Universidad
del Cauca

INSTITUTO DE POSGRADOS
MAESTRÍA EN EDUCACIÓN
MODALIDAD INVESTIGACIÓN
LÍNEA EDUCACIÓN MATEMÁTICA

El INFINITO
UN OBSTÁCULO EPISTEMOLÓGICO RECURRENTE EN LA CONSTITUCIÓN DEL CONCEPTO DE LA INTEGRAL DEFINIDA

HUGO ALEXANDER MANZANO MARTÍNEZ

POPAYÁN 2017

INSTITUTO DE POSGRADOS
MAESTRÍA EN EDUCACIÓN
LÍNEA EDUCACIÓN MATEMÁTICA

El INFINITO
UN OBSTÁCULO EPISTEMOLÓGICO RECURRENTE EN LA CONSTITUCIÓN DEL CONCEPTO DE LA INTEGRAL DEFINIDA

HUGO ALEXANDER MANZANO MARTÍNEZ

Directora

Dra. Martha Lucia Bobadilla Alfaro

Trabajo presentado como requisito para optar al título de Magister en Educación: línea de Investigación en Educación Matemática

POPAYÁN 2017

Contenido

Lista de Figuras

Listado de figuras.

“*Nada encuentro tan maravillosamente bello como una ventana. Pero si me dejase llevar por mis inclinaciones hacia un i**nfinito** número de ventanas, acabaría por no haber paredes. E igualmente acabaría por no haber ventanas*”.

Gilbert K. Chesterton.

1 INTRODUCCIÓN

El estudio de la evolución de un concepto matemático a través del tiempo, permite identificar en el proceso de desarrollo histórico, desde su origen primigenio hasta su conceptualización formal, obstáculos y rupturas epistemológicas; dos elementos fundamentales en la construcción del conocimiento científico. En este sentido, las personas que contribuyen en este proceso, son innovadoras, creativas y están dispuestas a enfrentar, superar o evadir los obstáculos que se les interponen, por lo que deben buscar estrategias y condiciones que estén encaminadas a romper nociones predeterminadas y concepciones previamente aceptadas que impiden el fortalecimiento del espíritu científico.

Al considerar las matemáticas como una construcción humana, nos identificamos con los planteamientos de Lakatos y en consecuencia, compartimos la tesis fundamentada de que los conceptos matemáticos no deben ser aceptados por mandato o entendidos como algo completamente terminado y estrictamente formal. Desde esta perspectiva, asumimos que en el proceso histórico mediante el cual se logra la formalización del concepto de la integral definida, se presentan obstáculos y rupturas epistemológicas determinantes en el avance de este concepto.

El objetivo general es identificar el infinito como un obstáculo epistemológico en la evolución del concepto de la integral definida. En este proceso, también se exponen otros obstáculos que se presentan en su desarrollo y algunas de las principales rupturas epistemológicas que se originan con el progreso del conocimiento matemático, particularmente las que están relacionadas con la integral.

Para cumplir con el objetivo propuesto, el trabajo está divido en cuatro capítulos, organizados de la siguiente manera: En el primer capítulo se presenta la línea de pensamiento de Gastón Bachelard (1884-1962), se expone la forma cómo se logra un verdadero enriquecimiento espiritual, desde la perspectiva de los obstáculos y las rupturas epistemológicas; se plantea cómo Bachelard desde su posición estrictamente racionalista entiende las matemáticas, postura que es confrontada con la tesis de Lakatos de que las teorías matemáticas son *cuasi-empíricas*, situación que nos permite ubicar obstáculos epistemológicos en la historia de los conceptos matemáticos. Finalmente, se presenta la relación que se puede establecer entre didáctica de las matemáticas y los obstáculos epistemológicos; destacando la influencia que puede ejercer la historia de las matemáticas en los procesos de enseñanza y aprendizaje.

En el segundo capítulo, se presenta una historiografía de la integral definida desde su origen primigenio en el seno de la cultura griega, hasta el momento de su formalización en la segunda década del siglo XIX; se describen los principales aportes en la evolución de este concepto, observando cómo a través de diferentes etapas históricas, el infinito aparece como un obstáculo epistemológico y las correspondientes rupturas que permiten el progreso del conocimiento matemático.

Este capítulo puede ser estudiado en tres períodos; en el primero se expone el trabajo de pensadores griegos como: los pitagóricos, Aristóteles, Eudoxo, Euclides y Arquímedes. Se muestra cómo problemas respecto a la medida originan el cálculo de cuadraturas, el surgimiento de las magnitudes inconmensurables, la concepción de infinito, el método con el que determinan la cuadratura de figuras rectilíneas y los primeros pasos para calcular el área de algunas figuras limitadas por líneas curvas. En el segundo periodo, que inicia con los trabajos de Kepler y Cavalieri, se exponen los aportes de Wallis, Descartes, Newton y Leibniz, finalizando con las contribuciones de Euler y Fourier; en esta parte se presenta cómo el cálculo de cuadraturas se transforma en el problema de la determinación del área bajo la curva, la sistematización y la construcción de algoritmos que permiten determinar el área de algunas figuras mediante la implementación de infinitesimales, que aunque no podían ser explicados completamente, si eran demasiado prácticos a la hora de obtener resultados. Se exhiben las formas con las que cada uno de los diferentes pensadores llegó a manipular el infinito y se muestra que a pesar de las rupturas que generaron, no lograron dominarlo definitivamente. En el último periodo histórico, se expone cómo Cauchy llega a definir de manera formal el concepto de la integral, definiendo para ello los conceptos de límite, cantidades infinitamente pequeñas y brindando criterios de convergencia a través de los cuales llega a dominar el infinito.

El capítulo tres presenta los momentos históricos en los cuales identificamos el infinito como un obstáculo epistemológico, entre otros obstáculos que influenciaron en el desarrollo de la integral, dando a conocer las diferentes rupturas que evidenciamos en el proceso evolutivo de este concepto matemático.

Para realizar este análisis histórico de la integral, tomamos como referencia la división que presenta Bachelard respecto a la evolución del conocimiento: un periodo pre científico, uno científico y finalmente el nuevo espíritu científico; el momento cumbre donde el concepto de la integral es definido de manera formal como un objeto del análisis matemático. Al final de los dos primeros estados, se exponen: *estancamientos, inercias y regresiones*, efectos que son una consecuencia de los obstáculos epistemológicos que se originan en el desarrollo del concepto de la integral definida.

Finalmente, el último capítulo presenta algunas reflexiones de tipo didáctico, refleja la importancia de conocer los desarrollos históricos de las teorías matemáticas, sobre todo mostrando un perfil de la disciplina diferente al tradicional. Reconocer que las matemáticas son una construcción humana, en cuya evolución se originan obstáculos y rupturas epistemológicas, lo que permite evidenciar la diferencia que existe entre el desarrollo histórico de un concepto y la forma como se presenta al interior del aula de clase. En este sentido, se debe propiciar que el estudiante, al igual que los diferentes pensadores que participaron en la construcción del conocimiento matemático, deben tener una actitud creadora, critica y reflexiva frente a su enseñanza, de tal forma que puedan regresar sobre los conocimientos previamente aceptados, identificar obstáculos y romper con todo aquello que dificultad su aprendizaje; en otras palabras, el profesor debe propender porque cada estudiante edifique su propio espíritu científico.

2 BACHELARD Y LOS OBSTÁCULOS EPISTEMOLÓGICOS.

En el presente capítulo se realiza un análisis de la línea de pensamiento de Gastón Bachelard (1884-1962), exponiendo las diferentes maneras de cómo se logra un verdadero enriquecimiento espiritual, su relación con las matemáticas y la teoría de los obstáculos epistemológicos a partir, de lo expuesto en su libro denominado "*la formación del espíritu científico*" publicado en 1938, en el que se revelan las condiciones que afectan la construcción del conocimiento.

Bachelard, estudia las diferentes formas de cómo se muestra el enriquecimiento del espíritu[1], explica bajo qué condiciones se presentan revoluciones y rupturas epistemológicas que potencian el progreso del conocimiento científico; entendiéndolo desde la perspectiva Bachelardiana, como el conjunto de saberes que se originan al dar respuesta a una pregunta formulada y que a diferencia del conocimiento común, derivado de la percepción de los sentidos, es un conocimiento basado en estructuras lógicas y abstractas que se deslindan de la experiencia inicial, un conocimiento que pretende hacer el tránsito desde lo sensible hasta lo inteligible.

De acuerdo a lo anterior, un conocimiento puede ser considerado científico si tiene la cualidad de establecer una ruptura con el conocimiento común, es decir, es un conocimiento que ha superado la barrera resultante de la primera observación que se especializa y reestructura continuamente el saber.

Bachelard cuestiona notablemente el conocimiento que se obtiene derivado de los sentidos y argumenta que el verdadero conocimiento debe estar fundamentado en la razón pues solamente abandonando el confort que nos brindan las motivaciones iniciales y direccionados por la razón se puede contribuir verdaderamente al enriquecimiento del conocimiento científico. De igual manera, para Bachelard la ciencia está en progreso constante, de tal manera que toda persona interesada en contribuir con su desarrollo debe

[1]Se entiende por espíritu, todo lo que no es natural, todo lo que no se encuentra en la naturaleza, lo que sólo puede ser obtenido a partir de la capacidad creadora de los hombres. (Juárez Zaragoza, 2006)

estar dispuesta a innovar, a generar procesos que originen crisis a las teorías existentes y se produzcan cortes epistemológicos que dinamicen la evolución del conocimiento

2.1 El espíritu científico.

La humanidad y su capacidad innovadora, se ubica por encima de la naturaleza, lo que constituye la condición principal en la formación del espíritu, desde las edificaciones más elementales que aseguran la supervivencia de la especie; hasta las construcciones científicas más elaboradas como la teoría de la relatividad[2]. Todo lo que el hombre está en capacidad de crear, es resultado del espíritu.

De acuerdo con Bachelard, el espíritu puede ser enriquecido desde las artes, la filosofía y la ciencia. Las artes fortalecen el espíritu a través de las actividades que realiza el *hombre nocturno*, aquel que desde la soledad de su hogar deja fluir los sentidos a partir de expresiones artísticas como la pintura, la música y la poesía; la filosofía y la ciencia fortalecen el espíritu a partir del trabajo realizado por el *hombre diurno*, un hombre creativo y reflexivo, motivado y dedicado por la razón, el hombre diurno es un hombre que tiene la capacidad de convivir a diario con ecuaciones en su cabeza. Esta forma de expresarse empieza a mostrar de alguna manera la importancia que el autor les asigna a las matemáticas en la evolución del conocimiento científico.

Si bien la concepción Bachelardiana respecto a la forma en la que evoluciona el espíritu científico es estrictamente racionalista, motivo por el cual las construcciones del conocimiento deben estar a cargo del hombre diurno, en un trabajo posterior llega a considerar la importancia de todo aquello que "*el científico ha desechado a la hora de construir sus teorías, restos que son ensoñación, imaginación y divagaciones*"[3], en otras

---

[2] La importancia de la teoría de la relatividad en la construcción del nuevo espíritu científico se retomará más adelante cuando se analice la noción de ruptura desde la postura de Bachelard.

[3] (Goméz M, 2015)

palabras, reconoce en la imaginación, en el hombre nocturno y sus sueños un elemento significativo de creatividad que no puede ser aislado en la construcción de las diferentes teorías científicas.

Gastón Bachelard establece una relación entre el psicoanálisis de Sigmund Freud y la epistemología (Juárez Zaragoza, 2006). Así, cuando se psicoanaliza el conocimiento científico, se puede llegar a conocer las diferentes motivaciones de los investigadores y sus interese. Luego, la formación del espíritu científico al igual que cualquier otro proyecto realizado por los hombres, tiene momentos de extrema lucidez, tanto como de incertidumbre u oscuridad y hasta notables momentos de inconsistencia, pues sus diferentes motivaciones y el medio en el cual se desenvuelven les permite acercarse a algunos saberes como alejarse de otros.

Algo similar sucede en los procesos de enseñanza y aprendizaje, pues a la hora de enseñar o aprender un determinado concepto estos procesos no se realizan de forma lineal, como si se tratara de armar un rompecabezas colocando una ficha a continuación de otra. Si bien existen nociones que son fáciles de comprender, existen otras que generan dificultad que son difíciles de apropiar y en consecuencia entorpecen la construcción de conocimiento por parte de los estudiantes

Por consiguiente, el conocer la evolución histórica de una disciplina permite entender cómo los diferentes pensadores debieron cuestionar los saberes establecidos, ser innovadores y creativos; en otras palabras, cómo lograron desarrollar su espíritu científico, situación que puede ser implementada para llevar a quien está interesado en aprender a que fortalezca o construya su propio espíritu y logre avanzar en la edificación de su conocimiento.

2.2 Ruptura en el desarrollo del conocimiento científico.

La noción de ruptura es de gran importancia en el pensamiento de Gastón Bachelard, pues para él, solo a través del cambio en la forma de pensar y de la restructuración de los conocimientos derivados de cortes o rupturas epistemológicas, se puede lograr un verdadero desarrollo científico.

El autor realiza una fuerte crítica a la posición que sostiene que el desarrollo de la ciencia es siempre continuo que se despliega como una construcción de conceptos que se ligan uno a continuación del otro perfectamente encajados, obedeciendo estrictamente a un modelo lineal de construcción de conocimiento.

Bachelard tiene la percepción de que las ciencias están en constante movimiento por lo tanto, su desarrollo se aleja del modelo lineal de construcción del conocimiento, postura que va en contravía de su pensamiento respecto a las matemáticas, pues considera, que esta disciplina se desarrolla de forma continua, sin ningún tipo de sobresaltos; unas matemáticas que siempre han existido y existirán esperando ser encontradas. Situación que contradice sus postulados, respecto a la construcción del conocimiento científico y que de alguna manera pone en cuestión el estatus de cientificidad que este autor les asigna a las matemáticas.

Sin embargo, frente a esa visión racionalista, en la que las teorías matemáticas son aceptadas como verdades incuestionables, separándolas de la forma como se constituyen el resto de las ciencias, aparece otro tipo de perspectivas que permiten entenderlas de una manera distinta. En este sentido, Lakatos plantea una concepción de las matemáticas diferente a la tradicional, expone unas ideas que permiten asimilar el desarrollo de las matemáticas de una forma dinámica; perspectiva que es contraria a la fundamentada en el desarrollo acumulativo de dicha disciplina.

La posición de Lakatos respecto a la filosofía de la ciencia y en particular a la de las matemáticas, está direccionada a confrontar las tesis Euclidianas que eran expuestas a quienes escépticamente argumentaban que obtener un conocimiento seguro era imposible. De acuerdo con este autor, para abordar el problema planteado por los escépticos sobre la *regresión al infinito* del conocimiento, fue necesario trazar unos modelos que permitieran explicar dicho conocimiento.

Unos de estos modelos cuyo carácter es *verificacionista*, pretende salvaguardar las seguridad del conocimiento humano, mediante la implementación de una serie de principios fundamentales seguros, que no admiten ningún tipo de dudas y a partir de los cuales se empieza a construir toda una serie de enunciados que van desde los elementales, hasta los más complejos y abstractos, todo mediante una serie de raciocinios inductivos.

Lakatos denomina a este modelo como *programa Euclídeo* y lo caracteriza de la siguiente manera:

> Es un sistema deductivo en el que las proposiciones de la cúspide (axiomas) constan de términos perfectamente conocidos (términos primitivos), y se practican en esta cúspide inyecciones de valores de verdad infalibles, que sean de valor de verdad verdadero, y que fluyan hacia abajo, por los canales deductivos (pruebas) e inundan todo el sistema. (Lakatos, 1981, pág. 17)

Otro modelo es *el empirista*, basado en el falsacionismo y que según Lakatos estaría develado de la siguiente manera:

> Llamo "*teoría empirista*" un sistema deductivo si las proposiciones de la base (enunciados básicos) constan de términos perfectamente bien conocidos (términos empíricos) y existe una posibilidad de inyección de valores infalibles en esa base, tal que, si el valor de verdad es falso, fluye hacia arriba por los canales deductivos (explicaciones) e inunda todo el sistema (si el valor de verdad es verdadero, no existe ninguna corriente de valor de verdad en el sistema) (Lakatos, 1981, pág. 18)

Este programa empirista se basa en conjeturas, en él los enunciados básicos son explicados dentro del mismo sistema llevando a que las teorías no se puedan verificar de una manera absoluta, sólo se puede buscar su corroboración, lo que conduce a que las teorías matemáticas se puedan ubicar en un programa denominado "*programa cuasi-empirista",* el cual se caracteriza por ser completamente opuesto al Euclídeo.

Al identificar las teorías matemáticas como cuasi-empíricas, Lakatos les asigna una perspectiva diferente, donde su desarrollo se origina a partir de problemas y al diseño de soluciones arriesgadas en un proceso de construcción permanente. Bajo esta visión de las matemáticas se desarrollará el presente trabajo, pues la evolución del conocimiento matemático debe tener el mismo nivel de importancia la solución de un problema, como el camino que fue necesario recorrer para encontrarla.

Lakatos le concede importancia a la solución de un determinado problema, a la formulación de un teorema, pero de la misma forma considera trascendente todo el proceso que le permite al matemático presentar su solución, para él las hojas de borrador y los errores que se pueden haber cometido son indispensables para el progreso del conocimiento matemático.

Esta concepción plantea que sólo después de ser diseñadas las posibles soluciones a un determinado problema, se les deben realizar rigurosos análisis y las respectivas refutaciones pues es así, como avanza la construcción de las teorías matemáticas.

> El vehículo del progreso se encuentra en las especulaciones audaces, la crítica, la controversia entre teorías rivales, los cambios de problemas. La atención se centra siempre en los bordes oscuros, los slogans son crecimiento y revolución permanente, no fundamentos y acumulación de verdades eternas. (Lakatos, Matematicas, ciencia y epistemologia, 1981, págs. 49-50)

Este planteamiento brinda una nueva alternativa de progreso científico, una visión diferente a la que se tiene de las matemáticas como algo terminado y completamente formal, en otras palabras, unas matemáticas humanas que dan lugar al error que en algunos momentos se pueden tornar inexactas y que dependen en gran medida de su historicidad. En este punto es importante resaltar que aunque Bachelard y Lakatos comparten la idea de que el desarrollo científico no es lineal, su postura respecto a la racionalidad de las matemáticas es completamente diferente.

Entonces, de acuerdo al planteamiento de Lakatos, se puede semejar el progreso del conocimiento matemático al de las ciencias de la naturaleza y en ese sentido es legítimo asociar la evolución de los conceptos matemáticos tal y como propone Bachelard.

Desde la concepción de Bachelard, el conocimiento científico progresa en la medida en que se logre cortar con las concepciones establecidas por el conocimiento común, por lo tanto, quien esté interesado en aportar en el desarrollo de la ciencia debe reflexionar constantemente, descubrir y redescubrir; buscando siempre romper con la impresión que se obtiene de la primera observación, abandonando el interés utilitario del conocimiento. En otras palabras, es necesario romper con el realismo obtenido mediante la experimentación sensible fundamentando todos y cada uno de los saberes desde la razón.

Respecto a la forma como se ha presentado la evolución científica a través de la historia, Bachelard propone las siguientes "etiquetas históricas" en la medida en que se vea obligado a separar el pensamiento científico en etapas, para lo que plantea los siguientes tres periodos:

> El primer periodo, que representa *el estado precientifico*, comprendería a la vez la antigüedad clásica y los tiempos de renacimiento y de nuevos esfuerzos, con los siglos XVI, XVII y aun el XVII.
>
> El segundo periodo, que representa *el estado científico*, en preparación a fines del siglo XVIII, se extendería hasta todo el siglo XIX y comienzos del siglo XX.
>
> En tercer lugar fijaremos la era *del nuevo espíritu científico* en 1905, en el momento en que la relatividad Eisteniana deforma conceptos primordiales que se creían fijados para siempre. (Bachelard G. , 2000, pág. 9)

Aunque Bachelard no realiza una descripción profunda de cada una de estas etapas, si indica cómo el desarrollo del conocimiento ha sufriendo cambios a través del tiempo, expresa que el conocimiento generado de la observación directa de los fenómenos naturales, pasa por la ciencia moderna iniciada por Galileo con la estructuración del conocimiento a partir de teorías matemáticas, hasta llegar al verdadero espíritu científico el cual sólo puede ser mediado por la razón, donde la abstracción permita clarificar que se ha pasado de lo real a lo racional.

Es así, como la teoría de la relatividad genera una fuerte ruptura con los conocimientos anteriores, deforma los conceptos establecidos anteriormente y abre cualquier cantidad de investigaciones donde se debe reestructurar lo que se pensaba estaba estructurado, dando un sin número de posibilidades a la abstracción, al fundamentar conocimientos que no podían ser evidenciados a primera vista pero que indudablemente podrían ser abordados desde la capacidad racional del hombre.

> Con la ciencia de Einstein comienza una revolución de las nociones básicas. Se establece un relativismo de lo racional y de lo empírico incluso en el detalle mismo de las nociones. La ciencia experimenta entonces lo que Nietzsche llama "un temblor de conceptos", como si la tierra, el mundo, las cosas tomaran otra estructura puesto que la explicación arranca de otras bases. (Bachelard G. , El compromiso racionalista, 1973)

En ese “temblor de conceptos” que menciona Nietzsche, es donde surge una ruptura epistemológica, mediante la cual se acepta una nueva visión de las situaciones y sus fenómenos, dando inicio a la construcción de nuevo conocimiento científico.

En este punto, es importante destacar que para Bachelard el verdadero espíritu científico aparece con la ciencia de Einstein, en la medida que la teoría de la relatividad rompe totalmente con la experiencia natural, pues los desarrollos científicos del tercer estadio son radicalmente abstractos y no son el resultado de la observación directa de la naturaleza. A pesar de lo anterior, la experiencia revela que la ciencia ha evolucionado desde sus inicios mediante diferentes rupturas epistemológicas; así la formación del espíritu no se presenta exclusivamente con la teoría de la relatividad, un ejemplo de esta afirmación, es la ruptura que establece la física de Galileo y de Newton respecto a la física Aristotélica. De esta manera, se puede observar que la ciencia está en movilización constante, a partir de lo cual alcanza la rectificación de sus saberes y diferentes métodos. Al respecto (Goméz M, 2015) comenta:

> La discontinuidad de la historia de la ciencia pone de manifiesto la diferencia entre distintas teorías científicas que se suceden a lo largo del tiempo. Para Bachelard, en esa sucesión se sustituyen los intereses, se cambian los problemas y se propone un mundo nuevo. Esto es lo que sucede con la física de Einstein en el siglo XX. (Goméz M, 2015, pág. 76)

Las rupturas que permiten el desarrollo del conocimiento, también caracterizan la historia de la ciencia al indicar la transición que se presenta de un conocimiento común a un conocimiento científico. La discontinuidad en la evolución de las teorías científicas es la evidencia de como el conocimiento logra superar todo tipo de barreras, las cuales se encuentran al interior del propio conocimiento y que serán denominadas ***obstáculos epistemológicos***.

En la presente investigación se retoma los tres estados de la evolución del conocimiento científico propuestos por Bachelard aunque con una periodización diferente a la que se presenta en *La Formación del Espíritu Científico,* estas tres etapas son importantes en la medida que permiten identificar los obstáculos epistemológicos que se originaron en la evolución histórica del concepto de la integral definida, además permite visualizar las rupturas a través de las cuales el conocimiento matemático consiguió avanzar hasta alcanzar la definición formal del concepto en mención.

2.3 Noción de obstáculo epistemológico.

La postura Bachelardiana plantea que quienes se dedican a la construcción de la ciencia están influenciados por diferentes situaciones derivadas de la época y la cultura. Por tanto, el desarrollo del espíritu científico no es una tarea fácil, las teorías previamente establecidas, o las concepciones que se arraigan en la mente de las personas, se pueden transformar en barreras u obstáculos que impiden la apropiación de nuevas teorías, los cuales el autor denomina obstáculos epistemológicos.

La noción de obstáculo epistemológico es importante en la teoría de Bachelard, pues a partir de la publicación de la *formación del espíritu científico* en 1938, el término será empleado para identificar la forma cómo el conocimiento científico avanza; en la medida que es capaz de superar las dificultades que se originan en el mismo acto de conocer. Bachelard define un obstáculo epistemológico de la siguiente manera:

> Cuando se investigan las condiciones psicológicas del progreso de la ciencia, se llega muy pronto a la convicción de que hay que plantear el problema del conocimiento científico en término de obstáculos. No se trata de considerar los obstáculos externos como la complejidad o la fugacidad de los fenómenos, ni de incriminar a la debilidad de los sentidos o del espíritu humano: es en el acto mismo de conocer, íntimamente, donde aparecen, por una especie de necesidad funcional, los entorpecimientos y las confusiones. Es ahí donde mostraremos causas de estancamiento y hasta de retroceso, es ahí donde discerniremos causas de inercia que llamaremos obstáculos epistemológicos (Bachelard G. , 2000, pág. 15).

Bachelard ubica los obstáculos epistemológicos en dos ambientes diferentes; uno histórico y otro educativo. En el histórico asigna la responsabilidad que debe tener el epistemólogo a la hora de evaluar la función de los conceptos en las diferentes épocas, pues en ocasiones, conceptos que en algún momento fueron aceptados, pueden generar estancamientos o inercias en el desarrollo del conocimiento; dificultando el progreso de la ciencia. Por este motivo, el epistemólogo debe analizar cada proceso histórico desde la razón, ya que un hecho mal interpretado en una época fácilmente se puede transformar en un obstáculo.

Identificar los estancamientos, retrocesos e inercias (efectos) que se presentan en la constitución del concepto de la integral permite establecer los obstáculos epistemológicos como sus causas, por tal motivo en el capítulo tres se realiza la exposición de algunos de estos efectos que llegaron a ser detallados en la evolución histórica de la integral definida.

Bachelard plantea que cuando una persona se interesa por el desarrollo del conocimiento científico, debe estar dispuesto a colocar en duda todas sus concepciones teóricas, debe proponer reestructuraciones y adecuaciones de las nociones establecidas. Se deben generar rupturas en el conocimiento mediante una “mutación” intelectual que evidencie interrogantes que enriquezcan el campo del conocimiento. Internarse en la construcción del conocimiento científico implica manejar un cierto grado de prudencia frente a los conocimientos adquiridos, mantener un estado de alerta ante las concepciones familiares y ante las verdades absolutas que son inculcadas desde la escuela, pues el aceptar todo como verdadero e inmodificable, reduce la creatividad, imposibilita romper estructuras establecidas estancando el progreso del desarrollo científico.

Sin embargo, esta tarea no es nada fácil de realizar, pues cada persona en su proceso de formación adquiere una serie de conceptos, que tienen un dominio de validez y que de alguna manera crean una zona de confort en la que sólo es posible ratificar lo que ya es conocido, donde son más importantes las respuestas que las preguntas, situación que dificulta la construcción del conocimiento. Estos saberes tan arraigados y que no necesariamente son erróneos son los que se constituyen como obstáculos epistemológicos en el desarrollo del conocimiento científico.

En el momento en que el sujeto debe enfrentarse a la construcción de nuevos conocimientos, la necesidad funcional que el autor referencia, actúa como un mecanismo de defensa, en el que el andamiaje de saberes previamente adquiridos genera algún tipo de predisposición en contra de nuevos conocimientos (Padilla Beltrán, Guerra García, & Barón González, 2009). Es así, como “*es imposible hacer de golpe tabla rasa de los* *conocimientos usuales*”[4] indicando que no se puede pensar en mentes en blanco, que lo que conocemos afecta lo que deberíamos conocer.

Estudiar la historia debe permitir establecer estos obstáculos, determinar cómo los hechos históricos influyen sobre los diferentes puntos de vista de los pensadores de una determinada época, en muchas ocasiones estancando el progreso de la ciencia, pero al mismo tiempo invitándolos a romper con esas concepciones predeterminadas, entendiendo que el franquear estos obstáculos proporciona herramientas para fortalecer el verdadero espíritu científico.

Para el autor de la *formación del espíritu científico*; no se puede pensar en el historiador tradicional, para el que la historia es simplemente una sucesión de hechos que deben ser mencionados. El epistemólogo, según Bachelard, debe ir más allá, debe transformar los hechos en ideas; debe entender que un error o un hecho mal entendido en una determinada época no es solo un hecho por contar. Todo lo contrario, debe entenderse como un obstáculo, un contra pensamiento y que solamente al profundizar en ellos se puede lograr un verdadero avance en el desarrollo del conocimiento científico. Para determinar los obstáculos en el devenir histórico se deben hacer juicios normativos, donde el epistemólogo debe acudir a la razón, incluso a una razón evolucionada, en el sentido de que únicamente a partir de los conocimientos actuales se puede juzgar el pasado.

Ahora, entendiendo que el problema del conocimiento científico se debe plantear en términos de obstáculos, es importante caracterizar algunos de los obstáculos que según Bachelard no permiten una adecuada apropiación del desarrollo del conocimiento científico y que de alguna manera impiden la aparición de rupturas epistemológicas que propicien el desarrollo y la apropiación de los diferentes conceptos que estructuran las disciplinas científicas.

---

[4] (Bachelard G. , 2000, pág. 16)

2.3.1 La Experiencia Básica

La experiencia básica, entendida como la experiencia que se deriva directamente de los sentidos, no permite la construcción de conocimiento científico, en palabras de Bachelard este tipo de experiencia "*es colocada por delante y por encima de toda crítica*[5]". El conocimiento desde la experiencia básica es el resultado de la observación de la naturaleza, se ajusta a lo real y se aleja de lo racional.

A diferencia del espíritu científico que es sólido, que no depende de la subjetividad del observador, la experiencia inicial está cargada de las imágenes que el observador obtiene de la realidad.

La forma en que los griegos entienden los diferentes fenómenos, generalmente basados en una experiencia inicial, los lleva a que identifiquen lo finito como algo limitado al interior de la naturaleza, mientras que por otro lado, el "***infinito***" lo relacionaban con el universo, con el tiempo, con la creación misma de todas las cosas, lo asemejaban con todo lo que ellos consideraban era inagotable o indefinido, motivo por el cual lo denominan inicialmente con palabra "***απειρον***" cuyo significado es ilimitado.

Aristóteles en la *Física* argumenta que:

> …la investigación sobre el infinito concierne a los físicos. Todos ellos tienen buenas razones para poner el infinito como un principio, ya que piensan que nada puede existir en vano, ni puede tener otro poder que no sea el de un principio; porque toda cosa o es un principio o proviene de un principio, pero del infinito no hay principio, ya que entonces tendría un límite. (Aristóteles, 1995, pág. 90)

Esta concepción griega que relaciona el infinito con lo ilimitado exclusivamente, obedece a su cosmovisión, a su forma de entender el mundo y por tal motivo debe ser superada con el propósito de que el conocimiento matemático avance hacia la construcción del nuevo espíritu científico. En consecuencia, al concebir que el infinito está más allá de lo que puede ser comprendido por los sentidos los lleva a profundizar en su esencia; por ende, la concepción del infinito también desencadena un obstáculo sustancialista, el cual será

---

[5] (Bachelard G. , 2000, pág. 27)

comentado más adelante.

En síntesis, el conocimiento adquirido mediante la observación primera, obstaculiza la construcción de nuevo conocimiento, pues es pasional, superficial y un poco novelesco, se conforma con lo que se percibe, no permite, profundizar, indagar, generar nuevas preguntas, situación que detiene la formación de un verdadero espíritu científico.

2.3.2 El Conocimiento General.

Según Bachelard "*aun siguiendo un ciclo de ideas exactas, puede advertirse que la generalidad inmoviliza el pensamiento.*"[6] El conocimiento no debe ser encasillado dentro de una sola ley, pues lo convierte en impreciso y estático. Generalizar el conocimiento lleva a relacionar los hechos de la misma manera e impide particularizar, obstaculizando la capacidad creadora de los individuos. La generalización está presente en muchos contextos del quehacer matemático, por ejemplo en expresiones de la forma; "para todo….", "ningún…" hacen relación a una propiedad de estricto cumplimiento para cada elemento de un conjunto determinado. Este tipo de exigencia puede llevar a dificultar la búsqueda de nuevos problemas que se originen en el análisis particular de una determinada situación.

Un conocimiento general propende por la unificación, la uniformidad y por lo tanto rechaza lo diferente, las anomalías, y termina por aceptar solamente respuestas antes de generar preguntas, lo que claramente, puede detener el desarrollo del espíritu científico.

Por ejemplo, la concepción griega respecto al infinito fue generalizada a partir de la teoría aristotélica, base sobre la cual solo podía ser aceptado el infinito en potencia. Esta forma de aceptar el infinito llevó a que los pensadores de la época y de épocas posteriores se alinearan bajo esta forma de pensar, en ese sentido, solo una ruptura respecto a la forma como generalmente era aceptada la manipulación del infinito, potenciaría la evolución del conocimiento matemático, particularmente el concepto de la integral definida.

---

[6] (Bachelard G. , 2000, pág. 69).

2.3.3 Obstáculo Verbal.

Explicar un determinado fenómeno a partir de una imagen o palabra, aparentemente puede tener sus aspectos positivos como una estrategia inicial para la comprensión de un concepto, pero esta situación puede generar dificultades en la medida de que si un hecho o un concepto siempre es asociado a una imagen familiar, fácil de entender, no será posible conocer los aspectos detallados de dicho concepto, y realizar indagaciones más profundas que permitan concepciones más elaboradas. La palabra, la retórica o el lenguaje utilizado en un determinado momento obstaculiza la formación del espíritu científico, en ese sentido la construcción de un lenguaje adecuado permitiría evadir este obstáculo.

La carencia de un lenguaje apropiado es un obstáculo en el progreso del conocimiento matemático. Así, el contar con un lenguaje estrictamente retórico dificultaba el avance de la disciplina, pues obligaba a que se realizaran extensos e intrincados procesos para obtener algún resultado. En consecuencia, el surgimiento de símbolos en los desarrollos matemáticos determina una ruptura epistemológica con el conocimiento común, establecido desde la cultura griega. Si bien, la geometría analítica de Descartes potencializa los trabajos matemáticos al dinamizar la forma como se solucionaban los problemas desde un punto de visto algebraico, lo que claramente marca una ruptura epistemológica en el desarrollo del conocimiento matemático, aun se hacen necesario establecer una serie de conceptos y por tanto una simbología adecuada para llegar a definir formalmente el concepto de la integral definida, situación que debe ir evolucionando hasta lograr la instauración definitiva del análisis matemático

2.3.4 Conocimiento Unitario y Pragmático.

Unificar el conocimiento es propio del pensamiento pre científico; buscar un principio totalizador que encierre todas las teorías, termina por acabar con la diferencia, simplifica la realidad y al mismo tiempo elimina la posibilidad de encontrar objetos de estudio que no estén al alcance del conocimiento unificado.

La unificación se presenta como obstáculo en el progreso de las matemáticas, en el momento en que la geometría es asumida como el elemento totalizador de todo conocimiento matemático. De acuerdo con el pensamiento griego se hacía necesario encontrar un mecanismo que estuviera por encima de todo saber cotidiano o conocimiento vulgar. De esta manera, los desarrollos geométricos permiten establecer un carácter riguroso para encontrar la solución a diferentes tipos de problemas. En la cosmovisión griega, la geometría era sinónimo de verdad, por tal motivo, lo que de ella se derivaba era asumido como una verdad incuestionable y "*eterna*".

De esta manera, un conocimiento era considerado científico si podía ser demostrado geométricamente, situación que obligaba a que los pensadores no se apartaran de los desarrollos geométricos a pesar de lo complicados y extensos que estos llegaran a ser. Un ejemplo que se puede presentar al respecto a lo aquí mencionado es la necesidad que expone Arquímedes de realizar la demostración de la cuadratura del segmento parabólico mediante el método exhaustivo (método avalado por la geometría), al considerar que el método mecánico no garantizaba las condiciones de rigurosidad exigidos por la época.

Otro aspecto que se debe tener en cuenta para identificar el carácter totalizador de la geometría griega, el cual puede ser considerado como un obstáculo en el desarrollo del conocimiento matemático, es la capacidad que esta brinda de "definir" y "delimitar" y por lo tanto, no los conduce a situaciones de ambigüedad como las que les genera el "horror al infinito". En este sentido, la geometría constituye una zona de confort, un obstáculo que en algún momento se debe romper, con el propósito de buscar nuevas estrategias y métodos que permitan que la ciencia matemática avance.

Por otro lado, establecer la construcción del conocimiento exclusivamente a partir de su carácter pragmático, es también un foco generador de problemas para la fundamentación del conocimiento científico pues lo que es útil para unos puede ser inútil para otros y de este modo, los estudios o las investigaciones caerían en un alto grado de subjetividad.

Al respecto, en el campo matemático nos encontramos con la concepción de infinitesimal, noción que los matemáticos o pensadores de diferentes épocas no lograban argumentar de forma sólida, sin embargo, les permitía solucionar problemas de una manera práctica. Desde la mirada de Bachelard esta situación constituiría un obstáculo, ya que la utilidad tranquiliza y al mismo tiempo impide que se busque la razón última de las cosas. Es decir la utilidad es quien explica. Respetando la concepción de Bachelard se considera que este carácter útil que encuentra Newton o Leibniz en las cantidades infinitamente pequeñas permite que el conocimiento matemático avance en el sentido que potencia el descubrimiento y la creatividad. Entonces, a partir de la implementación de los infinitesimales logran solucionar el problema del cálculo de cuadraturas y anti cuadraturas, problema anclado al interior de las matemáticas durante un largo periodo de tiempo.

De la misma manera, la aplicación de las cantidades infinitamente pequeñas, permitió la construcción de algoritmos, métodos y estrategias para solucionar problemas satisfactoriamente. Otro ejemplo de aplicación de los infinitesimales sin preocupaciones de tipo ontológico, son las realizadas por Euler en el momento de desarrollar funciones en series de potencias o en la solución de ecuaciones diferenciales planteadas por los hermanos Bernoulli, situaciones que nos permiten indicar que esta forma de hacer matemáticas, antes de dificultar su progreso, brindar alternativas que permitan su desarrollo.

2.3.5 Obstáculo Sustancialista.

Buscar la esencia de las cosas implica un esfuerzo ilimitado de la capacidad intelectual del hombre, al querer profundizar en el núcleo mismo de los objetos, genera un desequilibrio entre la razón y la experiencia. La situación anterior revela que al querer llegar a lo más diminuto, a la parte interior de los fenómenos, hechos o conceptos, sólo termina por generar un desgaste en la búsqueda de un verdadero conocimiento.

(Juárez Zaragoza, 2006) Comenta que “al realizar un psicoanálisis a la formación del conocimiento objetivo, salen a la luz las posturas que cada época prioriza, pero de igual manera se manifiestan en forma clara sus miedos, su posición cómoda y sus errores”. En consecuencia, es importante regresar al pasado para identificar los obstáculos epistemológicos que se generan en la evolución de un determinado concepto.

Como todos los obstáculos, el sustancialista puede asumir diferentes formas por lo tanto, se puede encontrar sustancialismo de lo oculto, de lo íntimo o de lo evidente, de tal manera, que el conocimiento se puede ir hacia el interior, olvidando que lo externo también tiene un nivel de importancia, solo se busca penetrar para llegar a lo profundo o el sustancialismo de lo evidente que siempre encuentra las respuestas o las explicaciones menos elaboradas, generalmente se inclina por lo simple y lo sencillo.

En la concepción Griega observamos incidencia de este obstáculo con respecto al infinito a partir de Aristóteles, quien consideraba que el infinito estaba relacionado con el tiempo y el espacio, y por tanto, lo identificaba como ilimitado. Por consiguiente, se le asignaron unas características que lo diferencian de cualquier otro tipo de concepto por ejemplo, el considerarlo como un "principio" implica que no tiene límite, que no es creado y que tampoco puede ser destruido. Este tipo de consideraciones metafísicas, llevó a que se rechazara completamente el infinito actual situación que derivó en el conocido "*horror al infinito*" en la cultura griega.

La concepción de infinito trascendió de tal manera en el pensamiento griego, que incluso se evitaba mencionarlo, una muestra que referencia lo anterior se presenta en *Los Elementos* de Euclides en la proposición 20 del libro IX cuando indica que: "*Hay más números primos que cualquier cantidad propuesta de números primos*" (Euclides, 1991, pág. 226). En esta proposición se asume el infinito potencial, pero no se hace alusión explicita al mismo por los problemas de carácter filosófico que les puede generar la inclusión del infinito en los planteamientos matemáticos.

Aristóteles, quien finalmente instaura la línea de pensamiento que se debe seguir respecto al infinito, considera que aceptar el infinito en acto, seria aceptar que es una magnitud y que en consecuencia se puede medir y comparar lo que a la luz de la razón es carente de toda lógica:

> Es también evidente que no es posible que lo infinito exista como un ser en acto o como una substancia y un principio. Porque cualquier parte que se tome de él sería infinita, si es divisible en partes (ya que si lo infinito es una sustancia y no un atributo de un sujeto, la esencia del infinito sería lo mismo que lo infinito). Por consiguiente, será o indivisible o divisible en partes infinitas. (Aristóteles, Física, 1995, pág. 93) ,

Buscar la esencia del infinito más allá de lo que podía ser entendido por la razón, profundizar en consideraciones respecto a su naturaleza, generó un obstáculo en el pensamiento griego. Sin embargo, los griegos no fueron los únicos que tuvieron este tipo de motivaciones; por ejemplo, Tomas de Aquino siglos después de Aristóteles o el mismo Descartes relacionaron el infinito con la idea de Dios. En este sentido, se hacen necesarias rupturas que corten con este tipo de pensamiento y que permitan que el conocimiento matemático avance.

