familiaricen con esta herramienta tecnológica.

4.2 Hipótesis de análisis

El uso de las representaciones algebraica y gráfica de la solución de ecuaciones diferenciales ordinarias lineales de primer orden permite la coordinación de registros de representación semiótica, contribuyendo a la comprensión de esta, en distintos niveles, como familia de funciones.

[6] Es un acrónimo de “MATrix LABoratory”

4.3 La situación didáctica

Teniendo en cuenta lo planteado sobre situación didáctica por Brousseau (1998), a continuación se presenta una situación didáctica la cual, como se verá, involucró al profesor, al estudiante y al medio escogido con el objetivo de caracterizar los niveles de comprensión manifestados dentro de la coordinación de registros (Duval, 1999) al momento de resolver una EDO lineal de primer orden a través del desarrollo de diferentes talleres.

Actividad 1	**Actividad 2**
Reconocimiento del entorno MatLab **(Taller 0)** **(Taller 1)**	Resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias lineales de primer orden analítica y gráficamente **(Taller 2)**
Actividad 3	**Actividad 4**
Gráficas de la solución de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden **(Taller 4)** **(Taller 6)**	Problemas de aplicación que involucran ecuaciones diferenciales ordinarias lineales de primer orden **(Taller 3)** **(Taller 5)**

Figura 1. **Esquema de las actividades diseñadas**

Se diseñaron y pusieron en acto cuatro actividades que reunieron siete talleres. La primera tuvo como objetivo familiarizar a los estudiantes con el uso del software, la segunda resolver ecuaciones diferenciales de primer orden haciendo uso del método algebraico conocido como variables separables y además el método gráfico a través del software, la tercera permitió analizar la solución de las ecuaciones diferenciales ordinarias lineales de primer orden a través de la gráfica y la cuarta les permitió a los estudiantes resolver problemas que involucraban ecuaciones diferenciales ordinarias lineales de primer orden.

4.3.1 Actividad 1. Reconocimiento del entorno de MatLab

4.3.1.1 Taller 0. Reconociendo los entornos de MatLab. Primera parte.

Presentación a los estudiantes de la plataforma y el espacio de trabajo en el que se escribirían las funciones para graficar y las ecuaciones diferenciales a resolver. De esta forma, conocieron a grandes rasgos el programa y los comandos útiles, tanto para resolver ecuaciones como para graficar sus soluciones.

4.3.1.2 Taller 1. Reconociendo los entornos de MatLab. Segunda parte.

Familiarización en el uso del software, sin embargo, el objetivo de esta sesión consistió en graficar algunas funciones, reconocer algunas características de las mismas y analizar si el estudiante entendía algunas líneas de código.

4.3.2 Actividad 2. Resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias lineales de primer orden

4.3.2.1 Taller 2. Resolución de ecuaciones

El objetivo del Taller 2 consistió en resolver ecuaciones con el software, aquí se presentaron dos ecuaciones: una polinómica de grado cuatro y otra diferencial lineal de primer orden. Para ambas ecuaciones los estudiantes debieron graficar la solución, a través de un código compartido en el taller.

4.3.3 Actividad 3. Gráficas de la solución de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden

4.3.3.1 Taller 4. Graficando funciones

En la quinta sesión (Taller 4) el taller tenía como finalidad resolver una EDO a través los métodos algebraicos conocidos y el software MatLab. Los estudiantes a partir de la función, debían proponer la ecuación diferencial y luego a partir del software o el método algebraico usado la resolvían. En este taller se preguntó por primera vez de forma explícita si se podía considerar las gráficas obtenidas como otro método para resolver una EDO, además que propusiera un nombre a dicho método.

4.3.3.2 Taller 6. ¿Cuál es su expresión matemática?

En la séptima sesión (Taller 6) se les mostró dos gráficas para que las observaran y plantearan la expresión matemática correspondiente. Posteriormente, se les pidió que plantearan algebraicamente la EDO para cada función.

4.3.4 Actividad 4. Problemas de aplicación que involucran ecuaciones diferenciales ordinarias lineales de primer orden

4.3.4.1 Taller 3. Un problema de aplicación

En la cuarta sesión (Taller 3) se propuso resolver un problema a través del software MatLab. En ese momento, los estudiantes conocían dos métodos: el método de variables separables y el gráfico ofrecido por el software (a diferencia del primero, este método no fue mencionado directamente por el profesor). Así mismo, se propuso que en grupos buscaran un problema de aplicación de una EDO lineal de primer orden y hacer un Video Tutorial en donde explicaran la forma de resolverlo y la interpretación dada a la respuesta

4.3.4.2 Taller 5. Una invitación a almorzar

En la sexta sesión (Taller 5) se les presentó a los estudiantes una situación particular referida al enfriamiento de la sopa servida en un plato; se escogió este problema al suponer que ellos en alguna ocasión han experimentado este suceso. Las preguntas fueron entregadas por separado. La pregunta inicial exigía el planteamiento y resolución de una ecuación diferencial: aunque no se pretendía que lo lograran en el tiempo

estimado, sirvió como detonador de toda la situación. En un segundo momento, se les presenta la Ley de enfriamiento de Newton, la cual contiene el planteamiento de la ecuación solicitada. Se les pide que resuelvan dicha ecuación y el problema inicial, y que a través del software ejecuten un código.

4.3.5 Análisis a priori

Dentro del tipo de interacción, se especificará si dicha interacción se efectúa dentro del Registro Algebraico (RA), Registro Gráfico (RG) y/o Registro Verbal (RV)

4.3.5.1 Del reconocimiento del entorno de MatLab

4.3.5.1.1 Taller 0. Reconociendo los entornos de MatLab. Primera parte

Pregunta	Tipo de interacción	Respuestas esperadas de los estudiantes
Ejercicio	Acción	Llevar a cabo los diferentes comandos sin mayor dificultad y reflexionar sobre la eficiencia del software en cuanto al tiempo requerido para realizar las diferentes operaciones.

4.2.5.1.2. Taller 1. Reconociendo los entornos de MatLab. Segunda parte

Pregunta	Tipo de interacción	Respuestas esperadas de los estudiantes
1.	Acción-RG	Las gráficas de las dos funciones A. $y = \sin(x)$y B. $y = e^x$ puesto que son conocidas en matemáticas.
2.	Acción-RG	Reconocer el editor de MatLab y copiar correctamente el código dado.
2.1	Acción-RG	Realizar tratamientos dentro del registro gráfico, ejecutar el código sin inconvenientes y obtener la gráfica de la función $y = \sin(x)$.
2.2	Formulación RG	Explicar lo que significa cada línea de código reconociendo la escritura para indicar el rango "x=-5:0.1:5" y el comando especial "plot(x,y)" para graficar en MatLab.
3.	Acción-RG	Identificar la línea de código en donde deben hacer el cambio.
3.1	Acción-RG	Ejecutar el código considerando la notación especial y obtener la

		gráfica de la función $y = e^x$.
3.2	Acción-Formulación RG	Obtener la gráfica, haciendo el cambio en la línea de código "y=sin(x);", teniendo en cuenta que para la función $y = e^x$ se debe escribir $y = \exp(x)$.
4.	Acción –Formulación RG	Proponer diferentes valores a la constante C al ejecutar el código y así obtener la gráfica de las funciones $y = \sin(x) + C$, $y = e^x + C$.
4.1	Formulación-RG	Identificar que por cada variación de la C se obtiene una curva en la gráfica.
4.2	Formulación-RG	Escribir que la gráfica obtenida indica una familia de curvas que representan una familia de funciones.
4.3	Formulación-RG	Afirmar que fue necesario dar diferentes valores a la constante C.
5.1	Formulación RA	Afirmar que la diferencia entre entre $y = sin\,(x)$ y $y = sin\,(x) + C$, está en la C, la primera es una sola función, la segunda es una familia de funciones.
5.2	Formulación-RA	Indicar la misma diferencia pero para la segunda función.
5.3	Formulación-RA	Afirmar que las expresión $\mathrm{y} = \sin\,(\mathrm{x}) + \mathrm{C}$ y $\mathrm{y} = \mathrm{e}^{\mathrm{x}} + \mathrm{C}$, podrían denominarse familia de funciones.

4.2.6.2 De la Resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias lineales de primer orden

4.2.6.2.1 Taller 2. Resolución de ecuaciones

Pregunta	Tipo de interacción	Respuestas esperadas de los estudiantes
1.	Acción-RG	Ejecutar el código sin dificultad.
A.1	Formulación RA-RG	Indicar que se obtuvo cuatro valores: 3.0, 1.0, -1.0 y -2.0 que coinciden con las raíces del polinomio $x^4 - x^3 - 7x^2 + x +$

		$6 = 0$.
A.2	Validación-RA	Evaluar en el polinomio cada uno de los valores encontrados y al verificar la igualdad los identifiquen como raíces del polinomio.
A.3	Formulación RG-RA	Indicar que el nuevo código genera la gráfica del polinomio y que las raíces encontradas coinciden con los cortes con el eje x, indicándolos como coordenadas: $(-2,0)$, $(-1,0)$, $(1,0)$, $(3,0)$.
2	Acción RG-RA	Ejecutar el código sin dificultad. Así mismo indicar la expresión $y = C * e^{\frac{x^2}{2}}$ arrojada por el software como solución de la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = xy$.
B.1	Formulación-RA	Reconocer que la solución es una familia de funciones.
B.2	Formulación-Validación-RA	Derivar la solución y reemplazarla en la ecuación, analizando si la satisface, o utilizando el método de variables separables, al ser un método visto en clase.
B.3	Formulación RA-RG	Indicar que la expresión algebraica coincide con la gráfica encontrada, reconociendo que las variaciones a la constante C les permiten obtener diferentes curvas y que en conjunto forman la familia de soluciones de la ecuación diferencial dada.
3.	Formulación RA	Con respecto a la ecuación A. afirmar que la expresión indica un polinomio y sus soluciones son cuatro valores reales cuya cantidad no excede el grado del mismo. Con respecto a la ecuación B. afirmar que la expresión indica una ED y su solución es una familia de funciones la cual es infinita por su relación con la constante C.
4.	Formulación-RA	Con respecto a la ecuación A. afirmar que el número de soluciones de un polinomio depende de su grado y por lo tanto son finitas, mientras que la solución de una ecuación diferencial es una familia de funciones la cual es infinita por su relación con la constante C.

5.	Institucionalización RA-RG	Profundizar en la solución de una ecuación diferencial como una familia de funciones, la cual puede ser representada algebraica o gráficamente.

4.2.6.3 De las gráficas de la solución de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden

4.2.6.3.1 Taller 4. Graficando funciones

Pregunta	Tipo de interacción	Respuestas esperadas de los estudiantes
1.	Acción-RG	La gráfica de las cinco funciones entre ellas $y = -5 * e^x$.
A.	Formulación RA	La representación algebraica de la ecuación diferencial para cada función. Aquí deber tener en cuenta la definición de ecuación diferencial. Para esto deberán derivar a y con respecto a x, usando la notación $\frac{dy}{dx}$, de esta forma la función será solución de la ecuación diferencial planteada. Por ejemplo, para la función anterior, la ecuación diferencial sería: $\frac{dy}{dx} = -5 * e^x$
B.	Formulación-RA	La ecuación diferencial que incluye a las funciones dadas dentro de sus soluciones.
C.	Institucionalización-RA	Plantear que las funciones cuentan con dos tipos de constantes, una de las cuales es la integración.
2.	Acción-RG	Las gráficas de las cinco funciones entre ellas $y = \cos(x)$.
A.	Formulación RA	Las ecuaciones diferenciales para cada función. Aquí deben tener en cuenta la definición de ecuación diferencial. Para esto deberán derivar a y con respecto a x, usando la notación $\frac{dy}{dx}$, de esta forma la función será solución de la ecuación diferencial planteada. Por ejemplo, para la función anterior, la ecuación diferencial sería: $\frac{dy}{dx} = \cos(x)$

B.	Formulación-RG	Plantear que las funciones cuentan con dos tipos de constantes, una de las cuales es la integración.
C.	Institucionalización	Plantear que una variación en el término denominado "constante" en una función no implica que cambie la ED
1.	Acción-RA	Resolución de las tres ecuaciones diferenciales usando el método de variables separables.
2.	Acción-RA	Resolución de las tres ecuaciones diferenciales usando el método de variables separables.

CUESTIONARIO

1.	Formulación-RG	Afirmar que se obtiene una familia de curvas.
2.	Formulación-Validación RA-RG	Afirmar que las tres representaciones se refieren a la familia de soluciones de la ecuación diferencial.
3.	Formulación-RA-RG	Usar por lo menos dos representaciones dentro de la definición que den sobre solución de una ecuación diferencial.
4.	Institucionalización-RG	Profundizar en las gráficas como otra representación de la solución de una ecuación diferencial.

4.2.6.3.2 Taller 6. ¿Cuál es su expresión matemática?

Pregunta	Tipo de interacción	Respuestas esperadas de los estudiantes
1.	Formulación	Escribir la expresión matemática para cada familia de curvas: $y = mx + b, y = e^{\frac{x^2}{2}}$
2.	Formulación	Escribir la EDO de tal forma que la expresión obtenida en el punto anterior sea solución. Para eso se espera que deriven ambos lados de la ecuación, usando la notación de derivada como elemento característico de una ecuación diferencial.

4.2.6.4 De los problemas de aplicación que involucran ecuaciones diferenciales ordinarias lineales de primer orden

4.2.6.4.1 Taller 3. Un problema de aplicación

Pregunta	Tipo de interacción	Respuestas esperadas
		PARTE I
A.	Formulación-RA	Proponer que la solución se encuentra al resolver la ecuación diferencial $\frac{dP}{dt} = (Cost)P$
B.	Formulación-RV	Afirmar que la letra P representa el crecimiento poblacional y la letra t corresponde al tiempo.
C.	Formulación-RV	Expresar que el crecimiento poblacional varía con respecto al tiempo.
D.	Formulación-RV	Expresar que determinarían la respuesta resolviendo la ecuación diferencial.
1.	Formulación-RA	La solución haciendo uso del software: $P = C * exp(sint(t))$
2.	Formulación-RA	Afirmar que la gráfica encontrada representa la solución buscada.
3.	Validación RA-RG	Analizar si la solución encontrada satisface la ecuación diferencial, así mismo si existe relación con la familia de curvas arrojada por la gráfica.
4.	Institucionalización	A partir de las respuestas generadas sobre el significado de Ecuación diferencial, revisar lo planteado dentro de las clases.
		PARTE II
Ejercicio	Acción, formulación, validación	Buscar un problema de aplicación y resolverlo haciendo uso del software.

4.2.6.4.2 Taller 5. Una invitación a almorzar

Pregunta	Tipo de interacción	Respuestas esperadas de los estudiantes
1.	Acción RV	Esta es la pregunta que inicia el proceso, a la cual se buscará dar respuesta con el desarrollo del taller. Se espera que los estudiantes consideren los siguientes datos, haciendo las respectivas formulaciones: 90°C→ t=0; 60°C→ t= 10; 35°C→t=? Tm= 20°C. También que escriban dentro de sus anotaciones el término: $\frac{dT}{dt}$
2.	Formulación RV	Afirmar que la temperatura de la sopa va a decrecer con respecto al tiempo, luego, la sopa del plato tiende a enfriarse hasta alcanzar la temperatura ambiente, que para el problema es 20°C.
3.	Formulación RV	Afirmar que la sopa se enfrió hasta 20°C, puesto que según la ley cero de la termodinámica: "Si dos o más cuerpos se encuentran a diferente temperatura y son puestos en contacto, pasado cierto tiempo, alcanzarán la misma temperatura, por lo que estarán térmicamente equilibrados".
4.	Formulación-RA	Escribir la expresión: $\frac{\mathrm{dT}}{\mathrm{dt}} = \mathrm{k}(\mathrm{T} - \mathrm{T_m})$
5.	Validación RV	Afirmar que dicha ecuación es una ecuación diferencial, donde $\frac{\mathrm{dT}}{\mathrm{dt}}$ indica la variación de la temperatura de la sopa con respecto al tiempo, que relacionen la temperatura de la sopa (T), el tiempo (t), la temperatura ambiente (Tm).

6.	Acción RA	Escribir la expresión $T(t) = ce^{kt} + T_m$
7.	Formulación RA	Determinar el tiempo total el cual es 27.53 min, aquí se analizará si tienen en cuenta los valores dados por el problema, por ejemplo que como han pasado 10 minutos cuando empiezan a tomar la sopa, al tiempo encontrado se le debe restar este valor, luego la respuesta al problema es 17,53 min.
8.	Institucionalización	Profundizar en el tema de solución particular de una EDO.

Capítulo V

Tercera fase: experimentación

La situación se aplicó una vez que los estudiantes habían estudiado la definición de ecuación diferencial, la clasificación de las ecuaciones diferenciales teniendo en cuenta el tipo, orden, grado y linealidad, una vez conocidos los métodos de resolución de ecuaciones diferenciales como el método de variables separables y el método de factor integrante.

En el estudio participaron cinco estudiantes, de los siete matriculados al curso ecuaciones diferenciales en el primer periodo académico del año 2015, correspondiente al quinto semestre del plan de estudios del programa de Ingeniería de Sistemas de una universidad privada de Popayán, capital del departamento del Cauca, Colombia. Los criterios para la selección de la muestra fueron: cumplir con el pre requisito de haber aprobado el curso Cálculo Vectorial y asistir al 90% de las clases. Para efectos de análisis de los resultados se diferenciarán los cinco estudiantes de la forma:

Tabla 3. Codificación de los participantes

CÓDIGO	GÉNERO
Est.Jhe	Femenino
Est.Ang	Femenino
Est.Bry	Masculino
Est.Ale	Femenino
Est.Hei	Masculino

5.1 Descripción de las sesiones

Las sesiones se llevaron a cabo dentro de una sala de informática perteneciente a las instalaciones físicas de la institución educativa. Como estrategia utilizada para la toma de información se tuvo en cuenta los registros monofuncionales discursivos, debido a que son algoritmizables; entre ellos se encuentran las representaciones numéricas, simbólicas y algebraicas, las cuales debían realizar en los documentos digitales que recibían en sus correos. Además, los monofuncionales no-discursivos, puesto que dentro de estos se encuentran las gráficas, las

cuales se generaron a través del software. Finalmente, los plurifuncionales discursivos, debido a que en algunos talleres se les presentaron problemas en lenguaje natural.

Tabla 4. Registros de presentación semiótica

Tipos de representaciones	Registros de representación semiótica	Tratamiento dentro del registro de representación	Unidades significantes
Monofuncionales discursivos (algoritmizables)	**Algebraico** En este registro, la representación de la familia de soluciones de una ecuación diferencial es una expresión de la forma $f(x,y)$	**Procedimientos algebraicos** **Método de variables separables** Al tener una ecuación de la forma: $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$ Se puede aplicar el método de variables separables solo si se puede escribir en la siguiente forma: $\frac{dy}{dx} = g(x)h(y)$ A partir de esto, pasamos el término $h(y)$ al primer miembro de la ecuación, quedando de la siguiente manera: $\frac{1}{h(y)}\frac{dy}{dx} = g(x)$ Se expresa por conveniencia $\frac{1}{h(y)}$ como $p(x)$: $p(x)\frac{dy}{dx} = g(x)$ Ahora, la terminología de la primera derivada se separa en dos entidades diferentes, dy y dx, quedando así: $p(x)dy = g(x)dx.$ Luego se integran ambos miembros: $\int \frac{1}{h(y)} dy = \int g(x)dx$ Para finalmente obtener: $H(y) = G(x) + C$	Variable dependiente (y) Variable Independiente (x) Constante de integración

Tipos de representaciones	Registros de representación semiótica	Tratamiento dentro del registro de representación	Unidades significantes
Monofuncionales no discursivos (no-algoritmizable)	**Gráfico** En este registro, la representación de la familia de soluciones de una ecuación diferencial consiste en una familia de curvas. La lectura de la familia de curvas comprende una interpretación global, ya que se trata de discriminar variables visuales y percibir las variaciones correspondientes en los símbolos de la escritura algebraica.	**Códigos de MatLab** Para determinar la familia de curvas, se utilizan los comandos dsolve que permiten resolver la ecuación diferencial y plot que permite graficar la familia de soluciones.	Variable dependiente (y) Variable Independiente (x) Constante de integración

Tipos de representaciones	Registros de representación semiótica	Tratamiento dentro del registro de representación	Unidades significantes
Plurifuncionales discursivos	**Lengua natural** En este registro, la ecuación diferencial acepta como representación una descripción en lenguaje natural. Tal situación puede ser modelada utilizando la ecuación diferencial y la solución al problema planteado la conforma la familia de soluciones de dicha ecuación. Esta representación verbal se relaciona con la capacidad lingüística de las personas y en donde sus conocimientos previos son determinantes para interpretar situaciones contextualizadas.	**Problemas de aplicación** Descripciones, explicaciones, argumentaciones, deducciones, asociaciones verbales, razonamiento. Discriminar la información. Identificación de magnitudes que covarían en la descripción de situaciones de variación. El estudiante puede decir con sus propias palabras lo que sucede en la situación de variación, y de esta forma identificar las magnitudes que cambian y las magnitudes que permanecen constantes. Luego, puede realizar predicciones de la situación a partir de las relaciones que ha establecido.	Variable Independiente (x) Variable dependiente (y) Relación entre los valores de la variable independiente (x) y los valores hallados de la variable dependiente (y). Valores constantes.

Se aplicaron siete talleres que fueron trabajados por los estudiantes, se recibieron las producciones individuales, se utilizó grabadora de voz durante las clases y en la realización de algunas entrevistas. Además, se filmó la sustentación de algunos trabajos.

Los estudiantes recibieron las siguientes indicaciones:

1. Para **TODAS** sus **RESPUESTAS Y ANOTACIONES** por favor usar **COLORES DE TEXTO** diferentes al negro.

2. Trabajar en el documento, considerando el siguiente formato al momento de guardar: **SuNombre_TallerX_ED_ IngSistemas_Fecha.**
3. Una vez terminado enviar al correo de la profesora.

Teniendo en cuenta lo anterior, los estudiantes respondieron en cada documento recibido y lo enviaban por correo electrónico una vez terminaba la clase. Se les indicó, además, que podían tomar fotografías a sus escritos cuando consideraban difícil escribirlo en el propio documento, así mismo copiaron todos los pantallazos, principalmente de las gráficas elaboradas en MatLab, lo cual les servía como soporte en el desarrollo de los diferentes puntos del taller.

5.2 Situación Didáctica

Para que los estudiantes emitieran hipótesis con respecto a la solución de las ecuaciones diferenciales ordinarias lineales de primer orden que les permitiera elaborar procedimientos para resolverlas, se les propuso un conjunto de talleres con preguntas que los pusieran en acción, que los incentivaran a realizar formulaciones, validaciones y finalmente plantear algunas ideas para la institucionalización del saber.

5.2.1 Taller 0

Los estudiantes presentaron algunas dificultades durante la familiarización con el software llevada a cabo a través del Taller 0 (Ver Anexo A) y con el manejo del mismo durante las sesiones, puesto que pasaron por alto algunas indicaciones como las relacionadas con las notaciones, por ende, el software les generaba algún tipo de indicación o mensaje de error, una vez era interpretado por los estudiantes, procedían a corregirlo. Lo anterior se puede notar cuando la estudiante al momento de calcular la inversa de una matriz, no tuvo en cuenta la notación dada; por esta razón, cuando ejecutó la operación tal como se les explicó, el software le arrojó un error, en ese momento cayó en cuenta que había declarado la matriz de otra forma, como se puede ver en la figura 3.

Figura 2. **Respuesta a la pregunta 5. Taller 0. Est.Ang**

Así mismo, hicieron variaciones para encontrar la diferencia entre escribir o no un determinado signo, por ejemplo, el punto y coma (;) al finalizar una expresión:

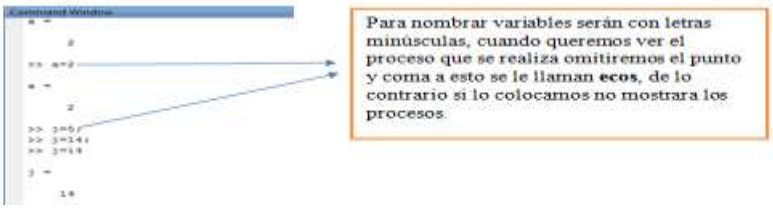


Figura 3. **Respuesta a la pregunta 1. Taller0. Est.Bry**

Cuando se les pidió que copiaran los códigos necesarios, algunos estudiantes reconocieron el editor de MatLab y allí lo copiaron, además recordaron que para poder ejecutarlo se debía guardar primero el trabajo, luego de hacerlo obtuvieron los resultados buscados. A otros fue preciso recordarles el espacio adecuado dentro del software para que copiaran el código que debían ejecutar.

Los comentarios respecto al uso del software fueron positivos, por ejemplo escribieron "Las primeras impresiones con el software son muy cómodas debido a la gran facilidad que presenta para manejarlo, teniendo GUI intuitivo y sencillo de interpretar" (Est.Bry. Taller 0. 18-02-2015), además "Matlab al ser una aplicación que a pesar de ser pagada merece la pena ser comprada por su gran funcionalidad, las múltiples opciones que nos brinda deben ser suficientes para que nosotros siendo ingenieros saquemos el mejor provecho de este software para suplir las necesidades que se nos presenten" (Est.Bry. Taller 0. 18-02-2015). Los estudiantes resaltan no haber utilizado el software antes "se aprendió de manera general las operaciones sencillas del manejo del programa Matlab, ya que antes no lo había utilizado" (Est.Jhe. Taller 0. 18-02-2015), también afirman que ahorra tiempo "se reconoció que este software nos puede ahorrar mucho tiempo ya que puede trabajar con grandes ecuaciones y sistemas lineales" (Est.Jhe. Taller 0. 18-02-2015) y que es eficaz "se identificó que gracias al programa Matlab podemos resolver problemas matemáticos de manera muy rápida y eficaz" (Est.Jhe. Taller 0. 18-02-2015).

Los estudiantes al ser ingenieros de sistemas en formación se adaptaron al software prontamente, debido a que es común que en otros cursos deban usar nuevos softwares dependiendo de las temáticas que se requieran abordar. Además, en los cursos posteriores, como Simulación, se continuará el trabajo con MatLab.

5.2.2 Taller 1

Con el fin de realizar el análisis de congruencia entre los diferentes registros de representación utilizados por los estudiantes, se hizo necesaria la segmentación en las unidades significantes plasmadas por los estudiantes en la resolución del taller.

Registro de partida: Registro algebraico→ **Registro de llegada:** Registro gráfico

Se les propuso que realizaran las gráficas de dos funciones conocidas en matemáticas (Pregunta 1. Taller 1, Ver Anexo B), los estudiantes presentaron dificultad para hacerlo, aunque tenían idea sobre la función $y = \sin(x)$, la vieron como una curva finita y dentro del I y IV cuadrante, o únicamente en el II cuadrante como se puede ver en las siguientes figuras, cuatro estudiantes esbozaron la gráfica izquierda y una estudiante la gráfica derecha:

***Figura 4*. Algunas de las respuestas a la pregunta 1, ítem A.Taller 1.**

Al graficar la función $y = e^x$ se obtuvo las siguientes respuestas:

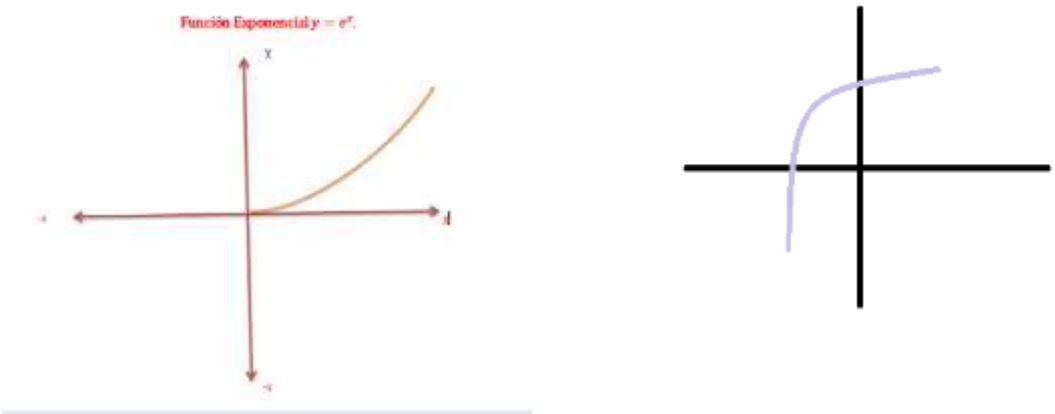


***Figura 5*. Algunas de las respuestas a la pregunta 1, ítem B. Taller 1.**

Dos estudiantes hicieron la gráfica izquierda, una la gráfica derecha y dos estudiantes dejaron el espacio en blanco, uno de ellos escribió: "No tengo conocimiento de cómo realizar esta grafica" (Est.Bry. Taller 1. 25-02-2015). Como se puede notar, ninguna de las gráficas representan a la función dada.

Por esta razón, se les preguntó por la estrategia que utilizaron para realizar las gráficas, ante lo cual manifestaron que recordaron del curso cálculo diferencial. Para realizar la primera gráfica se preguntaban entre ellos u observan lo que hacían sus compañeros. Una estudiante afirma: "La estrategia que utilice, fue recordarme con algunos compañeros de clase, de los cursos anteriores de cálculo, y graficarlos en paint" (Est.Jhe. Taller 1. 25-02-2015).

Correspondencia Semántica: No, a cada unidad significante elemental del registro de partida no le corresponde una unidad significante en el registro de llegada, aunque reconocieron la variable independiente y dependiente.

Unidad semántica: Sí, a cada unidad significante elemental del registro de partida le corresponde una unidad significante en el registro de llegada. Correspondieron la variable x a valores del eje x y la variable y a valores del eje y.

Organización de las unidades: Sí existe igual orden de aprehensión de las unidades significantes presentes en la conversión.

Los estudiantes no tuvieron en cuenta que ambas funciones tenían infinitos valores que la satisfacían, aunque correspondieron las variables de forma correcta, las curvas que graficaron fueron finitas.

Al preguntarles sobre la interpretación que daban a cada línea de código (pregunta 2.2. Taller 1. 25-02-2015), en particular sobre la línea -5; 0.1; 5; escribieron que el primero y último número determinaban el dominio, como tenían dudas sobre el número del medio "(0.1)" se les indicó que este determinaba la variación sobre el eje x. Al respecto una estudiante afirma "Los puntos de (-5 a 5) significa el dominio, de donde inicia hasta donde termina la gráfica en el eje x, y el 0.1 es el punto de corte (Corrección son los saltos)" (Est.Jhe. Taller 1. 25-02-2015). Otro estudiante afirma "Esta línea determina que tan grande se debe obtener la gráfica en términos de X y su punto de corte" (Est.Bry. Taller 1. 25-02-2015). Sobre la línea y=sin(x); manifestaron que se trataba de la función "esta línea de código grafica la función trigonométrica seno" (Est.Ale. Taller 1. 25-02-2015). Sobre el comando plot(x,y) afirmaron que se trababa del plano cartesiano, una estudiante fue más específica al

decir "Comando para graficar, en este caso se grafica al eje Y y al eje X en la gráfica" (Est.Ale. Taller 1. 25-02-2015).

Registro de partida: Registro gráfico → **Registro de llegada:** Registro algebraico

Cuando realizaron las gráficas con el software MatLab (Pregunta 4. Taller 2. 25-02-2015) de las funciones A. $y = \sin(x) + C$, B. $y = e^x + C$, los estudiantes interpretaron la C de la siguiente forma: "La **"C"**[7] hace referencia a la constante de la función" (Est.Jhe. Taller 1. 25-02-2015), "La C en las funciones hace referencia a constantes" (Est.Bry. Taller 1. 25-02-2015), "Cuando la función tiene una constante le podemos dar cualquier valor" (Est.Ang. Taller 1. 25-02-2015), "Hace referencia a la familia de curvas que pertenece a la función" (Est.Ale. Taller 1. 25-02-2015), "La c hace referencia o toma cualquier valor en la función y se obtiene una familia de curvas" (Est.Hei. Taller 1. 25-02-2015). Según las anteriores respuestas los estudiantes tienen claro que una constante representa diferentes valores y al observar el cambio que genera en la gráfica, la relacionan con las curvas que van obteniendo y al parecer como se trata de la misma función usan el término "familia", al respecto una estudiante afirma:

Todos los esquemas anteriores se ejecutaron en una misma gráfica pero con un valor diferente (en este caso C tomo varios valores); por eso hay unas gráficas más angostas que otras y por ende todas representan la misma función exponencial solo que en coordenadas diferentes.

Figura 6. **Respuesta a la pregunta 4. Taller 1. Est.Ale. 25-02-2015**

Los estudiantes asignaron valores a la constante C, y afirmaron "En la función $y = sin(x) + \boldsymbol{C}$[8]**,** lo que se hace es darle valores a la C, en este caso son algunas curvas de la familia de $y = sen(x) + c$, dando valores a C de -5 a 5" (Est.Jhe. Taller 1. 25-02-2015). Al preguntarles por el resultado obtenido los estudiantes respondieron "lo que obtenemos es una familia de graficas de una misma función donde C se le dan diferentes valores" (Est.Bry. Taller 1. 25-02-2015), "La gráfica de la función $y = \sin(x) + C$ que es una familia de curvas" (Est.Ale. Taller 1. 25-02-2015).

Cuando se les pidió que realizaran la gráfica $y = e^x$ (Pregunta 3. Taller 1. 25-02-2015), los estudiantes sabían dónde debían hacer el cambio dentro del código, sin embargo, se les indicó que para ello debían escribir $y = exp(x)$, al tenerlo en cuenta lo ejecutaron y obtuvieron la gráfica correspondiente. Esto se puede notar en

[7] La estudiante resaltó en negrilla dicha letra.
[8] La estudiante resaló en negrilla la letra C en la primera ecuación

los comentarios de algunos estudiantes "Lo que fue necesario tener en cuenta para graficar la función exponencial fue: En el editor de MatLab se cambió la fórmula de la función y=sen(x); por y=exp(x); y se ejecutó la gráfica de la función exponencial; con el mismo salto de gráfica y dominio de la función seno" (Est.Ale. Taller 1. 25-02-2015), otros estudiantes afirmaron "Lo necesario para graficar esta función fue el saber que e^x no es válido en el lenguaje de MatLab y por el contrario lo correcto es "y=exp(x)"" (Est.Bry. Taller 1. 25-02-2015.), "para realizar esta grafica fue necesario que la docente encargada nos aclarara la notación de la función en matlab, es decir que la función $y=e^x$ se denota como y=exp(x), gracias a esta aclaración se logró graficar la función" Est.Jhe. Taller 1. 25 -02-2015).

Cuando se les preguntó lo que fue necesario tener en cuenta para graficarla los estudiantes afirmaron "Para graficar esta función fue necesario tener en cuenta que en lugar de la **C**, que significa una constante de la función, lo que hacemos es darle valores, en este caso entre -5 y 5" (Est.Jhe. Taller 1. 25-02-2015), "Lo necesario para obtener las gráficas de las funciones y obtener la familia lo único necesario fue cambiar el valor de la constante C" (Est.Bry. Taller 1. 25-02-2015), "Fue necesario entender para realizar esta grafica que **c** toma cualquier valor para realizar nuestra grafica" (Est.Hei. Taller 1. 25-02-2015, resalta la letra c). Por el contrario otra estudiante tuvo en cuenta los ejes X y Y, así como el título, cambiar el color de la gráfica, haciendo una descripción detallada "En la gráfica anterior podemos observar la ubicación del eje Y y del eje X. Además de que se le agregó un título a la función. Ahora a la gráfica de la función exponencial y=sin(x)+c; le agregamos 'ro' en el comando de gráfica (plot) para que la figura de la función nos salga con bolitas" (Est.Ale. Taller 1. 25-02-2015).

