LA COMPRENSIÓN DEL CONCEPTO DE FRACCIÓN COMO RELACIÓN PARTE-TODO CON EL APOYO DE RECURSOS EDUCATIVOS DIGITALES ABIERTOS Y MATERIAL CONCRETO

WILLIAM SOLARTE CASTILLO

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES, EXACTAS Y DE LA EDUCACIÓN

MAESTRIA EN EDUCACIÓN

LINEA DE PROFUNDIZACIÓN EN MATEMÁTICAS

UNIVERSIDAD DEL CAUCA

PROGRAMA BECAS PARA LA EXCELENCIA DOCENTE

MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL

SANTANDER DE QUILICHAO OCTUBRE 2018

LA COMPRENSIÓN DEL CONCEPTO DE FRACCIÓN COMO RELACIÓN PARTE-TODO CON EL APOYO DE RECURSOS EDUCATIVOS DIGITALES ABIERTOS Y MATERIAL CONCRETO

WILLIAM SOLARTE CASTILLO

Trabajo para optar al título de
MAGISTER EN EDUCACIÓN

Directora
Dra. Sandra Liliana Castillo Vallejo

Facultad de Ciencias Naturales, Exactas y de la Educación
Línea de profundización en matemáticas

Programa Becas para la Excelencia Docente
Ministerio de Educación Nacional

Santander de Quilichao, octubre de 2018

Es una locura olvidar a todas las rosas porque una te pinchó.
Renunciar a todos tus sueños porque uno de ellos no se realizó,
El Principito

A mi inspiración y amor verdadero
Paula y Samuel.

AGRADECIMIENTOS

A Dios por hacerme entender que su tiempo es perfecto y ofrecerme esta oportunidad en el momento justo.

A mi Familia, por su comprensión, paciencia y apoyo incondicional, por brindarme una sonrisa cuando el tiempo me alejaba.

A mi esposa por su apoyo y colaboración en este proceso de construcción, sin su ayuda este trabajo habría sido más laborioso.

A la Dra. Sandra Liliana Castillo, mi asesora, por sus valiosísimas orientaciones y el apoyo brindado.

Tabla De Contenido

Lista de Figuras

Lista de Anexos

Presentación

Este informe aborda la intervención pedagógica en torno a la comprensión del concepto de fracción como parte-todo realizada con los estudiantes de grado quinto de la sede Escuela El Ortigal perteneciente de la Institución Educativa Técnico El Ortigal del municipio de Miranda Cauca.

Esta intervención surgió a raíz de evidenciar en los acompañamientos de aula como tutor del Programa Todos a Aprender (PTA, 2012), los desempeños bajos en torno a la comprensión del concepto de fracción, el cual generalmente es abordado por los docentes de forma tradicional, es decir sin la ayuda de material didáctico y solo con la utilización del tablero; y conductista con el uso de estrategias mecánicas de memorización de fórmulas y conceptos que no permiten al estudiante darle un sentido lógico y práctico a su aprendizaje.

La intervención se enfocó en el diseño de Situaciones Didácticas que permitieron impulsar en los estudiantes la participación activa en su proceso de aprendizaje y poner en marcha situaciones pertinentes que generen un juego de interacciones entre docente y estudiantes alineadas a los intereses de ellos; para tal fin se consideró como referente conceptual la Teoría de Situaciones Didácticas de Brousseau.

Dichas Situaciones se materializaron a través del constructo del Conocimiento Didáctico del Contenido (CDC), el cual abarca aspectos como el conocimiento disciplinar del profesor, la didáctica para enseñarlo y el contexto del estudiante; este constructo permitió conocer los problemas que surgen al enseñar el tópico fracción como parte-todo y la forma de organizarlo para la enseñanza a través de la caracterización del CDC sobre este tópico por medio del instrumento CoRe (Representaciones del Contenido), el cual se utilizó en el diseño de las planeaciones de clase que contienen además una selección y adaptación de Recursos Educativos Digitales Abiertos (REDA) para apoyar la comprensión del concepto de fracción como parte-todo, sumado de un ejercicio reflexivo el cual es plasmado en otro instrumento llamado PaP-eR (Repertorio de Experiencias Profesionales y Pedagógicas).

Conforme a lo anterior, el informe consta de varias secciones; la primera describe la justificación, el contexto, el planteamiento del problema. La siguiente, expone el referente conceptual en el cual se encuentran instrumentos metodológicos como la Secuencia Didáctica con aspectos estructurales para su construcción tomados de documentos de investigación del Ministerio de Educación Nacional de Colombia (MEN) y los instrumentos metodológicos como la CoRe y los PaP-eR (Acevedo, 2009), que aborda la inclusión de recursos como el Material Concreto y los REDA con el interés de apoyar el proceso de enseñanza-aprendizaje; cuya selección se realizó previa revisión, adaptación y/o diseño, de tal manera que estén en armonía con el objetivo de aprendizaje de cada sesión de clase.

Así mismo, se describen las Situaciones Didácticas, las cuales proporcionan elementos de las interacciones entre docente, alumno y un *medio*, caracterizadas como situaciones de acción, validación, formulación e institucionalización, fenómenos presentes en las situaciones de enseñanza vividas en las sesiones de clase. Otro aspecto tratado es el de Comprensión de un Concepto Matemático desde el punto de vista de la comprensión relacional del estudiante Godino, Batanero y Font (2003) y los actos de comprensión (Sierpinska, 1992), que evidenciarán el nivel alcanzado por los estudiantes en las situaciones didácticas que se generan en las prácticas de aula. Adicionalmente, se presenta los referentes de calidad y de actualización curricular emanados por el MEN, los cuales orientan al docente en lo que un estudiante debe saber y comprender en los diferentes grados de enseñanza y son tenidos en cuenta a la hora de una planificación de la enseñanza.

En la siguiente sección, se muestra el referente metodológico, detallando el tipo de investigación, el enfoque y su diseño. Seguido, se encuentran los resultados y sus análisis, obtenidos de los instrumentos de evaluación para cada una de las Situaciones Didácticas; además se muestran las rúbricas de autoevaluación de los estudiantes así como los textos PaP-eRs en los cuales se recogen las acciones y situaciones que se presentaron durante la enseñanza de cada una de las Situaciones Didácticas. Por último, aparece una sección que comprende el cierre con las conclusiones obtenidas, acompañadas de algunas reflexiones para abordar otras intervenciones relacionadas al tópico de fracción o en el uso de REDA y Material Concreto.

Contexto

La intervención pedagógica se llevó a cabo en la Institución Educativa Técnico El Ortigal, la cual está conformada por la Sede Colegio El Ortigal donde se orientan la educación Básica Secundaria y Media Técnica con acompañamiento del SENA (Servicio Nacional de Aprendizaje). Las sedes de Transición y Educación Básica Primaria, funcionan en tres sedes adicionales; dos en veredas aledañas al corregimiento El Ortigal (Lindosa y Tulipán) y una tercera en el mismo corregimiento.

La Institución es de carácter oficial, mixto y atiende a una población de grupos étnicos mestizos y afro descendientes que congrega a 899 estudiantes. La intervención pedagógica se desarrolla con un grupo de 21 estudiantes con edades entre nueve y once años del grado quinto de la sede escuela El Ortigal que tiene una población de 315 estudiantes, ubicada en el Municipio de Miranda (Cauca), corregimiento El Ortigal, y se enfoca en la comprensión del concepto de fracción como parte-todo.

Esta institución educativa está focalizada por parte del Programa Todos a Aprender (MEN, 2012a), dado que ella en los resultados históricos hasta el año 2012 de las pruebas SABER (MEN, 2010), ubicó la mayor parte de sus estudiantes en los niveles mínimo e insuficiente en la áreas de lenguaje y matemáticas. De aquí que los docentes que orientan estas áreas reciben un acompañamiento en el aula que apunta a la planificación de clase y a la reflexión de lo vivido en ella para así apostar a mejorar los procesos de gestión de aula, aprendizaje, clima de aula y evaluación con el propósito de mejorar los aprendizajes de los estudiantes.

De esta manera, los acompañamientos de aula en sesiones de clase del área de matemáticas realizados a los docentes, permitieron caracterizar sus prácticas y determinar que ellas se basan en una metodología tradicional donde prima el conductismo, la utilización de material didáctico es poco y la utilización de tabletas o computadores es nula, así mismo el conocimiento disciplinar de la materia es insuficiente y dado que este permea a la planificación de la enseñanza ella también se ve afectada.

En otro orden de ideas, los resultados históricos de las pruebas SABER (MEN, 2010) para grado quinto en el área de matemáticas entre los años 2013 y 2015 ubican los estudiantes de la institución en cuestión, en los niveles de desempeño insuficiente hasta en un 42% y en el nivel mínimo en este mismo porcentaje, números que indican que solo el 16% de los estudiantes están en nivel satisfactorio y/o avanzado. Estos resultados van a la par del Informe por Colegio (MEN, 2016a) de la caja Siempre Día E que proporciona el MEN, donde ya se aterriza estos resultados a aprendizajes particulares, que son evaluados por el Instituto Colombiano del Fomento a la Educación Superior (ICFES) en las pruebas mencionadas. De los aprendizajes se puede evidenciar que hasta el 65% de los estudiantes tiene dificultades en aspectos relacionados con el tópico de fracción.

La institución hace parte del Programa Computadores para Educar (MEN, 2001), el cual tiene como parte de su misión "generar oportunidades de desarrollo para los niños y jóvenes colombianos, mejorando la calidad de la educación, mediante la dotación de herramientas tecnológicas" (pág.5). Es así, como se tiene a disposición numerosas tabletas que sirven como herramienta para apoyar las prácticas de aula mediante el uso de REDA, como los manipulativos virtuales y que apuntaron al tópico fracción y que sirvieron de apoyo para que los estudiantes alcancen este aprendizaje.

De lo anterior, se concluyó que es necesario hacer una intervención que apunte al tópico de fracción como parte-todo con planeaciones de aula donde se tenga en cuenta factores como el Conocimiento Didáctico del Contenido, la utilización de material didáctico pertinente que genere motivación por parte de los estudiantes pero que a su vez genere aprendizajes significativos.

Justificación

Los resultados históricos de las pruebas SABER, diseñadas y realizadas por el Instituto Colombiano para el Fomento de la Educación Superior (ICFES) hasta el año 2012; evidencian que los niños de las instituciones educativas oficiales de Colombia culminan el ciclo de enseñanza de básica primaria sin alcanzar los Estándares Básicos de Competencias (EBC) en el área de matemáticas.

Esta situación y el propósito de alcanzar estándares internacionales ha impulsado al gobierno a implementar programas de calidad en algunas instituciones educativas del país, uno de ellos es el Programa Todos a Aprender (PTA); que tiene como objetivo mejorar las competencias de los docentes y así mejorar los aprendizajes de los estudiantes en matemáticas y lenguaje (MEN, 2012a). Desde el año 2013 este programa ha focalizado la Institución Educativa Técnico El Ortigal, y por ende recibe un acompañamiento que permitió evidenciar los bajos desempeños de los estudiantes en el área de matemáticas, y conocer a través del Informe Siempre Día E (MEN, 2016a) los aprendizajes críticos asociados a estos desempeños. A partir de este informe, se aprecia que aquellos aprendizajes vinculados al componente numérico variacional son críticos; el informe muestra por ejemplo que el 66% de los estudiantes de grado 5º no expresa el grado de posibilidad de un evento usando razones, el 43% de los estudiantes no reconoce e interpreta fracciones en diferentes contextos y el 65% de los estudiantes no resuelve y formula problemas que requieren el uso de la fracción como parte de un todo.

Por otra parte, desde el MEN y en particular desde el PTA basados en documentos del Programa de Educación Rural - PER: Orientaciones técnicas para la producción de secuencias didácticas para un desarrollo profesional situado en las áreas de matemáticas y ciencias, se proponen estrategias pedagógicas para el mejoramiento de los aprendizajes de los estudiantes como las secuencias didácticas y el enfoque de resolución de problemas. Implementar este tipo de estrategias indica Furman (2013), implica una transformación en las prácticas de aula dadas las situaciones a las que se enfrentaran los estudiantes y el docente; este último porque debe conocer su disciplina, la didáctica para enseñarla y el contexto del estudiante, aspectos fundamentales en las situaciones de enseñanza que se propongan en las prácticas de aula.

Por otro lado, no se puede desconocer que en la actualidad los computadores y las Tecnologías de la Información y de la Comunicación (TIC) son parte de nuestro mundo, para los niños de hoy una realidad cotidiana. Ahora bien, la escuela no puede esta ajena a ésta realidad y se hace necesario implementar estas tecnologías en las prácticas de aula con los estudiantes. (Castillo, 2008). Entre ellas se encuentra recursos como applets, flashes, manipuladores virtuales y en general los REDA (MEN, 2012a), los cuales se encuentran libres en la red y utilizados de manera pedagógica, despiertan el interés de los estudiantes, además son fuente para desarrollar habilidades matemáticas.

Desde las directrices del PTA se establece que la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, deben mantener una progresión constante desde un quehacer concreto, pasando por lo pictórico, para poder llegar a la abstracción de los conceptos matemáticos (Concreto-Pictórico-Abstracto) (PTA, 2017). Esta metodología dice Souza (2007), se basa en que los alumnos comienzan a comprender un concepto con actividades concretas y una amplia variedad de materiales manipulativos y objetos de la vida cotidiana, más adelante, los estudiantes avanzan hacia las representaciones pictóricas, y por último, llegan al nivel abstracto de la comprensión de ese mismo concepto, sin abandonar nunca las referencias a lo pictórico. De esta manera en las prácticas de aula que se propusieron el protagonismo se lo lleva esta metodología y se tomó como una referencia para el diseño de la Secuencia Didáctica para la comprensión de la fracción como parte-todo.

Por otro lado, los Derechos Básicos de Aprendizaje (DBA) y las Mallas de Aprendizaje (Mallas) para grado 5º (MEN, 2017), explicitan aprendizajes básicos que los estudiantes deben alcanzar y es necesario tenerlos en cuenta en la elaboración de las planeaciones de aula que se lleven a los estudiantes. Para el caso de la fracción como parte-todo, se encuentra que los estudiantes deben interpretar y utilizar los números racionales en su representación fraccionaria para formular y resolver problemas, que para tal caso los niños deben evidenciar que adquieren la habilidad de interpretar la relación parte-todo además de representarla por medio de fracciones.

Con base en lo anterior, se plantea el diseño, aplicación y evaluación de una secuencia didáctica con apoyo de REDA y la utilización de material concreto para la comprensión de la fracción como parte-todo. El diseño de esta secuencia se basó en los lineamientos expuestos por Furman (2013) y adicionalmente se adaptó a los referentes de calidad del MEN; de aquí que se contempló el uso de aspectos como: Visión General, Secuencia de Clases, Planificaciones de las Clases y Profundizaciones Conceptuales.

La Visión General, da una mirada amplia del tópico fracción como parte-todo, los objetivos de aprendizaje y la descripción del modo en que el tema se desarrolla. La Secuencia de Clases de un número determinado de semanas de duración contiene aspectos de las sesiones a desarrollar en cada una de ellas, ésta tiene un formato flexible, hecho que permite hacer algunos cambios de acuerdo al contexto de la institución y los referentes que, ahora, se manejan en Colombia como los DBA y las Mallas.

En cuanto a las Planificaciones de Clase, que también siguen un formato específico y orientan el trabajo en el aula, incluyen evidencias de aprendizaje, el desarrollo de la clase, las posibles intervenciones para guiar los aprendizajes de los alumnos, las tareas a desarrollar, la organización de la dinámica de clase, entre otras (Furman, 2013). El formato de estas planificaciones incluye adicionalmente un espacio para la reflexión docente, como recurso para pensar la clase y analizar sus resultados, el cual fue reemplazado por los PaP-Per, que señala (Mora y Parga, 2008), son reflexiones narrativas de lo hecho en la sesión de clase y se representa de manera individual expresada en un diario del profesor

Con relación a las Profundizaciones Conceptuales, se concibe como un aspecto que ayuda a clarificar y ampliar los conceptos de fracción como parte-todo desde una mirada puesta en la enseñanza de dichos conceptos y en el desarrollo del Conocimiento Didáctico de Contenido (Furman, 2013). Para la intervención en el aula este aspecto se toma desde las CoRe (Acevedo, 2009) y (Erazo, 2017), con categorías adaptadas al área de matemáticas y el tópico fracción como parte-todo.

Así mismo, se realizó un estudio de antecedentes en torno a la enseñanza de la fracción, en ese sentido se consideró el trabajo de grado titulado: “La enseñanza de los números racionales a partir de la relación parte-todo”, en el marco de la Maestría en Educación Matemática de la Universidad del Valle. Esta investigación giró alrededor de los procesos de enseñanza y los procesos de aprendizaje relativos a los números racionales, centrando la atención en aquellos que conciernen a las relaciones parte-todo. Se cita aquí, cómo procesos en la escuela, vistos por ellos como erróneos, generan conceptualizaciones imprecisas por parte de los estudiantes. Hecho que hace desarrollar, por parte de (Obando, 2003), una propuesta de trabajo mediante la cual se pudieran desencadenar procesos de aprendizaje más significativos en los alumnos.

Por su parte, Obando, Vanegas y Vasquéz (2006) señalan que la enseñanza actual de las fracciones como parte-todo se orienta a través de estrategias metodológicas y conceptuales centradas en la partición y el conteo y en la mecanización de reglas y algoritmos; y dicen que, en consecuencia, la medición es apartada en el proceso de conceptualización. Por otra parte Ponton (2012), pero ya desde el aprendizaje, considera que uno de los mayores problemas es que muy pocos alumnos logran la coordinación de las transformaciones entre representaciones numéricas fraccionarias con las trasformaciones posibles en representaciones figurales y con aquellas propias de las producidas en el registro semiótico de la lengua natural.

En este sentido, Calderón (2014), señala que las prácticas de aula que apuntan al aprendizaje de la fracción, deben orientarse de tal manera que los estudiantes hagan el tránsito por lo concreto, pasando por lo simbólico y llegar a la abstracción del número. Señala que ésta metodología se enfatiza en dejar a un lado la memorización y la aplicación de fórmulas y más bien se enfoca en habilidades, porque se trata de promover el pensamiento adecuado (de lo concreto a lo abstracto).

Por otra parte, el interés que genera en los estudiantes el uso de los computadores, evidenciado en los acompañamientos de aula realizados en la Institución Educativa con el PTA; y la importancia que se da a la manipulación de herramientas tecnológicas expresada por la National Council of Teachers of Mathematics (NTCM, 2000) como herramientas esenciales para enseñar aprender y hacer matemáticas; lleva a que la propuesta de la Secuencia Didáctica contenga REDA como los manipulativos virtuales que, aunado al uso de material concreto, apoyarán el pasaje de lo concreto a lo abstracto, pasando por lo pictórico del concepto de fracción como parte-todo.