2.3.6 Obstáculo Realista.

El realismo es considerado por Bachelard como uno de los principales obstáculos, pues el realista acepta las cosas como se ven y en esa medida, no investiga, no innova, ni enseña. El obstáculo realista subvalora la esencia de las cosas, afirma las respuestas y no se preocupa por las preguntas, en consecuencia detiene la formación del espíritu. La idea que referencia este obstáculo es la de "*poseer mucho en un pequeño volumen*" (Bachelard G. , 2000, pág. 155)

La geometría instaurada por los griegos, sin desconocer su profundidad y lo riguroso de los resultados, establece también un obstáculo de carácter realista. Al tener profundas dificultades con lo "ilimitado" o "indefinido" encuentran en la geometría un mecanismo para definir y delimitar así, solamente es aceptado aquello que pueda ser construido con regla y compás, definiendo el paradigma en el proceder matemático. De acuerdo a lo anterior, solo aquello que podía ser representado geométricamente lograba ser aceptado al interior del campo matemático, limitando los trabajos que pudieran encaminar investigaciones en otras direcciones.

2.3.7 Obstáculo Animista.

El obstáculo animista se caracteriza por la capacidad que tiene el pensamiento de atribuir propiedades de los seres vivos a todas las cosas:

> A las trabas casi normales que encuentra la objetividad en las ciencias puramente materiales ha de agregarse una intuición enceguecedora que toma la vida como un *dato* claro y general. (Bachelard G. , 2000, pág. 176)[7]

[7] Citado por (Goméz M, 2015)

A través del tiempo las diferentes culturas le asignan a los seres inanimados características de los vivos, por ejemplo cuando al realizar una investigación respecto a los minerales se concluye que estos están enfermos. Este tipo de aseveraciones no corresponden a explicaciones que se les pueda atribuir un status de cientificidad y por lo tanto la evolución del conocimiento científico, se detiene.

2.3.8 Obstáculo Cuantitativo.

El obstáculo cuantitativo, opuesto diametralmente al obstáculo cualitativo inmediato, está caracterizado por abusar de los sistemas de medidas tanto por exceso como por defecto. Precisar una medida, depende del objeto que se mide y del instrumento empleado para medir, y en algunas ocasiones el afán de aproximar adecuadamente hace que el científico se preocupe más por la medida que por el objeto o el fenómeno que está midiendo. Esta situación le resta posibilidades al desarrollo de la ciencia puesto que opaca el fenómeno de estudio, al respecto Bachelard afirma que "hay que reflexionar para medir y no medir para reflexionar" (Bachelard G. , 2000, pág. 255)

Con la exposición de estos obstáculos Bachelard presenta la ciencia en constate movimiento, cuya evolución está directamente relacionada con la capacidad que tenga para identificar barreras y rectificar sus errores. Por lo tanto, quien esté interesado en apoyar la formación del espíritu científico debe estar vigilante y atento, en disposición de analizar continuamente los diferentes conceptos que impiden el desarrollo de las diferentes teorías y buscar alternativas que permitan superarlas.

El papel de las matemáticas en la evolución de las diferentes disciplinas científicas es trascendental desde la concepción de Bachelard, motivo por el cual, en la siguiente sección se expone la forma como esta disciplina se presenta en el pensamiento del filósofo Francés.

2.4 Bachelard y las matemáticas.

El espíritu, todo aquello que está más allá de lo natural, lo que puede ser considerado como resultado de la construcción humana, Bachelard lo relaciona con la palabra "*fenomenotécnica*" la cual está conformada por las palabras "*fenómeno*" y "*técnica*", donde la primera hace alusión al objeto que estudia la ciencia, y la segunda hace referencia a los recursos que son utilizados para estudiar dicho fenómeno. Con la palabra fenomenotécnica, Bachelard quiere indicar que los "fenómenos científicos" tienen un doble carácter: que son teoría y que son técnicas a la vez, en otras palabras, el resultado del trabajo de los hombres de ciencia. (Goméz M, 2015)

Es precisamente en la concepción del segundo término donde Bachelard demuestra lo fundamental de las matemáticas en su teoría. Para (Goméz M, 2015):

> Bachelard entiende por noúmeno la posibilidad de pensar los fenómenos, esa posibilidad no se alcanza más que reconociendo la estructura matemática que subyace a los fenómenos. (Goméz M, 2015, pág. 82)

De esta manera el concepto de fenomenotécnica, de gran importancia en el desarrollo de la teoría de Bachelard, en cuanto brinda unas características que permiten entender la evolución de la ciencia y entre una de ellas establece que las matemáticas son la esencia del conocimiento científico.

> El papel de las matemáticas en la física contemporánea sobrepasa pues notablemente la simple descripción geométrica. El matematismo ya no es descriptivo sino formativo. La ciencia de la realidad no se conforma ya con el cómo fenomenológico: busca por qué matemático. (Bachelard G. , 1938, pág. 7)

Sin embargo, llama la atención que en sus diferentes análisis sobre diferentes disciplinas científicas no incluya a las matemáticas, situación que nos conduce a cuestionar la posibilidad de que para Bachelard las matemáticas no fueran una ciencia, sino, la herramienta fundamental que permitía estructurar y darle el carácter racional a las ciencias de la naturaleza.

Desde el punto de vista de Bachelard debe existir una relación muy cercana entre quien se interesa en la evolución del conocimiento científico y las matemáticas, pues sobre estas últimas reposa la obligación de estructurar de manera rigurosa los fenómenos derivados de la experiencia.

Las matemáticas son imprescindibles en la concepción Bachelardiana del desarrollo científico, pues establecen datos precisos, estructurados y rigurosos; cuyo objetivo es brindar bases teóricas, para que quienes se dedican a experimentar no se pierdan en interpretaciones y juicios personales, que de alguna manera los alejen de verdaderas construcciones científicas.

El hombre diurno, al que hace referencia Bachelard en sus diferentes escritos, es un hombre racionalista por excelencia, capaz de mantener una constante relación con las ecuaciones matemáticas, un hombre que más allá de interesarse por lo real, siente una gran motivación por dedicar sus horas de vigilia al mundo de la razón. Para Bachelard el verdadero científico, no mide, no pesa, no cuenta, contrario a esto, generaliza a través de ecuaciones matemáticas.

> Se sigue repitiendo que la ciencia es el reino de la *cantidad,* que el físico no está seguro más que de lo que *mide,* que el químico no está seguro más de lo que pesa, que el matemático no está seguro más que de lo que cuenta. Ahora bien, medir, pesar, contar no son a menudo sino operaciones de verificación. En el fondo, el científico piensa más *ecuaciones algebraicas* que *soluciones numéricas*. Comprender un fenómeno no es medirlo en los coeficientes de particularidad sino establecer su *ecuación algebraica* con coeficientes *indeterminados,* de manera que el fenómeno considerado pase al simple rango de ejemplo de un fenómeno general. (Bachelard G. , El racionalismo aplicado, 1979, págs. 188-189)

Es el caso de quienes trabajan en el desarrollo de la física, pues deben propender por establecer una relación mental entre lo concreto y lo abstracto, lo concreto derivado de la experiencia sensible y lo abstracto dirigido hacia la rigurosidad que solo puede ser brindada por la incuestionable estructura matemática.

> El contacto experiencia y matemática se desarrolla en una solidaridad que se propaga. Cuando es la experimentación la que proporciona el primer mensaje del fenómeno nuevo, el teórico no dejará de modificar la teoría reinante para que se pueda asimilar el nuevo hecho. (Bachelard G. , El racionalismo aplicado, 1979)

El teórico al cual hace referencia Bachelard, debe ser un "matemático", aquel sobre el cual debe recaer la obligación de buscar en las diferentes teorías la más débil, aquella que pueda ser modificada con el objetivo de estructurar el nuevo fenómeno. Es tanta la influencia ejercida por la disciplina de los números y de las abstracciones en el pensamiento del filósofo francés, que llega a postular que "el experimentador se felicita de que la matemática asimile su descubrimiento".

La capacidad racionalista de los hombres de ciencia debe estar relacionada con la manera cómo se producen las matemáticas. La ciencia es abstracción y debe establecerse en términos de la razón, siendo las matemáticas el mejor ejemplo de la racionalidad.

Un último aspecto que demuestra la supremacía que Bachelard les asigna a las matemáticas puede ser evidenciado en su libro *El compromiso racionalista*:

> Esa positividad absoluta del progreso científico aparecerá como innegable si examinamos la historia de una ciencia modelo, la historia de las matemáticas. Aquí es bien evidente que no se puede describir una decadencia, pues una disminución en la coherencia de las verdades seria inmediatamente un error. Si la historia de las ciencias relatara los errores que pueden cometerse después de los descubrimientos de la verdad matemática, sería una historia de malos alumnos en matemáticas y no la historia de verdaderos matemáticos. (Bachelard G. , El compromiso racionalista, 1973, pág. 152)

El párrafo anterior permite dilucidar la importancia que Bachelard encontraba en las matemáticas y su historia, para él encontrar un punto de quiebre en la historia del desarrollo matemático era algo similar a transgredir la razón y la estructura lógica sobre la que se fundamentaba el conocimiento científico. Para Bachelard el conocimiento matemático está dado y sólo debe ser estructurado por quienes de verdad tengan la capacidad de hacerlo.

Esta visión racionalista de las matemáticas, transforma la disciplina, en una ciencia elitista y dura de aprender, le otorga un estatus elevado en comparación con las otras disciplinas científicas, limitando su estudio casi que de forma discriminatoria a un selecto grupo de personas.

Este tipo de postura advierte que para poder profundizar en el campo matemático, se hace necesario contar con una serie de habilidades que no están al alcance de todos los individuos, olvidando que las matemáticas al igual que cualquier otra disciplina científica son producto de la construcción humana.

El racionalismo de Bachelard no considera que las matemáticas al igual que las ciencias de la naturaleza se desarrollen en términos de obstáculos. Para él; "*la historia de las matemáticas es una maravilla de regularidad, ella conoce pausas. Ella no conoce de periodos de errores*". (Bachelard G. , 2000)

Es así como las matemáticas, a través de la historia, se transformaron en sinónimo de exactitud y de abstracción, el instrumento propicio para estructurar y fundamentar las ciencias más allá de la experiencia, situación que organiza el progreso matemático de una manera ideal, sin sobresaltos, donde cada uno de sus conceptos se encuentran tan bien encajados que conduce a que estos, sean aceptados como verdades irrefutables.

Sin embargo, en el presente trabajo de investigación se considera que el desarrollo de las teorías matemáticas no se presenta de manera rígida y lineal tal como lo expone el racionalismo Bachelardiano. Por lo tanto, se hace necesario combatir el mito de unas matemáticas endiosadas, que se ubican por encima de todas las ciencias y que terminan por alejarla de todas las situaciones que obstaculizan su desarrollo.

Tal como lo plantea Lakatos, las matemáticas son *cuasi-empíricas* y en oposición a la postura racionalista de Bachelard, postula que su origen y su método están estructurados a partir de la experiencia por lo tanto, podemos seguir una línea de pensamiento en la que el desarrollo de las matemáticas se comportan de manera similar al de las ciencias de la naturaleza.

Desde esta perspectiva y a pesar de la posición de Bachelard sobre las matemáticas, su teoría nos proporciona una herramienta de análisis histórico en términos de obstáculos, la cual nos permitirá clarificar el proceso evolutivo de la noción de la integral definida.

2.5 Didáctica y obstáculos epistemológicos.

En la presente sección se pretende dar a conocer las relaciones que se pueden establecer entre los obstáculos epistemológicos y la didáctica.

En la *formación del espíritu científico* Bachelard ubica los obstáculos epistemológicos al interior de las teorías, como en el *campo educativo*. En el campo educativo se generan los obstáculos cuando las diferentes prácticas conducen a una enseñanza fundamentada en que los conocimientos científicos se deben asumir como verdades absolutas, cuya orientación debe ser direccionada desde un modelo único y lineal.

El aceptar el desarrollo científico según este modelo puede tener sus implicaciones en el campo educativo, pues desde esta perspectiva la enseñanza se realiza mediante la acumulación de contenidos.

Esta situación asume que todos los estudiantes aprenden bajo las mismas condiciones y que al estar en determinado grado del colegio o el haber matriculado algún curso en la universidad garantizaría que la persona interesada por adquirir nuevos conocimientos, trae consigo toda una armazón de conceptos que le debe facilitar su proceso de aprendizaje.

Cuando un docente se dedica a seguir directamente las orientaciones de un libro de texto, puede limitar la enseñanza a un proceso de constantes repeticiones y por lo tanto espera que el estudiante simplemente acepte y reproduzca conceptos. Esta situación puede generar problemas para la apropiación del conocimiento en los estudiantes y que lleva a que el profesor "*no comprenda que no se comprende*" [8] pues este tipo de postura, considera a los aprendices como un receptáculo que debe ser llenados de información, los estandariza la enseñanza, desconociendo los obstáculos que afectan la apropiación de nuevo conocimiento.

Bachelard sostiene que el verdadero progreso científico sólo puede darse en la medida que haya una ruptura con las concepciones establecidas, romper con aquellas ideas que generan algún tipo de adormecimiento intelectual en quienes se acostumbran nicamente a confirmar lo que ya saben; no cuestionan, ni generan de nuevas preguntas, posturas que definitivamente no permiten ampliar el conocimiento. Según Bachelard: "…*el progreso científico manifiesta siempre una ruptura, perpetuas rupturas, entre conocimiento común y conocimiento científico.*"[9]

Generalmente, a partir de nuestras prácticas pedagógicas desde el modelo de enseñanza tradicional o conductista, les hemos otorgado un carácter pasivo a los estudiantes frente a

---

[8] (Bachelard G. , 2000)

[9] Citado por (Martínez Velasco, 1992, pág. 85)

su proceso de aprendizaje, los acostumbramos a adoptar los conocimientos casi por mandato. Este tipo de estrategias educativas son opuestas a los planteamientos de Bachelard, pues un estudiante conformista; que se limite únicamente a repetir lo que el docente le imparte, no logra desarrollar un verdadero espíritu científico.

Ahora bien, la postura del docente generalmente se deriva de la manera como a él le enseñaron y en el desarrollo de su práctica pedagógica asume alguno de los modelos de enseñanza implementados por el conductismo: los teoricistas y los tecnicistas.

En palabras de Gascón:

> Los modelos docentes teoricistas y tecnicistas comparten una concepción psicologista ingenua del proceso del proceso didáctico que tiene en el conductismo su referente más claro. En ambos casos, se concibe el proceso de enseñanza como algo mecánico y trivial, totalmente controlable por el profesor. (Gascòn, 2000, pág. 136)

Los modelos teoricistas y tecnicistas, también denominados modelos clásicos por Gascón, son el resultado de la apropiación del *euclideanismo* como él modelo epistemológico mediante el cual se busca interpretar el saber matemático.

El *teoricismo* considera al estudiante como un receptáculo que debe ser llenado mediante las diferentes teorías matemáticas, donde las clases inician y terminan en las consideraciones del profesor. Este modelo no considera la génesis histórica de los conceptos matemáticos, pues los considera como verdades absolutas ubicadas fuera de todo contexto.

Por otro lado, el modelo tecnicista considera al estudiante como un "*autómata*" cuya función es la de repetir procesos para mejorar las técnicas, lo que generalmente lo transforma en un estudiante dedicado a la implementación de algoritmos, privilegiando las operaciones sobre cualquier aspecto formativo.

De esta manera, cuando el *euclideanismo* es aceptado explícita o implícitamente, como el modelo epistemológico del saber matemático, los encargados de su enseñanza llevan a que los estudiantes sean pasivos frente a su aprendizaje, circunstancia que de ninguna manera contribuye a la formación del verdadero espíritu científico por parte de los educandos.

La enseñanza de las matemáticas desde el modelo racionalista ha llevado a transformar la disciplina en una ciencia dura y fría, ha logrado enaltecerla al nivel de “madre de todas las ciencias”, situación que la ha estigmatizado generando una fuerte resistencia por quienes se ven enfrentados a su estudio. Esta forma de ver las matemáticas, limita su estudio al aprendizaje de una serie de algoritmos por medio de la repetición, procesos mecánicos y poco reflexivos que no contribuyen con una verdadera apropiación de los conceptos matemáticos.

Por este motivo, es importante buscar alternativas diferentes a los modelos tradicionalistas de enseñanza, invitar a los docentes de colegios y universidades a prepararse de forma permanente, a enseñar sin dejar de aprender, incentivar una mentalidad crítica en sus estudiantes y finalmente a buscar que desde sus orientaciones al interior del salón de clase, se logre contribuir en la formación del espíritu científico de cada uno de sus estudiantes.

En esta búsqueda de herramientas que permitan hacer de las matemáticas una disciplina más accesible encontramos en la historia una gran aliada.

En palabras de De González Urbaneja:

> Normalmente la historia nos proporciona una magnifica guía para enmarcar los diferentes temas, los problemas de los que han surgido los conceptos importantes de la materia, nos da luces para entender la razón que ha conducido al hombre a ocuparse de ellos con interés. Si conocemos la evolución de las ideas de las que pretendemos ocuparnos, sabremos perfectamente el lugar que ocupan en las distintas consecuencias, aplicaciones interesantes que de ellas han podido surgir, las teorías recientes que de ellas se han derivado (…) (González Urbaneja, Febrero 2004, pág. 18)

Así, el uso de la historia de las matemáticas es enriquecedor en la medida que permite conocer los aspectos que motivaron el desarrollo de los diferentes conceptos matemáticos, cómo evolucionaron a través del tiempo, además de los problemas que pretendían solucionar.

Sin embargo, no solo el proceso evolutivo de los conceptos es importante, pues desde los estudios históricos las matemáticas se pueden entender como una obra de construcción humana, que admite lugar al error, y lo más importante, permite superarlo: "*La matemática como ciencia humana no endiosada, a veces penosamente reptante y en ocasiones falible, pero capaz de también de corregir sus errores*" (Gil Perez & De Guzmán Ozámiz, 2001, pág. 70).

De esta manera, la historia muestra que los conceptos matemáticos no solamente deben ser vistos como objetos estrictamente abstractos, verdades absolutas que emergen desde las sombras y que deben ser aceptados por quienes estén interesados en profundizar en esta disciplina; también permite conocer la forma como se desarrollan cada uno de estos conceptos y los obstáculos que tuvieron que superar hasta lograr constituirse al interior de una teoría, hechos que deben ser relevantes para quienes están dedicados a la implementación de procesos de enseñanza y aprendizaje de esta disciplina.

(Gil Perez & De Guzmán Ozámiz, 2001) indican que ante la necesidad de involucrar la historia de las matemáticas en el ambiente educativo, organismos internacionales como el National Council of Teachers of Mathematics establecen niveles para su implementación; entre ellos el nivel lógico, el cual expone cómo los científicos y matemáticos desarrollaron las distintas teorías (la evolución del concepto de integral definida por ejemplo) y dan a conocer qué tipo de problemas los motivaron a desarrollar los conceptos, además de identificar los diferentes obstáculos a los que se debieron enfrentar para lograr la constitución del conocimiento matemático.

En consecuencia, un análisis histórico epistemológico del concepto de la integral definida permite conocer su génesis histórica, además identifica cómo la teoría que se origina en su evolución es aceptada por diferentes pensadores, teorías que en muchas ocasiones deben ser reestructuradas con el propósito de que la disciplina avance. Luego, conocer estos hechos históricos permite evidenciar cómo a través de las diferentes épocas se originan obstáculos y rupturas que afectan la construcción del conocimiento matemático, situación que puede ser utilizada para el provecho de la didáctica de las matemáticas como una estrategia que este direccionada a que los estudiantes fortalezcan su espíritu científico.

Los educadores matemáticos interesados en buscar soluciones a los problemas que se generan en los procesos de enseñanza y aprendizaje de su disciplina, pueden establecer algunas analogías entre los obstáculos epistemológicos a los que se deben enfrentar quienes se dedican a la construcción de nuevas teorías matemáticas, con los obstáculos con los que se encuentran los estudiantes que están interesados en la apropiación de nuevos conceptos matemáticos.

Según (Juárez Zaragoza, 2006):

> Realizar el perfil epistemológico de un concepto significa rastrearlo en sus diversos momentos y en sus diversas aplicaciones para hacernos conscientes de las virtudes de cada uno, pero sobre todo de sus carencias e impulsar al concepto por caminos no recorridos, no experimentados. (Juárez Zaragoza, 2006, pág. 136)

Para el autor de la formación del espíritu científico; "*comprender y hacer comprender plantean una misma exigencia*", situación que se reflejará en el desarrollo del presente trabajo, pues si bien es de carácter epistemológico, también busca identificar aspectos que puedan ser útiles en el campo educativo. Lo anterior, con la idea de contribuir con investigaciones que estén interesadas en la enseñanza de las matemáticas, investigaciones interesadas en determinar alternativas mediante las cuales el docente logre "hacer comprender" de una manera más eficaz las diferentes nociones matemáticas.

En el campo educativo algunos obstáculos se derivan de la relación entre el estudiante y el profesor, en mayor medida cuando el profesor "*no comprende que no se comprende*"[10]cuando el docente cree que la clave está en la repetición de una lección, cuando se tiene la concepción de que los procesos memorísticos y repetitivos van a permitir que los estudiantes se apropien de manera adecuada de los diferentes conceptos.

Bachelard a partir de algunos de sus escritos permite inferir la importancia de la práctica pedagógica, el docente no puede esperar que el estudiante se apropie del conocimiento por simples reproducciones por ejemplo, cuando hace la reflexión de que "*el hecho de que una*

---

[10] (Bachelard G. , 2000)

demostración se repita muchas veces punto por punto”[11] no es garantía de que el estudiante la comprenda.

Es importante que el docente este en movilización constante, que desde su interés propenda por el enriquecimiento de su práctica pedagógica, una práctica que esté direccionada a entender cómo se generan las teorías, que obstáculos se ha generado en su desarrollo y lo más importante, cómo se ha logrado superarlas.

Los estudiantes, a diferencia de ser una hoja en blanco sobre la cual el “maestro” puede plasmar sus pinceladas de conocimiento, traen una serie de nociones y creencias que son difíciles de desarraigar y que en determinado momento dificultan la construcción de nuevo conocimiento.

De acuerdo con Bachelard, el profesor no puede asumir una posición radical, fundamentada en su capacidad intelectual, hacerse dueño del conocimiento, generando en el estudiante algún tipo de sometimiento intelectual.

Esta visión del maestro tradicionalista no da lugar al error desde un punto constructivo, donde las diferentes reflexiones que a partir de ellos se pueden generar, permitan colocar la cultura científica en un movimiento continuo y dinámico que lo lleve a evolucionar de manera permanente.

Por ende, es importante abandonar aquellos presupuestos ideológicos que nos encasillan al interior del tradicionalismo y entender que la construcción del conocimiento científico, en particular del conocimiento matemático, no se realiza mediante una armazón ordenada de aciertos. Por el contrario, el desarrollo de este tipo de conocimiento se origina a partir de constantes rupturas epistemológicas, y la evolución o diferentes “revoluciones” a las que se deben someter las diversas teorías, permiten que se rectifiquen errores o creencias que desde la sociedad son aceptadas como verdades absolutas.

---

[11] (Bachelard G. , 2000)

Acreditado por el desarrollo de la Teoría de Situaciones Didácticas y siendo conocedor de los trabajos implementados por Bachelard y Piaget, Guy Brousseau encuentra un nuevo sentido para los diferentes errores que se presentan en el momento de la apropiación de nuevos conceptos matemáticos.

Brousseau presenta una importante crítica a la forma como se establece la relación entre docente y estudiante, donde el segundo se torna pasivo frente al proceso de la construcción del conocimiento, pues sólo se limita a esperar que el profesor le enseñe, a recibir una serie de conceptos que aparecen como por arte de magia y que deben ser aceptados en la mayoría de las ocasiones de una manera impositiva.

Al interior de este esquema, el docente se preocupa por cumplir con un plan de estudios cuya dinámica esta direccionada a entregar al estudiante la mayor cantidad de conocimientos en el menor tiempo posible, buscando que el estudiante responda una serie de problemas mediante la aplicación de un conjunto de algoritmos que no le permiten obtener un aprendizaje significativo.

Como una disyuntiva a las situaciones mencionadas anteriormente, Brousseau propone que uno de los objetivos de la didáctica de las matemáticas debe estar direccionado a favorecer condiciones que permitan el rechazo de conocimientos previos que obstaculizan la apropiación de nuevos conocimientos, situación que en muchos de los casos termina en aprendizajes momentáneos que permiten adquirir algunas herramientas para la solución de problemas particulares, pero que definitivamente no apuntan a la construcción sólida y significativa del conocimiento.

Para el didacta francés, solo si el estudiante logra establecer una relación dialéctica entre sus conocimientos, es decir si los está revisando constantemente, modificando, reafirmando o simplemente rechazando los que ya no tienen un dominio de validez, podrá otorgarle un verdadero sentido al conocimiento.[12]

---

[12]Los obstáculos epistemológicos Hugo Barrantes. Transcripción de una conferencia del 25 de marzo de 2006.

A partir de los planteamientos anteriores Brousseau define la noción de obstáculo de la siguiente manera:

> El error y el fracaso no tienen el rol simplificado que en ocasiones uno quiere hacerles jugar. El error no es solamente efecto de la ignorancia, de la incertidumbre, del azar que uno cree en las teorías conductistas del aprendizaje, sino el efecto de un conocimiento anterior, que tenía su interés, su éxito, pero que, ahora, se revela falso, o simplemente inadaptado. Los errores de este tipo son erráticos e imprevisibles, están constituidos de obstáculos. Tanto en el maestro como en el alumno, el error es constitutivo del sentido del conocimiento adquirido. (Brousseau G. , 1999, pág. 170)

En este sentido, los errores cometidos por los estudiantes no pueden ser endosados únicamente a su falta de compromiso con el aprendizaje o la ignorancia de conocimientos previos, contrario a lo anterior, es su propio conocimiento, concepciones previamente establecidas las que obstaculizan la apropiación de nuevo conocimiento.

Por ejemplo, al realizar estudios sobre el producto entre números naturales, se puede observar que el resultado siempre es un número mayor. El estudiante construye ese conocimiento, lo apropia y su aprendizaje será significativo siempre y cuando lo utilice al interior del mismo contexto. Pero ese conocimiento adquirido y que en su momento tuvo validez puede transformarse en un obstáculo, cuando el estudiante necesite construir conocimiento a partir del producto de números racionales que estén entre cero y uno, pues el conocimiento anterior se va a tornar inadecuado para la solución de nuevos problemas que involucran este nuevo saber.

De acuerdo con lo anterior, un obstáculo es la manifestación de errores que no aparecen por casualidad ni espontáneamente; estos obstáculos aparecen constantemente y generalmente son derivados de un concepto o conocimiento anterior que tuvo su validez pero que en un nuevo contexto se torna inadecuado.

Finalmente, Guy Brousseau plantea una arqueología para investigar los obstáculos epistemológicos, la cual depende de su origen y se presentan a continuación:

Origen Ontogenético: Son los que sobrevienen del hecho de las limitaciones (neurofisiológicas entre otras) del sujeto en un momento de su desarrollo: el desarrolla conocimientos apropiados a sus medios y a sus objetivos.

Origen Didáctico: Son los que parecen depender únicamente de la elección de un proyecto o sistema educativo.

Origen Epistemológico: Son aquellos a los que no se puede ni se debe de escapar, del hecho mismo de su rol constitutivo en el conocimiento a que se apunta. Estos obstáculos se pueden encontrar en la historia misma de los conceptos[13].

En la caracterización presentada por Brousseau, los obstáculos de origen epistemológico hacen referencia a los obstáculos que pueden ser ubicados en la evolución histórica de los conceptos, de esta manera consideramos que los obstáculos definidos por Gastón Bachelard en la formación del espíritu científico para la física y la química pueden ser aplicados a las teorías matemáticas.

En el siguiente capítulo se presenta el análisis del concepto de la integral definida desde su origen primigenio en la antigua Grecia, hasta que se transforma en un objeto del análisis matemático en el siglo XIX. Se exhibe el infinito cómo un obstáculo epistemológico reiterativo en su desarrollo histórico, algunos otros obstáculos y las rupturas que permitieron evadirlos, identificando como el concepto que es objeto de nuestro estudio, evoluciona a través de diferentes épocas.

3 EVOLUCIÓN HISTÓRICA DE LA INTEGRAL DEFINIDA.

3.1 La antigüedad griega y el problema de las cuadraturas.

Históricamente el desarrollo de las matemáticas se ha realizado en forma paralela al progreso de las diferentes culturas, inicialmente sin más pretensiones que la de solucionar problemas que se les presentaban en su diario vivir. Un ejemplo de la situación anterior se puede observar en civilizaciones como la babilónica y la egipcia las cuales construían templos o delimitaban terrenos para cultivar; empleando la demarcación de superficies

[13]La arqueología de los obstáculos epistemológicos fue tomada del documento *los obstáculos epistemológicos y problemas en matemáticas* de Guy Brousseau.

mediante la aplicación de las matemáticas que tenían a su disposición que aunque sencillas, les brindaban alternativas de solución a problemas prácticos de su vida cotidiana.

Sin desconocer que civilizaciones como las anteriores jugaron un papel importante en el progreso del conocimiento matemático, la presente investigación iniciará con los aportes matemáticos realizados en la antigua Grecia, dado que al tener motivaciones más intelectuales que prácticas, la forma de abordar las matemáticas por parte de los griegos evidencia una clara intención de fortalecer su espíritu científico.

En Grecia se empieza a organizar y sistematizar un cuerpo teórico que permite establecer procesos formales de medición, más allá de los que eran obtenidos a través de la intuición. El establecimiento de la lógica y la aplicación de sus métodos los conducen a pensar las matemáticas de una manera diferente, donde el estudio formal de los conceptos y las relaciones que se establecen entre estos, les permiten caracterizar las matemáticas como una disciplina científica.

Desde esta nueva perspectiva las ideas intuitivas sobre las diferentes formas de medir van adquiriendo un sentido de rigurosidad[14] con la aparición de la geometría, cuyo estudio y progreso estuvo enfocado a la solución de tres problemas referentes a la medida: La duplicación del cubo, la trisección del ángulo y la cuadratura del círculo.

Buscar la solución a estos problemas tenía como objeto encontrar la medida de diferentes magnitudes, pretendían establecer formas de medir que se diferenciaran de los procesos de medición empírica directa, que les permitiera determinar longitudes como la altura de las pirámides, el ancho de un rio o la distancia entre un puerto y un barco, distancias que no podían ser calculadas a partir de situaciones experimentales.

Este tipo de motivaciones dieron paso al desarrollo de muchos de los conceptos matemáticos que conocemos en la actualidad, entre ellos el concepto de la integral, noción

[14] La rigurosidad que inicia con la cultura griega marcará la evolución del conocimiento matemático y en particular del concepto de integral definida.

que será también objeto de estudio.

Al investigar la cultura griega con el objetivo de analizar el cálculo de cuadraturas o el origen de la integral definida, debemos ubicarnos sobre dos épocas muy importantes: el Periodo Helénico y el Periodo Helenístico, siendo este último, el momento histórico cumbre en el desarrollo de las matemáticas griegas.

En el periodo helénico se realizaron una gran variedad de aportes a la construcción del conocimiento matemático. Pensadores como Tales de Mileto, Pitágoras, Platón, Hipócrates de Quíos, Eudoxo, entre otros filósofos y hombres de ciencia, fundamentaron sus teorías sobre la base de que los fenómenos naturales podían ser comprendidos mediante la razón, una nueva forma de entender el mundo en la que las matemáticas desempeñarían una importante labor. Es así como la matemática se constituye, en la cultura griega, como una disciplina con un método y objeto de estudio determinado, donde la demostración rigurosa de los resultados marcará un nuevo camino en la forma de fundamentar los conocimientos científicos.

A **Tales de Mileto** se le atribuyen las primeras demostraciones matemáticas, demostraciones que permitirían acreditar los resultados obtenidos como verdades inquebrantables, demarcando el camino que debería seguir la evolución del conocimiento de esta ciencia. **Pitágoras de Samos** uno de sus discípulos más sobresalientes funda una sociedad secreta a la que denomina los Pitagóricos, y siguiendo la línea de trabajo de su maestro se dedican a la búsqueda de la verdad a partir de una cosmovisión fundamentada en los números, en la que consideran que las matemáticas y sus propiedades eran la base de todo lo existente, asignándole al número la responsabilidad de ser el principio fundamental de la naturaleza.

Para los pitagóricos:

> Todos los objetos estaban hechos de partículas elementales de materia o "unidades de existencia" combinadas de acuerdo con las distintas figuras geométricas. El número total de unidades representaba, de hecho, el objeto material. El número era la materia y forma del universo. De ahí la doctrina pitagórica: "Todas las cosas son número" (Kline, 1985).

Los pitagóricos establecen que dadas dos magnitudes de medida distinta, es posible encontrar otra magnitud que sirva de medida común para ambas, en otras palabras, consideran que todas las magnitudes son conmensurables[15] y sobre esta base edifican toda su teoría matemática.

Para los pitagóricos los razonamientos geométricos se podían transformar generalmente en problemas aritméticos, realizaron importantes avances en la geometría del plano, al punto de llegar a considerar que todo podía ser medido. Sin embargo, dos de sus tópicos más importantes: el *Teorema de Pitágoras* y el *Pentagrama místico pitagórico*, les condujo a encontrar dos magnitudes para las cuales no era posible encontrar una medida común. En efecto, se toparon con que la diagonal del cuadrado de lado 1 no era conmensurable con su lado; lo mismo que sucedía entre la diagonal y el lado de un pentágono regular, situación que desencadenaría el primer gran problema al interior de las matemáticas griegas: la aparición de las magnitudes inconmensurables.

3.2 Los inconmensurables y el infinito.

La diagonal de un cuadrado, resultó siendo un objeto geométrico complejo para los pitagóricos, puesto que no les fue posible determinar un segmento que les sirviera de medida común entre ella y el lado del cuadrado es decir, encontraron dos magnitudes que no eran conmensurables, lo que propició un fuerte golpe a la estructura de las matemáticas que se conocían en ese momento, pues este hallazgo contradecía su teoría de que “Todas las cosas son número”. Este hecho desencadenó una ruptura en la relación que se había establecido entre la aritmética y la geometría, cuyo soporte radicaba en que todo podía ser medido a través de los números.

En efecto, cuando los pitagóricos se disponen a determinar la razón entre la diagonal y el lado de un cuadrado mediante la *antiphairesis*[16], se encuentran con un procedimiento que se

[15] se dice que las magnitudes A y B son conmensurables si existen dos números n y m, tales que $nA = mB$.

[16] La antiphairesis es el método de sustracciones sucesivas mediante el cual se encontraba la razón entre dos magnitudes.

extiende indefinidamente, situación que les permite demostrar[17] m n $mA = nB$, A B números enteros positivos m y n tales que $m^2 : n^2 = 2:1$, lo que es equivalente a $m^2 = 2.n^2$. En la demostración se aplica reducción al absurdo, pues a través de este método los griegos lograban evadir los procesos en los que se hacía necesario el uso del infinito. los procesos en los que se hacía necesario el uso del infinito. Los procesos en los que se hacía necesario el uso del infinito.

Demostración: Supongamos que existen números enteros positivos p y q los cuales satisfacen la igualdad

$$p^2 = 2q^2. \quad (I)$$

Entonces se pueden presentar los siguientes casos:

i p impar y q impar.
ii p impar y q par.
iii p par y q impar.
iv p par y q par.

Supongamos que se cumple (i). Puesto que p es impar, entonces p^2 es también impar, pero por (I), p^2 es par. Eso significaría que p^2 es par e impar, lo cual es una contradicción y por lo tanto no puede darse (i). Un argumento similar puede ser empleado para demostrar la imposibilidad de (ii).

No se puede dar (iii), puesto que si p es par, es de la forma $p = 2t$, donde t es un entero positivo. Reemplazando en (I) se tendría,

$$(2t)^2 = 2q^2$$
$$4t^2 = 2q^2$$
$$2t^2 = q^2$$

[17] La demostración de la inconmensurabilidad entre el lado y la diagonal de un cuadrado se realiza por reducción al absurdo, se supone que existen los números $m\ y\ n$ lo que lleva a una contradicción.

Lo cual significa que q^2 es par; pero como q es impar, entonces q^2 también es impar. De esta forma, q^2sería par e impar a la vez, lo cual es una contradicción.

No se puede dar (iv), pues si p es par, es de la forma $p = 2t_1$, donde t_1 es un entero positivo que es la mitad de p. Reemplazando en (I) se tendrá,

$$(2t_1)^2 = 2q^2$$
$$4t_1^2 = 2q^2$$
$$2t_1^2 = q^2 \quad \text{(II)}$$

Como q también es par, entonces $q = 2t_2$, donde t_2 es un entero positivo que es la mitad de q. Reemplazando en (II) y simplificando se tendrá que $t_1^2 = 2t_2^2$. Lo cual reproduce la misma situación inicial y, de acuerdo al proceso anterior, sólo queda la posibilidad que t_1 y t_2 sean pares. Eso significa que existe t_3, entero positivo, tal que $t_2= 2t_3$. De lo anterior se sigue que t_3 es la mitad de t_2 y, por ende, resulta de la división doble de p.

Podemos continuar indefinidamente el proceso anterior produciendo divisiones sucesivas tanto de p como de q. Sin embargo, esto no es posible pues dado que son números pares, en algún momento debemos llegar a 1 o a un número impar.

Como no se da ninguno de los cuatro casos anteriores quiere decir que no existen p y q enteros positivos tales que $p^2= 2q^2$. [18]

Adicionalmente, al conflicto creado por el descubrimiento de las magnitudes inconmensurables se le unió las inquietudes propiciadas por las paradojas de Zenón de Elea[19] respecto a la pluralidad y al movimiento; aporías que llevaron a una serie de contradicciones debido a la imposibilidad del movimiento generado a través de la división infinita.

---

[18] Demostración tomada de (Recalde, Lecciones de historia de la matemática, 2011)

[19]Paradojas como la de "*Aquiles y la tortuga*" que muestran la incoherencia lógica que presenta el movimiento cuando involucra procesos infinitos.

Es así, como los planteamientos de Zenón y la emergencia de las magnitudes inconmensurables conducen a contradicciones y problemas de tipo conceptual, cuyo origen radica en la manipulación del infinito, concepto que aunque de gran importancia en el campo matemático, generaría un impacto demoledor en las matemáticas de la cultura griega originando lo que más tarde sería denominado como el "*horror al infinito*".

La concepción griega del infinito está ligada su filosofía, a la forma de entender el mundo y sus orígenes, de tal manera que el infinito de Anaximandro, de los pitagóricos y del mismo Aristóteles es relacionado con la palabra " $\alpha\pi\varepsilon\iota\rho o\nu$" que significa "*sin límites*", identificando el infinito como todo aquello que pueda ser inagotable.

Esta inagotabilidad a la que hace referencia el infinito es donde radica su principal dificultad, pues para Aristóteles "*El infinito ($\alpha\pi\varepsilon\iota\rho o\nu$) no es aquello afuera de lo cual nada, sino aquello fuera de la que siempre hay algo*[20]", desde esta concepción los griegos están aceptando que algo es infinito siempre y cuando no admita ningún tipo de límites.

Frente a esta situación Aristóteles (383-322 a.C.), plantea la existencia del infinito desde dos perspectivas diferentes; un "*infinito potencial y un infinito actual*".

El infinito potencial se entiende como aquello que no puede ser enumerado, una operación reiterativa que no tiene límites, por ejemplo, la inagotabilidad que se encuentra en los números naturales; en la cual siempre se puede encontrar un número mayor por adición.

> Así pues, tenemos que determinar, ante todo, los distintos sentidos del término "infinito". 1) En un caso llamamos infinito a lo que es imposible recorrer, porque por su propia naturaleza no puede ser recorrido (como una voz, que es invisible); 2) en otros, lo que se puede recorrer, pero sin llegar a un término, o a) lo que difícilmente puede ser recorrido, o *b)* lo que naturalmente admite ser recorrido, pero no puede ser recorrido o no tiene límite. Además, todo lo que es infinito puede serlo o por adición o por división o por ambos. (Aristóteles, Obras, 1964, pág. 92)

[20] Citado por (Zellini Siruela, 1991, pág. 13)

El infinito actual considera el infinito en su totalidad, como una unidad, en otras palabras, un infinito acabado. Por ejemplo, la totalidad de los múltiplos de 5. Este infinito en acto fue tan problemático que Aristóteles niega su existencia desde su propia definición.

> Es imposible que los múltiples infinitos sean lo mismo; porque así como una parte de aire es aire, también una parte de lo infinito sería infinita, si lo infinito fuera una sustancia o un principio. Luego lo infinito tiene que carecer de partes y ser indivisible. Pero es imposible que un infinito actual sea así, pues tiene que ser una cantidad. Luego lo infinito existe como un atributo. Pero, si así fuera, ya se ha dicho antes que no se lo puede llamar principio, sino más bien a aquello de lo cual es atributo, como el aire o lo Par. (Aristóteles, Obras, 1964, pág. 94)

Él " $\alpha\pi\varepsilon\iota\rho o\nu$" de los griegos, en particular de Aristóteles siempre estuvo relacionado con incompletitud, como una tarea interminable que por más que se intentara realizar, nunca sería finalizada, en otras palabras, el infinito solo tomaría sentido si se pensaba en términos de su potencialidad.