Se le agregó a la función en la parte superior hold on (El cual mantiene en la misma grafica todos los cambios que se realicen en el editor de Matlab); y en la parte inferior se le añadió hold of. Además se le aumento xlabel('Ejex'), muestra ala eje X en la gráfica y ylabel ('Ejey') que muestra al eje y en la gráfica. Por ultimo con la palabra title('Grafica de la función y=exp(x)+c') se le complemento el nombre a la gráfica de la figura anterior.

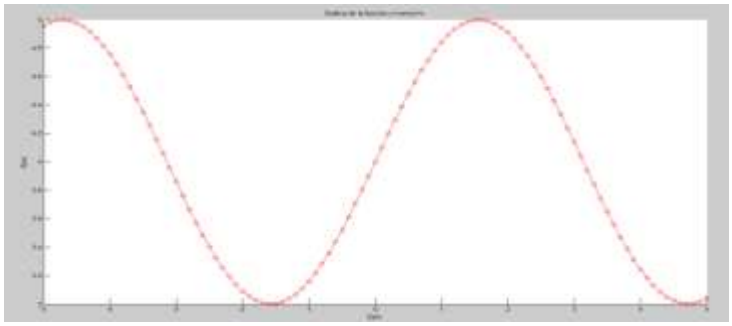


Figura 7. **Respuesta a la pregunta 4.3. Taller 1. Est.Ale. 25-02-2015**

Al preguntarles sobre la diferencia entre $y = sin\ (x)$ y $y = sin\ (x) + C$ (Pregunta 5), una estudiante afirmó "la diferencia es que $\mathrm{y} = \sin\ (\mathrm{x})$ representa una sola gráfica de la familia de la función seno, mientras que, la función $\mathrm{y} = \sin\ (\mathrm{x}) + \mathrm{C}$ representa la mayoría por no decir todas las gráficas que representa la familia de la función seno" (Est.Ale. Taller 1. 25-02-2015). Otra estudiante hace alusión al valor en particular que tiene C al no aparecer en la expresión $y = sin\ (x)$ "La diferencia es que $y = sin\ (x)$ es solo la gráfica de la función específica de $y = sin\ (x) + 0$, pero cuando tenemos la función $y = sin(x) + C$, es la familia de esta función dándole valores a C, en este caso de -5 a 5" (Est.Jhe. Taller 1. 25-02-2015), "La diferencia entre "sin(x)" y "sin(x)+C" es que la primera solo nos da la grafica exacta de la función y la segunda nos dará la grafica de acuerdo al número complemento que se le asigne" (Est.Bry. Taller 1. 25-02-2015), "En esta función (y=sin(x)) la gráfica se estructura por una sola curva sobre el eje x, y. En esta función (y=sin(x)+C) la gráfica se estructura por varias curvas sobre el eje x, y.

Cuando se les pregunta por el nombre que le darían a las expresiones $\mathrm{y} = \sin(\mathrm{x})$ y $\mathrm{y} = \sin(\mathrm{x}) + \mathrm{C}$ responden "Es la función general de una Familia de curvas" (Est.Jhe. Taller 1. 25-02-2015), "la función y es igual a la variable seno de x más la constante (c) que tiene cualquier valor" (Est.Ang. Taller1. 18-02-2015),"$\mathrm{y} = \sin\ (\mathrm{x}) + \mathrm{C}$ Familia de curvas de la función seno $\sin\ (\mathrm{x})$, $\mathrm{y} = \mathrm{e}^{\mathrm{x}} + \mathrm{C}$ Familia de curvas de la función exponencial e^{x}" (Est.Ale. Taler 1.18-02-2015), "Función trigonométrica y la otra es una función exponencial" (Est.Hei. Taller 1. 25-02-2015).

Los estudiantes tiene claro que la variable independiente x corresponde a los valores del eje x y que la variable dependiente y corresponde a valores del eje y. También, que los valores que se asignan a la constante C en la expresión algebraica generan diferentes curvas. Además, tienen en cuenta que dicha constante puede tomar infinitos valores, por lo tanto se pueden obtener infinitas curvas. En conclusión:

Correspondencia Semántica: Sí, a cada unidad significante elemental del registro de partida le corresponde una unidad significante en el registro de llegada.

Unidad semántica: Sí, a cada unidad significante elemental del registro de partida le corresponde una unidad significante en el registro de llegada. Correspondieron la variable x a valores del eje x y la variable y a valores del eje y.

Organización de las unidades: Sí existe igual orden de aprehensión de las unidades significantes presentes en la conversión.

Al pedirles que comparen la solución de la ecuación A. con la ecuación B (Pregunta 4), opinan que "Que la ecuación A es un polinomio que arrojara siempre como resultado un número mientras que B arrojara como resultado una familia de la función solución" (Est.Ale.25-02-2015), "Al observar las dos ecuaciones observamos que la primera ecuación es un polinomio que arroja como resultado 4 números y la segunda ecuación nos dará como resultado una familia de funciones." (Est.Bry.25-02-2015) "Que la primera ecuación es un polinomio que arroja como resultado un número y la segunda es una ecuación diferencial que da como resultado la familia de funciones" (Est.Jhe.25-02-2015) "Que son ecuaciones diferenciales ordinarias, sino que hay que despejarlas para que queden de tipo lineal, la diferencia es que en una ecuación le ponen condiciones que pasan por puntos para graficar la ecuación, pero son las mismas ecuaciones" (Est.Ang.25-02-2015) "que las dos ecuaciones tienden a tener condiciones" (Est.Hei.25-02-2015). Lo anterior refleja, que tres estudiantes tienen claro lo que representa para cada uno la solución de las dos ecuaciones, mientras que los otros dos presentan confusiones.

Teniendo en cuenta lo anterior, algunos estudiantes tienen clara la diferencia entre una ecuación polinómica y una diferencial, en donde tienen más experiencia resolviendo ecuaciones polinómicas, pero a partir de la resolución del taller se puede notar que entienden que la solución de una ecuación diferencial consiste en una familia de funciones y esto debido a la constante C.

Se les pidió que escribieran las conclusiones sobre el trabajo realizado (Pregunta 5). Las conclusiones compartidas por los estudiantes fueron: "Con el taller realizado en la clase anterior se aprendió a encontrar y graficar las soluciones de los polinomios de grado 4 y de las ecuaciones diferenciales de orden 1.También se aclaró que es una constante. Constante: Es un número que puede variar de acuerdo a la solución requerida". (Est.Ale.25-02-2015). "El aprender a diferenciar como resolver una ecuación diferencial y qué tipo de resultados nos arrojara es necesario para el aprendizaje de esta materia y a través de la solución de ejercicios prácticos lograremos no depender de un programa muy útil como Matlab sino que con los conocimientos de cursos anteriores nos proporcionaran las herramientas necesarias para llegar a las soluciones". (Est.Bry.25-02-2015). "Con el resultado del trabajo presentado se concluye que las ecuaciones son iguales es decir son ecuaciones diferenciales ordinaria, la diferencia es que en una arroja el resultado y en otra da un gráfica. *Matlab es una herramienta esencial para graficar funciones que satisfacen una ecuación diferencial." (Est.Ang.25-02-2015). "Con el siguiente trabajo logramos identificar cuando se expresan en términos de rapidez de variación de una variable con respecto a otra. *Matlab es el método más utilizado para resolver numéricamente problemas de ecuaciones diferenciales." (Est.Hei.25-02-2015).

1. Por medio de este trabajo aprendí a cómo resolver ecuaciones en MatLab, y como debo escribirla para que pueda ser resuelta.
2. Recordé que en un Polinomio obtenemos como resultado un número y en una ecuación diferencial obtenemos como resultado una función.
3. Aprendí que en las ecuaciones diferenciales el orden no nos determina el número de soluciones porque son infinitas pero si el número de constantes.

Figura 8. **Respuesta a la pregunta 5. Taller 2. Est.Jhe**

Es importante tener en cuenta que una estudiante trabajó las dos ecuaciones a lo largo del taller como si se trataran de ecuaciones del mismo tipo, y lo hizo hasta en los comentarios finales: "las ecuaciones son iguales es decir son ecuaciones diferenciales ordinarias". Luego, no ha comprendido la característica de una ecuación diferencial ordinaria, es decir contener la derivada de una variable dependiente con respecto a una variable independiente Al finalizar se retomó el tema sobre la familia de soluciones de una ecuación diferencial.

5.2.3 Taller 2

Registro de partida: Registro algebraico → **Registro de llegada:** Registro gráfico

Cuando se les pidió que realizaran la gráfica de un polinomio (Pregunta A3. Taller 2. 04-03-2015) y que determinaran la relación con las raíces encontradas las respuestas fueron "Se encontró que las raíces (soluciones) halladas son algunos de los valores que toma x en la gráfica y que cuando X tome algún valor de las raíces encontradas (Y) siempre va a ser 0". (Est.Ale. Taller 2. 04-03 25-02-2015).

La relación encontrada fue en los puntos donde X toma los valores (-2,-1,1, 3), que son los puntos de corte obtenidos en la solución anterior Y va hacer igual a 0.
Es decir:
X=-2 entonces Y=0
X=-1 entonces Y=0
X=1 entonces Y=0
X=3 entonces Y=0

Figura 9. **Respuesta a la pregunta A.3. Taller 2. Est.Jhe. 04-03-2015**

La relación de los resultados 3.0, 1.0, -1.0 y -2.0 con la gráfica, es que estos puntos son los puntos de corte con el eje X cuando Y=0". (Est.Bry. Taller 2. 04-03 25-02-2015). Lo escrito lo confirmó a través de la figura 26:

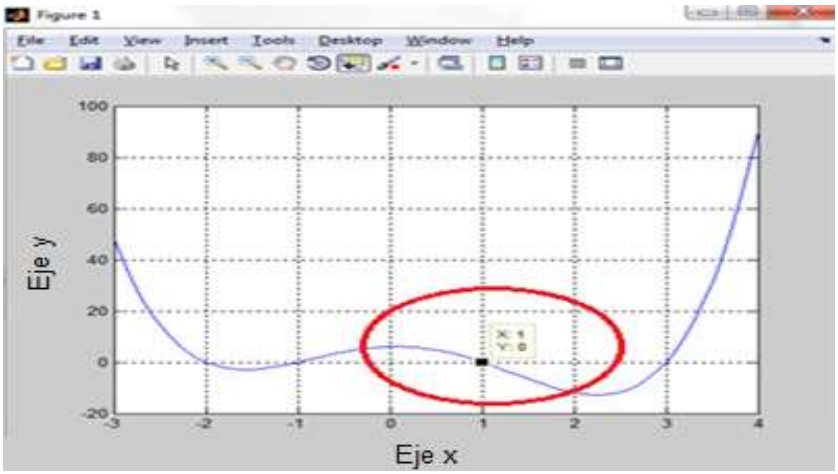


Figura 10. **Respuesta a la pregunta A.3. Taller 2. Est.Bry**

"En la solución encontrada vemos que el eje x tiende de -3 a 4 y en el eje y de 20 a 80" (Est.Ang. Taller 2. 04-03 25-02-2015). "Que se grafica entre el eje x y y dependiendo de los valores que se ubiquen" (Est.Hei. Taller 2. 04-03-2015). Se puede notar que los tres primeros estudiantes tienen claro lo que las raíces de un polinomio se ubican en la respectiva gráfica, generando los puntos de corte.

A través del software también resolvieron ecuaciones. Para que notaran la diferencia, se les presentó en un primer momento una ecuación polinómica y una ecuación diferencial (Taller 2. Ver Anexo C). Al resolver la ecuación polinómica todos los estudiantes dejaron indicadas las respuestas tal como las arrojó el software (Figura 4).

Figura 11. **Respuesta a la pregunta A.1. Taller 2. Est.Ale**

Sin embargo, algunos estudiantes fueron más específicos (Figura 5) escribiendo por ejemplo "cuando se tiene un código y deseemos obtener el resultado lo que debemos hacer es copiar en el editor y al correrlo obtendremos el resultado en el Comand Windows. Lo que obtenemos al ingresar la ecuación son raíces" (Est.Bry. Taller 2. 04-03-2015).

Otra estudiante escribió:

Figura 12. **Respuesta a la pregunta A.1. Taller 2. Est.Jhe. 25-02-2015**

Registro de partida: Registro gráfico → **Registro de llegada:** Registro algebraico

Cuando resolvieron la ecuación diferencial (Pregunta 2, Taller 2. Ver Anexo C) con el software (Figura 5), los estudiantes no presentaron dificultades (Figura 6).

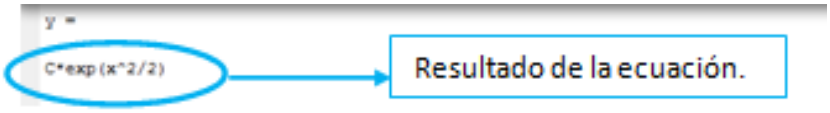


Figura 13. **Respuesta a la pregunta B.1. Taller 2. Est.Jhe**

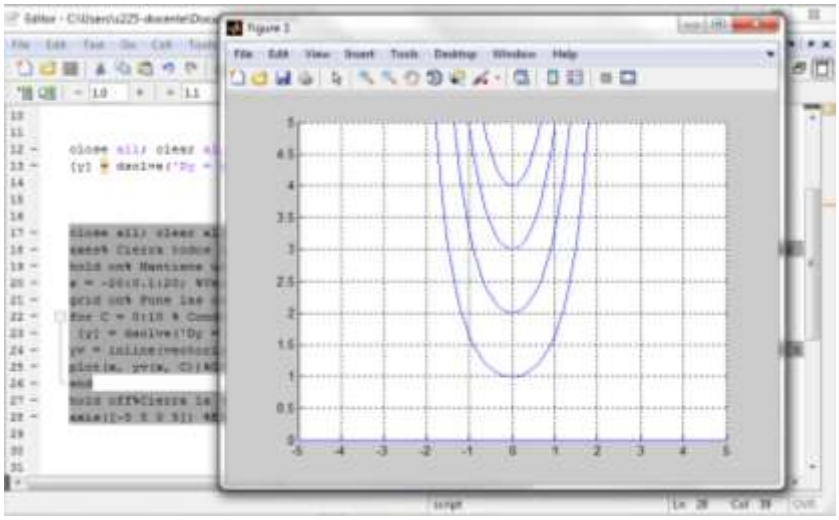


Figura 14. **Respuesta a la pregunta B.1. Taller 2. Est.Bry**

Como el código compartido les permitiría realizar las gráficas de la solución de la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = xy$ con MatLab, se les preguntó por la relación entre la gráfica obtenida y la solución encontrada con el software, la cual fue comprobada analíticamente. Al respecto dijeron, "La solución encontrada con la gráfica obtenida se relacionan entre sí porque la ecuación B.$\frac{dy}{dx} = xy$ Representa una sola gráfica de la familia de la función solución encontrada" (Est.Ale. Taller2. 25-02-2015), "Nos damos cuenta se grafican varias curvas en diferentes puntos pero sigue permaneciendo su forma." (Est.Ang. Taller 2. 04-03-2015) "La relación es que es la

gráfica de la familia de funciones encontrada en la ecuación anterior, que es una familia de parábolas entre Y=1-2-3- 4" (Est.Jhe. Taller 2. 04-03-2015). Dos estudiantes dejan la pregunta sin responder.

Correspondencia Semántica: sí, a cada unidad significante elemental del registro de partida le corresponde una unidad significante en el registro de llegada.

Unidad semántica: Sí, a cada unidad significante elemental del registro de partida le corresponde una unidad significante en el registro de llegada.

Organización de las unidades: Sí, existe igual orden de aprehensión de las unidades significantes presentes en la conversión.

Al preguntarles por la estrategia que utilizarían para verificar que el resultado obtenido corresponde a la solución de la ecuación diferencial, tres estudiantes escribieron "Se podrían utilizar dos estrategias: 1. Resolverla por solución de una ecuación diferencial ordinaria. 2. Resolverla por variables separables" (Est.Ale. Taller 2. 04-03-2015), "Para ver si la solución de la ecuación diferencial es correcta podemos utilizar dos métodos aprendidos en clase como lo son Resolución de ecuaciones diferenciales por variables separadas O solución de una ecuación diferencial." (Est.Bry.25-02-2015). Los dos estudiantes pegaron las fotografías de sus soluciones tal como se ve en la figura 9.

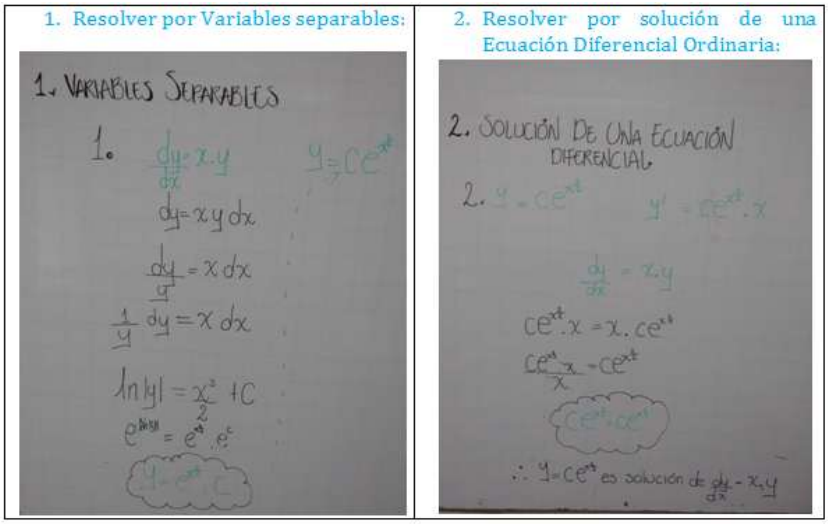


Figura 15. **Respuesta a la pregunta B.2. Taller 2. Est.Jhe**

Los otros dos estudiantes escribieron "**dy /dx= xy**[9] En esta fórmula lo que hacemos es despejar a **y** derivando" (Est.Ang. Taller 2. 04-03-2015), "La solución que realizaría seria despejando cada variable" (Est.Hei. Taller 2. 04-03-2015), se puede notar que existe confusión sobre la estrategia que utilizarían al no nombrar ningún método o realizar alguna operación específica.

En la pregunta sobre la estrategia que utilizaría para verificar que el resultado obtenido corresponde a la solución, los estudiantes respondieron "Reemplazando una por una las raíces (soluciones) encontradas de la ecuación en el término de X de A. $x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6 = 0$" (Est.Ale. Taller 2. 04-03-2015). "Para verificar que las respuestas de la ecuación son correctas lo único que tendremos que hacer es tomar cualquiera de los resultados y reemplazarlo en la ecuación y esto nos tendrá que dar cero" (Est.Bry. Taller 2. 04-03-2015). "Para verificar la solución, se reemplaza uno de las raíces resultados en la función y si nos da =0, estaría bien; por tal motivo como realice la operación los resultados son verdadera. (Est.Jhe. Taller 2. 04-03-2015). "Otra solución para esa ecuación diferencial es derivar las veces que sea necesaria." (Est.Ang. Taller 2. 04-03-2015). "Derivando la ecuación diferencial" (Est.Hei. Taller 2. 04-03-2015). Las tres primeras respuestas muestran dominio sobre la forma de verificar un valor como raíz de un polinomio, sin embargo, las últimas dos respuestas muestran confusión puesto que al parecer para ellos el polinomio representa una ecuación diferencial.

Al preguntarles por la (s) diferencia (s) entre las dos ecuaciones y sus respectivas soluciones (Pregunta 3), algunos estudiantes tenían claro que la primera ecuación involucraba a un polinomio, mientras que la segunda ecuación se trataba de una ecuación diferencial (Ver Anexo H). Un ejemplo es:

[9] Las letras en negrilla fueron resaltadas por la estudiante

$$A. x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6 = 0$$

La diferencia en la primera ecuación es, que es un polinomio por lo tanto siempre nos va a dar como resultado un número o varios dependiendo del grado de la ecuación, en este caso dieron cuatro soluciones porque el grado de la ecuación es cuatro.

$$B. \frac{dy}{dx} = xy$$

La diferencia de la segunda ecuación es, que es una ecuación diferencial por su forma de escritura y la solución es una función de la familia de las curvas de ella, y el orden no nos determina el número de soluciones porque son infinitas, pero si el número de constantes.

Figura 16. **Respuesta a la pregunta 3. Taller 2. Est.Jhe**

Al reflexionar sobre la solución de la ecuación polinómica algunos escribieron que se trataba de valores numéricos y que la cantidad de estos depende del grado del polinomio y sobre la solución de la ecuación escribieron que la solución es una función o familia de las curvas de ella, en donde el orden determina el número de constantes. Esto último lo escribieron tal vez porque en los temas se estaba trabajando problemas de valor inicial. Por tal motivo, hacen alusión a este aspecto. Igualmente afirman que se trata de una familia de parábolas.

5.2.4 Taller 3

Registro de partida: Registro Verbal → **Registro de llegada:** Registro algebraico

Se les presentó un problema que requería de la resolución de una ecuación diferencial ordinaria lineal de primer orden. Para esto, la ecuación diferencial estaba planteada dentro del problema (Taller 3.Ver Anexo D).

PRIMER PROBLEMA:

Un ingeniero decide construir una edificación en una zona urbana con una dinámica de crecimiento dictada por la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{dP}{dt} = (Cost)P,$$

Se les preguntó por la forma que utilizarían para saber el tipo de crecimiento que tiene la población (Ítem A. Taller 3. 11-03-2015), los estudiantes respondieron: "El ingeniero podría saber el tipo de crecimiento de la población resolviendo la ecuación diferencial de primer orden por el método de variables separables" (Est.Ale.

Taller 3. 11-03-2015), "El ingeniero puede saber el tipo de crecimiento que tiene la población, resolviendo la Ecuación Diferencial de Primer Orden por el método de variables separables. Que da como Solución: p =C*exp(sin(t))" (Est.Jhe. Taller 3. 11-03-2015), "El ingeniero para saber el crecimiento de la población tendrá que resolver la ecuación diferencial de primer orden por la solución de **Variables Separables**" (Est.Bry. Taller 3. 11-03-2015, resalta en negrilla las dos palabras indicadas), "Para saber el tipo de crecimiento que tiene la población el ingeniero debe resolver la Ecuación dada" (Est.Ang. Taller 3. 11-03-2015), "Podemos saber el tipo de crecimiento despejando P de la ecuación inicial" (Est.Hei. Taller 3. 11-03-2015). Los tres primeros estudiantes recurren al método de variables separables, resaltando el procedimiento algebraico que se utiliza dentro del registro de representación algebraica.

Al preguntarles sobre el significado que tienen para ellos la letra P y t (Ítem B. Taller 3. 11-03-2015), afirmaron: "P es la población y t es el tiempo con el que crece la población. P en la ecuación diferencial es la variable dependiente y t la variable independiente." (Est.Ale. Taller 3. 11-03-2015). "Para mí las letras p y t, significan en mis términos comunes las variables X y Y, es decir las variables dependientes e independientes. En este caso la variable independiente seria (t) y la dependiente (p), la población crece con respecto al tiempo, de tal manera se está derivando población (p) con respecto al tiempo (t)." (Est.Jhe. Taller 3. 11-03-2015). "**P:** Población (Es la variable dependiente de la E.D) **t:** Tiempo con el que crece la población (Es la variables independiente)". (Est.Bry. Taller 3. 11-03-2015). "P=es el eje Y, la variable que se va encontrar. T= es el eje X" (Est.Ang. Taller 3. 11-03-2015). "El significado que tiene la p para mi es la población y el significado de la t es el tiempo." (Est.Hei. Taller 3. 11-03-2015).

Los estudiantes afirmaron que la P se refería a la población y la t al tiempo, encontrando una relación de dependencia aunque no se afirme explícitamente, puesto que las identificaron como variable dependiente e independiente, respectivamente. Además relacionaron estas variables con las variables X y Y, o directamente con los ejes.

También, se les preguntó si existía alguna relación entre P y t (Ítem C), y afirmaron: "Sí, la relación es que el crecimiento de la población aumenta a medida que pasa el tiempo. Por ello P en la ecuación diferencial $\frac{dP}{dt} = (Cost)P$, es la variable dependiente y t la variable independiente". (Est.Ale. Taller 3. 11-03-2015). "Si existe relación entre p y t, porque la población crece con respecto al tiempo, entre más tiempo pase mayor va hacer la población." (Est.Jhe. Taller 3. 11-03-2015). "La relación que existe entre **P** y **t** es que P que es la población crecerá mucho más dependiendo de **t** que es el tiempo que pase para que esto suceda. Es decir que son directamente proporcionales que a mayor tiempo, mayor será el crecimiento de la población" (Est.Bry. Taller 3.

11-03-2015). "La relación entre P y t, es que las dos son ejes, pero P es (Matriz) y t es un (vector). (Est.Ang. Taller 3. 11-03-2015). "La relación que hay entre la p y la t es q para calcular el crecimiento de la población se necesita del tiempo para poder emplear la formula de la ecuación diferencial." (Est.Hei. Taller 3. 11-03-2015).

Todos los estudiantes afirman que existe relación entre la población y el tiempo, sin embargo, son diferentes las relaciones que establecen, afirman que a medida que pasa el tiempo la población aumenta, un estudiante escribe que son directamente proporcionales, otra estudiante por el contrario, hace alusión a los ejes incluyendo términos como matriz y vector, algo que no se había mencionado durante la clase, y el último estudiante encuentra la necesidad del tiempo para poder emplear la fórmula dada.

Correspondencia Semántica: sí, a cada unidad significante elemental del registro de partida le corresponde una unidad significante en el registro de llegada.

Unidad semántica: Sí, a cada unidad significante elemental del registro de partida le corresponde una unidad significante en el registro de llegada.

Organización de las unidades: Sí, existe igual orden de aprehensión de las unidades significantes presentes en la conversión.

Registro de partida: Registro algebraico → **Registro de llegada:** Registro gráfico

Al preguntarles sobre lo que puede hacer el ingeniero para determinar la respuesta (Ítem D. Taller 3. 11-03-2015), proponen "El ingeniero para determinar la respuesta debe dar valores a (t) y a (c), así como lo hacemos en Matlab en donde (t) es la variable independiente y (c) es la constante. (Est.Jhe. Taller 3. 11-03-2015). "El ingeniero debe resolver la ecuación para determinar el crecimiento de la población" (Est.Ang. Taller 3. 11-03-2015). "Lo que debe hacer el ingeniero para determinar la respuesta es saber el tiempo en el que esta y la cantidad de poblacion que por el momento hay de ahi ps solo emplear la formula que nos dice cual es la cantidad de poblacion que hay actual" (Est.Hei. Taller 3. 11-03-2015).

Como ya se había dicho en el punto A, el ingeniero para determinar la respuesta de la ecuación diferencial $\frac{dP}{dt} = (\boldsymbol{Cost})\boldsymbol{P}$, debe resolverla por el método de variables separables.
El ingeniero al resolver la ecuación diferencial por variables separables obtiene la siguiente solución:

$$P = c * e^{sent}$$

Y para obtener la gráfica y la solución de la ecuación diferencial en Matlab. El ingeniero modifico el código de la nota 1 y todas la variables que tenían (y) las sustituyo por la variable dependiente P y las que tenía como (x) las reemplazo por la variable independiente t.

El ingeniero luego de resolver la E.D por el método de Variables Separables obtendrá la siguiente ecuación:

$$P = C * e^{sen(t)}$$

Y para obtener cualquier respuesta lo único que tendrá que hacer es dar valores a **t** que es la variable independiente y a **C** que es un valor constante en la ecuación.

Figura 17. **Algunas respuestas de los estudiantes al ítem D. Parte 1**

Los estudiantes afirman que es necesario resolver la ecuación diferencial, proponen el método de variables separables, sin embargo, empiezan a tener en cuenta el software como un método usado para resolverla al proponer algunas acciones haciendo uso de este como "para determinar la respuesta debe dar valores a (t) y a (c), así como lo hacemos en Matlab" y "Y para obtener la gráfica y la solución de la ecuación diferencial en Matlab."

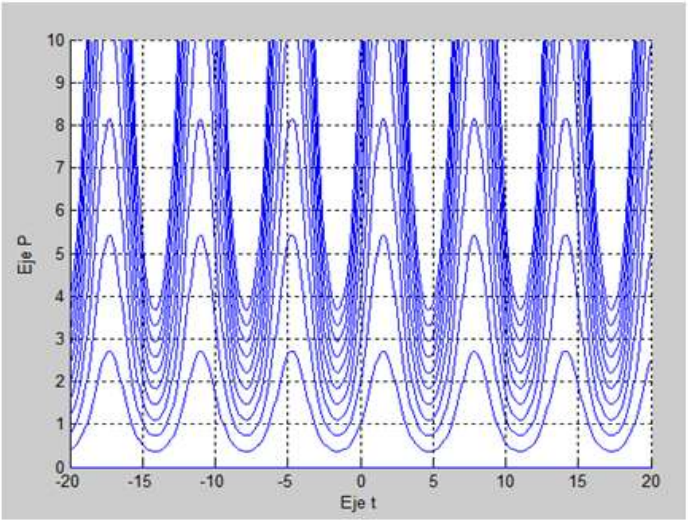
Al preguntarles sobre la solución que debe obtener el ingeniero (Pregunta 1), afirman "Una función que pertenece a la familia de funciones de: $P = c * e^{sent}$." (Est.Ale. Taller 3. 11-03-2015). "La solución que debe obtener el ingeniero de la E.D es: $P = \square * e^{sen(t)}$" (Est.Bry. Taller 3. 11-03-2015).

La solución que obtiene el ingeniero es la familia de funciones de la ecuación con respecto al tiempo, con la solución encontrada podrá saber el crecimiento de la población en el tiempo que el determine, ya que la solución de una ecuación diferencial es la familia de funciones.

p =C*exp(sin(t))

Figura 18. Respuesta a la pregunta 1. Parte 1. Taller 3. Est.Jhe. 11-03-2015

Los dos estudiantes restantes dieron por respuesta:



Esta es la solución que el ingeniero obtiene por medio del código que digito.

Figura 19. **Respuesta a la pregunta 1. Parte 1. Taller 3. Est.Ang. 11-03-2015**

Tres estudiantes escribieron la expresión algebraica dejando de lado la gráfica como solución de la ecuación diferencial.

A la pregunta sobre la forma de determinar si la respuesta encontrada es la correcta (Pregunta 3. Taller 3.Ver anexo J), entre las respuestas se tienen:

La respuesta se puede verificar resolviendo la ecuación:

$$\frac{dP}{dt} = (Cost)P$$

Que debe dar como resultado:

p =C*exp(sin(t)).

Para verificar, Se reemplaza la función encontrada en la ecuación donde esta P colocamos C*exp(sin(t)), y por otra parte se debe derivar la solución: p =C*exp(sin(t)) para poderla reemplazar al otro extremo donde encontramos (dp), y resolvemos la ecuación que nos quedó por partes y debemos llegar a la misma solución a los dos extremos, y así determinamos que la función es solución de la ecuación.

Figura 20. **Respuesta a la pregunta 3. Parte 1. Taller 3. Est.Jhe**

Tres estudiantes afirman que usando el software pueden comprobar si la solución encontrada por el método de variables separables es la correcta (ver Anexo Q). Una estudiante afirma que se debe derivar y reemplazar tanto la función como su derivada para analizar si se obtiene una igualdad. El estudiante respondió "Si la respuesta es correcta" (Est.Hei. Taller 3. 11-03-2015).

Por otro lado, cuando se les preguntó sobre lo que significaba para ellos una ecuación diferencial lineal de primer orden (Pregunta 4, Taller 3, Ver Anexo D) respondieron: "Una ecuación diferencial ordinaria de primer orden es una ecuación diferencial ordinaria donde intervienen derivadas de primer orden respecto a una variable independiente". (Est.Hei. Taller 3. 11-03-2015). "Para mí una ecuación diferencial Lineal de Primer orden es la que solo se ha derivado una vez y sus coeficientes están en términos de x y ser de grado 1" (Est.Jhe. Taller 3. 11-03-2015). "Significa que la ecuación diferencial es lineal porque sus coeficientes en términos de x son constantes y la ecuación es de grado 1, de primer orden significa que la ecuación esta derivada una sola vez" (Est.Ale. Taller 3. 11-03-2015). "Significa que la ecuación es lineal porque sus coeficientes en términos de x son constantes y la ecuación también será de grado 1 y por ser lineal su grado será 1 es decir que la ecuación solo se tiene una derivada" (Est.Bry. Taller 3. 11-03-2015). "Una Ecuación Diferencial en primer orden significa que en la ecuación interviene derivadas de primer orden respecto a una sola variable independiente" (Est.Ale. Taller 3. 11-03-2015).

En las respuestas se puede resaltar algunos términos característicos dentro de la definición de ecuación diferencial ordinaria, lineal y de primer orden. Sobre ordinaria sólo un estudiante se refirió a que intervienen derivadas con respecto a una variable independiente, para referirse a que es lineal hacen alusión a que el grado es 1 y "es lineal porque sus coeficientes en términos de x son constantes" y para hacer alusión a lo que significa para ellos que sea de primer orden utilizan expresiones como "solo se ha derivado una vez", "está derivada una vez" y "solo se tiene una derivada".

Así mismo, cuando se les preguntó si existía relación entre la gráfica encontrada y la pregunta planteada al ingeniero (Pregunta 2. Taller 3. Ver Anexo D), los estudiantes respondieron:

La grafica que se obtiene es la gráfica de la función solución que tiene relación con la gráfica de seno, ya que no tendría ningún sentido graficar la ecuación inicial, y de esta manera el ingeniero puede observar que la población crece dependiendo del tiempo.

La grafica se muestra de acuerdo a la respuesta que obtuvimos de la E.D. Esta grafica es igual a **Sen(t)** y esta aumenta de acuerdo a **t** como variable independiente y que el ingeniero le puede dar cualquier valor para encontrar la población en determinado tiempo. La grafica muestra la Familia de soluciones de la ecuación diferencial.

Figura 21. **Algunas respuestas de los estudiantes a la pregunta 2. Parte 1. Taller 3. 11-03-2015**

Otros estudiantes copiaron la gráfica encontrada (Ver Anexo I) y a eso le agregaron: "Que la población aumenta a medida que transcurre el tiempo lo podemos notar por la gráfica que va ascendiendo por los valores que le asignamos." (Est.Ang. Taller 3. 11-03-2015). "A medida que varía el tiempo su crecimiento aumenta" (Est.Hei. Taller 3. 11-03-2015).

Según lo anterior, se puede notar que tres estudiantes concluyen que la gráfica representa a la solución "la gráfica muestra la familia de soluciones de la ecuación diferencial", "es la gráfica de la función solución" los demás analizan el comportamiento de las curvas pero no especifican su relación con la solución. Hacen alusión a las variables dadas en el problema: la variable independiente tiempo (t) y la variable dependiente Población (P). Además, como el problema no tiene valores constantes, estos no son señalados por los estudiantes.