En vista de lo anterior y dado que, en los últimos años la Institución Educativa ha sido beneficiada por programas como Computadores para Educar, el cual ha dotado computadores para el uso de los estudiantes, se ve la necesidad de aprovechar estos recursos y apoyar las clases con el uso de REDA, que entre ellos están los manipulativos virtuales, los cuales generan interés en los estudiantes, primero porque ellos se aplican desde un dispositivo electrónico como los PC o tabletas y segundo son llamativos por el lenguaje multimodal utilizado (texto, sonido, animación). De igual manera, los REDA son también recursos destinados a la enseñanza que incluyen; guías, talleres y, en general, documentos que pueden mejorar la calidad de las planeaciones dado el espectro amplio al que puede acceder el docente.

Es así como se plantea la pregunta en torno a la utilización de los REDA y el material concreto en la comprensión del concepto de fracción como parte-todo: ¿De qué manera el uso de los REDA y la utilización de material concreto, permiten la comprensión del concepto de fracción como parte-todo, con los estudiantes de grado quinto de la escuela El Ortigal?

Objetivos

Objetivo General

Analizar el Conocimiento Didáctico del Contenido en el diseño, aplicación y validación de una Secuencia Didáctica con el apoyo de material concreto y los REDA, que posibilite la comprensión de la fracción como parte-todo en los estudiantes del grado quinto de la Institución Educativa Técnico El Ortigal.

Objetivos Específicos

● Caracterizar el Conocimiento Didáctico del Contenido (CDC) sobre el tópico fracción como parte-todo, utilizando el instrumento de la CoRe.

● Establecer el concepto de fracción como parte-todo apoyado en material concreto y REDA como medio de las situaciones didácticas.

● Validar las situación didácticas, los REDA y el material concreto implementados a partir de la caracterización del CDC (CoRe y PaP-eRs) sobre la fracción como parte-todo

Referente Conceptual

Con el propósito de fundamentar teóricamente la intervención en el aula respecto a la comprensión de la fracción como parte-todo se plantea el marco conceptual, el cual reporta los referentes bajo los cuales se sustenta el diseño de la Secuencia Didáctica que se implementará y evaluará con los estudiantes de grado quinto de la Institución Educativa Técnico El Ortigal.

El Material Concreto como Apoyo a la Comprensión de un Concepto Matemático

En el presente apartado se encuentra información relacionada con la concepción que se tendrá del Material Concreto y la importancia de éste en la comprensión de un concepto matemático. Es así, como en el contexto de la comprensión de conceptos matemáticos, donde son evidentes las abstracciones, se podría preguntar ¿el material concreto ayuda a mejorar los aprendizajes en los estudiantes? Basándose en la teoría de Bruner (Citado en Guilar, 2009) en su modelo de currículo en espiral, la respuesta es afirmativa por cuanto él indica que el aprendizaje se basa en la categorización o procesos, mediante los cuales se simplifica la interacción con la realidad a partir de la agrupación de objetos, sucesos o conceptos, del cual distingue un modo Enactivo (representar una determinada cosa mediante la reacción inmediata con ella), donde se encuentran los objetos manipulables. Sin embargo, es importante citar que existe un modo Icónico (imágenes o esquemas para representar), y uno Simbólico (representar una cosa mediante un símbolo arbitrario) dentro de esta categorización que más adelante se citarán.

Aquí, el Material Concreto se refiere a los objetos manipulables. “Estos se consideran como cualquier objeto físico que se pueda utilizar, a partir de la explotación de las características específicas de dicho material para, posteriormente, establecer la asociación de estas características con los conceptos matemáticos” (Dos Santos y Carvalho, 2016, p.4). En este sentido el material concreto se refiere a los objetos que los estudiantes pueden tocar y manipular e incluye por ejemplo herramientas para medir, material que se fabrica para hacer representaciones, tabletas o barras de madera, u otros que los estudiantes pueden manejar y que permiten relacionar la abstracción de las matemáticas con objetos palpables por los estudiantes.

Por otro lado, la utilización de material concreto en la enseñanza de las matemáticas es recomendada en los lineamientos curriculares del área de matemáticas (MEN, 1998), en ellos se indica que para que los niños logren entender el significado de los números, además del uso cotidiano, hay que darles la oportunidad de realizar experiencias en las que utilicen materiales físicos. En este mismo documento se señala que razonar, como proceso matemático, tiene que ver con el uso de material concreto; dado que éste propicia una atmosfera que estimula a los estudiantes a explorar, comprobar y aplicar ideas que posibilitan la comprensión de ideas abstractas.

Conforme a esto, la utilización de material concreto, en las instituciones públicas de Colombia focalizadas por el PTA lo promueven mediante el enfoque llamado Concreto-Pictórico-Abstracto, el cual promueve, que para enseñar cada concepto matemático, se parte de representaciones concretas, pasando por ayudas pictóricas o imágenes, hasta llegar a lo abstracto o simbólico.

Cierto es que, como señalan Andrade, Espitia, Huertas, Aldana y Bacca (2012); el material concreto históricamente ha sido utilizado por investigadores como Froebel, Montessori, quienes son pioneros en este aspecto, Piaget con su teoría constructivista y Vygotsky hasta Bruner (1965); ellos proponían que existe un tránsito en el pensamiento que va desde lo concreto hacia lo abstracto, desde lo perceptual hacia lo conceptual.

Respecto a esta transición, Souza (2007) se refiere a ella como enfoque Concreto-Pictórico-Abstracto, el cual dice es una secuencia de representación para enseñar contenidos matemáticos. Indica que esta representación tiene un componente concreto; un componente de representaciones pictóricas que incluyen dibujos, diagramas, tablas o gráficos que se dibujan por parte de los estudiantes o suministradas a los estudiantes para leer e interpretar; y un tercer componente referido a lo abstracto que se refiere a representaciones simbólicas tales como números o letras que el estudiante escribe o interpreta para demostrar la comprensión de una tarea. También indica que las situaciones que se diseñen con material concreto deben motivar a que las operaciones matemáticas puedan ser usadas para resolver problemas del mundo real, por otro lado lo pictórico debe mostrar representaciones visuales de los manipuladores concretos las cuales deberán ayudar a visualizar la matemática ya en el simbolismo propio de ella.

Sin embargo, hay que señalar que Andrade et al (2012), invita a preguntar si todo material concreto será conveniente a la hora de apoyar la comprensión de un concepto matemático. Estos autores indican que un tipo de material puede ser demasiado llamativo, por tanto los estudiantes podrían desviar la atención del objetivo real del material. O también se puede dar que el diseño del tipo de material se realice de manera compleja y no aporte en la comprensión que se quiere.

De aquí, es conveniente resaltar que cualquiera sea el material manipulativo debe diseñarse con una función didáctica de apoyo a una práctica de aula que permita una relación de los objetos concretos con una representación simbólica y luego abstracta teniendo en cuenta los dos factores mencionados a la hora de su diseño.

Para concluir, la utilización del Material Concreto, es el inicio de la transición de lo concreto a lo abstracto, pasando por lo pictórico, y permite una mejor comprensión del concepto matemático de fracción, dado que la interacción con este material es motivante y de interés, y lleva a que los estudiantes se centren en la actividad propuesta y los aprendizajes se alcancen con mayor facilidad, dado que busca centrarse menos en la memorización y la presentación de símbolos abstractos que muchas veces no le dicen nada al estudiante.

Además, la utilización de material concreto es conveniente, dado que las estructuras matemáticas son abstractas y por ende, viven solo en la mente de las personas y ello las hace en ocasiones, difícil de comprender. El hecho de utilizar material concreto permite a los estudiantes acercarse a las abstracciones, y lo pictórico ayuda a crear esquemas que facilitan esta transición al objeto matemático.

Para el caso de la fracción, el material concreto y el enfoque CPA se espera apoyen para: comprender la relación entre la parte y el todo, el significado del numerador y denominador, comprender que una parte puede convertirse en un todo, entender el por qué cuando se suma es necesario que el denominador sea igual, explicar por qué es necesario convertir a fracciones homogéneas para hacer una operación de suma y por qué el todo puede expresarse y representarse de diferentes maneras.

Los Recursos Educativos Digitales Abiertos (REDA) como Apoyo a la Comprensión de un Concepto Matemático

A continuación se exponen los REDA, que son parte del diseño de la Secuencia Didáctica y se utilizan como apoyo para la comprensión de un concepto matemático; además, se tendrán en cuenta dado que es una estrategia sugerida desde las políticas de calidad del MEN que buscan el mejoramiento de la calidad de la educación.

Las políticas de calidad del MEN, señalan que se debe tener en cuenta los REDA, como una estrategia educativa, la cual busca promover el uso de recursos educativos que aporten al mejoramiento de la calidad de educación, éstos describen (planes curriculares, materiales de cursos, libros de texto, vídeo, aplicaciones multimedia, audios, y cualquier otro material que se haya diseñado para su uso en los procesos de enseñanza y aprendizaje) disponibles para ser utilizados por parte de educadores y estudiantes, sin la necesidad de pago alguno por derechos o licencias para su uso. (MEN, 2012b).

Los REDA son utilizados en áreas fundamentales como las ciencias y matemáticas; para el caso de las matemáticas, en particular para el tópico de fracción, se encuentran sitios que ofrecen REDA como los manipuladores virtuales en formatos como flash , los cuales permiten manipular un cuadrilátero trazando líneas horizontales o verticales para dividirlo y después colorear la parte que se necesita y así representar la fracción que se pide. Se sigue otros donde permite en cuadriláteros divididos previamente, ir dando clic en las divisiones y se va generando el número fraccionario.

Otras actividades que permiten los REDA son actividades de crear aleatoriamente un cuadrilátero, dividido en un número de partes determinadas previamente con cuatro colores diferentes, el manipulador virtual solicita escribir la fracción según las divisiones y el color, adicionalmente pide asociar el número decimal al fraccionario. Adicionalmente, cuenta con otra actividad que consiste en generar cuatro figuras geométricas (círculo, cuadrado, triángulo, rectángulo) y se debe escribir la fracción que representa la parte coloreada, o no coloreada, según solicite el ejercicio. Por otra parte existen algunos que permiten escribir un número fraccionario y éste lo grafica en medidas continuas o discretas.

También se encuentra en la red, REDA en formatos planos, como por ejemplo los PDF, o cualquier otro formato de lectura, ellos contienen en su mayoría ejercicios, problemas propuestos, planeaciones de clases, secuencias didácticas, etc., que pueden ser replicados, ajustados, según el contexto del aula. Ejemplo de estos recursos se encuentran en plataformas como Colombia Aprende, donde se puede acceder a ellos con el plus adicional que estos tienen en cuenta referentes de calidad como los EBC y los referentes de actualización curricular como los DBA y las Mallas. Un ejemplo de REDA en formato plano, es la secuencia didáctica *Las Fracciones* (Thompson, 2008); la cual orienta al docente en la enseñanza de la fracción con la utilización de material concreto y sirvió como orientación para la elaboración de las situaciones didácticas que se propusieron para la intervención pedagógica.

Muchos recursos de los mencionados, llaman la atención tanto a estudiantes como a docentes; a los primeros, porque les proporciona REDA en lenguajes multimodales que hacen que el estudiante se motive y por ende él aprenda más y mejor. Para el docente, es también atractivo dado los formatos en que se encuentra los recursos, como el multimodal, contienen la premisa de generar interés y llama la atención de los estudiantes, el cual es uno de los problemas a los que se enfrenta el docente a diario.

Los formatos multimodales como los flash, que proporcionan imágenes e interactividad, y genera en los estudiantes motivación, propician habilidades para procesos de razonamiento, de ejercitación y de comunicación matemática. Adicionalmente, el hecho que estos recursos educativos corren en programas que se encuentran en computadores o tabletas genera una motivación adicional, lenguajes diferentes y aparatos tecnológicos, que sin dudarlo generan interés. Entonces ¿Por qué no usarlo?, sin embargo, surge la pregunta ¿Cómo usarlo de tal forma que produzca aprendizajes significativos?; por lo pronto se pueden utilizar a modo de reemplazo de los procesos de ejercitación que se hace por lo general en cuadernos, libros o fotocopias y empezar a hacerlos en REDA como manipuladores virtuales. Este es el primer paso, utilizar esta tecnología como reemplazo de la que se tiene (lápiz y papel).

A su vez, un docente que tenga habilidades en el manejo de aparatos tecnológicos va un paso adelante, por cuanto tiene un espectro más amplio para investigar estrategias y llevarlas al aula. En la investigación realizada por Hidalgo, Tenorio y Ramírez (2016) afirman que un docente con habilidades digitales para la búsqueda, acceso y utilización de la información dispuesta en internet, le permiten tener un bagaje informacional que amplía sus posibilidades de investigación y por ende de conocimiento. En este ámbito, agregan, que los REDA brindan una oportunidad para enriquecer las prácticas educativas y promuevan mejoras en los aprendizajes de los estudiantes.

Entonces, es así que la implementación de esta estrategia, tiene una premisa, "requiere de una competencia tecnológica necesaria para acceder a la información" (Hidalgo et al., 2016, p.56).

Esto es importante, sin olvidar que debe haber una didáctica puesta en marcha, porque los REDA como tal, son un apoyo y no una metodología. Es decir, es necesario un conocimiento tecnológico, uno didáctico y por supuesto uno disciplinar, llamado por Mishra y Koehler (2006) el TPCK (Technological Pedagogical Content Knowledge), que lo definen como la interrelación de tres conocimientos base: el pedagógico, disciplinar o del contenido y tecnológico.

El conocimiento tecnológico que se menciona, es muy relevante para un contexto como el que se tiene en las instituciones públicas rurales de Colombia por cuanto el acceso a internet es deficiente o nulo en muchos casos, y la infraestructura tecnológica es precaria. En este sentido surge un interrogante, ¿cómo implementar los REDA en una escuela donde no hay computadores o tabletas?, o si los hay, cómo solucionar el acceso al internet, dado que en la red de internet es donde esta los recursos necesarios. Solucionar este problema requiere de habilidades que brinda tener una competencia tecnológica, entre otras la de descargar recursos o software para después utilizar sin necesidad de conexión, algunos de ellos los formatos tipo flash, movies y applets, que son los de generan mayor motivación a los estudiantes, dada su interactividad.

Situaciones Didácticas en el Marco de la Estructura de la Secuencia Didáctica

En palabras de Perrin (2009), Guy Brousseau es uno de los precursores en abordar de manera científica las cuestiones vinculadas a la enseñanza y al aprendizaje de las matemáticas. Brousseau (1987) señala que las Situaciones Didácticas; intentan provocar una situación específica de interés para el estudiante con una elección de un problema que motive al estudiante a aceptarlo como suyo y el cual lo lleva a actuar, reflexionar y evolucionar por su cuenta en la solución,

Por otra parte, para Panizza (2007) una Situación es una interacción, dado que ella formula un juego de ida y vuelta entre el sujeto y el medio. De lo anterior, explica que ante un problema, el sujeto elije entre varios caminos posibles, toma uno y lo reafirma o lo puede rectificar, en ambas situaciones hay producción de conocimiento, aquí el medio se modifica, ya no solo son los conocimientos previos y el problema planteado, sino los nuevos conocimientos al interactuar con el problema.

De tal manera que, para introducir la Teoría de las Situaciones Didácticas en Matemáticas (TSDM) indica Perrin (2009), primero se debe hacer referencia a la enseñanza de las matemáticas, la cual demanda unos conocimientos matemáticos para construir situaciones de enseñanza, ellos se deben administrar a fin de que los alumnos se apropien de estos y así descubran su organización interna y los utilicen para resolver problemas.

En este sentido, la TSDM tiene un carácter científico; el cual es comprender y explicar los fenómenos vinculados a la enseñanza de las matemáticas y tiene unos puntos esenciales necesarios para aclarar a los docentes esta teoría, entre ellos están conceptos como Situación Fundamental, Situación Adidáctica o Situación Matemática y el concepto de Medio (Perrin, 2009, p.12).

Así, en primera instancia, se tiene el concepto de Situación Fundamental, que según el autor recién mencionado, traduce la incorporación de los conocimientos en situaciones para dar cuenta de su sentido y utilidad; además, esos conocimientos son un Medio para establecer una estrategia para solucionar el problema implicado en la situación, en resumen, la Situación Fundamental representa un saber (conocimientos).

De ahí, que en la intervención pedagógica que se realizó, la Situación Fundamental, podría considerarse como el concepto de fracción como parte-todo, dado que este conocimiento se utiliza en la solución de problemas rutinarios (Baroody, 1994), que se apoya en medios (material concreto y pictórico) para la comprensión del concepto. Por otra parte Perrin (2009), señala que para hacer de una Situación Fundamental una situación de clase, es necesario fijar variables y describir una organización de trabajo del docente y estudiantes sin desconocer los conocimientos previos de estos últimos.

En segunda instancia, se tiene la Situación Adidáctica o Situación Matemática como la llama Perrin (2009), esta se puede decir es un momento "exclusivo" de los estudiantes, aquí el docente no interviene; él ha organizado su clase para que el conocimiento aparezca sin su intervención, pero con ayuda de los conocimientos previos de los estudiantes (Perrin, 2009). Así mismo, la Situación Adidáctica dice Sadovsky (2005); son las interacciones entre alumno y Medio, se describen a partir de modelar una actividad de producción de conocimiento por parte del alumno, de manera independiente de la mediación docente.

Por último, se tiene el Medio, el cual Perrin (2009) lo expone como "medio material" para las Situaciones Adidácticas. Este dice, puede ser traducido en representaciones semióticas, incluidas las simbólicas. Estos elementos afirma deben traer a los estudiantes retroalimentaciones que él puede interpretar con sus conocimientos previos, mientras actúa para solucionar un problema planteado en este medio.

En el contexto de la intervención pedagógica, se asume que el Medio Material de la situación son representaciones semióticas traducidas a Material Concreto y pictóricas con material virtual e impreso, que para el caso del Material Concreto se buscó que aportara en la búsqueda de la relación entre el todo con sus partes y permita que el estudiante construya un conocimiento como: el todo se forma de partes iguales, la unión de las partes del todo forman el todo, una parte del todo en alguna situación podrá ser un todo y que reconozca la relación del registro semiótico de la fracción (símbolo matemático) y las partes y el todo, representadas con material concreto y pictórico.

Otros elementos suplementarios a tener en cuenta, señalados por Perrin (2009) en una Situación Didáctica son: la Institución y el profesor. Del primero se refiere a los planes de área y de estudio, el número de horas asignadas a una asignatura y la duración de las clases, además de cómo está organizado el sistema escolar. Del profesor, se refiere a él términos de un juego, que lo gana cuando el alumno gana (resuelve un problema) y para ello utiliza un conocimiento matemático.