Esta visión del infinito le implantaba una idea negativa que impedía la aceptación del infinito actual, pues lo "limitado" proporcionaba un carácter concreto a los objetos y establecía un orden lógico a cualquier sucesión de eventos, mientras que lo "ilimitado" ($\alpha\pi\varepsilon\iota\rho o\nu$) se oponía a lo concreto y en este sentido favorecía una evolución desordenada y carente de toda lógica, condiciones que no debería ser aceptadas al interior de la ciencia. (Zellini Siruela, 1991)

La forma de entender al infinito impuesta por los filósofos griegos, se mantendrá constante hasta que en el siglo XIX sea definida la noción de "limite" y se establezca una nueva perspectiva en el acontecer matemático.

La dicotomía entre el infinito potencial y el infinito actual se presenta al interior de las matemáticas, particularmente en la solución que presenta Antifón respecto a la cuadratura del círculo y que Aristóteles contradice de manera contundente, estableciendo la forma como deberían ser manipuladas las magnitudes de parte de los matemáticos. Antifón planteaba que:

> Un arco mínimo de circunferencia no se distingue de una mínima porción de línea recta y por consiguiente un polígono regular con un número infinito de lados no se distingue de una circunferencia[21].

De esta manera, si se inscribiera en el círculo un polígono regular de infinitos lados de forma tal que no existiera diferencia entre estos lados y los arcos de circunferencia, la circunferencia y el polígono deberían ser considerados iguales, lo que le permitía a Antifón llegar a la conclusión que el círculo podía ser cuadrado, pues para un polígono regular de una cantidad arbitraria de lados, siempre era posible encontrar un cuadrado equivalente.

Frente al planteamiento anterior, Aristóteles argumenta que el conjunto de polígonos inscritos es evidentemente un conjunto ilimitado, y por tal razón los argumentos presentados por Antifón carecen de todo tipo de solidez. Pues desde la perspectiva aristotélica no importa que tan grande sea la cantidad de lados muy pequeños que tenga el polígono regular, siempre será posible encontrar otro polígono cuyos lados sean más pequeños, lo que llevaría a un proceso inagotable. Por tal razón, por muy pequeños que sean los lados del polígono este nunca podrá ser igual a la circunferencia.

Es importante recordar que para Aristóteles el infinito es algo detrás de lo cual siempre se puede encontrar algo y aceptar la solución de Antifón equivaldría a aceptar "la existencia actual de la infinidad de los polígonos" lo cual sería carente de lógica, dado que entraría en contradicción con la concepción de la potencialidad del infinito.

Finalmente, la crisis que se originó con la aparición de los inconmensurables y el contradictorio infinito, llevó a dudar de la eficacia de las proporciones[22] como mecanismo de construcción de conocimiento, razón por la cual buscaron estructurar las matemáticas mediante la lógica platónica, estableciendo una geometría deductiva fundamentada en el

[21] Citado por (Zellini Siruela, 1991, pág. 28)

[22]La doctrina pitagórica de las razones enteras y las proporciones fundamentada en la creencia que dos segmentos de línea siempre iban a ser medidos por una unidad común, les permitió tener la idea de número como tamaño, lo cual aplicarían a las magnitudes geométricas como longitudes, áreas y volúmenes.

"*rigor*", de tal manera que no fuera necesario involucrar el problemático concepto del infinito.

La problemática generada por las magnitudes inconmensurables y las contradicciones que generaron las paradojas de Zenón de Elea respecto al infinito, fracturó notablemente la teoría de las proporciones establecidas por los pitagóricos como un medio eficaz de construcción de conocimiento fiable, y llevó imprescindiblemente a cuestionar la validez de todo aquello que hubiera sido demostrado bajo el argumento de que, dadas dos magnitudes siempre se podría encontrar una tercera, que serviría de medida común a las dos iníciales.

3.3 Eudoxo de Cnido el retorno a la certeza matemática.

Frente a la necesidad de retornar el nivel de fiabilidad al conocimiento matemático, Eudoxo de Cnido plantea una alternativa que permite que los desarrollos matemáticos recuperen su nivel de certeza, redimiendo la importancia de las proporciones en los desarrollos matemáticos y su utilidad en la edificación del conocimiento. Guardando los preceptos aristotélicos del infinito, pero ocultando su nombre con el objetivo de evitar los problemas y contradicciones a las que podría conducir su concepción.

Eudoxo formado en la escuela platónica encuentra una forma de evadir el problema que generaba la aparición de las magnitudes inconmensurables y la manipulación del infinito y lo hace a partir de tres aspectos; *una definición, un axioma y un método* (Gonzáles Urbaneja, 2008):

i. La definición, es presentada como la definición 5 del libro V de los elementos de Euclides y se enuncia de la siguiente manera:

> Definición V.5. : Se dice que una primera magnitud guarda la misma razón con una segunda que una tercera con una cuarta, cuando cualesquiera equimúltiplos de la primera y la tercera excedan a la par, sean iguales a la par o resulten inferiores a la par, que cualesquiera equimúltiplos de la segunda y la cuarta, respectivamente y tomados en el orden correspondiente. (Euclides, Elementos X-XIII, 1991, pág. 11)

En palabras de (Puertas, María Luisa) la definición anterior es considerada como "*la piedra angular de la proporción. Desde luego suministra un criterio necesario y suficiente* *para la proporcionalidad*". A partir de esta definición la teoría de las proporciones recupera su valor, pues permite abordar magnitudes conmensurables como inconmensurables.

Un ejemplo de su aplicabilidad se puede observar en la demostración de la proposición 1 del libro VI de los elementos.

> **Proposición VI.1**: Los triángulos y paralelogramos que tienen la misma altura son entre sí como sus bases.

Para el caso de los triángulos, los pitagóricos empleaban la antiphairesis para encontrar un segmento que sirviera de medida común para la base de los triángulos y con base en ello realizaban la demostración. Ver la siguiente figura.

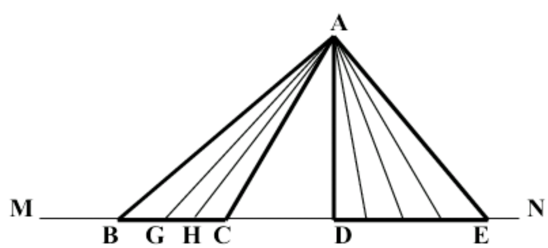


Figura 1. Triángulo empleado por los Pitagóricos.

Los pitagóricos asumían que existía un segmento GH que media al mismo tiempo a los segmentos BC y DE, con este supuesto los triángulos ABC y ADE quedan divididos en p y q triángulos respectivamente, y aplicando la proposición[23] 38 del libro 1 de *Los Elementos* logran concluir que $\frac{ABC}{ADE} = \frac{p}{q} = \frac{BC}{DE}$, que es lo que finalizaba la demostración.

Ahora, si la presunción de los pitagóricos es falsa, es decir, si los segmentos BC y DE son inconmensurables la demostración realizada anteriormente carecería de validez.

[23]Los triángulos que están sobre bases iguales y entre las mismas paralelas son iguales entre sí.

En este sentido la definición de Eudoxo ofrece una salida al problema de la inconmensurabilidad y lleva a que la demostración anterior se pueda realizar de forma rigurosa. La nueva prueba se basa en la siguiente figura:

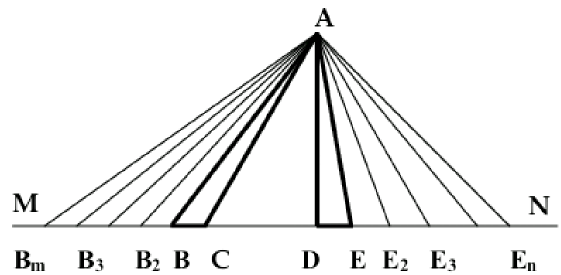


Figura 2. Triángulo empleado por Eudoxo para cualquier clase de magnitud.

Se toma el segmento BC y se prolonga m veces hacia la izquierda formando de la misma manera m triángulos iguales[24] al triangulo ABC, el mismo procedimiento se realiza hacia el lado derecho prolongando DE una cantidad n de veces, lo que permite construir n triángulos iguales al triangulo ADE, de donde se puede dar que:

- $mBC < nDE \rightarrow \Delta(AB_mC) < \Delta(AE_nD) \rightarrow m\Delta(ABC) < n\Delta(AED)$
- $mBC = nDE \rightarrow \Delta(AB_mC) = \Delta(AE_nD) \rightarrow m\Delta(ABC) = n\Delta(AED)$
- $mBC > nDE \rightarrow \Delta(AB_mC) > \Delta(AE_nD) \rightarrow m\Delta(ABC) > n\Delta(AED)$

Por lo tanto, se puede concluir que $\frac{\Delta ABC}{\Delta ADE} = \frac{BC}{DE}$ ∎

Mediante esta definición Eudoxo extiende la teoría de las proporciones a cualquier tipo de magnitud sin la necesidad de considerar su naturaleza, es decir, sin tener que preocuparse por los problemas que se desprenden de la inconmensurabilidad.

---

[24]**Proposición 38 del libro 1**: Los triángulos que están sobre las mismas bases y entre las mismas paralelas son iguales entre si

ii. En segunda instancia plantea lo que se conoce actualmente como el "*axioma de Eudoxo-Arquímedes*" o "*axioma de continuidad*" y que aparece como la definición 4 del libro V en los elementos. Veamos:

> **Definición V.4**: Se dice que guardan razón entre si las magnitudes que, al multiplicarse, pueden exceder una a la otra. (Euclides, Elementos X-XIII, 1991, pág. 10)

Mediante esta definición se suprime la existencia de una magnitud máxima o mínima, erradicando el infinito actual y preservando el infinito potencial tal y como era planteado por Aristóteles.

En otras palabras dos magnitudes $A \ y \, B$ tienen razón si existen $m \ y \ n$ en los naturales tales que $mA > B \ y \ nB > A,$ es decir, no importa que tan grande sea una magnitud en comparación con otra, la menor siempre podrá superar a la mayor. Esta situación inhabilita la aplicación de magnitudes infinitamente grandes o infinitamente pequeñas con lo que Eudoxo brinda una salida al problema de la manipulación del infinito.

iii. El método de exhaución.

El método exhaustivo aparece como una herramienta que permite enfrentar el problema de las paradojas que se originan a partir del tratamiento infinito. Este método se fundamenta en la proposición 1 del libro X de los Elementos.

> **Proposición X.1:**menor que las magnitudes dadas. (Euclides, Elementos X-XIII, 1991, pág. 12)

En esencia el método es utilizado para "cuadrar" una figura que no sea rectilínea $\boldsymbol{R}$ y consiste en inscribir (circunscribir) una sucesión creciente de figuras rectilíneas $A_0, A_1, A_2, \cdots, A_n$ en $\boldsymbol{R}$, tal que, la sucesión $R - A_0, R - A_1, R - A_2, \cdots, R - A_{n,}$ cumpla con las condiciones de la proposición X.1.

En este sentido, se pretende establecer un n apropiado tal que la diferencia $R - A_{n,}$ puede hacerse tan pequeña como se quiera, dicho de otra manera, que la diferencia $R -$

$A_{n,}$se pueda hacer menor que cualquier cantidad dada, tan pequeña que permita agotar a la figura R.

El método exhaustivo cobra importancia en el desarrollo de la geometría griega en la medida en que a partir de su aplicación se logra evitar el encuentro con el infinito, mediante una sucesión de magnitudes que se pueden hacer potencialmente tan grandes o tan pequeñas como fuera necesario.

De esta manera Eudoxo de Cnido brinda una salida al abismo al que llevaba el infinito en los desarrollos matemáticos, particularmente en el cálculo de cuadraturas y curvaturas, sin embargo esta salida no será definitiva pues el infinito aparecerá una y otra vez a través de la evolución histórica del concepto de la integral definida.

El trabajo de Eudoxo será retomado por Euclides y Arquímedes, quienes realizaron diversos aportes en el cálculo de cuadraturas y al igual que sus antecesores buscaron tratar el infinito de tal forma que sus diferentes aportes no carecieran de rigor o generaran contradicciones como las que se planteadas en las paradojas de Zenón de Elea.

3.4 Euclides y los primero pasos de la teoría de la medida.

El trabajo de Euclides es considerado de gran importancia en cuanto a la fundamentación de los conocimientos matemáticos, debido a la demostración rigurosa de las proposiciones mediante la aplicación del método axiomático y aunque este presenta únicamente la solución de algunos casos particulares, a partir de ellos se logra establecer una serie de métodos y bases conceptuales que trazarían el punto de partida para el desarrollo del concepto de la integral y la teoría de la medida.

Los *Elementos* de Euclides presentan la primera sistematización respecto a la teoría de la medida, pues a lo largo del contenido de sus trece libros muestra gran interés por determinar la medida de segmentos, superficies y volúmenes, y aunque no presenta una definición formal de lo que es medir, sí establece una operación para realizarlo. Euclides emplea la comparación de figuras como un mecanismo para determinar su medida respetando siempre el principio de homogeneidad[25].

En la construcción de su teoría de la medida, inicialmente parte de unas nociones que no define; por ejemplo, congruencia, equivalencia, igualdad, mayor y menor. Estas nociones son consideradas básicas y adquieren sentido durante sus procesos de desarrollo, de forma tal que igualdad hace referencia a cantidad; para Euclides dos cosas son iguales si tienen la misma cantidad, la congruencia es relacionada con encajar, por lo que se puede decir que dos figuras serian congruentes si una encaja perfectamente en la otra. (Bobadilla, 2012).

Al no presentar una definición explícita de lo que es medir, se asume que al igual que para sus antecesores, Euclides asocia la medición con la comparación. Es así, como los segmentos se comparan entre sí buscando uno que sirva de medida referencial, para las superficies el problema se remite a determinar un cuadrado que sea equivalente a una figura plana dada y de manera similar para medir volúmenes se debe encontrar un cubo que sea equivalente a un sólido dado.

En sus desarrollos aplica la teoría de las proporciones implementada por los pitagóricos respecto a las magnitudes conmensurables, y frente a la aparición de las magnitudes inconmensurables incorpora la teoría de las proporciones de Eudoxo, de esta manera maneja todo tipo de magnitudes, sin la necesidad de considerar su conmensurabilidad tal y como se explicó en la sección anterior.

De esta forma la proporcionalidad es la herramienta que permite la comparación de segmentos, superficies y volúmenes. Para el caso de los segmentos se procede de la siguiente manera; supongamos que se desean comparar los segmentos AB y CD, para esto se construye un segmento igual a CD en el extremo A de AB a partir del extremo C de CD, a continuación lo que se hace es "echar un segmento sobre el otro" y así determinar cuál de ellos es el mayor.

---

[25]El principio de homogeneidad consiste en que solo se pueden comparar magnitudes de de la dimensión.

Respecto a las superficies planas, el proceso de comparación no siempre puede desarrollarse de la misma manera que en el caso anterior, esto debido a que existen figuras que no encajan directamente la una sobre la otra, un ejemplo de tal situación se presenta en la siguiente figura 3.

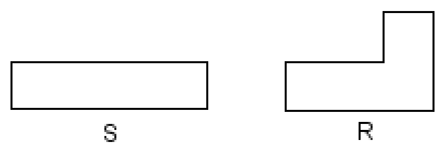


Figura 3. Figuras planas no congruentes.

Como se puede observar la figura S no se puede hacer encajar en la figura R, sin embargo, si dichas figuras se logran descomponer en cuadrados como se presenta en la figura 2xxx, por la noción común 2 del libro I de los Elementos de Euclides se tiene que; "si se añaden cosas iguales a cosas iguales" entonces "los totales son también iguales", en nuestro caso, si añadimos cuadrados iguales a figuras iguales, entonces se obtiene como resultado figuras iguales.

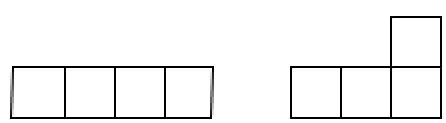


Figura 4. Superficies como unión de cuadrados.

Luego existen figuras planas o sólidos que son iguales pero no congruentes y por lo tanto no "encajables", motivo por el cual se dificultaba su comparación. Este tipo de figuras no podían ser "echadas una encima de la otra" tal y como sucedía con los segmentos, por lo que la teoría de las proporciones presentada por Euclides no sería suficiente para solucionar completamente el problema de la medida.

Con el objetivo de solucionar el problema anterior, Euclides propone asignarle a cada figura plana o sólido una figura que le sea equivalente, es decir, de igual magnitud, y que por su forma puedan ser fácilmente comparadas; por ejemplo los círculos y las esferas podían ser comparados de acuerdo a sus radios y los cuadrados o cubos con sus respectivos lados.

Las últimas proposiciones del libro I de los *Elementos* le sirven de fundamento para desarrollar el proceso mediante el cual logra convertir una figura rectilínea dada; en un rectángulo. En primera instancia realiza la triangulación de la figura; mediante la proposición I.41 Euclides explica cómo obtener un paralelogramo equivalente a un triángulo, y para evitar el problema que se le podría presentar si al unir los paralelogramos obtenidos no se formaba necesariamente otro paralelogramo, incluye las siguientes proposiciones:

> **Proposición I.42**: En un ángulo rectilíneo dado construir un paralelogramo equivalente a un triángulo dado.
>
> **Proposición I.45**: En un ángulo rectilíneo dado, construir un paralelogramo equivalente a una figura rectilínea dada.

De tal forma que después de obtener el paralelogramo, el paso a seguir era encontrar un cuadrado que le sea equivalente, lo que logra con la proposición II.14.

> **Proposición II.14**: Dada una figura rectilínea, encontrar un cuadrado equivalente.

Con la proposición anterior Euclides brinda una salida parcial al problema de la medida de las figuras planas, dado que a partir de ella desarrolla un procedimiento mediante el cual encuentra un cuadrado equivalente a una figura rectilínea dada. En el proceso mencionado es empleado el teorema de Pitágoras, dado que éste le permite obtener un cuadrado equivalente a la suma de otros dos cuadrados[26]. Es así como el trabajo expuesto en los dos

[26] "*En términos modernos, Euclides en el Libro I nos muestra que las figuras planas rectilíneas se pueden representar como unión disjunta de cuadrados y así su medida se puede establecer mediante la suma de la medida de cuadrados*"(Bobadilla,2012)

primeros libros de los *Elementos* se encuentra el primer tratado teórico que proporciona un mecanismo mediante el cual se logra medir el área de una figura rectilínea.

No obstante, el problema de la cuadratura no se limitaba exclusivamente a las figuras rectilíneas, por tal motivo Euclides plantea las dos primeras proposiciones del libro XII a partir de las cuales logra establecer la existencia de una relación entre un círculo y su radio mediante la aplicación del método exhaustivo expuesto por Eudoxo, esta relación será determinante para qué más adelante se logre calcular el área del círculo.

Con la proposición XII.2. Euclides demuestra que el círculo puede ser agotado a partir de una sucesión de polígonos regulares, mediante la aplicación del método exhaustivo tal y como se presenta a continuación:

> Proposición XII.2: Círculos son uno a otro como el cuadrado de sus diámetros.

En otras palabras, la proposición anterior pretende probar que; dadoslos círculos $ABCD\ y\ EFGH$ con diámetros $BD\ y\ FH$ respectivamente, entonces $\frac{a(ABCD)}{a(EFGH)} = \frac{BD}{FH}$.

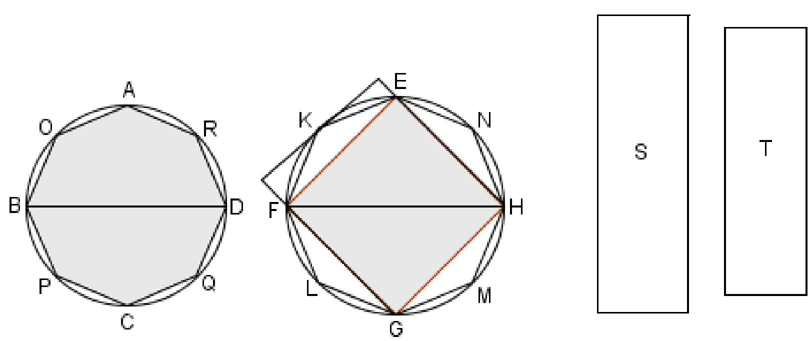


Figura 5. Aplicación del método exhaustivo por Euclides.

Demostración: Sean los círculos $\bigcirc ABCD$ y $\bigcirc EFGH$ de diámetros BD y FH, respectivamente. En dichos círculos se inscriben dos polígonos: ⌂$AOBPCQDR$ y ⌂$EKFLGMHN$, respectivamente, de tal forma que sean semejantes.

Decimos que $\bigcirc ABCD: \bigcirc EFGH = BD^2: FH^2$, de no ser así, se tienen los dos siguientes casos:

$\bigcirc ABCD: \bigcirc EFGH < BD^2: FH^2 ó$

$\bigcirc ABCD: \bigcirc EFGH > BD^2: FH^2$.

Supongamos que $\bigcirc ABCD: \bigcirc EFGH < BD^2: FH^2$

Sea $S < \bigcirc EFGH$tal que $\bigcirc ABCD: S = BD^2: FH^2$(Proposición VI.12).

En virtud del método exhaustivo, la construcción de los polígonos, se realiza de tal forma que cumple con la desigualdad $\bigcirc EFGH - \triangle EKFLGMHN < \bigcirc EFGH - S$, es decir: $S < \triangle EKFLGMHN$. (*)

Por proposición XII.1[27] tenemos que:

$\bigcirc ABCD: S = BD^2: FH^2 = \triangle AOBPCQDR: \triangle EKFLGMHN.$

Por la noción común 8[28] $\bigcirc ABCD > \triangle AOBPCQDR$, luego por V.14 se tendría que $S > \triangle EKFLGMHN$, lo que contradice la desigualdad (*).

Para el caso $\bigcirc ABCD: \bigcirc EFGH > BD^2: FH^2$, se procede de igual que en el caso anterior y se llega también a una contradicción.

Por lo tanto, $\bigcirc ABCD: \bigcirc EFGH = BD^2: FH^2$. ■

El desarrollo del método expuesto por Euclides podría ser interpretado de la siguiente manera:

---

[27]Proposición XII.1: polígonos semejantes inscritos en círculos son uno a otro como los cuadrados de los diámetros de los círculos que los contienen.

[28] El todo es mayor que la parte

Dado un círculo C y un número $\varepsilon > 0$, existe una sucesión de polígonos $\{P_n\}$ inscritos en C, tal que para algún n se cumple que $a(C) - a(P_n) < \varepsilon$, donde $a(C)$y $a(P_n)$ representan las áreas respectivas del círculo C y del polígono de n lados. Es decir que la diferencia entre el área del círculo y la del polígono se puede hacer tan pequeña como cualquier magnitud dada, lo que indicaría que el círculo puede ser "agotado" por la sucesión de polígonos P_n.(Bobadilla, 2012).

Este procedimiento que se fundamenta en la proposición X.1, también le permite a Euclides obtener resultados que se relacionan con el volumen de algunas figuras tales como:

- La equivalencia entre la pirámide y la tercera parte del prisma de igual base.
- La equivalencia entre el cono y el cilindro de igual base.
- La proporcionalidad entre esferas y cubos construidos sobre sus diámetros. Veamos por ejemplo como demuestra la equivalencia entre un cono y un cilindro que tienen la misma base. Para ello divide la prueba en dos partes y aplica el método de reducción al absurdo.

Proposición 10. Un cono es la tercera parte de un cilindro de la misma base y la misma altura.

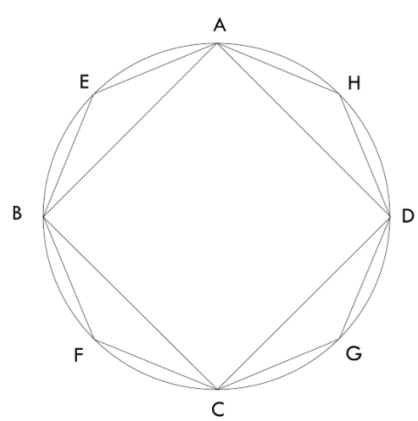


Figura 6. Figura empleada en la demostración de la proposición 10.

Demostración:

Parte I. Supongamos que el cilindro es más grande que tres veces el cono.

Sean el cilindro y el cono que tienen como base el círculo *ABCD*, además de la misma altura. Mediante la aplicación del método exhaustivo, sobre la base *ABCD* y teniendo como referencia la misma altura del cilindro, se construye un prisma cuya base es un polígono regular, inscrito en el círculo, tal que:

- *cilindro – prisma de base* (*AEBFCGDH*) < *cilindro* – 3 *cono*
- 3 *cono*<*prisma de base* (*AEBFCGDH*) (Propiedad de las desigualdades)
- *prisma de base* (*AEBFCGDH*) = 3 *pirámide de base* (*AEBFCGDH*) (Prop. XII, 7)
- *cono*<*pirámide de base* (*AEBFCGDH*) (Transitividad), lo que es una contradicción, puesto que la pirámide está contenida en el cono.

De lo anterior se puede concluir que el cilindro NO es más grande que tres veces el cono…… (*)

Parte II. Supongamos que el cono es más grande que la tercera parte del cilindro.

Para esta parte, sobre la base *ABCD* y teniendo como referencia el mismo vértice del cono, se construye una pirámide cuya base sea polígono regular, inscrito en el círculo. La construcción geométrica para esta demostración nuevamente se fundamenta en el método exhaustivo de tal manera que se cumpla con:

- *cono* - *pirámide de base* (*AEBFCGDH*) <*cono* - ⅓ *cilindro*
- ⅓ *cilindro*<*pirámide de base* (*AEBFCGDH*) (Propiedad de las desigualdades)
- *pirámide de base* (*AEBFCGDH*) = ⅓ *prisma de base* (*AEBFCGDH*) (Prop. XII, 7)
- *cilindro*<*prisma de base* (*AEBFCGDH*), lo cual es una contradicción, puesto que el cilindro contiene al prisma.

Luego el cono NO es más grande que la tercera parte del cilindro… (**)

Ahora de (*) y (**) se llega a concluir que el cono es la tercera parte del cilindro de igual base e igual altura, tal y como se quería demostrar.

Como se puede observar en las demostraciones anteriores, el método exhaustivo es fundamental para conseguir el objetivo propuesto, en primera instancia su aplicación permite que no se realice ningún tipo de alusión al infinito y en segundo lugar la idea de que una magnitud puede ser "tan grande o tan pequeña como se quiera" empieza trazar el camino de lo que en la actualidad se entiende como "paso al límite", estableciendo un punto de partida para que más adelante se llegue a determinar el área del círculo y en general del concepto de la integral definida.

Finalmente, se puede decir que aunque Euclides logra presentar importantes avances en cuanto al cálculo de cuadraturas y cubaturas, su concepción respecto a número y magnitud, derivada de la aparición de las magnitudes inconmensurables y en particular de la concepción griega sobre el infinito, no permitió que sus progresos fueran mayores[29].

De esta manera la concepción del infinito, principalmente del infinito actual se convertirá en un obstáculo para la evolución del concepto de integral definida, pues a partir de ella se cierra toda posibilidad a la noción límite y aunque este problema logra ser evadido habilidosamente gracias a las definiciones V.4, V.5 y a la proposición X.1 de los Elementos, seguirá apareciendo en los desarrollos matemáticos de todos aquellos pensadores que intervienen en la construcción del concepto de integral por lo menos hasta la segunda década del siglo XIX.

3.5 Arquímedes, el camino de los indivisibles y los infinitesimales.

A diferencia de Euclides quien es más reconocido por organizar y sistematizar los conocimientos matemáticos desarrollados por sus antecesores, que por la generación de nuevos conocimientos, Arquímedes es destacado por su capacidad inventiva y la

[29] Respecto a la cuadratura del círculo los avances fueron importantes, sin embargo el tiempo se encargaría de demostrar la imposibilidad de realizar dicha cuadratura al estilo griego, pues para tal fin sería necesaria la construcción del número π con regla y compas, y tal como lo demostró Ferdinand Lindemann en 1882 esta situación era imposible de debido a la trascendencia de dicho número.

originalidad de sus aportes, particularmente en lo que al cálculo de áreas y volúmenes se refiere.

La implementación de diferentes estrategias le permitieron avanzar hacia la solución de algunos de los problemas matemáticos existentes, y aunque algunas de ellas fueron revolucionarias respecto las concepciones de su época, Arquímedes no se alejó significativamente de la concepción aristotélica del infinito; igual que sus antecesores buscó la forma de evitarlo o camuflarlo, con la pretensión de no caer en las dificultades que involucraba su definición.

Arquímedes inicia su trabajo referente a la medida de magnitudes dando continuidad a lo realizado por Euclides, logra determinar el área de algunas figuras curvilíneas como es el caso del segmento de parábola, mediante la implementación de dos métodos; uno mecánico o heurístico en el que combina la física con desarrollos geométricos y el segundo a través de la implementación del método exhaustivo. Los dos métodos aquí planteados son de gran importancia ya que a través de ellos se da lugar a los indivisibles y a los infinitesimales cuya repercusión será de gran importancia en la evolución del concepto de la integral definida.

El área del segmento parabólico es el primer ejemplo de la obtención del área de una figura limitada por curvas y rectas, aporte que es dado a conocer en una carta que le envía a Dositeo en la cual expresa lo novedoso del resultado encontrado:

> … ninguno de mis predecesores, que yo sepa, ha buscado la cuadratura de una superficie limitada por una recta y una parábola, problema cuya solución he encontrado, y demostrare que el segmento parabólico equivale a cuatro veces la tercera parte de un triángulo de igual base y altura que el segmento. (Vera, 1970)

A continuación, se presentan el planteamiento de cada uno de los métodos:

3.5.1 El Método Mecánico.

La presentación del "método" por parte de Arquímedes establece una ruptura con la rigidez geométrica que establecía la filosofía platónica, dado que esta consideraba que toda construcción que se realizara por medios diferentes a los suministrados por la regla y el compás, eran mecánicos, y por lo tanto inaceptables para quienes pretendieran desarrollar matemáticas respetables al interior de la cultura griega.

Independientemente de lo novedoso y útil que este método resultaba, Arquímedes no lo consideraba como un mecanismo idóneo al interior del trabajo matemático, pues no le permitía la construcción de demostraciones que cumplieran con los estándares de rigor establecidos. Esta situación puede ser evidenciada en la carta que le envía a Eratóstenes en la cual le explica que el método permite obtener resultados, no obstante, espera encontrar una demostración rigurosa de los mismos por medios estrictamente matemáticos, afirmando una vez más la necesidad de alinearse a la concepción griega del rigor.

> Por otra parte, como sé que eres un estudioso serio, hombre de eminente cultura filosófica y un apasionado, he creído conveniente exponerte por escrito y explicar con detalle en este mismo libro la naturaleza especial de cierto método que te permitirá resolver mecánicamente algunos problemas matemáticos. Estoy convencido de que este procedimiento no es menos útil incluso para demostrar los propios teoremas, algunos de los cuales, evidentes por medio de la Mecánica, se han demostrado después geométricamente porque su investigación por dicho método no proporcionó una demostración rigurosa. Pero cuando gracias a él hemos adquirido algún conocimiento previo de la cuestión, es naturalmente más fácil dar la prueba que encontrarla sin dicho conocimiento previo. (Vera, 1970)

Para la cuadratura de la parábola Arquímedes emplea algunos resultados relacionados con leyes de la mecánica, expuestos en su libro *Del equilibrio de los planos* , 2012). 2012).

En este *Método*, el segmento de parábola es visto como todo el conjunto de líneas rectas que empiezan en la base del segmento y terminan en el arco de la parábola, y apoyado en una visión atomista del espacio, asume el conjunto de líneas que forman la parábola como un todo, mecanismo que considera de gran utilidad para determinar la medida de dicha figura.

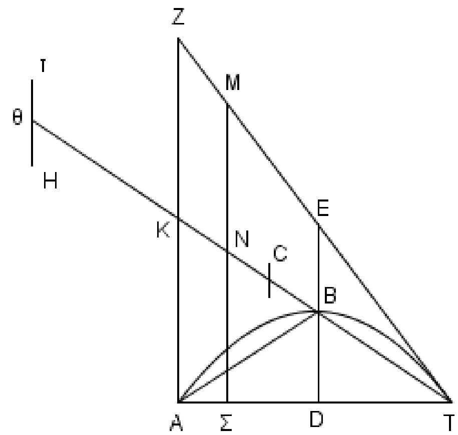


Figura 7. Área del segmento parabólico. Método mecánico.

Para su demostración construye el triángulo rectángulo AZT, tal que ZT es tangente al segmento parabólico. Por las propiedades geométricas de la parábola demuestra que el triángulo AZT es cuatro veces el triángulo ABT, y por las leyes de la mecánica, "equilibrando el segmento de parábola y el triángulo AZT" establece que:

$$\frac{\mathcal{A}(SegmentoABT)}{\mathcal{A}(TrianguloAZT)} = \frac{1}{3}$$

De donde concluye que $\mathcal{A}(SegmentoABT) = \frac{4}{3}\mathcal{A}(TrianguloABT)$.

La unión entre la mecánica y la geometría le permitió equilibrar cada línea del segmento parabólico con cada línea de un triángulo previamente seleccionado, de tal manera que el conjunto de todos los segmentos de línea que constituyen la parábola estén en equilibrio con todos los segmentos de línea que forman el triángulo, siempre que cada una de las figuras se ubicaran sobre su centro de gravedad.

En la proposición 16 de *La cuadratura de la parábola*, establece que el segmento parabólico es equivalente a un tercio del triangulo AZT:

> Proposición 16: Dado un segmento parabólico BTG y trazando por el punto B la paralela al diámetro y por el G la tangente a la parábola, si el área Z es la tercera parte del triangulo GBD, digo que la del segmento dado es igual a Z. (Vera, 1970) [30]

Esta proposición es importante en la medida que relaciona el segmento parabólico con el triangulo AZT, lo que le permitirá establecer la correspondencia que existe entre el segmento parabólico y el triángulo ABT, es decir que, el segmento parabólico es equivalente a los cuatro tercios del triangulo ABT.

Para demostrar esta proposición generaliza la definición V.4 de los *Elementos* en el quinto de sus principios, el cual es actualmente conocido como el axioma de Arquímedes;

> De dos magnitudes desiguales, líneas, superficies o sólidos, la diferencia entre la mayor y la menor, añadida a sí misma un número suficiente de veces, puede sobrepasar cualquier magnitud dada (del mismo tipo que las comparadas). (Vera, 1970)

Al aplicar este principio Arquímedes está garantizando que al añadir determinada cantidad de veces una magnitud sobre ella misma, por muy pequeña que esta sea, puede finalmente superar cualquier otra magnitud dada, reivindicando el infinito en potencia, el infinito sin límites, en otras palabras, el infinito que no conducía a contradicciones, establecido por los filósofos y aceptado por los matemáticos.

Como se expresó anteriormente, Arquímedes somete su trabajo a la concepción aristotélica respecto al infinito, sin embargo, en esta demostración involucra implícitamente la idea de límite, pues según (Zellini, Paolo):

> Ahora bien en la búsqueda de "los centros de gravedad" de las representaciones geométricas de Arquímedes se hallaba agazapado también el sentido de una resolución final de lo ilimitado. El resultado de lo que aparecía reductible, en lenguaje moderno a una integración, es decir, el cálculo de un área o un volumen se remitía a un punto de equilibrio de la masa geométrica (Zellini, 1991, pág. 34).

Es así como el punto que marca el centro de gravedad estaría representando "*una resolución final de lo ilimitado*", en otras palabras, correspondería a alguna especie de límite a partir del cual se logran equilibrar el área del segmento parabólico con la de un

---

[30] Aclaración nomenclatura.

triángulo determinado. Con lo que Arquímedes inicia a marcar de una manera muy sutil e intuitiva el camino que se debe recorrer para llegar a la definición de la integral definida.

3.5.2 El Método Exhaustivo.

La cultura griega encontró en la demostración la condición fundamental para que los conocimientos matemáticos fueran considerados científicos, más allá del conocimiento “vulgar” que se derivaba de la percepción que permitían los sentidos. Por tal motivo el modelo demostrativo diseñado en los *Elementos* de Euclides, constituía una verdadera forma de elevar el espíritu científico.

En esta medida, retoma el método exhaustivo y lo perfecciona con el propósito de demostrar rigurosamente los resultados obtenidos respecto al cálculo de cuadraturas y cubaturas. Para ello crea un algoritmo en el que utiliza la reducción al absurdo y mediante una serie de consideraciones teóricas se presume un “limite” en la sucesión de figuras inscritas o circunscritas y mediante la aplicación de la reducción al absurdo se demuestra que ese presunto límite es el área que se pretende determinar. Veamos su aplicación en la cuadratura del segmento parabólico.

En la cuadratura de la parábola se demuestra la proposición 24 a través del método exhaustivo.

> **Proposición 24**: El área del segmento parabólico es igual al cuádruple del tercio de la de un triángulo de la misma base y de la misma altura que el segmento.

Para llegar a este resultado, genera una sucesión de polígonos inscritos en el segmento parabólico que cumplan con unas determinadas condiciones.

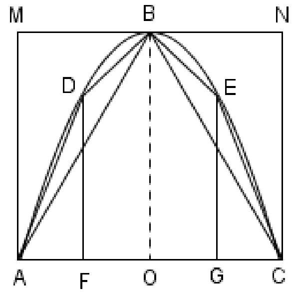


Figura 8. Área del segmento parabólico. Método exhaustivo.

Inicialmente demuestra que el área del primer término de la sucesión es decir $a(P_0) = a(\Delta ABC)$es mayor que la mitad del área del segmento parabólico, y en seguida presenta el siguiente corolario:

> **Corolario**. Demostrado esto, es claro que se puede inscribir en el segmento un polígono tal que la suma de los segmentos exteriores a él sea menor que un área dada, porque restando continuamente un área mayor que la mitad disminuiremos continuamente la suma de dichos segmentos, y, por lo tanto, llegaremos a hacerla menor que cualquier área dada. (Vera, 1970)

Arquímedes construye una sucesión de polígonos que le permitan aplicar la proposición X.1 de los *Elementos* y así evadir el problema que le podía generar el infinito en términos de límites, pues de esta manera, la diferencia entre el área del segmento parabólico y el área del polígono P_n, se podría hacer tan pequeña como fuera necesario.

El primer término de la sucesión es $P_0 = \Delta ABC,$ el siguiente$P_1 = P_0 + \Delta ADB + \Delta BEC$, y de forma similar realiza la construcción de $P_2, \cdots, P_n$ ...

De las propiedades de la parábola se obtiene que: $\Delta ABC = 4(+\Delta ADB + \Delta BEC)$ y por lo tanto:

$$a(P_1) = a(P_0) + \frac{1}{4}a(P_0).$$

Luego mediante la aplicación de razonamientos análogos establece que:

$$a(p_n) = a(p_0) + \frac{1}{4}a(p_0) + \left(\frac{1}{4}\right)^2 a(p_0) + \cdots \left(\frac{1}{4}\right)^n a(p_0) \cdots$$

Es la sucesión que cumple con la hipótesis proposición X.1, tal y como se anunció anteriormente.

El siguiente paso es determinar el límite de la sucesión de figuras inscritas. El procedimiento mediante el cual este límite es determinado no se presenta de forma específica, se recurre a la intuición, se presume que se emplea un proceso de prueba error, intentando encontrar una ley para la formación suma.

Si se tiene en cuenta que:

$$P_n = P_0 + \sum_{k=1}^{n} \frac{P_0}{4^k} = \frac{4}{3}P_0 - \frac{1}{3}\frac{P_0}{4^n},$$

Como el sustraendo se puede hacer tan pequeño como se quiera, entonces llega a concluir que $S = \frac{4}{3}P_0$.

Para la construcción de su demostración Arquímedes emplea el siguiente resultado:

Si $S = A + B + C + D + E$, y $A : B = B : C = C : D = D : E = 4 : 1$, entonces,

$$S = \frac{4}{3}A - \frac{1}{3}E.$$

Resultado que se puede extender a cualquier número de sumandos.

Respecto a la cuadratura del círculo, en la proposición 1 de la *medida del círculo*, Arquímedes demuestra que es equivalente a la de un triángulo rectángulo cuyas medidas de los catetos son el radio y la longitud de la circunferencia de dicho circulo.

> Proposición 1: Un círculo es equivalente un triángulo rectángulo cuyos catetos son iguales al radio y a la circunferencia del círculo.

En su demostración emplea polígonos inscritos y circunscritos además de la reducción al absurdo, veamos:

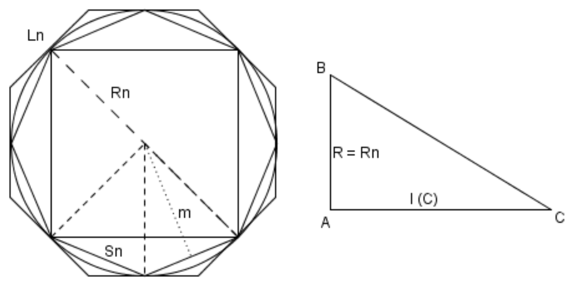


Figura 9. Equivalencia entre el círculo y un triángulo rectángulo.

Primero se supone que $a(C) > \mathcal{A}(T)$, es decir $a(C) - a(T) > 0$, donde T es el triángulo *ABC*.

Por la proposición XII.2 de los *Elementos*, existe un polígono $P_n$inscrito en la circunferencia, tal que $a(C) - a(P_n) < a(C) - a(T)$, de donde $a(P_n) > a(T)$.

De otro lado, si consideramos ℓcomo la longitud de la circunferencia, se tiene que $a(P_n) = \frac{1}{2} r_n s_n m < \frac{1}{2} R\ell(C) = a(T)$, es decir $a(P_n) < a(T)$, lo que contradice el resultado anterior.