Correspondencia Semántica: Sí, a cada unidad significante elemental del registro de partida le corresponde una unidad significante en el registro de llegada.

Unidad semántica: Sí, a cada unidad significante elemental del registro de partida le corresponde una unidad significante en el registro de llegada.

Organización de las unidades: Sí, existe igual orden de aprehensión de las unidades significantes presentes en la conversión.

5.2.5 Taller 4

Registro de partida: Registro algebraico → **Registro de llegada:** Registro gráfico

Al momento de plantearles una serie de funciones (Pregunta 1. Taller 4. Ver Anexo E) para que los estudiantes determinaran la correspondiente EDO lineal de primer orden, los estudiantes una vez plantearon la ecuación diferencial, también la resolvían y al hacerlo ponían la constante C, mientras que las funciones dadas no las tenían. Sólo una estudiante resaltó este hecho, indicando que para las funciones dadas la C valía cero.

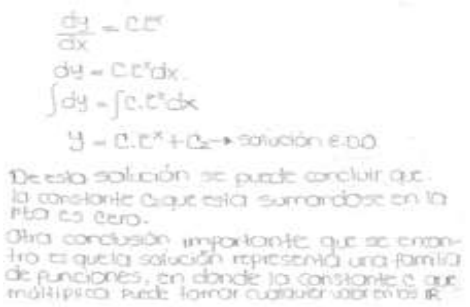


Figura 22. **Respuesta a la pregunta 1, ítem A. Taller 4. Est.Ale**

En la respuesta de la Figura 22, la estudiante relaciona el hecho de que sea una familia de funciones por la constante C que multiplica, aquí se debe aclarar que es precisamente por la C que se suma, que ella ha denotado como C_2.

Se les pidió que plantearan una ecuación para las diferentes funciones (Ver Anexo L), tres estudiantes tuvieron en cuenta la C, en la respuesta

Si, la Ecuación para todas Sería $\frac{dy}{dx} = K.e^x$ su solución sería:
$\int \frac{dy}{dx} = \int K.e^x dx \rightarrow y = K.e^x + C$, donde $K \in \mathbb{R}$, donde la constante C es 0.

Figura 23. **Respuesta a la pregunta 1, ítem B. Taller 4. Est.Jhe**

Una estudiante confundió los términos ecuación con solución:

B) $\frac{dy}{dx} = C.e^x$ es la solución de
la ecuación y la solución
de la funcion es $y = e^x + C$.

Figura 24. **Respuesta a la pregunta 1, ítem B. Taller 4. Est.Ang**

Cuando se les preguntó por las conclusiones a las que habían llegado (Pregunta 1, ítem C), tres estudiantes plantearon que llegaron a la ecuación diferencial a partir de la función (ver Anexo M), una estudiante fue explícita al decir:

C) conclusiones
* Si tenemos una función y queremos obtener la Ecuacion Diferencial a la cual pertenece esa Solución debemos Derivar.
* Si Deseamos obtener la función de una Ecuación diferencial debemos Integrar dicha ecuación.
* Que en todas las funciones desarrolladas la constante C es cero. (C=0)

Figura 25. **Respuesta a la pregunta 1, ítem C. Taller 4. Est.Ang**

Además una estudiante tuvo en cuenta el hecho de que se llegó a dos constantes:

Otra conclusión importante que nos dejo el ejercicio es que se pudo encontrar dos constantes diferentes, una constante C que puede tomar cualquier valor en los $\mathbb{R}$ y una constante C_2 que siempre va hacer cero.

Figura 26. **Respuesta a la pregunta 1, ítem C. Taller 4. Est.Ang**

En la pregunta 2 (Taller 4. Ver Anexo N) se les propuso que graficaran otras funciones, los estudiantes ejecutaron el código haciendo los respectivos cambios y lograron las gráficas solicitadas.

Se les propuso que determinaran la ecuación diferencial de otras funciones, además se les planteó dos funciones extras, es decir que no estaban en el taller, debido a que en ellas la constante no era igual a cero, para que los estudiantes reflexionaran.

Los estudiantes plantearon la ecuación diferencial que incluía a todas las soluciones (Ver Anexo O), sin embargo, uno le puso el nombre de ecuación diferencial general:

b) $\frac{dy}{dx} = K. -Sen(x)$ EDO general para la solucion de las funciones dadas

$y = K.Cos(x) + C$ Solucion de la EDO general

Figura 27. **Respuesta a la pregunta 2, ítem B. Taller 4. Est.Bry**

Otra estudiante hizo bien el razonamiento pero no consideró el signo:

B Si, la Ecuacion para todas sería $\frac{dy}{dx} = K.Sen(x)$, su solución sería $\int \frac{dy}{dx} = \int K.Sen(x)\,dx \rightarrow y = -K.Cos(x) + C$, donde $K \in \mathbb{R}$ y C para nuestras funciones desarrolladas es 0.

Figura 28. **Respuesta a la pregunta 2, ítem B. Taller 4. Est.Jhe**

Otro confundió los nombres y no la planteó como debía ser:

2.B si se puede establecer

$\frac{dy}{dx} = C.\cos(x)$ ecuacion general

$y = C.\cos(x)$ Solución general

Figura 29. **Respuesta a la pregunta 2, ítem B. Taller 4. Est.Hei.**

Cuando se les preguntó por las conclusiones, solo dos estudiantes respondieron (Ver Anexo P): una afirma que para encontrar la ecuación diferencial se debe derivar, y para verificarlo se debe integrar; y la otra

estudiante hace alusión a las gráficas obtenidas analizando el comportamiento que observó en cada una de las funciones.

En la figura 30 se puede notar que para determinar la EDO derivan la expresión dada, y no conformes con esto la resuelven por el método de variables separables (Ver Anexo N), como iniciativa propia. Sin embargo, al hacerlo caen en cuenta sobre el valor que toma C, puesto que las diferentes soluciones tienen la misma constante de integración.

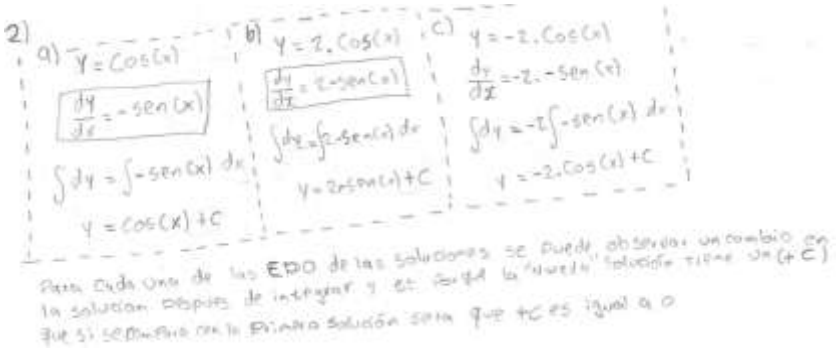


Figura 30. **Respuesta a la pregunta 2, ítem A. Taller 4. Est.Bry**

Con las nuevas funciones, los estudiantes dedujeron que la solución general tenía el C, sin embargo, para las dadas la C, tomaba el valor de 4.

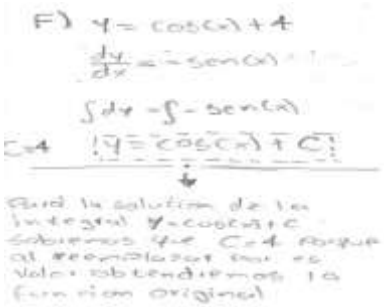


Figura 31. **Respuesta a la pregunta 2, ítem A. Taller 4. Est.Bry**

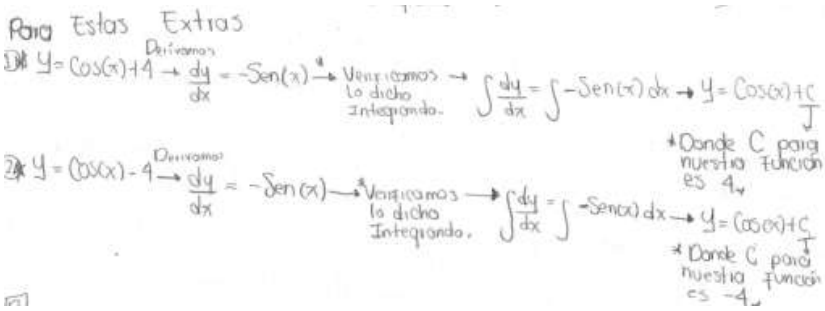


Figura 32. **Respuesta a la pregunta 2, ítem A. Taller 4. Est.Jhe**

En la tercera pregunta, los estudiantes resolvieron todas las ecuaciones diferenciales por variables separables (Ver Anexo R), además, comprobaron la respuesta a través del software, pues este también se las daba en una notación cercana a la algebraica.

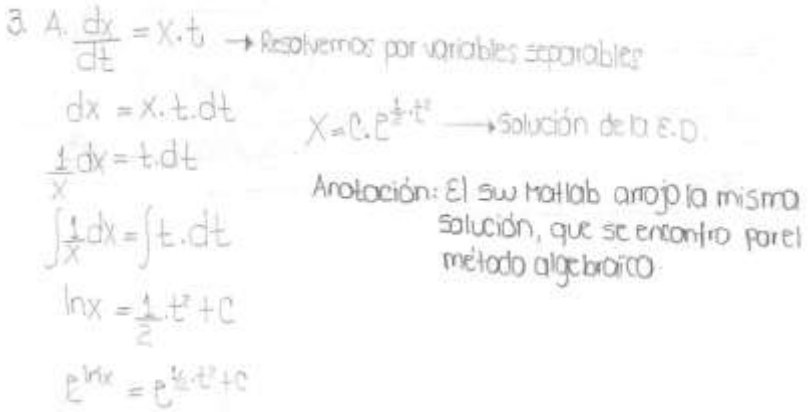


Figura 33. **Respuesta a la pregunta 3. Taller4. Est.Ale**

Sin embargo, a una estudiante, el software le arrojaba otra respuesta diferente a la que hallaba,

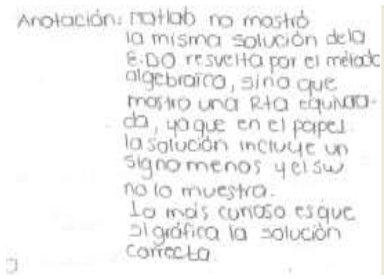
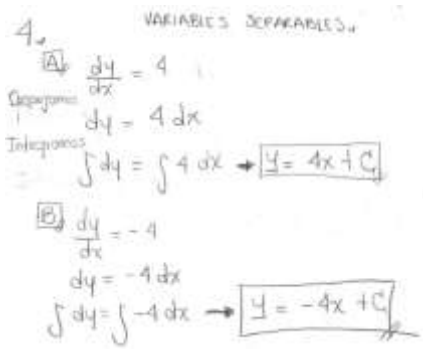


Figura 34. **Respuesta a la pregunta 3. Taller 4. Est.Ale**

En la pregunta cuatro (Taller 4), los estudiantes solicitaron que les plantearan otras ecuaciones diferenciales a las propuestas en el taller, que según ellos en apariencia fueran más sencillas, por lo tanto se les propuso dos nuevas ecuaciones, ellos también usaron el método de variables separables para resolverlas (Ver Anexo S).



4. VARIABLES SEPARABLES.

A) $\frac{dy}{dx} = 4$

Separamos

$dy = 4\,dx$

Integramos

$\int dy = \int 4\,dx \rightarrow \boxed{y = 4x + C}$

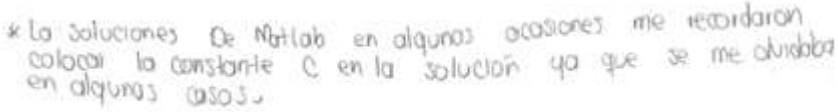
B) $\frac{dy}{dx} = -4$

$dy = -4\,dx$

$\int dy = \int -4\,dx \rightarrow \boxed{y = -4x + C}$

Figura 35. **Respuesta a la pregunta 3. Taller 4. Est.Jhe**

Una estudiante olvidaba poner la constante C, al momento de resolver la ecuación diferencial, y lo corregía cada vez que la resolvía con el software:



* La soluciones de Matlab en algunas ocasiones me recordaron colocar la constante C en la solución ya que se me olvidaba en algunos casos.

Figura 36. **Respuesta a la pregunta 3. Taller 4. Est.Jhe**

Al responder las preguntas del cuestionario, se obtuvo lo siguiente:

En la primera pregunta se les pidió que luego de analizar las gráficas obtenidas al resolver la EDO escribieran sus propias conclusiones, los estudiantes respondieron:

Se puede concluir que las gráficas tienen una relación única con la solución de la ecuación.
Esto se puede observar claramente en todos los puntos anteriormente desarrollados.
Para muestra el ejemplo de las gráficas de la solución de las EDO del punto 4.

La solución tanto por el método algebraico como por el sw Matlab arrojo que la respuesta personifica una familia de rectas infinitas. **¿Cómo se concluyó esto?** Esto se concluyó al recordar los conocimientos adquiridos en el transcurso de nuestro aprendizaje tanto en el colegio como en la universidad, **¿Cuáles son esos conocimientos?** conocimientos en el área de Matemáticas, en los cuáles se aprendió que la ecuación que representa a una recta es **y=mx+b**; con estas instrucciones se puede concluir que las soluciones y las gráficas de las anteriores ecuaciones diferenciales pertenecen a una recta, en este caso representan una familia de rectas, debido a que cada ecuación posee una constante C que puede tomar cualquier valor en los reales.

Las gráficas obtenidas se representan de acuerdo a la solución de la ecuación, en los primeros casos del punto 3 pude observar que todas las gráficas dieron una parábola que varían su tamaño de acuerdo al número, es decir si es un número pequeño su tamaño es mayo tiene más espacio y si el número es grande su tamaño es menor ocupa menos espacio.

Y en el punto 4 las gráficas son rectas porque la función solución representa una recta eso lo podemos observar gracias a la solución que encontramos al desarrollarla y la recta crece o decrece de acuerdo al signo que tenga en nuestro caso la gráfica del punto A crece y la del punto B decrece porque en el A el 4 es positivo y en el B el 4 es negativo, que es el número que acompaña a la X.

Figura 37. **Algunas respuestas de los estudiantes a la pregunta 1 del cuestionario. Taller 4**

Dos estudiantes utilizan el término familia, otro estudiante hace alusión a que se van a obtener "las mismas gráficas", así mismo analizan el comportamiento afirmando que estas crecen o decrecen, y que se tratan de rectas o de parábolas (Ver Anexo T).

En la segunda pregunta, se les planteó si existía relación entre las gráficas y las soluciones obtenidas a través del software y el método algebraico usado una de las respuestas se puede apreciar en la figura 20:

R/al analizar las gráficas con el método algebraico nos damos cuenta que la solución es la misma solo q la gráfica nos bota la solución como bien dije por medio de una gráfica y el método de solución no lo da con una función

Figura 38. **Respuesta a la pregunta 1 del cuestionario. Taller 4. Est.Hei**

La última respuesta fue "Observé que las ecuaciones que realicé por escrito y en Matlab fueron las mismas" (Est.Hei.22-04-2015)

Todos los estudiantes afirmaron que se trataba de la misma solución (Ver Anexo U), para algunos el software les permitía verificar la solución para "no tener margen de error".

En la tercera pregunta se les pidió que definiera con sus propias palabras lo que entiende por solución de una ecuación diferencial. Las respuestas fueron:

Entiendo por solución de una ecuación diferencial, según lo entendido en las clases de ecuaciones diferenciales anteriores que es, resolver una EDO por el método algebraico que mejor entendamos y que esa respuesta arroje como solución una función o una familia de funciones constantes en un intervalo.

La solución de una ecuación diferencial es el valor de la variable la cual estamos buscando, que es la variable dependiente y la respuesta debe dar en términos de la variable independiente.

Una ED la identifico por su forma de escritura.

Figura 39. **Algunas respuestas de los estudiantes a la pregunta 3. Taller 4**

Otro estudiante afirmó "Resolver una ecuación diferencial es encontrar una función con respecto a la variable dependiente e independiente que contenga la ED y se puede resolver por muchos casos por ejemplo Variables separables entre otras" (Est.Bry.22-04-2015). "R/ seria la forma de resolver una EDO por varios métodos los cuales al integrar la función seria la misma solución de la EDO" (Est.Bry.22-04-2015). "Una ecuación diferencial es una expresión que tiene derivadas de una o varias variables." (Est.Ang.22-04-2015).

Sólo un estudiante se refirió a la solución como una función. Ellos resaltan los métodos para resolverlas, en especial el método algebraico de variables separables. Una estudiante definió a la ecuación diferencial pero no a su solución.

En la cuarta pregunta se planteó si se podía considerar las gráficas obtenidas como otro método para resolver una Ecuación diferencial y por el nombre que le daría.

Sí, porque como había argumentado en el interrogante uno , como aprendices hemos adquirido muchos conocimientos en muchas áreas en este caso en el área de Matemáticas, y es simplemente recordar aquellos conocimientos geométricos adquiridos y aplicar las respectivas fórmulas para cada figura geométrica que se nos plantee.

¿Qué nombre le darías?

Le daría el nombre de Método Gráfico.

Considerarlo como otro método, para mí sería muy difícil identificar cual es la función pero si puede ser un método grafico que nos ayuda a entender la solución de una ecuación diferencial, porque mediante una gráfica es mucho más sencillo entender su comportamiento.

R/no creo que se puedan considerar como método para resolver una EDO porque en la gráfica solo se ven las líneas que pasan por el plano mas no vemos que función o que ED es la que se está resolviendo

Figura 40. **Respuestas tomadas de algunos trabajos de los estudiantes. Taller 4**

Los otros estudiantes afirmaron "Las gráficas solo nos muestra una de las posibles soluciones de la familia de funciones que se puede obtener de una ED por lo tanto no considero que sea una solución válida para resolver la ED." (Est.Bry.22-04-2015), "Sí, lo llamaría el método de Matlab." (Est.Ang.22-04-2015)

Las opiniones están divididas, por una parte afirman que como la gráfica no les deja ver cuál es la expresión algebraica entonces no consideran que sea un método de solución. Otros afirman que están en condiciones de determinar dicha expresión.

Al pedirles que realizaran las gráficas de diferentes funciones con el software, los estudiantes no presentaron dificultad en llevarlo a cabo. Un ejemplo de lo realizado se observa en la figura 41.

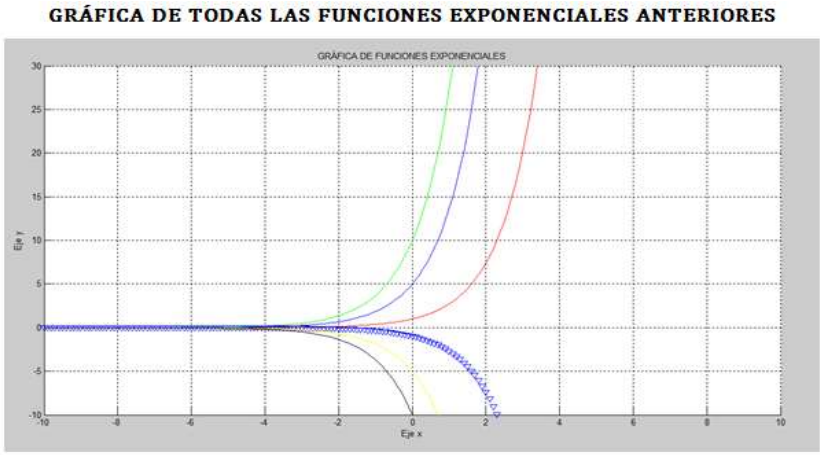
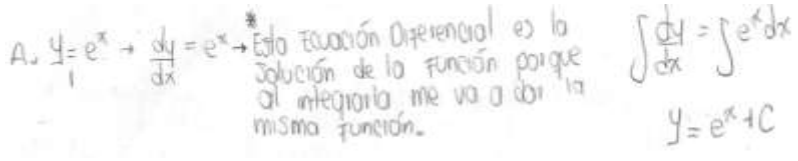


Figura 41. **Respuesta a la pregunta 1. Taller 4. Est.Ale**

Para cada una de las expresiones (pregunta 1.A. Taller 4. Ver Anexo E) se les pidió que plantearan una ecuación diferencial ordinaria de tal forma que la expresión dada fuera solución de la ecuación determinada. Todos los estudiantes derivaron las diferentes funciones y las dejaron indicadas. Además, no sólo planteaban la ecuación diferencial sino que también la resolvían integrando ambos lados o usando el método variables

separables (Ver Anexo K). Al parecer, lo hacían como una forma de probar que la función dada sí correspondía a la solución.


A. $y = e^x \rightarrow \frac{dy}{dx} = e^x \rightarrow$ Esta Ecuación Diferencial es la Solución de la Función porque al integrarla me va a dar la misma función.

$\int \frac{dy}{dx} = \int e^x dx$

$y = e^x + C$

Figura 42. **Respuesta a la pregunta 1, ítem A. Taller 4. Est.Jhe.22-04-2015**

A. $y = e^x \longrightarrow$ Es solución de $\frac{dy}{dx} = e^x$ (1) Por el método de variables separables encontramos que la E.D es Solución de (1)

A. $\frac{dy}{dx} = e^x \rightarrow$ E.D.O

$dy = e^x dx$

$\int dy = \int e^x dx$

$y = e^x + C \rightarrow$ donde esta C vale cero

Entonces:

$y = e^x \rightarrow$ solución de la E.D.O

Figura 43. **Respuesta a la pregunta 1, ítem A. Taller 4. Est.Ale.22-04-2015**

Correspondencia Semántica: Sí, a cada unidad significante elemental del registro de partida le corresponde una unidad significante en el registro de llegada.

Unidad semántica: Sí, a cada unidad significante elemental del registro de partida le corresponde una unidad significante en el registro de llegada.

Organización de las unidades: Sí, existe igual orden de aprehensión de las unidades significantes presentes en la conversión.

5.2.6 Taller 5

Registro de partida: Registro verbal→ **Registro de llegada:** Registro algebraico

SEGUNDO PROBLEMA

Un familiar lo invitó a un almuerzo para celebrar su cumpleaños. Como la universidad en la que usted estudia queda cerca del restaurante, usted llegó antes de la hora acordada.

El mesero le señala la mesa reservada y al cabo de un tiempo llega con dos platos de sopa, poniéndolos sobre la mesa. Usted le plantea que todavía no llega la persona que espera, a lo cual el mesero le responde que para cuando llegue su acompañante, si así lo consideran, les cambiará los platos. (En este momento los platos se encuentran a una temperatura de 90°C).

Cuando observa la hora en el celular, también observa que la temperatura del lugar es de 20°C. Pasados 10 minutos llega su familiar. El mesero se acerca para preguntar cuál es su decisión sobre cambiar los platos; ustedes tocan los platos y afirman que no es necesario. (Estos están a una temperatura de 60°C).

Una vez se retira el mesero, ustedes se cuentan algunas cosas y al cabo de cierto tiempo toman la sopa. (En este momento los platos se encuentran a una temperatura de 35°C) (Taller 5. Ver Anexo F)

En este problema se les pregunta sobre el tiempo que pasó desde el momento que llega el familiar y empiezan a tomar la sopa, con el objetivo de captar el interés de los estudiantes para resolver el problema, aunque esta respuesta no es inmediata, permitió que los estudiantes llevaran a cabo una serie de operaciones para resolverlo.

En el desarrollo del taller se les pasó a los estudiantes cada una de las preguntas en un papel, y una vez devolvían la respuesta se les pasa la siguiente pregunta.

Cuando se les preguntó por el tiempo que pasó desde el momento en que llegó su familiar y el que empezaron a tomar la sopa, los estudiantes respondieron:

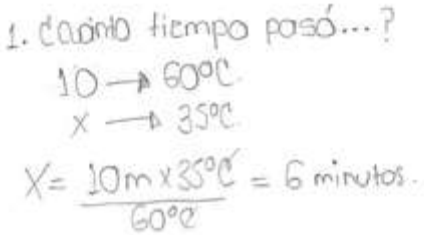


Figura 44. **Respuesta a la pregunta 1. Taller 5. Est.Ale**

Los estudiantes relacionaron el hecho de que una vez pasados 10 minutos se tenía una temperatura de 60°C, luego el tiempo para 35°C, lo determinaron usando regla de tres simple (Ver Anexo AA). Por otro lado, se

puede observar que los estudiantes relacionaron las temperaturas con los tiempos, además, cada estudiante se atrevió a dar un tiempo aunque ninguno acertó en su respuesta.

En el problema propuesto se les plantea la pregunta sobre lo que sucede con la temperatura de la sopa, los estudiantes explicaron:

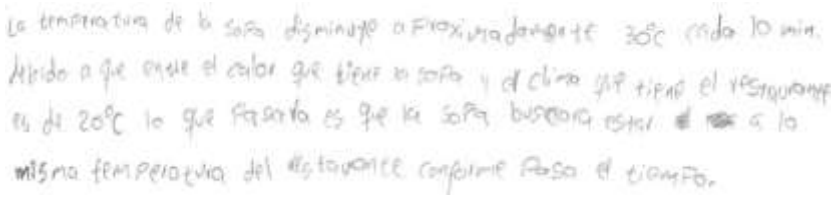

La temperatura de la sopa disminuye aproximadamente 30°C cada 10 min. debido a que cede el calor que tiene la sopa y el clima que tiene el restaurante es de 20°C lo que pasará es que la sopa buscará estar igual a la misma temperatura del restaurante conforme pasa el tiempo.

Figura 45. **Respuesta a la pregunta 2. Taller 5. Est.Bry**

Todos los estudiantes afirmaron que la temperatura de la sopa disminuye a medida que transcurre el tiempo (Ver Anexo V). Como la temperatura cambia de 90°C a 60°C en 10 minutos, lo consideraron como una relación lineal, es decir cada 10 minutos disminuirá en 30°C. Aunque, algunos consideran que la temperatura de la sopa no llegará a 0°C puesto que buscará estar igual a la temperatura ambiente.

Se les planteó una situación hipotética, en la cual había pasado cierta cantidad de tiempo y la sopa aún estaba en la mesa, con esta nueva situación se les planteó de nuevo la pregunta sobre lo que sucedería con la temperatura de la sopa, a lo que respondieron:

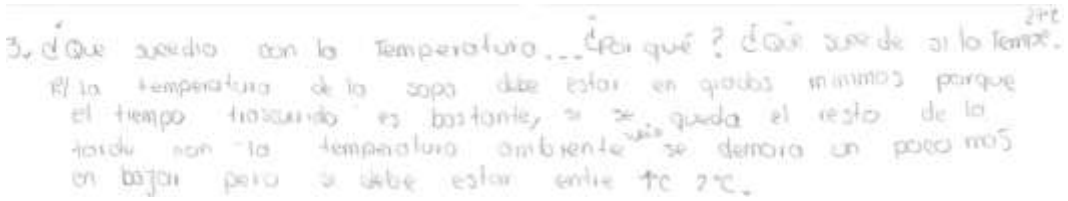
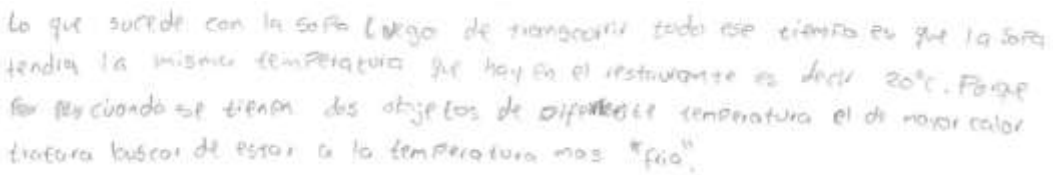

3. ¿Que sucedio con la Temperatura... ¿Por qué? ¿Qué sucede si la temp. sigue
R/ la temperatura de la sopa debe estar en grados minimos porque el tiempo transcurrido es bastante, si se queda el resto de la tarde con la temperatura ambiente se demora un poco mas en bajar pero se debe estar entre 1°C y 2°C.

Figura 46. **Respuesta a la pregunta 3. Taller 5. Est.Jhe**

Todos relacionaron que la sopa se enfriaría y afirmaron que esta dependía de la temperatura ambiente (Ver Anexo W). Un estudiante explicó la relación que hay entre dos objetos de diferente temperatura, y otro supuso que la sopa podría subir su temperatura si estuviera la temperatura ambiente fuera otro.

Para terminar, la suposición anterior, se les pidió que pensaran en que la temperatura ambiente era de 27°C, ellos respondieron:

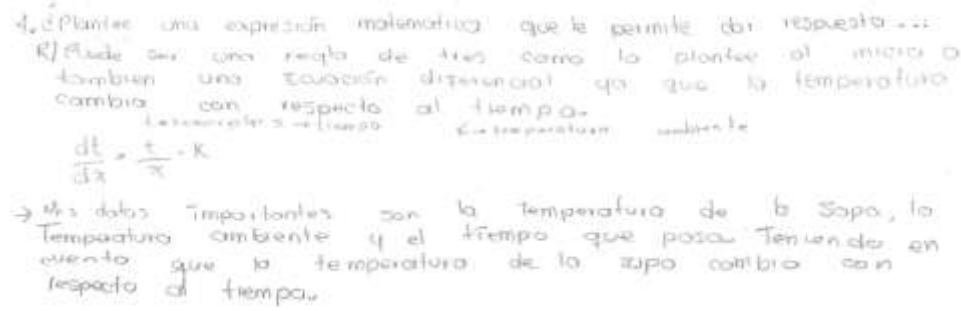


Lo que sucede con la sopa luego de transcurrir todo ese tiempo es que la sopa tendria la misma temperatura que hay en el restaurante es decir 20°C. Porque por ley cuando se tienen dos objetos de diferente temperatura el de mayor calor tratara buscar de estar a la temperatura mas "frio".

Figura 47. **Respuesta a la pregunta 3. Taller 5. Est.Jhe**

Ante esta situación, los estudiantes opinaron que la sopa se mantendría por más tiempo tibia.

Cuando se les pidió que plantearan una expresión matemática que les permitiera dar respuesta a la pregunta inicial, los estudiantes respondieron:



4. ¿Plantee una expresión matematica que le permite dar respuesta...
R) Puede ser una regla de tres como la plantee al inicio o tambien una ecuación diferencial ya que la temperatura cambia con respecto al tiempo.
t = temperatura → tiempo K = temperatura ambiente

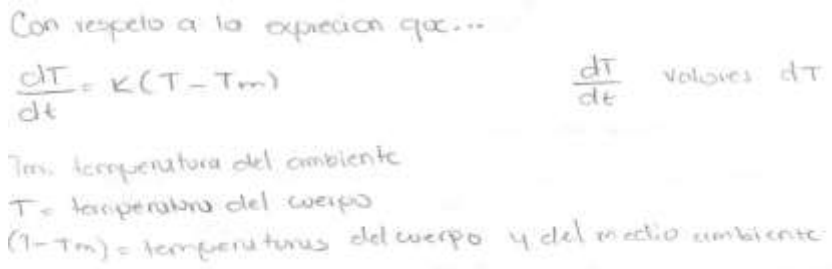
$$\frac{dt}{dx} = \frac{t}{x} - K$$

→ Mis datos importantes son la temperatura de la sopa, la temperatura ambiente y el tiempo que pasa. Teniendo en cuenta que la temperatura de la sopa cambia con respecto al tiempo.

Figura 48. **Respuesta a la pregunta 4. Taller 5. Est.Jhe**

Los estudiantes tuvieron en cuenta la respuesta dada inicialmente, sin embargo, aquí ya pensaron en que la temperatura de la sopa varía con respecto al tiempo, expresando que se trataba de una ecuación diferencial (Ver Anexo W). Es necesario observar que solo dos estudiantes escribieron la notación $\frac{dy}{dx}$.

En la quinta pregunta se les presenta la ecuación diferencial planteada por Newton y se les pide que comparen la expresión que ellos propusieron y que interpreten la expresión determinada por Newton, a lo cual respondieron:



Con respeto a la expresion que...

$$\frac{dT}{dt} = K(T - T_m)$$

$\frac{dT}{dt}$ valores dT

T_m: temperatura del ambiente
T = temperatura del cuerpo
$(T - T_m)$ = temperaturas del cuerpo y del medio ambiente

Figura 49. **Respuesta a la pregunta 5. Taller 5. Est.Jhe**

Confundieron los términos, debido a que no interpretaron que la temperatura del objeto se denotaba con la letra mayúscula y el tiempo con minúscula. Dos estudiantes escriben el término rapidez al referirse a la derivada (Ver Anexo X).

Posteriormente, se les pidió que resolvieran la ecuación planteada, e interpretaran la solución, ellos hicieron lo siguiente:

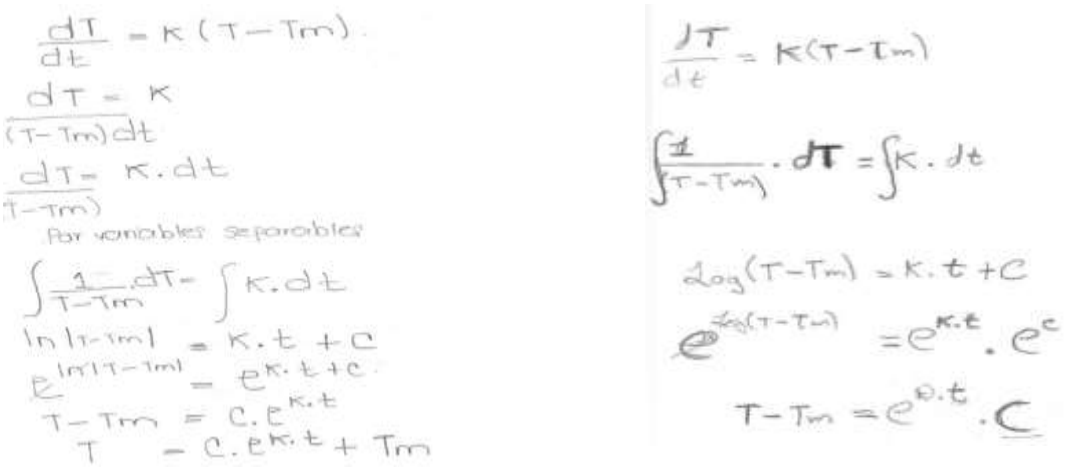


Figura 50. **Respuestas tomadas de algunos trabajos de los estudiantes. Taller 5**

Todos lo resolvieron por el método de variables separables (Ver anexo Y). Dos estudiantes resolvieron la integral como logaritmo (log), en lugar de logaritmo natural (ln), se puede ver en la ilustración del lado derecho. Así mismo, solo una estudiante escribió el valor absoluto del argumento de logaritmo natural (ilustración del lado izquierdo), los demás dejaron indicado el argumento entre paréntesis.

Cuando se les pidió que encontraran la solución, los estudiantes procedieron a reemplazar los valores dados (Ver Anexo Z), tuvieron dificultad en relacionar la temperatura de 90°C con el tiempo t=0, una vez hicieron eso, relacionaron la otra temperatura con el tiempo dado (T=60°C, t=10m), y finalmente determinaron el tiempo para la temperatura dada (T=35°C, t=27,53). Tres estudiantes tuvieron en cuenta que el tiempo encontrado corresponde al tiempo total desde que sirvieron la sopa, luego le restaron los 10 minutos que ya pasaron, para una respuesta de 17, 53 minutos.