Situaciones de acción, formulación, validación e institucionalización. A la hora de planificar situaciones de enseñanza y llevarlas al aula, con el propósito de alcanzar los objetivos e aprendizaje que se propongan, Godino et al. (2003) sugiere tener en cuenta Situaciones Didácticas de diversos tipos:

De Acción; en donde el alumno explora y trata de resolver problemas; como consecuencia construirá o adquirirá nuevos conocimientos matemáticos; las situaciones de acción deben estar basadas en problemas que atraigan el interés de los alumnos, para que deseen resolverlos; deben ofrecer la oportunidad de investigar por sí mismos posibles soluciones, bien, individualmente o en pequeños grupos (p.67).

Al respecto Panizza (2007), dice que el alumno debe actuar sobre un medio (material, o simbólico), además que la situación requiere solamente la puesta en acto de conocimientos implícitos.

Por otra parte se tienen, las situaciones de Formulación; al respecto en Godino et al. (2003) dice que se dan "cuando el alumno pone por escrito sus soluciones y las comunica a otros niños o al profesor; esto le permite ejercitar el lenguaje matemático" (p.67). Para Panizza (2007), aquí el alumno (emisor) debe formular explícitamente un mensaje destinado a otro alumno (receptor) que debe comprender el mensaje y actuar (sobre un medio, material o simbólico) con base en el conocimiento contenido en el mensaje.

Adicionalmente, se encuentran las Situaciones de Validación; para Godino et al. (2003) aquí es "donde debe probar que sus soluciones son correctas y desarrollar su capacidad de argumentación" (p.67). Tal y como afirma Panizza (2007), un grupo de alumnos deben enunciar aserciones y ponerse de acuerdo sobre la verdad o falsedad de las mismas, las afirmaciones propuestas por cada grupo son sometidas a la consideración de otro, que debe tener la capacidad de aceptarlas, rechazarlas, pedir pruebas, o poner otras aserciones.

Finalmente se encuentra las Situaciones de Institucionalización; donde se pone en común lo aprendido, se fijan y comparten las definiciones y las maneras de expresar las propiedades matemáticas estudiadas (Godino et al., 2003, p.67).

En este sentido, tanto el material concreto como los REDA funcionaran como "medio" para la construcción del concepto, ellos permiten una interacción entre grupos de estudiantes, los conocimientos previos que tienen y los problemas que se plantean en la secuencia didáctica formulados a manera de preguntas. Además, para asegurar que surjan las interacciones, es necesario que la distribución de los estudiantes se realice en equipos de trabajo colaborativo para la solución de las preguntas planteadas y la utilización de los recursos concretos y digitales planteados como Medio en la Situación Didáctica.

La Comprensión de un Concepto Matemático

Dado que el problema de investigación se refiere a la comprensión del concepto de fracción como relación parte-todo, es necesario definir el concepto de comprensión. Según la Real Academia de la Lengua Española, comprensión se refiere a un conjunto de propiedades que permiten definir un concepto. Sin embargo, desde la matemática se puede citar este concepto a partir del punto de vista de Sierpinska (1992) quien afirma que la comprensión de un concepto matemático se da en unos actos:

Un primer acto es la Identificación; se da cuando un concepto salta del fondo y se vuelve importante y relevante, se vuelve de interés. Respecto a éste dice García y Cabañas (2013), es la identificación de un objeto entre otros objetos. Dicen que "consiste en una reorganización del conocimiento, de modo que algunos objetos eran un mero antecedente, de pronto aparecen como el objeto principal de la descripción; este objeto obtiene una categoría de término científico en nuestra mente, porque ha sido interiorizado” (p.214).

Un segundo acto es la Discriminación; el cual se manifiesta cuando por medio de la analogía, se establecen diferencias y similitudes de este concepto. Para García y Cabañas (2013) es la discriminación entre dos o más objetos, se presenta cuando se reconocen sus diferencias con relación a características invariantes, así como entre sus propiedades.

El tercero es la Generalización; se presenta cuando se observa dónde puede ser útil el concepto. Para García y Cabañas (2013), es una operación mental en la cual una situación dada se entiende como un caso particular de otra situación”. Por último, la Síntesis, presente en el momento que se intenta reducir distintos hechos o propiedades a sólo un elemento que las contenga a todas.

Otro aspecto a tener en cuenta en la comprensión del concepto de fracción será el de Pontón (2012), quien indica que no se debe desconocer las diferentes interpretaciones de los números fraccionarios, entre los cuales se cita: medida, cociente, razones. Indica que no es posible aislar por completo de las demás cada una de las interpretaciones, puesto que algunas de ellas tienen vínculos “naturales” que no se pueden aislar. En la comprensión del concepto de fracción señala unos aspectos fundamentales: el primero referido al efecto experimental del fraccionario basado en comparar cantidades y magnitudes. El segundo, el fraccionario como un todo separado en partes iguales. Un tercero, el fraccionario como comparador, donde se comparan las partes diferentes de un todo. Y un último aspecto referido a unas dificultades, entre las cuales se encuentra los diferentes registros semióticos de representación.

Por otra parte, referente al estudio de la comprensión, tomada de Godino et al. (2003) donde se aborda la comprensión relacional (saber qué) y comprensión instrumental (saber hacer) en el sentido de aplicación de fórmulas o reglas generales. De la primera, señala que es más importante por cuanto si el niño tiene esta comprensión él es capaz de saber que método funciona y por qué, además de adaptarlo a nuevos problemas, mientras que la instrumental debe aprender una fórmula para cada problema.

Dicho esto, en la comprensión de la fracción como parte-todo, será primordial que las situaciones que se planteen permitan que el estudiante sea consiente, por ejemplo, del porqué de la simbología del objeto matemático; que relacione las partes de un todo, que comprenda que la unión de las partes del todo forman el todo, así como que una parte en determinada situación se tomará como un todo.

Para esto será necesario que el Medio (material concreto y los REDA) permita que él tenga una comprensión relacional, además que el docente pueda determinar que actos de comprensión observa en las diferentes actividades propuestas en la secuencia didáctica.

El Conocimiento Didáctico del Contenido (CDC)

En este apartado se hace una revisión en torno al CDC planteado por Shulman (1986); se hace una descripción de los componentes y de qué manera este ayuda en la planeación de una clase a través de instrumentos como la CoRe (Representaciones del Contenido) y los Pa-PeR (Repertorios de Experiencia Profesional y Didáctica).

El CDC nace como una categoría (mínimos de conocimiento que debe tener el profesor) de una corriente de investigación llamada conocimiento base para la enseñanza (Pinto y González, 2008). Para estos mismos autores el CDC se caracteriza como una mezcla entre materia y pedagogía para comprender por parte del docente temas y problemas que se expondrán para la enseñanza. También citan como CDC una intersección del conocimiento de la materia, la pedagogía y el contexto, y una transformación del conocimiento del contenido a contenido enseñable. En este sentido Shulman (citado por Pinto et al., 2008; Furman, 2013) dice que "dentro de la categoría de CDC se incluye, para los tópicos enseñados en una cierta área, las formas de representación más útiles de dichos tópicos, las analogías más poderosas, modos de ilustrarlos, ejemplos, explicaciones y demostraciones – en una sola frase, los modos de representar y formular el tema de manera que otros puedan aprenderlo" (p.13).

Los aspectos que se esbozan hasta aquí, resaltan aspectos en torno al conocimiento disciplinar, la didáctica y el estudiante, que son precisamente los componentes básicos que conforman el CDC. Respecto a esto Pinto et al. (2008) los nombra como componentes básicos, ellos son: el conocimiento del contenido de la disciplina por enseñar, el conocimiento de la didáctica específica (representaciones o estrategias instruccionales para la enseñanza del tópico) y el conocimiento del estudiante. El primero se refiere al conocimiento disciplinar del docente, el segundo a como se debe enseñar ese contenido, es decir la didáctica, y por último lo que atañe los saberes que trae el estudiante, es decir preguntarse como aprende el estudiante sin desconocer sus intereses y motivaciones.

En resumen, el CDC tienen que ver con el conocimiento disciplinar y las estrategias que llevan al aula los docentes que conocen gracias a su compromiso con la investigación, de experiencias propias o de sus pares y que consideran contribuyen o apoyan en los objetivos de aprendizaje trazados para los estudiantes en conjunción de su contexto. Esto conlleva a pensar cómo el contenido específico de una disciplina lo convierto en un saber enseñable, que es lo importante que se debe enseñar, qué es lo que realmente se quiere que aprendan los estudiantes, qué dificultades se encontrará el docente cuando lleve al aula la situación de aprendizaje, cuáles materiales didácticos son los adecuados para la enseñanza de un tema específico, cómo se debe hacer la evaluación y de qué manera se hará la reflexión de la práctica de aula. Estas preguntas llevan determinar cuáles son instrumentos metodológicos para capturar, documentar y representar el CDC.

Instrumentos metodológicos para capturar, documentar y representar el CDC. Este es un aspecto que propone Loughran (citado por Acevedo, 2009), dice que dos formas complementarias de recoger y representar por escrito la información relacionada con el CDC son: “las Representaciones del Contenido (CoRe) y los Repertorios de Experiencia Profesional y Didáctica (PaP-eR)” (p. 33). En este mismo sentido, Candela y Viafara (2014) establecen que la interacción bidireccional de estos instrumentos, permiten identificar, recoger y representar la naturaleza particular del CDC. Además, dicen que la información recogida es transformada en proposiciones, declaraciones y relatos narrativos, que se constituirán en la estructura lógica de los instrumentos.

Representación del contenido (CoRe). La CoRe es una forma de recoger y representar por escrito información del CDC, revela los cuestionamientos que el profesor se hace acerca del modo en que se enfocará la enseñanza de un tema y las razones respecto a por qué lo hace así; igualmente vislumbran las decisiones que los profesores pueden tomar cuando enseñan un tema, donde se incluyen los vínculos existentes entre el contenido, los estudiantes y la práctica docente (Acevedo, 2009, p. 33).

En este sentido, la CoRe la define Candela y Viafara (2014) como un instrumento que logra que el docente explicite los siguientes elementos: a) un resumen de las grandes ideas para la enseñanza de un tópico; b) concepciones alternativas de los estudiantes sobre la idea; c) limitaciones y dificultades conectadas con la enseñanza de esta idea; d) comprensión que tienen los estudiantes sobre esta idea; f) estrategias instruccionales de esta idea; g) conocimiento de la evaluación del tópico específico.

En suma, para Mora y Parga (2008) la CoRe se desarrolla cuando se piensa sobre las grandes ideas asociadas al contenido que van a enseñar; luego, se discuten y consensuan estas grandes ideas, refinándolas y colocándolas en columnas verticales de un cuadro o matriz. En síntesis, el propósito de la CoRe es ayudar a clarificar el conocimiento de los profesores en un tema específico, con la intención de identificar las características importantes de los contenidos que reconocen indispensables para su enseñanza, además responden a la forma de representar y enseñar dicho contenido.

Los repertorios de experiencias profesionales y pedagógicas (PaP-eR). Esta es una segunda forma de recoger y documentar por escrito la información del Conocimiento Didáctico del Contenido. Para (Mora y Parga, 2008) son reflexiones narrativas de lo hecho en la sesión de clase y se representa de manera individual expresada en un diario del profesor. Además el Pa-PeR se señala, se redacta para desempaquetar los conocimientos y creencias de un docente en torno a la práctica del aula y, en concreto, sobre un aspecto particular del contenido. Dicho en forma breve, el PaP-eR representa lo que el docente razona acerca de sus acciones pedagógicas en el aula.

Respecto a esto, Candela y Viafara (2014) plantean que estos son relatos de los pensamientos, juicios, tomas de decisiones y acciones inteligentes de los profesores; y tienen como función brindar la posibilidad de "ver" las múltiples interacciones entre los elementos del CDC, de modo que sean significativas y accesibles, permitiéndole identificar su propio CDC. Para Talanquer (2014) este instrumento debe concebirse como un ejercicio metacognitivo en el cual el docente reflexiona sobre lo que revelan sus decisiones y acciones de sus conocimientos, creencias y actitudes hacia la enseñanza y el aprendizaje.

A su vez, respecto a la construcción de los los PaP-eR, Candela y Viafara (2014) dicen se debe de tener en cuenta aspectos como la realidad de las clases, la cual incluye la diversidad de respuestas de los alumnos; el pensamiento del profesor acerca de las respuestas que dan los estudiantes; el contenido que le da forma a la enseñanza-aprendizaje y el pensamiento de los estudiantes acerca de las relaciones que ellos establecen y el porqué de estas.

Por otro lado, el formato para presentar los PaP-eR, tiene como característica común una introducción y la estructura lógica de los relatos narrativos con información proveniente de la triangulación de fuentes como: entrevistas, observación participante de la clase, discusiones durante la construcción de la CoRe, notas de campo, diario clase de los estudiantes o profesor, acciones de los estudiantes, pensamiento en voz alta y estimulación del recuerdo. La macro estructura del texto narrativo de los PaP-eR debe de permitir al lector realizar una lectura de las acciones inteligentes acontecidas a lo largo del acto educativo (Candela, 2013).

Para terminar, en la intervención pedagógica fue empleando el CDC y sus instrumentos, en especial la CoRe para la planeación de la clase y los PaP-eR para las reflexiones que se realizaron tanto de las planeaciones como de las prácticas de aula diseñadas para la comprensión de la fracción como parte-todo con los estudiantes de grado quinto, esto persiguiendo lo que dice Candela y Viafara (2014), que estos instrumentos son complementarios por cuanto es fundamental la articulación entre ellos para conectar las acciones inteligentes del profesor durante la clase.

Epistemología de la Fracción

Como ya se indicó, para la enseñanza de un tópico particular es necesario conocer la disciplina que se orienta, este hecho lleva a que sea relevante conocer de dónde viene el concepto de fracción, y como este ha evolucionado a través de la historia. En este apartado se expone este aspecto, así como los vinculados a su enseñanza. Para empezar, se tiene en cuenta lo que dice Andonegui (2006) al respecto: "la matemática es la base de su didáctica: la forma en que se construye el conocimiento matemático es una fuente imprescindible a la hora de planificar y desarrollar su enseñanza" (p.6). Además señala que para comprender mejor cómo se construye el conocimiento matemático, es necesario conocer de dónde viene, cuando y porque apareció en la humanidad, cuál es su importancia y para qué sirven hoy en día.

De dónde vienen los fraccionarios. Los números racionales y en particular la fracción tienen un contexto en su desarrollo histórico que pasa por civilizaciones como la egipcia, babilonia y la matemática griega. Para exponer ejemplos que se presentan más adelante se utilizará la notación actual por motivos de comunicación.

En culturas como la griega y la babilonia, el conocimiento matemático inicial de los campos numéricos se dio a través de los números naturales, los cuales facilitaban el conteo de cantidades y la medida de magnitudes, además con ellos se podía “operar” para solucionar problemas de la vida diaria en referencia a las cuatro operaciones aritméticas. Sin embargo los problemas de la vida diaria no se limitaban solo a estas operaciones, se presentaban situaciones en las que aparece un nuevo elemento a considerar: la relación entre la parte (la porción de tierra recibida, el monto del tributo o impuesto pagado...) y el todo (la superficie total de la tierra a repartir, el total de los bienes poseídos...). Esta expresión de parte-todo se denotaba con números naturales, sin embargo se hizo necesario una nueva expresión que los relacione, dándose así el inicio primigenio de la fracción (Andonegui, 2006).

Según la cultura se representaba las fracciones, por ejemplo la civilización egipcia, que utilizó un sistema de numeración aditivo pictográfico, se elaboró una forma de escribir las fracciones. Una característica interesante era que no se escribían todas las fracciones y toda fracción se expresaba como una suma de fracciones unitarias, por ejemplo, la fracción 2/5 no se escribía de esa forma, sino 1/3+1/15. No se sabe exactamente por qué los egipcios escribían solamente fracciones unitarias, respecto a esto algunos historiadores señalan que es posible que conceptualmente para ellos fuera más fácil entender la división de una unidad en partes iguales. (UNA, 2014).

En el mismo sentido de la escritura, según Andonegui (2006) los egipcios utilizaron símbolos para las fracciones del tipo $\frac{1}{n}$ (excepto $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{4}$), se representaban con la notación correspondiente del número *n* y un óvalo o punto superpuesto al número. Las demás fracciones (salvo $\frac{2}{3}$, que tenía también su símbolo particular de representación) se reducían a una suma de fracciones unitarias.

Otra característica importante de la civilización egipcia era que nunca repetían una fracción cuando la descomponían, por cuanto consideraban que cada fracción era única, hoy en día no se sabe cuál técnica utilizaban para descomponer una fracción como suma de fracciones unitarias. Sin embargo en restos de un papiro llamado *Rhind*, en su primera página aparece una tabla donde aparecen muchas fracciones expresadas como suma de fracciones unitarias y es en el estudio de esas tablas que matemáticos de épocas posteriores elaboraron algunas conjeturas o algunas técnicas (UNA, 2014).

Adicionalmente Andonegui (2006), refiriéndose a los babilonios resalta que utilizaron fracciones cuyos denominadores eran potencias de 60 y con ellas representaban las fracciones de la forma 1/n. Por ejemplo $\frac{1}{2} = \frac{30}{60}$ y $\frac{1}{8} = \frac{7}{60} + \frac{30}{60^2}$

Por otra parte, UNA (2014) dice que existen muchas especulaciones, y no se sabe a ciencia cierta del por qué los babilonios escogieron este número. Sin embargo, manifiesta que una de las razones podría ser que el número 60 es un número relativamente pequeño, que tiene un gran número de divisores. Este sistema de numeración además indica, permitió a los babilonios realizar un gran número de cálculos, incluidos los cálculos con fracciones, lo cual era muy conveniente por cuanto lo utilizaban en la astronomía. Las ventajas de este sistema de numeración babilónico dice UNA (2014), se pudo evidenciar en sus tablas numéricas que proporcionaron gran cantidad de información que permitió dar una idea de cómo ellos manejaban su sistema de numeración.

Además, Andonegui (2006) resalta que tanto los babilonios como los egipcios le dieron un uso solo práctico a las fracciones, no hubo una preocupación teórica, la que sí tuvo la cultura griega con los números naturales. En esta cultura dice, existían los pitagóricos los cuales solo consideraban como números los números naturales, además creían poder asignar un número a todo lo que existe. Esta relación dice, la lograban con el principio de conmensurabilidad (todo puede ser medido), es decir dada dos magnitudes siempre habrá una menor que encaje un número exacto de veces en cada una de las dos magnitudes relacionadas. Esto es, dados dos segmentos a y b, puede suceder que a no encaje un numero de veces exactas en b y viceversa. Se podrá entonces encontrar un segmento c que encaje exactamente m veces en a y n veces en b, de tal manera que la relación entre a y b será $\frac{m}{n}$.