En segundo lugar se supone que $a(C) < a(T)$, y usando los mismos razonamientos anteriores para el caso de polígonos circunscritos, se llega a que esta desigualdad tampoco se puede dar, y por lo tanto $a(C) = a(T)$■

Mediante esta demostración Arquímedes establece una equivalencia entre el área y el círculo, transformando el problema de la cuadratura del círculo en el problema de la rectificación de la circunferencia, en otras palabras, pretende la construcción de π con regla y compás.

Arquímedes en la proposición 3 de la *Medida del círculo* aplica el método exhaustivo para calcular la longitud de la circunferencia, realizando una aproximación para π, por exceso y por defecto.

> Proposición 3: La circunferencia de un círculo es igual al triple del diámetro más una parte de este, la cual es menor que la séptima parte y mayor que los diez setenta y un avos del diámetro mismo.

En términos modernos podríamos decir que dada una circunferencia de longitud C y con un diámetro D, se tiene que $3D + \frac{10}{71}D < C = D\pi < 3D + \frac{1}{7}D$. Es decir,

$3 + \frac{10}{71} < \pi < 3 + \frac{1}{7}$.

Para demostrar esto se emplean polígonos inscritos para obtener la cota inferior y polígonos circunscritos para lograr la cota superior.

De esta manera podemos entender a Arquímedes como un gran innovador respecto a la geometría euclidiana, pues en el trabajo presentado por Euclides no se refleja algún tipo de preocupación por los cálculos numéricos, por lo menos en lo que a π se refiere. El transformar el problema de la cuadratura del círculo en la rectificación de la circunferencia pareciera brindar una solución, sin embargo en el siglo XIX F. Lindemann demostraría la imposibilidad de construir π con regla y compás, por consiguiente no se podría construir un triángulo rectángulo con uno de sus catetos la longitud de la circunferencia.

En los dos métodos expuestos para determinar la cuadratura del segmento parabólico, se presentan dos formas de entender el área, el método mecánico representa una visión atomista del espacio, mientras que el método exhaustivo refleja la divisibilidad infinita. Cada uno de ellos le permite a Arquímedes una manipulación del infinito, el primero involucra los indivisibles cuyo manejo lo realiza a través de las leyes de la mecánica y el segundo, mediante la presunción de la existencia de un "límite" le permite eludir la operatividad de lo infinitamente pequeño.

No obstante la riqueza conceptual del trabajo realizado por Arquímedes, la cual servirá de punto de partida para pensadores como Bonaventura Cavalieri (1598-1647) que siguiendo la corriente de los indivisibles, empleó la noción de suma de líneas contenidas entre las figuras, o Kepler y Gregory St. Vincent, que al dar continuidad a la perspectiva de lo infinitamente pequeño, utilizaron infinitos rectángulos de áreas infinitamente pequeñas para determinar áreas de figuras irregulares, en cada una de sus demostraciones recurría a las herramientas que habría establecido Eudoxo, mejoradas por el mismo, pero que de alguna manera seguían reflejando la necesidad de evadir el infinito.

3.6 Los indivisibles en la evolución de la integral.

Para determinar la cuadratura del segmento parabólico Arquímedes emplea el método mecánico y el método exhaustivo; como veremos, estos dos métodos dan lugar a dos formas de concebir el continuo: el primero da lugar a concebir el continuo constituido de indivisibles y el segundo a través de los infinitesimales.

Los indivisibles estarían asociados con el "***atomismo***", tesis filosófica desarrollada por Demócrito con el objetivo de analizar el mundo y sustentada en la idea de que todos los objetos estaban constituidos por partes muy pequeñas que no podían ser divididas. Estas partes eran denominadas átomos o ***indivisibles***, las cuales al entrar en movimiento y ponerse en contacto unas con otras llegan a generar figuras compuestas. Según Simplicio[31]:

> Los principios llamados también átomos e indivisibles son infinitos e invulnerables por ser compactos y carecer de vacíos porque afirman que la división se produce a causa del vacío que se encuentra en los cuerpos, pero que los átomos están separados unos de otros en el vacío infinito en el cual se mueven, siendo diferentes por la forma, el tamaño, la posición y el orden. Al encontrarse bruscamente entran en colisión y, como consecuencia, unos rebotan al azar y otros se entrelazan con arreglo a su forma, posición y orden y permanencia unidos. Tal es el modo de producirse los compuestos. (Coronado, 1988, pág. 30)

Esta perspectiva de entender los objetos, la podemos ver en las matemáticas y en particular en el campo de la geometría, al considerar el concepto de "todas las líneas" introducido por Cavalieri; a pesar del mismo Cavalieri, quien afirmaba ser fiel a Aristóteles, concibiendo el continuo como constituido de infinitesimales.

[31] Citado por (Coronado, 1988)

> …Pero ya hemos mostrado antes que esto es imposible, porque el tiempo no está compuesto de “ahoras”, ni una línea de puntos, ni tampoco un movimiento en acto de movimientos[32]… (Aristóteles, Física, 1995, pág. 238)

En la gráfica 10. Se presenta los indivisibles de un cilindro, indivisibles a los que se logra llegar después de un número infinito de divisiones, que según Cavalieri, se determinan mediante cortes de planos paralelos.

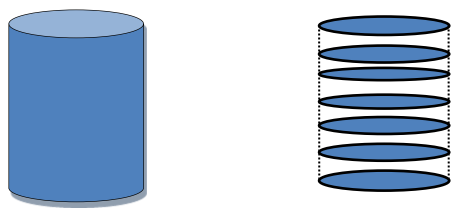


Figura 10. Indivisibles de un cilindro.

En términos modernos, se puede decir que si se pretende estudiar un objeto de dimensión n, los indivisibles del objeto estarán constituidos por infinitas figurasde dimensión $n-1$.

Bonaventura Cavalieri será quien implemente el método de los indivisibles y al igual que Arquímedes, realizará importantes aportes para el desarrollo del concepto de la integral tal y como será expuesto más adelante.

Los infinitesimales surgen con el método exhaustivo utilizado para determinar las cuadraturas y cubaturas y tiene sus orígenes en la divisibilidad infinita propuesta por Aristóteles. Según los planteamientos de Aristóteles, cualquier objeto podía ser dividido infinitamente y obtener como resultado, partes que conservan la dimensión del objeto original. Así al dividir sólidos se obtienen sólidos más pequeños, al dividir superficies resultan superficies más pequeñas y lo mismo para el caso de los segmentos. De esta

[32]Como lo comenta Guillermo R de Echandía (traductor y comentarista de ***Física*** de Aristóteles) Cf. 237al7-b22. Se trata de uno de los axiomas básicos de la física aristotélica: un continuo, es decir, lo que es esencialmente divisible, no puede estar hecho de indivisibles.

manera un ***infinitesimal*** puede ser considerado como aquella parte infinitamente pequeña que resulta de dividir infinitamente un objeto, en cuyo proceso de división se respeta la dimensión del mismo.

En la siguiente figura se muestra como un cuadrado puede ser dividido de manera consecutiva en rectángulos cada vez más pequeños, proceso que puede ser continuado infinitamente lo que permitiría obtener rectángulos tan pequeños que podrían llegar a ser considerados ***infinitesimales*** o infinitamente pequeños.

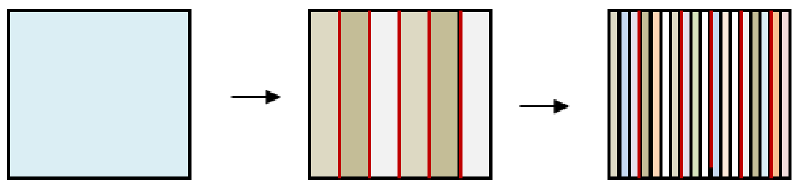


Figura 11. Infinitesimales de una figura plana.

La principal diferencia que se puede destacar es que los indivisibles derivados del atomismo no se someten al principio de homogeneidad de las figuras, pues divide objetos de una determinada dimensión en infinitos objetos de una dimensión menor, mientras que los infinitesimales de acuerdo a la teoría aristotélica mantiene el principio de la homogeneidad al dividir un objeto en infinitos objetos de la misma dimensión del que ha sido dividido.

Determinar áreas y volúmenes sigue cautivando el interés de los matemáticos del siglo VII, pues él es problema[33] les era interesante tanto en el campo matemático como en la

[33]El problemas de calcular áreas y volúmenes en esta época no solamente trascendía el campo intelectual respecto al fortalecimiento del espíritu científico, también existían intereses prácticos como la necesidad que tenían los comerciantes de la época de determinar el volumen de los barriles de vino para aprovechar al máximo un excelente producción de uva que se dio en esa época. Problema que sería solucionado por Kepler al aplicar técnicas infinitesimales.

vida cotidiana, evidencia de esta situación se puede observar en los trabajos Kepler y Cavalieri quienes brindan alternativas de solución a partir de la aplicación de infinitesimales e indivisibles respectivamente.

Johannes Kepler, considerado uno de los precursores del cálculo infinitesimal, define un infinitesimal como aquel pequeño elemento que conforma las figuras conservando su dimensión.

En su obra *La Nova Stereometría*, Kepler plantea la solución al problema de la cuadratura del círculo, considerándolo como un polígono regular con una cantidad infinita de lados, cuya área podía ser obtenida al sumar un número infinito de triángulos, donde los vértices se ubicaban en el centro y las alturas podían ser consideradas iguales al radio del círculo. Supone que $S\ y\ r$ eran la circunferencia y el radio del círculo respectivamente y que $b_1, b_2, b_3, \dots, b_n, \dots$ son las bases de los triángulos, entonces la cuadratura del círculo estaría dada por:

$$A = \frac{1}{2}r(b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_n + \cdots) = \frac{1}{2}rC$$

Mediante la implementación de esta técnica también logra obtener el área de la elipse y el volumen de barriles de vino al considerar que éstos estaban formados por infinitas capas superficiales. La metodología empleada por Kepler de alguna manera es una continuación de la propuesta arquimediana de sumar los elementos infinitesimales de los cuales se constituyen las figuras.

Kepler direccionaba su estrategia a generar una ruptura con el engorroso trabajo que implicaban las demostraciones por reducción al absurdo que eran requeridas para la implementación del tradicional método exhaustivo y fundamentado en la continuidad de Nicolás de Cusa asumía que las figuras estaban constituidas por infinitos elementos muy pequeños de la misma dimensión y a partir de esa idea realizaba su trabajo respecto al cálculo de áreas y volúmenes.

Según Alexandre Koyré:

> Kepler realiza, sin dudarlo un instante, la operación de paso al límite, identificando pura y simplemente una curva con la suma de rectas infinitamente cortas (un circulo con un polígono de un número infinitamente grande de lados infinitamente cortos) y su área como la suma de rectángulos infinitamente numerosos e infinitamente pequeños (el área del circulo con la suma de una infinidad de triángulos infinitamente estrechos) (Koyré, 2000, pág. 323)

Los aportes realizados por Kepler y Cavalieri mediante la implementación de los infinitesimales y los indivisibles respectivamente, determinaría un punto de quiebre o ruptura con los planteamientos matemáticos desarrollados hasta ese momento, puesto que a partir de este tipo de trabajos se empieza a dar preponderancia a los resultados matemáticos por encima del rigor. Veamos a continuación como la propuesta de Cavalieri surge en oposición a los planteamientos de Kepler.

A la noción de infinitamente pequeño presentada por Kepler, Cavalieri enfrenta la de indivisible, que a diferencia del primero no conserva la misma dimensión. Desde la concepción expuesta por Cavalieri, si el objeto que se pretende estudiar es de dimensión n, el indivisible será de dimensión $n-1$. Así el indivisible de una recta es un punto, de un plano una recta y de un volumen lo será una superficie.

Esta manera de presentar los indivisibles de parte de Cavalieri conduciría a una de sus más fuertes críticas pues, desde la posición Paul Guldin[34] no era posible que entre dos colecciones infinitas de líneas se llegara a establecer razón, por tal motivo el método de Cavalieri era inútil para cuadrar figuras. Así, los planteamientos realizados a partir de la aplicación de los indivisibles estarían en contra vía de lo que previamente se había establecido respecto a la composición del continuo y a la forma como se debería de entender el infinito según lo expuesto por Aristóteles y que había sido aceptada en el seno de la iglesia católica, motivo por el cual se llegaría a calificar las técnicas y procedimientos empleados por Cavalieri como practicas herejes[35].

---

[34] (Andersen, 1985, págs. 291-367)

[35]Los postulados expuestos por Cavalieri no estaban alineados con los acuerdos que se habían establecido por la iglesia católica en el concilio de Constanza en 1614 respecto a la concepción que se debería aceptar en cuanto al infinito, lo que suscitó fuertes críticas a sus trabajos. Esta situación nos llevaría entender que los

Frente a la crítica expuesta por Guldin, Alexander Koyre afirma que:

> En efecto, Cavalieri no compone en absoluto una línea con puntos, ni el plano con líneas. Versado lo mismo que Guldin (y mucho más que Kepler), en las discusiones medievales de *compositione continui* sabe perfectamente que esto es imposible…
>
> El curso del pensamiento cavaleriano es un curso analítico y no sintético: no parte del punto, de la línea, el plano, parta llegar mediante unión imposible a la línea, el plano, al cuerpo. Por el contrario parte del cuerpo, el plano, la línea para descubrir en ellos, como elementos determinantes e incluso constitutivos—pero no componentes—el plano la línea y el punto. (Koyré, 2000, págs. 326-327).

Lo expuesto anteriormente, permite observar un punto de vista diferente al argumento que favorecía la crítica al método de los indivisibles, puesto que según los conocimientos de Cavalieri respecto al continuo, éste no podía entender la composición de la línea o el plano a partir de puntos o de líneas respectivamente. Sin embargo, la postura del mismo Cavalieri se mantenía ambigua, pues decía aceptar el continuo en términos de lo que establecía la tradición griega, afirmaba no aceptar un continuo constituido por indivisibles, no obstante, a partir de su trabajo determinaba áreas a partir del concepto de "todas las líneas".

Probablemente esta situación de ambivalencia llevó a Cavalieri a plantear que los indivisibles no eran más que una muy buena herramienta para el cálculo de cuadraturas (y cubaturas) mediante la cual se logra evitar el paso al límite que inducía a los vacíos teóricos que ya han sido mencionados.

Al dejar de lado los problemas que generaba la concepción del continuo, los indivisibles son vistos como un "instrumento", mediante el cual "evoluciona" el modo de hacer matemáticas, desencadenando una ruptura con el rigor establecido en la tradición griega[36]. Desde esta perspectiva algunos conceptos serán empleados como nociones auxiliares y no

---

desarrollos matemáticos no dependían exclusivamente de la capacidad intelectual de los pensadores, sino que además siempre iban acompañados de las concepciones que marcaban cada época histórica, la religión en este caso.

[36] Es importante recordar que Arquímedes había dado indicios de este tipo de pensamiento cuando empleando el método mecánico logro obtener la cuadratura del segmento parabólico, sin embargo sintió la necesidad de realizar una demostración rigurosa de su resultado y tuvo que recurrir al método exhaustivo.

como objetos matemáticos propiamente dichos por ejemplo, los indivisibles se tomarán en un nivel epistemológico mas no ontológico, lo que permitirá obtener resultados en beneficio del desarrollo del conocimiento matemático. Al no tener en cuenta el aspecto ontológico de los indivisibles, Cavalieri deja de lado la preocupación por la naturaleza del concepto, no importa qué son los indivisibles sino cómo se utilizan para calcular áreas o volúmenes. Así se abre a la posibilidad de emplear el concepto en la medida que éste sea útil para la construcción de nuevo conocimiento o para determinar la solución de un determinado problema.

El cambio de estilo en los procedimientos empleados para la construcción de conocimiento, no sólo dependía de las elaboraciones internas de cada una de las diferentes ciencias, sino también estaba relacionado con la forma como se entendía el mundo en esta época, y durante el siglo XVII se generaron todo tipo de cambios, en lo social, cultural, artístico y desde luego en el aspecto científico, desarrollando un ambiente propicio para la innovación, la creación y contrastación de viejas teorías, en términos de Bachelard el medio adecuado para el fortalecimiento del espíritu científico.

En efecto, aunque las estrategias empleadas por Cavalieri se alejaron del rigor, al mismo tiempo le permitieron avanzar notablemente en la en el desarrollo del conocimiento matemático, logrando obtener cuadraturas de figuras limitadas por curvas[37], cuyas gráficas, en términos modernos representarían funciones de la forma x^n (Recalde, 2012). Esta estrategia direccionada a privilegiar los resultados sobre el rigor se constituiría en la principal ruptura con el trabajo realizado por los griegos, pues como se indicó anteriormente Arquímedes sólo llegó a determinar áreas de figuras limitadas por polinomios de segundo grado. A continuación presentamos el mecanismo implementado por Cavalieri para obtener cuadraturas y por el cual puede ser considerado como uno de los precursores del cálculo integral.

[37] En esta época ya se conocen los resultados de Descartes relativos a la interpretación de x^n como la ecuación de una curva geométrica y sobre ello volveremos más adelante.

Cavalieri considera que medir adecuadamente consiste en realizar convenientes comparaciones entre indivisibles, excluyendo la necesidad de realizar el paso al "limite" que era necesario en el desarrollo del método exhaustivo. Para ello se apoya en una herramienta denominada *"regula*". Con unos razonamientos más analíticos que sintéticos.

Representemos lo anterior para una superficie en particular. Sea la figura plana *F=ABC* y la línea *AC* la regula.

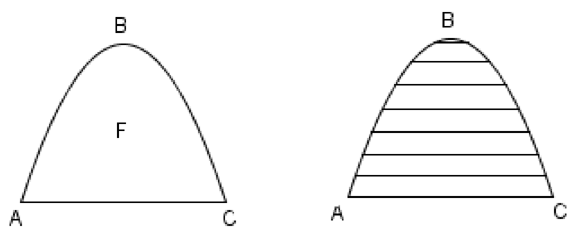


Figura 12. Todas las líneas - O_F (l)

En este caso la colección de "todas la líneas" corresponde a la totalidad de cuerdas "*l*" de *F* que son paralelas a la regula *AC*. Donde O_F (*l*)[38] denota esta colección. La *O* corresponde a la primera letra de *ommes lineae*.

Cavalieri logra obtener la medida de una región plana a partir de la suma de todas sus líneas y para ello presenta el teorema II. 4 de *Geometría indivisilibus*, el cual llega a ser considerado como El principio de Cavalieri, cuya utilidad principal era comparar figuras para llegar a establecer cuadratura y cubaturas.

> **Teorema II. 4 de Geometría indivisibilibus**: Si dos figuras planas (o sólidas) tienen igual altura, y si las secciones hechas por rectas paralelas (o planos paralelos) a las bases y a igual distancia de ellas están siempre en una misma razón, entonces las figuras planas (o sólidas) están también en esa misma razón. (Barrios Garcia, 1993)

---

[38] La *O* corresponde a la primera letra de *ommes lineae* que significa "todas las líneas."

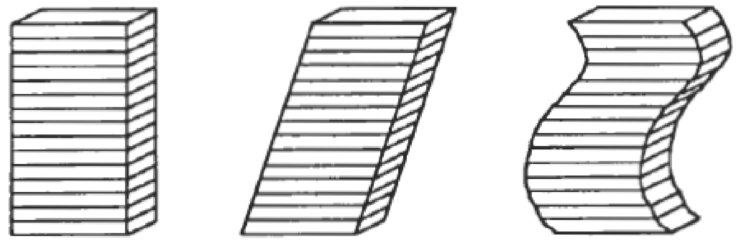


Figura 13. Representación del principio de Cavalieri.

Lo que Cavalieri pretende con su principio es establecer que el volumen de dos figuras está en la misma razón, si tienen la misma altura y sus indivisibles también guardan la misma razón. El problema se presenta en el momento que se desea la sustentación del principio, pues las propiedades que le asigna a los indivisibles en determinado momento llevan a contradecir la concepción del continuo dada por Aristóteles, sobre la cual se establece que una magnitud continua es infinitamente divisible. Situación que directamente llevaría a pensar en el infinito y las dificultades que su concepción representan.

En efecto, de acuerdo a los principios de la rigurosidad que exigían las matemáticas griegas, los indivisibles no tendrían que ser manipulados de manera aislada, por el contrario era necesario que fueran aceptados como un "todo" y en ese sentido el conjunto formado por "todas las líneas" conducía a pensar en el infinito actual. Esta situación era conflictiva en la medida que planteaba la necesidad de establecer la razón entre colecciones infinitas, que como ya ha sido mencionado anteriormente era inaceptable bajo los fundamentos de la tradición aristotélica. Motivo por el cual se puede considerar que aún en el tiempo de Cavalieri, el infinito continúa instituyéndose como un obstáculo en la evolución del concepto de la integral.

Frente a esta situación Cavalieri argumenta que si es posible establecer razón entre colecciones de indivisibles, dado que para él, cualquier colección de líneas podría ser "multiplicada" de tal manera que llegara a exceder cualquier otra colección dada y así poder vincular el método de los indivisibles a las exigencias de las concepciones griegas mediante la aplicación del principio de Eudoxo, permitiendo que el concepto de "todas las líneas" sea visto como una magnitud y así poder establecer razones y proporciones entre ellas tal y como se realiza en los *Elementos* de Euclides.

A pesar de que las críticas a los indivisibles se mantuvieron, Cavalieri encontró en su trabajo un mecanismo adecuado para determinar cuadraturas y cubaturas con base en su concepto de "todas las líneas". Por ejemplo si cada línea tiene longitud l, se designa como *ommes lineae l,* y es denotado como $omn(l)$. Así $omn(a) = a^2$, se debe entender como la suma de todas las líneas de una superficie de lado a. Ahora si se traza la diagonal a un cuadrado, el área del triángulo que se forma estaría dada por $omn(x) = \frac{x^2}{2}$, en otras palabras, el área del triángulo es la mitad del área del cuadrado de lado a.

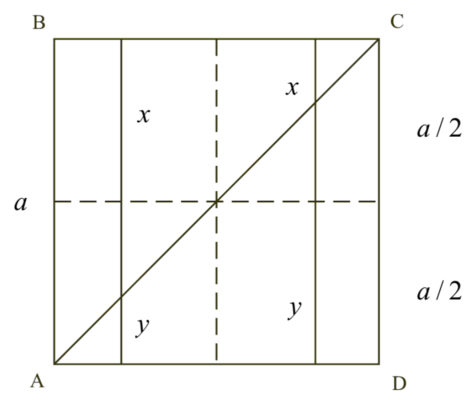


Figura 14. Medida de una región plana a partir de todas sus líneas.

Realizando procedimientos análogos llega a considerar que al sumar indivisibles de tres dimensiones se obtiene una figura geométrica de cuatro dimensiones lo que le llevará a establecer la primera generalización respecto a la dimensión. De esta manera, considera que $O(cubo_a)_{AB}$, la suma de "todos los cubos" (*omnes cubi*), como un hipercubo (*quadrato-quadrata*)[39]. Lo que podríamos representar como: $O(a^3)_{AB} = a^4$.

[39] Es importante referenciar nuevamente la ruptura que se da con el trabajo de Cavalieri respecto al trabajo matemático, pues como se puede observar inicia realizando la suma de objetos geométricos, sin embargo al trascender a figuras de dimensiones superiores como es el caso del hipercubo necesariamente debe alejarse del referente geométrico, en otras palabras empieza a dar el cambio entre lo sintético y lo analítico.

Después de conseguir estos resultados Cavalieri busca generalizar el trabajo realizado, para ello piensa en sumar indivisibles de dimensión *n-1* de una figura de dimensión *n* en lo que denomina "todas las potencias" (*omnes potestades*), como consecuencia de esto presenta el cuarto ejercicio de *Exercitationes geometricae sex*, donde expone los casos para$n$ = 3, 4, 5, 6 y 9. Para finalmente obtener la expresión:

$$O\,(x^n)_{AB} = \frac{a^{n+1}}{n+1}$$

En términos modernos la expresión presentada anteriormente se puede representar como la integral definida:

$$\int_0^a x^n dx\,,\;\; n = 1, \ldots, 9.$$

De esta manera, Cavalieri a partir de la metodología de los indivisibles llega a generalizar el cálculo de las cuadraturas, propicia rupturas epistemológicas respecto a los desarrollos matemáticos establecidos hasta su época y por tal motivo juega un papel protagónico en la evolución del concepto de la integral definida, sin embargo, en la manipulación de "todas las líneas" se encuentra con el infinito actual, problema que aparece cuando pretendía medir objetos (superficies) que aunque eran acotados llegaban a ser concebidos como un conjunto infinito de líneas, lo que entraría en contradicción con la concepción aristotélica del continuo y del infinito como algo "***ilimitado***".

Es importante recordar que aunque Cavalieri llegó a obtener resultados importantes gracias a sus métodos, su posición respecto a las concepciones de infinito siempre fue ambigua, no trascendieron más allá de las tradicionales y por lo tanto nos permite seguir pensando en el infinito como un obstáculo en la construcción del concepto de la integral.

3.7 La geometría analítica, una nueva forma de hacer matemáticas.

En el siglo XVII se realizan cambios estructurales en la forma de entender el mundo y por ende las matemáticas no podían ser ajenas a estos procesos de transformación social, cultural y científica. Pensadores como Vieta, Fermat y Descartes aparecen en este nuevo escenario e impulsan el avance de esta ciencia bajo una filosofía encaminada a la innovación y al descubrimiento.

La construcción de conocimiento matemático también resultó beneficiado con esta nueva forma de entender el mundo, donde el principal interés era lograr que cada una de las disciplinas científicas realizaran avances importantes, desde este punto de vista los pensadores, sin desconocer la importancia de las demostraciones rigurosas se interesaron por buscar métodos o estrategias que les permitieran obtener resultados que impulsaran el avance de las matemáticas.

Esta búsqueda de resultados, implica revisar las teorías existentes para reevaluarlas, ratificarlas o plantear rupturas que permitan que lo que antes podía ser considerado un obstáculo en la construcción del conocimiento pueda transformarse en una oportunidad para impulsar el mismo. A continuación se presentarán algunos de los principales aportes realizados por Descartes, puesto que su trabajo respecto a la geometría analítica marca un punto de inflexión en la forma como se desarrollaban las matemáticas hasta ese momento.

La inclusión de curvas más allá de las que podían ser construidas con regla y compás, además de la vinculación del álgebra y el simbolismo al campo de la geometría constituirá una importante ruptura con los conocimientos previos y por tal motivo impactará positivamente la construcción del concepto de integral.

René Descartes (1596-1650), al no encontrar el método mediante el cual los griegos encontraban sus descubrimientos se propone la construcción de uno propio, un método que economizara el trabajo, y que estuviera en consonancia a las exigencias de la época respecto a la creación e innovación del conocimiento.

Desde esta perspectiva las demostraciones dejan de tener el protagonismo que tenían en la época helénica, y la heurística asume un papel principal en el quehacer matemático. Para ello se hace necesario combinar la geometría de los antiguos griegos con el álgebra moderna, dando la pauta para la construcción de la geometría analítica lo que por supuesto representa una importante ruptura en las matemáticas tradicionales.

Descartes presenta la "*geometría*" como una aplicación del "*Método*" mediante el cual se puede buscar la verdad en cada una de las ciencias, lo que se puede entender como mecanismo que apunta hacia el fortalecimiento del espíritu científico, recordando que para Bachelard el conocimiento evoluciona en la medida que se presenten cortes epistemológicos que permitan romper con lo que ha sido previamente establecido. Por eso, el trabajo realizado por Descartes será de gran importancia para el desarrollo del concepto de la integral y por tal motivo a continuación presentamos algunos de sus principales aportes.

En el primer libro de la *Geometría*, Descartes inicia planteando que dos magnitudes lineales al igual que los números pueden ser multiplicados, divididos, además que se les puede extraer raíz cuadrada, lo que marca una clara diferencia con la concepción griega en la que solo aceptaba la suma y la diferencia de segmentos.

En primer lugar, se ve en la necesidad de introducir una magnitud a la que denominará "*unidad*" y que según sus palabras le sirve para "*relacionarla lo más posible con los números y que ordinariamente puede ser tomada a discreción*..."

Para multiplicar dos segmentos *BD* y *BC* primero se establece un segmento unidad *AB* y se busca un segmento *EB*, que es la cuarta proporcional de los segmentos *AB*, *BC* y *DB*, como se consigna en la figura 15, en la cual se han colocado en la misma línea *AB* y *DB*, y en otra línea el segmento *BC*. Uniendo los puntos *A* y *C*, se traza *DE*, paralela a *CA*.

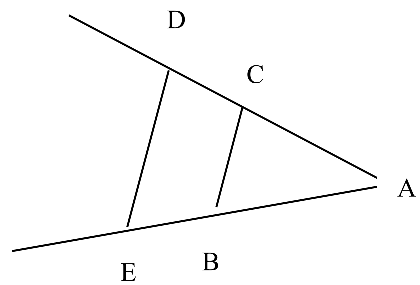


Figura 15. Método empleado para el producto de segmentos.

De la Figura 15, se tiene que:

$$ABBC=DBEB.$$

Por lo tanto *EB* es el producto de *BC* y *BD*.

De lo anterior es importante resaltar que Descartes extiende una propiedad numérica al campo de las magnitudes, referente a la interpretación de las proporciones. Sabemos que si *AB*, *BC*, *BD* y *BE* representarán números, la anterior proporción daría lugar a la igualdad,

$$AB\times EB=BC\times DB.$$

De esta manera, Descartes toma el producto entre *AB y EB* igual a *EB*, puesto que *AB* fue designado como la unidad. (Recalde, 2012).

Respecto a las construcciones geométricas aquí planteadas, novedosas desde ciertas perspectivas; ya eran conocidas por los griegos, sin embargo no llegaron a ser aplicadas, no por falta de una teoría apropiada, sino por la dificultad que les generaba la manipulación de las magnitudes inconmensurables, que como ya se mencionó anteriormente llegó a separar drásticamente lo aritmético de lo geométrico.

En el mismo sentido se debe hacer notar la diferencia que existe entre la unidad euclidiana y la unidad cartesiana; la primera es indivisible y esencia fundamental de los números; la segunda se hace necesaria en la medida que Descartes requiere multiplicar, dividir o extraer la raíz cuadrada de segmentos. Si bien con estos trabajos se empieza a tener una nueva visión de número, aún se mantiene la separación entre número y magnitud.

Otro aporte importante es la clasificación que Descartes realiza de las curvas, al emplear expresiones algebraicas para representar algunas de ellas, así por ejemplo, una parábola no necesariamente debe ser vista como el corte entre un plano y un cono, lo cual es visión estrictamente geométrica, sino que a partir de la propuesta cartesiana puede ser representada como una ecuación cuadrática. El universo de las curvas crece, como plantea Recalde:

> En este sentido, Descartes no sólo aceptaba las curvas construidas con regla y compás, sino también aquellas construidas a partir de un cierto aparato articulado que le permitiera expresarlas a través de una ecuación. (Recalde, 2011)

El aceptar la existencia de curvas mediante su representación algebraica también determina un corte epistemológico o ruptura con el conocimiento establecido, y en consecuencia existe la posibilidad de que el conocimiento matemático avance, pues se rompe con la concepción griega mediante la cual solo se trabajaba con aquellas curvas que podrían ser construidas a través de regla y compás. En consecuencia, con la aparición de las nuevas curvas, se hace necesaria la implementación de métodos novedosos para determinar áreas y volúmenes, los cuales estaban direccionados a aprovechar más expresiones algebraicas que construcciones geométricas. Es así como Descartes y su geometría analítica transforma el problema del cálculo de cuadraturas en el problema de encontrar el área bajo una curva.

La introducción del lenguaje simbólico debe ser considerada un valioso aporte para la evolución del conocimiento matemático, pues el empleo de símbolos permitirá economizar trabajo y pensamiento. Una vez Descartes define las operaciones entre segmentos, para operar con líneas no es necesario realizar su construcción gráfica, contrario a esto, cada línea puede ser denotada mediante una letra y así proceder con las operaciones como si se tratara de números. "*Así, para sumar la línea BD con CD, llamó a la una a y a la otra b y* *escribo a + b*” (Descartes, 1994, pág. 331)[40].

Francisco Vieta (1540-1603), precursor de Descartes es el pionero en los trabajos con álgebra simbólica y aunque sus aportes fueron de gran importancia para el desarrollo de las matemáticas y para el trabajo realizado por descartes, su forma de entender la geometría estaba amarrada a la tradición griega y finalmente su representaciones se limitaron a un álgebra sincopada.

A diferencia de Vieta, Descartes incluye un una serie de símbolos y códigos arbitrarios, no recurre a las abreviaturas de sus antecesores revolucionando la forma de hacer matemáticas en su época. Para los griegos, x representaba un segmento, x^2 un área y x^3 un volumen, era lo que conocían y podían representar a través de sus construcciones geométricas, además que para ellos y hasta ese momento expresiones de la forma $x + x^2$ carecía de sentido gracias a la propiedad de la homogeneidad de las magnitudes. Descartes le da un giro a lo anterior cuando plantea que el producto entre dos segmentos puede ser entendido como otro segmento, de tal manera, que a partir de ese momento x^2 y x^3 pueden ser vistas no como un área y un volumen respectivamente, sino como la segunda y tercera potencia de una línea recta.

Desde esta nueva perspectiva cualquier potencia de x puede ser interpretada como una magnitud, lo que permitirá “*aritmetizar la geometría al reducir todas las magnitudes geométricas a magnitudes lineales*” (De la torre Gómez, 2006, pág. 10), con la implementación del simbolismo algebraico por parte de Descartes se logra hacer un tránsito bidireccional entre la geometría y el álgebra, situación que será de gran importancia para los desarrollos de matemáticos realizados por Cavalieri y Wallis, pues el contar con el álgebra, la elaboración de sus aportes ganará practicidad al no estar amarrados necesariamente a procesos exclusivamente geométricos.

En este sentido, se puede afirmar que el trabajo presentado por Descartes propicia importantes rupturas con los conocimientos establecidos por sus antecesores, aspecto que sin duda beneficia la evolución del concepto de la integral.

[40] Citado por (Recalde, 2011, pág. 10)

A pesar de los aportes expuestos anteriormente, la concepción de Descartes respecto al infinito no se modifica, no hay algún tipo de ruptura o corte epistemológico que permita eludir el obstáculo que representa esta concepción, por el contrario, relaciona al infinito con Dios:

> Y nada hay a lo que llame propiamente infinito salvo aquello en lo que por ninguna parte halló límite alguno, sentido en el cual únicamente Dios es infinito. (Zellini, 1991, pág. 120)

Lo que permite visualizar que desde su perspectiva, la idea de límite no está relacionada con el infinito, condición que nos lleva a pensar que hasta ese momento, no es posible la construcción formal del concepto de la integral definida.

3.8 Wallis y la aritmetización de los indivisibles.

John Wallis (1616-1703), emplea el álgebra de segmentos y el lenguaje simbólico que fueron implementados por Descartes en la geometría analítica y se propone aritmetizar los indivisibles de Cavalieri, pues considera que los desarrollos aritméticos son más prácticos que los geométricos.

Al sentirse identificado con la nueva forma de hacer matemáticas, desde su trabajo busca construir técnicas que le permitan solucionar problemas, sin expresar una gran preocupación por presentar una sustentación completamente rigurosa de las mismas.

En *La Aritmética de los Infinitesimales*, trabajo donde expone el desarrollo de su teoría, Wallis buscando establecer un método que le permita determinar la cuadratura de algunas curvas determinadas y para tal propósito expone un total de 194 proposiciones y la aplicación de lo que designo como *"modus induction"*; el método de la inducción incompleta o interpolaciones.

Este método de inducción incompleta no es el mismo método demostrativo de inducción que se conoce actualmente, sino un procedimiento que fue utilizado por Wallis para generalizar algunos de sus postulados respecto a las series infinitas, aplicando algún grado de rigurosidad a través de un mecanismo que le permitía aproximarse intuitivamente a un límite determinado. Es importante recordar que hasta ese momento no disponía de las suficientes herramientas matemáticas para determinar dicho límite sin llegar a contradicciones lógicas como las que han sido mencionadas en secciones anteriores, particularmente cuando era necesario involucrar la noción de infinito.

Como se mencionó anteriormente, Wallis considera que el cálculo de cuadraturas se podía realizar de una manera más práctica si se hacía de forma aritmética, es así como las *omnes lineae* de Cavalieri, a partir de cero, pasarán a ser manejadas como series aritméticas; como sumas de sucesiones que tienden a un *límite*.

De esta manera, la disminución de procedimientos que permitían la aritmética expuesta en el trabajo de Wallis se impuso sobre los arduos procesos algebraicos que implica calcular cuadraturas a través de los indivisibles de Cavalieri.

Es importante destacar que el límite al cual se hace referencia aún no puede ser considerado como un concepto formal, sin embargo, el manejo intuitivo que realiza Wallis para determinarlo, es de gran utilidad para obtener la cuadratura de diferentes figuras, generando un corte epistemológico con la técnica que implicaba desarrollar procedimientos geométricos.

El implementar esta estrategia para determinar áreas, le implica profundizar sus investigaciones respecto a las series de potencias, lo que necesariamente lo llevaría al encuentro y posterior manipulación del infinito. Es así como Wallis mediante el desarrollo de su trabajo rompe con la tradición aristotélica y por medio de su método de la inducción incompleta llega a generalizar los resultados de series finitas, a las series infinitas, superando en alguna instancia el temor que genera la influencia del infinito, hasta el punto que se aventura a asignarle el símbolo “∞”para representarlo. Esta acción propicia un cambio significativo en la perspectiva de la noción que desde los tiempos de la antigua Grecia, se había propuesto evitar.

Es así como la aplicación del método de inducción incompleta desarrollado por Wallis, permitió implementar el paso al límite de forma intuitiva.

> Al corriente del álgebra literal de Vieta, de los métodos analíticos de Descartes y Fermat, y de las tendencias hacia los límites de los matemáticos de los países bajos (Stevin, Saint Vincent,…) y franceses (Roberval, Fermat,…), Wallis se propone rescatar e independizar a la aritmética de las representaciones geométricas, rompiendo con el álgebra geométrica de los antiguos, llegando incluso a presentar aritméticamente lo que para los griegos era la intocable teoría general de las proporciones de Eudoxo, con ello Wallis es, entre los predecesores del cálculo, quién más próximo está a la idea de límite y quien con mayor soltura lo utiliza, por lo menos a nivel intuitivo

Para determinar la cuadratura de una figura, Wallis busca encontrar la proporción entre la serie que corresponde a las líneas de dicha figura y la serie correspondiente a las líneas de un paralelogramo circunscrito a la figura. En este punto es importante destacar que durante este proceso, el autor muestra un gran interés por exponer explícitamente que las diferentes proposiciones que presenta, pueden ser aplicadas tanto en la aritmética como en la geometría, todo esto con el objetivo de garantizar que los desarrollos geométricos, podían ser trasladados al lenguaje aritmético. Tal pretensión se puede observar en la proposición 1 de *La Aritmética de los Infinitesimales* donde establece que*:*

> **Proposición 1**: Dada una serie, de cantidades en proporción aritmética (o como la sucesión de números naturales) continuamente creciente, empezando en un punto o en 0 (esto es, cero, o nada), tal como 0, 1, 2, 3, 4, etc., la cual se considera para investigar la razón de la suma de todos ellos, con la suma de igual número de términos iguales al mayor.[41]

Una vez Wallis establece la razón entre las sumas dadas mediante desarrollos aritméticos, inmediatamente busca brindar una representación geométrica de la situación, lo que se puede entender como una estrategia empleada para no alejarse completamente del rigor que ofrecían los desarrollos geométricos. Por ejemplo, después de establecer aritméticamente que la razón entre dos sumas es 1: 2, presenta un corolario en el que demuestra que un triángulo es a un paralelogramo como 1 es a 2.

En la segunda proposición de *La Aritmética de los infinitesimales*, se plantea que:

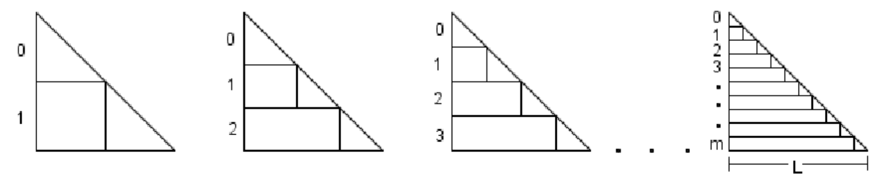
> **Proposición 2:** Si am es una sucesión finita o infinita y bm = *l*, (donde *l* es el mayor de los términos de a_m) una sucesión constante con el mismo número de términos que a_m, entonces la razón entre la suma de los términos de a_m y la suma de los términos de bm es1:2.

[41] Citado por (Bobadilla M. L., 2012, pág. 47)

Y seguidamente llega a comentar que:

> …si un triángulo con altura A y base B, se inscriben paralelogramos, cada uno de los cuales tiene altura $\frac{1}{\infty}A$, y el aumento de anchura es $\frac{1}{\infty}B$, la altura inscrita será $\infty \times \frac{1}{\infty}A$ y, y la base no será B, pero si $B - \frac{1}{\infty}B$.[42]

Al realizar una interpretación geométrica de la proposición 2, podríamos afirmar que, el número de términos m correspondería al número de rectángulos y l correspondería a la altura del último rectángulo de la sucesión, de esta manera se tendría que $m = \left(\infty \times \frac{1}{\infty}m\right)$, es la altura del triángulo, y que $l = l - \frac{1}{\infty}l$, la base; por lo que Wallis en esta proposición nos estaría dando la fórmula del área del triángulo $\frac{m \times l}{2}$.



$$m = \left(\infty \times \frac{1}{\infty}\mathrm{m}\right), \mathrm{L} = \mathrm{L} - \frac{1}{\infty}L$$

Figura 16. Área del triángulo

En la proposición 3 y de manera consecuente con los planteamientos realizados por Wallis, podríamos concluir que establece que el área de un paralelogramo de base m y altura l esta es m x l.