Figura 51. **Respuesta a la pregunta 6. Taller 5. Est.Ang**

Correspondencia Semántica: No, a cada unidad significante elemental del registro de partida no le corresponde una unidad significante en el registro de llegada.

Unidad semántica: Sí, a cada unidad significante elemental del registro de partida le corresponde una unidad significante en el registro de llegada.

Organización de las unidades: Sí, existe igual orden de aprehensión de las unidades significantes presentes en la conversión.

5.2.7 Taller 6

Registro de partida: Registro gráfico → **Registro de llegada:** Registro algebraico

En el taller 6, se les presentaron dos gráficas. Los estudiantes al observar la gráfica A (Taller 6. Ver Anexo G), coincidieron en que se trataba de una familia de rectas:

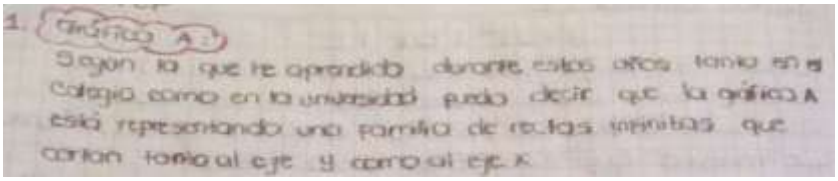


Figura 52. **Respuesta a la pregunta 1. Taller 6. Est.Ale**

Igualmente, sobre la gráfica B, todos los estudiantes coincidieron en que se trataba de una familia de parábolas, aunque esta apreciación no es correcta.

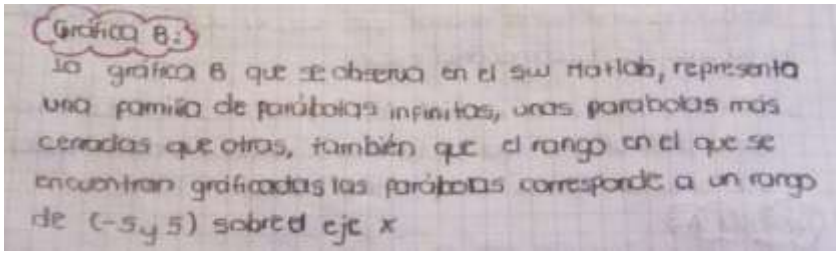

Gráfica B:
la gráfica B que se observa en el sw Matlab, representa una familia de parábolas infinitas, unas parabolas más cerradas que otras, también que el rango en el que se encuentran graficadas las parábolas corresponde a un rango de (-5, 5) sobre el eje x

Figura 53. **Respuesta a la pregunta 1. Taller 6. Est.Ale**

Cuando se les pidió que plantearan una expresión matemática, los estudiantes escribieron para la gráfica A, $y = mx + b$, y para la gráfica B, sólo tres estudiantes respondieron $y = ax^2 + bx + c$.

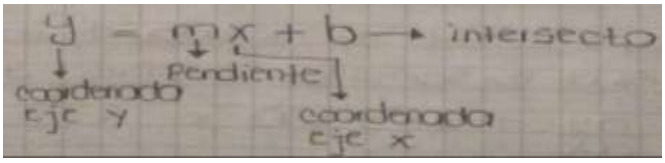


Figura 54. **Respuesta a la pregunta 2. Taller 6. Est.Jhe**

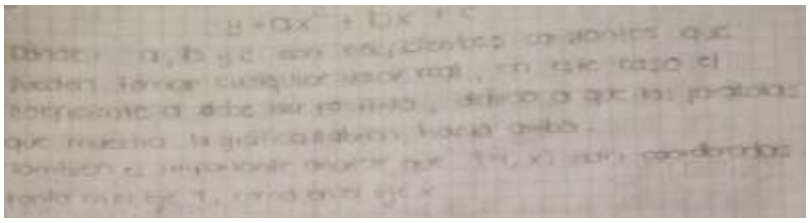


Figura 55. **Respuesta a la pregunta 2. Taller 6. Est.Jhe**

Correspondencia Semántica: No, a cada unidad significante elemental del registro de partida no le corresponde una unidad significante en el registro de llegada.

Unidad semántica: Sí, a cada unidad significante elemental del registro de partida le corresponde una unidad significante en el registro de llegada.

Organización de las unidades: Sí, existe igual orden de aprehensión de las unidades significantes presentes en la conversión.

Se les pidió que escribieran una ecuación diferencial de tal forma que cada una de las funciones correspondiera a la solución. Todos recordaron que debían derivar, y quienes plantearon la expresión algebraica determinaron la ecuación diferencial.

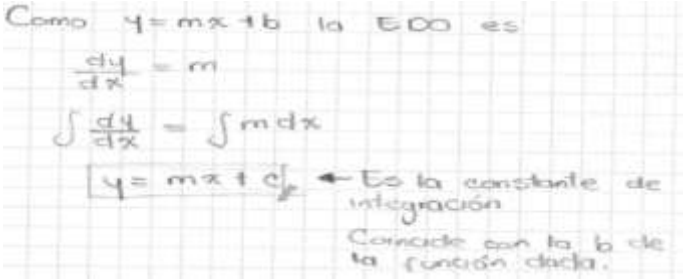


Figura 56. **Respuesta a la pregunta 2. Taller 6. Est.Bry**

Como se puede observar, también en esta ocasión, una vez planteada la resolvían por el método de variables separables

Capítulo VI

Cuarta fase: análisis a posteriori y evaluación

6.1 Comparación entre los análisis a priori y los encontrados en la experimentación

6.1.1 Del reconocimiento del entorno de MatLab

6.1.1.1 Taller 0. Reconociendo los entornos de MatLab. Primera parte.

Pregunta	Comparación realizada
Ejercicio	Realizan las operaciones sin dificultad, cometen algunos errores, sin embargo son conscientes de ellos, reconociendo que Matlab tiene su propio lenguaje. Así mismo, escriben comentarios positivos sobre el uso del software.

6.1.1.2 Taller 1. Reconociendo los entornos de MatLab. Segunda parte.

Pregunta	Comparación realizada
1.	Reconocen la función $y = sen(x)$, sin embargo, no la dibujan como una gráfica infinita periódica sobre el eje x tanto positivo como negativo. La gráfica de la función $y = e^x$ no la graficaron correctamente, aunque algunos tenían mayor idea. Hubo estudiantes que dejaron el espacio en blanco, esto evidencia desconocimiento de la gráfica de dicha función.
2.	No todos tienen claro en dónde copiar el código, por esta razón fue necesario indicarles el editor de MatLab.
2.1	Todos ejecutaron el código sin problemas y obtuvieron las gráficas.
2.2	Tuvieron acercamientos sobre lo que cada una de las líneas significaba. Fue necesario aclarar lo que representa los saltos en el eje x.
3.	Sabían cuál era la línea de código que debían graficar pero al escribirla tal como hicieron con la función anterior les generaba error, por tal motivo se les indicó que aquí era necesaria la notación $y = \exp(x)$, al tenerlo en cuenta realizaron el cambio correcto.
3.1	Tuvieron en cuenta la notación y obtuvieron la gráfica.

3.2	Todos obtuvieron la gráfica solicitada, teniendo en cuenta la línea de código que debían cambiar y la notación que debían usar.
4.	Entendieron que debían dar algunos valores a la constante C para obtener las gráficas solicitadas.
4.1	Entendieron que al darle diferentes valores a la C obtenían gráficamente algunas curvas de la familia de $y = sin(x) + c$.
4.2	Usaron términos de "familia de curvas" y "familia de gráficas", entendiendo que obtenían curvas de una misma función.
4.3	Coincidieron en que para graficar funciones del tipo $y = sin(x) + c$, deben tener en cuenta que es necesario darle diferentes valores a la constante C.
5.1	Tenían claro que como sólo se dieron unos cuantos valores a la C no se obtiene sino ciertas curvas de la familia de soluciones. Aunque no son explícitos al afirmar que la diferencia radica en la C, lo dan a entender cuando se refieren que sin ella solo se obtiene una función.
5.2	El mismo resultado anterior.
5.3	Dos estudiantes usaron la expresión "familia de curvas", otra estudiante hizo alusión a la C, pero otro estudiante ignoró la C y las llamó por el nombre que se conocen en matemáticas: trigonométrica y exponencial.

6.1.2 De la resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias lineales de primer orden

6.1.2.1 Taller 2. Resolución de ecuaciones

Pregunta	Comparación realizada
1.	Copiaron el código en el editor, demostrando un mayor dominio dentro del entorno ofrecido por MatLab.
A.1	Identificaron las respuestas arrojadas por el programa como raíces del polinomio, teniendo en cuenta la cantidad de valores arrojados, en relación con su grado.

A.2 Tres estudiantes evaluaron los valores encontrados y verificaron la igualdad. Sin embargo, dos estudiantes no mostraron claridad sobre lo que debían hacer y el tipo de ecuación presentada, afirmando que se trataba de una ecuación diferencial.

A.3 ´Tres estudiantes escribieron que las raíces coinciden con los puntos de corte con el eje x, aunque no lo escriben explícitamente como coordenadas, si muestran que para estos valores y=0. Dos estudiantes muestran confusión en sus respuestas con respecto a lo esperado.

2 Todos los estudiantes ejecutaron el código sin dificultad y obtuvieron la respuesta dentro del Coomand Window.

B.1 Reconocieron la expresión arrojada por el software como solución de la ecuación diferencial, sin embargo no escribieron comentarios al observar la expresión algebraica, es decir, la identificaron como solución pero no plantearon que se trataba de una familia de soluciones. No se percataron de la C.

B.2 Tres estudiantes realizaron lo esperado, dándole un nombre propio "solución de una ecuación diferencial ordinaria". Dos estudiantes no escribieron ninguna de las dos estrategias esperadas, en sus comentarios, aparentemente no saben que estrategia utilizar puesto que sus respuestas son muy ambiguas.

B.3 Dos estudiantes consideran la relación entre la gráfica y la solución, afirmando que se trata de una familia de soluciones pero no analizan por qué se obtiene este tipo de curvas, tampoco resaltan el papel que juega la C, aunque una estudiante hace alusión a que se mantiene la forma, pero no indica el por qué. Dos estudiantes no responden la pregunta.

3. Algunos estudiantes se refieren a la ecuación A como polinomio de grado cuatro y la ecuación B como ecuación diferencial de grado 1. Sobre la solución del polinomio afirman que se trata de valores y la solución de la ecuación diferencial que se trata de una familia de curvas y que son infinitas, sin hacer alusión a la constante C. Algunos estudiantes, al parecer tienen confusión, puesto que no tuvieron en cuenta que para ambas se realizó gráficas.

4. Aunque no dijeron que el número de soluciones del polinomio era finito, sí afirmaron que se trataba de valores y que dependía de su grado. Sobre la solución de la ecuación diferencial

afirmaron que se trataba de una familia de soluciones, diciendo "familia de la función solución" o "familia de funciones" y no escribieron la relación que tiene con la constante C.

5. No concluyeron que la solución de una ecuación diferencial consistía en una familia de funciones y no fue relevante para ellos el hecho de que pudieran apreciar la solución de dos formas: algebraica y gráficamente.

6.1.3 De las gráficas de la solución de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden

6.1.3.1 Taller 4. Graficando funciones

Pregunta	Respuestas esperadas
1.	Graficaron las funciones propuestas usando el software sin ningún problema.
1.A	Plantearon la ecuación diferencial para cada función. Usaron la notación $\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}}$, todos los estudiantes resolvieron cada una de las ecuaciones diferenciales que ellos plantearon.
1.B	Plantearon la ecuación diferencial que incluía a las funciones dadas dentro de sus soluciones.
1.C	Una estudiante reflexionó en el hecho de que una ecuación diferencial puede traer constantes diferentes a la constante de integración que representa a la familia de soluciones. Otra tuvo en cuenta que para determinar la ecuación diferencial a partir de la función dada, se debe derivar dicha función.
2.	Graficaron sin dificultad las cinco funciones entre ellas $y = \cos(x)$.
2.A	Tal como se esperaba plantearon la ecuación diferencial para cada función, derivaron con respecto a x, usando la notación $\frac{dy}{dx}$, de esta forma la función será solución de la ecuación diferencial planteada, sin embargo, ellos resolvieron cada una de las ecuaciones, por el método de variables separables, esto no se esperaba que lo hicieran. Además, se les propuso dos funciones extras en el desarrollo del taller y ellos identificaron que para esas funciones la constante no era igual a cero.
2.B	Tres estudiantes hicieron lo que se esperaba, es decir plantearon la ecuación diferencial que incluía a las funciones dadas dentro de sus soluciones, sin embargo, una estudiante no

respondió a la pregunta y otro estudiante respondió mal.

2.C Una estudiante cayó en cuenta que habían dos constantes diferentes en las funciones y que una se refería a la constante de integración.

5 Tal como se esperaba resolvieron las tres ecuaciones diferenciales usando el método de variables separables.

6 Manifestaron que les plantearan otras ecuaciones diferenciales, que en apariencia fueran más sencillas, por lo tanto se les propuso otras, y solo se propuso dos ecuaciones, ellos usaron el método de variables separables.

1. Dos estudiantes afirmaron que se obtenía una familia de soluciones, no se refirieron a curvas como tal, sino por ejemplo a "familia de rectas"

2. Para ellos hay dos métodos el de variables separables y el usado en el software, la diferencia es que el software les arroja la respuesta algebraica y la gráfica de la solución. La respuesta algebraica la comparan con la encontrada y por esta razón ellos afirman que les permite verificar la respuesta.

3. Los estudiantes no usan en las definiciones dadas alguna expresión que haga alusión a que la solución tiene una representación diferente a la algebraica. Para ellos resolverla es utilizar un método algebraico pero no se refieren a la gráfica como solución de una ecuación diferencial.

4. Aunque consideran que la gráfica representa la solución de la ecuación diferencial ellos no dejan de lado la expresión algebraica, consideran que deben llegar de alguna forma a la expresión, pero les parece difícil.

6.1.3.2 Taller 6. ¿Cuál es su expresión matemática?

Pregunta	Comparación realizada
1.	Para la gráfica A, todos escribieron la expresión matemática que se esperaba $y = mx + b$. Sin embargo, para la gráfica B, la expresión matemática que escribieron tres estudiantes no correspondía a la que la gráfica representaba. Los otros dos estudiantes escribieron que

no recordaban.

2. Para la gráfica A, todos los estudiantes escribieron la ecuación diferencial de tal forma que la expresión obtenida en el punto anterior era solución. Para la gráfica B, los tres estudiantes que escribieron la expresión matemática escribieron la ecuación diferencial que tenía como solución a dicha expresión matemática, aunque no era la correcta determinaron bien la ecuación diferencial. Una vez planteaban la ecuación diferencial procedían a resolverla, llegando a una expresión similar a la inicial, que al compararla determinaban que se trataba de la misma.

6.1.4 De los problemas de aplicación que involucran ecuaciones diferenciales ordinarias lineales de primer orden

6.1.4.1 Taller 3. Un problema de aplicación

Pregunta	Comparación realizada

PRIMERA PARTE

A. Propusieron que para conocer la respuesta sobre el crecimiento poblacional se debía resolver la ecuación diferencial dada utilizando para esto el método de variables separables. Una estudiante propone resolverla sin indicar el método y otra estudiante afirma que se debe despejar P, pero tampoco dice de qué forma lo haría.

B. Afirmaron que la letra P se refería al crecimiento poblacional y la letra t al tiempo. Sin embargo, fueron más allá, afirmando que en las ecuaciones diferenciales, P sería la variable dependiente "la variable que se va encontrar" y t la variable independiente.

C. Afirmaron que existía relación entre el crecimiento poblacional y el tiempo, pues la primera aumenta con relación a la segunda: "entre más tiempo pase mayor va hacer la población". Una estudiante habló de matriz para referirse a la P y vector al tiempo, tal vez por la notación que se usa dentro del código compartido: ([p], t = -20:0.1:20; %Vector de tiempo).

D. Tres estudiantes afirmaron que para determinar la respuesta se requiere resolver la ecuación diferencial. Una estudiante hizo alusión no sólo al método de variables separables, sino también a la gráfica arrojada por MatLab, pero como si fuera una solución requerida

haciendo uso del programa no como necesidad para ellos: "Y para obtener la gráfica y la solución de la ecuación diferencial en Matlab". Tienen en cuenta que se puede dar diferentes valores a las variables haciendo uso del software.

1. Solo dos estudiantes propusieron la respuesta dada por el software, lo cual indica que confían más en la respuesta algebraica que en la respuesta gráfica.

2. Tres estudiantes escribieron que la gráfica hace alusión a la familia de soluciones de la ecuación diferencial. Los otros dos estudiantes analizan el comportamiento de la gráfica pero no concluyen que se trate de la solución a la ecuación diferencial.

3. Una estudiante analizó el hecho de que la solución encontrada satisface la ecuación diferencial, otra estudiante tuvo en cuenta que existía relación con la familia de curvas arrojada por la gráfica, y tres estudiantes tuvieron en cuenta el software como método para verificar si la respuesta encontrada coincidía con la que ellos determinaron por el método de variables separables.

4. Tienen idea sobre grado, linealidad, orden y derivada ordinaria, debido a que utilizan términos que los identifican a cada uno.

Ejercicio Un grupo presentó el problema de aplicación, una pareja buscó una ecuación diferencial y la resolvió grabándose en el tablero, manifestando que un ejercicio es lo mismo que un problema.

6.1.4.2 Taller 5. Una invitación a almorzar.

Pregunta	Comparación realizada
1.	Todos se interesaron en el problema, no relacionaron los datos como se esperaba, pero sí los consideraron, escribiendo la correspondencia entre la temperatura y el tiempo. 90°C→ t=0; 60°C→ t= 10; 35°C→t=?; Tm= 20°C, Ninguno escribió dentro de sus anotaciones el término: $\frac{dT}{dt}$.
2.	Dos estudiantes concluyeron que la temperatura de la sopa decrecería hasta coincidir con la

temperatura ambiente, es decir 20°C.

3. Todos los estudiantes coinciden en que la sopa se va a enfriar, pero solo uno plantea que llega a 20°C. Cuando se les cambia la temperatura ambiente, ellos afirman que la sopa se mantendrá por más tiempo caliente.

4. Ninguno planteó la expresión: $\frac{dT}{dt} = k(T - T_m)$

5. Ninguno escribió que se trataba de una ecuación diferencial, dos estudiantes indicaron que e $\frac{dT}{dt}$ indica la variación de la temperatura de la sopa con respecto al tiempo, todos relacionaron Tm con la temperatura ambiente, hubo confusión en la T de temperatura, para una estudiante indicaba el tiempo, otros sí la relacionaron con la temperatura de la sopa o del objeto.

6. Llegaron a la expresión $T - T_m = ce^{kt} +$

7. Algunos estudiantes determinaron el tiempo solicitado y lo identificaron como el tiempo total: 27.53 min, sin embargo, no analizaron que la información dada por el problema, por ejemplo que como han pasado 10 minutos cuando empiezan a tomar la sopa, al tiempo encontrado se le debe restar este valor, luego la respuesta al problema es 17,53 min.. Una estudiante escribió esta respuesta como 17 minutos, 53 segundos.

8. Hicieron las variaciones en el código sin dificultad alguna.

6.2 Evaluación

En las producciones realizadas por los estudiantes que participaron en la investigación y en las expresiones verbales manifestadas durante el desarrollo de los talleres o dentro de las entrevistas, se puede notar que dentro del registro algebraico era claro, para algunos de ellos, que estaban trabajando con una ecuación diferencial. Esto se puede notar cuando afirman "La diferencia de la segunda ecuación es, que es una ecuación diferencial por su forma de escritura y la solución es una función de la familia de las curvas de ella", "Significa que la ecuación es lineal porque sus coeficientes en términos de x son constantes y la ecuación también será de grado 1 y por ser lineal su grado será 1 es decir que la ecuación solo se tiene una derivada", "Aprendí que en las ecuaciones diferenciales el orden no nos determina el número de soluciones porque son infinitas pero sí el número de constantes".

Así mismo, los estudiantes eran conscientes de las características principales de la solución de una ecuación diferencial al usar términos como solución general, solución particular, constante y familia de funciones: "Si es una solución general debe tener siempre una constante si es una particular pues la constante ya debe tener un valor", "Debe estar en términos de la variable que al comienzo se está derivando entonces debe estar en términos de esa variable y pues debe tener pues una solución más una constante pues que es la que va a ir cambiando pues que es la General y que es la que se puede ir cambiando para que dé diferentes posibles soluciones de la familia", "Sí porque era una constante también para nosotros, si nosotros la olvidábamos pues no íbamos, como que la expresión está mal dada porque es como una regla que después de la integración siempre debemos colocar el más c. Si nosotros llegamos a derivar la integral el c pues va a dar cero entonces no nos va a afectar en nada pero siempre la colocamos", "Cuando la función tiene una constante le podemos dar cualquier valor", "La C en las funciones hace referencia a constantes", "Hace referencia a la familia de curvas que pertenece a la función" "Lo necesario para obtener las gráficas de las funciones y obtener la familia lo único necesario fue cambiar el valor de la constante C", "La c hace referencia o toma cualquier valor en la función y se obtiene una familia de curvas", "Constante: Es un número que puede variar de acuerdo a la solución requerida".

Dentro del registro algebraico, el procedimiento algorítmico que llevaron a cabo fue el de variables separables, al respecto sostienen: "El que más puse en práctica fue…variables separables, ese fue el que más utilicé", "Yo creo que la más fácil siempre ha sido variables separables creo que uno se casa con un método y por ese método uno se acostumbra a resolverlo de manera más sencilla, yo diría que ese" "Pues el método que más use fue el de variables separables, es un método entendible y fácil de usar. Ese fue el que más aplicamos", "Resolver una ecuación diferencial es encontrar una función con respecto a la variable dependiente e independiente que contenga la ED".

Cuando realizaban cambios de registros, entre el registro algebraico y el registro gráfico, teniendo como registro de partida el registro algebraico y como registro de llegada el registro gráfico, pudieron notar cada vez con mayor naturalidad que la constante se relacionaba con el hecho de obtener una nueva curva dentro de la representación gráfica de la solución, por tal motivo, expresaron que esta se denominaba constante porque podía tomar un valor dado, pero variaba con el fin de obtener la familia de curvas o funciones, por esta razón, el término constante, no les causó dificultades. Lo anterior se puede notar cuando afirman: "Cuando tenemos la función $y = \sin(x) + C$, es la familia de esta función dándole valores a C" "En esta función (y=sin(x)) la gráfica se estructura por una sola curva sobre el eje x, y. En esta función (y=sin(x)+C) la gráfica se estructura por varias curvas sobre el eje x, y.", en la siguiente expresión se puede notar más este hecho "Es la función general de una

Familia de curvas", "Nos ayudó por ejemplo a diferenciar una constante por ejemplo el C cuando desarrollábamos y un k son totalmente diferentes, constantes diferentes y nos ayudaba a ver el salto, o sea qué valores iba tomando, los rangos"

En el registro gráfico, un estudiante tenía cierta dificultad al asumir la gráfica como solución de la ecuación diferencial si esta no venía acompañada de su representación algebraica: "La gráfica es algo que uno no está tan evaluando diría yo, porque a nosotros nos respecta es más el procedimiento, el aprender el procedimiento y por qué se resuelve de esa manera…yo digo es una gráfica pero a mí no me está enseñando nada nuevo o que me esté enseñando a resolver el problema de alguna manera, pues sí el software pues me está dando la gráfica me está mostrando la gráfica para esa ecuación pero no la veo necesaria, por decirlo así, sé que es una posible solución para la respuesta y la gráfica pues va a ir cambiando con la posible constante que uno le vaya dando pero aparte de eso pues no le veo ningún otro uso", por el contrario, los demás afirmaban: "Cuando se ponía la ecuación diferencial dentro del código me generaba pues la solución y pues esa solución pues era la misma gráfica, que era la que uno iba cambiando", "Es la gráfica de la función solución", "La gráfica muestra la familia de soluciones de la ecuación diferencial", "Al analizar las gráficas con el método algebraico nos damos cuenta que la solución es la misma solo q la gráfica nos bota la solución como bien dije por medio de una gráfica y el método de solución no lo da con una función".

Los tratamientos dentro del registro gráfico estaban relacionados con las modificaciones del código compartido para ser ejecutado a través del software MatLab. Algunos estudiantes no vieron, de forma natural que la representación gráfica fuera considerada un método de solución de la ecuación diferencial, para algunos era un apoyo para la representación algebraica, mientras que otros sustentaron que si se contaban con los conocimientos necesarios para deducir la representación algebraica entonces podría ser considerado un método de solución. Esto se puede notar en las siguientes expresiones: "Sí pero al igual nosotros teníamos que desarrollarla, pues ese es más como una forma pero no lo tomaría como un método", "Claro ahí estamos aplicando métodos…como lo explico…pero nosotros lo aplicamos mas no lo vemos así como el proceso, no vemos el proceso", "Considerarlo como otro método para mí sería muy difícil identificar cuál es la función pero sí puede ser un método gráfico que nos ayuda a entender la solución de una ecuación diferencial, porque mediante una gráfica es mucho más sencillo entender su comportamiento", "no creo que se puedan considerar como otro método para resolver una EDO porque en la gráfica solo se ve las líneas que pasan por el plano más no vemos que función o que ED es la que se está resolviendo", "Las gráficas solo nos muestra una de las posibles soluciones de la familia de funciones que se puede obtener de una ED por lo tanto no considero que sea una solución válida para resolver la ED", "sí…como

aprendices hemos adquirido muchos conocimientos en muchas áreas en este caso en el área de Matemáticas, y es simplemente recordar aquellos conocimientos geométricos adquiridos y aplicar las respectivas fórmulas para cada figura geométrica que se nos plantee…le daría el nombre de Método Gráfico", "Sí, lo llamaría el método de Matlab". Como se puede notar, los estudiantes están muy acostumbrados a las representaciones algebraicas, si un método no les arroja la expresión algebraica, les genera cierto inconformismo.

Sobre las operaciones que debían realizar para obtener las respectivas gráficas afirman: "…usted nos daba pues el código ya hecho lo único que teníamos que hacer era pues acomodar la función que íbamos a graficar o a hallar", "usted nos daba como la ecuación, que teníamos que cambiar entonces era muy fácil realizarla, no tuve ninguna dificultad", "en el software solamente colocábamos la variable que estábamos buscando y el de una la arrojaba pues que en algunos casos si uno se olvidaba de colocarle el C o sea la constante y el software le recordaba a uno eso"

Cuando realizaron cambios de registros, entre el registro gráfico y el registro algebraico, teniendo como registro de partida el registro gráfico y como registro de llegada el registro algebraico, los estudiantes expresan que la gráfica corresponde a la solución de la ecuación diferencial, pero el hecho de no contar con la respectiva expresión algebraica los inquietaba: "Las gráficas obtenidas se representan de acuerdo a la solución de la ecuación", "La solución tanto por el método algebraico como por el sw Matlab arrojó que la respuesta personifica a una familia de rectas infinitas", "Las gráficas solo nos muestra una de las posibles soluciones de la familia de funciones que se puede obtener de una ED por lo tanto no considero que sea una solución válida para resolver la ED". Sin embargo, cuando ejecutaban dentro del entorno de MatLab la variable dependiente en términos de la cual estaba la solución de la ecuación diferencial y este les arrojaba la expresión algebraica, confiaban entonces en la gráfica obtenida: "Después se transcribió el código de a figura 1.0 en el editor de Matlab, y se ejecutó, este mostro en el entorno de Matlab el siguiente resultado P=C*exp(sin(t)). Al comparar esta solución con la encontrada manualmente se encontró la misma solución", "Para saber si la respuesta de la ecuación diferencial es correcta utilizaremos Matlab. Ingresando en el código correctamente las variables y luego llamando la variable observamos que debe ser la misma solución que se encontró por el método de variables separadas".

En el registro verbal los estudiantes identificaron las variables dependientes e independientes, también entendieron la relación entre ambas variables. Cuando en la descripción del problema se encontraba planteada la ecuación tuvieron menor dificultad que cuando en el problema dicha ecuación no aparecía: "P es la población y t es el tiempo con el que crece la población. P en la ecuación diferencial es la variable dependiente y t la variable

independiente.” “Para mí las letras p y t, significan en mis términos comunes las variables X y Y, es decir las variables dependientes e independientes. En este caso la variable independiente seria (t) y la dependiente (p), la población crece con respecto al tiempo, de tal manera se está derivando población (p) con respecto al tiempo (t).”, “**P:** Población (Es la variable dependiente de la E.D) **t:** Tiempo con el que crece la población (Es la variables independiente)”, “P=es el eje Y, la variable que se va encontrar. T= es el eje X”, “P es la población y t es el tiempo con el que crece la población. P en la ecuación diferencial es la variable dependiente y t la variable independiente”,

Los tratamientos llevados a cabo dentro del registro verbal consistieron en razonamientos, deducciones, descripciones, explicaciones, asociaciones verbales, que les permitió discriminar la información e identificar las magnitudes que covarían en la descripción de la situación: “Sí, la relación es que el crecimiento de la población aumenta a medida que pasa el tiempo. Por ello P en la ecuación diferencial $\boldsymbol{\frac{dP}{dt} = (Cost)P,}$ es la variable dependiente y t la variable independiente. “La relación que hay entre la p y la t es q para calcular el crecimiento de la población se necesita del tiempo para poder emplear la formula de la ecuación diferencial”, “La relación que existe entre **P** y **t** es que P que es la población crecerá mucho más dependiendo de **t** que es el tiempo que pase para que esto suceda. Es decir que son directamente proporcionales que a mayor tiempo, mayor será el crecimiento de la población”.

Esto les permitió realizar predicciones de la situación a partir de las relaciones que habían establecido: “El ingeniero podría saber el tipo de crecimiento de la población resolviendo la ecuación diferencial de primer orden por el método de variables separables”, “El ingeniero para saber el crecimiento de la población tendrá que resolver la ecuación diferencial de primer orden por la solución de **Variables Separables**”, “El ingeniero para determinar la respuesta de la ecuación diferencial $\boldsymbol{\frac{dP}{dt} = (Cost)P}$” debe resolverla por el método de variables separables”, “La solución que obtiene el ingeniero es la familia de soluciones de la ecuación con respecto al tiempo, con la solución encontrada podrá saber el crecimiento de la población en el tiempo que el determine, ya que la solución de una ecuación es la familia de funciones p= c*exp(sin(t))”, “Una función que pertenece a la familia de funciones de: $P = c * e^{sent}$”, “El ingeniero puede saber el tipo de crecimiento que tiene la población, resolviendo la Ecuación Diferencial de Primer Orden por el método de variables separables. Que da como Solución: p =C*exp(sin(t))”.

Cuando se planteó el problema que requería del planteamiento de la ecuación diferencial, los estudiantes no lograron plantearla, como este no era el objetivo, se les entregó la ecuación diferencial planteada y al trabajarla bien sea usando el método de variables separables o el software encontraron la solución.

Cuando se les preguntó por el tiempo que pasó desde el momento en que llegó su familiar y el que empezaron a tomar la sopa, los estudiantes usaron regla de tres simple, sin considerar que la relación entre las variables no era de tipo lineal: "la temperatura de la sopa disminuye aproximadamente 30°C cada 10 minutos", "puede ser una regla de tres como lo plantee al inicio o también una Ecuación diferencial ya que la temperatura cambia con respecto al tiempo, t→temperatura, x→tiempo k→ temperatura ambiente $\frac{dt}{dx} = \frac{t}{x}.k$ Mis datos importante son la temperatura de la sopa, la temperatura ambiente y el tiempo que pasa. Teniendo en cuenta que la temperatura de la sopa cambia con respecto al tiempo".

Para que continuara la reflexión por parte de los estudiantes en este aspecto se les planteó la situación hipotética de considerar que la sopa seguiría servida en la mesa por una cantidad indefinida de tiempo, sobre esto los estudiantes afirmaron que "la temperatura de la sopa debe estar en grados mínimos porque el tiempo transcurrido es bastante, si se queda el resto de la tarde con la temperatura ambiente se demora un poco más en bajar pero si debe estar entre 1°C 2°C". Otro estudiante, por el contrario afirmó que "lo que sucede con la sopa luego de transcurrir todo este tiempo es que la sopa tendrá la misma temperatura que hay en el restaurante es decir 20°C. Porque por ley cuando se tienen dos objetos de diferente temperatura el de mayor calor tratará buscar de estar a la temperatura más "fría" ". Aquí se puede notar que algunos estudiantes hicieron deducciones con respecto a lo que su intuición les permitía concluir, sin embargo, los estudiantes que tuvieron presente lo aprendido dentro de su curso de termodinámica, pudieron hacer afirmaciones correctas.

Una vez dada la ecuación diferencial los estudiantes no presentaron dificultad para resolverla a través del método de variables separables. Algunos no consideraron correctamente los tiempos dados en la descripción del problema, por lo tanto, la solución propuesta por algunos de ellos no fue interpretada como se debía. Los estudiantes al graficar la solución cayeron en cuenta que la temperatura ambiente dada correspondía a una asíntota realmente y que las curvas tendían a ella pero realmente la sopa no tomaría dicha temperatura, ante lo cual cambiaron su creencia al pensar que la sopa se enfriaba hasta tomar una temperatura de 0°C.

A partir de la evaluación, se tienen las siguientes conclusiones:

Los estudiantes manejaron el software de manera apropiada, copiaron los códigos y efectuaron los cambios que cada ejercicio requería. Además, reconocieron que MatLab tenía un lenguaje propio que se debía conocer. Como la constante de integración fue trabajada en diferentes talleres, lograron usarla con mayor propiedad y fue natural relacionarla con la familia de soluciones de la ecuación, por tal motivo, el término "familia" fue utilizado con frecuencia por la mayoría de los estudiantes, haciendo alusión bien sea a la familia de curvas al referirse a la gráfica o a la familia de funciones, cuando se referían a la solución algebraica.

El método de variables separables lo utilizaron con destreza, aunque cometían algunos errores algebraicos, lo consideraban sencillo y en ocasiones les parecía mecánico. Al contar con el software podían revisar si la solución encontrada por el método algebraico era la correcta.[10]

Algunos estudiantes repitieron, en las respuestas que proporcionaron en los diferentes talleres, que el orden de la ecuación diferencial determinaba el número de constantes, más no el número de soluciones pues estas eran infinitas. También, identificaron a la variable dependiente como la variable que se busca despejar para determinar la solución, luego la solución queda expresada en términos de la variable independiente.

Por otra parte, algunos estudiantes presentaron dificultades en los siguientes aspectos:

- Reconocer una expresión como ecuación diferencial.
- Llevar a cabo las gráficas de funciones conocidas.
- Plantear una ecuación diferencial e interpretar la representación gráfica obtenida en MatLab como solución de la ecuación diferencial.
- Los estudiantes se abstenían de escribir la interpretación de la solución de una ecuación diferencial.
- Para algunos la gráfica dada por el software representaba a la ecuación diferencial y no especificaban que se trataba de su solución.
- Mostraron mayor confianza en la respuesta algebraica que en la respuesta gráfica, en ocasiones, esta última no la consideraban solución de la ecuación diferencial.

[10] En una ocasión, a una estudiante no le coincidieron las dos respuestas, sin embargo, confió en la hallada por el método algebraico, afirmando que estaba segura de su respuesta. Los demás corregían sus respuestas cuando no coincidían.