Esta relación y su expresión no eran consideradas como un nuevo número sino como la expresión numérica de la relación entre ellas, no se admitía que ambas estuvieran ligadas como un par “parte-todo”, en los griegos entonces a diferencia de los babilonios y egipcios, no existieron las fracciones como números (Andonegui, 2006). Cabe resaltar que la civilización griega en el área de los sistemas de numeración y las operaciones numéricas no era avanzada, como sí lo era en la geometría. Los cálculos los hacían de manera geométrica, utilizaban las fracciones sexagesimales de los babilonios y una expresión de las fracciones con cierta similitud a la que se utiliza hoy en día, con la premisa que las fracciones decimales nunca fueron utilizadas por los griegos UNA (2014).

La idea de fracción como número se consolidó solo a partir del Renacimiento con Simon Stevin en 1585, al proponer una nueva definición: “número es aquello mediante lo que se explica la magnitud de alguna cosa” (Dedekin, 1997, p.4). Definición que Newton clarifica en 1707, en su Arithmetica Universalis: se entiende por número no tanto una multitud de unidades cuanto la razón entre una cantidad abstracta cualquiera y otra del mismo género que se toma por unidad (Dedekin, 1997, p.4). Asi la expresión de la forma $\frac{a}{b}$ Andonegui (2016) la intrepreta como: un número que mide el número de veces que la parte esta contenida en el todo, considerado éste como la unidad. Así, las fracciones, se convierten en números-medida de magnitudes comparadas con la unidad y por consiguiente, todos ellos pueden representarse como puntos de la recta numérica (p.8).

El concepto de fracción y sus diversas formas de representación. El concepto de fraccion dadas estas premisas historicas se puede definir como la expresion que relaciona la parte con el todo, para esto Andonegui (2006) plantea tres elementos: primero un todo, que se considera como unidad, segundo una particion de ese todo en b partes congruentes (b>0), y tercero la referencia a un número a de esas partes.

Por otra parte, Andonegui (2006) dice que la fracción es un concepto polimorfo, dado que puede adoptar diversas formas de representación, él propone la verbal, numérica, gráfico continuo, gráfico discreto, decimal, punto sobre la recta numérica y porcentual. Sin embargo para la relación parte-todo manifiesta que se toman las cuatro primeras y estas adoptan un simbolismo de la forma a/b, de la cual él establece algunas puntualizaciones.

Una primera, es que el simbolismo a/b, no siempre obedece a fracción. Dice que lo es cuando expresa la relación entre los valores de una parte y del todo del que proviene la parte. Así mismo, Andonegui (2006) resalta la distinción de fracción con razón, división y número racional, a esto le denomina polisemia de a/b, de lo cual señala que conceptualmente, estos cuatro objetos matemáticos son diferentes, a pesar de que pueden presentarse bajo la misma forma. Concluye entonces que no es la forma lo que distingue a estos conceptos, sino el análisis de la situación en que aparecen en cada caso. Ahora, en el sentido de la diversidad de los sistemas de representación, señala que es importante que el estudiante domine un concepto matemático y esto se da cuando es capaz de identificarlo en cualquiera de sus posibles sistemas de representación; representarlo en todos ellos; y saber traducirlo de un sistema a todos los demás.

No menos importante para Andonegui (2006), es lo que atañe a los conceptos de numerador y denominador, de ello dice, que estos términos deberían ser utilizados siempre en la escuela y no solo aparecer cuando se tratan los fraccionarios, aquí él da una importancia en la semántica de estos términos. Para ello da un ejemplo muy simple que es relevante explicar. Él propone la locución "tres sillas" y determina que en ella hay un numerador tres (término o expresión que se utiliza para numerar) y un denominador (lo que denomina), en este caso *sillas.* Análogamente hace el ejemplo con $\frac{3}{5}$ (tres quintos), aquí tres es el adjetivo numeral y quintos hace de sustantivo denominador; como la silla, en el ejemplo de tres sillas.

En este mismo aspecto del numerador y el denominador, Andonegui (2006) sugiere utilizar términos que sean del lenguaje común del diario vivir, como: un cuarto para las cinco, media cucharada, un cuarto de panela, un cuarto de café, las cinco y media. Para que como dice él: "Una vez más, el lenguaje nos sirve de vehículo entre el concepto y su representación simbólica, a la que puede dotar de sentido pleno" (p.18).

En el aspecto, de preguntarse ¿para que aprender las fracciones?, Andonegui (2006) va a la utilización de ellos en el diario vivir. Dice que familiarizarnos con las fracciones no supone solamente acostumbrarnos a sus conversiones de un sistema de representación a otro, o a sus equivalencias dentro de un mismo sistema, sino saber verlas y utilizarlas en nuestra vida.

Para terminar, otro aspecto por resaltar es el que hace Freudenthal (citado en Andonegui, 2006) respecto a los números fraccionarios y el sistema de los números racionales; dice que aunque los números fraccionarios no son tomados como un conjunto numérico en el sentido axiomático, como lo es el de los números racionales, son considerados como el antecedente histórico y como fuente fenomenológico de los números racionales, es decir que sin ser números racionales se comportan como ellos.

Referentes del Ministerio de Educación Nacional de Colombia

En esta sección se encuentra consignado lo que atañe al tópico fracción en los referentes de calidad y de actualización curricular emanados por el MEN, además se consideran aspectos relacionados con la evaluación desde el punto de vista del MEN y de programas de calidad que desde este mismo organismo se ha implementado y que acompañan algunas Instituciones Educativas Oficiales en Colombia.

En este sentido, es importante primero mencionar que cuando se cita los referentes de calidad son documentos oficiales que MEN que entre ellos están: los lineamientos curriculares y los Estándares Básicos de Competencia (EBC). Por otro lado cuando se habla de referentes de actualización curricular se referirá a documentos como DBA y las Mallas. Además se tendrá en cuenta otro documento de referencia como las matrices de referencia construidas por el ICFES.

Lineamientos curriculares para el área de matemáticas. Los documentos referentes de calidad del MEN como los lineamientos curriculares, pretende ser un posibilitador, promotor y orientador de los procesos curriculares que viven las instituciones y fomentan el estudio de la fundamentación pedagógica de las disciplinas (MEN, 1998). Por lo anterior, sin duda alguna, es relevante la utilización de este documento a la hora de orientar un área como matemáticas.

Dicho esto, es conveniente realizar una revisión y determinar que orientaciones dan al respecto del pensamiento numérico, del cual es necesario referirse cuando de las fracciones se trata. A este respecto se cita: “el conocimiento de que los números se pueden representar de diferentes maneras, junto con el reconocimiento de que algunas representaciones son más útiles que otras en ciertas situaciones de resolución de problemas, es valioso y esencial para desarrollar pensamiento numérico" (MEN, 1996, p.27). Es así como esto indica la importancia de desarrollar habilidades en los estudiantes en torno a reconocer las diferentes representaciones que tiene un número fraccionario, que como lo indica Andonegui (2006) para la fracción como parte-todo se encuentran la verbal, la numérica, la gráfico continuo y la gráfico discreta.

Otro aspecto relevante para la intervención pedagógica y propuesto en los lineamientos, tiene que ver con lo que propone Paul Ernest (citado en MEN, 1998) respecto a una reconceptualización del papel de la filosofía de las matemáticas, que tenga en cuenta la naturaleza, justificación y génesis tanto del conocimiento matemático como de los objetos de las matemáticas, las aplicaciones de éstas en la ciencia y en la tecnología, y el hacer matemático a lo largo de la historia (p.12). Este elemento expuesto en párrafos anteriores tiene que ver con la importancia de conocer cómo un concepto matemático evoluciona y se construye a través de la historia, que como dice Andonegui (2006) es una fuente imprescindible a la hora de planificar y desarrollar su enseñanza.

En un aspecto diferente, los lineamientos curriculares, que aunque datan del año 1998, ya hacían referencia al uso de la tecnología en el proceso de enseñanza aprendizaje, no en la dimensión que ahora tiene este recurso pero que su uso efectivo aplicado a la educación es un campo que requiere investigación, desarrollo y formación de los docentes (MEN, 1998). En este sentido se ha recorrido un camino importante, pero se recorre muy despacio y sin la estructura adecuada. Para la intervención pedagógica de la que surge este texto, es relevante la tecnología por el potencial que tiene como Medio para la comprensión del concepto de fracción, en ella se propuso los REDA como los manipuladores virtuales que son un activador potente para la motivación a las prácticas de aula.

Estándares básicos de competencia. Estos estándares están contenidos en un compendio conocido como EBC, tal documento contiene unos criterios que son públicos y que permiten juzgar si un estudiante cumple con unas expectativas comunes de calidad; expresa lo que se espera aprenda en el área de matemáticas en su paso por la Educación Básica y Media (MEN, 2006).

Además, es importante señalar que este documento no solo es la matriz que se presenta por conjunto de grados; el cuerpo del documento también es rico en orientaciones que poyan al docente en su tarea pedagógica. Este documento expone los pensamientos que se deben abordar con los estudiantes a lo largo de su paso por el sistema escolar, que respecto al concepto de fracción, explicita la importancia que un estudiante comprenda las diferentes interpretaciones que se dan a este concepto; de esto dice: "es importante señalar que un mismo contenido matemático puede –y en ocasiones debe– presentarse a través de diversas situaciones, como es el caso de las fracciones y sus diversas interpretaciones" (MEN, 2006, p.73). A continuación se ha sintetizado la matriz que se encuentra construida en el documento referente a la fracción presentada en la tabla 1.

Tabla 1
Estándares básicos de competencias relacionados al aprendizaje de la fracción

Estándar	Pensamiento
Describo situaciones de medición utilizando fracciones comunes	Numérico
Interpreto las fracciones en diferentes contextos: situaciones de medición, relaciones parte-todo, cociente, razones y proporciones	Numérico
Utilizo la notación decimal para expresar fracciones en diferentes contextos y relaciono estas dos notaciones con la de los porcentajes.	Numérico
Utilizo números racionales, en sus distintas expresiones (fracciones, razones, decimales o porcentajes) para resolver problemas en contextos de medida.	Numérico

Fuente: Recuperado de estándares básicos de competencia del área de matemáticas (MEN,2006)

Es así como las situaciones se enseñanza que se presentan en la planeación de aula, contienen actividades en contextos gráficos continuos y discretos, verbales y simbólicos con apoyo de material concreto, digitales con REDA y planos en los escritos que se proponen por parte del docente a los alumnos.

Mallas de aprendizaje. Este referente de actualización curricular es el más reciente que ha publicado el MEN, y se ha construido para apoyar la implementación de los DBA. Estos últimos son enunciados flexibles que permiten procesos de actualización curricular en contextos particulares de práctica, además explicitan aprendizajes que se recomienda sean objeto de reflexión e insumo para la construcción curricular en sus contextos de uso (MEN, 2016b).

Se sigue de esto, que las Mallas de Aprendizaje (Mallas), "son un recurso para el diseño curricular de los establecimientos educativos en sus distintos niveles. Estas llevan al terreno de lo práctico los DBA" (MEN, 2017, p.3). Es así como, las Mallas aportan al diseño de un plan de aula, que para el caso particular de la intervención pedagógica ayudo a orientar y fortalecer la planeación de las situaciones de enseñanza que buscan que los estudiantes comprendan el concepto de fracción como parte-todo. Para esto se tuvo en cuenta como lo indica (Godino et al., 2003) que en las situaciones de enseñanza propuestas, los estudiantes construyan el conocimiento más que una comprensión instrumental. En este sentido, las Mallas muestran una visión de una clase de matemáticas donde se promueva que los estudiantes aprendan a pensar matemáticamente de tal manera que construyan conocimiento relevante y útil para solucionar problemas en contextos propios de la disciplina, otras disciplinas y la vida cotidiana. Esta visión dice trasciende la memorización de reglas y propiedades (MEN, 2016a).

Otro aspecto relevante de las Mallas, es la propuesta de unos ejes de progresión, que "son unos organizadores de los DBA para ofrecer coherencia y cohesión, tanto en un mismo grado como entre grados" (MENA, 201, p.25). Para la intervención pedagógica se tuvo en cuenta ejes para el pensamiento numérico apuntando al concepto de fracción, de tal forma que se determinaron por ejemplo: la comprensión de los significados de los números fraccionarios en situaciones cotidianas relacionadas con contar, agrupar, medir, representar, comparar, relacionar y operar. Se buscó igualmente, establecer relaciones numéricas de orden y equivalencia entre números fraccionarios. Así mismo, el sentido numérico, que cita (MEN, 2016a), se apoyó en actividades sobre magnitudes que favorecen los procesos de cuantificación, comparación y representación.

Por otra parte, se tuvo en cuenta el eje de progresión, que en las Mallas lo llaman de Relaciones Entre Números, de él se hace referencia a "la comprensión del significado de los números, sus diferentes interpretaciones y representaciones" (MEN, 2016a, p.26). Este elemento es tenido en cuenta a la hora de la planificación por cuanto las situaciones de enseñanza apuntaban a las diferentes representaciones de la fracción como parte-todo: verbal, numérica, gráfico continuo y gráfico discreto, propuestas por Godino et al. (2003).

En lo relacionado con la operación suma; la comprensión que la fracción es una parte de un todo que se divide en partes iguales y que ese todo se forma a partir del agrupamiento de esas partes, sirve como inicio de los estudiantes a la suma de números fraccionarios. El hecho que esa unión de la partes la relacionen con la suma, sin ser estrictos en estas dos funciones matemáticas, y el todo lo relacionen con la unidad, lleva a que comprendan que esa suma es igual a uno; seguido que comprendan por qué cuando se suma con fraccionarios de diferente denominador solo se operan los numeradores. Al respecto, las Mallas indican que el aprendizaje de las operaciones se logra a partir de la comprensión de las acciones, las relaciones y transformaciones que se hacen sobre las cantidades. Así, por ejemplo, acciones como agregar y desagregar, reunir y separar, componer y descomponer, entre otras, son la base para comprender las operaciones aditivas de sumar o restar (MEN, 2016a).

Adicionalmente, las Mallas presentan los aprendizajes con los que deberían llegar los estudiantes del grado anterior y aquellos que desarrollarán en el grado en curso. En este sentido y determinando lo que atañe a la fracción, él deberá llegar a grado 5º con los significados de la fracción (en particular como razón y como cociente) y los comunican a partir del uso de las representación fraccionaria (MEN, 2017). Este aspecto es relevante por cuanto al momento de la planificación es necesario tener en cuenta el contexto del estudiante, referido en este caso a los conocimientos previos que tiene y que son importantes para abordar un tema, tal y como lo indica el MEN: "darle al docente un panorama general frente a aquello que puede evaluar al principio del año a manera de diagnóstico, así como aquello que se espera, a grandes rasgos en el año en términos de aprendizaje" (MEN, 2017, p.3).

En este mismo sentido, pero ya en relación con los aprendizajes que puede alcanzar el estudiante en grado quinto en particular al concepto de fracción, dicen las Mallas que se debe consolidar la comprensión sobre los números fraccionarios en sus representaciones de fracción; para el caso de la intervención en el aula la verbal, numérica, gráfico pictórico y gráfico discreto (Godino et al., 2003), y sus relaciones con sus operaciones, en este caso de la suma y relaciones (mayor que, menor que, igual a).

Al respecto, en la intervención en el aula, se realizaron actividades con material concreto que buscaban que el estudiante comprenda a través de la manipulación y la observación la relación de orden entre dos fracciones y determine cuando era una mayor, menor o igual a otra dada. Así mismo con el material concreto y la comprensión que las partes que forman un todo reunidas, forman el todo, permitió realizar un acercamiento a la suma de fracciones

Matriz de referencia. Fruto de revisar la matriz de referencia del ICFES (MEN, 2010), para determinar los aprendizajes que evalúa las pruebas SABER en torno a la fracción y como apoyo a la planeación de las situaciones de enseñanza para la intervención pedagógica, se reconocieron los siguientes aprendizajes con sus respectivas evidencias, como lo muestra la tabla 2.

Tabla 2
Aprendizajes y sus evidencias en relación del tópico fracción que propone el ICFES para la prueba SABER grado 5°

Aprendizaje	Evidencia
Reconocer e interpretar fracciones en diferentes contextos	Reconoce la fracción como parte-todo
Reconocer diferentes representaciones de la fracción y hacer traducciones entre ellas	Representar gráficamente las fracciones en contextos continuos y discretos
	Utilizar el lenguaje natural y la representación numérica para enunciar una fracción
Traducir relaciones numéricas expresadas gráfica y simbólicamente	Establecer relaciones de orden (mayor, menor, igual) y representarlas simbólicamente
	Usar lenguaje grafico o pictórico y terminología adecuada para explicar relaciones numéricas
Resolver y formular problemas que requieren el uso de la fracción como parte de un todo	Dar significado y utilizar la fracción como parte-todo en contextos continuos y discretos para resolver problemas
	Resolver situaciones problema sencillas con fracciones de uso común que requieran de la suma o resta para su solución

Fuente: Recuperado de Matriz de referencia ICFES matemáticas grado 5° (MEN, 2016a)

Es importante tener en cuenta este referente, por cuanto al revisar el contexto del problema se remitió a los resultados de las pruebas SABER; y segundo, al momento de la planeación de clase y en particular cuando se propone unos objetivos de aprendizaje, se pueden construir de tal manera que se alineen con lo que evalúa el ICFES .

La Secuencia Didáctica para la Organización de la Enseñanza

En este apartado se encuentra descrito lo que atañe a la Secuencia Didáctica, que será la forma como se organizaran las sesiones de clase. Según Tobón, Pimienta y Garcia (2010) “son conjuntos articulados de actividades de aprendizaje y evaluación que, con la mediación de un docente, buscan el logro de determinadas metas educativas, considerando una serie de recursos” (p.20).

Consecuentemente, el MEN resalta su importancia diciendo que son un ejercicio para explorar nuevas formas de enseñar las matemáticas y ayuda al docente en la planeación y ejecución de varias sesiones de clase, además facilitan el CDC, y el estudiante encuentra sentido de lo que aprende, un propósito que involucra tanto los contenidos a enseñar como la didáctica para hacerlo (MEN, 2012c, p.9).

En ese contexto, en el diseño de la secuencia didáctica se tendrá en cuenta el propuesto por Furman (2013), el cual tiene en cuenta actividades, que para el caso del diseño propuesto se hablará de Situaciones bajo la perspectiva de Brousseau (1987). Ellas comenzaran con la solución de problemas rutinarios (Baroody, 1994), y se apoyará en Medios Materiales (Perrin, 2009) como el concreto y pictórico, para la comprensión del concepto.