Desde el punto de vista de (Recalde, 2011) esta última presentación representa un salto cualitativo, pues le asigna un valor numérico a cada cuadratura, lo que modernamente constituirá la noción de área. Este tipo de cambios Bachelard los representa como una de las “mutaciones” a las que se debe enfrentar todo conocimiento científico cuando se dispone a evolucionar.

---

[42] Citado por (Bobadilla M. L., 2012, pág. 47)

Al establecer el área de un rectángulo como el producto de la base por la altura, permite interpretar cada sumando de la expresión $\left(\frac{0.a}{h}\right)^n + \left(\frac{1.a}{h}\right)^n + \cdots + \left(\frac{i.a}{h}\right)^n + \cdots + \left(\frac{h.a}{h}\right)^n$, que corresponde a una línea, como un rectángulo de base $\frac{a}{h}$ y altura i, para i = 1, 2,…h. Cuando h tiende a infinito, el ancho de cada uno de los rectángulos corresponde a la noción de infinitesimal.

En las proposiciones 19 y 20, establece resultados análogos a los enunciados en las dos primeras proposiciones, pero para una sucesión de cuadrados (geométricos o aritméticos):

$$\frac{0+1}{1+1} = \frac{1}{2} = \frac{3}{6} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6}.$$

$$\frac{0+1+4}{4+4+4} = \frac{5}{12} = \frac{1}{3} + \frac{1}{12}.$$

Hasta el caso para $n = 6$

$$\frac{0+1+4+9+16+26+36}{36+36+36+36+36+36+36} = \frac{91}{252} = \frac{13}{36} = \frac{1}{3} + \frac{1}{36}.$$

Aplicando inducción llega a que $\frac{0^2}{n^2} + \frac{1^2}{n^2} + \frac{2^2}{n^2} + \cdots + \frac{(n-1)^2}{n^2} + \frac{n^2}{n^2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6n}$, y como n crece indefinidamente, la razón entre las dos series es $\frac{1}{3}$. Este último resultado lo utiliza para demostrar que la razón entre el cono y el cilindro, o la pirámide y el prisma es como 1 a 3.

Durante el desarrollo de su trabajo Wallis se preocupa por indicar que sus resultados puedan ser aplicados tanto a cantidades numéricas como a magnitudes geométricas, siempre con la pretensión de lograr la aritmetización de los indivisibles.

Respecto a la cuadratura de una curva, Wallis considera que el problema puede ser reducido a determinar la razón entre el área de la figura curvilínea OAB (área que se necesita encontrar), la cual está formada por la curva y todos los segmentos paralelos a los ejes coordenados, y el cuadrilátero $OABC$, el cual es de área conocida y es circunscrito a OAB. Con el propósito de solucionar este problema Wallis realiza la suma de una sucesión finita de indivisibles, llegando a generar una serie infinita.

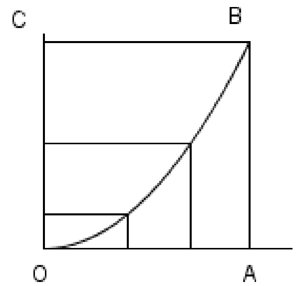


Figura 17. Cuadratura de una región limitada por una curva y=x^n

Si dividimos el segmento $OA = a$ de la figura anterior en n partes de longitud $h = \frac{a}{n}$, donde n es infinito, entonces la figura curvilínea OAB puede ser vista como infinitas líneas paralelas al eje Y cuya altura está dada por x^k, de tal forma que el cuadrilátero $OABC$ podría verse formado por infinitas líneas[43], todas de igual longitud a^k.

Al establecer la razón entre las cuadraturas de las figuras mencionadas anteriormente, se obtiene que:

$$\frac{Cuad.OAB}{Cuad.OABC} = \frac{\left(\frac{0a}{n}\right)^k + \left(\frac{1a}{n}\right)^k + \cdots + \left(\frac{na}{n}\right)^k}{a^k + a^k + \cdots + a^k} = \frac{\sum_{i=0}^{n} i^k}{\sum_{i=0}^{n} n^k}$$

Como n tiende a infinito, entonces la anterior es una razón de índice k y por lo tanto

$$\frac{Cuad.OAB}{Cuad.OABC} = \frac{\sum_{i=0}^{n} i^k}{\sum_{i=0}^{n} n^k} = \frac{1}{k+1}$$

Ahora, como el paralelogramo $OABC$ es de base a y altura a^k, entonces su cuadratura es a^{k+1}. Luego, se concluye que

$$\frac{Cuad.OAB}{a^{k+1}} = \frac{1}{k+1}$$

[43]Es importante destacar que en este punto Wallis está empleando los indivisibles de Cavalieri.

Es decir

$$Cuad.OAB = Cuad.[x^k]_0^a = \frac{a^{k+1}}{k+1}$$

Lo que claramente puede ser entendido como la integral definida que se conoce en la actualidad.

$$\int_0^a x^k dx = \frac{a^{k+1}}{k+1}$$

Si bien el resultado anterior ya era conocido, la importancia del método desarrollado por Wallis radica en que logra determinar la cuadratura de una región limitada por una curva de ecuación $y = x^{\frac{p}{q}}$, el eje x y la recta $x = 1,$ obteniendo como resultado la expresión:

$$Cuad.\left[x^{\frac{p}{q}}\right]_0^1 = \frac{q}{p+q}$$

Para determinar la cuadratura del círculo, Wallis se fundamenta en los resultados anteriores, considerando la región *OAB* limitada por la curva $y = (1-x^2)^{\frac{1}{2}}$ y los ejes coordenados. Tal y como se muestra en la siguiente figura.

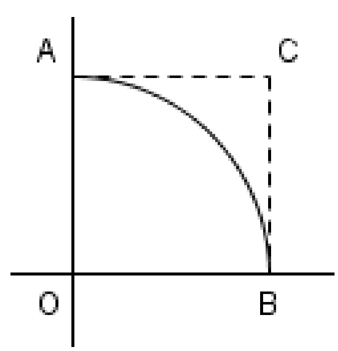


Figura 18. Cuadratura del círculo.

La cuadratura del círculo corresponde a los valores $p = \frac{1}{2}$ y $q = \frac{1}{2}$, en la curva $y = \left(1 - x^{\frac{1}{p}}\right)^{q}$. Wallis busca extrapolar los elementos de las tablas que ha elaborado para valores enteros, a valores de p y q racionales. Elabora una nueva tabla que incorpora argumentos fraccionarios; sin embargo no puede obtener todos los argumentos, pues no tiene regla de formación para las ubicaciones donde los dos índices son ambos fraccionarios. En particular no le proporciona información para el caso $p = \frac{1}{2}$ y $q = \frac{1}{2}$ por lo que procede mediante aproximaciones sucesivas obteniendo la siguiente relación:

$$\frac{\square}{2}\prod_{n=1}^{v}\frac{2n}{2n-1} < \prod_{n=1}^{v}\frac{2n+1}{2n} < \frac{\square}{2}\prod_{n=1}^{v+1}\frac{2n}{2n}.$$

$$\prod_{n=1}^{v}\frac{(2n)^2}{(2n-1)(2n+1)} < \frac{2}{\square} < \left(\prod_{n=1}^{v}\frac{(2n)^2}{(2n-1)(2n+1)}\right)\frac{2n+2}{2n+1}.$$

De acuerdo a las condiciones dadas tenemos que $\frac{2}{\square} = \frac{\pi}{2}$. Wallis$n$ aumenta, los valores de la derecha y de la izquierda de la desigualdad anterior se van aproximando, pues el valor de $\frac{2n+2}{2n+1}$ tiende a uno. Esto lo lleva a su resultado:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2\,.\,2\,.\,4\,.\,4\,\cdots}{1\,.\,3\,.\,3\,.\,\cdots}$$

A modo de conclusión, podemos decir que en el desarrollo del trabajo de Wallis juega un papel importante la libertad que le da a su capacidad intuitiva, además lo eficaz que resulta el método de la inducción incompleta para la consecución de resultados, pues a partir de él se logra aplicar procedimientos que anteriormente solo podían ser aplicados a potencias enteras.

> … dar carta de naturaleza aritmética a lo irracional, superando el imperativo pitagórico de considerar lo irracional sólo en el campo de la Geometría, removiendo uno de los obstáculos que impedía la formulación del concepto de límite… (Gonzales, II - 1995, pág. 418).[44]

[44] Citado por (Bobadilla, 2012, pág. 51)

El considerar que una figura F estaba formada por una cantidad infinita de rectángulos cuya *altura* depende de la característica de la curva y de *base* una cantidad infinitamente pequeña, le permite determinar la cuadratura de la figura F mediante la suma de las cuadratura de todos estos rectángulos infinitesimales, recordando que ya se contaba con el aspecto fundamental de que el área de un rectángulo se determinaba como el producto entre la base y la altura. De esta manera y aunque de forma intuitiva, con Wallis se empieza a aplicar el paso al límite y de algún modo se lleva a cabo manipulación de procesos infinitos.

Es así como inicia una nueva etapa en la evolución del concepto de la integral definida, donde el infinito casi innombrable en la época de los antiguos griegos ya es denotado mediante el símbolo ∞, y que hay una aproximación a su manipulación definitiva mediante el método de la inducción incompleta, sin embargo aún se debe recorrer la historia para llegar a definir el concepto de límite, y por lo tanto a la definición de la integral.

Los infinitesimales trabajados por Wallis serán retomados por Newton y Leibniz, quienes realizaran diferentes aportes en la evolución del concepto de la integral definida, trabajos que nos permitirán seguir evidenciando la manera como el infinito continua apareciendo en la evolución de dicho concepto.

3.9 Newton y Leibniz: sistematización y generalización del cálculo de cuadraturas.

Los trabajos realizador por Kepler, Cavalieri, Fermat y Wallis establecen una serie de herramientas que permiten obtener la cuadratura de algunas curvas particulares, sobre esta base Newton y Leibniz logran desarrollar un conjunto de algoritmos generales, algoritmos fundamentados en procesos algebraicos cuya aplicación permite solucionar una gran variedad de problemas, situación que inevitablemente conducirá a que la operación "*integración*" llegue a ser considerada como una generalización del cálculo de cuadraturas.

Newton y Leibniz realizan una sistematización del trabajo hecho por sus antecesores, establecen la relación inversa que existe entre el cálculo de cuadraturas y el cálculo de tangentes con lo que cual logran importantes avances en el desarrollo del cálculo infinitesimal. De esta manera, algunos problemas como: cálculo de cuadraturas, cálculo de tangentes o determinar máximos y mínimos son reducidos a la aplicación de unas tablas o reglas que permitían obtener cuadraturas y anti cuadraturas.

Durante el desarrollo de estos procesos algorítmicos debieron realizar la manipulación del infinito, puesto que para ello era necesario emplear implícitamente la idea de límite, algo que aún en esa época debían hacer intuitivamente, pues a pesar de los grandes avances que habían realizado con respecto a los geómetras griegos y a sus más inmediatos precursores, no lograban formalizar la noción de limite, consecuencia de los problemas que generaba la aplicación de la noción de infinito respecto al rigor lógico; motivo por el cual consideramos que el infinito continua estableciéndose como un obstáculo para la formalización de algunos conceptos matemáticos, en particular el concepto de la integral definida.

En las próximas dos secciones se estudiarán los aportes que realizan Newton y Leibniz, las diferentes dificultades y críticas a las que se ven enfrentados debido al manejo que le asignan al infinito, particularmente cuando se ven obligados a manipular cantidades infinitesimales.

3.9.1 **Newton y el problema de las cantidades evanescentes**.

Isaac Newton (1642-1727) es considerado uno de los precursores del análisis matemático debido a la forma como aborda el problema de las cuadraturas, problema que para la época consistía en determinar el área bajo la curva, y que Newton consideraba que su solución dependía de encontrar la ecuación de una curva que correspondiera a la cuadratura de otra.

Newton demuestra que si una curva está representada por una ecuación de la forma $y = ax^{\frac{m}{n}}$, entonces la expresión que debe representar su cuadratura debe estar expresada por $z = \frac{na}{m+n} x^{\frac{m+n}{n}}$. Esta demostración representa la primera versión explicita del teorema fundamental del cálculo, en otras palabras, establece la relación inversa que existe entre el cálculo de cuadraturas y el cálculo de tangentes.[45]

En la regla I de su *De Analysi* expone la forma como obtiene el resultado. Veamos:

Regla I: Si $ax^{\frac{m}{n}} = $ y, será $\frac{an}{n+m} x^{\frac{n}{m+n}} = $ área ABD. (Newton, 2003, Pág. 12-13)[46]

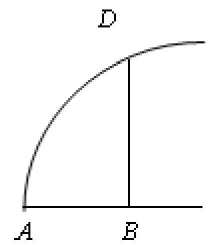


Figura 19. Cuadratura bajo la curva $y = \frac{na}{m+n} x^{\frac{m+n}{n}}$

A continuación se presenta la técnica con la que Newton llega a establecer que $z = \frac{2}{3} x^{3/2}$ es la cuadratura (integral indefinida en términos modernos) de la curva $y(x) = x^{\frac{1}{2}}$. Para tal caso se tiene en cuenta la siguiente figura.

---

[45]Esta relación ya había sido presentada en términos geométricos por Isaac Barrow en su trabajo denominado *Lecciones Geométrica*, y es gracias a este trabajo que Newton desde un punto de vista aritmético llega por primera vez de manera explícita a establecer la relación inversa entre el trazado de tangentes y el cálculo de áreas.

[46] Citado por (Bobadilla M. L., 2012)

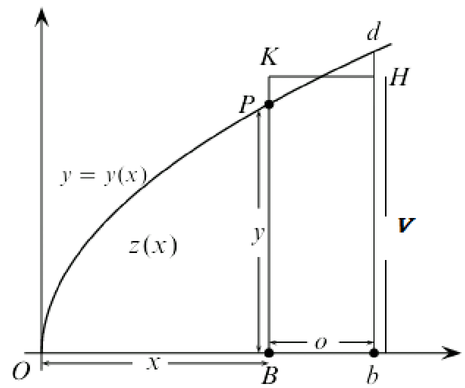


Figura 20. Cuadratura de $z = \frac{2}{3}x^{3/2}$

Sea $x = OB$ la base de la figura OPd; $y = BP$ una perpendicular a $= OB$ y z el área (en términos modernos) de OPB.

Sea $Bb = o$; $BK = v$ y el rectángulo $BbHK$ (ov) de igual espacio que $BbdP$. De acuerdo a la figura; $Ob = x + o$ y el área de $Odb = z + ov$.

Newton plantea que, $z = \frac{2}{3}x^{3/2}$ o lo que es lo mismo $zz = \frac{4}{9}x^3$, que al aplicar las sustituciones $x = x + o$; $z = z + ov$ obtiene que:

$$\frac{4}{9}(x + o)^3 = (z + ov)(z + ov)$$

$$\frac{4}{9}x^3 + \frac{4}{3}x^2o + \frac{4}{3}xo^{2+}\frac{4}{9}0^3 = zz + 2zov + 0^2v^2$$

Si a la última expresión se eliminan los términos iguales y se divide entre "o" se obtendría: $\frac{4}{3}x^2 + \frac{4}{3}xo + \frac{4}{9}o^2 = 2zv + ov^2$ ahora si se supone que "o"$= Bb$ se reduce hasta el infinito, los términos multiplicados por "o" se "desvanecen", de esta manera se llega a que $\frac{4}{3}x^2 = 2zv$, además si "o" $= Bb$ se considera infinitamente pequeña; $v = BP =$

y por lo tanto $\frac{4}{3}x^2 = 2zy$.

Tomando $z = \frac{2}{3}x^{3/2}$, entonces, $\frac{4}{3}x^2 = \frac{2}{3}x^{3/2}$ y de donde se puede concluir finalmente que $y = x^{\frac{1}{2}}$.

Después de la demostración para este caso particular, Newton realiza la generalización, es decir demuestra que la expresión $z = \frac{na}{m+n}x^{\frac{m+n}{n}}$ corresponde a la cuadratura de la curva $y = ax^{\frac{m}{n}}$.

La regla anterior no expresa un gran avance en la construcción de conocimiento matemático, pues como se puede verificar, el resultado era conocido desde los trabajos desarrollados por Wallis sin embargo, la técnica empleada sí es novedosa, pues a diferencia de Wallis, Newton no utiliza indivisibles sino infinitesimales.

En la argumentación de su prueba Newton se apoya en procedimientos algebraicos y en una cantidad infinitesimal denotada por el símbolo “o”, cantidad que puede ser empleada como denominador al ser distinta de cero, pero que al mismo tiempo se hacía desaparecer cuando era empleada como un sumando, pues se consideraba una cantidad tan pequeña que en realidad no adicionada nada.

Es importante insistir que el desarrollo implementado por Newton es completamente diferente al que emplearon sus antecesores, pues a diferencia de ellos, no parte de la suma de áreas infinitesimales, sino que estudia la variación momentánea del área en un punto determinado, no hace uso del “presunto” paso al límite, contrario a esto Newton llega a demostrar que la razón de cambio del área bajo la curva dada por el cociente $\frac{z(x+o)-z(x)}{o}$, se hace igual a la ordenada de la curva[47] cuando “o” se desvanece.

---

[47]En termino actuales estaría afirmando que la derivada de $z(x)$ es la función $y = f(x)$, además de encontrar una demostración en términos algebraicos de la relación inversa entre el trazado de tangentes y el cálculo de áreas.

Aunque, estos avances permitieron abordar una diversidad de problemas gracias a la construcción y aplicación de unas tablas de cuadraturas y anti cuadraturas. La falta de rigor que implicaba la implementación de cantidades infinitesimales que aparecían y desaparecían a conveniencia, generó fuertes críticas al trabajo realizado por Newton. Estas críticas estaban relacionadas con la manipulación de los infinitesimales, cantidades infinitamente pequeñas que no podían ser explicadas con el rigor que exigían las matemáticas como una disciplina científica, procesos que en su gran mayoría estaban fundamentados en la intuición y que si bien permitieron realizar importantes avances; las bases sobre las que se establecían no eran lo suficiente sólidas. En consecuencia, la noción de infinito en esta época obstaculizaba la evolución de conceptos matemáticos como el de límite, el cual es indispensable para formalizar otros conceptos como el de la derivada o la integral.

Respecto a las críticas a las que se ve enfrentado el nuevo cálculo, una de las más fuertes la realiza el obispo y teólogo George Berkeley; quien llegó a comparar los desarrollos Newtonianos con saltos de fe similares a los dogmas religiosos, Berkeley consideraba carente lógica y de una fundamentación rigurosa la implementación de unos "incrementos evanescentes" que no eran cero, pero que al mismo tiempo y según fuera necesario podían llegar a ser anulados. Estos incrementos evanescentes no eran ni más ni menos que los infinitesimales representados por "o", la herramienta empleada por Newton en el desarrollo de su teoría.

Un aspecto que se debe destacar en este punto es que a pesar de las críticas a las que ve sometido su cálculo, Newton continua en la búsqueda de mecanismos que le permitan descifrar reglas para obtener la cuadratura de otras figuras. Esta intención de continuar buscando estrategias, formulas o mecanismos que permitan avanzar y fundamentar de mejor manera sus aportes son importantes en la medida que permiten bordear los obstáculos epistemológicos con los que se deben enfrentar y de alguna manera potenciar el desarrollo del conocimiento.

Un ejemplo de lo anterior es la forma en la que presenta una aproximación para el valor de π, trabajo que expone en *The Methodus Fluxionum et Serierum Infinitorum*, apoyado en el método de interpolaciones de Wallis y en una extensión que realiza del teorema del binomio para exponentes racionales.

Para cumplir con su objetivo Newton utiliza el resultado obtenido para la cuadratura del círculo de ecuación $y = \sqrt{x - x^2}$. En términos modernos, considera una semicircunferencia de centro $C\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ y de radio $r = \frac{1}{2}$, el punto medio $B\left(\frac{1}{4}, 0\right)$ y el ángulo $BCD = \frac{\pi}{3}$.

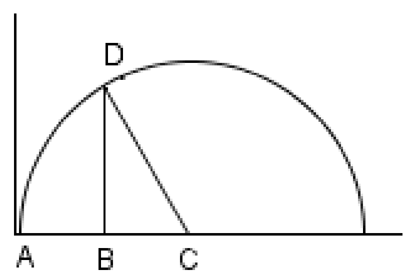


Figura 21. Semicircunferencia de centro $C(0, \frac{1}{2})$ y radio $r = \frac{1}{2}$. - Cálculo de π

Dado que $a(ABD) = a(ADC) - a(DBC)$ y que $a(ADC) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\pi r^2\right) = \frac{\pi}{24}$, se tiene que $a(ABD) = \frac{\pi}{24} - \frac{\sqrt{3}}{32}$.

Por otra parte, por la cuadratura del círculo:

$$a(ADB) = \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{5}x^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{28}x^{\frac{7}{2}} - \frac{1}{72}x^{\frac{9}{2}} - \cdots\right]_0^{1/4} = \frac{2}{3.2^3} - \frac{1}{5.2^5} - \frac{1}{28.2^7} - \frac{1}{72.2^9}\cdots.$$

De donde se obtiene:

$\pi = \frac{3\sqrt{3}}{4} + 24\left(\frac{2}{3.2^3} - \frac{1}{5.2^5} - \frac{1}{28.2^7} - \frac{1}{72.2^9} \cdots\right).$

Como se mencionó al iniciar el ejemplo, Newton emplea la expresión que se había obtenido para el círculo, expresión que correspondía a una serie de potencias a la que luego le aplicaba las fórmulas para obtener cuadraturas, es decir si $y = ax^{\frac{m}{n}}$, $z = \frac{na}{m+n}x^{\frac{m+n}{n}}$ representaría su cuadratura. En estos dos procedimientos, tanto en la obtención serie de potencias que permitía representar el círculo, cómo en la forma a través de la cual determina la regla para calcular las cuadraturas, era necesario la implementación del infinito; en el primer caso al tener que generalizar las series infinitas y en el segundo cuando empleaba cantidades infinitesimales.

Esta situación siempre le generó incomodidad, pues era consciente de los problemas de fundamentación que implicaba y las críticas que generaba. Por tal motivo, siempre estuvo interesado en encontrar mecanismos que le permitieran exponer de forma rigurosa sus resultados y es así, como pretende encontrar en la física una salida a este problema.

Newton al considerar que los conceptos físicos están bien fundamentados busca llevarlos a las matemáticas, considera el área como el espacio recorrido por un móvil que se desplaza a una velocidad constante k en un tiempo t, $A = kt$; o como generada por el movimiento continuo de una recta de longitud k (la ordenada). Cuando transcurre un tiempo infinitesimal ("muy pequeño"), lo que modernamente denotamos por dt, la ordenada también llega a realizar un desplazamiento "muy pequeño", en otras palabras se traslada una distancia infinitesimal.

Según (Bobadilla M. L., 2012):

> Los infinitesimales aparecen en los *Principia* como "momentos", como principios generadores de cantidades finitas. Una variable es una cantidad que fluye y lo que es, en el instante mismo que empieza a fluir, es el momento de dicha cantidad; se afirmaba entonces que una cantidad infinitesimal era una entidad discreta que preserva cualidades de lo continuo. Más adelante, en *de la Cuadraturas de Curvas*, Newton considera las cantidades como generadas por el movimiento continuo por oposición a los infinitesimales que sugieren siempre un tratamiento discreto, con cierta dosis de continuidad. Citado por (Bobadilla M. L., 2012, pág. 58)

En correspondencia con lo anterior, se puede decir que hasta ese entonces una cantidad infinitesimal era considerada como una cantidad discreta que preserva algunas cualidades de lo continuo; a esta mirada Newton le contrasta con una perspectiva diferente fundamentada en los principios dinámicos de Galileo, estableciendo que las cantidades eran generadas por el movimiento continuo[48].

De esta manera, las cantidades son determinadas a través de la velocidad del movimiento con el cual se generan por ejemplo, la rapidez con la que cambia el área puede permitir determinar el área. Desde este nuevo punto de vista Newton denomina como "fluentes" a las cantidades que son generadas por el movimiento continuo y "fluxiones" a las velocidades de dichos movimientos.

A partir de esta concepción, se considera que una curva es generada a través del movimiento de un punto, lo que permite que las coordenadas x y y, como la cuadratura z, logren "fluir" o que cambien con respecto al tiempo. En su trabajo newton denota las "*fluentes*" con algunas letras determinadas, y las correspondientes "*fluxiones*" con las mismas letras, con la diferencia que les adiciona un punto en la parte superior, es decir, si x, y representan las fluentes, $\dot{x}, \dot{y}$ representan las fluxiones respectivas.

En el desarrollo de su algoritmo emplea el símbolo "o" para representar un incremento infinitesimal de tiempo, mientras que los incrementos correspondientes a $x, y, z, \ldots$ serían $\dot{x}o, \dot{y}o, \dot{z}o$ respectivamente, y presenta el siguiente ejemplo con la intención de aclarar el proceso: considera la ecuación $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$, que al sustituirla por los incrementos respectivos obtiene $(x + \dot{x}o)^3 - a(x + \dot{x}o)^2 a(x + \dot{x}o)(y + \dot{y}o) - (y + \dot{y}o)^3 = 0$

[48] Entre continuo e infinito siempre ha existido una estrecha relación, por ejemplo Aristóteles la expresa de la siguiente manera: "El movimiento parece ser uno de los continuos, y lo primero que se manifiesta en lo continuo es el infinito. Por esto sucede a menudo que quienes definen lo continuo utilizan la noción de "infinito", ya que entienden por "continuo" lo que es divisible hasta el infinito". (Aristóteles, Física, 1995, pág. 79).

También puede ser observada esta relación, cuanto Cantor le asigna el cardinal "*C*" al continuo, y luego lo emplea para establecer el cardinal de un conjunto infinito no numerable.(Cantor, conquistador del infinito, 353-373, revista trimestral de cultura moderna.1945)

Desarrollando los binomios, estableciendo las cancelaciones respectivas, dividiendo por "o" y finalmente despreciando los términos en los que figure el factor "o", llega a la siguiente ecuación:

$$3\dot{x}x^2 - 2a\dot{x}x + a\dot{x}y + a\dot{y}x - 3\dot{y}y^2 = 0.$$

De lo cual se puede obtener el cociente diferencial,

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{3x^2 - 2ax + ay}{3y^2 - ax}.$$

Lo que modernamente corresponde al cociente de las derivadas parciales de la función $f(x, y) = x^3 - ax^2 + axy - y^3$.

Si bien en el desarrollo anterior no se hace referencia a las cuadraturas se puede observar que Newton busca darle una perspectiva diferente a los trabajos anteriores al involucrar en sus procedimientos la fiabilidad que le permitían los conceptos físicos, sin embargo, su manejo respecto a los infinitesimales en realidad siguen manteniendo el mismo nivel de ambigüedad, pues cuando emplea el incremento infinitesimal de tiempo "o" lo realiza de la misma manera que en los casos anteriores, es decir, "o" puede dividir porque es diferente de cero y al mismo tiempo puede ser anulado cuando aparece como un sumando, pues al ser infinitamente pequeño realmente no suma nada. Una demostración que la manipulación del infinito continuaba generando problemas en los desarrollos matemáticos.

De esta manera, podemos decir que los métodos empleados por Newton enfrentaron fuertes cuestionamientos al no contar con unos argumentos sólidos para la manipulación del concepto de infinito, a pesar de ello, amplió el dominio de funciones con respecto a las que trabajaban sus antecesores, además de lograr establecer algunos algoritmos eficientes para el cálculo de cuadraturas. Fue consciente de la falta de rigor de los resultados que obtenía mediante la aplicación de cantidades infinitesimales, por lo que siempre demostró la intención de buscar una fundamentación adecuada para sus argumentos; motivo por el cual llegó a presentar tres versiones de su cálculo, sin embargo en cada una de sus presentaciones se encontraba con la imperiosa necesidad de emplear indivisibles, fluxiones o cantidades evanescentes, términos que aún seguían generando dificultad al interior del conocimiento matemático, particularmente no permitía instaurar unas bases sólidas para la definición del concepto de integral definida.

3.9.2 Leibniz y las ficciones útiles.

Por su parte Gottfried Von Leibniz (1646-1716) inicia su trabajo en el cálculo aceptando lo infinitamente pequeño, consideraba que un área podía ser calculada a través la suma infinita de unas magnitudes infinitamente pequeñas. Para Leibniz una curva estaba constituida por una cantidad de segmentos de longitud infinitesimal, que al ser prolongados determinaban la tangente a la curva en cada uno de sus puntos.

En el desarrollo de su trabajo estudia sucesiones numéricas de la forma $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_{n,\ldots}$, y de las sucesiones que se generan a partir de sus diferencias $b_1 = a_1 - a_0$, $b_2 = a_2 - a_1, \ldots, b_n = a_n - a_{n-1,\ldots}$, analiza cómo se comporta la suma de estas diferencias y con base en los resultados obtenidos llega a determinar la existencia de una relación inversa entre la suma y la diferencia de estas sucesiones; situación que decide trasladar al campo de la geometría logrando avances notables en el desarrollo del nuevo cálculo.

El triángulo aritmético de Pascal le sirve de referencia para la construcción de su triangulo armónico, estableciendo una relación inversa entre estos dos arreglos; de tal manera que cada columna del triángulo aritmético contiene las sumas de los términos de la columna precedente, mientras que cada columna del triángulo armónico contiene las diferencias entre los términos de la columna precedente. Desde este punto de partida Leibniz interpreta las cuadraturas como suma de ordenadas y la pendiente de la tangente como la diferencia entre ordenadas sucesivas, llegando a descubrir la relación inversa entre estos dos problemas.

En la propuesta presentada por Leibniz las curvas son entendidas como una figura poligonal de lados infinitamente pequeños que en el “limite” terminarían por agotar completamente la curva dada. De igual manera, considera que existen magnitudes infinitesimales componentes de la totalidad y que las curvas están conformadas por unos componentes que siguen un orden determinado, es así como llega a plantear sumas y diferencias de componentes consecutivos.

Leibniz toma la sucesión de ordenadas que se definen a partir de una curva y considera que están separadas entre sí por una misma distancia, tal y como muestra en la siguiente figura:

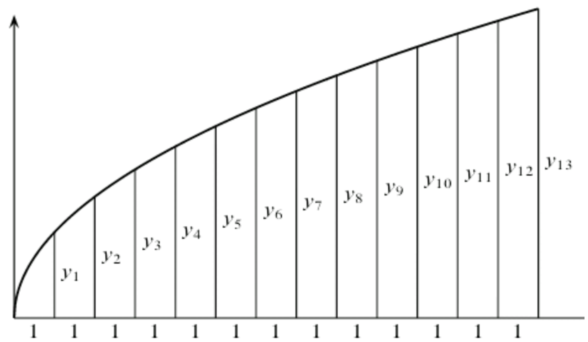


Figura 22. Sucesión de ordenadas a una misma distancia.

Si la distancia entre las ordenadas se toma la unidad, la suma entre ellas puede representar una aproximación de la cuadratura de la curva (el área bajo la curva), ahora que si la unidad se toma cada vez más pequeña la aproximación al área sería mucho mejor. De esta manera este planteamiento apunta a que si la distancia que representa la unidad corresponde a una cantidad infinitamente pequeña, entonces la suma de estas ordenadas correspondería exactamente con la cuadratura de la figura y la diferencia entre ordenadas consecutivas permitiría determinar la pendiente de la recta tangente. De esta relación entre sumas y diferencias, Leibniz establece que el cálculo de cuadraturas y el cálculo de tangentes son operaciones inversas.

Con el propósito de resolver problemas concretos respecto al cálculo de cuadraturas y tangentes, Leibniz emplea el triángulo característico implementado por Pascal. El triángulo característico es un triángulo de lados infinitamente pequeños o infinitesimales, cuyos catetos son paralelos a los ejes coordenados y la hipotenusa corresponde a un segmento de la recta tangente, que al tomarse infinitamente pequeño coincide con un trozo de curva, tal y como se puede observar en la figura 23.

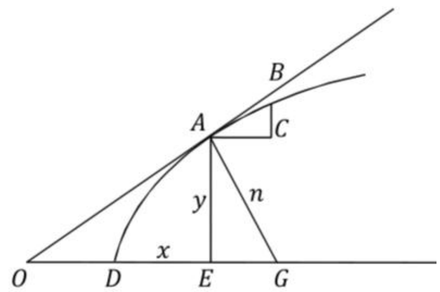


Figura 23. Triángulo característico.

Al emplear notación presentada por el mismo Leibniz para las magnitudes infinitesimales, los lados del triángulo característico pueden ser representados de la siguiente: $AC = dx, BC = dy,$ y $AB = ds$.

Leibniz considera que el triángulo característico es infinitamente pequeño, de tal forma que los puntos AB podían ser infinitamente próximos y por lo tanto los lados AC y BC serían tan pequeños como se quisiera y aun así el triángulo ABC seguiría siendo semejante al triangulo AEG, esta perspectiva le permitió considerar el triángulo característico como un elemento constitutivo de la curva. Esta consideración es importante en la medida que le retorna la homogeneidad entre la sumas de objetos de la misma magnitud, en otras palabras rompía con la heterogeneidad que para algunos implicaba el uso de los indivisibles. Al respecto (Brunschvivicg, 1945) comenta:

> La consideración del "triángulo característico" es el primer paso hecho por Leibniz fuera del método vulgar de los indivisibles. Desde el punto de vista teórico esta consideración permite restablecer la homogeneidad, rota en apariencia por los sobre entendidos de Cavalieri, entre los elementos de las sumas y las sumas mismas; la superficie estará compuesta por pequeñas superficies, como la línea por "pequeñas líneas", o el cuerpo por corpúsculos. (Brunschvivicg, 1945, pág. 202)

De esta manera, el retorno de la homogeneidad le permite una manipulación de lo infinitamente pequeño, pues desde este punto de vista Leibniz considera que se mantienen las relaciones cuando se pasa de lo finito a lo infinitesimal

Otro aspecto que permite constatar la visión de Leibniz respecto al infinito; es el planteamiento desde el cual indica que una curva puede ser entendida como un polígono de infinitos lados, posición que de alguna manera deja entrever la existencia del infinito actual. Ahora bien, esta proximidad que admitía hacia el infinito en acto estaba relacionada con la forma con la que este entendía la naturaleza; para Leibniz la infinitud estaba relacionada con Dios y por lo tanto debería reflejarse en su creación; postura contraria a la expuesta por Aristóteles, quien argumentaba que el infinito correspondía a una noción antinatural.

Interpretar una curva como una figura poligonal de infinitos lados es un argumento similar al que había sido presentado por Antifón en su trabajo sobre la cuadratura del círculo y que como se mencionó anteriormente, fue refutado por el propio Aristóteles; refutación que podría ser aplicada de la misma manera al planteamiento Leibniziano pues al no contar con la noción de limite, el infinito siempre era relacionado con lo inagotable y por tal motivo no podría existir una aproximación real a la curva.

Los infinitesimales que para Leibniz se manifestaban en el mundo real; como en las velocidades o en las fuerzas que podían llegar a ser consideradas instantáneas, de alguna manera se hacía necesario trasladarlos al campo de las matemáticas, sin embargo, dichas cantidades perecían existir solamente en la imaginación de quien necesitaba aplicarlas. El infinito, para este caso en particular lo infinitamente pequeño, parecía estar más allá de lo intuitivo al presentarse en la naturaleza, lastimosamente no podía estructurarse un piso firme sobre el cual llegara a demostrarse todo aquello que de su aplicación se derivaba. Leibniz era consciente de esta dificultad, a lo que (Zellini Siruela, 1991) comenta:

> Leibniz siguió hablando de los infinitesimales dx como "ficciones" útiles para el arte de la invención matemática, como entidades imaginarias que no corresponden a cosas actualmente existentes fuera de la mente de quien las concibe. En lugar de los infinitesimales, escribía, se hubiesen podido emplear expresiones del tipo "todo lo pequeño que haga falta para que el error sea menor que cualquier error dado"… el propio Leibniz era consciente de determinadas anomalías y ambigüedades que entrañaba el empleo de incrementos infinitamente pequeños. "tales incrementos", observaba "no pueden ser representados por construcción alguna". (Zellini, 1991, pág. 136).

El carácter de ficción que Leibniz le asignaba a los infinitesimales gira alrededor de la concepción que tenía sobre los entes matemáticos, para él los objetos matemáticos eran esencialmente abstractos, están únicamente en la mente de quienes trabajan con ellos, en efecto, los infinitesimales son ficciones de las cuales no se tiene una certeza a parte de su utilidad y practicidad a la hora de resolver problemas. Visión que claramente contrasta con la idea de que las nociones que se emplean en matemáticas deben estar completamente fundamentadas.

Uno de los aportes más sobresalientes del trabajo de Leibniz fue denominado método de "trasmutación"; método que tiene como punto de partida los indivisibles de Cavalieri y aquellos trabajos que utilizan rectángulos infinitesimales para el cálculo de cuadraturas.

La idea fundamental del método de transmutación es la siguiente: Dadas dos regiones planas $A\ y\ B$, si se puede establecer una correspondencia uno a uno entre los indivisibles[49] de la región A y los de la región B, de tal forma que dichos indivisibles tengan la misma área, entonces se puede decir que B se obtiene de A mediante una transmutación y por consiguiente que las dos regiones tienen la misma área. Leibniz desarrolla el método de transmutación[50] apoyado en el triángulo característico como se explica a continuación:

Consideremos la región limitada por la curva $y = f(x)$, el eje x y las rectas $x = A$ y $x = B$. Tomemos un punto $P(x, y)$ y formemos el triángulo característico PQR, tal que $Q\ (x + dx, y + dy)$. Sea la tangente determinada por el arco infinitesimal $ds \cong PQ$, cuya prolongación corta al eje y en el punto $T(0, z)$; localizamos el punto S, tal que OS (de longitud p) sea perpendicular a la tangente SQ, como se muestra en la Figura 24.

[49] Los indivisibles son tomados como una infinidad de rectángulos infinitesimales. (Bobadilla M. L., 2012)

[50] Tomado de (Recalde, Lecciones de historia de la matemática, 2011)

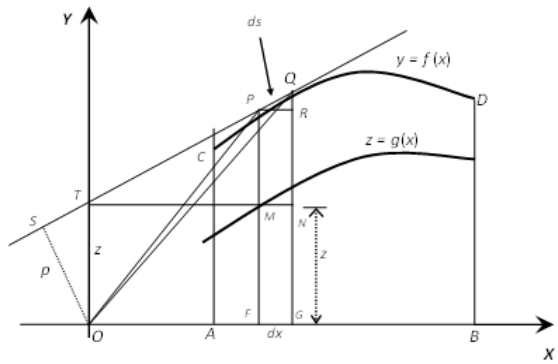


Figura 24. Método de la Transmutación.

Como los triángulos PQR y TMP son semejantes se tiene que, $\frac{TM}{PR} = \frac{MP}{QR}$ es decir $\frac{x}{dx} = \frac{y-z}{dy}$; de lo cual se tiene que z[51] $= y - x\frac{dy}{dx}$ (1)

Por la semejanza de los triángulos PQR y OTS se tiene que $\frac{dx}{p} = \frac{ds}{z}$, o lo que es lo mismo $pds = zdx$.

Si denota por a (PQR) el área del triángulo infinitesimal OPQse tiene que a $(PQR) = \frac{1}{2}pds = \frac{1}{2}zdx$.

Ahora si se considera la región limitada por la curva $y = f(x)$ y los segmentos OC y OD, formada por todos los triángulos infinitesimales de la forma OPQ, se puede concluir que:

---

[51]De esta manera para cada punto $P(x, y)$ de la curva $y = f(x)$ determina un punto $M(x, z)$ y por lo tanto un nueva curva $z = g(x)$. Esta última curva es de gran utilidad, pues si se conoce su cuadratura de la región que ella limita, se puede determinar la cuadratura de la curva dada.

A (región OCD)= $\frac{1}{2}\int_A^B zdx$, donde $z = g(x)$[52] (1)

De las condiciones del problema y como se puede verificar gráficamente;

$$a(ACDB) = a(\Delta ODB) + a(\text{región}OCD) - a(\Delta OCA)$$

Expresión que es equivalente a;

$$\int_A^B ydx = \frac{1}{2}B.f(B) - \frac{1}{2}A.f(A) + a(regiónOCD) = \frac{1}{2}[xy]_A^B + a(regiónOCD)$$

Al sustituir (1) en la igualdad anterior se obtiene que;

$$\int_A^B ydx = \frac{1}{2}\left([xy]_A^B + \int_A^B zdx\right)$$

Esta última fórmula se conoce como el “teorema de la transmutación” de Leibniz, en el cual se puede observar el teorema fundamental del cálculo. La curva $z = g(x)$, se llama cuadratriz y proviene de $f(x)$ a través de la intervención de la tangente en cada punto.

Leibniz aplica su método de transmutación para determinar la cuadratura aritmética del círculo. Para ello considera el semicírculo de radio 1, ubicado en el primer cuadrante cuya curva está dada por la ecuación $y = \sqrt{2x - x^2}$ y su grafica se presenta a continuación.