- Les causó dificultad plantear una ecuación diferencial a partir de un problema de la vida real, sin embargo, una vez planteada la resolvían sin mayor dificultad usando el método algebraico de variables separables.

Capítulo VII

Resultados

7.1 Caracterización de Niveles de Comprensión

Como Duval plantea existen dos tipos de representaciones: las mentales y las semióticas. Dentro de los procesos de enseñanza y de aprendizaje de las matemáticas, se dedican al estudio de objetos que median el uso de sistemas de representaciones semióticas al interior de diferentes registros.

La comprensión de algún objeto matemático por parte de los estudiantes puede considerarse difícil de caracterizar puesto que se tiende a pensar que para esto es necesario analizar las representaciones mentales de los estudiantes, es decir, llegar a la noesis y así analizar la aprehensión del objeto matemático realizada por ellos. Sin embargo, según Duval, la comprensión se puede examinar dentro de la semiosis o las producciones semióticas, principalmente cuando el estudiante lleva a cabo la coordinación entre diferentes registros de representación. Para ello, se requiere analizar las actividades cognitivas de formación, tratamiento y conversión del objeto matemático dentro de cada registro de representación semiótica. Además, para ser considerado registro de representación debe constituir lo que Duval denomina los grados de libertad de los que puede disponer un sujeto para objetivarse él mismo una idea aún confusa (p. 29).

Los registros que se utilizaron son los plurifuncionales discursivos que consisten en el lenguaje natural, además, los monofuncionales discursivos referidos a las expresiones algebraicas y los no discursivos cuando se trabajaron las gráficas cartesianas logradas a través del software MatLab.

7.1.1 Registros monofuncionales discursivos

En primer lugar en cuanto a la actividad cognitiva de formación dentro de la representación algebraica, algunos estudiantes reconocieron la escritura de una ecuación diferencial y su solución, al presentarles dos ecuaciones una polinómica y otra diferencial lineal de primer orden. Cuando se les pregunta sobre qué significa para ellos ecuación diferencial ordinaria lineal de primer orden, logran identificar algunas de sus características, puesto que hicieron comentarios que reflejaban tener idea sobre linealidad y orden, como por ejemplo para linealidad nombraron que la variable dependiente y sus derivadas debían ser de grado 1 y los coeficientes estar en términos de la variable independiente; al referirse al orden plantearon que se debía derivar con respecto a una sola variable y solo una vez. Sin embargo, en el problema que requería del planteamiento de una ecuación diferencial, ninguno de los estudiantes logró plantearla, aunque se debe resaltar que dos estudiantes recurrieron a la notación de derivada, encontrando una relación de dependencia y variación entre las dos variables en juego.

Así mismo, dentro de las expresiones verbales o bien sea dentro de los registros escritos, establecieron la relación entre la constante de integración con la solución general. Recuerdan del curso de cálculo integral, la necesidad de escribir la constante de integración, refiriéndose a ella como una regla, puesto que cuando resolvían integrales, lo hacían de forma mecánica, aunque según ellos tiene sentido, puesto que al derivar una constante el resultado es cero.

A pesar de que se supondría cierta contradicción en el hecho de que un término denominado constante pueda tomar diferentes valores, los estudiantes no encontraron dificultad con ello. Igualmente, establecieron una relación entre la constante de integración con el orden de la ecuación diferencial.

7.1.2 Registros monofuncionales no discursivos apoyados con MatLab

Con respecto a la actividad cognitiva de formación dentro de la representación gráfica, el hecho de no poder ver el procedimiento algebraico que utiliza el software hace que algunos estudiantes tengan dificultad al momento de identificar la gráfica como solución de la ecuación diferencial.

Otros estudiantes no se refieren a la gráfica como la solución de la ecuación diferencial, sino que para ellos primero se debe hallar la solución y a partir de ella se determina la gráfica, es decir es algo adicional. Es inquietante que la expresión algebraica juegue un papel tan importante para los estudiantes aunque reconocen la gráfica como solución, le falta algo, ese algo es su expresión algebraica.

Al preguntarles sobre la interpretación que daban a cada línea de código escribían lo que su conocimiento en lenguajes similares les permitía deducir, sin embargo, al aclarar durante la clase algunos comandos o funciones propias de MatLab, algunos estudiantes las escribían en la solución del taller una vez aclaraban lo que la función realizaba.

En la actividad cognitiva de tratamiento dentro de la representación algebraica, los estudiantes al resolver las ecuaciones diferenciales que se les plantearon recurrieron la totalidad de las veces al método de Variables Separables. Todas las ecuaciones que se les plantearon fueron resueltas a través de él.

Los estudiantes debían modificar los códigos que se les compartían dependiendo de los ejercicios propuestos. Esto se hizo para observar el manejo que tenían con respecto a las líneas referidas a los ejes, a la constante y a la ecuación. Cuando se les preguntó que si consideraban a MatLab como un método de solución, algunos estudiantes lo consideraron como tal. Aunque el procedimiento usado por el software para resolver las ecuaciones no lo puedan ver directamente, afirman que sí se puede considerar un método de solución. Algunos

estudiantes piensan que una vez obtenida la gráfica deben llegar a la expresión algebraica por su propia cuenta y no les parece sencillo.

Por otro lado, reconocen las variables dependientes e independientes en la resolución de la ecuación diferencial. La solución la relacionaron con la variable que se va a encontrar, es decir, la variable dependiente debe quedar despejada en términos de la variable independiente, conocida como solución explícita, así mismo tuvieron presente que la variable dependiente se deriva con respecto a la variable independiente. Al proponerles un problema que involucraba el planteamiento de una ecuación diferencial, identificaron las variables en cuestión. Las reconocen a partir de la ecuación que se les proponga, sin embargo, como algunas ecuaciones no siempre se plantearon en términos de x y y, los estudiantes utilizaron como estrategia relacionar las nuevas variables P, T o t con los anteriores términos, al ser más conocidos para ellos.

Finalmente, para analizar la conversión tomando como registro de partida la expresión algebraica de la familia de soluciones al registro de llegada la representación gráfica de la solución se pudo observar que se cumplieron los criterios 1. la posibilidad de una correspondencia "semántica" de los elementos significantes puesto que la constante C de la expresión algebraica representaba en la gráfica el conjunto de curvas, las variables dependiente e independiente de la expresión algebraica como los valores (x, y) que toman dentro del plano cartesiano , esta correspondencia es única y se mantuvo el orden en las unidades significantes.

Cuando se trabajó como registro de partida la representación gráfica de la solución al registro de llegada la expresión algebraica de la solución, se cumplieron los criterios para una de las dos gráficas trabajadas. Puesto que el conjunto de curvas fue identificado como una familia, esto llevó a tener en cuenta la contante de integración, así mismo a usar las variables x y y de forma correcta, teniendo en cuenta la univocidad semántica terminal y el orden respectivamente.

Cuando los estudiantes llevaron cabo los cambios a través del software identificaron la unidad significante "constante" tanto dentro de la expresión algebraica como dentro de la gráfica, por tal razón, relacionan el término familia cuando observan una gráfica con diferentes curvas y piensan en una gráfica de curvas cuando están frente a una expresión que tiene una constante. Comprenden el papel que juega la constante C dentro de la representación algebraica y también en la representación gráfica, identificando con esto la forma como puede ser presentada una o la otra. Algunos estudiantes utilizaron términos propios para indicar que se contaba con una representación de la solución, por ejemplo "personificar", en lugar de esta palabra se podría hacer uso del término "representar", tal como propone Duval, puesto que se puede acceder al objeto matemático

a través de representaciones. Además, como en algunas ocasiones se utilizaron dos constantes, algunos estudiantes lograron diferenciarlas, reconociendo la constante que indicaba que la solución correspondía a una familia de soluciones.

7.1.3 Registros plurifuncionales discursivos

Se propusieron dos problemas en lenguaje natural que requerían del planteamiento y resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias lineales de primer orden. El primero describía la situación en la que se encontraba un ingeniero que deseaba realizar una edificación en una zona en la que el crecimiento poblacional estaba dado por una ecuación diferencial, se les preguntó qué debía hacer el ingeniero para saber el tipo de comportamiento que tendría la población, a lo que la mayoría respondió que debía resolver la ecuación diferencial, aunque algunos propusieron despejar la variable P que representaba a la población, lo cual refleja el desconocimiento que tienen sobre la naturaleza de las ecuaciones diferenciales puesto que no es posible realizar un despeje de esta forma.

Los estudiantes identificaron la variable dependiente, Población (P), y la variable independiente, Tiempo (t), a partir de la expresión algebraica dada haciéndolas corresponder con las variables planteadas en el problema, es decir la variación de la población con respecto al tiempo. Algunos querían corresponder dichas variables con las variables x y y, puesto que habitualmente trabajan expresiones algebraicas dadas en estos términos. Al momento de resolver la ecuación diferencial usando el software los estudiantes reemplazaron la variable P por Y y la variable t por x, reflejando que es claro para ellos cuál es la variable dependiente e independiente en una expresión dada, e igualmente en un problema dado en lenguaje natural.

Cuando se les preguntó por la relación entre ambas variables los estudiantes manifestaron que efectivamente la cantidad de población dependía del tiempo, estableciendo una relación directamente proporcional, a mayor tiempo, mayor cantidad de población.

Los estudiantes reflejan que entienden que la solución obtenida al resolver la ecuación diferencial es la familia de soluciones, a partir de ella puede obtener cualquier solución, dadas unas condiciones iniciales.

Al plantearles un segundo problema relacionado con la variación de la temperatura de un plato de sopa, se indicaron aspectos como: la temperatura ambiente del lugar, la temperatura inicial y final de la sopa, el tiempo de llegada de una persona, tiempo transcurrido desde el momento en el que plato de sopa es servido y llega su acompañante; para establecer como incógnita el tiempo que transcurrió desde cuando la sopa fue servida hasta cuando la sopa fue consumida. La mayoría de los estudiantes extrajeron los valores numéricos planteados en el problema y lo primero que efectuaron fue una regla de tres simple, sin reflexionar en lo que cada valor representaba y si la relación lineal que ellos proponían correspondía a la solución del problema.

Algunos estudiantes tuvieron en cuenta los conocimientos adquiridos en termodinámica y dedujeron que al transcurrir cierto tiempo la temperatura de la sopa tendería a la temperatura ambiente, pero algunos consideraron que esta disminuiría a 1°C y otros dijeron que a 0°C.

Luego de pensar en estas preguntas los estudiantes empezaron a encontrar cierta relación con las ecuaciones diferenciales al afirmar que la temperatura cambiaba con respecto al tiempo. Aunque ninguno escribió la ecuación diferencial que resolvía el problema, dos estudiantes usaron la notación $\frac{dy}{dx}$ entendiendo que la variación de una variable dependía de la variación de la otra.

Cuando se les propuso la expresión algebraica determinada por Newton los estudiantes no tuvieron dificultad alguna en resolverla usando el método de variables separables, sin embargo, ninguno logró plantearla inicialmente.

Finalmente, no todos los estudiantes tuvieron en cuenta un dato clave dado en el problema respecto a que el tiempo transcurrido desde el momento que la sopa es servida hasta el momento en que llega el acompañante debía ser restado del tiempo encontrado al resolver la ecuación diferencial puesto que este era el tiempo total transcurrido desde el momento en que es servida hasta el momento en que es consumida.

7.1.4 Niveles de comprensión

Teniendo en cuenta la teoría de los registros de representación semiótica planteada por Duval, lo que se entiende por comprensión y los resultados obtenidos al llevar a cabo la situación didáctica se proponen los siguientes niveles:

1. Nivel de comprensión algebraica: un estudiante se encuentra en este nivel si elabora síntesis sobre la solución de una ecuación diferencial ordinaria lineal de primer orden como familia de funciones a partir de su expresión algebraica, teniendo como elemento importante la constante de integración.
2. Nivel de comprensión gráfica: un estudiante se encuentra en este nivel cuando reconoce en la gráfica de una familia o conjunto de curvas dada, la representación de la solución de una ecuación diferencial ordinaria lineal de primer orden.
3. Nivel de comprensión coordinado: un estudiante se encuentra en este nivel cuando reconoce que tanto la expresión algebraica como la representación gráfica de la solución de una ecuación diferencial ordinaria lineal de primer orden corresponden al mismo objeto matemático.

Se puede decir que el nivel uno y el nivel dos se trata de una comprensión mono-registro y el nivel 3 de una comprensión integrativa.

En los dos primeros niveles se tuvo en cuenta:

- La identificación de la constante.
- La identificación de su forma (algebraica, curvas)
- La identificación de las variables dependiente e independiente.
- La identificación de la relación entre las variables dependiente e independiente

Esto permite considerar las unidades significantes para analizar la coordinación de dos registros de representación semiótica diferentes referidos al mismo objeto matemático.

7.2 Consideraciones finales

Los estudiantes no presentaron dificultades en el manejo del software. El software fue considerado como un método para comprobar si las soluciones encontradas a través de los métodos algebraicos eran las correctas. Sin embargo, la confianza que tienen por los métodos algebraicos es mayor.[11]

Algunos estudiantes son reacios a utilizar algún tipo de software en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. A pesar de que son estudiantes de ingeniería de sistemas, carrera en la que el componente tecnológico es uno de sus fuertes, llegan a pensar que este tipo de software les genera pereza, Los estudiantes tienen muy arraigada la idea de que si no resuelven el ejercicio por ellos mismos, con procedimientos algorítmicos, entonces no es un método de solución válido.

Otros estudiantes resaltaron los aspectos positivos como por ejemplo "le ayuda al estudiante a trabajar digitalmente también porque pues nuestra carrera también es de ingeniería de sistemas entonces tenemos que aprender a manejar distintos software entonces es un aspecto positivo porque uno aprende no solo como usted decía a resolver ecuaciones sino que también se pueden graficar gráficas en 3D u otras cosas hacer simulaciones algo que nos ayuda a aprender muchas cosas" "mayor entendimiento en las cosas que estamos haciendo". "Matlab es una herramienta esencial para graficar funciones que satisfacen una ecuación diferencial", aunque no sobra decir, que la gráfica no fue considerada por varios estudiantes como solución de la ecuación diferencial "pero la gráfica es algo que uno no está tan evaluando diría yo, porque a nosotros nos respecta es más el procedimiento, el aprender el procedimiento y por qué se resuelve de esa manera".

[11] En una ocasión, la respuesta que una estudiante obtuvo con el software no coincidió con la que encontrada por el método de variables separables, ella dudó de la respuesta arrojada por el software, por esta razón escribió "Matlab no mostró la misma solución de la E.D.O resuelta por el método algebraico, sino que mostro una Rta equivocada, ya que en el papel, la solución incluye un signo menos y el sw no lo muestra. Lo más curioso es que si grafica la solución correcta"

7.3 Conclusiones

La experiencia de haber llevado a cabo los análisis histórico-epistemológico, cognitivo y didáctico sobre el objeto matemático "familia de soluciones de una ecuación diferencial" fue enriquecedora, puesto que permite tener una visión diferente sobre el objeto a trabajar, debido a que se consideró su desarrollo dentro del campo de las matemáticas, el hecho de estar relacionado con otros objetos matemáticos, el reto que se asume dentro de su enseñanza y el desafío para los estudiantes cuando se enfrentan a un objeto que requiere del dominio de otros.

Así mismo, el análisis epistemológico, didáctico y cognitivo fue de gran ayuda para el diseño de la situación didáctica, y por consiguiente en el desarrollo de las diferentes sesiones, lo anterior lleva a pensar que en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, no se debe ignorar el objeto matemático pues pone en juego una serie de elementos, que en ocasiones se sobrestiman y hace que los estudiantes tengan dificultades en la comprensión de un objeto dado.

Para algunos estudiantes la representación gráfica no correspondía a una solución válida de la ecuación diferencial, en diferentes situaciones les costó alejarse de la expresión algebraica, se puede notar que los estudiantes al igual que los profesores consideran más potentes los registros monofuncionales discursivos sobre los plurifuncionales, tal vez porque en la enseñanza tradicional los monofuncionales se han privilegiado dando mayor credibilidad a los resultados que se derivan dentro de ese tipo de registros.

En la situación didáctica, a medida que se trabajaron los diferentes talleres, los estudiantes se familiarizaron con el uso del término familia. En este aspecto, el software jugó un papel importante, y se puede notar en los resultados del Taller 6, puesto que aunque los estudiantes afirmaron que recordaron la expresión matemática por conocimientos aprendidos en el colegio o en cursos anteriores, escribieron el término "familia", debido a que observaron un conjunto de curvas.

Al contar con otros sistemas de representación que no exigiera los conocimientos previos de los cursos de matemáticas anteriores, el estudiante tuvo la oportunidad de conocer otra forma de acceder a un mismo objeto.

Reconocen la "constante" como una variable que toma diferentes valores determinando una solución particular para una EDO lineal de primer orden dada.

Algunos estudiantes presentaron dificultades al diferenciar el objeto de su representación, aunque se realizaron varios talleres dentro de la situación didáctica que involucraron otro tipo de representación, en este

caso, la representación gráfica dada por el software no la consideran válida puesto que están acostumbrados a las expresiones algebraicas.

Consideran difícil pasar de una representación gráfica a una expresión algebraica, aunque una estudiante considera que es posible, los demás afirmaron que a ellos se los complicaría.

Los estudiantes opinan que el uso de software promueve la pereza, tal vez debido a la creencia de que las matemáticas están relacionadas con procedimientos algorítmicos por tal motivo cuando no tienen acceso a este tipo de procedimientos pero que de igual forma se llega a la solución, no los convence, hasta en ocasiones no lo consideran válido.

7.4 Recomendaciones

Los estudiantes deben tener mayor experiencia en los diferentes cursos de matemáticas en el manejo de programas que les permita llevar a cabo gráficas de diferentes funciones.

Los estudiantes reconocen que se debe tener dominio de temas relacionados con cálculo integral y diferencial, sin embargo, en ocasiones muestran olvido de algunos temas, convirtiéndose en un obstáculo en la enseñanza de los temas de ecuaciones diferenciales, por tal motivo cualquier apoyo que beneficie la comprensión de los nuevos temas y el repaso de los anteriores debería ser tenido en cuenta.

Los profesores de áreas como matemáticas, deben ser conscientes que en ocasiones en la enseñanza de un objeto matemático es necesaria la comprensión de otros objetos matemáticos, por esta razón es importante que al enseñar se lleve a cabo el análisis histórico-epistemológico del objeto matemático de interés, debido a que se tiene mayor claridad sobre las exigencias de los conocimientos previos que su definición o procedimientos implican en los estudiantes.

Cuando se comparte un código a los estudiantes es importante preguntarles por la interpretación de cada una de las líneas para saber si las están entendiendo, puesto que, posteriormente podría generar conclusiones incorrectas.

7.5 Sugerencias para futuras investigaciones

Proponer un número considerable de problemas de aplicación, puesto que capta la atención de los estudiantes debido a que piensan que muchos cursos de matemáticas, y en especial el curso ecuaciones diferenciales, no tiene aplicación en situaciones que ellos encuentren en su vida cotidiana.

Sería interesante aplicar los talleres con otros grupos de otras universidades, por tal motivo se comparten en los anexos, para de esta forma comparar las nuevas respuestas con las obtenidas dentro de la presente investigación.

Es inquietante el hecho de que algunos estudiantes no consideren la representación gráfica como solución de la ecuación diferencial, ellos identifican una solución en matemáticas como una solución algebraica, por tal motivo si es una respuesta distinta, les genera dudas sobre el resultado obtenido. Luego, este tipo de representación requiere ser tenido en cuenta por los profesores de matemáticas dentro de otras investigaciones con el mismo objeto matemático u otro.

Un dato curioso con respecto a la experiencia tenida con este grupo es que en ocasiones los estudiantes se refieren a la gráfica, como la gráfica de la ecuación diferencial, cuando se les pregunta de nuevo, a veces caen en cuenta que la gráfica representa a la solución mas no a la ecuación diferencial planteada, sería interesante seguir llevando a cabo este tipo de situaciones para analizar si otros estudiantes plantean esta misma idea.

Se proponen las siguientes preguntas que se espera sean tenidas en cuenta dentro de futuras investigaciones:

¿Cómo se puede favorece la coordinación de registros teniendo como registro de partida los registros plurifuncionales discursivos y como registro de llegada los registros monofuncionales no discursivos?

¿Cómo se puede aumentar la confianza de los estudiantes en representaciones semióticas diferentes a la representación algebraica?

¿Por qué los estudiantes confunden la representación gráfica de la solución de una EDO lineal de primer orden con la representación de la EDO misma?

Bibliografía

Acero, I., & López, M. (2007). *Ecuaciones Diferenciales. Teoría y problemas.* Madrid: Tébar.

Arias Londoño, E., & Rúa Vásquez, J. (2005). *Tópicos de ecuaciones diferenciales. Epítome para un curso básico.* Medellín: Universidad de Medellín.

Artigue, M. (1995). *La ingeniería didáctica.* Bogotá: Iberoamérica.

Azcarate, C. (1996). *Cálculo dferencial e integral.* Madrid: Síntesis.

Barbarán, J., & Fernández, J. (2014). El análisis de errores en la resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias. Una metodología para desarrollar la competencia matemática. *Enseñanza de la ciencia*, 173-186.

Brousseau, G. (1998). *Théorie des Situations Didactiques.* Grenoble, Francia: La Pensée Sauvage.

Camacho, M., Perdomo, J., & Santos-Trigo, M. (2009). Revisiting university students' knowledge that onvolves basic differential equation questions . *PNA, 3(3)*, 123-133.

Chavarría, J. (2006). Teoría de las situaciones didácticas. *Cuadernos de investigación y formación en Eduación Matemática*, Recuperado de http://revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem/article/view/6885.

Duval, R. (1993). *Registres de représentations sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. Annales de Didactique et de Sciences Cognitives.* ULP, IREM Strasbourg.

Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano.* Cali: Universidad del Valle traduction espagnol de l'ouvrage paru en français en 1995.

Duval, R. (2004). *Los problemas Fundamentales en el Aprendizaje de las Matemáticas y las Formas Superiores del Desarrollo Cognitivo.* Cali: Universidad del Valle.

Edwards, H., & Penney, D. (2001). *Ecuaciones Diferenciales.* México: Prentice Hall.

Estrada, A. L., Mendoza, S. M., & Castillo, D. I. (2013). Representaciones semióticas, una estrategia didáctica para el aprendizaje de Ecuaciones Diferenciales de Primer Orden (EDOPOs). *EDUCATECONCIENCIA*, 151-157.

Fuster, J. L., & Santoja, F. J. (1997). Una Interpretación de las dificultades en el aprendizaje del concepto de integral. *Divulgaciones matemáticas*, 61-76.

García, J. (2005). *La comprensión de las representaciones gráficas cartesianas presentes en los libros de texto de ciencias experimentales, sus características y el uso que se hace de ellas en el aula.* Granada: Universidad de Granada.

Guerrero, C., Camacho, M., & Mejía, H. (2010). *Dificultades de los estudiantes en la interpretación de las soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias que modelan un problema.* Mexico.

Gustin, J., & Avirama, L. (2014). *Una propuesta para la enseñanza de la ecuación cuadrática en la escuela a través de la integración del material manipulativo.* Cali: Recuperado de http://bibliotecadigital.univalle.edu.co/bitstream/10893/7200/1/3469-0430876.pdf.

Hernández, M. (2009). *Las Ecuaciones Diferenciales ordinarias lineales de primer y segundo orden en el contexto del movimiento uniforme.* México D. F.

Jiménez, L. (s.f). *El uso de MatLab como recurso docente para la enseñanza-aprendizaje de los métodos numéricos* . México: UNAM.

Loya, A. (s. f.). *Enseñanza–aprendizaje de las ecuaciones diferenciales ordinarias. "Una ingeniería didáctica utilizando la teoría de los registros de representación semiótica y las situaciones didácticas".* Juárez Chihuahua.

Lozano, Y. (2011). *Desarrollo del concepto de la derivada sin la noción del límite.* Bogotá: Recuperado de http://www.konradlorenz.edu.co/images/stories/articulos/DESARROLLO_DE_LA_DERIVADA_SIN_LA%20NOCION_DEL_LIMTE.pdf.

Morales, Y. (2009). *Enfoques y dificultades en la enseñanza de las ecuaciones diferenciales.* Costa Rica.

Moreno, M., & Azcárate, C. (2003). Concepciones y creencias de los profesores universitarios de matemáticas acerca de la enseñanza de las ecuaciones diferenciales. *Enseñanza de las ciencias*, 265-280.

Napolés, J., & Negrón, C. (2002). La historia de las ecuaciones diferenciales ordinarias contada por sus libros de texto. *Didáctica de las Matemáticas,*, 33-57.

Ortega, A. (s.f). *Historia del álgebra.* España: Departamento de Matemáticas.

Ospina, D. (2012). *Las representaciones semióticas en el aprendizaje del concepto de función lineal.* Manizales: Universidad Autónoma de Manizales.

Pardo, H. (2013). *El papel de los sistemas de representación en la comprensión y modelación de situaciones con Ecuaciones Diferenciales Ordinaras.* Cali: Doctorado Interinstitucional en Educación.

Quintero, C., & Cadavid, L. (2009). Construcción del concepto de función en estudiantes de. *10° Encuentro Colombiano de Matemática Educativa*.

Ramos, M. (2010). *Influencia de internet en los estudiantes de primer semestre de carrera de administración del istp argentina , 27 de Agosto de 2010.* Piura: Repositorio institucional PIRHUA.

Salvador, A., & Molero, M. (2007). *Análisis matemático para Ingeniería.* Madrid: Prentice Hall.

Sandoval, I., & Diaz, E. (s. f.). *Ecuaciones diferenciales de 1er. orden. una perspectiva didáctica con geometría dinámica.* Recuperado de http://semana.mat.uson.mx/MemoriasXVII/XII/Sandoval%20Caceres.pdf.

Zill, D. (2006). *Ecuaciones diferenciaes con aplicaciones modelado.* México: Thomson.

ANEXOS

Anexo A. Taller 0. Reconociendo los entornos de MatLab. Primera parte.

El presente taller consta de dos partes. En la primera se realizará una introducción a las principales funciones y opciones de trabajo que ofrece MatLab con el fin de que usted se familiarice con esta herramienta. En la segunda se llevarán a cabo las gráficas de ciertas funciones y además la resolución de determinadas ecuaciones diferenciales.

Parte 1.

Básicamente se utilizarán los siguientes espacios de trabajo:

1. VENTANA PRINCIPAL

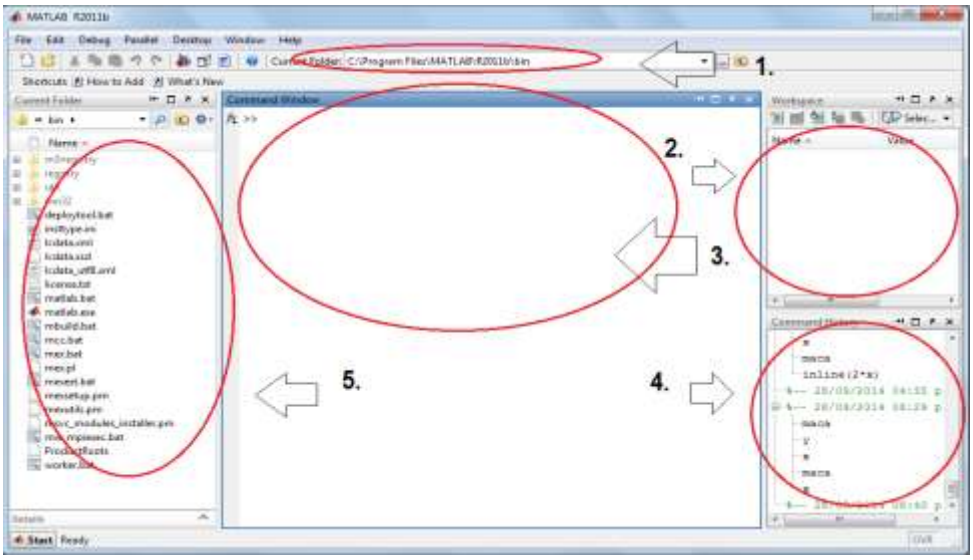


Figura 57. **Se indican los espacios de trabajo que se utilizarán con mayor frecuencia.**

1. Indica la ubicación actual en la que se está trabajando.

2. "Workspace" es el espacio de trabajo en la cual se observan las variables creadas.

3. "Command Window" es la ventana en la cual se pueden introducir líneas de código con el fin de utilizar funciones, crear y visualizar variables, visualizar errores, abrir archivos, resolver ecuaciones, etc.

4. "Command History", en este espacio se pueden visualizar las últimas líneas de código que han sido utilizadas.

5. Se visualizan los archivos contenidos en el directorio actual en el que se está trabajando.

2. EDITOR

En este espacio se escribirá el código que requeriremos para resolver una EDO lineal de primer orden.

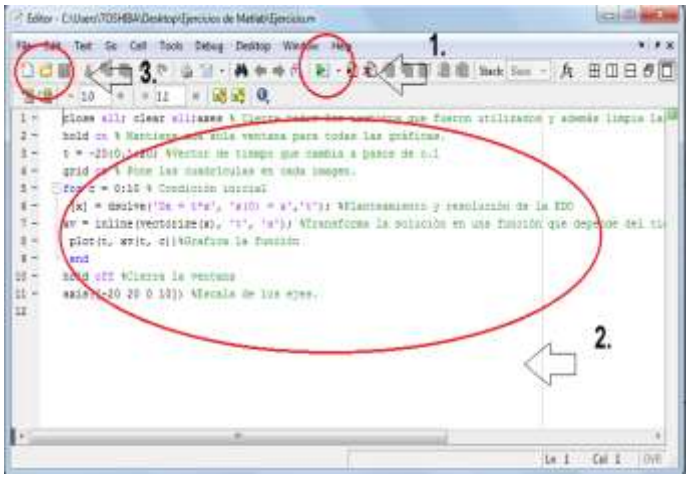


Figura 58. **Iconos que se utilizarán y espacio de trabajo en el cual se escribirán los códigos.**

1. Sirve para ejecutar el código.

2. Espacio en el cual escribiremos el código.

3. Sirven para crear un archivo nuevo o abrir un archivo existente, respectivamente.

3. GRÁFICA

En este espacio se visualizarán las gráficas requeridas.

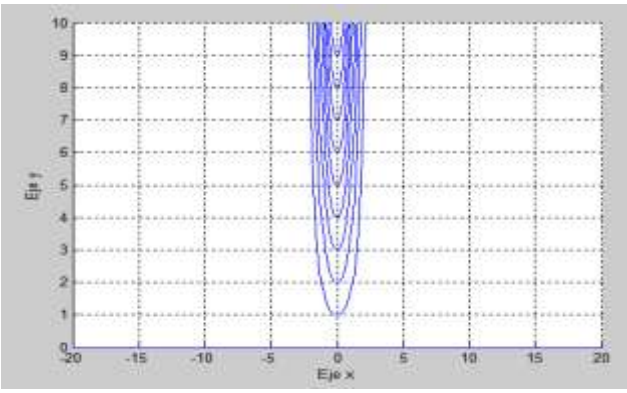


Figura 59. **Ejemplo de una gráfica arrojada por MatLab**

Para cada una de los siguientes ejercicios deberá realizar un pantallazo, en el cuál se evidencie que usted los realizó.

1. Asignar valores a diferentes variables.
2. Crear escalares, vectores y matrices.
3. Efectuar operaciones entre matrices.
4. Obtener elementos de un vector y de una matriz a través de su posición. Ejemplo: a(1); A(1,2)
5. Encontrar la matriz inversa (^-1), la matriz transpuesta (´) de una matriz dada.
6. Resolución de sistemas de ecuaciones lineales.
7. Obtener algunos valores como exp(1); cos (pi); sqrt(-4)
8. Reconocer variables usadas. Ejemplo:who
9. Identificar el comando help.

CONCLUSIONES:

Escribir como mínimo dos conclusiones sobre la impresión que tuvo en el manejo de este software.

Anexo B. Taller 1. Reconociendo los entornos de MatLab. Segunda parte.

SEGUNDA PARTE

En el siguiente taller se conocerá la forma como se grafican determinadas funciones teniendo en cuenta los diferentes comandos que ofrece el software MatLab.

1. Realizar la gráfica de las siguientes funciones:

A. $y = \sin(x)$	B. $y = e^x$

Responda: ¿Cuál fue la estrategia que utilizó para hacer cada gráfica?

2. En el editor de MatLab escriba lo siguiente:

```
x=-5:0.1:5;
y=sin(x);
plot(x,y);
```

Guarde este programa con su nombre, luego ejecútelo.

2.1 ¿Qué obtuvo? Pegue el pantallazo de lo obtenido

2.2. Explique con sus propias palabras lo que significa ***cada una*** de las líneas anteriores.

3. Teniendo en cuenta el resultado anterior, grafique la segunda función $y = e^x$. Haga las consultas respectivas.

3.1 ¿Qué obtuvo? Pegue el pantallazo de lo obtenido.

3.2 ¿Qué fue necesario tener en cuenta para graficar esta función?

4. Realizar la gráfica de las siguientes funciones:

A. $y = \sin(x) + C$

B. $y = e^x + C$

4.1 ¿A qué hace referencia la C?

4.2 ¿Al graficar que se obtiene? Pegue el pantallazo para cada una.

4.3 ¿Qué fue necesario tener en cuenta para graficar esta función?

5. Analizando las gráficas obtenidas:

5.1 ¿Cuál es la diferencia entre $y = sin\ (x)$ y $y = \ sin\ (x) + C$?

5.2 Responde esta misma pregunta para la otra función.

5.3 Teniendo en cuenta lo anterior, ¿qué nombre se le podría dar a la expresión $y = \ sin\ (x) + C$ y $y = \ e^x + C$?

Anexo C.Taller 2. Resolución de ecuaciones

En el siguiente taller se trabajará la forma de resolver ecuaciones a través del software MatLab, con el objetivo de que determinen en la resolución de las ecuaciones dadas.

1. Resolver las siguientes ecuaciones:

A. $x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6 = 0$

Para esto escriba el siguiente código:

```
close all, clear all% cerrar otros programas y eliminar variables creadas previamente
```

```
p = [1 -1 -7 1 6 ];% vector que contiene los coeficientes, en orden descendente, de la ecuación.
roots(p)%función que encuentra las raíces (soluciones) de la ecuación.
```

A.1 ¿Qué obtuvo por solución?

A.2 ¿Cómo verificaría que el resultado obtenido corresponde a la solución?

Realice la gráfica de la expresión A., para esto tenga en cuenta el siguiente código:

```
close all, clear all% cerrar otros programas y eliminar variables creadas previamente
x=-3:0.1:4;
y= 1*x.^4-1*x.^3-7*x.^2+1*x+6;
plot(x,y);
xlabel('Eje x') % Escribe el título al eje x
ylabel('Eje y') % Escribe el título al eje y
grid on;
```

A.3 ¿Qué relación tiene la solución encontrada con la gráfica obtenida?

2. Resolver la siguiente ecuación:

B. $\frac{dy}{dx} = xy$

Para esto escriba el siguiente código:

```
close all; clear all;
[y] = dsolve('Dy = x*y', 'y(0) = C','x') %Planteamiento y resolución de la EDO
```

B.1 ¿Qué obtuvo por solución?

B.2 ¿Escriba la estrategia que utilizaría para verificar que el resultado obtenido corresponde a la solución?