Por otra parte, para el diseño de la Secuencia Didáctica, Furman (2013) propone que debe ofrecer una variedad de problemas para el aprendizaje de cada contenido y que presenten diversas opciones para la resolución de cada uno, dice que esto permite orientar el trabajo de los alumnos en la búsqueda de estrategias para resolverlos. Además, propone tener en cuenta la gestión del trabajo grupal de los alumnos, especialmente en la fase de confrontación de estrategias de resolución de problemas, de aquí que la distribución del grupo además de trabajo individual se propondrá una distribución para trabajar colaborativamente.

De igual manera, la planeación de la Secuencia Didáctica tendrá en cuenta los lineamientos de Furman (2013) y el instrumento CoRe (Candela & Viafara, 2014). Por consiguiente la estructura consideró los siguientes aspectos:

Primero, una Visión General, sobre el tema de estudio de la Secuencia Didáctica que se propone, los objetivos generales de aprendizaje y la descripción del modo en que el tema se desarrolla. Un segundo aspecto citado por Furman (2013), es una Secuencia de Clases, este determina el número de semanas de duración, de acuerdo al tema a tratar. Aquí indica, se debe detallar aspectos breves de las sesiones a desarrollar en cada semana, de acuerdo a un formato específico. Este formato se considera flexible, hecho que permite hacer algunos cambios de acuerdo al contexto de la institución y los referentes que ahora se manejan en Colombia como los DBA y las Mallas.

Un tercer aspecto, las Planificaciones de cada Sesión, que también siguen un formato específico, de esto, afirma Furman (2013), que las planificaciones orientan el trabajo de los docentes en el aula, incluye los objetivos de aprendizaje, el desarrollo de la clase, las posibles intervenciones para guiar los aprendizajes de los alumnos, las tareas a desarrollar, la organización de la dinámica de clase, entre otras. El formato de estas planificaciones incluye, además, un espacio para la reflexión docente, como recurso para pensar la clase y analizar sus resultados.

Para la intervención en el aula a desarrollar del concepto de fracción como parte-todo, los dos formatos anteriores se fusionaran en uno a excepción del espacio para la reflexión, la cual se hará en un espacio aparte que serán los PaP-Per que como se indicó, son reflexiones narrativas de lo hecho en la sesión de clase y se representa de manera individual expresada en un diario del profesor (Mora y Parga, 2008).

Se sigue, las Profundizaciones Conceptuales, este cuarto aspecto ayuda a clarificar y ampliar aquellos conceptos involucrados en la secuencia didáctica, desde una mirada puesta en la enseñanza de dichos conceptos y en el desarrollo del Conocimiento Didáctico de Contenido (Furman, 2013). Para la intervención en el aula este aspecto se toma desde las CoRe (Acevedo, 2009) y (Erazo, 2017) mostradas en la tabla 3, donde las categorías utilizadas se adaptaron al área de matemáticas y el tópico fracción como parte-todo.

Tabla 3

Categorías para la planificación de la secuencia didáctica

Categorías para la planificación de la secuencia
1. Identificación del tema o tópico e ideas clave
2. ¿Qué intenta que aprendan sus estudiantes alrededor de este tópico?
3. ¿Por qué es importante que los estudiantes sepan este tópico?
4. ¿Cuáles son las dificultades relacionadas con la enseñanza y el aprendizaje de este tópico?
5. ¿Qué formas específicas de evaluación del entendimiento de los estudiantes emplea alrededor de este tópico?
6. ¿Qué conocimientos acerca del pensamiento de los estudiantes influyen en la enseñanza de este tópico?
7. ¿Cuáles estrategias de enseñanza emplea y cómo las relaciona con el tópico a enseñar?
8. Definición de la secuencia para abordar e introducir los temas sin olvidar los conocimientos previos necesarios y considerando analogías y ejemplos
9. Preparación de materiales, manipuladores virtuales, material concreto, material pictórico, tratando de vincular los temas con evaluaciones externas como SABER

Fuente: Recuperado de Candela, B; Viáfara, R. Aprendiendo a enseñar Química.

Un quinto aspecto para la planificación será la propuesta de evaluación formativa, puesto que como indica el (MEN, 2009) es un proceso en el que todos aprenden, constituye una oportunidad para que docentes y estudiantes participen y reaccionen ante las decisiones que se adoptan, además esta evaluación, permite que los estudiantes pongan en práctica sus conocimientos, defiendan sus ideas, expongan sus razones, saberes, dudas, ignorancias e inseguridades con la intención de superarlas; por consiguiente se seleccionaran instrumentos de recolección y técnicas desde este enfoque propuestas por la (SEP, 2012), como la observación, desempeño de los alumnos, interrogatorio e instrumentos como diarios de clase, entrevista, los portafolios, pruebas escritas y las rubricas; que para el caso de las rubricas se utilizan para evaluar los desempeños de los alumnos en las situaciones de enseñanza y en si las situaciones propuestas por el docente. Las pruebas escritas servirán también para evaluar el desempeño de los alumnos frente a las actividades planteadas tanto con el material concreto como de los REDA utilizados y los portafolios como parte de la autoevaluación y Heteroevaluación de su desempeño en la clase.

Referente Metodológico

Teniendo en cuenta el objetivo de la intervención pedagógica, el enfoque metodológico definido es de corte cualitativo, dado que éste concibe que la naturaleza del conocimiento y de la realidad depende de un sujeto cognoscente, así mismo aquí se asume que el conocimiento es una creación compartida a partir de la interacción entre el investigador y el investigado (Sandoval, 2002). En este sentido, el enfoque particular para la intervención pedagógica es la investigación-acción, de la cual Restrepo (2012) señala que se relaciona con "la comprensión de problemas prácticos cotidianos del profesor, interpretando lo que ocurre desde el punto de vista de todos los actores de la situación problema, con el lenguaje de ellos mismos y a través de la visión participativa de todos ellos" (p. 125).

Población

La intervención pedagógica se realizó con un grupo de 21 estudiantes del grado quinto de la sede Escuela El Ortigal perteneciente a la Institución Educativa Técnico El Ortigal del municipio de Miranda Cauca, con edades entre los nueve y once años en su mayoría afrodecendientes que tiene domicilio en la zona central del corregimiento El Ortigal y veredas aledañas tanto del Departamento del Cauca como del Valle del Cauca. Las familias que pertenecen a la Institución Educativa se distinguen por su cultura de tradición afro, su economía se basa en empleos directos e indirectos que genera el ingenio cauca, adicionalmente de actividades como la extracción de material de río, la elaboración de ladrillo, el comercio informal y empleos de servicio doméstico en municipios como Cali. Las familias a las que pertenecen los niños en muchos casos son disfuncionales, y en ocasiones a cargo de los abuelos maternos o paternos.

Fases de la Intervención Pedagógica

En este contexto, Restrepo (2004) sugiere una variante de la investigación-acción que llama investigación-acción pedagógica, en la cual propone una metodología de tres fases: a) fase de

Deconstrucció*n*; la cual comienza con la crítica a la propia práctica; b*)* fase de Reconstrucción*;* es la propuesta de una práctica alternativa más efectiva y c) Validación de la efectividad de la práctica alternativa o reconstruida, las cuales se explicitan a continuación.

Fase de deconstrucción.

● Búsqueda de estudios realizados de índole epistemológico, para tener en cuenta la evolución histórica del concepto de fracción y de índole didáctico, referido a su enseñanza y aprendizaje.

● Diseño y aplicación de una actividad de caracterización basada en preguntas tomadas de las pruebas SABER referentes al concepto de fracción como parte-todo, que proporcionará información de los conocimientos previos de los estudiantes.

Fase de reconstrucción.

● Elaboración del instrumento de la CoRe. Se responde cada uno de los ítem que se plantean que son la base para elaborar las Situaciones Didácticas, la selección de los REDA, el material concreto y los instrumentos de evaluación.

● Selección, adaptación y/o diseño de los REDA y el material concreto, teniendo en cuenta los objetivos de aprendizaje propuestos y con el propósito de apoyar los aprendizajes de los estudiantes con estrategias llamativas.

● Diseñar la estructura de la Secuencia Didáctica: Se adaptó de acuerdo a los referentes del MEN y al formato de Furman (2013) que se muestra en el Anexo 3 y Anexo 21. Esta contiene además un espacio aparte para narrar la experiencia vivida con respecto a las actitudes y desempeños de los estudiantes y las situaciones de enseñanza, llamado diario de trabajo.

● Diseñar los instrumentos de evaluación para cada Situación Didáctica los cuales contienen unos criterios y desempeños claros. Uno de ellos con preguntas de selección múltiple, en donde las opciones de respuesta reflejan el nivel de apropiación del concepto de fracción como parte-todo (Anexo 4). Estos niveles de desempeño van desde un nivel 1 el cual refleja una baja apropiación de los conocimientos trabajados, hasta un nivel cuatro que muestra un alto grado de apropiación de los conocimientos trabajados en esa Situación. El otro instrumento incluyó preguntas abiertas, que permiten medir la capacidad de argumentación y manejo del concepto del estudiante (Anexo 5 y Anexo 6).

- Diseñar la rúbrica de evaluación para cada Situación Didáctica. En torno a esto se determinó las técnicas e instrumentos de evaluación desde un enfoque formativo, que proporcionaron información de evidencias de aprendizaje en torno a la fracción (Anexo 8). En este instrumento que será de autoevaluación diligenciado por los niños, se tuvo en cuenta la comprensión del concepto de fracción que considera el estudiante adquirió, el interés y aporte de los REDA y el material concreto en el aprendizaje del tópico fracción como parte-todo y la actitud del estudiante frente al desarrollo de cada situación. Para cada una de estas categorías se diseñaron cuatro niveles de desempeño que van desde el nivel 1 el cual refleja un bajo desempeño en esa categoría, hasta un nivel cuatro que muestra un alto grado de apropiación y desempeño.

- Aplicar la secuencia didáctica; ésta tuvo en cuenta los recursos a utilizar (REDA y concreto), de esta forma se entrega a los estudiantes el material necesario para cada situación, se reservan las tabletas y/o computadores para cada sesión. La aplicación de la secuencia, pone en escena las situaciones didácticas diseñadas teniendo en cuenta la organización del grupo (trabajo individual o grupal) para así dar paso a la interacción entre los estudiantes y docente-estudiantes con el medio, que fueron los REDA, material concreto y los documentos con los talleres propuestos para la clase.

- Elaboración del diario de trabajo (Anexo 12) en cada sesión de aplicación; aquí se realizaron las notas de las observaciones, junto a esto se crearon registros de audio y fotográfico del trabajo realizado por los estudiantes, los cuales son el punto de partida para la elaboración de los PaP-eR.

- Aplicación de los instrumento de recolección de evidencias de aprendizaje de cada situación. La aplicación se realiza posterior a la culminación de cada Situación Didáctica, se entrega a cada estudiante el documento de evaluación, y se toma nota de las observaciones durante la aplicación de estos, para de esta forma alimentar la reflexión en la elaboración de cada PaP-eR. El otro instrumento (Anexo 5 y Anexo 6) se diligencia durante la sesión de clase y se hace en los grupos de trabajo colaborativo formados por los estudiantes.

- Al final de cada situación los estudiantes diligenciaron una rúbrica de auto evaluación (Anexo 8) que les permitió evaluar sus aprendizajes y su compromiso con la consecución de estos, apuntando también al uso adecuado del material concreto y los REDA propuestos en las sesiones de clase. Adicionalmente se aplicó la actividad de caracterización de la primera fase, para evaluar la comprensión acerca de la fracción como parte-todo.

Fase de validación. Se hizo en torno a la pregunta si el uso de los REDA y la utilización de material concreto, permitieron aportar en la comprensión del concepto de fracción como relación parte-todo, interpretando los diferentes instrumentos de recolección de información como las rubricas mencionadas y el portafolio con los trabajos elaborados por los estudiantes (Anexo 4, Anexo 5, Anexo 6, Anexo 7, Anexo 8).

Instrumentos para la Recolección de la Información

En la intervención pedagógica los principales instrumentos de recolección de datos son la actividad de caracterización, la CoRe, las rejillas de planeación de la secuencia didáctica, los registros escritos de evidencias de aprendizaje del trabajo en grupo, las autoevaluaciones para cada situación didáctica.

Instrumentos para la fase de deconstrucción. En esta fase se aplicó un instrumento (Anexo 2), diseñado para la caracterización de los estudiantes en torno al concepto de fracción como parte-todo y buscó observar las habilidades para resolver problemas en torno a este tópico. Su estructura está acompañada de preguntas tomadas de las pruebas SABER hasta el año 2016 tipo selección múltiple con única respuesta. En suma estos resultados serán utilizados en la caracterización del CDC del concepto en mención.

Instrumentos para la fase de reconstrucción. Estos instrumentos permitieron repensar la concepción que se tenía del concepto de fracción, la didáctica para enseñarlo y aspectos que se describen en las preguntas que se proponen para caracterizar el CDC. De aquí que éste ayudo a darse cuenta de la apropiación sobre este tópico en particular y además pensar en la forma más adecuada de llevar ese conocimiento a los estudiantes. Los instrumentos adaptados fueron una rejilla para la planeación de la secuencia didáctica, la sistematización del instrumento CoRe (Anexo 1) y el diseño de instrumentos para evaluar los desempeños obtenidos.

La rejilla para la elaboración de la Secuencia Didáctica se adaptó a un formato llamado formato para la planificación de la secuencia (Anexo 3). Fue adaptado de acuerdo a los referentes del MEN y del formato propuesto por Furman (2013), el cual en su estructura contiene una Visión General del tópico fracción como parte-todo, los objetivos de aprendizaje y la descripción del modo en que el tema se desarrolla. Por otro lado contiene la Secuencia de Clases de un número determinado de semanas de duración con aspectos de las sesiones a desarrollar en cada una de ellas.

Adicionalmente, en el formato se encuentra las Planificaciones de cada sesión, y el diseño de las Situaciones Didácticas. Aquí se explicita como se orienta el trabajo en el aula, incluye evidencias de aprendizaje, el desarrollo de la clase, las posibles intervenciones para guiar los aprendizajes de los alumnos, las tareas a desarrollar, la organización de la dinámica de clase. Por otro lado, se muestra de qué manera se implementa el material concreto y los REDA. Se determinó los tipos de organización en el aula, tanto individual como grupal en el que se promuevan aprendizaje colaborativo y/o cooperativo.

Por otra parte, se construyó un instrumento para evaluar los desempeños obtenidos en las Situaciones Didácticas que van desde el nivel uno (dos puntos) hasta el nivel 4 (cinco puntos); este instrumento de evaluación de desempeño (Anexo 4), cuenta con preguntas de selección múltiple y de apareamiento, en donde las opciones de respuesta reflejan el nivel de apropiación del estudiante y preguntas de respuesta abierta, que permiten medir la capacidad de argumentación y manejo de conceptos. Este instrumento sufrió modificaciones a medida que se evaluaba por cuanto se evidenció que algunas preguntas no eran claras, el instrumento original se puede ver en el Anexo 20.

Así mismo, se aplicaron otros dos instrumentos, una para la situación dos y otro para la situación tres; para la situación dos (Anexo 5) consta de preguntas abiertas y una tabla, las cuales se responde en los grupos formados por los estudiantes para trabajo colaborativo y que se apoya con el material concreto proporcionado en el transcurso de la sesión. Para la situación tres, el instrumento (Anexo 6) con el mismo propósito del anterior, consta de preguntas abiertas y cerradas las cuales se responde de acuerdo al trabajo que realizan en especial con el material concreto proporcionado. El instrumento (Anexo 7) se implementa para evaluar el desempeño y hacer seguimiento a los aprendizajes alcanzados con medidas en discreto y la apropiación con los REDA ya en lenguaje pictórico.

Así mismo, se diseñaron unas rubricas para analizar el desempeño de los estudiantes; la mostrada en el Anexo 8, es la autoevaluación que tuvo en cuenta cuatro categorías: la comprensión del concepto de fracción como parte-todo, el interés y aporte tanto de los REDA como del material concreto al aprendizaje de este tópico, la actitud del estudiante frente al desarrollo de cada situación. Para cada una de estas categorías se diseñaron cuatro niveles de desempeño que van desde el nivel uno, el cual refleja un bajo desempeño en esa categoría, hasta el nivel cuatro que muestra un alto grado de apropiación y desempeño.

Además, se elaboró una rejilla (Anexo 9) para determinar los aprendizajes en torno al tópico de fracción dividida en nueve categorías que indican los actos de comprensión según Anna Sierpinska de un concepto matemático y que se ajustan por parte del docente al tópico de fracción como parte-todo. También se utilizaron rejillas de lista de los estudiantes para registrar las respuestas después de terminada la situación (Anexo 10) y así hacer seguimiento a los desempeños encontrados hasta el momento, así como para registrar los resultados de la actividad de caracterización (Anexo 11).

Instrumentos para la fase de validación. Para esta fase se diligencio un instrumento llamado diario de trabajo (Anexo 12) donde se registra la narración de la jornada y de hechos o circunstancias que hayan influido en el desarrollo del trabajo y será insumo para la elaboración de los Pap-PeR y los resultados de la intervención pedagógica en el aula. Este permitió reconstruir mentalmente la práctica y reflexionar sobre ella en torno a aspectos a aspectos como la actividad planteada, su organización y desarrollo, sucesos sorprendentes o preocupantes, reacciones y opiniones de los niños respecto a las actividades realizadas y de su propio aprendizaje. Además si las formas de trabajo utilizadas hicieron que los niños se interesaran en las actividades, que se involucraran todos. La narración elaborada incluye textos cortos de autoevaluación, en torno a cómo resultó, si falto algo por hacer o si se necesita modificar la próxima sesión de clase.

Diseño y/o Adaptación de los Recursos Educativos Digitales Abiertos (REDA)

Como resultado de la búsqueda de estos recursos, se encontró que en la web existe un repertorio sobre el tópico a tratar, estos se enfocan en su mayoría a aclarar conceptos proporcionando información conceptual, que en el caso de la intervención pedagógica se pretende que los estudiantes construyan. Los REDA seleccionados como los manipuladores virtuales se tomaron para que los estudiantes puedan validar, es decir probar sus soluciones si son correctas y desarrollar su capacidad de argumentación. Para suplir esta característica desde la construcción de la CoRe se hizo necesario seleccionar los REDA a las necesidades de la Situaciones Didácticas.

Los REDA seleccionados entonces deben llevar al estudiante a explorar, descubrir, analizar e ir formando su conocimiento paulatinamente hasta llegar a concretarlos. Los REDA tomados se muestran a continuación:

REDA manipulador virtual mercado matemático mágico. Este REDA es un manipulador en formato flash (Anexo 13), que ofreció la oportunidad a los estudiantes de relacionar el denominador y el numerador en un contexto de parte-todo, se muestra por ejemplo tres manzanas que él toca con una varita y el manipulativo va haciendo el conteo, a la vez aparece en la caja de texto el número (denominador). Posteriormente con la varita toca una manzana y la vuelve verde. El recurso le dirá "una de las tres manzanas es verde" y aparece en la caja el número un tercio. Cada vez que termina un ejercicio la aplicación propone otro diferente, más adelante propone otro ejercicio de arrastrar para relacionar los unos trozos de naranja según el color.