[52] Es importante dar a conocer que hasta este momento Leibniz no había introducido aún la notación de integral, sin embargo el utilizarla aquí se hace por simplificar los análisis.

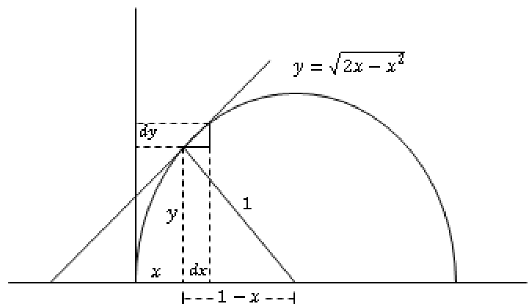


Figura 25. Cuadratura aritmética del círculo.

Al considerar la relación existente entre el triángulo característico y los triángulos formados por la tangente, la normal y la subnormal se obtiene que; $\frac{dy}{dx} = \frac{1-x}{y}$ por transformación $z = y - x\frac{1-x}{y} = \sqrt{\frac{x}{2-x}}$, es decir $x = \frac{2z^2}{1+z^2}$.Aplicando la fórmula de transmutación para calcular el área de un cuarto de círculo se obtiene:

$$\frac{\pi}{4} = \int_0^1 ydx = \frac{1}{2}([x\sqrt{2x - x^2}]_0^1 + \frac{1}{2}\int_0^1 zdx)$$

Para calcular $\int_0^1 zdx$, Leibniz recurre a la relación que se visualiza en la gráfica:

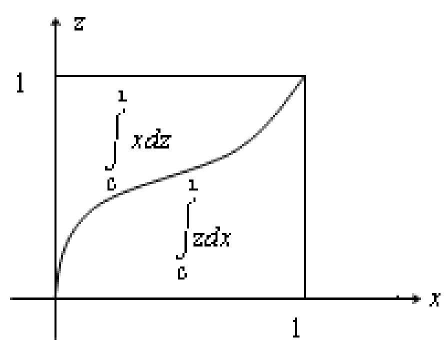


Figura 26. Grafica para determinar$\int_0^1 zdx$.

$$\frac{\pi}{4} = \int_0^1 ydx = \left(\frac{1}{2}[x\sqrt{2x - x^2}]_0^1 + \int_0^1 zdx\right) = \frac{1}{2}\left(1 + \left(1 - \int_0^1 xdz\right)\right).$$

Sustituyendo *x*:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \int_0^1 \frac{z^2 dz}{1+z^2}.$$

Finalmente, después de realizar la expansión geométrica e integrarla término a término se obtiene que:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \left[\frac{1}{3}z^3 - \frac{1}{5}z^5 + \frac{1}{7}z^7 + \cdots\right]_0^1 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots,$$

Leibniz en su presentación anterior emplea el triángulo característico que como se dijo anteriormente, es un triángulo de lados infinitesimales, además del desarrollo de una serie infinita, dos elementos que necesariamente involucran el problemático concepto del infinito y que aún en esta época no se puede manejar sobre bases teóricas sólidas.

Respecto al resultado obtenido se siente orgulloso del procedimiento mediante el cual lo logra, sin embargo no queda satisfecho con los valores obtenidos, puesto que se necesitaría una cantidad de términos muy grande para obtener una aproximación de $\boldsymbol{\pi}$ mejor a la presentada por Arquímedes, situación que se deriva de la convergencia demasiado lenta de la serie.

Otro aspecto a destacar en el trabajo de Leibniz tiene que ver con la importancia que le asigna a la construcción de un lenguaje simbólico, ya que desde su perspectiva; una simbología adecuada no solamente aligera los cálculos, sino que permite potenciar las posibilidades para que la ciencia avance. En este sentido, su trabajo propicia una ruptura en relación con la forma como se representaba la notación para el cálculo de cuadraturas[53], es así como a partir del trabajo de Leibniz se establece el símbolo con el que cual será denotado el proceso de integración de ahí en adelante, al respecto (Viñuela V, 2012)

[53] Para Leibniz "sería conveniente escribir "$\int$." en lugar de "omn.", de tal manera que "$\int l$" represente a "omn.l", es decir la suma de todas las l" citado por (Grattan-Guinness, 1980)

comenta:

> El espíritu, debido a la naturaleza finita de las facultades humanas de conocer, busca afanosamente maneras de compendiar, abreviar, tomar atajos. Sin estos recursos artificiales el espíritu no avanzaría mucho en la comprensión y conocimiento de la complejidad de lo real. Sin alguna clase de signos no se podría pensar ni razonar. Para Leibniz el pensamiento ciego cumple una función vital en la abstracción y en los procedimientos algorítmicos, en los cuales se ha de prestar atención principalmente a las reglas sintácticas que regulan la operatoria con los caracteres. (Viñuela V, 2012, pág. 237)

El incorporar la notación "∫"de manera exclusiva para la operación de la integral genera un punto de quiebre en su evolución histórica, pues se le está asignando un símbolo que la reconoce como una operación autónoma en las matemáticas. Como lo comenta (Bobadilla, 2012): "*se reconoce que históricamente la incorporación de una simbología apropiada permite el descubrimiento de nuevos resultados*…" este tipo de rupturas que se generan a partir de la inclusión de nueva simbología permiten el desarrollo y la evolución de los conceptos.

El signo "$\int$ " proviene de la primera letra de la palabra suma, un poco alargada y en forma de bastardilla. Representación muy apropiada en la medida que relaciona geométrica y analíticamente la integral; como la suma de elementos infinitamente pequeños.

De esta manera Leibniz hace notar que:

$$\int \boldsymbol{x} = \frac{\boldsymbol{x}^2}{\boldsymbol{2}} \qquad \text{Y} \quad \int \boldsymbol{x}^2 = \frac{\boldsymbol{x}^3}{\boldsymbol{3}}$$

Si bien el trabajo de Leibniz apunta hacia la instauración de lo analítico, no se aleja completamente de lo geométrico. Para él, $\int y \cdot dx = A$ significaba que la suma de rectángulos infinitamente pequeños $y\,.\,dx$ daba como resultado A.

De esta manera podemos afirmar que los aportes realizado por Leibniz contribuyen notablemente hacia la consolidación del concepto de integral, a pesar de ello, su tratamiento a las cantidades infinitesimales aún carece de argumentos lo suficientemente sólidos; la percepción de que las cantidades infinitesimales eran objetos matemáticos que oscilaban entre cero y una cantidad finita sin llegar a ser ninguna de las dos, no les permitía exponer demostraciones con el rigor que tradicionalmente se le exigía a quienes se dedicaban a desarrollar conocimiento matemático. Al respecto, debemos comentar que Leibniz no desconocía esta situación, por tal motivo llamaba "ficciones" a los infinitesimales, pues según él estas cantidades infinitamente pequeñas solo podían ser comprendidas por quienes se veían en la necesidad de aplicarlas. En relación a lo anterior (Zellini, Paolo) comenta:

> Las ficciones infinitesimales para Leibniz fueron *ficciones bien fundadas*, y la referencia concreta que no podían dejar de aludir en la realidad natural, donde el infinito ya intervenía casi constantemente, hacia tanto más verosímil su funcionalidad como medios del cálculo. Las ambigüedades conceptuales que entrañaban su empleo se compensaban con el éxito aplicativo de un cálculo cuyos mecanismos se semejaban excesivamente bien a los de la naturaleza. (Zellini, Paolo, pág.138)

Finalmente Newton y Leibniz a partir de resultados obtenidos desde puntos de vista distintos, llegaron a instaurar el cálculo como una rama de las matemáticas y aunque no contaron con unas bases conceptuales que les permitieran argumentar rigurosamente sus resultados, las aplicaciones que obtuvieron de la manipulación de los infinitesimales influyeron notablemente en la evolución y progreso del concepto de integral.

3.10 El Nacimiento de la Integral y la Domesticación del Infinito.

A pesar de que aún no estaban dadas las condiciones para a estructurar definitivamente el concepto de integral definida, el trabajo realizado por matemáticos como los hermanos Bernoulli, Euler, entre otros impulsó el desarrollo de esta noción, pues solamente hasta el establecimiento del Análisis de Cauchy se llegara a aceptar la integral como una noción epistemológicamente independiente.

Aproximadamente por 1700 los hermanos Bernoulli, más cercanos al trabajo de Leibniz que al trabajo de Newton, le asignan el nombre de "*integral*" y la definen como la operación inversa de la diferencial. El asignarle el nombre es un gran avance en la evolución de este concepto, en palabras de (Recalde, 2012): "*con la incorporación de un nombre para designar una operación específica, se está identificando una noción que amerita un tratamiento especial*". De esta manera, la integral inicia el tránsito hacia su transformación en un concepto matemático, dejando paulatinamente su carácter de herramienta útil en la solución de problemas relacionados con el cálculo de cuadraturas, una nueva perspectiva a partir de la cual la integral tendrá sus propios problemas y métodos.

El andar del nuevo análisis giraba en torno al estudio de ecuaciones, por eso la integración estaba direccionada a encontrar la ecuación que representara la solución de una ecuación diferencial. Al respecto los hermanos Jakob y Johann Bernoulli realizaron sus aportes.

> En *Acta Eruditorum* de 1696, Johann Bernoulli propone a los pensadores de la época el siguiente problema: Dados dos puntos $A, B,$ en un plano vertical, hallar la curva a lo largo de la cual un punto material soltado del punto A llega al punto B en un tiempo mínimo, suponiendo que no hay resistencias. Es decir hallar la curva de descenso en "tiempo mínimo" o sea hallar la braquistocrona. (Dou, 1988, pág. 119).

Gráficamente el problema planteado por Johann se puede entender de la siguiente manera:

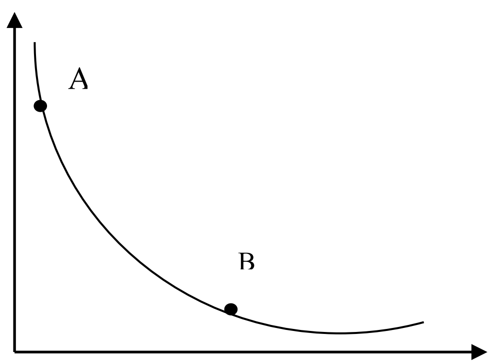


Figura 27. La Braquistocrona.

El problema de la braquistocrona plantea determinar la ecuación de la curva que represente el camino que demanda la menor cantidad de tiempo para ir desde el punto A hasta el punto B. Este problema representa un cambio sustancial con los que se relacionaban la integral anteriormente, pues en este caso no se pedía determinar un área sino una expresión que permitiera representar una curva determinada.

Este problema es solucionado por Newton, Leibniz, el marqués de L'Hopital y por supuesto los hermanos Bernoulli, en cuya solución se reflejan los desarrollos infinitesimales de Leibniz, seguramente consecuencia de la comunicación permanente que mantenían con el matemático alemán. Johann Bernoulli soluciona el problema que él mismo propone aplicando aspectos de la física y de la geometría.

De la física emplea el principio de Fermat, a partir del cual se establece que un rayo de luz que va de un punto a otro sigue la trayectoria para el cual el tiempo de viaje es mínimo, también emplea la ley de la refracción de Snell y a partir de conceptos físicos realiza una construcción geométrica en la que aplica el triángulo infinitesimal de Leibniz llegando a determinar que la expresión buscada correspondía a la de la cicloide. Motivo por el cual podemos decir que en este periodo no se presenta un avance en la manipulación del infinito más allá de lo que ha sido comentado en los apartados anteriores, sin embargo la evolución del concepto la integral avanza notablemente con la asignación del nombre por parte de los hermanos Bernoulli.

A pesar de los aportes realizados por quienes participaron en la construcción de este concepto y de los importantes avances que se desarrollaron con el transcurso del tiempo, la integral no llegaba a constituirse como un concepto matemático propiamente dicho, pues para ello sería necesario reconocer el concepto de función como un objeto del análisis.

Durante los primeros años del siglo XVIII el análisis matemático giraba en torno al estudio de las ecuaciones diferenciales y la integración se había transformado en el mecanismo que permitía determinar la ecuación que representaba la solución de alguna ecuación diferencial. Para esta época aparece en escena Leonard Euler (1707-1783) discípulo de Johann Bernoulli, quien presenta su trabajo denominado *Introductio ananalysis infinitorum* (1748), donde expone la primera definición de función:

> Una función de una cantidad variable es una expresión analítica compuesta de una manera arbitraria por esa variable y por números y cantidades constantes.[54]

Esta definición ya era aceptada por la gran mayoría de matemáticos durante finales del

[54] Citado por (Bobadilla,2012, Pág.74)

siglo XVII. Sin embargo, el carácter novedoso se lo asigna la frase "*expresión analítica*", en la medida que Euler comprendía que una función podía ser construida a partir de operaciones algebraicas, trascendentes y a través expresiones infinitas como las series.

Desde la perspectiva de Euler cada función podía ser representada por una serie de potencias, representación que estaba estrechamente ligada con la integración, pues para él, integrar consistía en determinar una función primitiva para una función determinada.

> El cálculo integral es el método para hallar, desde una relación dada de los diferenciales, la relación entre estas mismas cantidades; y la operación que permite hacer esto es habitualmente llamada "integración".[55]

El trabajar con series de potencias a Euler le implica manipular el infinito y sus desarrollos respecto a este tema los presenta en *Introductio* donde expone el manejo intuitivo con los que maneja los infinitesimales. De acuerdo con Antonio J. Duran[56] la forma intuitiva como Euler emplea las cantidades infinitamente pequeñas e infinitamente grandes conlleva a que no presente una definición de las mismas, que las utilice de acuerdo a las necesidades que se le van presentando y que aparecen con la misma facilidad como desaparecen a lo largo de su obra. Euler muestra como manipula los infinitesimales y en *Introductio ananalysis infinitorum* presenta una idea del funcionamiento adecuado de ellos. A continuación se expone un ejemplo de la manera como en la *Introductio* Euler manipulaba los infinitesimales en el desarrollo de la función exponencial e^z en series de potencias de z.

Para Euler $e^w = 1 + w$ para w infinitamente pequeño. Teniendo en cuenta esto, un número dado z puede ser representado como el producto entre un número w infinitamente pequeño[57] por otro número i infinitamente grande, es decir $z = wi$.

---

[55]Citado por (Bobadilla M. L., 2012, pág. 74)

[56] Antonio J. Duran es editor y anotador de la edición castellana de la "Introducción al análisis de los infinitos", para la Real Sociedad Matemática Española, trabajo que se presentó 2001, como una traducción al castellano del clásico de Euler.

[57] En este apartado de la *Introductio* Euler hace referencia por primera vez los números infinitamente pequeños "*sea w un número infinitamente pequeño*", escribe en la página 85 (104 en la versión castellana), "*o una fracción*

Ahora de las propiedades de las potencias se tiene que:

$$e^z = e^{wi} = (e^w)^i$$

Como w es infinitamente pequeño entonces;

$$e^z = (1+w)^i$$

Aplicando el teorema del binomio obtiene lo siguiente;

$$e^z = (1+w)^i = 1 + iw + \frac{i(i-1)w^2}{2!} + \frac{i(i-1)(i-2)w^3}{3!} + \cdots$$

Al tener en cuenta que i es infinitamente grande, entonces, $i = i-1, i = i-2$ y así sucesivamente, de tal forma la expresión anterior se puede representar de la siguiente manera;

$$e^z = 1 + iw + \frac{(iw)^2}{2!} + \frac{(iw)^3}{3!} + \cdots = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} \cdots$$

De esta manera se puede observar como Euler emplea los infinitesimales a conveniencia, hace que aparezcan cuando es necesario y que desaparezcan después de que cumplan satisfactoriamente con su objetivo. A través de *Introductio* expone un mecanismo donde se presenta como aplicar las cantidades infinitamente pequeñas e infinitamente grandes de tal manera como contribuyan a la construcción de conocimiento matemático.

No obstante a que el trabajo de Euler al igual que el de sus antecesores fue sometido a diferentes críticas debido a la ausencia del rigor lógico que implicaba utilizar infinitesimales, sus aportes demuestran una notable pérdida del temor en el manejo del infinito. Este hecho le permitió avanzar en la representación de funciones a través de series de potencias y su respectiva integración.

> Para los griegos el infinito fue una especie de bestia temible, pongamos un minotauro gigantesco del que había que huir; Euler en cambio no huye. Al contrario, se

---

tan exigua que, sin ser igual a cero, sea $a^w = 1+\varphi$, siendo también φ un número infinitamente pequeño". (Duran, 2003, pág. 47) acerca al monstruo, le acaricia el lomo y le unce un yugo que le permite hacer fértiles campos antes estériles. (Bombal, 2009, pág. 214)

El avance matemático durante el periodo de tiempo comprendido entre parte del siglo XVIII y todo el siglo XIX estuvo centrado en buscar la representación de funciones mediante series de potencias, donde uno de los matemáticos importantes que se interesaron en el tema fue Fourier, cuyos aportes fueron de gran utilidad para plantear las condiciones que deberían cumplir una función para ser representadas en series trigonométricas.

Como se mencionó anteriormente, durante esta época se enfatizó en la representación de una función a través de series de potencias, problema matemático en el que la integración se tornó en un problema secundario, esto debido a que se empleaba como una herramienta que era útil para aportar en la solución del problema principal, pero la integral no se asumía como un concepto que debería ser estudiado particularmente.

El trabajo de Fourier se desarrolla durante el siglo XIX, etapa en la que las funciones eran consideradas como una expresión analítica, perspectiva desde la cual derivar e integrar era entendido como operaciones algebraicas, es decir, se operaba por medio de fórmulas. Dicha consideración implicaba que la integral fuera concebida como una anti derivada lo que carecía de sentido para las funciones discontinuas.

Fourier consideraba que las funciones “arbitrarias” o discontinuas podían ser expresadas como series trigonométricas y para calcular los coeficientes de dichas series era necesario utilizar la integral como el área bajo una curva, en otras palabras debía retornar a la interpretación geométrica, es decir, relacionar el concepto de integral con un área.

> [...]el área de la curva reducida tomada desde $x = 0$ a $x = \pi$ da el valor exacto de los coeficientes de $\operatorname{sen} x$; y cualquiera que sea la curva dada puede ser la que corresponde a $\varphi(x)$ ya sea que podamos asignarle una ecuación analítica o que no dependa de ninguna ley regular, es evidente que siempre sirva para reducir de cualquier manera la curva trigonométrica, así que el área de la curva reducida tiene, en todos los casos posibles, un valor definido el cual es el valor de los coeficientes de $\operatorname{sen} x$ en el desarrollo de la función. El caso es el mismo con los coeficientes b o $\int \varphi(x) \operatorname{sen} 2x\, dx$.[58]

[58] Citado por (Bobadilla M. L., 2012)

De esta manera la aparición de las funciones "discontinuas" conlleva nuevamente a interpretar la integral como el área bajo la curva, situación que será de gran importancia para la evolución del concepto de integral.

Los diferentes cambios que se venían presentando en la forma de hacer matemáticas estaban direccionados a *aritmetizar el análisis* del siglo XIX, lo que implicaba dejar de lado la intuición geométrica sobre la que se había estructurado el cálculo del siglo XVIII, abandonar la geometría intuitiva que estaba ligada al movimiento físico y asumir conceptos nuevos como los de función, variable y límite que permitirían asignarle al análisis un carácter aritmético y el rigor lógico que se exigía.

Con la "*desgeometrización*" del cálculo el problema de la integración se transforma en un problema del análisis matemático, análisis que se inicia a considerar una nueva rama de las matemáticas a partir de la construcción de su propio corpus teórico. En esta dirección el trabajo de Cauchy será relevante en esta nueva etapa, pues gracias a él se genera un punto de partida a través del cual se brinda rigor análisis y de alguna manera se destierra del obstáculo propiciado a raíz de la aplicación de los infinitesimales.

3.11 El abandono de los infinitesimales y la definición analítica de la integral.

Con Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) se genera el proceso mediante el cual se inicia la incorporación el rigor al análisis matemático, el trabajo de Cauchy esta direccionado a asignarle al análisis un rigor similar al que exige la geometría de tal manera que se llegará a eliminar las generalizaciones extraídas de los desarrollos algebraicos, particularmente a la hora de manipular series.

Los aportes realizados por Cauchy son expuestos en el *Cours d´Analyse sur le Calcul Infinitésimal* de 1823, textos que son el resultado de su labor docente en *École Polytechnique* de Paris, en los cuales expone la estructura teórica del nuevo análisis cuyo fundamento reposa sobre los conceptos de número real, función, límite, continuidad, números complejos, derivadas e integrales.

Cauchy identifica lo que debe ser entendido por número y cantidad, define lo que es una variable y a partir de ello presenta le definición de límite; piedra angular de su teoría y que se presenta a continuación:

> Cuando los valores que va tomando sucesivamente una variable particular, se aproximan indefinidamente a un valor fijo, de tal manera que acaban por diferir de él tan poco como queramos, entonces éste último valor, recibe el nombre de límite de todos los anteriores. (Cauchy, 1994, pág. 76)

Al presentar la definición de límite Cauchy está propiciando una ruptura con el conocimiento matemático desarrollado por sus predecesores quienes solo hacían referencia a él mediante aproximaciones, tal y como se ha expuesto con anterioridad. Gracias a la nueva teoría se puede contar con una definición de límite precisa, útil para abordar el manejo del espinoso infinito. Apoyado en el concepto de límite define las cantidades infinitamente pequeñas y cantidades infinitas.

Las cantidades infinitamente pequeñas las considera como aquellas cantidades que tienen límite cero y a las cantidades infinitamente grandes o infinitas como aquellas que están por encima de cualquier número dado:

> Cuando los valores numéricos sucesivos de una misma variable decrecen indefinidamente, de manera que descienden por debajo de cualquier número dado, esta variable deviene lo que suele llamarse un *infinitamente pequeño* o una cantidad *infinitamente pequeña*.
>
> Cuando los valores numéricos sucesivos de una misma variable crecen más y más, de manera que ascienden por encima de cualquier número dado, se dice que esta variable tiene por límite al *infinito positivo* [...] los infinitos positivos y negativos son designados conjuntamente bajo el nombre de *cantidades infinitas* (Cauchy, 1994, pág. 76)

De esta manera el trabajo realizado por Cauchy representa un punto de quiebre en el desarrollo del conocimiento matemático, especialmente en lo que a la manipulación del infinito se refiere.

Respecto a la definición de límite (Recalde, 2011) comenta: "*En la definición de límite dada por Cauchy, la expresión "aproximarse indefinidamente"*", deja entrever que aún se mantiene algún matiz de la tradición aristotélica que hace referencia al movimiento, lo que permitiría indicar lo difícil que es abandonar concepciones previamente establecidas en la construcción de nuevo conocimiento

Independientemente que el *Cours d´Analyse* de Cauchy no se aparta definitivamente de la concepción tradicional del infinito aristotélico, si realiza significativos aportes para su formalización, tal es el caso de su concepción de continuo y a partir de ella la implementación del concepto de función continua, concepto que es novedoso hasta ese momento.

> La función $f(x)$ permanecerá continua respecto de x entre los límites dados si, entre esos límites, un incremento infinitamente pequeño de la variable produce siempre un incremento infinitamente pequeño de la función (Cauchy, 1994, pág. 90)

La forma de tratar las series es otro importante avance de la teoría de Cauchy, cabe recordar que durante el siglo XVIII las series infinitas eran manipuladas algebraicamente, generalizando los resultados de las sumas finitas, pues hasta para la época no existía un mecanismo que permitiera determinar con certeza cuando una serie infinita era convergente o no.

Cauchy modifica el manejo que se le daba a las series, para lo cual parte de la definición de que "*una serie divergente no tiene suma*", definición que aparece en la introducción del *Cours d´Analyse*.

> Llamamos serie a una sucesión de cantidades $U_0 + U_1 + \ldots$, que se derivan una de las otras según una ley determinada. Estas mismas cantidades son los diferentes términos de la serie que se considera. Sea
>
> $S_n = U_0 + U_1 + \ldots + U_{n-1}$
>
> La suma de los n primeros términos, donde n designa a un número entero cualquiera. Si para valores siempre crecientes de n, la suma parcial enésima, S_n, se aproxima indefinidamente a un cierto valor límite S, entonces la serie se llamará convergente, y el límite en cuestión, recibirá el nombre de suma de la serie. Por otra parte, si la suma S_n no se aproxima a ningún límite fijo cuando n crece indefinidamente, la serie se llamará *divergente* y no tendrá suma. (Cauchy, 1994, pág. 149)

Con la definición anterior y los criterios que establece para determinar si una serie es convergente o divergente Cauchy logra implementar una cantidad de principios que permiten la manipulación del infinito al interior de las matemáticas, es así como se eliminan los análisis particulares y se adopta una teoría general para estudiar las sumas infinitas sin problemas de carácter filosófico ni de las ambigüedades que debieron enfrentar los pensadores anteriores cuando se valían de la noción del infinito y no contaban con las herramientas teóricas para su justificación.

La ruptura que propicia la instauración del concepto de límite y todo lo que de él se deriva; como la definición de función continua, la construcción de un cuerpo teórico sobre el cual se puede operar sumas y productos infinitos como procesos, además de la implementación de propiedades como la que expresa que; *"toda sucesión monótona y acotada converge a un límite*", permite establecer el rigor que tanto se le había exigido en la nueva rama de las matemáticas, logrando de alguna manera "***domesticar el infinito***"[59].

Sin el problema del " $\alpha\pi\varepsilon\iota\rho o\nu$", de lo indefinido, de lo ilimitado, del infinito que tantas dificultades acarreó a través de las diferentes épocas como se ha intentado constatar durante el transcurso del presente trabajo, Cauchy estaba preparado para dar por primera vez una definición analítica del concepto de integral definida para funciones continuas.

Lo primero que hace es demostrar de forma rigurosa tal y como lo demanda el nuevo análisis; la existencia de un límite que permita definir dicha integral. Veamos:

> Supongamos que la función $y = f(x)$ es continua respecto a la variable x entre dos límites finitos $x = x_o, x = X$. Supongamos también que se designa por $x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}$ a nuevos valores de x interpuestos entre estos límites y que vayan creciendo o decreciendo desde el primer límite hasta el segundo. Será posible servirse de esos valores para dividir a la diferencia $X - x_o$ en elementos:
>
> $x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \cdots, X - x_{n-1}$, que serán todos del mismo signo.
>
> Consideremos ahora que cada elemento se multiplica por el valor $f(x)$ que corresponde al origen de ese mismo elemento; a saber, el elemento $x_1 - x_0$ por $f(x_0)$, el elemento $x_2 - x_1$ por $f(x_1) \cdots$, en fin, el elemento $X - x_{n-1}$ por $f(x_{n-1})$; y sea $S = (x_1 - x_0)f(x_0) + (x_2 - x_1)f(x_1) + \cdots + (X - x_{n-1})f(x_{n-1})$. (Cauchy, 1994, pág. 287)

[59] Expresión metafórica empleada por algunos para indicar la adopción teórica del infinito como proceso (Recalde, 2012).

Cauchy indica que S depende de n y del máximo de $\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, ..., X - x_{n-1}\}$, demostrando que para valores de n muy grandes , donde el máximo de $\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, ..., X - x_{n-1}\}$ es muy pequeño, la forma como se realiza la división no afecta notablemente el resultado de la suma S. En esta demostración emplea algunos resultados preliminares expuestos en *Cours d´Analyse*, el teorema del valor medio y el criterio de continuidad llegando a verificar que si se toman dos particiones con las condiciones establecidas anteriormente; la suma S en cada uno de los casos diferirá la una de la otra en una cantidad infinitamente pequeña, lo que le permite concluir que dicha suma inevitablemente se aproxima a un límite :

> Cuando los elementos de la diferencia $X - x_0$ devienen infinitamente pequeños, el modo de división tiene sobre el valor de S tan sólo una influencia sensible; y, si se hacen decrecer indefinidamente los valores numéricos de esos elementos, al aumentar su número, el valor de S terminará por ser sensiblemente constante o, en otras palabras, terminará por alcanzar un cierto límite que dependerá únicamente de la forma de la función $f(x)$ y de los valores extremos x_0 y X de la variable x. Este límite es lo que llamamos una *integral definida*[60] (Cauchy, 1994, pág. 291).

Dada la definición, también precisa la forma de representación para la integral definida de acuerdo con las nuevas consideraciones:

> Si se designa por $\Delta x = h = dx$ a un incremento finito atribuido a la variable x, los diferentes términos de los que se compone el valor de S, [...] estarán todos comprendidos en la fórmula general $hf(x) = f(x)dx$ [...] Se puede decir entonces que la cantidad S es una suma de productos… $\sum hf(x) = \sum f(x)\Delta x$. En cuanto a la integral definida hacia la cual converge S, al devenir los elementos de la diferencia $X - x_0$ infinitamente pequeños, convenimos en representarla por la notación $\int hf(x)$ o $\int f(x)\,dx$, en la cual la letra $\int$, que sustituye la letra $\sum$, no indica a una suma[...], sino al límite de una suma de esta especie (Cauchy, 1994, pág. 293)

Teniendo en cuenta que el valor de la integral definida depende de los valores extremos x_0 y X conviene representar dicho concepto con alguna de las siguientes notaciones:

---

[60] Respecto a la definición que Cauchy realiza sobre la integral se ha comentado, que para que dicha definición se lo estrictamente "rigurosa", debería remplazar la hipótesis de continuidad, por la de continuidad uniforme. (Cauchy, 1994, pág. 291)

$$\int_{x_0}^{X} f(x)dx, \quad \int f(x)dx \binom{x_0}{X}, \quad \int f(x)dx \binom{x = x_0}{x = X}$$

Especificando que la primera representación fue expuesta por Fourier y es la de manejo más simple. (Bobadilla M. L., 2012).

A pesar de que esta definición de integral definida de Cauchy es estrictamente analítica e independiente de las referencias geométricas, si reconoce su interpretación al interior de la geometría como el área bajo la curva, es decir, define analíticamente el concepto entendiendo que una de sus aplicaciones es geométrica:

> Vamos a suponer que el límite X es mayor que x_0 y que la función $f(x)$ es positiva desde $x = x_0$ hasta $x = X$; x, y designan las coordenadas rectangulares y A designa la superficie comprendida entre el eje de las x y la curva $y = f(x)$ y entre las ordenadas $f(x_o), f(X)$. Esta superficie, cuya base es la longitud $X - x_0$ medida sobre el eje de las x, será una media entre las áreas de los dos rectángulos construidos sobre la base $X - x_0$ y cuyas alturas respectivas son iguales a la menor y a la mayor de las ordenadas levantadas de entre los diferentes puntos de esta base. Ella será pues equivalente a un rectángulo construido sobre una ordenada media representada por una expresión de la forma $f[x_0 + \theta(X - x_0)]$, de modo tal que se tendrá
>
> $A = (X - x_0)f[x_0 + \theta(X - x_0)]$, (8)
>
> En donde θ designa un número menor a la unidad. Si se divide la base $X - x_o$ en elementos $x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \cdots, X - x_{n-1}$, la superficie A se encontrará dividida en elementos correspondientes cuyos valores estarán dados por ecuaciones semejantes a la fórmula (8). Se tendrá también
>
> $A = (x_1 - x_0)f[x_0 + \theta_0(x_1 - x_0)] + (x_2 - x_1)f[x_1 + \theta_1(x_2 - x_1)] + \cdots + (X - x_{n-1})f[x_{n-1} + \theta_{n-1}(X - x_{n-1})]$, (9)
>
> En donde $\theta_0, \theta_1, \cdots, \theta_{n-1}$ designan a números menores que la unidad. Si en ésta última ecuación se hacen decrecer indefinidamente los valores numéricos de los elementos de $X - x_o$, se obtendrá al pasar al límite
>
> $A = \int_{x_0}^{X} f(x)\, dx$. (Cauchy, 1994, pág. 307)

Finalmente, podría afirmarse que el trabajo realizado por Cauchy establece un cuerpo teórico que permite fundamentar algunos conceptos matemáticos que conducían a ambigüedades o contradicciones, tal es el caso de la noción de las cantidades infinitamente pequeñas o infinitamente grandes que al estar relacionadas directamente con el infinito eran evidentemente problemáticos.

De esta manera, el problema del cálculo de cuadraturas originado en la antigua Grecia, fue evolucionando con los aportes de diferentes pensadores a través de la historia; trabajos como los de Newton y Leibniz, además de la sistematización que realizaron de desarrollos anteriores, permitieron establecer una serie de herramientas o algoritmos a través de los cuales so logró presentar una solución genérica a este problema. Sin embargo, es la definición analítica presentada por Cauchy la que le otorga la trascendencia definitiva al concepto de la integral definida y de esta manera, como aplicación directa a la geometría, le asigna a cada región plana un número que representa su medida, resolviendo así el problema inicial de la cuadratura de figuras planas.

4 OBSTÁCULOS Y RUPTURAS EN LA EVOLUCIÓN HISTÓRICA DEL CONCEPTO DE LA INTEGRAL.

En esta sección, se caracteriza el principal obstáculo epistemológico que se presenta en la evolución del concepto de la integral definida. Además, se exponen diferentes rupturas epistemológicas que se originan en la evolución del conocimiento matemático; consecuencia de los aportes de pensadores que a través de diferentes épocas buscaron evadir los obstáculos que se presentaban en la construcción de conocimiento. Para ello, tiene en cuenta la clasificación histórica de la ciencia propuesta por Bachelard de la siguiente manera; periodo pre-científico, periodo científico y el nuevo espíritu científico. Sin embargo, al analizar el desarrollo histórico de la integral definida, la clasificación que aquí se presenta marca una diferencia respecto a tiempos con la presentada por Bachelard en *La Formación del Espíritu Científico.* A continuación se presentan cada uno de los estados en los que se ha caracterizado la evolución del concepto de la integral definida.

- ✓ ***Estado pre-científico***; comprendido por los desarrollos matemáticos en la cultura griega. En este periodo el espíritu se disipa con las primeras imágenes y busca explicaciones en la filosofía que les permite entender el mundo que los rodea. Generalmente se busca afirmar lo que la experiencia básica demuestra, generando una especie de culto a las nociones previamente establecidas, lo que en determinado momento dificulta el surgimiento de rupturas que propicien el avance del conocimiento matemático. De esta manera se establece la geometría como paradigma bajo el cual se deben desarrollar las matemáticas, el modelo que es admitido y que lleva a que cualquier trabajo sea considerado digno de la ciencia.

- ✓ ***Estado científico***; es el periodo tiempo comprendido entre los trabajos expuestos por Cavalieri hasta los de Euler y Fourier en el siglo XIX. Durante esta época los diferentes pensadores generan rupturas que permiten dar el paso de lo sintético a lo analítico. Sin embargo, un periodo en el que aún no es posible eliminar por completo la intuición geométrica. Aparecen aportes que desde unas perspectivas innovadoras, abordan los problemas de una manera diferente a la tradicional, situación que permite una mayor dinámica en el progreso del conocimiento científico. De la misma manera las rupturas que se generan con los aportes de cada uno de los diferentes pensadores implantaron nuevas formas de trabajar las matemáticas, lo que influenció notablemente su desarrollo y brindo las primeras herramientas para la fundamentación del análisis y se pudiera definir de manera formal el concepto de la integral definida.
- ✓ ***Nuevo espíritu científico***; a partir del siglo XIX con la fundamentación del análisis matemático de parte de Cauchy. El espíritu se desprende de la intuición, de los problemas de rigor lógico y se presenta la definición formal del concepto de la integral, en este periodo se presenta la ruptura definitiva, se supone una reacomodación de conceptos, una revolución científica que implica la construcción de una nueva teoría.

Al finalizar los dos primeros estados se presentan algunos de los efectos más representativos en el desarrollo histórico del concepto de la integral, efectos causados por la instauración del infinito como obstáculo epistemológico y de algunos otros obstáculos que pudieron ser identificados en el proceso evolutivo de dicho concepto. En el tercer estadio, denominado el *nuevo espíritu científico* es considerado el momento a partir del cual están dadas las condiciones para que la noción de la integral logre una independencia epistemológica y empiece a ser estimado como un concepto matemático propiamente dicho, en otras palabras, se logra la domesticación del “infinito” una vez que Cauchy llega a establecer el concepto de "límite" y con ello presenta la definición formal del concepto de la integral definida.

En el siguiente cuadro se expone el desarrollo histórico de la integral según los periodos que expone Bachelard en *La formación del Espíritu Científico*.

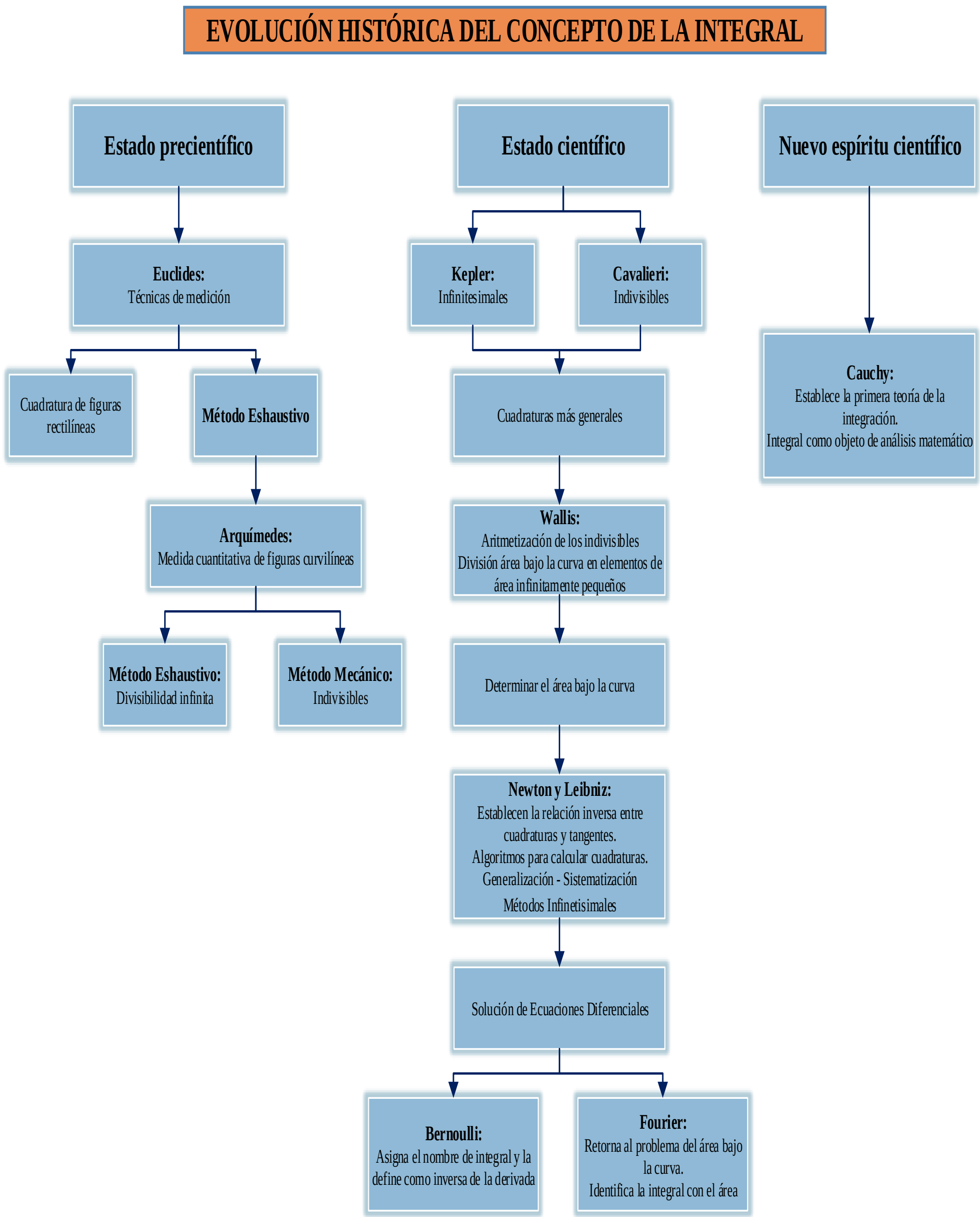


Figura 28. División histórica de la integral.

4.1 Estado pre-científico: cálculo de cuadraturas e instauración del infinito como un obstáculo epistemológico.

Para Bachelard, el conocimiento científico es el conjunto de saberes que resultan como respuesta a una pregunta formulada, así la evolución del concepto de integral definida y el conocimiento que se deriva a partir de su proceso evolutivo, responden a la necesidad de solucionar el problema que implicaba determinar la cuadratura de una figura; problema que tiene sus orígenes en la antigua Grecia.

Al realizar el análisis epistemológico de la integral, se encuentra que el concepto de infinito afecta su evolución histórica; desde sus orígenes como el cálculo de cuadraturas, hasta su definición formal en la segunda década del siglo XIX. Por esta razón, consideramos que el "***infinito***" se constituye como el principal obstáculo epistemológico en la formalización teórica del concepto de la integral definida.

En el análisis histórico expuesto anteriormente, se puede observar que los problemas que involucran el infinito se hacen evidentes con la aparición de las magnitudes inconmensurables, a partir del trabajo de los Pitagóricos y con las paradojas expuestas por Zenón de Elea; las cuales hacían referencia a la imposibilidad del movimiento que implica la divisibilidad infinita.

Estas dos situaciones conllevan a que se desarrollen unas contradicciones de tipo conceptual al interior de las matemáticas griegas, provocando la primera crisis de fundamentos que deriva en la separación entre número y magnitud. De las dificultades originadas por la manipulación del infinito resulta el denominado "***horror al infinito***" en los antiguos griegos, cuya influencia marcará la evolución del concepto de la integral.