Realice la gráfica de la expresión B para distintas condiciones iniciales. Tenga en cuenta el siguiente código:

```
close all; clear all;
axes% Cierra todos los archivos que fueron utilizados y además limpia las variables para dar inicio a cada EDO
hold on% Mantiene una sola ventana para todas las gráficas.
x = -20:0.1:20; %Vector de tiempo que cambia a pasos de o.1
```

```
grid on% Pone las cuadrículas en cada imagen.
for C = 0:10 % Condición inicial
 [y] = dsolve('Dy = x*y', 'y(0) = C','x'); %Planteamiento y resolución de la EDO
yv = inline(vectorize(y), 'x', 'C'); %Transforma la solución en una función que depende del tiempo y la condición inicial para ser evaluada
plot(x, yv(x, C))%Grafica la función
xlabel('Eje x') % Escribe el título al eje x
ylabel('Eje y') % Escribe el título al eje y
end
hold off%Cierra la ventana
axis([-5 5 0 5]) %Escala de los ejes.
```

B.3 ¿Qué relación tiene la solución encontrada con la gráfica obtenida?

3. Escriba la (s) diferencia (s) entre las dos ecuaciones y sus respectivas soluciones.

4. Si compara la solución de la ecuación A. con la ecuación B, ¿qué puede decir al respecto?

5. Escriba por lo menos dos conclusiones sobre el trabajo realizado.

Anexo D.Taller 3. Un problema de aplicación

El presente taller tiene como objetivo resolver un problema a través del software MatLab.

PARTE 1.

PROBLEMA:

Un ingeniero decide construir una edificación en una zona urbana con una dinámica de crecimiento dictada por la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{dP}{dt} = (Cost)P,$$

A. ¿Cómo podría saber el tipo de crecimiento que tiene la población?
B. ¿Qué significado tiene para usted las letras P y t?
C. ¿Existe alguna relación entre la P y la t?
D. ¿Qué puede hacer el ingeniero para determinar la respuesta?

ATENCIÓN 1: el siguiente código puede ser de interés para usted:

```
close all; clear all;axes % Cierra todos los archivos que fueron utilizados y además limpia las variables para dar inicio a cada EDO
hold on % Mantiene una sola ventana para todas las gráficas.
x = -20:0.1:20; %Vector de tiempo que cambia a pasos de 0.1
grid on % Pone las cuadrículas en cada imagen.
for C = 0:10 % Condición inicial
 [y] = dsolve('Dy = x*y', 'y(0) = C','x'); %Planteamiento y resolución de la EDO
yv = inline(vectorize(y), 'x', 'C'); %Transforma la solución en una función que depende del tiempo y la condición inicial para ser evaluada
 plot(x, yv(x, C))%Grafica la función
xlabel('Eje x') % Escribe el título al eje x
ylabel('Eje y') % Escribe el título al eje y
 end
hold off %Cierra la ventana
axis([-20 20 0 10]) %Escala de los ejes.
```

Responder:

1. ¿Cuál es la solución que debe obtener el ingeniero?
2. ¿Qué se puede decir de la gráfica encontrada con relación a la pregunta planteada al ingeniero?
3. ¿Cómo se puede determinar si la respuesta encontrada es la correcta?
4. Para ti ¿qué significa una Ecuación diferencial lineal de primer orden?

PARTE 2.

En parejas, buscar un problema de aplicación de una ecuación diferencial de primer orden y hacer un Video Tutorial en donde expliquen la forma de resolverlo y la interpretación dada a la respuesta. **(Plazo: Lunes 16 de marzo de 2015, hora: 11:58pm)**

Anexo E.Taller 4. Graficando funciones

El presente taller tiene como finalidad resolver una EDO a través los métodos algebraicos conocidos y el software MatLab.

1. Usando MatLab, realice las gráficas de las siguientes funciones:

A. $y = e^x$

B. $y = 5e^x$

C. $y = 10 * e^x$

D. $y = -e^x$

E. $y = -5 * e^x$

F. $y = -10 * e^x$

Copie y pegue en un archivo nuevo de manera ordenada los pantallazos de las gráficas obtenidas.

A. Plantee para cada expresión anterior una EDO de tal forma que la expresión dada sea solución de la EDO determinada.

B. ¿Se puede establecer una EDO cuya solución sea las funciones dadas? Para dicha EDO, ¿qué concluyes sobre su solución?

C. Al desarrollar este primer punto, qué conclusiones se pueden enunciar.

2. Realizar las gráficas de las siguientes funciones:

A. $y = \cos(x)$

B. $y = 10 * \cos(x)$

C. $y = 50 * \cos(x)$

D. $y = -10 * \cos(x)$

E. $y = -50 * \cos(x)$

Copie y pegue en un archivo nuevo de manera ordenada los pantallazos de las gráficas obtenidas.

A. Plantee para cada expresión anterior una EDO de tal forma que la expresión dada sea solución de la EDO determinada.

B. ¿Se puede establecer una EDO cuya solución sea las funciones dadas? Para dicha EDO, ¿qué concluyes sobre su solución?

C. Al desarrollar este primer punto, qué conclusiones se pueden enunciar.

Código que puedes necesitar:

```
hold off %Cierra la ventana
axis([-20 20 0 20]) %Escala de los ejes.
```

```
hold on % Mantiene una sola ventana para todas las gráficas.
x=-10:0.1:10; % Valores que toma la variable x.
f=inline('10*((exp(sin(x))))','x');  % Convierte una cadena de caracteres en una función.
axis([-10 10 -10 30]) % Establece la escala para los ejes para visualizar mejor las gráficas
plot(x,f(x),'r') % Grafica la función, primero debe ir la variable independiente "x" y luego la
% variable dependiente "y"
xlabel('Eje x') % Escribe el título al eje x
ylabel('Eje y') % Escribe el título al eje y
grid on
```

3. Resuelve cada ecuación diferencial usando un método algebraico.

A. $\frac{dx}{dt} = x * y$

B. $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2} * x * y$

C. $\frac{dx}{dt} = -\frac{1}{2} * x * y$

ATENCIÓN 1: En primer lugar resuelva una por alguno de los métodos algebraicos conocidos, indique su nombre, luego copie el código, escrito en la parte de abajo, en el EDITOR, el cual le permitirá resolver cada ecuación diferencial haciendo las variaciones que considere pertinente.

```
close all; clear all;axes % Cierra todos los archivos que fueron utilizados y además limpia las variables para dar
inicio a cada EDO
hold on % Mantiene una sola ventana para todas las gráficas.
x = -20:0.1:20; %Vector de tiempo que cambia a pasos de o.1
grid on % Pone las cuadrículas en cada imagen.
for C = 0:10 % Condición inicial
 [y] = dsolve('Dy = x*y', 'y(0) = C','x'); %Planteamiento y resolución de la EDO
yv = inline(vectorize(y), 'x', 'C'); %Transforma la solución en una función que depende del tiempo y la condición
inicial para ser evaluada
 plot(x, yv(x, C))%Grafica la función
xlabel('Eje x') % Escribe el título al eje x
ylabel('Eje y') % Escribe el título al eje y
 end
```

```
hold off %Cierra la ventana
axis([-20 20 0 10]) %Escala de los ejes.
```

Una vez copiado, ejecute el código. Tome unos minutos para entender el código y exprese sus comentarios sobre las gráficas encontradas. Ahora escriba "y" en el "Command Window" e inmediatamente presione "enter"**. Al hacer esto, comente lo que obtuvo y compárelo con lo que obtuvo a través del método gráfico.**

ATENCIÓN 2: Haga lo mismo para todas las ecuaciones.

4. Resolver cada ecuación diferencial usando un método algebraico.

A. $\frac{dx}{dt} = Cos(x) * y$

B. $\frac{dx}{dt} = 2 * Cos(x) * y$

C. $\frac{dx}{dt} = -2 * Cos(x) * y$

ATENCIÓN 1: En primer lugar resuelva una por el método algebraico conocido, luego copie el siguiente código en el EDITOR, el cual le permitirá resolver cada ecuación diferencial haciendo las variaciones que considere pertinente.

```
close all; clear all;axes % Cierra todos los archivos que fueron utilizados y además limpia las variables para dar inicio a cada EDO

hold on % Mantiene una sola ventana para todas las gráficas.
x = -20:0.1:20; %Vector de tiempo que cambia a pasos de o.1
grid on % Pone las cuadrículas en cada imagen.
for C = 0:10 % Condición inicial
 [y] = dsolve('Dy = 2*cos(x)*y', 'y(0) = C','x'); %Planteamiento y resolución de la EDO
yv = inline(vectorize(y), 'x', 'C'); %Transforma la solución en una función que depende del tiempo y la condición inicial para ser evaluada
 plot(x, yv(x, C))%Grafica la función
xlabel('Eje x') % Escribe el título al eje x
ylabel('Eje y') % Escribe el título al eje y
 end
hold off %Cierra la ventana
axis([-20 20 0 10]) %Escala de los ejes.
```

Una vez copiado, ejecute el código. Tome unos minutos para entender el código y exprese sus comentarios sobre las gráficas encontradas. Ahora escriba "y" en el "Command Window" e inmediatamente presione "enter". **Al hacer esto, comente lo que obtuvo y compárelo con lo que obtuvo a través del método gráfico.**

ATENCIÓN 2: Haga lo mismo para todas las ecuaciones de este punto.

Responda al siguiente cuestionario, apoyándose de los resultados anteriores.

1. Al analizar las gráficas obtenidas al resolver EDO ¿qué puedes concluir?
2. Al analizar las gráficas y las soluciones obtenida a través del software y el método algebraico usado, ¿qué relación existe entre ellos?
3. Defina con sus propias palabras lo que entiende por solución de una ecuación diferencial.
4. Se pueden considerar las gráficas obtenidas como otro método para resolver una EDO? ¿Qué nombre le darías?

Anexo F. Taller 5. Una invitación a almorzar

Un familiar lo invitó a un almuerzo para celebrar su cumpleaños. Como la universidad en la que usted estudia queda cerca del restaurante, usted llegó antes de la hora acordada.

El mesero le señala la mesa reservada y al cabo de un tiempo llega con dos platos de sopa, poniéndolos sobre la mesa. Usted le plantea que todavía no llega la persona que espera, a lo cual el mesero le responde que para cuando llegue su acompañante, si así lo consideran, les cambiará los platos. (En este momento los platos se encuentran a una temperatura de 90°C).

Cuando observa la hora en el celular, también observa que la temperatura del lugar es de 20°C.

Pasados 10 minutos llega su familiar. El mesero se acerca para preguntar cuál es su decisión sobre cambiar los platos; ustedes tocan los platos y afirman que no es necesario. (Estos están a una temperatura de 60°C).

Una vez se retira el mesero, ustedes se cuentan algunas cosas y al cabo de cierto tiempo toman la sopa. (En este momento los platos se encuentran a una temperatura de 35°C).

1. ¿Cuánto tiempo pasó desde el momento que llegó su familiar y empezaron a tomar la sopa?

2. ¿Qué sucede con la temperatura de la sopa? Explique su respuesta.

3. Suponga que su familiar nunca llegó, usted decide almorzar solo y además, quedarse el resto de la tarde en el lugar para terminar algunas tareas pendientes y regresar a su universidad. Pasado este tiempo, antes de salir del restaurante usted observa que el mesero olvidó retirar el plato de sopa destinado a su acompañante ¿Qué sucedió con la temperatura de la sopa? ¿Por qué? ¿qué sucede si la temperatura ambiente es de 27°C?

4. ¿Plantee una expresión matemática que le permite dar respuesta a la pregunta inicial?

Ley De Enfriamiento De Newton.

El nombre de Isaac Newton (1641-1727) es ampliamente reconocido por sus numerosas contribuciones a la ciencia. Probablemente se interesó por la **temperatura**, el calor y el punto de fusión de los metales motivado por su responsabilidad de supervisar la calidad de la acuñación mientras fue funcionario de la casa de la moneda de Inglaterra.

El ensayador practicando su oficio.[12]

Newton observó que al calentar al rojo un bloque de hierro y tras retirarlo del fuego, el bloque se enfriaba más rápidamente cuando estaba muy caliente, y más lentamente cuando su temperatura se acercaba a la temperatura del aire. Sus observaciones dieron lugar a lo que hoy conocemos con el nombre de **Ley de enfriamiento de Newton**.

La ley de Newton del enfriamiento establece que: la rapidez con la que se enfría un objeto es proporcional a la diferencia entre su temperatura y la del ambiente que lo rodea.

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_m)$$

5. Con respecto a la expresión que usted encontró, ¿Cómo interpreta la expresión determinada por Newton?

6. Resuelva la ecuación planteada por Newton ¿Cuál es la solución y cómo la interpreta?

7. Con base en la Ley de Newton de enfriamiento encuentre la solución para el problema inicial.

8. Usando el software MatLab, abra un nuevo editor, allí copie, pegue y ejecute el siguiente código para resolver la ecuación diferencial.

```
close all; clear all;axes % Cierra todos los archivos que fueron utilizados y además limpia las variables para dar inicio a cada EDO

clc

hold on % Mantiene una sola ventana para todas las gráficas.

 %Vector de tiempo que cambia a pasos de 0.1

grid on % Pone las cuadrículas en cada imagen.
```

[12] http://www.segoviamint.org/espanol/technologia.htm

```
% Condición inicial

[Tem] = dsolve('DT = k*(T-Tm)','t'); %Planteamiento y resolución de la EDO

T=inline(vectorize(Tem),'t')%muestra la solucion en funcion del tiempo

Tv = inline(vectorize(Tem),'t','k','C2','Tm'); %Transforma la solución en una función que depende del tiempo y la condición inicial para ser evaluada

t = 0:0.1:80;

k=-0.053;

Tm=20;

for C2=0:20

plot(t, Tv(t,k,C2,Tm))%Grafica la función

xlabel('Eje x') % Escribe el título al eje x

ylabel('Eje y') % Escribe el título al eje y

end

hold off %Cierra la ventana

axis([-20 100 0 50]) %Escala de los ejes.
```

Pegue los pantallazos de lo que considere importante.

7 Ejecute el código para Tm=0, Tm=10, Tm=20, Tm=27.

8 Escriba comentarios o conclusiones obtenidas al hacer las variaciones anteriores.

9 Ejecute el código para k=0.01, k=0.02, k=0.03, k=0.04, k=0.05. Agréguele a estos valores el signo menos (-) y ejecute nuevamente.

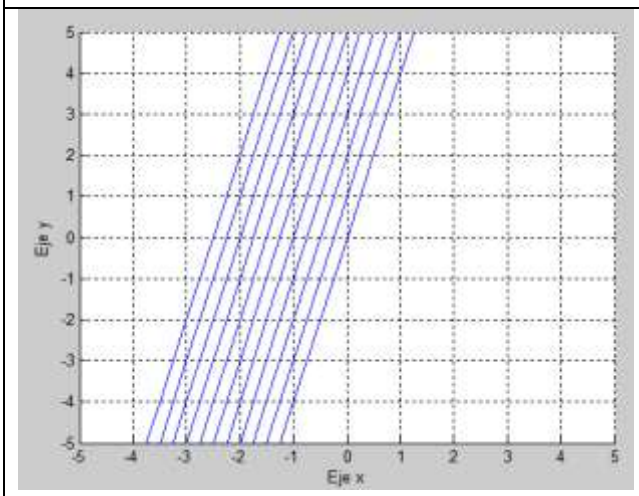
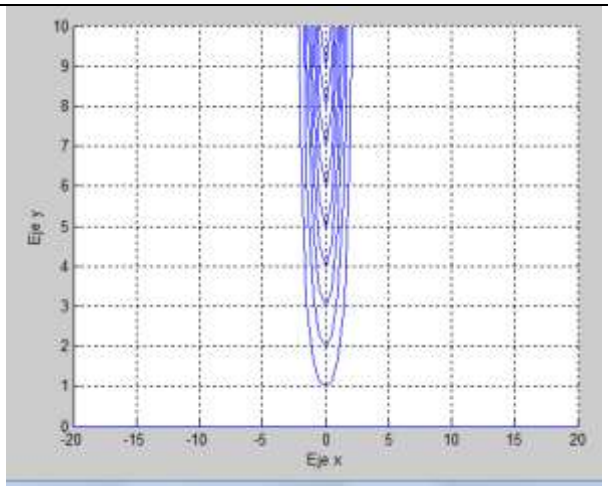
10 Escriba comentarios o conclusiones obtenidas al hacer las variaciones anteriores.

11 ¿Cuál es la solución? ¿Cómo la interpreta?

Anexo G.Taller 6. ¿Cuál es su expresión matemática? (20-05-2015)

El presente taller tiene como finalidad determinar la expresión matemática para una gráfica dada y su relación con alguna Ecuación diferencial.

Observar las siguientes gráficas

Gráfica A.	Gráfica B.
	

1. Escribir una expresión matemática para cada una de las gráficas anteriores.
2. Plantee, para cada una de las expresiones halladas en el punto anterior, una EDO de tal forma que la expresión dada sea solución de la EDO determinada.

Anexo H. Respuestas a la pregunta 3. Taller 2

A. $x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6 = 0$	B. $\frac{dy}{dx} = xy$
La primera ecuación es un polinomio de grado 4.	Mientras que la segunda ecuación es una ecuación diferencial de grado 1.
Por el grado del polinomio, entonces encontramos 4 raíces soluciones.	Mientras que acá el orden no nos determina el número de soluciones a encontrar en la ecuación, pero sí, nos determina el número de constantes que se van a encontrar en la solución.
La constante x de la ecuación A solo puede tomar los valores de las raíces soluciones encontradas.	Mientras que la ecuación B nos arroja como solución una función que pertenece a una familia de parábolas infinitas, y de las cuales se puede tomar cualquier función que pertenezca a esta familia.

Est.Ale. 04-03-2015

- En la primera ecuación arroja el valor. - En la primera ecuación trabaja con exponencial. - En la primera ecuación se resuelve despejando e integrando en una ecuación diferencial ordinaria.	- En la segunda ecuación realiza la gráfica. - En la segunda ecuación transforma una solución en un determinado tiempo y una condición inicial. - En la segunda ecuación tiene una condición inicial que es 0:0.1. - En la segunda ecuación la realizaría por una ecuación diferencial de primer orden despejando las variables, teniendo en cuenta que el método Dsolve solo da una solución encuentra ecuaciones explicitas es decir para funciones con incógnitas.

Est.Ang. 04-03-2015

A. La diferencia en la primer ecuación es que es un polinomio por lo tanto siempre los dará como resultado un numero o varios dependiendo del grado del polinomio y como la ecuación es un polinomio de grado 4 entonces nos da cuatro resultados.

B. La diferencia de la segunda ecuación es, que es una ecuación diferencial por su forma y la solución es una función de la familia de las curvas de ella, y el orden no nos determina el número de soluciones porque son infinitas, pero si el número de constantes.

Est.Bry. 04-03-2015

*la diferencia de estas dos ecuaciones es que en una la primera ecuación estaba de tipo lineal y en la otra tocaba despejarla.

*En una ecuación arrojo una gráfica y en la otra un valor.

Est.Hei. 04-03-2015

$$A. x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6 = 0$$

La diferencia en la primera ecuación es, que es un polinomio por lo tanto siempre nos va a dar como resultado un número o varios dependiendo del grado de la ecuación, en este caso dieron cuatro soluciones porque el grado de la ecuación es cuatro.

$$B. \frac{dy}{dx} = xy$$

La diferencia de la segunda ecuación es, que es una ecuación diferencial por su forma de escritura y la solución es una función de la familia de las curvas de ella, y el orden no nos determina el número de soluciones porque son infinitas, pero si el número de constantes.

Est.Jhe. 04-03-2015

Anexo I. Respuestas de los estudiantes a la pregunta 2 del cuestionario. Taller 3

La grafica que se obtiene es la gráfica de la función solución que tiene relación con la gráfica de seno, ya que no tendría ningún sentido graficar la ecuación inicial, y de esta manera el ingeniero puede observar que la población crece dependiendo del tiempo.

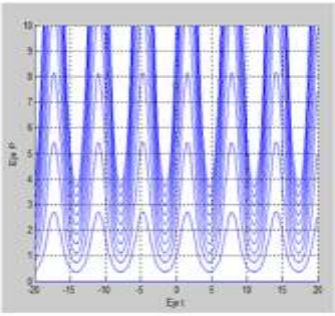
Est.Jhe. 11-03-2015

La grafica se muestra de acuerdo a la respuesta que obtuvimos de la E.D. Esta grafica es igual a **Sen(t)** y esta aumenta de acuerdo a **t** como variable independiente y que el ingeniero le puede dar cualquier valor para encontrar la población en determinado tiempo. La grafica muestra la Familia de soluciones de la ecuación diferencial.

Est.Bry.11-03-2015

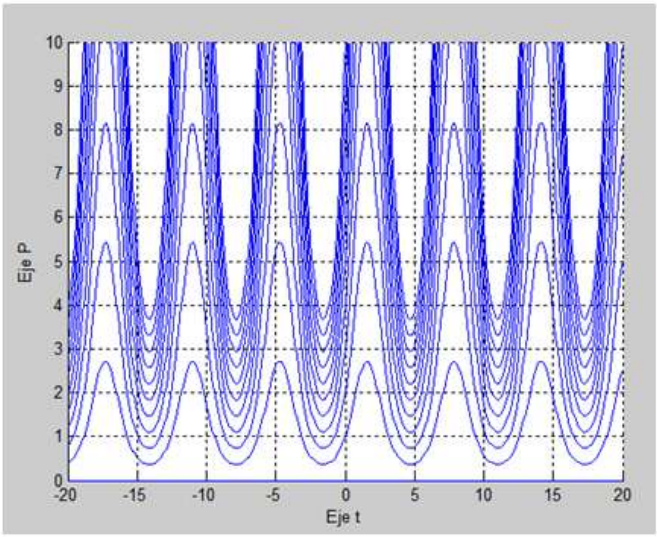
Que al ingeniero se le plantea una ecuación diferencial con la función coseno $\frac{dP}{dt} = (\boldsymbol{Cost})\boldsymbol{P}$, pero la gráfica de la solución de esta ecuación es la gráfica de la función seno $P = c * e^{sent}$.

Est.Ale.11-03-2015



Que la población aumenta a medida que transcurre el tiempo lo podemos notar por la gráfica que va ascendiendo por los valores que le asignamos.

Est.Ang.11-03-2015



A medida que varía el tiempo su crecimiento aumenta.

Est.Hei.11-03-2015

Anexo J. Respuestas de los estudiantes a la pregunta 3 del cuestionario. Taller 3

Para determinar si la respuesta encontrada es la correcta se realizaron las siguientes acciones:

1. Se resolvió la ecuación diferencial $\frac{dP}{dt} = (Cost)P$ por el método de variables separables.
   Luego esta resolución arrojo como solución $P = c * e^{sin(t)}$.

2. Después se transcribió el código de la Figura1.0 en el editor de Matlab, y se ejecutó, este mostro en el entorno de Matlab el siguiente resultado: P = C*exp(sin(t)). Al comparar esta solución con la encontrada manualmente se encontró la misma solución.

Est.Ale. 11-03-2015

La respuesta se puede verificar resolviendo la ecuación:

$$\frac{dP}{dt} = (Cost)P$$

Que debe dar como resultado:

p =C*exp(sin(t))

Para verificar, Se reemplaza la función encontrada en la ecuación donde esta P colocamos C*exp(sin(t)), y por otra parte se debe derivar la solución: p =C*exp(sin(t)) para poderla reemplazar al otro extremo donde encontramos (dp), y resolvemos la ecuación que nos quedó por partes y debemos llegar a la misma solución a los dos extremos, y así determinamos que la función es solución de la ecuación.

Est.Jhe.11-03-2015

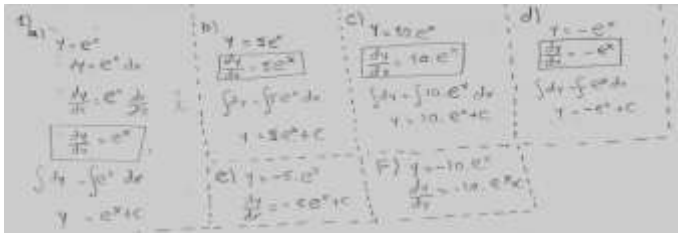
Para saber si la respuesta de la ecuación diferencial es correcta utilizaremos Matlab. Ingresando en el código correctamente las variables y luego llamando la variable observaremos que debe ser la misma solución que se encontró por el método de variables separadas.

Est.Bry.11-03-2015

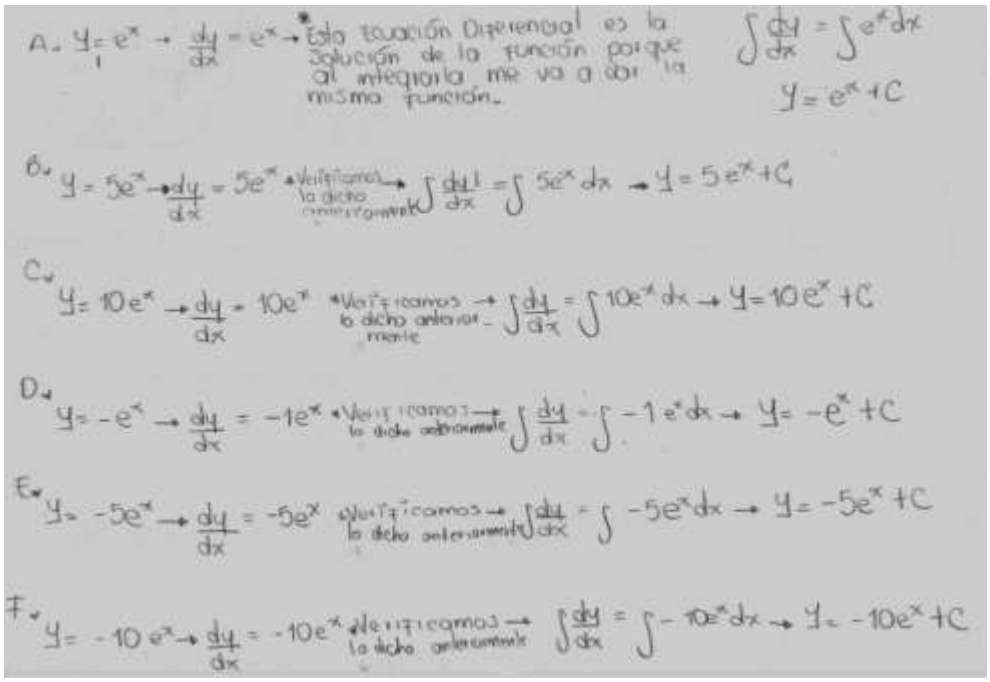
Podemos damos cuenta en la gráfica que las líneas ascienden desde 1 hasta 10 y por lógica sabemos que esa es la figura de seno, también nos podemos determinar si la respuesta encontrada es correcta por el programa llamado Matlab lo que él hace es arrojarnos el resultado de la ecuación.

Est.Ang.11-03-2015

Anexo K. Respuestas de los estudiantes a la pregunta 1. Ítem A. Taller 4



Est.Bry. 22-04-2015



A. $y = e^x \rightarrow \frac{dy}{dx} = e^x \rightarrow$ Esta ecuación Diferencial es la solución de la función porque al integrarla me va a dar la misma función. $\int \frac{dy}{dx} = \int e^x dx$ $y = e^x + C$

B. $y = 5e^x \rightarrow \frac{dy}{dx} = 5e^x$ Verificamos lo dicho anteriormente $\rightarrow \int \frac{dy}{dx} = \int 5e^x dx \rightarrow y = 5e^x + C$

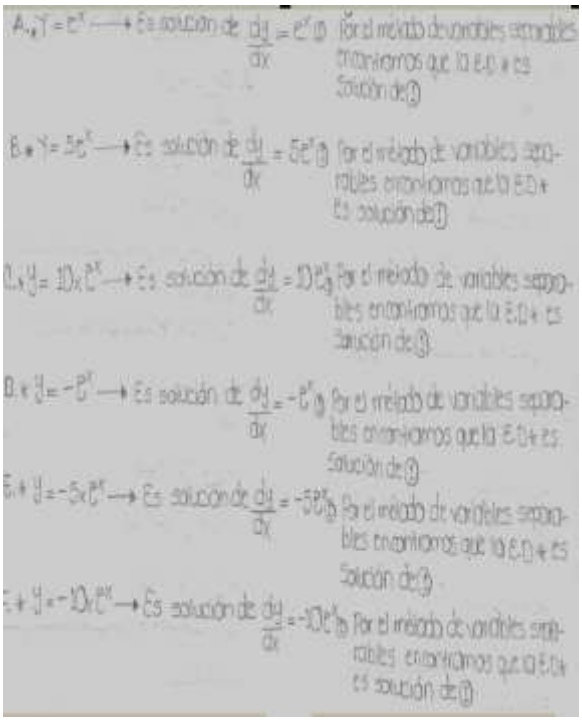
C. $y = 10e^x \rightarrow \frac{dy}{dx} = 10e^x$ Verificamos lo dicho anteriormente $\rightarrow \int \frac{dy}{dx} = \int 10e^x dx \rightarrow y = 10e^x + C$

D. $y = -e^x \rightarrow \frac{dy}{dx} = -1e^x$ Verificamos lo dicho anteriormente $\rightarrow \int \frac{dy}{dx} = \int -1e^x dx \rightarrow y = -e^x + C$

E. $y = -5e^x \rightarrow \frac{dy}{dx} = -5e^x$ Verificamos lo dicho anteriormente $\rightarrow \int \frac{dy}{dx} = \int -5e^x dx \rightarrow y = -5e^x + C$

F. $y = -10e^x \rightarrow \frac{dy}{dx} = -10e^x$ Verificamos lo dicho anteriormente $\rightarrow \int \frac{dy}{dx} = \int -10e^x dx \rightarrow y = -10e^x + C$

Est.Jhe. 22-04-2015



A. $y = e^x \rightarrow$ Es solución de $\frac{dy}{dx} = e^x$ (1) Por el método de variables separables encontramos que la E.D. es solución de (1)

B. $y = 5e^x \rightarrow$ Es solución de $\frac{dy}{dx} = 5e^x$ (1) Por el método de variables separables encontramos que la E.D. es solución de (1)

C. $y = 10xe^x \rightarrow$ Es solución de $\frac{dy}{dx} = 10e^x$ (1) Por el método de variables separables encontramos que la E.D. es solución de (1)

D. $y = -e^x \rightarrow$ Es solución de $\frac{dy}{dx} = -e^x$ (1) Por el método de variables separables encontramos que la E.D. es solución de (1)

E. $y = -5xe^x \rightarrow$ Es solución de $\frac{dy}{dx} = -5e^x$ (1) Por el método de variables separables encontramos que la E.D. es solución de (1)

F. $y = -10xe^x \rightarrow$ Es solución de $\frac{dy}{dx} = -10e^x$ (1) Por el método de variables separables encontramos que la E.D. es solución de (1)

Procedimientos realizados en el punto 2.6
Por el método de variables separables

A. $\frac{dy}{dx} = e^x \rightarrow$ E.D.O.
$dy = e^x dx$
$\int dy = \int e^x dx$
$y = e^x + C \rightarrow$ donde C es la constante
Entonces:
$y = e^x \rightarrow$ solución de la E.D.O.

B. $\frac{dy}{dx} = 5e^x$
$dy = 5e^x dx$
$\int dy = \int 5e^x dx$
$\int dy = 5\int e^x dx$
$y = 5e^x + C \rightarrow$ donde C es la constante
Entonces:
$y = 5e^x \rightarrow$ solución E.D.O.

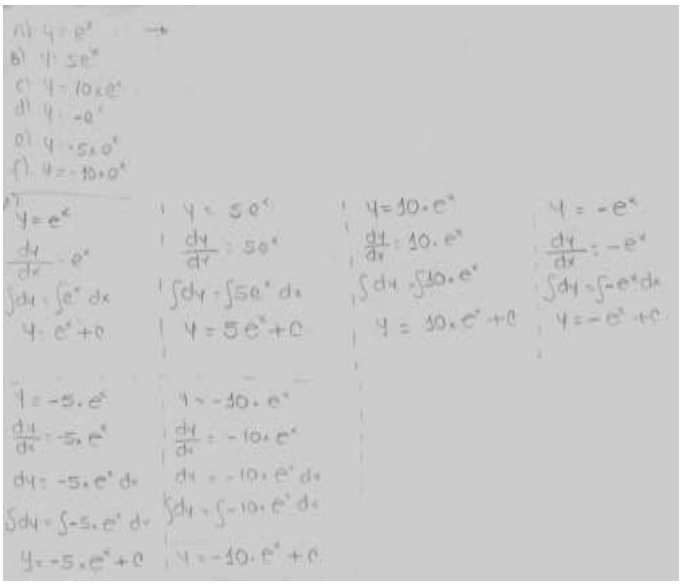
C. $\frac{dy}{dx} = 10e^x$
$dy = 10e^x dx$
$\int dy = \int 10e^x dx$
$\int dy = 10\int e^x dx$
$y = 10e^x + C \rightarrow$ donde C es la constante
Entonces:
$y = 10e^x \rightarrow$ solución E.D.O.

D. $\frac{dy}{dx} = -e^x$
$dy = -e^x dx$
$\int dy = \int -e^x dx$
$y = -e^x + C \rightarrow$ donde C es la constante
Entonces:
$y = -e^x \rightarrow$ solución de la E.D.O.

E. $\frac{dy}{dx} = -5e^x$
$dy = -5e^x dx$
$\int dy = \int -5e^x dx$
$\int dy = -5\int e^x dx$
$y = -5e^x + C \rightarrow$ donde C es la constante
Entonces:
$y = -5e^x \rightarrow$ solución de la E.D.O.

F. $\frac{dy}{dx} = -10e^x$
$dy = -10e^x dx$
$\int dy = \int -10e^x dx$
$\int dy = -10\int e^x dx$
$y = -10e^x + C \rightarrow$ donde C es la constante
Entonces:
$y = -10e^x \rightarrow$ solución de la E.D.O.