REDA manipulador virtual visualizador de fracciones. Este REDA es un manipulador virtual en formato flash (Anexo 14), que permitió a los estudiantes escribir en una caja de texto la fracción que representa unas galletas cuadradas del total. Así mismo pregunta la fracción de galletas redondas en ejercicios posteriores.

REDA manipulador virtual fracciones. Este REDA es un manipulativo virtual en formato flash (Anexo 15) donde los estudiantes deben observar la figura y escribir en las cajas de texto la fracción que representa la parte coloreada. Así mismo el aplicativo podrá pedir que represente la parte no coloreada.

REDA manipulador virtual barras de fracciones. Este REDA es un manipulativo virtual en formato flash (Anexo 16) que permite relacionar las partes del todo. Estas barras permitirán dividir en partes hasta de 16 y da la oportunidad de comparar equivalencias entre fracciones e incluso orden en estos números.

REDA manipulador virtual comparando fracciones. Este REDA es un manipulativo virtual en formato flash (Anexo 17) donde los estudiantes compararon la parte con el todo en diferentes representaciones continuas, pudieron evidenciar como fracciones como 1/4 y 2/8 son equivalentes, dado que representan la misma cantidad.

REDA manipulador virtual fracciones y colores. Este REDA es un manipulativo virtual en formato flash (Anexo 18) que permite tomar aleatoriamente un cuadrado y debe, en las cajas de texto, escribir la fracción que corresponde.

REDA recurso digital video historia de las fracciones. Video elaborado para representar un breve repaso por la historia respecto a diferentes civilizaciones que usaron las fracciones y la evolución que sufrió este concepto (Anexo 19).

Diseño del Material Concreto

Para las situaciones didácticas se elaboró material concreto para apoyar la comprensión del concepto de fracción y adicionalmente se utiliza para realimentar a los estudiantes en la solución de diferentes preguntas propuestas a lo largo de las sesiones de clase. Por otra parte los estudiantes utilizaron en su mayoría cartulina para elaborar su propio material. Los descritos a continuación fueron elaborados y llevados al aula por parte del docente para los estudiantes.

Figura 1. Material concreto para la situación dos: equipo de las fracciones

Para la situación dos, llamada Equipo de las Fracciones, se elaboró un material concreto (ver Figura 1**)** para realizar un juego donde se debía lanzar el dado y tiene como meta cubrir la tira etiquetada con el número uno completamente con las otras piezas del equipo de las fracciones.

En la situación dos, también se utilizó un material concreto elaborado en madera (ver Figura 2) con el cual los estudiantes tuvieron la oportunidad de medir las barras a través de la comparación entre ellas. Ellos debían diligenciar una tabla mostrada en el instrumento de evidencia de aprendizaje de la situación dos (Anexo 5).

Figura 2. Material concreto barras de madera utilizado en la situación dos

En la situación tres, para trabajar con medidas en discreto se elaboró un material concreto (ver Figura 4) llamado fichas de colores para apoyar las actividades de la situación 3 en situaciones de reparto. La Figura 3 muestra un rectángulo con fichas para cubrirlo de diferentes colores, este material se creó especialmente para apoyar en la comprensión de la pregunta número 8 del instrumento de recolección de evidencia de aprendizaje de la situación 3 (Anexo 6).

Figura 4. Material concreto diseñado para la situación 3

Figura 3. Material concreto para representar una ventana para la pregunta 8 de la evidencia de aprendizaje situación 3.

Resultados y Análisis de Resultados

En esta intervención los instrumentos de evaluación implementados que midieron los desempeños de los estudiantes son: una actividad de caracterización inicial y final (Anexo 2), un instrumento de evaluación por cada situación didáctica desarrollada (Anexo 4), una rúbrica de autoevaluación al finalizar cada situación (Anexo 8), con la cual se pretende observar el progreso de los estudiantes en la adquisición de los diferentes niveles de desempeño y los diarios de trabajo elaborados al finalizar cada situación didáctica.

Estos niveles van, desde un nivel de desempeño bajo que corresponde al nivel 1, el cual describe una comprensión limitada del concepto de fracción como parte-todo, así como falta de interés y poca motivación en el desarrollo de las actividades de la Secuencia Didáctica. Los siguientes descriptores corresponden a los niveles 2 y 3 que describen un progreso en la consecución de los desempeños descritos en el nivel anterior, y finalmente se encuentra el nivel de desempeño alto que corresponde al nivel 4, el cual describe una excelente comprensión de las categorías trabajadas, así como un gran interés y motivación en el desarrollo de las actividades planteadas en la Secuencia Didáctica.

Resultados Arrojados en la Caracterización Inicial y Final

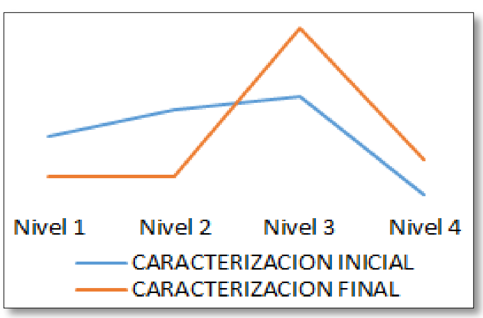


Figura 5. Cantidad de estudiantes ubicados en los niveles de desempeño de la actividad de caracterización inicial y final

De acuerdo a los desempeños obtenidos (Figura 5) por los estudiantes en la prueba de caracterización, los cuales se dividieron en 4 niveles; que van desde el nivel 1, siendo el más bajo, hasta el nivel 4 que demuestra un desempeño alto. Evidenciaron que en los niveles 1 y 2 hubo disminución de estudiantes, lo cual sería lo esperado; así mismo se presentó un aumento en los niveles 3 y 4, que también es lo esperado. De lo anterior se deduce que existe mejor desempeño en las habilidades evaluadas en la caracterización final después de implementadas las Situaciones Didácticas con apoyo del Material Concreto y los REDA.

Resultados Arrojados por el Instrumento para Evaluar las Situaciones Didácticas

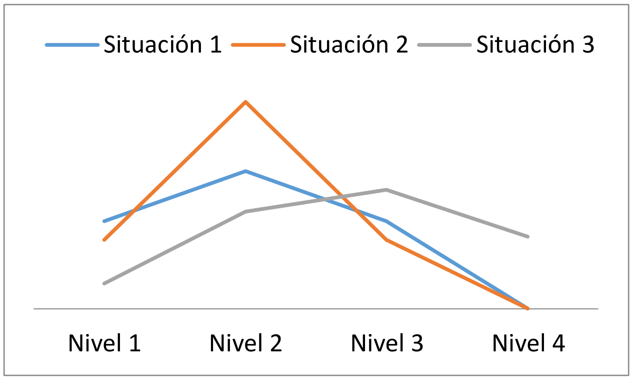


Figura 6. Cantidad de estudiantes ubicados en los niveles de desempeño después de aplicar el instrumento para evaluar las situaciones didácticas

La Figura 6 indica que los desempeños obtenidos en las tres situaciones didácticas, evaluadas con el instrumento mostrado en el Anexo 4, que van desde el nivel uno (dos puntos) hasta el nivel 4 (cinco puntos); muestran que la cantidad de estudiantes en el nivel 1 disminuye progresivamente y en el nivel 3 y 4 aumenta progresivamente, lo cual evidencia que los estudiantes obtuvieron niveles de apropiación favorables en torno al tópico fracción como parte-todo.

Resultados Arrojados por la Rúbrica de Autoevaluación Aplicada en cada Situación

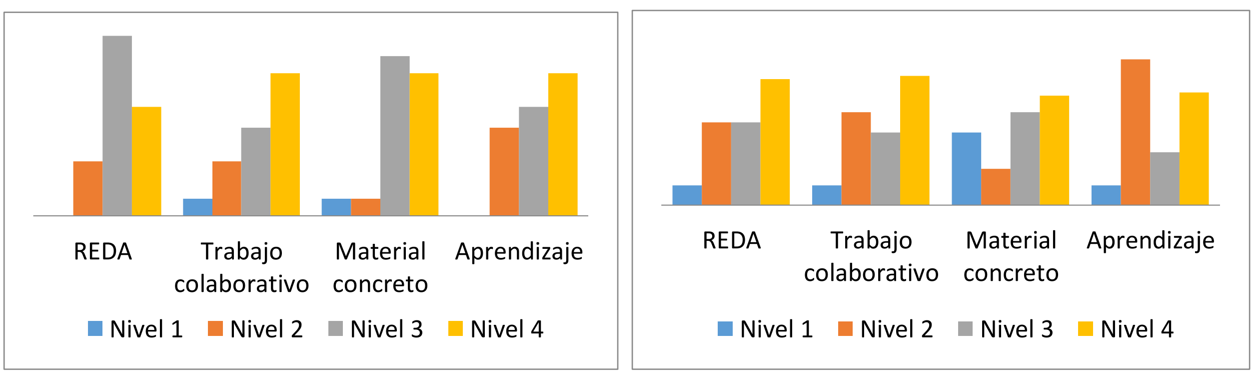


Figura 7. Cantidad de estudiantes ubicados en los niveles de desempeño después de aplicar la rúbrica de autoevaluación de la situación uno y dos respectivamente.

La Figura 7 y Figura 8 muestra los resultados obtenidos en la rúbrica de autoevaluación (Anexo 8), realizada por los estudiantes, en ellas se encontró que la mayoría de los estudiantes se ubican en los niveles 3 y 4 en cada categoría; lo que indicó que sintieron interés y motivación por las actividades presentadas en los REDA y reconocieron que favorecen medianamente o considerablemente su aprendizaje en torno a la comprensión de la fracción como parte-todo; así

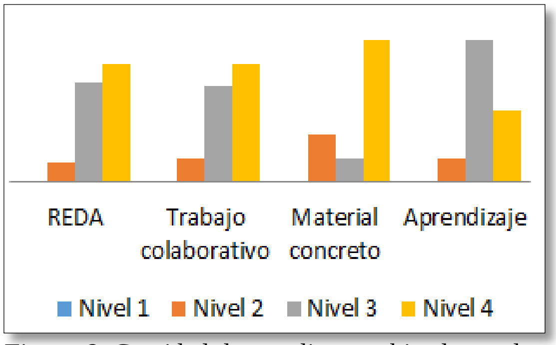


Figura 8. Cantidad de estudiantes ubicados en los niveles de desempeño después de aplicar la rúbrica de autoevaluación de la situación tres

mismo los estudiantes consideraron que asumieron su rol en los grupos de trabajo y no interfirieron en el trabajo de los demás, adicionalmente de aportar ideas al grupo. En esta categoría algunos se ubican en los niveles 1 y 2 indicando que no asumieron su rol e interfirieron en el trabajo, además de no aportar ideas al grupo.

En torno al material concreto casi todos los estudiantes se ubican en los niveles 3 y 4 lo cual indica que sintieron interés y motivación por las actividades presentadas con él, además reconocieron que éste favoreció mediana o considerablemente en su aprendizaje en torno a la comprensión de la fracción como parte-todo.

Por otra parte, considerando la categoría de aprendizaje; hay una dispersión de los estudiantes entre los niveles 2 a 4, con mayoría en el nivel 4, esto indica que algunos estudiantes consideran que demostraron cierta comprensión del concepto de fracción como parte-todo; que algunos demostraron buena comprensión, y la mayoría relativa una excelente comprensión (nivel 4). Es importante resaltar que en la última situación que se implementó en el aula, ninguno de los estudiantes marcó el nivel uno y la mayoría de los estudiantes se ubicaron entre los niveles tres y cuatro, lo que quiere decir que la mayoría de los estudiantes sintieron gran interés y motivación por las actividades presentadas en los REDA y el material concreto, reconociendo que favoreció considerablemente su aprendizaje. Además, los estudiantes en esta situación consideraron que asumieron un rol en los grupos de trabajo y que aportaron ideas al grupo; por otro lado ellos consideran que demostraron una buena comprensión del concepto de fracción como parte-todo.

PaP-eRs de los Resultados de las Narraciones de los Diarios de Trabajo

Un instrumento adicional para recolectar información de lo vivido en las sesiones de trabajo fue el diario de trabajo, este fue construido en un texto el cual contiene hechos relevantes de las sesiones de clase y los resultados que se obtuvieron de un instrumento llamado "evidencia de aprendizaje para la situación"; el cual es un especie de taller que los estudiantes diligenciaron a medida que se desarrolló la clase. A continuación se presentan el texto resultado de los diarios de trabajo de las situaciones didácticas.

PaP-eRs uno: diario de trabajo situación didáctica uno. Uno de los propósitos de la sesión de clase fue que los estudiantes interactuaran con material concreto; éste es un cuadrado de cartulina de 12 cm de lado y con su manipulación evidenciaran que un todo se puede partir en partes iguales (dos y cuatro) y se familiarizaran con la notación fraccionaria.

Figura 9. Estudiantes dividiendo un cuadrado en dos o cuatro partes iguales

Cada estudiante dividió el cuadrado en dos partes iguales o cuatro partes iguales. Ya realizadas las divisiones pintaron "una de las cuatro partes" o "una de las dos partes". Aquí se dijo, en vez de "un medio" o "un cuarto", se dirá "una de dos partes" y "una de cuatro partes"; posteriormente se solicitó rotular cada parte con el correspondiente símbolo matemático $\frac{1}{2}$ o $\frac{1}{4}$ (ver Figura 9).

La rondas de aprendizaje permitieron evidenciar que las divisiones que realizaron los estudiantes las hicieron en partes iguales, tal y como se solicitó; y respecto a las formas de hacer la transición al decir "un medio" y "un cuarto" por "una de dos partes" y " una de las cuatro partes", no presentaron dificultad.

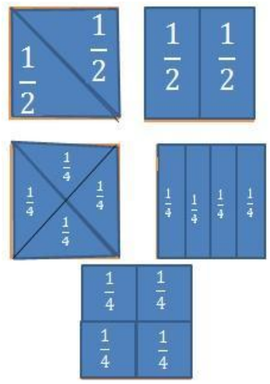


Figura 10. Cinco resultados de los plegados hechos por los estudiantes

Posteriormente, se realizó la pregunta ¿Cuántas partes del todo se pintó?; la respuesta coral, fue "una". Se procedió a que pintaran las demás partes y rotularan con $\frac{1}{2}$ o $\frac{1}{4}$ según corresponda. Enseguida, se organizaron grupos de tres estudiantes y compararon sus soluciones; las cuales pueden ser cinco (ver Figura 10).

Se encontró, que un estudiante propuso una división diferente, donde se generaron 4 partes, pero no iguales. Se realimentó al estudiante preguntándole si estas partes obtenidas a través de sus dobleces eran iguales. Se le dijo, que sí, es una fracción, pero los dobleces no representan 1/4 (una parte de cuatro).

Posteriormente, se solicitó recortar los dobleces de los cuadrados y se realizaron las preguntas siguientes:

¿Cuántas partes obtuvieron?; respondieron "dos y cuatro". Posteriormente, se solicitó pegar las cuatro partes en el tablero formando "el todo". Un estudiante pegó las partes separadas; ante esto se preguntó a la clase si es correcto, a lo que respondieron que "no"; el estudiante razonó y se da cuenta del error. Una vez corrigió, se preguntó ¿Qué se formó?, el estudiante respondió "el cuadrado". Se preguntó cuántos cuadrados, él respondió "uno".

Se formalizó esta respuesta diciendo que las partes formaron el todo, y el todo se representa con el número natural 1.

Enseguida, se preguntó a la clase ¿Cuántas partes formaron el todo?, respondieron "cuatro". ¿En cuántas partes se dividió el todo?, respondieron "en cuatro partes". ¿Para formar el todo, cuantas partes necesito?, respondieron "cuatro". Entonces, se escribió en el tablero " $\frac{1}{4}$ reunido con $\frac{1}{4}$ reunido con $\frac{1}{4}$ reunido con $\frac{1}{4}$ forma el todo, forma 1 cuadrado".

Se dijo que en símbolos matemáticos se podría cambiar la palabra reunido. Y enseguida se preguntó ¿cuál símbolo piensan?, un estudiante respondió con el mas (+).

Entonces, se escribió en el tablero $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$ y se preguntó a la clase ¿qué número representa el todo?; respondieron "uno". Se preguntó ¿ $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$ a que es igual, siendo que estas partes forman el todo?. Los estudiantes demoraron un poco, pero hay voces que respondieron correctamente "uno". Entonces, se dice que se escribirá $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=1$.

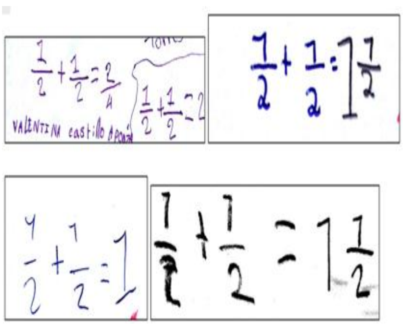


Figura 11. Resultados obtenidos por los estudiantes al ejercicio ½ + ½

Posteriormente a cada grupo se le entregó una hoja para realizar la siguiente operación $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$. Algunas respuestas fueron las mostradas en la Figura 11. Se observó que solo un grupo contestó correctamente. Se evidenció, que la operación, la realizaron con los conocimientos previos que tenían de clases anteriores, donde solo tuvieron en cuenta la simbología abstracta y no pasaron por lo pictórico y mucho menos por lo concreto, tratando de aplicar un algoritmo. No tuvieron en cuenta lo mostrado, es decir que las dos partes forman el todo y lo representa el número 1.

Por tal motivo, se realizó una realimentación, con una salida al tablero por parte de un estudiante, solicitándole que tome el todo que dividió en dos partes. Posteriormente, se le solicitó tomar una de las dos partes y pegarla en el tablero, y al mismo tiempo a un lado escribir $\frac{1}{2}$. Se pidió pegar la otra parte y escribir $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$. Después, de pegar las dos partes se preguntó ¿cuantos cuadrados se formaron?; el estudiante respondió "uno". En ese momento él se da cuenta del error que cometió en la respuesta que entregó en grupo y escribe $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$.