El problema infinito-matemáticas originado en la cultura griega radica en la forma en que ellos concebían el mundo, punto de vista a partir del cual el infinito puede ser relacionado con "***La experiencia básica y el obstáculo sustancialista***"; dos de los obstáculos epistemológicos identificados por Bachelard en la evolución histórica de la construcción del conocimiento. Los griegos en su afán de explicar los fenómenos naturales, recurren a la experiencia que les ofrecen los sentidos, de tal forma que el infinito reflejaba la idea de tiempo, de firmamento, de universo o de todo aquello que desde su cosmovisión pudiera representar lo “inacabado”.

El carácter de “inacabado” del infinito, imposible de representar por su misma inagotabilidad, es necesario llevarlo a consideraciones metafísicas, por tal motivo, pensadores griegos como Aristóteles profundizan es su esencia buscando la razón de su naturaleza, asignándole características como “eterno” e “inmutable” lo que conduce a que el concepto del infinito se instaure como un obstáculo sustancialista en el desarrollo de la integral.

Estas posiciones de carácter filosófico están estrechamente relacionadas con las matemáticas; es así como el “$\alpha\pi\varepsilon\iota\rho o\nu$” de Anaximandro, expresión griega que hacía referencia al infinito y que tenía como significado “*sin límites*”, determina un obstáculo en la evolución del concepto de la integral definida, obstáculo que debieron enfrentar pensadores cómo Cavalieri, Wallis, Newton, Leibniz entre otros y que solo hasta el trabajo expuesto por Cauchy llega a ser superado; pues el concepto de límite le permite formalizar la noción de cantidades infinitamente pequeñas y la primera definición de función continua; base sobre la cual fundamenta el concepto de la integral definida.

La imagen del infinito, tan próxima a la concepción del mundo griego, puede ser observada en la argumentación que realiza Guillermo R. De Echandía en una de las notas que expone en la traducción de la *Física* de Arquímedes.

> Pero, por otra parte, por razones cosmológicas y metafísicas, Aristóteles va a afirmar que el mundo no sólo es finito en extensión, sino que tiene necesariamente la extensión fija que posee, no siendo posible ningún tipo de contracción o expansión. Para Aristóteles no es posible una geometría desvinculada del estado actual del mundo, por lo que no cabe pensar ni tan siquiera en la posibilidad de líneas infinitamente largas.[61] (Aristóteles, Física, 1995, pág. 106).

Posiciones como la anterior y las contradicciones emanadas de la manipulación del infinito desencadenan el surgimiento de dos concepciones de infinito: una potencial que es

[61] Comentario realizado por Guillermo R. De Echandía en (Aristóteles, Física, 1995, pág. 106).

aceptada, y que hace referencia a lo ilimitado. La otra, una concepción actual que es rechazada y en consecuencia erradicada del campo matemático por cuestiones filosóficas, derivadas de la forma como se llegaba a entender el mundo.

La aceptación exclusiva del infinito potencial niega toda posibilidad al límite en la cultura griega, situación que marcará definitivamente el trabajo de todos aquellos pensadores que profundizan en el campo matemático, particularmente en la evolución del concepto de integral tal y como se presenta a continuación.

En la construcción del conocimiento científico, siempre es posible que se generen obstáculos derivados de la primera impresión que se obtiene de los sucesos o de los objetos de estudio. Sin embargo, es aquí donde la capacidad creadora del hombre y la necesidad de fortalecer el desarrollo del espíritu científico exige que se regrese sobre lo construido para propiciar rupturas epistemológicas que permitan vencer o evadir los obstáculos generados y así lograr que el conocimiento avance.

Frente al problema de fundamentos, en los que se encontraban sumergidos los desarrollos matemáticos, se hacía necesario implementar estrategias dirigidas a evadir o vencer los obstáculos que dichos problemas generaban. En este sentido Eudoxo de Cnido, plantea un *axioma* (axioma "Eudoxo-Arquímedes"), *una definición* (definición 5 del libro V de *Los Elementos*) y *un método* (método exhaustivo), tres elementos a través de los cuales busca regresarle la fiabilidad a la disciplina, pues mediante su aplicación se logra evadir el concepto del infinito en los desarrollos matemáticos.

El método exhaustivo de Eudoxo se fundamenta en la proposición que aparece referenciada en los *Elementos* de Euclides como la X.1:

> Dadas dos magnitudes desiguales, si se quita de la mayor una magnitud mayor que la de su mitad y, de la que queda, una magnitud mayor que su mitad y así sucesivamente, quedará una magnitud que será menor que la magnitud menor dada.

Esta proposición expuesta en la obra de Euclides determina la salida conceptual de los griegos al problema del infinito actual, es decir el mecanismo a través del cual pretenden evadirlo.

Al lograr evadir el problema ya mencionado, se consigue desarrollar importantes avances respecto al cálculo de cuadraturas de figuras curvilíneas. Tal es el caso de la determinación de la cuadratura del segmento parabólico realizada por Arquímedes.

Sin abandonar por completo, la concepción ontológica del infinito impuesta por Aristóteles, Arquímedes al igual que Eudoxo, sigue realizando aportes en la evolución del concepto de la integral definida que pueden ser considerados como rupturas con el conocimiento establecido.

Para determinar la cuadratura del segmento parabólico, Arquímedes emplea dos métodos que aunque de estilos completamente diferentes le permitirán llegar a los mismos resultados, y en los que se puede observar la necesidad funcional de evitar los procesos en los que se pueda involucrar la idea del infinito como algo terminado.

El método "mecánico" es el punto de partida para los trabajos fundamentados en los indivisibles, se desarrolla con base en conceptos de la física y la geometría. Arquímedes demuestra que:

> Dado un segmento parabólico BTG y trazando por el punto B la paralela al diámetro y por el G la tangente a la parábola, si el área Z es la tercera parte del triangulo GBD, digo que la del segmento dado es igual a Z. (Vera, 1970)

La demostración la desarrolla desde una vista atomista del espacio y se fundamenta en el quinto de sus principios conocido como el "*axioma de Arquímedes*":

> De dos magnitudes desiguales, líneas, superficies o sólidos, la diferencia entre la mayor y la menor, añadida a sí misma un número suficiente de veces, puede sobrepasar cualquier magnitud dada (del mismo tipo que las comparadas). (Vera, 1970)

Este axioma le permite garantizar que el desarrollo de su trabajo no se desligue de los parámetros establecidos, es decir, rechaza la existencia de magnitudes infinitamente grandes o infinitamente pequeñas y que por lo tanto las bases de la demostración se establezcan sobre la concepción del infinito potencial. No obstante, en el desarrollo de esta demostración en la que aplica conceptos de la física, también emplea una especie de límite. Al respecto (Zellini, Paolo):

> Ahora bien en la búsqueda de "los centros de gravedad" de las representaciones geométricas de Arquímedes se hallaba agazapado también el sentido de una resolución final de lo ilimitado. El resultado de lo que aparecía reductible, en lenguaje moderno a una integración, es decir, el cálculo de un área o un volumen se remitía a un punto de equilibrio de la masa geométrica (Zellini, 1991, pág. 34).

De esta manera, el novedoso método mecánico caracterizado por emplear conceptos físicos en los desarrollos matemáticos, engendra una idea contraria a la idea griega del infinito, pues asume la suma de un número infinito y actual de indivisibles. Arquímedes emplea implícitamente la idea de "*límite*" para llegar a equilibrar el segmento parabólico con un triángulo apropiado y poder así obtener su cuadratura.

El segundo método empleado por Arquímedes es fiel a la tradición griega y se desarrolla a partir de la aplicación del método exhaustivo, en este sentido el camino que recorre para determinar la cuadratura del segmento parabólico lo hace dentro de las consideraciones que para los griegos eran propias de los conocimientos científicos. Arquímedes perfecciona el método de Eudoxo para probar que:

> El área del segmento parabólico es igual al cuádruple del tercio de la de un triángulo de la misma base y de la misma altura que el segmento.

Para la prueba emplea una sucesión de polígonos inscritos en el segmento parabólico construidos con el propósito de que cumplieran con la proposición X.1 de los *Elementos*, en otras palabras establece las condiciones que le permitan desarrollar el método exhaustivo.

La aplicación de este método, brinda una alternativa para determinar la cuadratura mediante la implementación del método de reducción al absurdo, lo que permite evadir procesos infinitos. Método que se convertirá en el ideal para demostrar proposiciones relacionadas con conjuntos infinitos.

Arquímedes, mediante un proceso intuitivo, el cual no da a conocer, llega a la presunción de un límite, luego aplica el método de reducción al absurdo para demostrar que este límite no puede ser ni mayor ni menor que la cuadratura buscada, concluyendo que necesariamente deben ser iguales. En este sentido, busca construir un polígono inscrito de tal manera que la diferencia entre el área de dicho polígono y el segmento parabólico sea tan pequeño como se quiera.

Aunque Arquímedes realiza la presunción de un límite para determinar la cuadratura del segmento parabólico, es importante recordar que la concepción aristotélica del infinito, como algo ilimitado, no le permite asumir el segmento parabólico como el límite de un polígono de infinitos lados. Lo que se puede pensar, es que para él la cuadratura del segmento parabólico representa el límite para la sucesión de cuadraturas de los polígonos inscritos.

Los aportes que realiza respecto a la cuadratura del círculo, son fundamentados en los mismos análisis; a través de la aplicación de polígonos inscritos y circunscritos y el método de reducción al absurdo, demuestra la proposición:

> Un círculo es equivalente un triángulo rectángulo cuyos catetos son iguales al radio y a la circunferencia del círculo.

Este trabajo, transforma el problema que implicaba determinar la cuadratura del círculo en un nuevo problema: la rectificación de la circunferencia. Desde esta nueva visión se hace necesario la construcción del número π, situación imposible de realizar debido a su naturaleza, pues como lo demostrará Lindemann en 1882, el número π, es número trascendente.

De esta manera, aunque el trabajo de Arquímedes se orienta de acuerdo a las bases establecidas por Eudoxo para evadir el infinito, en su trabajo su puede observar la idea de límite. Esta percepción intuitiva de límite presentada por Arquímedes constituye una ruptura epistemológica, pues es un punto de partida para la restructuración de un saber que para la época solo permitía relacionar el infinito con lo ilimitado y viceversa.

De la forma como los griegos comprenden el infinito, se pueden destacar los siguientes efectos:

✓ ***Estancamientos*** que se pueden identificar por:

- La aceptación exclusivamente del infinito potencial y el rechazo del infinito actual, situación que no permitiría relacionar la idea de límite con la de infinito, como se mencionó anteriormente; lo que era infinito necesariamente era inagotable y por lo tanto carente de todo límite. La causa de este efecto es obstáculo sustancialista que se deriva de la concepción filosófica del infinito.

- Asumir que la geometría es el único medio para determinar la verdad y el paradigma de rigor que debe ser implementado por cualquier trabajo que anhele obtener estatus de cientificidad, dificultó la búsqueda de estrategias que permitieran el avance del conocimiento científico. Este efecto, puede ser considerado consecuencia del obstáculo unitario que se genera al asumir la geometría como elemento totalizador de conocimiento científico.

✓ ***Inercias*** que se originan a partir del sometimiento a la concepción aristotélica del continuo y el infinito. Los diferentes pensadores de la época se limitan a seguir esta línea de pensamiento y por lo tanto limitan la búsqueda de estrategias que generen rupturas y permitan que la evolución de los diferentes conceptos.

4.2 Estado Científico: infinitesimales, indivisibles, "cantidades evanescentes" y "*ficciones útiles*", el infinito un obstáculo epistemológico reiterativo.

Siglos después del esplendor de la cultura griega, los métodos exhaustivo y mecánico desarrollados por Arquímedes, establecen dos perspectivas diferentes para el estudio de las cuadraturas: el método fundamentado en los infinitesimales como resultado del método exhaustivo, y los indivisibles derivados del método mecánico.

Johannes Kepler orienta el cálculo de áreas y volúmenes sobre la base de los infinitesimales; aquellos pequeños elementos que conforman las figuras, conservando su dimensión. Apoyado en la continuidad que exponía Nicolás de Cusa[62] consideraba las curvas como figuras poligonales de infinitos lados muy pequeños y a partir de esta consideración, determina que el área de una figura se puede calcular al sumar infinitos infinitesimales.

---

[62] Nicolás de Cusa (1401-1464) obispo de Brixen, "descubre la función de lo infinitamente pequeño como principio de estructuración de las formas finitas, es decir, concibe la idea de la coincidencia de lo infinito y lo finito en los objetos geométricos limitados" (Frankl, 1952)

El interés de Kepler por calcular cuadraturas y cubaturas, no estaba relacionado exclusivamente con el propósito fortalecer el desarrollo de la ciencia, también le interesaba realizar aportes que fueran útiles para solucionar problemas prácticos de la vida diaria. Es así como presenta una metodología que le permite determinar el volumen de unos barriles de vino, lo que fue de gran ayuda para el desarrollo de su cultura.

Por consiguiente, se interesa en buscar mecanismos que le permitan calcular áreas, evitando los intricados procesos de reducción al absurdo que implicaban las demostraciones realizadas por Arquímedes. Kepler realiza el paso al límite tal y como lo comenta Koyré:

> …realiza, sin dudarlo un instante, la operación de paso al límite, identificando pura y simplemente una curva con la suma de rectas infinitamente cortas (un circulo con un polígono de un número infinitamente grande de lados infinitamente cortos) y su área como la suma de rectángulos infinitamente numerosos e infinitamente pequeños (el área del circulo con la suma de una infinidad de triángulos infinitamente estrechos) (Koyré, 2000, pág. 323)

La argumentación de Koyré indica que Kepler asumía las figuras curvilíneas como un polígono de infinitos lados, ya que este punto de vista le resultaba útil a la hora de solucionar problemas. Esta forma de entender las figuras, marca un corte con la concepción Aristotélica puesto que desde su forma de aceptar el infinito les era inimaginable este proceder. Se mencionó anteriormente que Kepler se orientaba por la concepción de Nicolás de Cusa, que según (Frankl, 1952):

> Otra concepción propia de la futura matemática infinitesimal, la idea de construir las magnitudes extensas de elementos infinitamente pequeños o inextensos, se manifiesta también en forma embrionaria, en la obra mencionada, si el Cusano simboliza el proceder de la ilimitada multiplicidad de las formas del mundo del seno de Dios mediante imágenes matemático-físicas, interpretando la serie infinita de los números como despliegue de la unidad, la línea, el plano y el cuerpo como despliegue del punto inextenso. (Frankl, 1952, pág. 451)

Lo que claramente entraría en contradicción con la concepción del continuo aristotélico, pues para Aristóteles la recta (ejemplo de continuidad) no puede ser estar compuesta por puntos, ya que desde su perspectiva "*es imposible que algo continúo este hecho de indivisibles*" (Aristóteles, Física, 1995, pág. 201)

Los infinitesimales de Kepler y la forma como los utiliza para determinar la cuadratura de figuras, serán una gran herramienta para el cálculo de áreas, que al ser retomados por

Newton y Leibniz, se constituirán en un mecanismo importante para la evolución del concepto de la integral definida.

A los aportes de Kepler se le suman los realizados por Cavalieri derivados directamente del método mecánico de Arquímedes, *"los indivisibles"* de Cavalieri son una propuesta diferente a los infinitesimales, cuya elemento diferenciador consiste en que los indivisibles que constituyen ~~a~~ una figura son de una dimensión menor que la misma.

Como se mencionó con anterioridad, la evolución del conocimiento no depende única y exclusivamente de los desarrollos que se realizan al interior de las disciplinas científicas, pues su desarrollo también está influenciado explícita o implícitamente por los factores sociales y culturales de cada momento histórico. Así, durante esta época se gestaron cambios de tipo: social, cultural y por supuesto movimientos de tipo intelectual que fueron direccionados a potenciar la construcción del conocimiento.

Los desarrollos matemáticos no son ajenos a este tipo de movimientos sociales, culturales e intelectuales, en este sentido los trabajos de Kepler y Cavalieri marcan una ruptura con los conocimientos anteriores, descubrir e innovar es la tendencia de este periodo histórico, por tanto, los indivisibles y los infinitesimales aparecen como dos métodos que están encaminados a buscar herramientas que permitan solucionar problemas; sin preocuparse, por un momento, por la concepción ontológica de los conceptos matemáticos, en otras palabras, los pensadores utilizan conceptos con el objetivo de descubrir, de abrir caminos que permitan avanzar en la construcción del conocimiento matemático, dejando de lado las dificultades que les generaba el cuestionamiento sobre la naturaleza de dichos conceptos.

Cavalieri, a través de su trabajo con indivisibles extiende los objetos matemáticos a un escenario que no podían ser representados geométricamente por ejemplo, cuando hace mención al hipercubo, está pensando en dimensiones que no eran manejadas por los griegos, ya que las concepciones sobre las cuales establecían su geometría, solamente les permitía representar figuras superficiales o volumétricas.

Este trabajo, inicia un proceso en el que los desarrollos matemáticos se apartan de la geometría, direccionando el camino que se debe recorrer para pasar de lo sintético a lo analítico. La ruptura propiciada con base en los nuevos aportes, establece un modo de actuar en el que la geometría sintética, alejada de procesos aritméticos, es relegada gradualmente por desarrollos algebraicos, que antes que demostrar proposiciones rigurosamente (como en el caso de la geometría), tenían como propósito facilitar los cálculos y en ese sentido contribuir al descubrimiento y potenciación de la disciplina. En esta nueva tendencia la geometría analítica asume un papel importante, ya que instaura una relación entre el álgebra y la geometría, donde un determinado problema, cuya solución implicaba arduos y complicados procedimientos, podía ser solucionado de una manera más efectiva al emplear los métodos algebraicos. Lo que se puede considerar como una ruptura, con el obstáculo verbal establecido por el lenguaje retórico usado para hacer matemáticas. Además, rompe con el obstáculo unitario que erigía la geometría euclidiana como el modelo único y verdadero, al interior del conocimiento matemático.

El método de los indivisibles de Cavalieri tiene su encuentro con el infinito cuando la argumentación de su principio fundamental basado en la comparación de "*todas las líneas*", conduce a pensar en el infinito actual, lo que entraría en contradicción con el continuo aristotélico y a lo que Cavalieri no está dispuesto a refutar. En este sentido el método de los indivisibles corresponde a una serie de procedimientos, una **herramienta útil** para obtener resultados respecto al cálculo de cuadraturas. Sin embargo, a pesar de la falta de rigurosidad de este método, la visión innovadora y creativa con que éste se desarrolla permite que se realicen importes avances en la evolución del concepto de la integral.

Si bien, la concepción de infinito como algo "*ilimitado*" sigue apareciendo como un obstáculo para la movilización de concepciones tradicionalmente aceptadas, la heurística de Cavalieri da un paso significativo en la manipulación del infinito cuando pretende determinar la razón entre dos colecciones de indivisibles. Es importante resaltar que con el método de los indivisibles se empieza a perder el temor de emplear en los cálculos matemáticos conceptos o nociones, que a falta de contar con una fundamentación teórica, eran de gran utilidad a la hora de solucionar problemas; situación que será de gran beneficio para la evolución del conocimiento matemático y emprenderá el camino que conducirá a la dominación del infinito.

El trabajo de Cavalieri se destaca por modelar procesos matemáticos, olvidándose momentáneamente de los problemas de fundamentación relacionados con la concepción ontológica del continuo y del infinito aristotélico. Esta forma de proceder le permite determinar la cuadratura de figuras limitadas por curvas, cuyas graficas corresponderían actualmente a curvas cuya ecuación es de la forma x^n. Cavalieri se dedicó a conseguir resultados sin preocuparse por las limitantes condiciones que el rigor le exigía.

Esta nueva forma de hacer matemáticas, donde el rigor heredado de la cultura griega deja de ser considerado la esencia del devenir matemático, abre la puerta a estrategias y técnicas que desde nuestra consideración, son de gran utilidad para la construcción de nuevas ideas y conceptos, los cuales puedan ser enfrentados a las concepciones establecidas, con el propósito de impulsar el desarrollo del conocimiento matemático.

Sin embargo, Bachelard tiene una posición diferente al respecto, considera que el conocimiento que es "*útil o pragmático*" constituye un obstáculo para la evolución del conocimiento. Afirma que:

> Todo pragmatismo, por el mero hecho de ser un pensamiento mutilado, lleva fatalmente a la exageración. El hombre no sabe limitar lo útil. Lo útil por su valorización se capitaliza sin cesar… Sistemas íntegros están considerados sobre consideraciones utilitarias. Solo la utilidad explica. (Bachelard G. , 2000)

La visión de Bachelard conduciría a pensar que esta forma de hacer matemáticas, donde los resultados eran considerados por su utilidad a la hora de resolver problemas, sería una limitante para edificar teorías realmente sustentables, pues la comodidad de la cual gozan los pensadores al constatar que sus hipótesis funcionan adecuadamente, condicionaría la búsqueda de las características fundamentales de los conceptos, su esencia o naturaleza. En palabras de Bachelard "*solo la utilidad explica*".

El argumento de Bachelard cobra vigencia cuando los diferentes pensadores no logran develar la naturaleza de las cantidades infinitamente pequeñas, solamente ven en ellas un carácter pragmático a la hora de determinar cuadraturas. A pesar de lo anterior desde este trabajo se considera que el nuevo trajinar del proceder matemático, fundamentado en los resultados que permitían obtener los conceptos sin preocuparse completamente por su naturaleza ontológica, contribuyó notablemente en la construcción de conocimiento matemático. El dejar de lado el carácter ontológico del infinito, representa una ruptura con el obstáculo sustancialista que había sido instaurada con el pensamiento griego.

Tal situación, también será reflejada en los aportes de importantes pensadores como Wallis, Newton y Leibniz quienes realizaron contribuciones importantes en el desarrollo del concepto de la integral, así no superaran el obstáculo que generaba la concepción del infinito.

El movimiento intelectual gestado en el siglo XVII, está orientado a crear condiciones orientadas a la innovación y el descubrimiento en las diferentes disciplinas científicas. De esta manera *la geometría analítica* expuesta por Descartes, constituye un punto de quiebre a la dinámica con la que hasta el momento se desarrollaban las matemáticas, pues con el propósito de acelerar la edificación del conocimiento científico, se hace necesario implementar métodos y estrategias que permitan economizar procesos y establecer heurísticas que proporcionen resultados, tal y como lo realiza Cavalieri en su método de los indivisibles.

Multiplicar, dividir y extraer raíz cuadrada de magnitudes lineales tal y como se procede con los números, es un aporte que aparece en el primer libro de la *Geometría* de Descartes. Esto debe ser considerado una importante ruptura respecto a las limitaciones operativas de la geometría griega, consecuencia de la manipulación de las magnitudes inconmensurables. De manera similar se realiza un avance con relación a las curvas que para la época se manejaban; los griegos solo disponían de las curvas que podían ser construidas con regla y compás, y a partir del trabajo de Descartes son aceptadas las curvas que podían ser representadas a través de una expresión algebraica:

> En este sentido, Descartes no sólo aceptaba las curvas construidas con regla y compás, sino también aquellas construidas a partir de un cierto aparato articulado que le permitiera expresarlas a través de una ecuación. (Recalde, 2011)

La implementación de símbolos arbitrarios al mundo matemático, es otro punto de corte que presenta la geometría analítica respecto a las matemáticas tradicionales. Para Bachelard, los hábitos puramente verbales constituyen un obstáculo en el pensamiento científico, en este sentido, el lenguaje natural o "*vulgar*" en los términos del filósofo francés y que era empleado en las matemáticas hasta ese momento, era ambiguo y su carácter retórico dificultaba los procedimientos, además hacerlos demasiado extensos y complicados. En este sentido la inclusión de símbolos en los procedimientos matemáticos por parte de Viète y posteriormente por Descartes, constituye una ruptura importante, que permitirá evadir las dificultades que generaba el obstáculo verbal.

François Viète precursor de Descartes inicia trabajos en los que incluye el álgebra simbólica; sin embargo, su inclinación hacia la geometría griega solo le permitió que su representaciones algebraicas se limitaran al álgebra sincopada.

Descartes con un espíritu revolucionario, se aparta de las abreviaturas empleadas por sus antecesores y establece una simbología que marca un antes y después en los desarrollos matemáticos; consiguiendo la aritmetización de la geometría al considerar que cualquier magnitud geométrica podían ser consideradas exclusivamente como magnitudes lineales, es decir, a diferencia de los griegos para quienes x^2 exclusivamente representaba una superficie. A partir de lo expuesto por Descartes será entendido como la segunda potencia de una línea recta y en consecuencia expresiones como $x + x^2$ adquieren el sentido que anteriormente no lo tenían.

De esta manera, la geometría analítica establece un puente que permite transitar del álgebra a la geometría y viceversa, admitiendo procesos matemáticos más prácticos y por tanto, útiles en la construcción del conocimiento, tal y como lo exigía el movimiento intelectual de la época y que brindará aportes importantes en la evolución del concepto de la integral definida.

Ahora, si nos ubicamos en la noción del infinito como obstáculo epistemológico desde la concepción griega de lo ilimitado o inagotable, Descartes no presenta ningún aporte, que evidencie algún movimiento conceptual que lleve a establecer alguna ruptura, ya que su posición es similar a la Aristotélica, incluso la reafirma:

> Y nada hay a lo que llame propiamente infinito salvo aquello en lo que por ninguna parte hallo límite alguno, sentido en el cual únicamente Dios es infinito. (Zellini Siruela, 1991, pág. 120)

En la nota se puede observar que la concepción del infinito expuesta por Descartes no permite relacionarla con límite alguno y al asemejarlo a la idea de Dios, lo sigue ubicando en el terreno filosófico, lo que no indica un avance considerable al respecto.

El álgebra de segmentos desarrollada por Descartes es empleada por Jhon Wallis para aritmetizar los indivisibles de Cavalieri, pues para él, era más práctico y ofrecían mejores resultados matemáticos los procesos aritméticos, en lugar de los complicados y laboriosos desarrollos geométricos y algebraicos aplicados por Cavalieri en la implementación de los indivisibles.

Para desarrollar su proyecto, Wallis necesita profundizar en la manipulación de las series, trabajo en el que necesariamente debe encontrarse con el infinito cuando al aplicar el método de inducción incompleta, llega a trasladar propiedades de las series finitas a las series infinitas. A través de la aplicación de este método rompe con la tradición aristotélica, de alguna manera manipula y representa mediante el símbolo ¨∞¨ al infinito, innombrable y generador de contradicciones en la cultura griega, cuya concepción se levantaba como un obstáculo epistemológico en la evolución del conocimiento matemático. El notar simbólicamente el infinito puede ser considerado como un paso importante para el nacimiento de un objeto matemático[63].

Este momento histórico es un punto de inflexión en la evolución del concepto de la integral definida, puesto que el manejo que Wallis le asigna al infinito, rompe con las costumbres matemáticas establecidas desde los tiempos griegos. Veamos:

---

[63] Es importante tener en cuenta que la notación del símbolo ¨∞¨ no significa la aceptación del infinito actual, sino, un importante avance en el desarrollo histórico de un concepto del que se dificultaba su manipulación debido a las ambigüedades que generaba.

> Wallis se propone rescatar e independizar a la aritmética de las representaciones geométricas, rompiendo con el álgebra geométrica de los antiguos, llegando incluso a presentar aritméticamente lo que para los griegos era la intocable teoría general de las proporciones de Eudoxo, con ello Wallis es, entre los predecesores del cálculo, quién más próximo está a la idea de límite y quien con mayor soltura lo utiliza, por lo menos a nivel intuitivo[64].

Sin embargo, aún aquí no se puede evidenciar una restructuración de conceptos que den cuenta del vencimiento del obstáculo completamente, pues hasta el momento no se logra obtener una formalización teórica del concepto de límite, situación que implica que hasta este momento los límites deben ser determinados, según la capacidad intuitiva del pensador.

Un aspecto que da cuenta de lo difícil que resulta reevaluar y acondicionar las teorías existentes con el propósito de que el conocimiento avance, puede ser observado en la presentación que realiza Wallis al buscar una representación geométrica de los resultados que obtiene de sus desarrollos aritméticos. Todavía para esta época la geometría tradicional seguía siendo modelo de rigurosidad en los desarrollos matemáticos.

Otro avance importante que se desprende de los trabajos realizados por Wallis, es la asignación de un número a cada cuadratura, es así como a partir de las proposiciones expuestas en la *Aritmética de los infinitesimales,* se puede llegar a la conclusión que el área de un paralelogramo de base l y altura m se puede obtener a través del producto $m \times l$. Este aspecto que se desprende del trabajo realizado por Wallis constituye una importante ruptura, un punto de quiebre en el desarrollo del concepto de la integral, se debe recordar que la asignación de un número a cada cuadratura, constituye la definición moderna del concepto de área, y es una aplicación de la integral definida.

El poder determinar el área de un rectángulo como el producto entre su base y su altura, permite que Wallis calcule la cuadratura de una figura F como la suma de las cuadraturas de rectángulos infinitesimales, cuya altura está determinada por la forma de la figura y la base es una cantidad infinitamente pequeña.

---

[64] Citado por (Bobadilla M. L., 2012, pág. 49)

La aritmetización de los infinitesimales desarrollada por Wallis, pretende extender los trabajos aritméticos a los números irracionales, a partir de lo cual establece rupturas en el desarrollo histórico del concepto de la integral, pues aunque de manera intuitiva, llega a determinar diferentes límites.

> … dar carta de naturaleza aritmética a lo irracional, superando el imperativo pitagórico de considerar lo irracional sólo en el campo de la Geometría, removiendo uno de los obstáculos que impedía la formulación del concepto de límite… (Gonzales, II - 1995, pág. 418).[65]

La expresión "*removiendo uno de los obstáculos que impedía la formación del concepto de límite*", indica claramente un corte epistemológico con concepciones previamente establecidas y por tanto, representa un avance significativo en la evolución del conocimiento matemático, sobre todo en lo que está relacionado con la construcción del concepto de la integral.

En la misma línea de pensamiento, aparecen los aportes realizados por Newton y Leibniz, quienes apoyados en los trabajos de Kepler, Cavalieri, Fermat y Wallis, llegan a establecer un conjunto de herramientas y procedimientos que permiten determinar la cuadratura de algunas curvas particulares. Además, cada uno desde su perspectiva llega a instaurar la relación inversa entre el cálculo de cuadraturas y el cálculo de tangentes.

Los trabajos de Newton y Leibniz no son indiferentes a los problemas que representa la manipulación del infinito, situación que acarreará dificultades de formalización a sus resultados, realidad que se refleja en las fuertes críticas a las que se ven enfrentados a la hora de manejar cantidades infinitamente pequeñas.

Newton inicia sus aportes con base en los indivisibles, luego al considerar que estos son cantidades discretas, enfoca su trabajo en lo que denomina "*fluentes*" y "*fluxiones*" al suponer que las variables cambiaban de manera continua. Esta situación marca un cambio con respecto a lo expuesto por Wallis, pues no realiza el presunto paso al límite que se

[65] Citado por (Bobadilla, 2012, pág. 51)

hacía necesario al sumar áreas infinitesimales, contrario a esto, analiza la variación de área en un punto determinado.

Newton genera una ruptura con el obstáculo verbal al emplear procedimientos algebraicos para obtener sus resultados, sin embargo, la principal dificultad que se le presenta a la hora de buscar la fundamentación de su cálculo es la implementación de una cantidad infinitesimal que denomina "*o*" cuya naturaleza no puede explicar satisfactoriamente.

La aplicación de esta cantidad infinitesimal "o" genera ambigüedades o contradicciones en el campo matemático, pues era considerada diferente de cero cuando era necesario dividir entre ella, sin embargo, cuando la misma cantidad aparecía como un sumando, se podía eliminar ya que era tan pequeña que no adicionaba nada. Esta situación se evidencia cuando demuestra que la expresión $z = \frac{2}{3}x^{3/2}$ corresponde a la cuadratura de la curva expresada de la forma $y(x) = x^{\frac{1}{2}}$.

Esta forma de proceder en la que una cantidad infinitesimal actúa como una cantidad diferente de cero y al mismo tiempo puede ser empleada como cero, según la ubicación de la misma, representa las dificultades de rigor lógico que Newton no logra evitar y, que de paso, son la base de las fuertes críticas que el obispo Berkeley la realiza a sus métodos.

Para Berkeley que en los desarrollos matemáticos fueran empleadas cantidades que estaban por fuera de toda lógica reflejaba carencia de rigor; no entendía cómo los resultados expuestos podían tener como fundamento unas cantidades que no permitían establecer una argumentación rigurosa, pues la aplicación de estos "*fantasmas de las cantidades desaparecidas*", dependían necesariamente de quien las trabajaba y por lo tanto no brindaban ningún tipo de solides teórica.

Newton consciente de esta problemática, busca en los procedimientos físicos alternativas que le permitan establecer bases estructuradas para su trabajo, pues desde su perspectiva, los conceptos físicos siempre estaban bien fundamentados y en consecuencia, decide trasladarlos al campo matemático.

La nueva concepción Newtoniana, fundamentada en los principios físicos lo lleva a considerar que las cantidades se generan a través del movimiento continuo, estableciendo un corte con la perspectiva anterior que suponía que los indivisibles eran cantidades discretas que salvaban algunas condiciones del continuo. Al respecto (Bobadilla M. L., 2012) afirma lo siguiente:

> Los infinitesimales aparecen en los *Principia* como "momentos", como principios generadores de cantidades finitas. Una variable es una cantidad que fluye y lo que es, en el instante mismo que empieza a fluir, es el momento de dicha cantidad; se afirmaba entonces que una cantidad infinitesimal era una entidad discreta que preserva cualidades de lo continuo. Más adelante, en *de la Cuadraturas de Curvas*, Newton considera las cantidades como generadas por el movimiento continuo por oposición a los infinitesimales que sugieren siempre un tratamiento discreto, con cierta dosis de continuidad. (Bobadilla M. L., 2012, pág. 78)

Sobre esta base Newton considera que una cantidad se determina a partir del movimiento que le genera, de tal manera que la rapidez con la que cambia el área, permitiría calcular el valor del área. En su nuevo trabajo define como "*fluentes*" a las cantidades que se originan a partir del movimiento y "*fluxiones*" a las velocidades de dichos movimientos. Desde este punto de vista supone que las curvas son generadas a partir del movimiento de un punto, lo que lo lleva a concluir que las coordenadas x, y, como la cuadratura Z de dicha curva, varían respecto al tiempo.

Newton busca la seguridad que le suministran los conceptos físicos y sobre ellos fundamenta su trabajo denominado *De la cuadratura de curvas*, sin embargo, cuando en el desarrollo de sus procedimientos necesita valerse de un incremento infinitesimal de tiempo, lo aplica de la misma manera como lo hacía en los desarrollos anteriores, es decir, al pasar a las representaciones matemáticas, denota este incremento infinitesimal de tiempo como "o" y le da el mismo manejo que es origen de ambigüedades, en otras palabras, divide porque es diferente de cero, pero también anula, ya que al ser tan pequeño no adiciona nada.

De acuerdo con lo anterior, se puede afirmar que Newton a través de las tres versiones que presenta de su obra, *Los principios matemáticos de la filosofía natural*, pretende establecer una teoría que pueda ser argumentada con fundamentos sólidos. A pesar de esto, en cada una de las versiones que expone, evidencia las mismas contradicciones. En palabras de Kline:

En cuanto al método para calcular una fluxión, el tercer trabajo de Newton es, desde el punto de vista lógico, tan burdo como el primero. (Morris, 1998, pág. 161)

Esta situación evidencia una vez más que las cantidades que disminuían sin cesar, cantidades infinitamente pequeñas, siguen generando un obstáculo para la fundamentación de los desarrollos matemáticos, en este sentido la ausencia de una teoría que permita formalizar el concepto de infinito, continúa siendo fuente de contradicciones y dificultades para los diferentes matemáticos.

El cálculo de Leibniz se vio enfrentado a conflictos similares, cuando al desarrollar sus trabajos debió aplicar su concepción respecto a las cantidades infinitamente pequeñas.

Leibniz relaciona la derivada con el cociente de dos diferenciales mediante la implementación del triángulo característico, triángulo que desarrolla con base en el triángulo armónico de pascal, cuya principal característica está en sus lados infinitesimales.

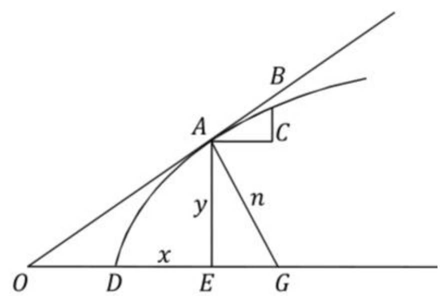


Figura 28.

Para Leibniz el triángulo infinitesimal ABC es semejante al triángulo OAE, lo que indica que su manipulación de lo infinitamente pequeño, respeta el principio de la homogeneidad de la dimensión, hecho que marca una separación con los indivisibles de Cavalieri.

Leibniz desarrolla su teoría, respecto a la integración con base en la suma de rectángulos, considerando que al sumar todos los rectángulos de base infinitesimal y altura la ordenada de la curva, se podía llegar a obtener exactamente el área bajo la curva determinada. El problema a su planteamiento se presentaba cuando necesitaba generalizar la suma de un número finito de rectángulos, a la suma de infinitos rectángulos de base infinitesimal, sin contar con unos argumentos sólidos que sustentaran su teoría. Situación que produjo criticas debido a la ambigüedad de sus planteamientos.

Las críticas que debe enfrentar Leibniz se originan en la forma como manipula el infinito, sin embargo, cabe recordar que su idea de relacionar una figura curva con un polígono de infinitos lados, representa una idea respecto al infinito actual, idea que empleaba implícitamente para obtener resultados. A pesar de lo anterior, el infinito seguía levantándose como un obstáculo en la evolución del conocimiento matemático, y aunque se había avanzado en aspectos como el *horror al infinito* de los antiguos griegos, aun se mantenían problemas de rigor lógico a la hora de manipular cantidades infinitamente pequeñas, o en el momento de extender sumas finitas a sumas infinitas.

Desde su perspectiva, Leibniz suponía que fenómenos del mundo físico, como la velocidad instantánea por ejemplo, podían ser asimilados con los infinitesimales en las matemáticas. Para él, estas cantidades no podían ser exclusivamente de carácter intuitivo, si se reflejaban en la naturaleza. Lastimosamente Leibniz no consiguió argumentar de manera rigurosa sus ideas, aun cuando la aplicación de estas cantidades pequeñas siempre lo conducía a obtener resultados verdaderos.

El no poder ofrecer una sustentación teórica a sus argumentos, llevó a que Leibniz indicara que estas cantidades infinitesimales, como la gran mayoría de los entes matemáticos, eran de carácter abstracto y por tal motivo residían en la cabeza de quienes necesitar hacer uso de ellas, sobre todo de quienes estaban interesadas en la solución de problemas matemáticos. Al respecto (Zellini Siruela, 1991):

> Leibniz siguió hablando de los infinitesimales dx como "ficciones" útiles para el arte de la invención matemática, como entidades imaginarias que no corresponden a cosas actualmente existentes fuera de la mente de quien las concibe. En lugar de los infinitesimales, escribía, se hubiesen podido emplear expresiones del tipo "todo lo pequeño que haga falta para que el error sea menor que cualquier error dado"… el propio Leibniz era consciente de determinadas anomalías y ambigüedades que entrañaba el empleo de incrementos infinitamente pequeños. "tales incrementos", observaba "no pueden ser representados por construcción alguna". (Zellini, 1991, pág. 136).

Frente a las críticas que generaban las "anomalías" que repercutían por la implementación del infinito y ante la imposibilidad de exponer una explicación satisfactoria al respecto, Leibniz recurre a lo que el movimiento intelectual de la época se lo permitía, entendía que las cantidades infinitesimales eran un obstáculo al no poder clarificar su naturaleza, pero al mismo tiempo defendía la utilidad de las mismas en la consecución de resultados. Como comenta (Kline, 1985):

> … decía que una excesiva escrupulosidad no debería llevarnos a rechazar los frutos de la inventiva. Decía después Leibniz que su método difería del de Arquímedes solo en las expresiones utilizadas, pero que las suyas se adaptaban mejor al arte del descubrimiento. Los términos "infinito" e "infinitesimal" significaban, meramente, cantidades pueden ser tomadas tan grandes o tan pequeñas como se desee mostrar que el error cometido es menor que cualquier número asignado de antemano (Kline, 1985, pág. 164)

Estas "*ficciones útiles*" las cuales no podían ser sustentadas teóricamente, realmente podían ser consideradas un obstáculo para la construcción de conocimiento matemático desde el punto de vista de Bachelard, pues no permitían una restructuración de conceptos que llevaran a la edificación de teorías con el rigor que la disciplina exigía. No obstante, la aplicación de estas nociones, de la misma manera como los algebristas utilizaban las raíces cuadradas de números negativos, sería de gran utilidad para la evolución del conocimiento matemático, pues los resultados que de la implementación que de ellas se obtenían, establecen rupturas respecto al conocimiento que era común para la época, dinamizando la construcción de la definición formal del concepto de la integral definida.

A pesar de las dificultades conceptuales del nuevo cálculo, tanto Newton como Leibniz, apoyados en los resultados de sus métodos más que en el rigor que podían implementar en los mismos, realizaron importantes avances en la evolución del concepto de la integral. Cada uno por su lado construyó tablas de cuadraturas y anti-cuadraturas a través de la aplicación de una serie de algoritmos, trabajaron un conjunto de funciones más amplio del que trataron sus antecesores, efectuaron aproximaciones al número π a través del desarrollo de series de potencias y finalmente, desde su propia visión llegaron a establecer el teorema fundamental del cálculo.