Est.Ale. 22-04-2015



a) $y = e^x$ →
b) $y = 5e^x$
c) $y = 10 \cdot e^x$
d) $y = -e^x$
e) $y = -5 \cdot e^x$
f) $y = -10 \cdot e^x$

$y = e^x$
$\frac{dy}{dx} = e^x$
$\int dy = \int e^x \, dx$
$y = e^x + C$

$y = 5e^x$
$\frac{dy}{dx} = 5e^x$
$\int dy = \int 5e^x \, dx$
$y = 5e^x + C$

$y = 10 \cdot e^x$
$\frac{dy}{dx} = 10 \cdot e^x$
$\int dy = \int 10 \cdot e^x$
$y = 10 \cdot e^x + C$

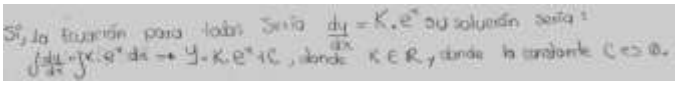
$y = -e^x$
$\frac{dy}{dx} = -e^x$
$\int dy = \int -e^x \, dx$
$y = -e^x + C$

$y = -5 \cdot e^x$
$\frac{dy}{dx} = -5 \cdot e^x$
$dy = -5 \cdot e^x \, dx$
$\int dy = \int -5 \cdot e^x \, dx$
$y = -5 \cdot e^x + C$

$y = -10 \cdot e^x$
$\frac{dy}{dx} = -10 \cdot e^x$
$dy = -10 \cdot e^x \, dx$
$\int dy = \int -10 \cdot e^x \, dx$
$y = -10 \cdot e^x + C$

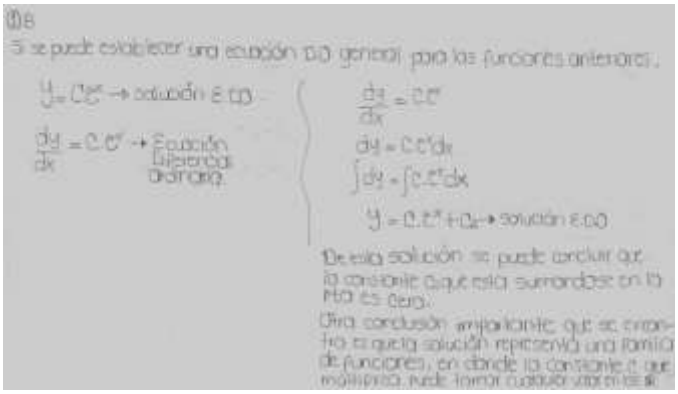
Est.Ang. 22-04-2015

Anexo L. Respuestas de los estudiantes a la pregunta 1. Ítem B. Taller 4



Si, la ecuación para todos sería $\frac{dy}{dx} = K \cdot e^x$ su solución sería:
$\int \frac{dy}{dx} = \int K \cdot e^x \, dx \rightarrow y = K \cdot e^x + C$, donde $K \in \mathbb{R}$, y donde la constante C es 0.

Est.Jhe. 22-04-2015



(1)B
Si se puede establecer una ecuación D.O general para las funciones anteriores.

$y = Ce^x \rightarrow$ solución E.D.O

$\frac{dy}{dx} = C \cdot e^x \rightarrow$ Ecuación Diferencial Ordinaria

$\frac{dy}{dx} = C \cdot e^x$
$dy = C \cdot e^x dx$
$\int dy = \int C \cdot e^x dx$
$y = C \cdot e^x + C_2 \rightarrow$ solución E.D.O

De esta solución se puede concluir que la constante C_2 que está sumandose en la ecuación es cero.
Otra conclusión importante que se encontró es que la solución representa una familia de funciones, en donde la constante C que multiplica puede tomar cualquier valor en el $\mathbb{R}$.

Est.Ale. 22-04-2015

b) $\boxed{\frac{dy}{dx} = I.e^{x}}$ EDO general para la solución de funciones dadas

$y = I.e^{x}$ Solución general de la EDO

Est.Bry. 22-04-2015

1.B.

Si se puede establecer

$\frac{dy}{dx} = c.e^{x}$ cuya solucion seria $y = C.e^{x}$

Est.Hei. 22-04-2015

B) $\frac{dy}{dx} = C.e^{x}$ es la solución de la ecuación y la solución de la funcion es $y = e^{x} + C$.

Est.Ang. 22-04-2015

Anexo M. Respuestas de los estudiantes a la pregunta 1. Ítem C. Taller 4

C. Conclusiones

* Si tenemos una función y queremos obtener la Ecuacion Diferencial a la cual pertenece esa solución debemos Derivar.
* Si Deseamos obtener la función de una Ecuacion diferencial debemos Integrar dicha ecuación.
* Que en todas las funciones desarrolladas la constante C es cero. (C=0)

Est.Jhe. 22-04-2015

1.C [1] Con el desarrollo del punto 1 se puede concluir que se encontro una ecuación diferencial ordinaria general, para una serie de funciones, la cual permite identificar que la ecuación representa una familia de funciones, a la cual pertenecen las 6 funciones anteriores.

[2] Otra conclusión importante que nos dejo el ejercicio es que se pudo encontrar dos constantes diferentes, una constante C que puede tomar cualquier valor en los R y una constante C_1 que siempre va hacer cero.

Est.Ale. 22-04-2015

1.C. Al desarrollar el primer punto la conclusión fue que al plantear una EDO de tal forma que la expresión dada sea solución de la EDO.

Est.Hei. 22-04-2015

Conclusiones:

1) Con los siguientes ejercicios se logro aclarar dudas de EDO.

2) Se realizaron graficas de E.D.O. con las cuales logre manejar el programa Matlab

3) Obtuve conocimiento de datos importantes para manejar el programa

Est.Ang. 22-04-2015

Anexo N. Respuestas de los estudiantes a la pregunta 2. Ítem A. Taller 4

2 A. * $y = \cos x \longrightarrow$ es solución de $\frac{dy}{dx} = -\operatorname{sen} x$ (1) Por el método de variables separables encontramos que la E.D. * es solución de (1)

$\frac{dy}{dx} = -\operatorname{sen} x$

$dy = -\operatorname{sen} x\, dx$

$\int dy = \int -\operatorname{sen} x\, dx$

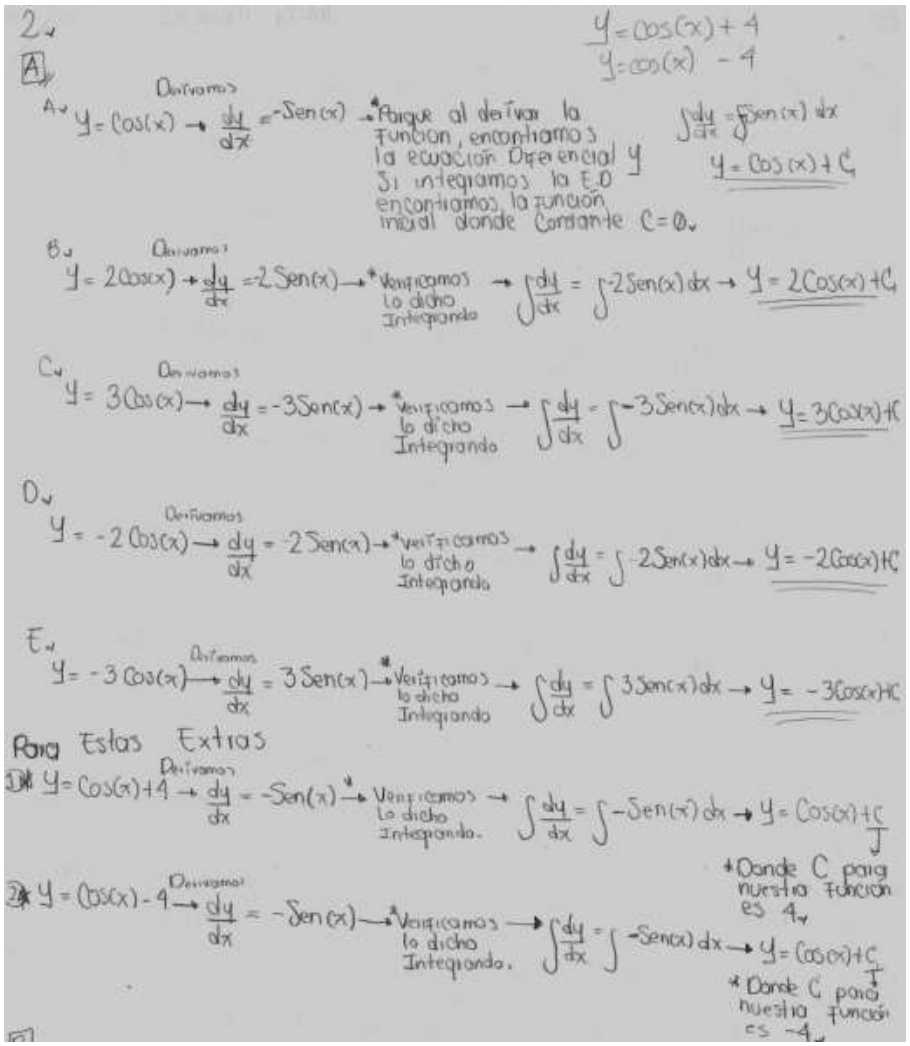
$y = -(-\cos x) + C$

$y = \cos x + C \rightarrow$ donde C es cero

Entonces:

$y = \cos x \rightarrow$ solución de la E.D.

Est.Ale. 22-04-2015



2.

$y = \cos(x) + 4$

$y = \cos(x) - 4$

A.

A. $y = \cos(x) \xrightarrow{\text{Derivamos}} \frac{dy}{dx} = -\text{Sen}(x)$ → *Porque al derivar la función, encontramos la ecuación Diferencial y Si integramos la E.D encontramos la función inicial donde Constante $C = 0$.

$\int \frac{dy}{dx} = \int -\text{Sen}(x)\,dx$

$y = \cos(x) + C$

B. $y = 2\cos(x) \xrightarrow{\text{Derivamos}} \frac{dy}{dx} = -2\,\text{Sen}(x)$ → *Verificamos lo dicho Integrando → $\int \frac{dy}{dx} = \int -2\,\text{Sen}(x)\,dx$ → $y = 2\cos(x) + C$

C. $y = 3\cos(x) \xrightarrow{\text{Derivamos}} \frac{dy}{dx} = -3\,\text{Sen}(x)$ → *Verificamos lo dicho Integrando → $\int \frac{dy}{dx} = \int -3\,\text{Sen}(x)\,dx$ → $y = 3\cos(x) + C$

D. $y = -2\cos(x) \xrightarrow{\text{Derivamos}} \frac{dy}{dx} = 2\,\text{Sen}(x)$ → *Verificamos lo dicho Integrando → $\int \frac{dy}{dx} = \int 2\,\text{Sen}(x)\,dx$ → $y = -2\cos(x) + C$

E. $y = -3\cos(x) \xrightarrow{\text{Derivamos}} \frac{dy}{dx} = 3\,\text{Sen}(x)$ → *Verificamos lo dicho Integrando → $\int \frac{dy}{dx} = \int 3\,\text{Sen}(x)\,dx$ → $y = -3\cos(x) + C$

Para Estas Extras

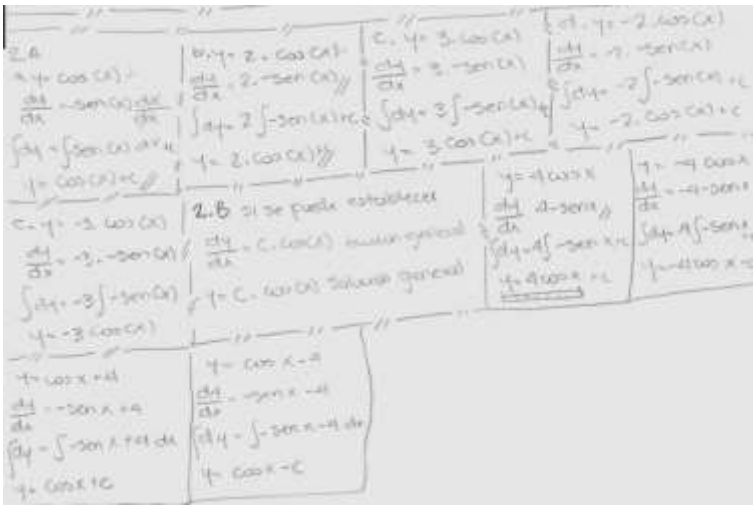
1. $y = \cos(x) + 4 \xrightarrow{\text{Derivamos}} \frac{dy}{dx} = -\text{Sen}(x)$ → *Verificamos lo dicho Integrando. → $\int \frac{dy}{dx} = \int -\text{Sen}(x)\,dx$ → $y = \cos(x) + C$

*Donde C para nuestra Función es 4.

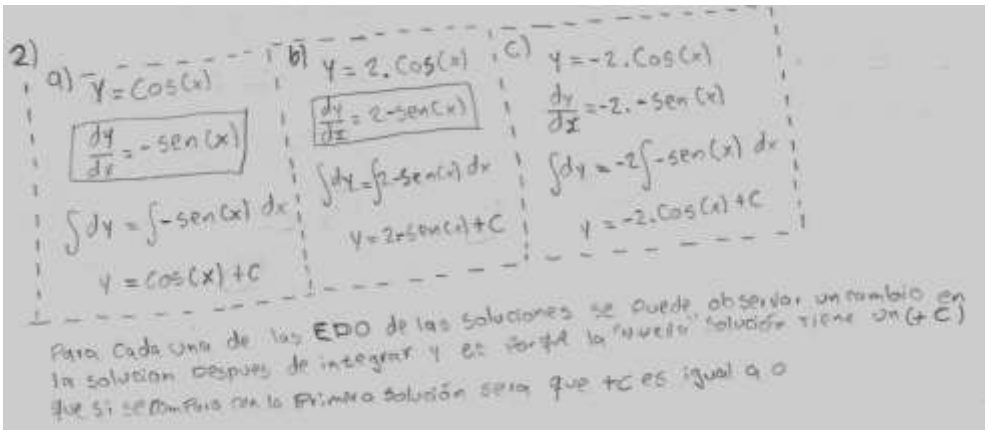
2. $y = \cos(x) - 4 \xrightarrow{\text{Derivamos}} \frac{dy}{dx} = -\text{Sen}(x)$ → *Verificamos lo dicho Integrando. → $\int \frac{dy}{dx} = \int -\text{Sen}(x)\,dx$ → $y = \cos(x) + C$

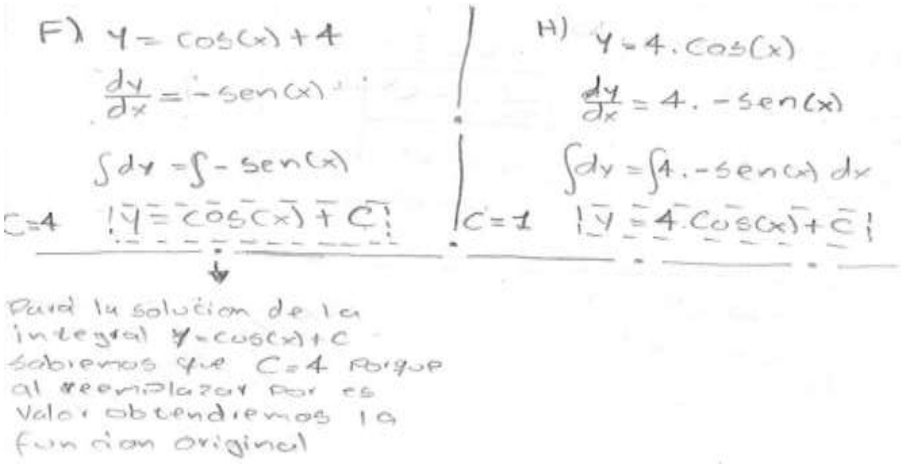
* Donde C para nuestra función es -4.

Est.Jhe. 22-04-2015

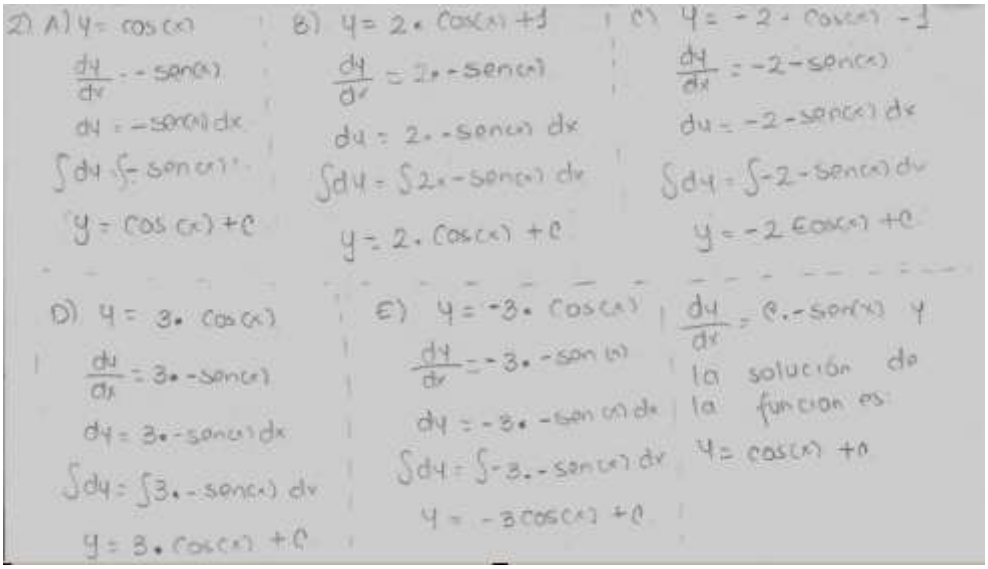


Est.Hei. 22-04-2015





Est.Bry. 22-04-2015



2) A) $y = \cos(x)$

$\frac{dy}{dx} = -\operatorname{sen}(x)$

$dy = -\operatorname{sen}(x)\,dx$

$\int dy = \int -\operatorname{sen}(x)$

$y = \cos(x) + C$

B) $y = 2 \cdot \cos(x) + 1$

$\frac{dy}{dx} = 2 \cdot -\operatorname{sen}(x)$

$dy = 2 \cdot -\operatorname{sen}(x)\,dx$

$\int dy = \int 2 \cdot -\operatorname{sen}(x)\,dx$

$y = 2 \cdot \cos(x) + C$

C) $y = -2 \cdot \cos(x) - 1$

$\frac{dy}{dx} = -2 - \operatorname{sen}(x)$

$dy = -2 - \operatorname{sen}(x)\,dx$

$\int dy = \int -2 - \operatorname{sen}(x)\,dx$

$y = -2 \cos(x) + C$

D) $y = 3 \cdot \cos(x)$

$\frac{dy}{dx} = 3 \cdot -\operatorname{sen}(x)$

$dy = 3 \cdot -\operatorname{sen}(x)\,dx$

$\int dy = \int 3 \cdot -\operatorname{sen}(x)\,dx$

$y = 3 \cdot \cos(x) + C$

E) $y = -3 \cdot \cos(x)$

$\frac{dy}{dx} = -3 \cdot -\operatorname{sen}(x)$

$dy = -3 \cdot -\operatorname{sen}(x)\,dx$

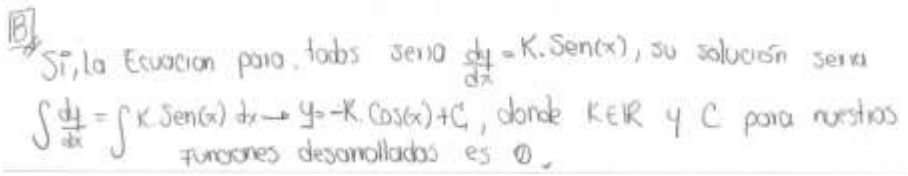
$\int dy = \int -3 \cdot -\operatorname{sen}(x)\,dx$

$y = -3 \cos(x) + C$

$\frac{dy}{dx} = C \cdot -\operatorname{sen}(x)$ y la solución de la función es: $y = \cos(x) + C$

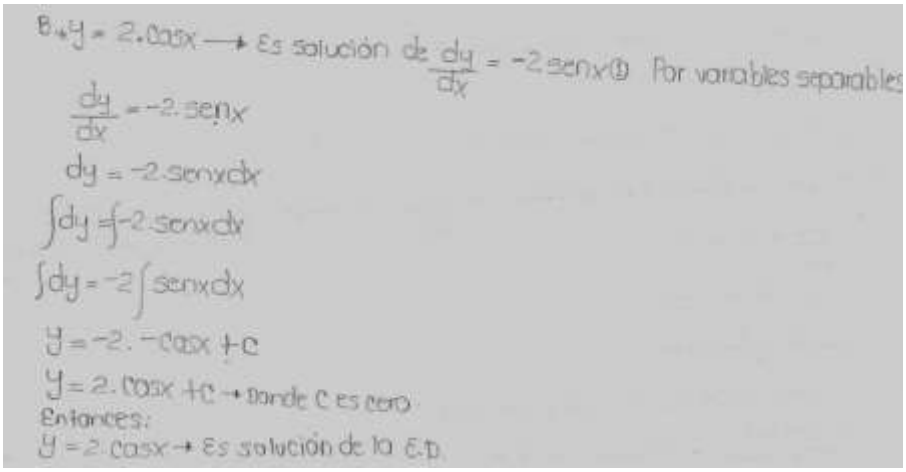
Est.Ang. 22-04-2015

Anexo O. Respuestas de los estudiantes a la pregunta 2. Ítem B. Taller 4



B) Si, la Ecuacion para todos sería $\frac{dy}{dx} = K.\operatorname{Sen}(x)$, su solución sería $\int \frac{dy}{dx} = \int K.\operatorname{Sen}(x)\,dx \rightarrow y = -K.\cos(x) + C$, donde $K \in \mathbb{R}$ y C para nuestros funciones desarrolladas es 0.

Est.Jhe. 22-04-2015



B. $y = 2.\cos x \rightarrow$ Es solución de $\frac{dy}{dx} = -2\operatorname{sen}x$ ① Por variables separables

$\frac{dy}{dx} = -2.\operatorname{sen}x$

$dy = -2.\operatorname{sen}x\,dx$

$\int dy = \int -2.\operatorname{sen}x\,dx$

$\int dy = -2\int \operatorname{sen}x\,dx$

$y = -2. -\cos x + C$

$y = 2.\cos x + C \rightarrow$ Donde C es cero

Entonces:

$y = 2.\cos x \rightarrow$ Es solución de la E.D.

2.B. Si se puede establecer una ecuación general para todas las funciones anteriores

$y = C_1 \cos x \rightarrow$ solución de la E.D.O

$\frac{dy}{dx} = C_1 \operatorname{sen} x \rightarrow$ Ecuación Diferencial Ordinaria.

$\frac{dy}{dx} = C_1 \operatorname{sen} x$

$dy = C_1 \operatorname{sen} x \, dx$

$\int dy = \int C_1 \operatorname{sen} x \, dx$

$y = C_1 \cos x + C_3 \rightarrow$ donde C_3 vale cero

· De esta solución se puede concluir que la nueva constante encontrada C_3 es cero y que C_1 es una constante que puede tomar cualquier valor en los $\mathbb{R}$.

Est.Ale. 22-04-2015

b) $\frac{dy}{dx} = K. - \operatorname{sen}(x)$ EDO general para la solución de las funciones dadas

$y = K. \cos(x) + C$ Solución de la EDO general

Est.Bry. 22-04-2015

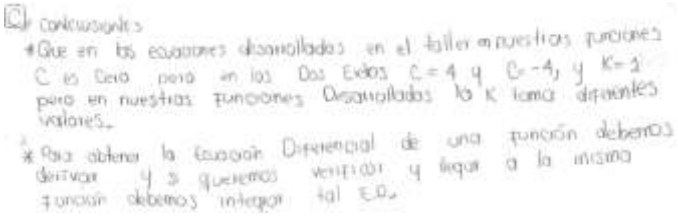
2.B si se puede establecer

$\frac{dy}{dx} = C. \cos(x)$ ecuación general

$y = C. \cos(x)$ Solución general

Est.Hei. 22-04-2015

Anexo P. Respuestas de los estudiantes a la pregunta 2. Ítem C. Taller 4

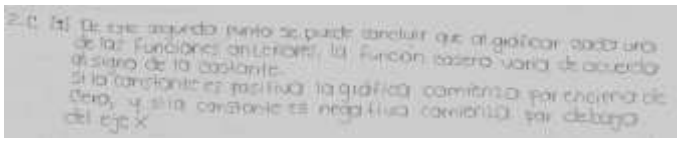


Q. Conclusiones

* Que en las ecuaciones desarrolladas en el taller en nuestras funciones C es Cero pero en los Dos Extras C = 4 y C = -4, y K = 1 pero en nuestras funciones Desarrolladas la K toma diferentes valores.

* Para obtener la Ecuación Diferencial de una función debemos derivar y si queremos verificar y llegar a la misma función debemos integrar tal E.D.

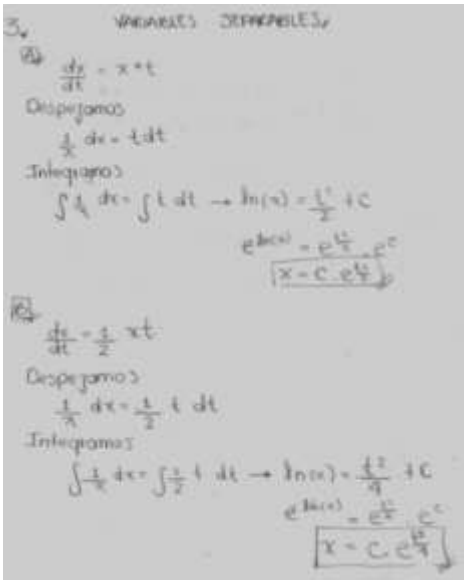
Est.Jhe. 22-04-2015



2.C (a) De este segundo punto se puede concluir que al graficar cada una de las funciones anteriores, la función casera varía de acuerdo al signo de la constante.
Si la constante es positiva la gráfica comienza por encima de cero, y si la constante es negativa comienza por debajo del eje x

Est.Ale. 22-04-2015

Anexo Q. Respuestas de los estudiantes a la pregunta 3. Taller 4



3. VARIABLES SEPARABLES.

(a) $\frac{dx}{dt} = x * t$

Despejamos

$\frac{1}{x} dx = t\,dt$

Integramos

$\int \frac{1}{x} dx = \int t\,dt \rightarrow \ln(x) = \frac{t^2}{2} + C$

$e^{\ln(x)} = e^{\frac{t^2}{2}} \cdot e^{C}$

$\boxed{x = C\,e^{\frac{t^2}{2}}}$

(b) $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2} xt$

Despejamos

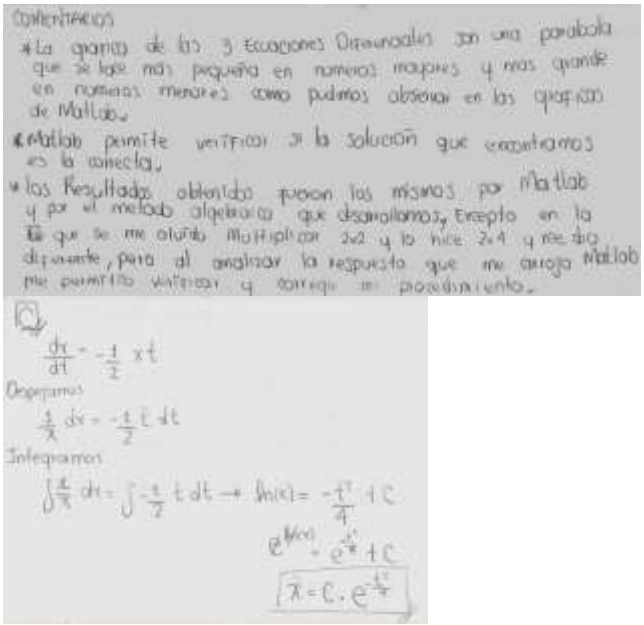
$\frac{1}{x} dx = \frac{1}{2} t\,dt$

Integramos

$\int \frac{1}{x} dx = \int \frac{1}{2} t\,dt \rightarrow \ln(x) = \frac{t^2}{4} + C$

$e^{\ln(x)} = e^{\frac{t^2}{4}} \cdot e^{C}$

$\boxed{x = C\,e^{\frac{t^2}{4}}}$



COMENTARIOS

* La gráfica de las 3 Ecuaciones Diferenciales son una parábola que se hace más pequeña en números mayores y más grande en números menores como pudimos observar en las gráficas de Matlab.

* Matlab permite verificar si la solución que encontramos es la correcta.

* los Resultados obtenidos fueron los mismos por Matlab y por el método algebraico que desarrollamos, Excepto en la E que se me olvidó Multiplicar 2x2 y lo hice 2x4 y me dio diferente, pero al analizar la respuesta que me arroja Matlab me permitió verificar y corregir mi procedimiento.

Q.

$\frac{dx}{dt} = -\frac{1}{2} xt$

Despejamos

$\frac{1}{x} dx = -\frac{1}{2} t\,dt$

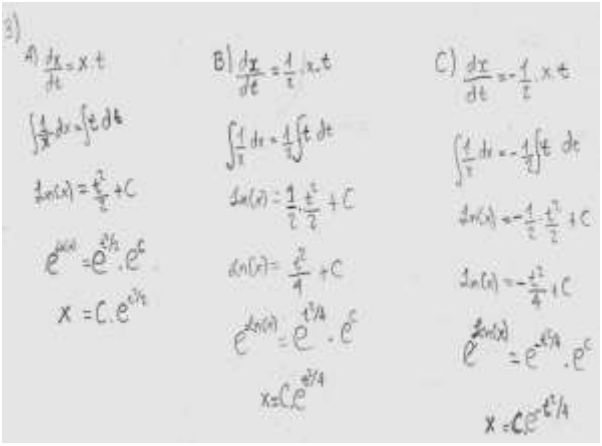
Integramos

$\int \frac{1}{x} dx = \int -\frac{1}{2} t\,dt \rightarrow \ln(x) = -\frac{t^2}{4} + C$

$e^{\ln(x)} = e^{-\frac{t^2}{4}} + C$

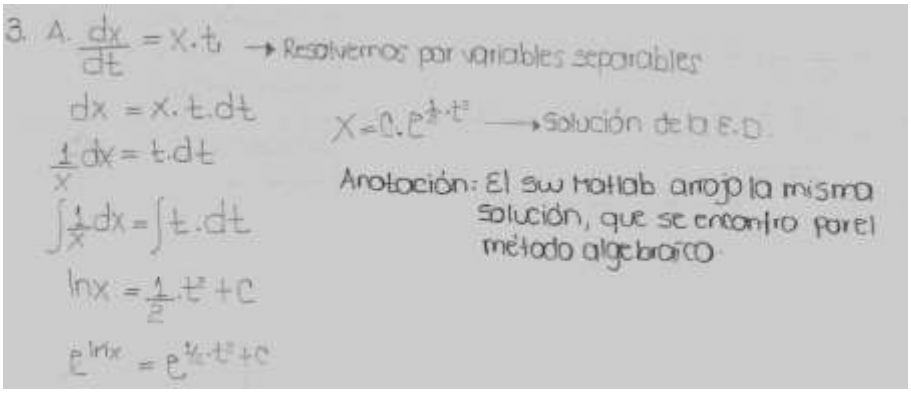
$\boxed{x = C \cdot e^{-\frac{t^2}{4}}}$

Est.Jhe. 22-04-2015



Est.Hei. 22-04-2015

Est.Jhe. 22-04-2015



B. $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2} \cdot x \cdot t$ → Resolvemos por variables separables

$dx = \frac{1}{2} \cdot x \cdot t\,dt$

$\frac{dx}{x} = \frac{1}{2} t\,dt$

$\int \frac{1}{x} dx = \int \frac{1}{2} \cdot t\,dt$

$\ln x = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot t^2 + C$

$\ln x = \frac{1}{4} \cdot t^2 + C$

$e^{\ln x} = e^{\frac{1}{4} \cdot t^2 + C}$

$x = C \cdot e^{\frac{1}{4} \cdot t^2}$ → solución de la ecuación diferencial

Anotación: Matlab mostró la misma solución de la E.D.O. que se realizó por el método algebraico.
Y gráfico una familia de parábolas, que es lo que se ve en la solución de la E.D.O

C. $\frac{dx}{dt} = -\frac{1}{2} \cdot x \cdot t$ → Resolvemos por variables separables.

$dx = -\frac{1}{2} \cdot x \cdot t \cdot dt$

$\frac{1}{x} dx = -\frac{1}{2} \cdot t \cdot dt$

$\int \frac{1}{x} dx = \int -\frac{1}{2} \cdot t \cdot dt$

$\ln x = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot t^2 + C$

$e^{\ln x} = e^{-\frac{1}{4} \cdot t^2 + C}$

$x = C \cdot e^{-\frac{1}{4} \cdot t^2}$ → Solución de la E.D.O

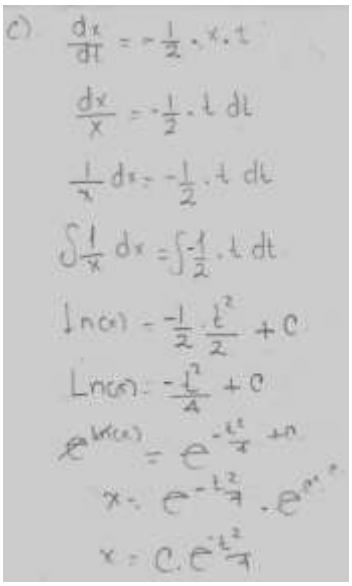
Anotación: Matlab no mostró la misma solución de la E.D.O resuelta por el método algebraico, sino que mostro una Rta equivocada, ya que en el papel la solución incluye un signo menos y el sw no lo muestra.
Lo más curioso es que si gráfica la solución correcta.

Comentarios

1. Gráfica A. Es una familia de parábolas positivas, que tienen como punto de origen la coordenada $(0,1)$, se puede decir que las parábolas graficadas son muy angostas, no hay una distancia amplia entre cada una de ellas.
2. Gráfica B. También representa una familia de parábolas positivas, que tienen como punto de origen la coordenada $(0,1)$. Estas parábolas tienen una distancia mucho más amplia entre ellas.
3. Gráfica C. Aquí podemos anotar que la solución de la ecuación se grafico exitosamente. La imagen representó una familia de parábolas que habren hacia abajo, pero se mantienen en el eje y, su punto de origen es la coordenada $(0,10)$, la figura muestra unas parábolas bastante unidas, no se podría diferenciar una de la otra.

Otra anotación importante para resaltar en la solución de la ecuación es que: Matlab no arrojó la solución correcta de la E.D.O, pero si gráfico correctamente la solución.

Est.Ale. 22-04-2015



c) $\frac{dx}{dt} = -\frac{1}{2} \cdot x \cdot t$

$\frac{dx}{x} = -\frac{1}{2} \cdot t \, dt$

$\frac{1}{x} dx = -\frac{1}{2} \cdot t \, dt$

$\int \frac{1}{x} dx = \int -\frac{1}{2} \cdot t \, dt$

$\ln(x) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{t^2}{2} + C$

$\ln(x) = -\frac{t^2}{4} + C$

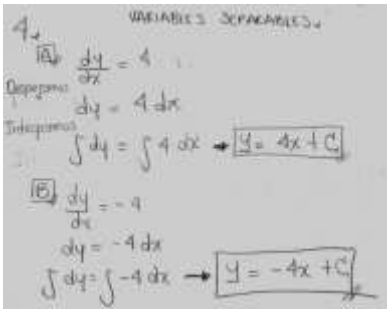
$e^{\ln(x)} = e^{-\frac{t^2}{4} + C}$

$x = e^{-\frac{t^2}{4}} \cdot e^{C}$

$x = C \cdot e^{-\frac{t^2}{4}}$

Est.Ang. 22-04-2015

Anexo R. Respuestas de los estudiantes a la pregunta 4. Taller 4



4. VARIABLES SEPARABLES.

A) $\frac{dy}{dx} = 4$

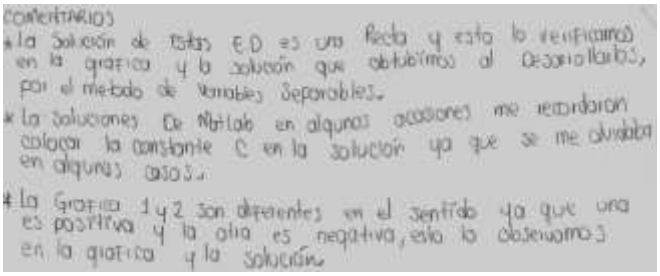
Despejamos $dy = 4\,dx$

Integramos $\int dy = \int 4\,dx \rightarrow \boxed{y = 4x + C}$

B) $\frac{dy}{dx} = -4$

$dy = -4\,dx$

$\int dy = \int -4\,dx \rightarrow \boxed{y = -4x + C}$



COMENTARIOS

* La Solución de Estas E.D es una Recta y esto lo verificamos en la grafica y la solución que obtubimos al Desarrollarlos, por el metodo de Variables Separables.
* La Soluciones De Matlab en algunas ocasiones me recordaron colocar la constante C en la solución ya que se me olvidaba en algunos casos.
* La Grafica 1 y 2 son diferentes en el sentido ya que una es positiva y la otra es negativa, esto lo observamos en la grafica y la solución.