Luego, se propuso dividir cada parte del todo (cuatro partes), en dos partes iguales. Se preguntó ¿cuantas partes obtuvieron?, respondieron “ocho”. ¿Para formar el todo, cuantas partes necesito?; respondieron “ocho”. Se propuso entonces el ejercicio $\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=$

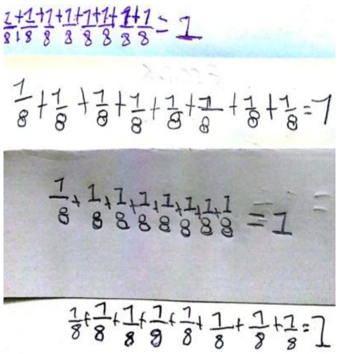


Figura 12. Resultados obtenidos por los grupos de trabajo al ejercicio de sumar ocho veces un octavo

En grupo discutieron y resolvieron el ejercicio; las repuestas fueron las mostradas en la Figura 12. Aquí se evidenció la apropiación del aprendizaje en los grupos evaluados. Entonces, hasta ahora se pretendió que los estudiantes comprendan que la reunión de las partes forma el todo, las partes para representar una fracción deben ser iguales y que el todo se representa con el número 1. Esto indicó que se ha logrado llegar a un acto de comprensión de *Identificación*, es decir que identifica las fracciones como partes de un todo y que para representarlas es necesario particionar igualmente. Además, se puede decir que se ha trabajado en el acto de comprensión de *Discriminación* dado que el estudiante determinó la relación que existe entre el número de partes del todo y el número de partes tomadas de ese todo. Así mismo, el estudiante cunado trabajó con ejercicios en que observó que la unión de las partes forman el todo y que lo puede representar con la simbología matemática, entonces ha trabajado con el acto de comprensión de *Generalización*.

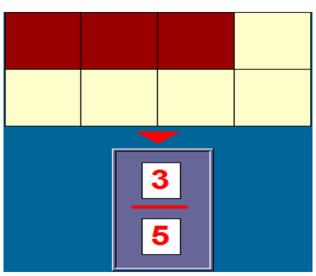


Figura 13. Ejercicio realizado por un grupo de estudiantes en el REDA

Por otra parte, se reforzó este aprendizaje a través del REDA llamado manipulador virtual de fracciones (Anexo 15), con el cual se evidenció un error cuando se realizaba uno de los ejercicios, este se muestra en la Figura 13, en el cual se preguntó, cual fracción representa la parte no coloreada (blanco). Este REDA, permitió realimentar al estudiante con ejercicios adicionales que coadyuvan a sobrepasarlo. En las rondas de aprendizaje realizadas, se realimentó esta situación proponiendo preguntas como ¿el todo en cuantas parte está dividido?, ¿el todo cuantas partes tiene?. Estas dos preguntas las resolvió bien el estudiante (Respuesta del estudiante: ocho). Adicionalmente se preguntó ¿Cuantas partes de ese todo están pintadas?, el estudiante respondió “tres”. ¿Tres de cuantas partes? se preguntó, el estudiante respondió “ocho”. Ya con estas respuestas, él corrige en el manipulador virtual.

El aplicativo permitió que los estudiantes ejerciten en la escritura de las fracciones y cuando la escriben mal él les informa del error. Se repitió en varias ocasiones que leyeran la instrucción, dado que a veces se debía representar la fracción coloreada y a veces la no coloreada. El ejercicio se realizó por un espacio de media hora y constantemente se realizaron las rondas de aprendizaje realimentando y apoyando en busca de llegar al acto de comprensión de *Generalización*, en el cual él debia llegar a comprender que en la simbología matemática $\frac{a}{b}$, b es el todo y a es un numero de partes de ese todo.

Otra actividad adicional con un REDA diferente (Figura 14), busco reforzar que el todo puede ser dividido en varias partes y que la reunión de ellas forman el todo, acto de comprensión de *Generalización*. Se propuso a los estudiantes preguntas como ¿el todo zapote, cuántas partes tiene? y ¿con cuántas partes formo el todo?. Los estudiantes de manera coral respondieron “ocho” a ambas preguntas. La misma situación se presentó con el todo pintado de color verde, azul y morado.

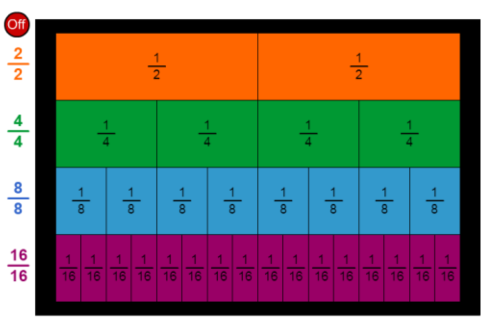


Figura 14. Ejercicio propuesto con REDA

Adicionalmente, se realizaron algunas equivalencias, haciendo preguntas como ¿el todo pintado de zapote, es igual o diferente al todo pintado de verde?. La respuesta en forma coral fue “igual”. Se preguntó ¿una parte de dos, a cuantas partes de cuatro equivalen?; se escucharon pocas voces diciendo “dos”. Se preguntó de nuevo ¿una parte de dos, a cuantas partes de ocho equivalen?; se escucharon pocas voces respondiendo “cuatro”. Posteriormente, se concluyó en el tablero que $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$ y $\frac{1}{2} = \frac{4}{8}$. Así mismo, con el aplicativo los estudiantes observaron que el todo son también dos partes de dos, cuatro partes de cuatro, ocho partes de ocho y se concluyó en el tablero $\frac{2}{2} = 1, \frac{4}{4} = 1\ y\ \frac{8}{8} = 1$. Estos ejercicios en el REDA también permitieron reforzar el acto de comprensión de *Generalización*, dado que se trabajó en la unión de las partes de un todo y adicionalmente se representó con la simbología matemática.

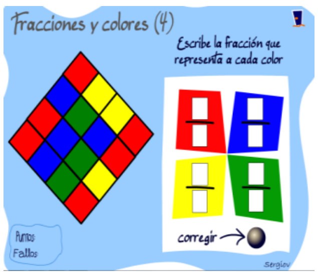


Figura 15. REDA con ejercicio propuesto en clase

Por último, se realizó un proceso de ejercitación adicional manipulando el REDA (Anexo 18), en él los estudiantes determinaron la expresión que representa la fracción coloreada de un cuadrado; que el aplicativo lo propone aleatoriamente (ver Figura 15). Las rondas de aprendizaje permitieron observar la apropiación de los estudiantes ante el manejo del REDA y el entendimiento de la expresión matemática que representa cada uno de los colores; es así que en este proceso de ejercitación se trabajó el acto de comprensión de *Generalización* dado que el estudiante comprende en la simbología $\frac{a}{b}$, que b es el todo y a es el número de partes de ese todo.

PaP-eRs dos: diario de trabajo situación didáctica dos. Se realizó un reconocimiento de saberes previos en relación a lo aprendido en la situación uno, para ello se preguntó ¿el todo con qué número natural se representa?, se obtuvo una respuesta coral “uno”; ¿qué se obtiene al unir las partes del todo?, respondieron coralmente “el todo otra vez”.

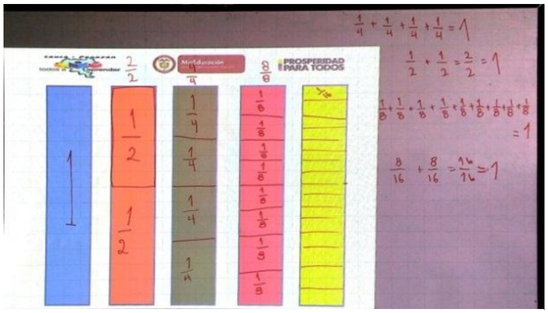


Figura 16. Diapositiva para representar cinco unidades y particionarla en dos, cuatro, ocho y 16 partes.

Posteriormente, se presentó una diapositiva con cinco unidades (Figura 16). Se dijo que la tira azul representará el todo, y se preguntó ¿con que número la etiquetamos?, ¿Cuántas tiras tenemos? y ¿Cuántas unidades tenemos?. Las respuestas fueron respectivamente “uno”, “cinco” y “cinco”.

Se dijo, que tomaremos la unidad o el todo (naranja) y se partirá en dos partes iguales. Se preguntó, ¿cómo rotulo o etiqueto estas dos partes?, respondieron “uno de dos, dos de dos”. Se realimentó, por cuanto “dos de dos” es la cantidad de piezas. Se preguntó ¿cuántas partes tenemos?, respondieron “dos de dos” y se escribió en el tablero arriba de cada tira (ver Figura 16). Adicionalmente, se escribió $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=$ y se preguntó, ¿cuál será el resultado?; los niños respondieron, 1. Se indicó también que $\frac{2}{2}$; por tanto 1 y $\frac{2}{2}$ es lo mismo. Se escribió en el tablero $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{2}{2}=1$. Este mismo procedimiento se realizó con cada tira y resultó que los estudiantes comprendieron que cada parte es una de las cuatro, o una de las ocho, o una de las 16 del todo. Este ejercicio permitió observar actos de comprensión de *Discriminación*, por cuanto se determinó la relación entre el número de partes del todo y el número de partes tomadas de ese todo, a su vez los estudiantes observaron, como la unión de las partes del todo forman el todo y esta relación se representa simbólicamente.

Una vez realizado el ejercicio anterior de la partición de un todo, se explicó el juego llamado Equipo de las Fracciones, el cual se ejecutó con el material concreto mostrado en la figura 3. El fin del juego es cubrir un todo, que en este caso es una tira rotulada con el número uno, con fichas rotuladas con los símbolos $\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\frac{1}{16}$; cada grupo tiene un turno para tirar el dado de las fracciones; la cara del dado que quede encima, dice que tamaño de pieza (ficha) a colocar sobre la tira completa; el grupo debe sacar lo que necesita exactamente, no puede utilizar una ficha más grande, no se puede superponer. Si un grupo solo necesita una ficha para ganar como por ejemplo $\frac{1}{8}$ o $\frac{1}{16}$, las fichas $\frac{1}{2}$ o $\frac{1}{4}$ no le servirán.

Figura 17. Lanzamiento uno con el dado de las

Una vez comenzó el juego, en un cartel se escribieron los resultados obtenidos después del primer lanzamiento (ver Figura 17). Se preguntó, ¿quién va ganando de los grupos?, se evidenció que todos comprendieron que quien tiene $\frac{1}{2}$ va ganando, por cuanto ocupa más espacio en la tira. Esto mostró el reconocimiento que $\frac{1}{2}$ es mayor que $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$ y $\frac{1}{16}$. Dada esta comprensión, se tomó la decisión de preguntarles el orden de acuerdo al tamaño de las fichas. Los estudiantes determinan el orden correcto; lo cual fue señal que el material concreto es apoyo para establecer la relación de orden correcta y se puede decir que mostraron evidencias de alcanzar un acto de comprensión de *Discriminación*, por cuanto determinan la relación de orden entre dos o más números. Aquí se aprovechó para señalar, que a pesar que el número que aparece abajo de la raya es mayor, no implica que la fracción sea mayor.

Posteriormente, los grupos lanzan el dado nuevamente, obteniendo los resultados mostrados en la Figura 18. El grupo uno dijo haber ganado; se preguntó ¿cuantas fichas de $\frac{1}{2}$ tienen? a lo que respondieron "dos". Se evidenció aquí, que los estudiantes comprendieron que el todo está formado por dos de $\frac{1}{2}$. Enseguida, se escribió en el tablero $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$ y se preguntó al grupo ¿qué resultado se obtiene?, si como ellos dicen, se completó la tira. Ellos indicaron que "el todo". Se preguntó, ¿cuantas fichas taparon el todo?,

Figura 18 Lanzamiento dos con el dado de las fracciones.

respondieron “dos”. Entonces se escribió $\frac{2}{2}$ y posteriormente se les preguntó ¿qué número representa el todo?, respondieron con el 1). En el tablero resultó lo siguiente de ésta sucesión de preguntas: $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{2}{2}=1$. Se evidenció aquí, un acto de comprensión de *Generalización,* por cuanto los estudiantes mostraron cierta apropiación, que la unión de las partes forma el todo y ésta se representa mediante una simbología matemática.

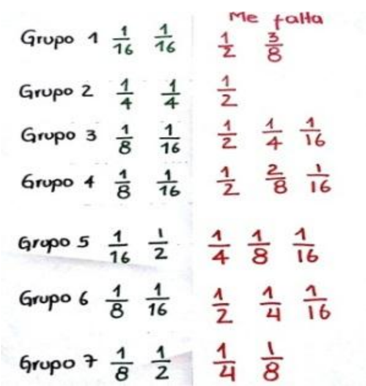


Figura 19. Respuestas de los estudiantes, a la pregunta ¿Qué fichas faltan para completar una tira?

Posteriormente, se realizó el juego de nuevo y en las dos primeras rondas se obtuvieron los resultados mostrados en la Figura 19. Se preguntó a los estudiantes ¿cuánto le falta para completar el todo o una tira?. Se fue incisivo decidiendo “1 tira – el todo”; para diferenciar el número 1 de la unidad y el 1 de la parte que se toma. Se evidenció que todos los estudiantes utilizaron el material concreto hábilmente y respondieron correctamente a la pregunta. Se escribió en un lado las fichas que enuncian asociándolas con la simbología matemática (ver Figura 19).

Enseguida, se indicó que para corroborar si está bien el cálculo que hicieron con el material concreto, se debe hacer un cálculo que consiste en verificar que la unión de esas fichas da el todo, para ello se plantea la suma con las fichas del grupo 4 (ver Figura 20). Se preguntó a los estudiantes ¿si son correctas las fichas que eligieron, ¿qué resultado debe dar esta suma?, los estudiantes tuvieron claro que es 1 el resultado.

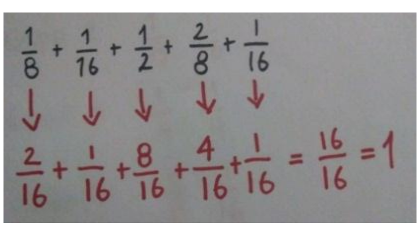


Figura 20. Ejercicio con fichas del grupo 4

A continuación, se realizó un ejercicio con los estudiantes donde se orientó, con ayuda del material concreto, la manera de comprobar la solución, es decir si la suma de sus fichas es 1. Para ello, primero escribieron cada ficha en términos de la más pequeña (ver Figura 20). Este procedimiento resulto de fácil comprensión y se evidencio la potencia de utilizar el material concreto. Los estudiantes por ejemplo comprendieron que dos fichas de $\frac{1}{16}$ se puede escribir como $\frac{2}{16}$. Cada grupo debió realizar el ejercicio con las fichas que obtuvo y además calcular que le falta para completar el todo. En la participación coral se pensó que se está claro, pero a la hora de enfrentarse ellos solos a esta equivalencia y suma, no fue fácil. Se realizaron las rondas de aprendizaje por los grupos apoyando este ejercicio. Para ello, se utilizó el material concreto, por cuanto algunos grupos lo estaban obviando para este trabajo. Una vez se explicó con el material concreto no hay dificultad.

Se realizaron dos rondas más, y uno de los grupos afirma haber ganado. Se hizo la verificación en el tablero con los estudiantes. Las fichas para hacer la prueba son las siguientes: $\frac{1}{6}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}\, \frac{1}{16}$. Se preguntó ¿cuánto debe ser el resultado, si el grupo ha ganado?. Los estudiantes en su mayoría participaron con respuesta 1. Se planteó la suma en la cartelera ($\frac{1}{6} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}$) y se realizaron preguntas como ¿cuál es la ficha más pequeña?, ¿Cuántas fichas de $\frac{1}{16}$ caben en la de $\frac{1}{2}$?, ¿cuántas fichas de $\frac{1}{16}$ caben en la de $\frac{1}{8}$?, ¿cuántas fichas de $\frac{1}{16}$ caben en la de $\frac{1}{4}$?

Estas equivalencias las realizaron con el material concreto y a medida que van respondiendo se colocan debajo de cada número fraccionario. En este momento se dijo que $\frac{1}{16}$, que es la ficha más pequeña, será el MCM de los números 2, 8, 4 y 16, porque todos caben en el 16. El ejercicio queda como

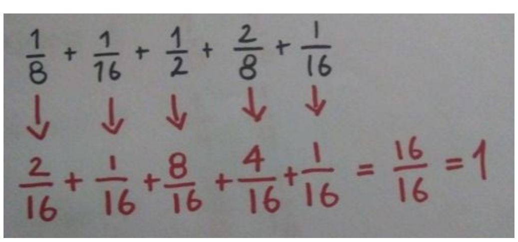


Figura 21. Ejercicio tomado del tablero, verificando si la suma es 1

lo muestra la Figura 21. Se preguntó además que ¿la tira o el todo cuantas fichas de $\frac{1}{16}$ tiene?. Los estudiantes en su mayoría respondieron 16. Se preguntó ¿cuantas fichas de $\frac{1}{16}$ tienen?, respondieron 16. Entonces se dice que se ha formado el todo y han ganado.

La idea fue que los estudiantes comprendieran una parte del todo se puede dividir también y que el todo, entonces, puede cambiar, esta idea se preguntó en la actividad final de clase. Otra idea que quiere se entienda, es que la unión de las partes hacen el todo, y esto lo comprendan con el material concreto-pictórico, y pasar a la abstracción a través de los números fraccionarios y la suma. Los números fraccionarios equivalentes no han sido nombrados aun así, pero es un inicio para adentrarse en ellos. Así mismos como se trabajó con fichas del mismo tamaño, se intentó hacer ver que el todo puede estar dividido en partes no iguales, pero esas partes se pueden dividir de tal manera que obtenemos fracciones de igual denominador que se pueden sumar sin problema, y que entiendan más adelante porque no se suman numeradores con numeradores y denominadores con denominadores.

Lo anterior muestra actos de comprensión desde la identificación, la discriminación hasta la generalización, por cuanto los estudiantes tuvieron la oportunidad de ver que las fracciones son partes de un todo, y que una parte de un todo puede convertirse en un todo, a su vez que la unión de esas partes iguales forman el todo y se simboliza de una manera particular.

Al mismo tiempo que se realizó el juego, los estudiantes respondieron en un instrumento (Anexo 5) para observar el nivel de aprendizaje que están alcanzando, además de las preguntas orales y la evaluación formativa que se aplicó a través del apoyo a dificultades y realimentación oportuna; los resultados se encuentran en el apartado que sigue a continuación.

PaP-eRs tres: instrumento evidencia de aprendizaje situación dos. En el transcurso de las sesiones para la situación dos, se aplicó un instrumento por grupos de trabajo en el cual los estudiantes consignaron sus respuestas para así observar los aprendizajes que se están alcanzando en cada actividad (ver Anexo 5). El instrumento constó de 13 preguntas abiertas que se respondieron en el transcurso de la clase con apoyo del docente; a continuación se presentan las respuestas de este insumo.