Particularmente Leibniz realizó una importante ruptura respecto a la notación con la que se representaba el proceso de calcular una cuadratura, al entender que la cuadratura de una figura se obtenía como el resultado de una suma infinita, emplea la expresión $\int y \cdot dx$ para simbolizar dicha operación matemática. Este corte epistemológico es de gran valor, si se tiene en cuenta que al incorporar símbolos apropiados a los desarrollos matemáticos, potencia el descubrimiento y formulación de nuevos resultados en el campo de estudio, caso similar al que se presenta con la inclusión de la geometría analítica por Descartes.

Como se puede observar, Newton y Leibniz realizaron aportes notables en la evolución del concepto de la integral, a pesar de ello su manipulación del infinito seguía generando contradicciones y ambigüedades; lo cual significa que el obstáculo que generaba el infinito no se podía franquear absolutamente.

Los hermanos Jakob y Johann Bernoulli estudiaron el trabajo de Leibniz, con quien tuvieron comunicación constante respecto a las dificultades y avances de su nuevo cálculo, sobre todo con las inconsistencias que se presentaban con la aplicación de los infinitesimales. Los Bernoulli en el *Acta Eruditorum* de 1690, propusieron el nombre de "***integral***" para el proceso matemático que permitía determinar la cuadratura de una curva, a lo que Leibniz estuvo de acuerdo, al considerar que era mejor que "*summatorius*", palabra con la que se designaba la integral hasta ese momento. La asignación de este nombre determina una ruptura considerable con los conocimientos previos, pues a partir de este momento se le reconoce como una operación independiente en las matemáticas y por tal motivo, tal como lo comenta (Recalde, 2011): "*merece un tratamiento especial*".

A partir del trabajo realizado por los hermanos Bernoulli la integral no es empleada únicamente para determinar áreas y volúmenes como se hacía tradicionalmente, pues con la evolución del conocimiento matemático se generan nuevos problemas donde le integral será utilizada como una herramienta que permita solucionar diferentes tipos de ecuaciones diferenciales.

Un ejemplo particular de lo que se mencionó anteriormente, es el problema que propone Johann Bernoulli a la comunidad científica, problema que consistía en determinar la ecuación de la braquistocrona, o lo que es lo mismo, encontrar una expresión para representar la curva de descenso en tiempo mínimo.

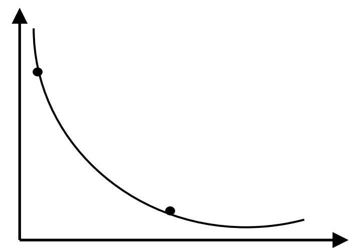


Figura 29.

Como se puede apreciar, la integral se adaptaba a las exigencias de la época, y gracias a los aportes de diferentes pensadores, condiciones como la notación y la asignación de un nombre para el concepto, establecen condiciones importantes para llegar a establecer su definición formal, sin embargo, la manipulación de las cantidades infinitamente pequeñas, necesarias en el procesos de integración, se desarrollaban según los pautas dadas por Leibniz y en tal caso los problemas de fundamentación seguían sin solucionar. A pesar de lo anterior y que desde el punto de vista de Bachelard, el pragmatismo o utilidad que se encontraban en la aplicación de los infinitesimales, debe instituirse como un obstáculo utilitario, además la aplicación de los mismos fue un elemento dinamizador en la evolución del conocimiento matemático, pues si bien no permitía que se profundizara en la naturaleza de las cantidades infinitamente pequeñas, si facilitaba el descubrimiento de resultados y la solución de nuevos problemas.

Durante el siglo XVIII se intensifican los procesos de integración de ecuaciones diferenciales, resultado de la investigación de diferentes fenómenos físicos y de su utilidad a la hora de resolver problemas prácticos. Estudiar ecuaciones diferenciales y su solución mediante la aplicación de la integral, cautivó el interés de los matemáticos de este siglo, contexto en el que aparece Leonard Euler con sus diferentes aportes al desarrollo de la noción de la integral definida.

Euler al igual que sus contemporáneos realizó trabajos encaminados a encontrar expresiones (ecuaciones) que sirvieran de solución a una ecuación diferencial determinada, donde uno de sus principales aportes a las matemáticas y que particularmente afecta la evolución del concepto de la integral es la primera definición de función:

> Una función de una cantidad variable es una expresión analítica compuesta de una manera arbitraria por esa variable y por números y cantidades constantes.[66]

Lo novedoso de la definición de Euler radica en la vinculación de las palabras "*expresión analítica*" pues, a partir de ello una función puede ser entendida como el resultado de operaciones algebraicas además, involucraba expresiones trascendentes y su representación en series infinitas.

El trabajo en series se hace indispensable para los desarrollos matemáticos durante esta época dado que, a través de su aplicación se pueden representar funciones derivarlas e integrarlas además, de ser útiles para calcular el valor de algunos números particulares. A pesar de ello, no se pueden descartar las ambigüedades y contradicciones que aparecen cuando las series debían ser extendidas al infinito. Un ejemplo particular de esta situación es la controversia que representa el desarrollo de la serie:

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 \cdots$$

Depende de la forma como se agrupe o se organice el resultado puede ser diferente. Situación que al no poder ser explicada satisfactoriamente llega a ser considerada como uno de los misterios de la religión sobre la creación del mundo. (Ortega Aramburu, 1999, pág. 387)

Euler, también se vio enfrentado a la necesidad de manejar el infinito en la manipulación de series. En su obra, *Introductio ananalysis infinitorum,* expone sus aportes y la forma como emplea las cantidades infinitamente pequeñas o infinitamente grandes. Heredero del cálculo infinitesimal de Leibniz, Euler trabaja estas cantidades sobre bases intuitivas y en *Introductio* expone un método para utilizar los infinitesimales sin expresar preocupación por su fundamentación, lo que evidencia claramente una ruptura con el obstáculo sustancialista, pues ya no hay preocupación por el carácter ontológico del infinito.

El desparpajo con el que Euler empleaba los infinitesimales, la aceptación de "∞" como un número, reconocer al mismo tiempo diferentes órdenes de infinitud o en el caso de las

[66] Citado por (Bobadilla,2012, Pág.74)

cantidades infinitamente pequeñas, considerar diferenciales de orden superior puede ser considerado como un corte epistemológico, una ruptura con la noción griega del infinito. Con Euler este horror al infinito empieza a desvanecerse y así las matemáticas recorren caminos antes prohibidos.

> Para los griegos el infinito fue una especie de bestia temible, pongamos un minotauro gigantesco del que había que huir; Euler en cambio no huye. Al contrario, se acerca al monstruo, le acaricia el lomo y le unce un yugo que le permite hacer fértiles campos antes estériles. (Bombal, 2009, pág. 214)

Durante los siglos XVIII y XIX las series de potencias siguen constituyéndose como una herramienta útil para la representación de funciones. Por lo cual, deben ser considerados los aportes de Jean-Baptiste Joseph Fourier (1768-1830), quien da las pautas para que una función pueda ser representada a partir de una serie trigonométrica.

El trabajo sobre series de potencias llevó a que los procesos de integración nuevamente fueran considerados como una herramienta útil y práctica para expresar una función por medio de una serie, el concepto de integral es relegado a un segundo plano por tanto, su estudio como una noción particular se hace más lenta o se detiene.

El dominio de las funciones era cada vez más amplio y al ser consideradas como una expresión analítica derivar e integrar se realizaba a través de procesos algebraicos, escenario en el que la integral era considerada como una antiderivada. Ahora, ya en este momento se tenía conocimiento de algunas funciones discontinuas, también llamadas “arbitrarias” y para las cuales pensar en la integral como una antiderivada carecía de sentido.

Fourier considera que el tipo de funciones mencionadas anteriormente podían ser representadas por medio de series trigonométricas y que para determinar los coeficientes de estas series se hacía necesario retornar la interpretación de la integral como el área bajo la curva. Por este motivo, se puede considerar que a partir de su trabajo con funciones discontinuas, Fourier retorna la integral a su concepción original.

De acuerdo con lo anterior, en los trabajos desarrollados a partir de Kepler y Cavalieri hasta los aportes de Euler y Fourier se pueden encontrar los siguientes efectos:

- ✓ ***Inercias*** que pueden ser identificadas de la siguiente manera:

  Si bien a partir de los trabajos de Cavalieri se abandona tímidamente el temor a manipular el infinito por cuestiones filosóficas, pensadores como Newton, Leibniz y Euler manipulan cantidades infinitesimales sin más preocupación que la de obtener resultados, y frente a la dificultad de no establecer una teoría sólida que respaldara sus argumentos, se sintieron cómodos con la seguridad que les ofrecían al momento de solucionar problemas, se rindieron ante la posibilidad de descubrimiento que estos les permitían y dejaron de lado la idea de buscar una fundamentación teórica para estas cantidades infinitamente pequeñas. La causa de esta inercia puede ser atribuida al obstáculo utilitario al interior de la ciencia.
- ✓ ***Regresiones***: pueden ser observadas en la concepción de Descartes sobre el infinito, pues siglos después de las ideas implantadas en la cultura griega, retoma la idea metafísica del infinito y lo relaciona con la concepción de Dios. Es decir, una vez más el infinito se ubica por encima del entendimiento humano.
- ✓ ***Estancamientos*** identificados debidos a:

  A la falta de un lenguaje que permitiera el desarrollo del nuevo análisis aunque, el surgimiento de la geometría analítica de Descartes generó una ruptura con el lenguaje retórico que hasta la época era empleado, el álgebra no era suficiente para suplir las exigencias del análisis como una rama emergente de las matemáticas.

  Encontrar en la integral una herramienta útil para determinar la solución de ecuaciones diferenciales hace que durante una época sea considerada como un objeto matemático secundario, cuya importancia radicaba en la utilidad que presentaba a la hora de solucionar un problema principal. Situación que llevó a que la evolución del concepto de la integral perdiera el protagonismo de etapas anteriores.

4.3 El nuevo espíritu científico: “domesticación del infinito” y definición analítica del concepto de la integral definida.

La tendencia matemática en el siglo XIX estaba direccionada hacia la aritmetización del análisis, proceso en el cual se hacía necesario abandonar la intuición geométrica sobre la que se había estructurado el cálculo del siglo XVIII, en otras palabras, se buscaba establecer una ruptura que impulsara el desarrollo del análisis respecto a lo que se había desarrollado hasta el momento. Para esto, se hacía imprescindible la formalización e implementación de conceptos como los de función, variable y sobre todo el concepto de límite; cuya definición formal permitirá que el análisis pueda ser desarrollado desde un punto de vista aritmético, asignándole el rigor lógico que se le exigía desde algunos siglos atrás.

Augustin-Louis Cauchy se propone asignarle al análisis un rigor equivalente al que ostentaba la geometría griega, y para llevar a cabo este proyecto establece los conceptos de función, límite y continuidad. Sobre estos conceptos llega a constituir la base teórica, a través de la cual propicia la ruptura principal con concepciones anteriores. De tal manera, que a partir del trabajo expuesto por Cauchy en su *Cours d´Analyse* se expone por primera vez una definición formal del concepto de la integral definida.

Cauchy establece la diferencia entre número y cantidad, clarifica el concepto de variable para luego definir explícitamente el concepto de límite, noción que hasta la época solo se había manejado a través de la intuición, por medio de aproximaciones. La siguiente definición de límite constituye la columna vertebral del nuevo análisis:

> Cuando los valores que va tomando sucesivamente una variable particular, se aproximan indefinidamente a un valor fijo, de tal manera que acaban por diferir de él tan poco como queramos, entonces éste último valor, recibe el nombre de límite de todos los anteriores. (Cauchy, 1994, pág. 76)

De esta manera podemos decir que a partir de los desarrollos teóricos de Cauchy se genera el “**temblor de conceptos**” al que se hace referencia para indicar el momento justo en el que presenta una ruptura epistemológica que marca la evolución de una disciplina científica.

Vincular el concepto de límite de manera formal, permite que se haga a un lado la intuición geométrica y que las nociones de infinitamente pequeño e infinitamente grande puedan ser definidas. De esta manera, el infinito herencia de los antiguos griegos, empieza a ser manejado desde otro punto de vista.

A pesar de lo innovadora que llega a ser la inclusión del concepto de límite al interior del análisis, se puede observar que Cauchy no logra desprenderse completamente de la tradición aristotélica del infinito, pues la expresión: "*se aproximan indefinidamente a un valor fijo*" relaciona de alguna manera a límite con movimiento. Esta situación permite determinar cómo las concepciones previamente establecidas afectan la edificación de nuevas teoría y lo difícil que puede llegar a ser desprenderse completamente de ellas.

En concordancia con la capacidad creadora e innovadora que debe tener el hombre de ciencia, Cauchy define lo que es una función continua. Al respecto (Brunschvivicg, 1945) comenta:

> Cauchy funda la ciencia moderna del análisis, comenzando por poner en discusión la evidencia intuitiva que había permitido apoyarse entre si la definición analítica de la función y la continuidad de la curva tomada en su conjunto. Más allá de la generalización geométrica de Poncelet, recusa la generalización algebraica que había inspirado la formula y el uso nuevo del principio de continuidad. Es necesario, escribe en la *Introducción del Curso de análisis algebraico*, imponerse "no recurrir jamás a las razones sacadas de la generalidad del algebra" (Brunschvivicg, 1945, pág. 361).

Con base en lo anterior, modifica el manejo que se le daba a las series infinitas hasta ese momento, caracterizándolas como convergentes o divergentes según tendieran o no a un límite. Es así, como el trabajo expuesto por Cauchy rompe el cerco que pensadores anteriores como Newton y Leibniz no habían logrado superar desde su noción exclusivamente intuitiva de la continuidad.

Aportes como los anteriores conducen a la construcción de una teoría formal que permite la manipulación del infinito y a partir de ese momento se pueden realizar sumas y productos infinitos como procesos fundamentados, sin problemas de ambigüedad o preocupaciones de carácter ontológico, es decir, el trabajo presentado por Cauchy en *Cours d´Analyse* le otorga al análisis matemático el estatus de rigurosidad que durante tanto tiempo se le había exigido

Este corte epistemológico que se origina con la implementación del nuevo cuerpo teórico, a través del cual, se logra "***domesticar al infinito***" en cierta medida; en otras palabras, al lograr evadir el obstáculo epistemológico que generaba el infinito, se establece una base sólida para que por primera vez en la historia se presente una definición analítica y formal del concepto de la integral definida:

> Cuando los elementos de la diferencia $X - x_0$ devienen infinitamente pequeños, el modo de división tiene sobre el valor de *S* tan sólo una influencia sensible; y, si se hacen decrecer indefinidamente los valores numéricos de esos elementos, al aumentar su número, el valor de *S* terminará por ser sensiblemente constante o, en otras palabras, terminará por alcanzar un cierto límite que dependerá únicamente de la forma de la función $f(x)$ y de los valores extremos x_0 y X de la variable *x*. Este límite es lo que llamamos una *integral definida* (Cauchy, 1994, pág. 291).

Esta definición de la integral definida es el resultado de un proceso que se origina ante la necesidad de medir, particularmente con el problema del cálculo de cuadraturas en la antigua Grecia, y que en su proceso de evolución histórica se enfrentó a estancamientos y avances, sobre todo por el obstáculo que implicaba la manipulación del infinito, el cual no permitía la formalización de algunos conceptos. Sin embargo, la capacidad creadora del hombre logró que emergiera el espíritu científico, que a través de la rectificación de errores y rupturas epistemológicas se llegara a la reconstrucción de las teorías de tal forma que se pudieran edificar conceptos (como el de la integral definida) sobre bases realmente sólidas.

En seguida se presenta un esquema en el que se exponen los diferentes obstáculos epistemológicos que fueron identificados en el desarrollo histórico de la integral, con las correspondientes rupturas que permitieron su formalización como concepto del análisis matemático.

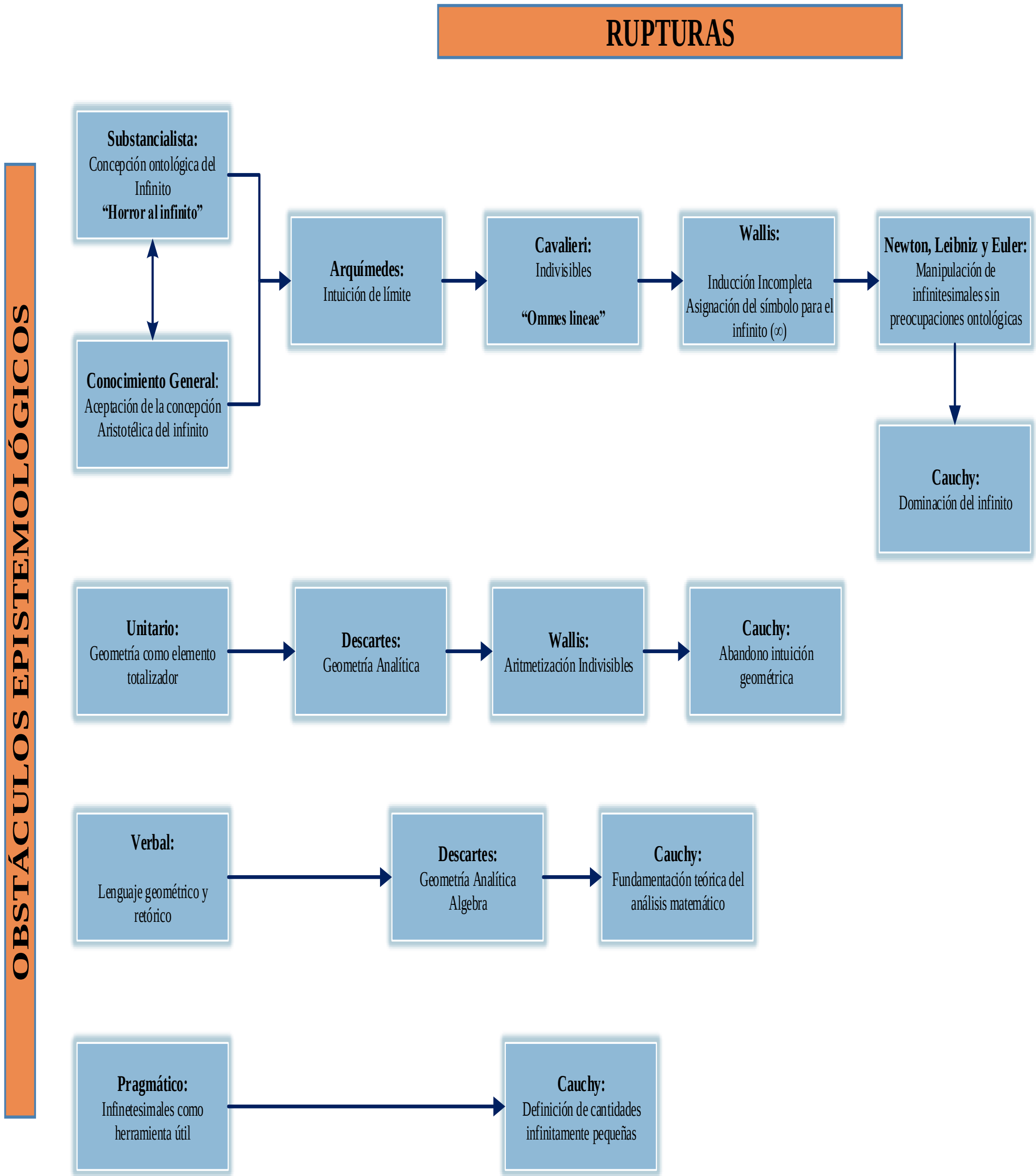


Figura 29. Obstáculos y rupturas en la evolución del concepto de la integral definida

5 DETERMINAR OBSTÁCULOS EPISTEMOLÓGICOS, UNA REFLEXIÓN DIDÁCTICA.

Finalmente, podemos indicar que el identificar obstáculos y rupturas epistemológicas en la evolución histórica de un concepto es de gran utilidad para los docentes, pues puede contribuir al entendimiento del proceso de enseña y aprendizaje por parte de los estudiantes. Se puede considerar que la apropiación de un nuevo concepto al interior de un salón de clase, es un proceso similar al que se da en la construcción del conocimiento científico pues, tanto el uno como el otro, implica una reforma espiritual.

Adicionalmente, un análisis histórico epistemológico que permite identificar obstáculos y rupturas en la evolución histórica de un concepto matemático, sirve de apoyo a la didáctica, pues reconoce en las matemáticas la construcción humana, admite que en los procesos de construcción de los conceptos, se presentan errores y dificultades. En consecuencia, ayuda a combatir el mito que se formó a partir de la tradición racionalista donde las matemáticas estaban un escalón por encima de las demás disciplinas científicas, motivo por el cual, su estudio era privilegio de unos pocos "superdotados". De acuerdo con Lizcano:

> Los conceptos matemáticos acostumbran presentarse, en el momento de su enseñanza, no menos enteros – y ya del todo armados- de como los hizo la también acorazada Atenea, sin nada que anuncie el proceso de su gestación. Tan súbita irrupción suele acarrear no sólo míticos dolores de cabeza que preceden apenas a su alumbramiento en la mente del estudiante, también amontonador de nubes, sino también esa persistente impenetrabilidad que le impide apropiárselos y hacerlos fructíferos.
>
> Desgajados de su génesis, del proceso de su hacerse, escindidos de aquellos otros saberes y materiales con/contra los que se han ido constituyendo, y aprehendidos como meros productos que brotan de la nada, claros y distintos, los conceptos y operaciones matemáticos permanecen estériles, meros objetos a perseguir o contemplar en su absoluta identidad, cerrada e inmutable. Acecharlos por el contrario, en el momento de sus emergencias, en la construcción efectiva de su vitalidad, y acompañarlos en su poliforma genealogía, acaso permita no sólo una comprensión- sin duda no exenta de extrañeza- más cabal y crítica sino también una mayor capacidad heurística, sensible ante nuevas emergencias (Lizcano E. , 1992, págs. 499-500)[67].

---

[67] Citado por (Bobadilla M. L., 2012)

Para Bachelard el docente debe estar en la capacidad de "*entender que no se entiende*", y por lo tanto, debe buscar mecanismos de enseñanza diferentes a los repetitivos, no se debe seguir pensando que los conceptos, por ejemplo el de la integral definida, deben ser admitidos por mandato y comprendidos únicamente a través de la repetición, pues esta situación restringe la capacidad crítica del estudiante.

De esta manera, si un profesor es consciente de que en el proceso mediante el cual se desarrolló un determinado concepto, se ubican obstáculos y rupturas epistemológicas, conseguirá formarse una idea distinta respecto a la continuidad y linealidad en la construcción del conocimiento y al mismo tiempo trasmitírsela a sus estudiantes, indicarles que se puede acceder los conceptos y teorías matemáticas con interés y con disciplina, que incluso podrían ser partícipes de la construcción de novedosas teorías.

El maestro puede contribuir para que el estudiante desmitifique el estudio de las matemáticas, que entienda que similarmente a como se analiza la evolución histórica de un concepto desde un punto de vista epistemológico, el educando puede regresar sobre las nociones y teorías aprendidas para que, desde una reflexión crítica, pueda afirmar todas aquellas que aportan para su comprensión; o en caso contrario, si existen nociones que dificultan este proceso, puedan ser reevaluarlas y modificadas de tal manera que la apropiación de su conocimiento avance, en otras palabras que establezca una especie de "mutación" intelectual en el estudiante, de tal manera que logre apropiarse adecuadamente de un determinado concepto.

Bachelard considera que explicar los conceptos desde una continuidad histórica, es similar a recitar determinada teoría desde un libro de texto, es equivalente a aceptar que los conocimientos se construyen a partir de una serie de conceptos perfectamente enjacados, alineados, como si estos hubieran surgido uno a uno a través de la historia.

Una enseñanza en esta dirección lleva a que los estudiantes se tornen pasivos frente al proceso de aprendizaje y opten por "creer" antes que por "comprender" los diferentes conceptos científicos, así, un niño o un joven que se limita a creer, simplemente está dejando de lado su capacidad creativa, es un educando que prefiere las respuestas antes que las preguntas, motivo por el cual la formación de espíritu científico se detiene.

Según (Goméz M, 2015), Bachelard pretende que da la misma manera como se debe propender por la formación de un nuevo espíritu científico, se debe orientar hacia la búsqueda de un "nuevo espíritu pedagógico" que difiera de la educación tradicional cuya función pareciera estar direccionada a "domesticar" la imaginación.

La escuela tradicional se transformó en un mecanismo de repetir verdades absolutas, donde no se refleja el auténtico desarrollo de cada una de las disciplinas científicas. En este entorno, el docente se encuentra en una zona de confort desde la que solamente ratifica su saber, un contexto en el que proceso de enseñanza se realiza a través de una relación de poder donde, el profesor esculpe el conocimiento sobre el estudiante, el cual es considerado como un recipiente que debe ser llenado de todo el saber con el que cuenta su instructor.

En el nuevo "espíritu pedagógico" que plantea Bachelard el docente tiene la misión de ser eterno alumno, es decir, no debe abandonar los procesos formativos. El profesor interesado en que su estudiante se apropie del conocimiento debe buscar estrategias que estén direccionadas a fomentar la imaginación y creatividad y para ello, se hace necesario la innovación y la investigación constante:

> He aquí la curiosidad del niño que destruye su juguete para ver lo que hay dentro de él. Si bien esa curiosidad de fractura es verdaderamente natural en el hombre, ¿no debemos sorprendernos, por decirlo solo de paso, de que no sepamos darle al niño un *juguete de profundidad,* un juguete que retribuya realmente la curiosidad profunda? Hemos puesto salvado dentro del muñeco, y nos extraña que el niño, con su voluntad de anatomía, se limite a rasgar ropas. Solo nos queda presente la necesidad de destruir y de romper, olvidando que las fuerzas psíquicas en acción pretenden abandonar los aspectos exteriores para *ver otra cosa*, ver más allá, ver por dentro, en fin, librarnos de la pasividad de la visión[68]

La curiosidad, la creatividad y la imaginación que tiene el niño al destruir el juguete, buscando lo que no se percibe a primera vista, debe ser similar a la de un estudiante de

[68] Citado por (Goméz M, 2015, pág. 208)

cálculo, a quien le corresponde tener la capacidad de reflexionar sobre cada concepto, de tal manera que adquiera un papel protagónico en la construcción de su propio conocimiento.

Para que un concepto como el de la integral definida no se relacione exclusivamente como un proceso mecánico y repetitivo, se debe presentar una adecuada comprensión del mismo. En otras palabras, el estudiante debe tener la capacidad de “deformar” dicho concepto para utilizarlo en diferentes escenarios, no puede ser un concepto estático, que se limite a la aplicación de un determinado algoritmo.

Para que esto se dé, es necesario que el estudiante regrese sobre sus conocimientos anteriores pero no para observar una edificación de conceptos perfectamente organizados, sino, para analizar en qué medida sus conocimientos anteriores le sirven para potenciar el aprendizaje del nuevo conocimiento; si es necesario precisar y rectificar sus conocimientos usuales, solo así el conocimiento adquirido rompe el conocimiento común con la primera impresión y por lo tanto, llegar a desarrollar una verdadera mutación intelectual.

6 BIBLIOGRAFIA

Alagia. (2005). *Reflexiones teóricas para la Educación Matemática.* Argentina: Libros del Zorzal.

Anacona, M. (2003). La historia de las matematicas en la educación matemática. *EMA*, 30-46.

Andersen, K. (1985). Cavalieri's Method of Indivisibles. *Archive for History of Exact Sciences, 31*(4), 291-367.

Anónimo. (s.f.). *Funciones y curvas extraordinarias, o un paseo por un museo de arte matemático.* Obtenido de valle.fciencias.unam.mx/titulacion/narraciones2.pd

Aristóteles. (1995). *Física.* Madrid: Gredos S.A.

Arqímedes. (1970). Medida del Círculo . En F. Vera, *Científicos Griegos* (Vol. II, págs. 94-99). Madrid: Aguilar.

Arquimedes. (1970). *En: Científicos Griegos. Recopilación de Francisco Vera.* Madrid: Aguilar.

Bachelard, G. (1938). *La Formation de l'esprit scientifique. Traducción al español: la formación del espíritu científico.* . México 2000: Siglo XXI editores.

Bachelard, G. (1973). *El compromiso racionalista.* Buenos Aires: Siglo XXI Argentina Editores.

Bachelard, G. (1979). *El racionalismo aplicado.* Buenos Aires: Paidós.

Bachelard, G. (2000). *La formación del espiritu cientifico.* Mexico: Siglo XXI editores s.a de c.v.

Barón González, G. p., Padilla Beltrán, J. E., & Guerra Garcia, Y. (2009). Los Obstáculos epistemólogicos en la labor del docente Neogranadino.

Barrantes, H. (2006). los obstáculos epistemólogicos. *Cuadernos de investigacion y formacion en educacion matemática.*

Barrios Garcia, J. (1993). La geometría de los indivisibles: Buenaventura Cavalieri,", Seminario Orotavade Historia de la ciencia, Departamento de análisis matemático, Universidad de la laguna., (págs. 305-326).

Beltrán M, P. (1996). La matemática de Lakatos: El papel de la prueba en la metodologia. *La ciencia de los filosofos.*, 305-320.

Bobadilla, M. L. (junio de 2008). Teorema Fundamental del Cálculo: una perspectiva histórica. *Unicauca Ciencia, 12*.

Bobadilla, M. L. (2012). *Constitución histórica de la teoría de la medida y la integral de Lebesgue: un tránsito entre lo geométrico y lo analítico.* Cali: Tesis Universidad del valle.

Bobadilla, M. L. (2012). *Constitución histórica de la medida y la integral de Lebesgue; el transito entre lo geometrico y lo analitico.* Cali: Tesis. Universidad del Valle.

Bombal, F. (2009). En *La obra de Euler* (págs. 209-228). Madrid: Realigraf S.A.

Boyer, C. (1987). *Historia de la Matemática.* Madrid: Alianza Editorial.

Brousseau, G. (1999). "Los Obstáculos Epistemológicos y los Problemas en Matemáticas",Traducción con fines de trabajo educativo sin referencia. Reeditado como documento de trabajo para el PMME de la UNISON por Hernández y Villalba del original en francés: Brousseau, G. (1983).

Brousseau, G. (2000). Educación y Didáctica de las matemáticas. *Educación Matemática, 12*(1), 5-38.

Brunschvivicg, L. (1945). *Las etapas de la filosofía matematica.* Buenos Aires: Lautaro.

Cabañas Sanche, M. G., & Cantoral Uriza, R. (2003). Una aproximacion socioepistemologógica al estudio de la integral definida.

Cauchy, A. (1994). *Curso de Análisis. Traducción el español: Carlos Alvarez.* México: Servicos Editoriales de la Facultad de Ciencias, UNAM.

Contreras de la Fuente, Á. (1997). La enseñanza del análisis matemático en el bachillerato y el primer curso de la universidad. Una perspectiva desde los obstáculos epistemológicos y los actos de comprensión.

Coronado, G. (1988). El atomismo de Leucipo y Demócrito como intento de solución a la crisis eleática. *Comunicación*, 25-33.

De la torre Gómez, A. (2006). El método cartesiano y la geometría analítica. *Matemáticas: Enseñanza universitaria.*, 1-13.

de la Torre Gómez, Á. (2006). El método cartesiano y la geometría analitica. *Matemáticas: enseñanza universitaria*, 1-13.

Delgado G, C. A. (2003). El modelo de Toulmin y la evolución del concepto de continuo en los clasicos griegos. *Educación e Historia.*, 91-27.

Dou, A. (1988). Origenes del cálculo de variaciones. *RACEFNM*, 133-151.

Duran, J. A. (2003). *Euler y los infinitos.* Recuperado el 10 de Enero de 2013, de http://upcommons.upc.edu/e-prints/bitstream/2117/1985/1/mblanco_paper_icehve.pdf.

Euclides. (1970). *En: Científico Griegos. Recopilación de Francisco Vera.* Madrid: Aguilar.

Euclides. (1991). *Elementos X-XIII.* (M. L. Puertas, Trad.) Madrid: Gredos.

Euclides. (1991). *Elementos. Versión española de María Luisa Puertas.* Madrid: Gredos.

Fernández Fernández, L. (2011). La historia como herramienta didáctica: el concepto de integral.

Florian B, V. (2001). Bachelard o el complejo de Prometeo. *Suma Cultural*, 1-77.

Fourier, J. (1822). *Théorie analytique de la chaleur.* París, 1989: Jaques Gabay Editions.

Frankl, V. (1952). Metafisica catolica y matemática infinitesimal. *Ideas y valores*, 445-471.

Frechet, M. (1958). *Les Mathématiques et le concret. Título en español: Las matemáticas y lo concreto.* (G. Machado, Trad.) Mexico: Universidad Nacional Autónoma de México.

Garcia Gaviria, J. J. (06 de 03 de 2014). Del"horror al infinito" de los antiguos griegos a la nócion de límite moderno. Cali, Colombia.

Garcia, r. (2000). *El conocimiento en construcción.* Barcelona: Gedisa.

Gascòn, J. (2000). Incidencia del modelo epistemologico de las matemáticas sobre las practicas docentes. *Revista Latinoamericana de Investigacion en matemática Educativa.*, 129-159.

Gil Perez, D., & De Guzmán Ozámiz, M. (2001). *Enseñanza de las Ciencias y la Matemática Tendencias e Innovaciones.* Madrid: Editorial Popular.

Goméz M, M. J. (2015). *Bachelard: ciencia y ensoñación.* Valladolid: Universidad de Valladolid. facultad de filosofia y letras.

Gómez marin, R. (2010). De las nociones de paradigma, episteme y obstáculo epistemológico. *Co-herencia*, 229-255.

Gonzáles Urbaneja, P. M. (2008). La solucion de Eudoxo a la crisis de los inconmensurables . *Sigma*, 101-129.

Gonzales, P. M. (II - 1995). Las Técnicas del cálculo infinitesimal: Fermat, Wallis y Roberval. *Seminario Orotava de Historia de la Ciencia* (págs. 405-437). Canarias: Gobierno de Canarias . Consejería de Educación http://www.gobiernodecanarias.org/educacion/fundoro/web_fcohc/005_publicaciones/seminario/infinito.htm. Recuperado el 4 de agosto de 2011, de http://www.gobiernodecanarias.org/educacion/3/usrn/fundoro/archivos%20adjuntos/publicaciones/actas/act2_pdf_web/a2_c016w.pdf

González Gilmas, O. (2004). El cálculo infinitesimal Leibniciano: una síntesis desde las perspectivas de Brunschvicg e Ishiguro. *Signos filososficos*, 97-120.

González U., P. (s.f.). *La Geometría de Descartes.* Obtenido de www.xtec.cat/sgfp/llicencies/200304/memories/geometriadescartes.pdf

González Urbaneja, P. M. (Febrero 2004). La historia de las matematicas como recurso didactico e instrumento para enriquecer culturalmente su enseñanza. *SUMA*, 17-28.

González, P. (s.f.). *Orígenes y evolución histórica del cálculo infinitesimal.* Obtenido de es.slideshare.net/PabloPerez6/calculinfinitesimal

Grattan-Guinness, I. (1980). *Del cálculo a la teoría de conjuntos,1630-1910 una introducción histórica.* Madrid: Alianza Editorial.

Juárez Zaragoza, Ó. (2006). Gaston Bachelar: contribuciones al enrequecimiento del espíritu. *Pensamiento. Universidad Automoma del Estado de Mexico.*, 128-138.

Klein. (1994). *Klein, M. (1972). Elpennsamiento matemático desde la antigüedad a nuestros días (Vol. I). Madrid: Alianza Editoria.* Madrid: Alianza Editora.

Klein, M. (1972). *El pensamiento matemático desde la antigüedad a nuestros días* (Vol. I). Madrid, 1994: Alianza Editoria.

Kleiner, I. (1991). Rigor and proof in Mathematics: a historical perspective. *The Mathematics Magazine, 64*(5), 291-314.

Kline, M. (1985). *Matemáticas la pérdida de la certidumbre.* Madrid: Siglo veitiuno editores,sa.

Kline, M. (1994). *El pensamiento matemático de la antiguedad a nuestros días. Vols. I, II, III.* Madrid: Alianza Editorial.

Koyré, A. (2000). *Estudios de historia del pensamiento cientifico.* Ciudad de mexico.: Siglo XXI editores.

Lakatos, I. (1981). *Matemáticas, ciencia y epistemología. Alianza, Madrid, 1981.* Madrid: Alianza .

Leibniz/Newton. (1977). *El Cálculo Infinitesimal. Origen y polémica.* (J. Babini, Ed.) Buenos Aires: Editorial Universitaria de Buenos Aires.

Lizcano, E. (1992). De Foucault a Serres. Notas para una arquología de las Matemáticas. *Revista de teoría, historia y fundamentos de la ciencia*, 499-507.

Lizcano, E. (2009). *Imaginario colectivo y creacion matematica.* Barcelona: Gedisa, S.A.

Martínez Velasco, J. (1992). Bachelard, Popper y el compromiso racionalista de la ciencia. *Convivium 3*, 75-97.

Mederos Martín, C. (2000). Eudoxo y las matemáticas. *Ciencia y cultura en la Grecia antigua, clasica y helenistica.*, (págs. 235-250). canarias.

Montesinos, J. (1992). Arquímedes y la medida del círculo. *Ciencia y Cultura en la Grecia Antigua, Clásica y Helenística*, 339-352.

Mora Zamora, A. (2002). Obstaculos epistemologicos que afectan el proceso de construccion de conceptos del área de las ciencias en niños de edad escolar. *Inter Sedes. Vol III*, 75-89.

Morris, K. (1998). *La perdida de la certidumbre.* Madrid: Siglo XXI .

Neira, G. I., Rojas Garzón, p., Romero Cruz, J., Lurduruy Ortegon, J. O., & Guacaneme Suáres, E. A. (2012). *Pensamiento, epistemología y lenguaje matemático.* Bogota : Comite Editorial CADE.

Newton, I. (2003). *Análisis de cantidades mediante series, fluxiones y diferencias con una enumeración de las líneas de tercer orden. Compilación original (1711) de William Jones.* (A. J. Durán, Ed.) Sevilla: Real Sociedad Matemática Española.

Nuñez Reyes, R. (2007). Obstáculos para el logro de aprendizajes en matemáticas. *Revista del colegio de ciencias y humanidades para el bachillerato*, 57-52.

Ortega Aramburu, J. M. (1999). Euler, series y algunas funciones especiales. *Butlletí de les Societats Catalanes de Física, Química, Matemàtiques i Tecnologia*, 383-404.

Ortiz Fernández, A. (2005). *Historia de la Matematica volumen 1.* Lima.

Padilla Beltrán, J. E., Guerra García, Y. M., & Barón González, G. P. (2009). Obstáculos Epistemológicos en la Labor de Docente Neogranadino. *Revista Educación y desarrollo social*, 86-99.

Piaget, J., & Rolando., G. (2004). *Psicogénesis e historia de la ciencia.* Buenos Aires: Siglo XXI editores.

Radford, L. G. (1996). Lizcano y el problema de la creación matemática. *Mathesis 12*, 399-413.

Recalde, L. (2010). Los filósofos presocráticos: La naturalez como fuente de experiencia abstracta. *Revista de Ciencias, 14*, 87-99.

Recalde, L. (2011). *Lecciones de historia de la matemática.* Cali: Universidad del Valle.

Robles, J. (1993). *Las ideas matemáticas de George Berkeley.* México D. F.: Universidad Nacional Autónoma de México.

Sánchez Gómez, C., & Contreras de la fuente, A. (1998). Ánalisis de los manuales a través del tratamiento didactico dado el concepto de límite e unafunción:una perspectiva desde la nocion de obstáculo . *Enseñanza de las ciencias*, 73-84.

Sellés, M. (s.f.). *La teoría de los indivisibles de Galileo y su geometrización del movimiento.* Obtenido de Internet

Serres, M. (1993). *Les origines de la géométrie. Traducción al español: Los orígenes de la Geometría.* México,1996: Siglo XXI editores.

Spagnolo, F. (1996). *Obstacles Epistemologiques:Le postulat d' Eudoxe-Archimede.* Francia: A telier de reproduction des théses Microfiches.

Stedall, J. (2004). *The arithmetic of infinitesimales. John Wallis 1656.* New York: Springer-Verlag.

Suáres, M. M. (2008). *Calculo diferencial e integral. Historia del ánalisis matematico.* Granada.

Thomson, J. E. (1951). *Geometría.* Mexico: Uteha.

Urbaneja, P. M. (2008). La solución de Eudoxo a la crisis de los incomensurables. *SIGMA*, 101-130.

Vargas, V. (2007). *De los indivisibles a los infinitesimales en Arithmetica infinitorum Wallis 1956.*

Vasco, C. (1990). Algunas reflexiones sobre la pedagogía y la didáctica. En *Pedagogía, Discurso y Poder* (págs. 107-122). Bogotá: CORPRODIC.

Vega, L. (1999). Hacer ver, hacer saber (el rigor informal de las pruebas matemáticas clásicas). *www.euclides.org/menu/articles/article3006.htm.*

Vera, F. (1970). *Cientificos Griegos.* Madrid: Aguilar S.A.

Viñuela V, P. A. (2012). Consideraciones sobre el cálculo infinitesimal leibniziano y el cálculo de fluxiones newtoniano. *Filosofía Univ. Costa Rica*, 231-241.

Zellini Siruela, P. (1991). *Breve historia del infinito.* Madrid: Ediciones Siruela, S.A.