Est.Jhe. 22-04-2015

4. A. $\frac{dy}{dx} = 4 \rightarrow$ Por variables separables.

$dy = 4dx$

$\int dy = \int 4dx$

$y = 4x + C \rightarrow$ Solución de la E.D.O

A. B. $\frac{dy}{dx} = -4 \rightarrow$ Por variables separables.

$dy = -4dx$

$\int dy = \int -4dx$

$y = -4x + C \rightarrow$ solución de la E.D.O

Comentarios

1. Gráfica A: Al observar la solución de la ecuación y su gráfica se puede ver que es una familia de rectas, graficadas que involucra a los 4 cuadrantes del plano la familia de gráficas no sobrepasan en el eje x y el punto (-5 y 5), pero la inclinación de las rectas es más hacia el eje x negativo

2. Gráfica B: La solución y la gráfica representan una familia de rectas, esta familia toca los 4 cuadrantes del plano, pero su inclinación se da más hacia el eje x positivo.

Al resolver la ecuación A y la B del punto 4 en el Sw Matlab obtuvimos las mismas respuestas que arroja el método algebraico, con ello se pudo concluir que el método que se uso para la resolución de las E.D.O es muy fiable, ya que se encontraron las soluciones correctas a las ecuaciones.

Est.Ale. 22-04-2015

4)

A) $\frac{dx}{dt} = 4$

$\int dx = 4\int dt$

$x = 4.t + C$

B) $\frac{dx}{dt} = -4$

$\int dx = -4\int dt$

$x = -4.t + C$

Est.Bry. 22-04-2015

4. $\frac{dy}{dx} = 4$

$dy = 4dx$

$\int dy = \int 4dx$

$\int dy = 4\int dx$

$y = 4x + c$

b. $\frac{dy}{dx} = -4$

$dy = -4dx$

$\int dy = -4\int dx$

$y = -4x + C$

Est.Hei. 22-04-2015

4) A) $\frac{dy}{dx} = 4$

$dy = 4dx$

$\int dy = \int 4dx$

$y = 4x.$

B) $\frac{dy}{dx} = -4$

$dy = -4dx$

$\int dy = -\int -4dx$

$y = -4x.$

COMENTARIO:

1) al realizar la ecuación diferencial en el editor notamos que cuando le oprime correr el Programa arroja una grafica y nuevamente en el command window escribimos "y" y presionamos enter, al hacer esto notamos que nos arroja la solución de la ecuación

Est.Ang. 22-04-2015

Anexo S. Respuestas a la pregunta 1 del cuestionario. Taller 4

R/al analizar las gráficas la conclucion que obtuve fue que al graficar con (e), (cos), (x.y) las gráficas nos indican una pendiente y al cambiar el valor de la constante la gráfica varia y nos da una familia de soluciones

Est.Hei. Taller 4. 13-05-2015

Se puede concluir que las gráficas tienen una relación única con la solución de la ecuación.
Esto se puede observar claramente en todos los puntos anteriormente desarrollados.
Para muestra el ejemplo de las gráficas de la solución de las EDO del punto 4.

La solución tanto por el método algebraico como por el sw Matlab arrojo que la respuesta personifica una familia de rectas infinitas. **¿Cómo se concluyó esto?** Esto se concluyó al recordar los conocimientos adquiridos en el transcurso de nuestro aprendizaje tanto en el colegio como en la universidad, **¿Cuáles son esos conocimientos?** conocimientos en el área de Matemáticas, en los cuáles se aprendió que la ecuación que representa a una recta es **y=mx+b**; con estas instrucciones se puede concluir que las soluciones y las gráficas de las anteriores ecuaciones diferenciales pertenecen a una recta, en este caso representan una familia de rectas, debido a que cada ecuación posee una constante C que puede tomar cualquier valor en los reales.

Est.Ale. Taller 4. 13-05-2015

Las gráficas obtenidas se representan de acuerdo a la solución de la ecuación, en los primeros casos del punto 3 pude observar que todas las gráficas dieron una parábola que varían su tamaño de acuerdo al número, es decir si es un número pequeño su tamaño es mayo tiene más espacio y si el número es grande su tamaño es menor ocupa menos espacio.
Y en el punto 4 las gráficas son rectas porque la función solución representa una recta eso lo podemos observar gracias a la solución que encontramos al desarrollarla y la recta crece o decrece de acuerdo al signo que tenga en nuestro caso la gráfica del punto A crece y la del punto B decrece porque en el A el 4 es positivo y en el B el 4 es negativo, que es el número que acompaña a la X.

Est.Jhe. Taller 4. 13-05-2015

Con las gráficas obtenidas podemos concluir que estas van a ser las "mismas" y lo único que las va hacer diferentes es el simple hecho de cambiar sus constantes para así obtener la misma grafica pero unos puntos del plano distintos.

Est.Bry. Taller 4. 13-05-2015

en la primera ecuación nos damos cuenta que al graficar cada ecuación con valores positivos ascendía mientras que si tenían valores negativos la gráfica descendía es decir que los valores en esta grafica son importantes debido que vemos la diferencia de curvas que toma en esta gráfica.

Matlab es una herramienta muy importante, nos permite graficar rápidamente y asignarle colores a cada ecuación "línea" y podemos notar las diferencias de cada ecuación.

Est.Ang. Taller 4. 13-05-2015

Anexo T. Respuestas de los estudiantes a la pregunta 2 del cuestionario. Taller 4

La relación que existe entre ellos es que ambos métodos arrojan la misma solución para una determinada ecuación diferencial y que si graficamos la solución de la EDO por el método algebraico nos va a arrojar la misma familia de funciones que la gráfica de la solución en Matlab.

Estos dos métodos son importantes para la verificación de la solución de una EDO, debido a que los dos deben arrojar la misma solución a la ecuación si no lo hace es porque hay un error en la resolución por el método algebraico o por el método de Matlab.

Est.Ale. Taller 4. 13-05-2015

La relación que existe es que la gráfica representa la solución de la ecuación diferencial desarrollada y son los mismos resultados, tanto lo que representa la solución por el método algebraico como la gráfica y la solución que nos da Matlab.

Est.Jhe. Taller 4. 13-05-2015

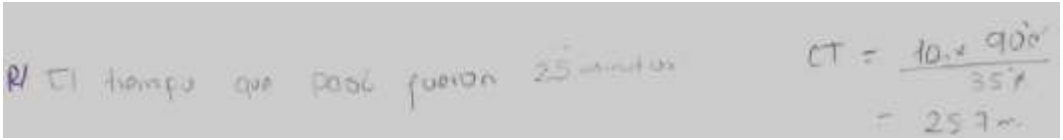
El software Matlab nos ha permitido de forma sencilla rectificar las soluciones que realizamos por variables separables a la EDO. Se sabe que no son EDO difíciles de solucionar pero no está de más tener herramientas tan útiles para no tener margen de error.

Est.Bry. Taller 4. 13-05-2015

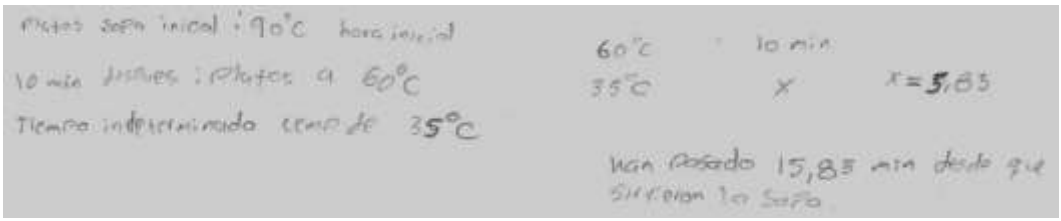
R/al analizar las gráficas con el método algebraico nos damos cuenta que la solución es la misma solo q la gráfica nos bota la solución como bien dije por medio de una gráfica y el método de solución no lo da con una función

Est.Ale. Hei 4. 13-05-2015

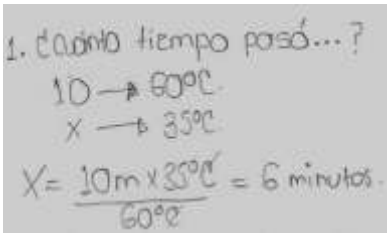
Anexo U. Respuestas de los estudiantes a la pregunta 1 del Taller 5



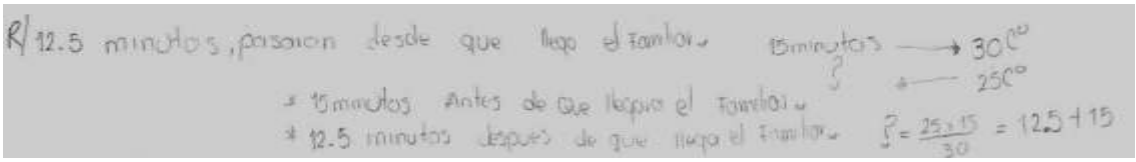
Est.Ang.13-05-2015



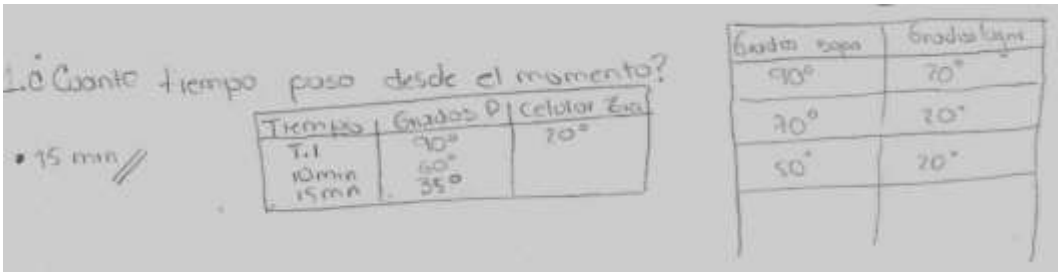
Est.Bry.13-05-2015



Est.Ale.13-05-2015



Est.Jhe.13-05-2015



Est.Hei.13-05-2015

Anexo V. Respuestas de los estudiantes a la pregunta 2 del Taller 5.

Cuando sacan la sopa esta servida su temperatura es de 90°, Pero debemos tener encuenta la temperatura del lugar, Porque dependiendo de eso la temperatura de la sopa va menmando ya sea lentamente o muy Rapido, y tambien debemos tener encuenta el tiempo que transcurre la sopa servida.

Est.Ang.13-05-2015

la temp de la sopa comienza a reducir con el tiempo cada 10 min la temp reduce 30°

Est.Hei.13-05-2015

La temperatura de la sopa disminuye aproximadamente 30°C cada 10 min. debido a que entre el calor que tiene la sopa y el clima que tiene el restaurante es de 20°C lo que pasara es que la sopa buscara estar a la misma temperatura del restaurante conforme pasa el tiempo.

Est.Bry.13-05-2015

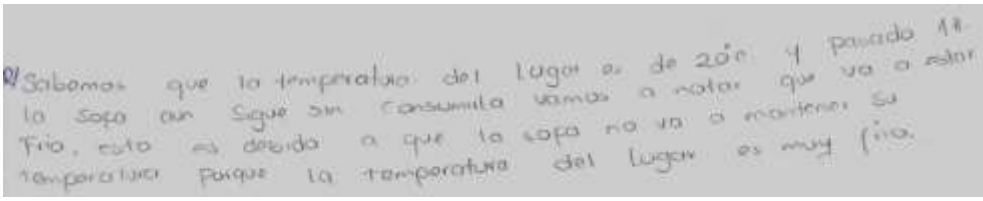
Sucede que a medida que transcurre el tiempo, la temperatura de la sopa va disminuyendo, y entre más expuesta este dentro del restaurante, mucho más rápido bajara su temperatura.
Al disminuir la temperatura de la sopa, es de anotar que está no llegará a los 0°C porque la temperatura del lugar esta a 20°C, por lo tanto la sopa se mantendra también con la temperatura del lugar.

Est.Ale.13-05-2015

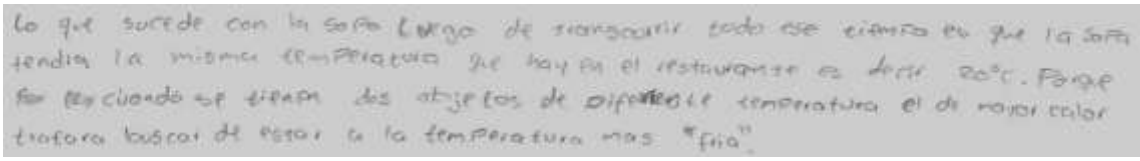
2. ¿Que sucede con la Temperatura de la sopa?
R/ la temperatura de la sopa va bajando con respecto al tiempo que pasa, por ejm: más o menos en 15 minutos pasa de tener 90°C a 60°C, en este caso bajo 30°C, pero cuando llega el familiar bajo 25°C

Est.Jhe.13-05-2015

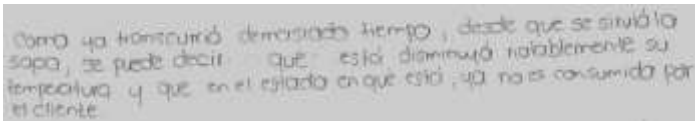
Anexo W. Respuestas de los estudiantes a la pregunta 3 del Taller 5


Sabemos que la temperatura del lugar es de 20°c y pasado 1h la sopa aun sigue sin consumirla vamos a notar que va a estar fria, esto es debido a que la sopa no va a mantener su temperatura porque la temperatura del lugar es muy fria.

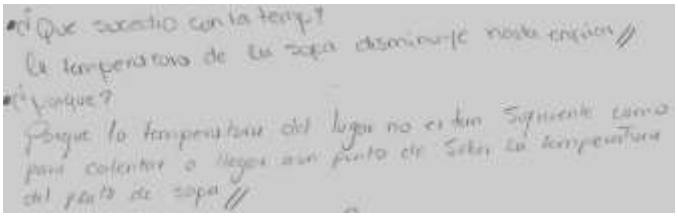
Est.Ang.13-05-2015


lo que sucede con la sopa luego de transcurrir todo ese tiempo es que la sopa tendra la misma temperatura que hay en el restaurante es decir 20°c. Porque por lo cual cuando se tocan dos objetos de diferente temperatura el de mayor calor trataran buscar de estar en la temperatura mas "fria".

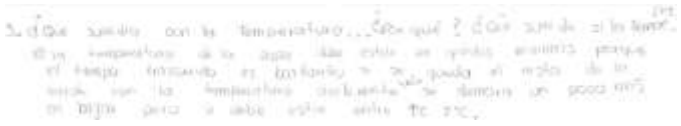
Est.Bry.13-05-2015


Como ya transcurrió demasiado tiempo, desde que se sirvió la sopa, se puede decir que esta disminuyó notablemente su temperatura y que en el estado en que está, ya no es consumida por el cliente

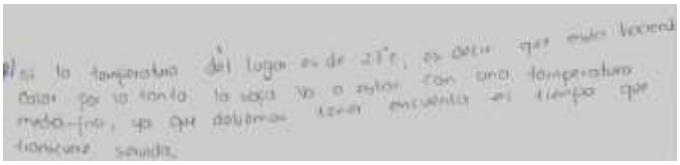
Est.Ale.13-05-2015


¿Que sucedio con la temp.?
La temperatura de la sopa disminuye notablemente //
¿Porque?
Porque la temperatura del lugar no es tan suficiente como para calentar o llegar a un punto de Sabor, la temperatura del plato de sopa //

Est.Hei.13-05-2015



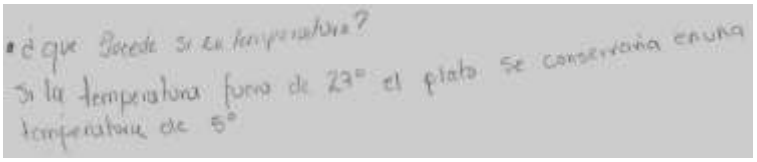
Est.Jhe.13-05-2015



Est.Ang.13-05-2015

Est.Bry.13-05-2015

Est.Ale.13-05-2015



Est.Hei.13-05-2015

Anexo X. Respuestas de los estudiantes a la pregunta 4 del Taller 5

$$t_f = \frac{t_{inic} \cdot (temp_f - temp_{inic})}{20°C}$$

t_f = tiempo final

t_{inic} = tiempo inicial

$temp_f$ = temperatura final

$temp_i$ = " inicial

$20°C$ = temperatura restaurante

Est.Bry.22-04-2015

X_1 = Grado inicial sopa (90°)

Y_1 = Grado lugar (20°)

$$\frac{X_1 - Y_1}{2} = \frac{90° - 20°}{2} = 35°$$

Est.Hei.22-04-2015

$$CT = \frac{10m \times 90°C}{35°C}$$

$$CT = 25.7\,m.$$

$$CT = \frac{50m}{60°C} \times \frac{?}{35C}$$

$$CT = \frac{1750 \times 60}{2100}$$

$$CT = 50$$

Est.Ang.13-05-2015

$$\frac{dS}{dt} = S.t$$

S → temperatura de la sopa.

t → tiempo

Est.Ale. 22-04-2015

4. ¿Plantee una expresión matematica que le permite dar respuesta ...

R/ Puede ser una regla de tres como la plantee al inicio o tambien una Ecuación diferencial ya que la temperatura cambia con respecto al tiempo.

t → temperatura x → tiempo K → temperatura ambiente

$$\frac{dt}{dx} = \frac{t}{x} \cdot K$$

→ Mis datos importantes son la temperatura de la sopa, la Temperatura ambiente y el tiempo que pasa. Teniendo en cuenta que la temperatura de la sopa cambia con respecto al tiempo.

$$\frac{dt}{dx} = \frac{t}{x} \cdot K$$

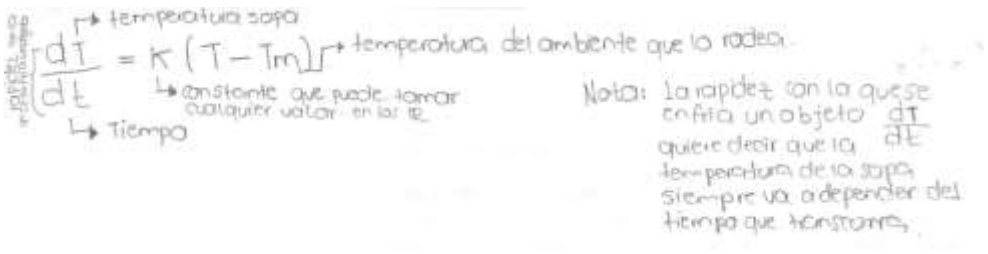
t → ambiente - sopa

x → tiempo

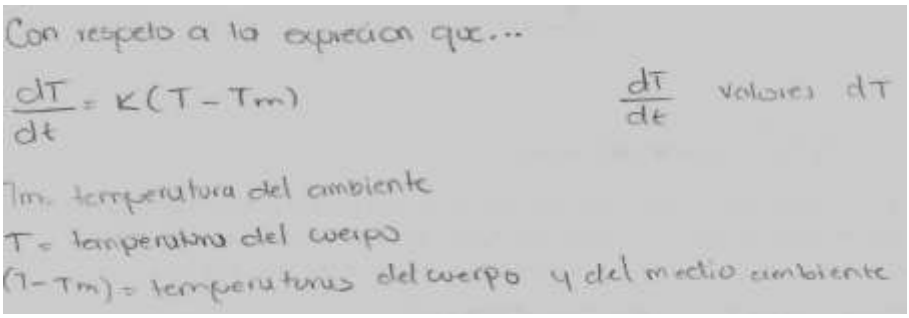
K → ambiente Tem

Est.Jhe. 22-04-2015

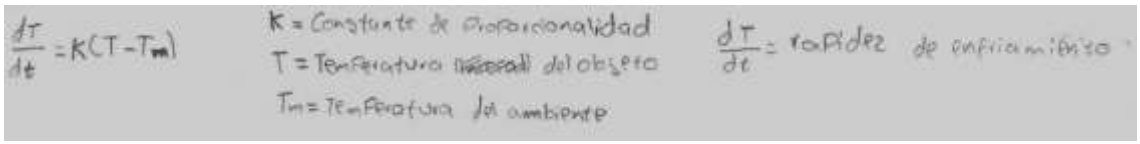
Anexo Y. Respuestas de los estudiantes a la pregunta 5 del Taller 5



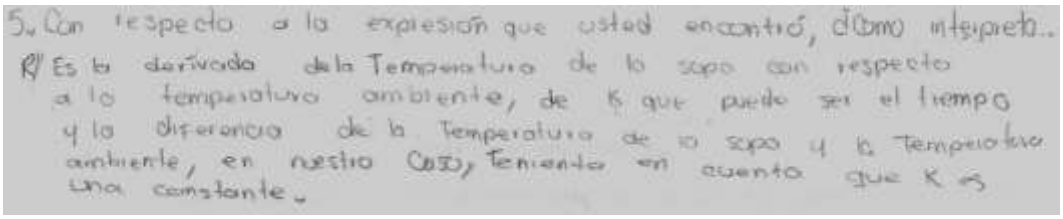
Est.Ale. 13-05-2015



Est.Hei. 13-05-2015



Est.Bry. 13-05-2015



Est.Jhe 13-05-2015

$$\frac{dT}{dt} = K(T - T_m) \Rightarrow$$

$dT \rightarrow$ diferencia de Tiempo

$dt \rightarrow$ diferencia de tiempo pasado

$K \rightarrow$ constante.

$T \rightarrow$ Tiempo que se va a encontrar

$T_m \rightarrow$ Temperatura del ambiente

Est.Ang 13-05-2015

Anexo Z. Respuestas de los estudiantes a la pregunta 6 del Taller 5

$$\frac{dT}{dt} = K(T - T_m)$$

$$\frac{dT}{(T - T_m)dt} = K$$

$$\frac{dT}{T - T_m} = K.dt$$

Por variables separables

$$\int \frac{1}{T - T_m} dT = \int K.dt$$

$$\ln|T - T_m| = K.t + C$$

$$e^{\ln|T - T_m|} = e^{K.t + C}$$

$$T - T_m = C.e^{K.t}$$

$$T = C.e^{K.t} + T_m$$

Est.Ale. 13-05-2015

$$\frac{dT}{dt} = K(T - T_m)$$

$$\frac{1}{(T - T_m)} dT = K\ dt$$

$$\int \frac{1}{(T - T_m)} dT = \int K\ dt$$

$$\ln(T - T_m) = K.t + C$$

$$e^{\ln(T - T_m)} = e^{(K.t) + C}$$

$$T - T_m = e^{K.t}\ e^{C}$$

$$T - T_m = e^{K.t}\ C$$

Est.Ang. 22-04-2015

$$\frac{dT}{dt} = K(T - T_m)$$

$$\int \frac{1}{(T - T_m)} dT = \int K.dt$$

$$\log(T - T_m) = K.t + C$$

$$e^{\log(T - T_m)} = e^{K.t}.e^{C}$$

$$T - T_m = e^{K.t}.C$$

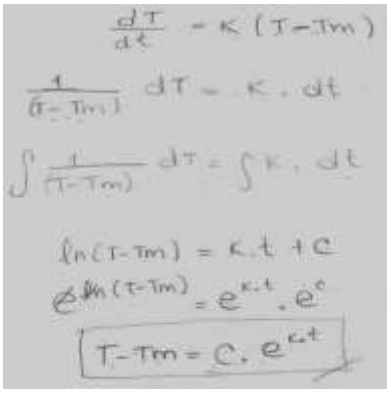
$$\frac{dT}{dt} = K(T - T_m)$$

$$\int \frac{dT}{T - T_m} = K \int dt$$

$$\cancel{e}^{\log(T - T_m)} = \frac{K.t}{C} + \frac{C}{C}$$

$$(T - T_m) = Ce^{K.t}$$

Est.Hei 13-05-2015 Est.Bry. 13-05-2015



Est.Jhe. 13-05-2015

Anexo AA.Respuestas de los estudiantes a la pregunta 7 del Taller 5

Est.Ang. 13-05-2015

$T = C.e^{K.t} + Tm$
↳ Ecuación de Newton

Datos:

$Tm = 20°C$

✓ $T(10) = 60°C$

$t = 10m$

$T = 60°C$

✓ $T(\ ) = 35°C$

✓ $T(0) = 90°C$

En la ecuación de Newton sustituimos el siguiente valor inicial $T(0) = 90°C$ para encontrar el valor de C.

$T = 90°C$, $Tm = 20°C$

$t = 0$

$T = C.e^{K.t} + Tm$

$90°C = C.e^{K.0} + 20°C$

$90°C = C + 20°C$

$90°C - 20°C = C$

$70°C = C$

Ahora C lo reemplazo en la ecuación de Newton, con el valor inicial de $T(10) = 60°C$

$T = C.e^{K.t} + Tm$

$60°C = 70°C.e^{K.10} + 20°C$

$60°C - 20°C = 70°C.e^{10K}$

$\frac{40°C}{70°C} = e^{10K}$

$0.57 = e^{10K}$

$\ln(0.57) = e^{\ln(10K)}$

$\ln(0.57) = 10K$

$\frac{\ln(0.57)}{10} = K$

$-0.056 = K$

$T = C.e^{K.t} + Tm$.

En está ecuación sustituyo los valores de C y K. y el valor inicial $T(?) = 35°$ para encontrar el tiempo en que la temperatura de la sopa es de 35°.

$35°C = 70°C.e^{(-0.056.t)} + 20°C$

$35°C - 20°C = 70°C.e^{(-0.056.t)}$

$15°C = 70°C.e^{(-0.056.t)}$

$\frac{15°C}{70°C} = e^{(-0.056.t)}$

$0.214 = e^{-0.056.t}$

$\ln(0.214) = e^{\ln(-0.056.t)}$

$\ln(0.214) = -0.056.t$

$\frac{\ln(0.214)}{-0.056} = t$

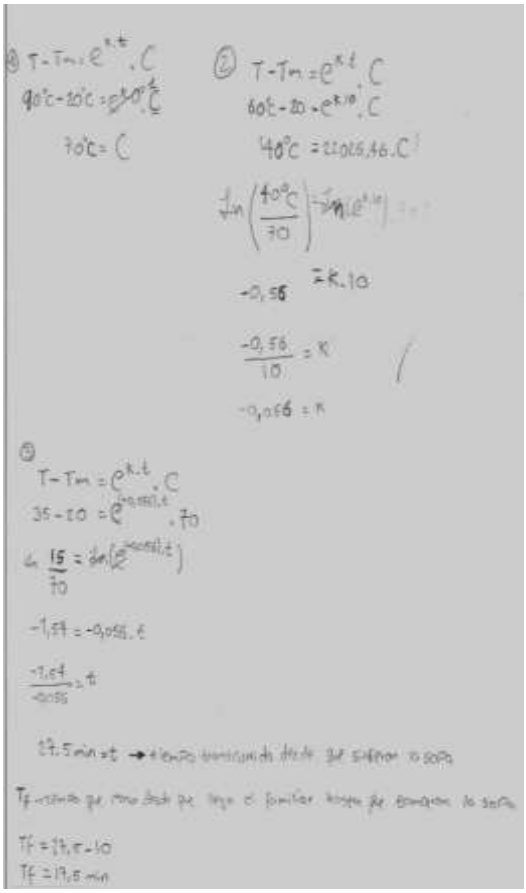
$\frac{-1.5417}{-0.056} = t$

$27.53\,m = t$

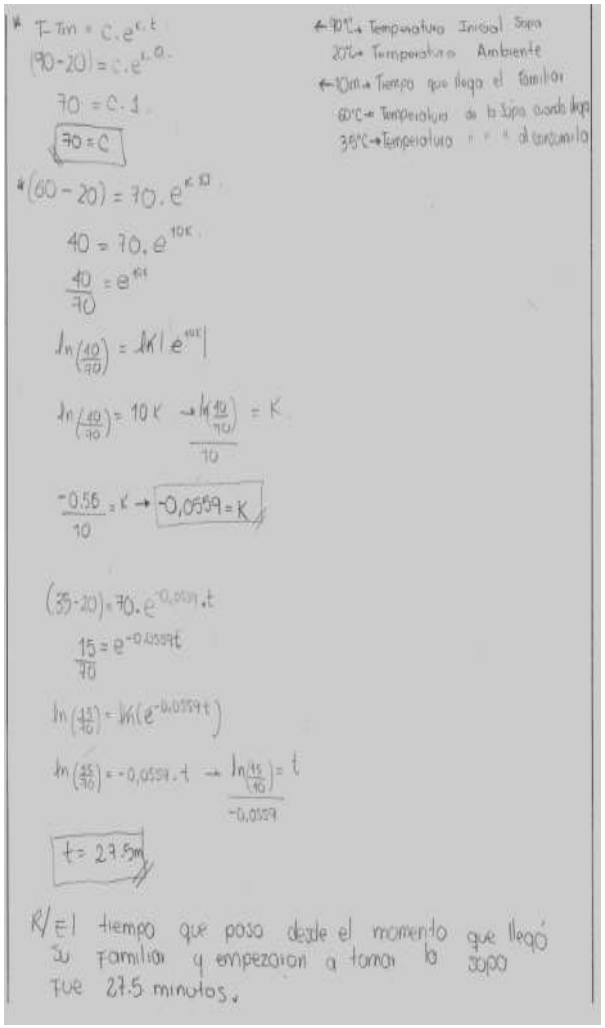
¿Cuánto tiempo pasó desde el momento que llegó su familiar y empezar a tomar la sopa?

Por la ecuación de Newton se pudo encontrar el tiempo total desde que el cliente llegó hasta cuando el y su familiar empezaron a tomar la sopa. Entonces al $t_{total} = 27.53m$ le resta los 10m que transcurieron antes de que su familiar llegara. Por lo tanto el tiempo que pasó es de: 17 minutos 53 segundos

Est.Ale. 13-05-2015

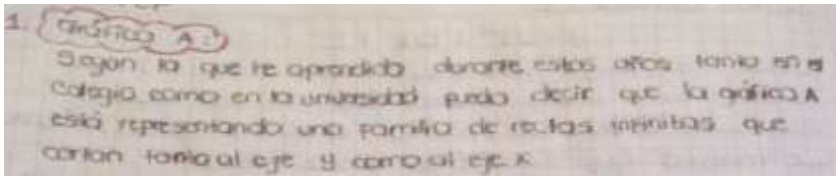


Est.Bry. 13-05-2015

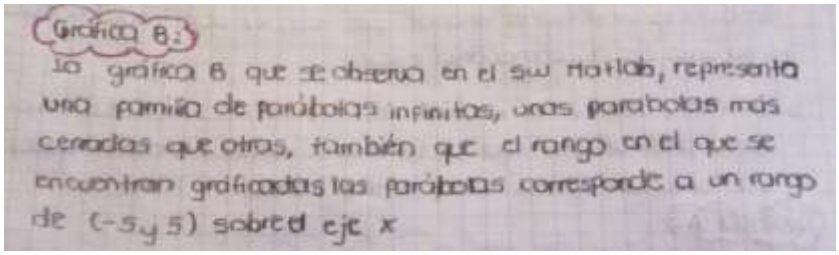


Est.Jhe. 13-05-2015

Anexo BB.Respuestas de los estudiantes a la pregunta 1 del Taller 6



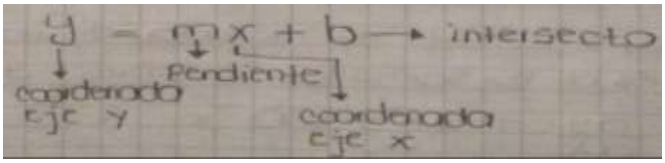
Est.Ale. 20-05-2015



Gráfica B:

la gráfica B que se observa en el sw Matlab, representa una familia de parábolas infinitas, unas parabolas más cerradas que otras, también que el rango en el que se encuentran graficadas las parábolas corresponde a un rango de (-5 y 5) sobre el eje x

Est.Ale. 20-05-2015



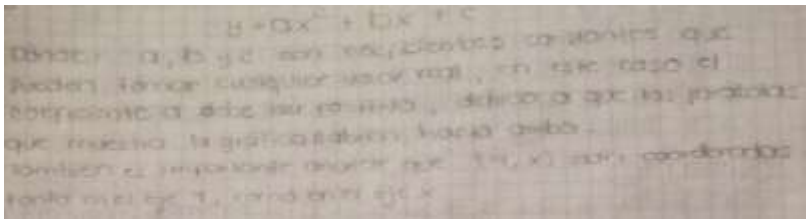
$y = mx + b \rightarrow$ intersecto

pendiente

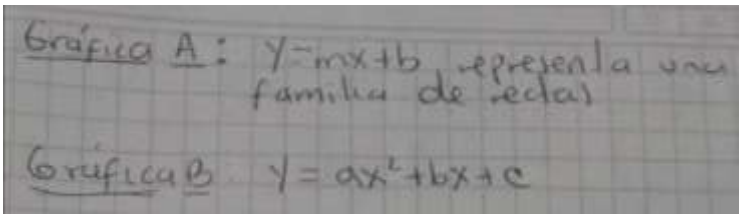
coordenada eje y

coordenada eje x

Est.Jhe. 20-05-2015



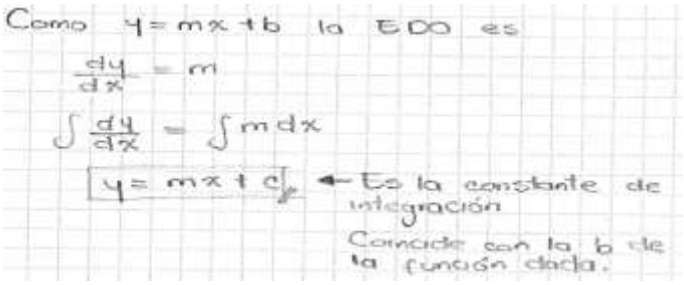
Est.Jhe. 20-05-2015



Gráfica A: $y = mx + b$ representa una familia de rectas

Gráfica B: $y = ax^2 + bx + c$

Est.Hei. 20-05-2015



Como $y = mx + b$ la EDO es

$$\frac{dy}{dx} = m$$

$$\int \frac{dy}{dx} = \int m\,dx$$

$$\boxed{y = mx + c_1}$$ ← Es la constante de integración

Coincide con la b de la función dada.

Est.Bry. 20-05-2015

EDO Para $y = mx + b$
las ecuaciones diferenciales son:

$$\frac{dy}{dx} = m$$

resolviendo por el método de variables separables

$$\int dy = \int m\, dx$$

$y = mx + C$ → donde C es la constante de integración e indica la familia de rectas

Est.Hei. 20-05-2015

EDO Para $y = ax^2 + bx + c$

$$\frac{dy}{dx} = 2ax + b \Rightarrow \int dy = \int (2ax + b)\, dx$$

$y = ax^2 + bx + C$ → C es la constante de integración y nos indica la familia de parábolas

Est.Jhe. 20-05-2015