A la pregunta uno ¿cómo puedo partir un objeto en partes iguales?; un grupo respondió "tomar la medida", "dividiéndolo en partes iguales", "en 2 partes iguales" y "midiéndolo" en tres grupos. Esto indicó que muestran un acto de comprensión de *Identificación*, por cuanto consideraron los estudiantes que es necesario medir para lograr partes iguales, que solo partir el objeto no basta, además en sus textos utilizan categorías para el concepto de fracción como "partir" e "iguales". Por otro lado, el material concreto permitió que comparen las fichas de la misma etiqueta y determinen u observen que ellas eran iguales.

A la pregunta dos ¿Al unir las partes iguales en que se partió un objeto, que resultado tengo?; los grupos respondieron; "el todo", "una unidad", "tengo el resultado 1", "se forma un todo". Dos de los grupos respondieron "nos da una fracción, al unirlas" y "se parten en dos partes iguales a todo". Esto indicó que cuatro de los seis grupos identificaron que la reunión de las partes forman el todo y reconocieron el todo como la unidad o el número uno. Por otra parte, uno de los grupos determinó, una fracción como un todo y el otro se refirió a un caso específico, cuando partimos el todo en dos partes iguales y luego se reúnen para formarlo, sin embargo se reconocieron categorías gramaticales como "partes" e "iguales", necesarias a la hora de comprender el concepto de fracción. Se concluyó que la mayoría de los grupos comprendieron que cuando se une las partes iguales, forma el todo. Además se evidenció que relacionaron el 1 con el todo, además asociaron el nombre unidad con un número, que significa un acto de comprensión de *Identificación* por cuanto se manifiesta que la unión de las partes forman el todo y lo representa con la simbología matemática.

Siguiendo con la pregunta tres, ¿las fichas están etiquetadas de una forma particular, qué significan los números?; los grupos respondieron que "el 1 significa que tomo una de dos, el 2 significa la mitad del todo", "el 1 significa que es un entero, el 2 significa en dos partes iguales", "significan que forman un todo", "el numerador es la parte que quito del denominador", "los números significan 4 de 1". Estas respuestas evidenciaron que existen dificultades aun para relacionar el numerador y el denominador con el símbolo matemático de la fracción; solo uno de los grupos respondió que el numerador es lo que tomo del todo y otro grupo reconoció que el denominador es las partes iguales en que se divide el todo, es así que se evidenció que no existe generalización del concepto tratado; se habló de forma particular de un número, con una etiqueta particular. Se evidenció además, que en el caso de aparecer el número 1 en una fracción, la asocian a la unidad o al entero como dicen ellos. Es así que, no discriminaron el número 1 del todo y el 1 de una parte del todo. Es necesario advertir que los estudiantes tuvieron dificultades en crear textos continuos explicativos para dar razón a las respuestas, son más hábiles a la hora de hacerlo oralmente

Con respecto a la pregunta cuatro ¿Qué relación existe entre los pedazos con la tira entera?, los grupos respondieron: "la relación es la unión para formar el todo", "con esos se puede formar un entero", "forman fracciones", "que la tira es un todo y los otros se reparten en partes iguales", "con eso se forma un entero" y "relaciona $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$". Se esperó que contestaran: la reunión de las partes forman el todo. Esto se reflejó explícitamente en cuatro respuestas donde relacionaron un objeto con el todo o la unidad y los pedazos con fracciones.

Con relación a la pregunta cinco ¿si sacan la fracción $\frac{1}{4}$ y necesitan $\frac{1}{8}$, por qué piensa que está no servirá? ¿Qué puede decir del tamaño de las piezas? ¿Cómo se diferencian?. Los grupos respondieron: "$\frac{1}{4}$ es más grande que $\frac{1}{8}$", "son diferentes por el tamaño", "$\frac{1}{4}$ es más largo que $\frac{1}{8}$ y se puede complementar más rápido”, “se diferencian por que el de $\frac{1}{4}$ es más grande”, “es el doble y se pasa”. Se evidenció que establecieron una relación de orden a través del tamaño de las piezas con adjetivos como grande o largo, además establecieron una relación de *ser el doble* que se considera muy buena por cuanto el manipular con objetos concretos permitieron visualizar estas relaciones.

La pregunta siete ¿Si la tira se rompe en cuatro partes iguales, entonces cuantos pedazos necesitan para hacer la tira? fue respondida por los estudiantes de la siguiente manera: “necesitan 4 partes iguales”, “necesitamos 4 pedazos”, “4 pedazos iguales” “4 pedazos”, “necesitan 4 partes iguales para formar la tira”, “necesitan 4 pedazos”, lo que evidenció una comprensión total de que la reunión de las partes del todo, forma el todo. Esto mostró una alta apropiación del acto de comprensión de *Generalización*, por cuanto comprendieron que la unión de las partes de un todo, forman el todo.

Se sigue la pregunta nueve, referida a que un grupo afirmó que gano con las fichas $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ y $\frac{1}{8}$ y se pidió comprobar la solución; las respuestas de los grupos se observan en la Figura 22. La mitad de los grupos respondieron de forma correcta, dos de ellos realizó la suma de fracciones, convirtiéndolas en fracciones homogéneas, realizando las equivalencias con el material concreto e inclusive son conscientes que no se formó la unidad. El otro grupo también consideró errónea la solución por cuanto no les dio el todo o la unidad y sugirieron una solución, la cual es correcta. Los otros dos grupos; uno de ellos realizó una suma erróneamente y el otro asumió que esa suma es “uno” sin comprobar la solución, quedando en

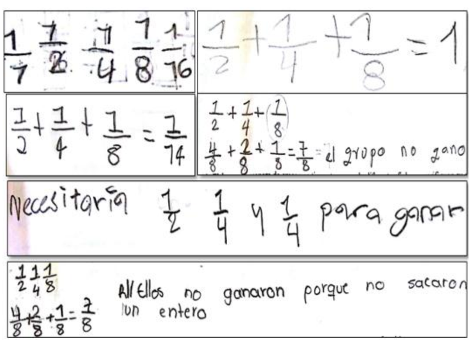


Figura 22. Respuestas de los estudiantes pregunta nueve

evidencia, la no apropiación aun, de las equivalencias entre las fichas y que la suma de las partes deben dar el todo.

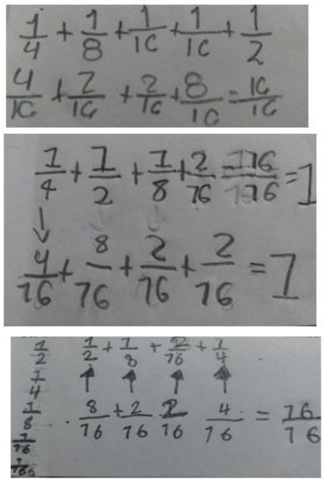


Figura 23. Respuestas de los estudiantes a la pregunta 10

La pregunta 10 tuvo que ver con que cada grupo elaboró una manera de crear una tira entera usando diferentes fichas y debieron verificar la solución. Las soluciones propuestas de los grupos se muestran en la Figura 23. *Los* grupos demostraron una alta apropiación en el ejercicio, se evidenció que entienden cuál es el número de fichas para formar el todo y realizaron las sumas correctamente convirtiendo las fracciones en homogéneas; esto indicó un acto de comprensión de *generalización* que cuando es apoyado de material concreto se hace más evidente; la transición de lo concreto a lo abstracto permitió un entendimiento más eficaz de los procedimientos para llegar a la solución.

A continuación, aprovechando el material concreto se planteó una pregunta en relación al orden. Se quiso observar si para realizar el ejercicio los estudiantes partían las partes y de esta manera determinaban cada una de ellas en relación a la más pequeña, para organizar el orden. Es decir observar que comprendieron que las partes de un todo se pueden dividir. Se solicitó que ordenar las siguientes fracciones de mayor a menor: $\frac{3}{8}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{10}{16}$, 1, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{16}$ y $\frac{1}{8}$. Los grupos respondieron lo que indica la Figura 24; ella mostró que todos los grupos reconocen que 1 es una fracción y es la mayor, para esto los estudiantes primero hicieron equivalencias con ayuda del material concreto (ver Figura 1). Aunque se observa que las series

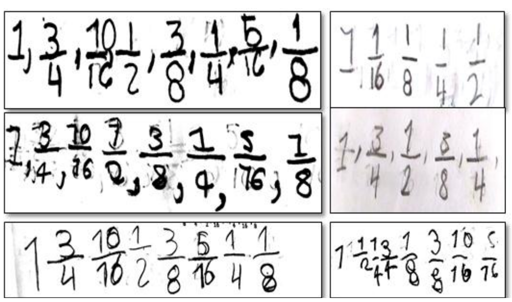


Figura 24. Relación de orden establecida por los estudiantes

no están completamente correctas, los estudiantes no utilizaron un criterio errado que es ver cual número es mayor entre denominadores y numeradores.

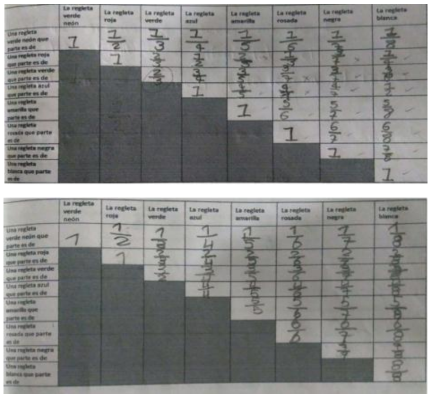


Figura 25. Tabla de registro de medición regletas de madera

Por último, en este instrumento se diligencia la tabla ayudado del material concreto Barras de Madera (ver Figura 2), donde los estudiantes realizaron un ejercicio de medición donde debían comparar el todo con una parte, dos de las tablas se muestra en la Figura 25. Esta tabla evidenció que reconocen el todo de las partes y que una parte puede convertirse en un todo, atendiendo al acto de comprensión de *Identificación*. A excepción de un grupo las respuestas fueron correctas con unos pocos errores. Se evidencio que compararon las dos regletas en cada fila, en términos de la más pequeña, pero eso estuvo bien, este puede ser buen comienzo para razones.

A continuación, se preguntó a los estudiantes que según la tabla, ¿cuál o cuáles regletas representan el todo?; la idea es determinar si ellos relacionan que el todo se representa con el número 1, entonces deberían haber afirmado que hay varios unos (1), que cual escogían. Algunos grupos escogieron la blanca porque es la más grande. Esta fue una pregunta compleja, dado que en cada comparación de dos regletas una representaba el todo. En la pregunta se preguntó cuál o cuáles, dando a entender que podía haber varia opciones.

Por último se preguntó a los estudiantes que aprendieron hasta el momento; se dan respuestas relevantes como “el todo se representa con el uno y aprendimos de las fracciones”, “aprendimos como partir el todo en pedazos iguales, y algo que palpemos”, “si sumamos los fraccionarios hay que medir las figuras”, “aprendí que puedo partir en partes iguales”. Claramente se ha logro el objetivo en algunos grupos de estudiantes, dado que se encuentran categorías como partir en pedazos iguales un todo, el todo se representa con el número uno. Se evidenció aquí la presencia de varios actos de comprensión, de *Identificación*, por cuanto escriben que hay que partir en partes iguales y de *Generalización* porque enuncian que el todo se representa con el número uno.

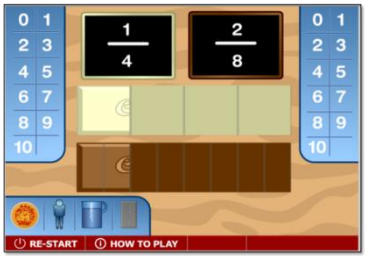


Figura 26. Ejercicio con REDA

Para realizar el proceso de ejercitación se apoyó en el REDA (Anexo 17) con el cual los estudiantes tuvieron la oportunidad de comparar la parte con el todo en diferentes representaciones. Los estudiantes realizaron ejercicios con el aplicativo con el cual determinaban equivalencias como la mostrada en la Figura 26, donde ellos observaban por ejemplo que $\frac{1}{4}$ (una de cuatro partes del todo) es igual a tomar $\frac{2}{8}$ (dos de ocho partes del todo). Se evidencio en la mayoría de los grupos la motivación a realizar más ejercicios propuestos por ellos mismos y una apropiación alta del aprendizaje propuesto, esto beneficio considerablemente para afianzar en el acto de *Identificación*, como lo es, identificar que una fracción puede ser representada en un todo de diferentes maneras.

PaP-eRs cuatro: diario de trabajo en la situación tres. En el transcurso de las sesiones de la situación tres se enfatizó en las medidas en discreto; para ello se utilizó en primera instancia un material concreto (galletas) para que los estudiantes realizaran repartos. Se planteó un problema donde ellos debieron repartir 16 galletas entre 4 compañeros y representarla por medio de un arreglo.


Figura 27. Arreglos mostrados por dos grupos en el problema de las galletas

Los grupos optaron por arreglos en filas, otros en columnas y en agrupaciones como la Figura 27, que apoyaron respuestas correctas a reparticiones y las representaron simbólicamente como $\frac{4}{16}$ (cuatro de dieciséis). Este problema fue representado de manera pictórica por los grupos, aquí se evidenció la apropiación de pasar de lo concreto a lo pictórico y a la abstracción del símbolo matemático (ver Figura 29), mostrando un alto desempeño en el acto de *Identificación*, por cuanto identificaron que las fracciones son partes de conjuntos y que para representarlas es necesario hacer una partición o reparto igual.

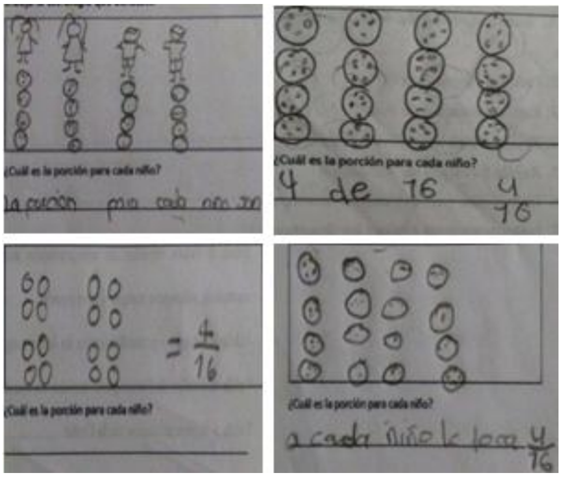


Figura 29. Arreglo pictórico del reparto de las galletas realizada por cuatro grupos

Posteriormente se presentó un REDA llamado visualizador de fracciones (Anexo 14). En este manipulativo virtual los estudiantes escribieron en una caja de texto la fracción que representa las galletas cuadradas del total o también la fracción de galletas redondas del total, tal y como lo muestra la Figura 28. Esta actividad de ejercitación se evaluó con las rondas de aprendizaje en las cuales se apoyó y realimentó a los grupos en las dificultades que se observaran. En el ejemplo propuesto en la Figura 28 algunos estudiantes escribieron $\frac{2}{5}$ en vez de $\frac{3}{5}$, error que es común pero no grave, como el que se presentó anteriormente cuando ante el mismo ejercicio escribieron por ejemplo $\frac{3}{2}$ o $\frac{2}{3}$, lo cual indicaba que no reconocían que el todo lo comprenden cinco partes. El superar esta dificultad indicó que el estudiante determina la relación entre el número de partes del todo y el número de partes tomadas de ese todo, acto de comprensión de *Discriminación*.

Figura 28. Ejercicio realizado con el REDA

Por otro lado se realizó otro procedimiento de ejercitación con unos REDA adicionales (ver Anexo 13 y Anexo 18), con los cuales los estudiantes relacionaron el numerador y el denominador en un contexto de parte todo; aquí por ejemplo de un conjunto de tres manzanas, seleccionaron dos de ellas cambiándolas de color, a la vez el manipulativo hace el conteo y les mostró la fracción que se representa, que para el caso fue $\frac{1}{3}$. Cada vez que el grupo de estudiantes terminan un ejercicio, la aplicación propone otro diferente. Más adelante, los estudiantes se enfrentaron a otro ejercicio de arrastrar para relacionar trozos de naranja según el color, fue un ejercicio similar al anterior donde se expresa el símbolo matemático que muestra la situación parte-todo. Es así que las rondas de aprendizaje realizadas permitieron evidenciar una apropiación en el manejo del REDA y en la expresión que relaciona la parte con el todo, se puede decir que la totalidad de los grupos de estudiantes comprendieron la relación entre numerador y denominador en las situaciones planteadas por el REDA, mostrando alcanzar actos de comprensión de *Discriminación* dado que relaciono el número de partes del todo y el número de partes tomadas de ese todo.

En la situación 3 se utilizó adicionalmente un instrumento (Anexo 6) con el cual los estudiantes registraron las respuestas en grupos a medida que transcurría la clase, apoyados del material concreto (Figura 3) y la realimentación del docente en las rondas de aprendizaje según fue necesario para hacer realimentación.

En primer lugar se preguntó como ellos podían determinar que parte de los círculos son de un color particular (Blanco-Rojo-Azul) de un total de 13 círculos. Ante esta pregunta respondieron "hay blancas 4 de 13 y rojas hay 4 de 13 y azules hay 5 de 13"; "hay que saber cuántos colores hay y todo el número de todo el grupo"; "los blancos cuatro de trece; rojos cuatro de trece y los azules cinco de trece". A este respecto se evidenció que los estudiantes reconocieron el todo como los 12 círculos y la parte como el número de ellos pintados de un color diferente, siendo evidente una alta apropiación en el acto de *Discriminación* por cuanto determinaron la relación entre el número de partes del todo y el número de partes a tomar de ese todo.

Por otro lado, las preguntas dos, tres y cuatro, que preguntaban la cantidad del total de círculos de cada color y como se escribe en forma de fracción; los estudiantes respondieron correctamente escribiendo la fracción que corresponde a cada color y graficaron esta representación como lo muestra la Figura 30. Lo cual indicó que los estudiantes se apropiaron del acto de comprensión de *Generalización* dado que hicieron traducciones entre diferentes sistemas de representación.

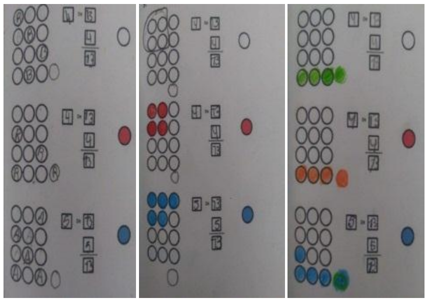


Figura 30. Representación pictórica del arreglo de los círculos de colores

Por último se realizó una prueba de desempeño (Anexo 7) en el que se vieron enfrentados a preguntas relacionadas con las situaciones de la clase con medidas en discreto. Los desempeños encontrados fueron los mostrados en la Figura 31. Esto indicó que de las ocho preguntas planteadas la mayoría de los estudiantes respondieron al menos la mitad en forma correcta, lo que corresponde al Nivel 2. Los restantes tuvieron una o ninguna pregunta errada, demostrando una alta apropiación de la representación de la fracción como parte-todo en medidas en discreto.

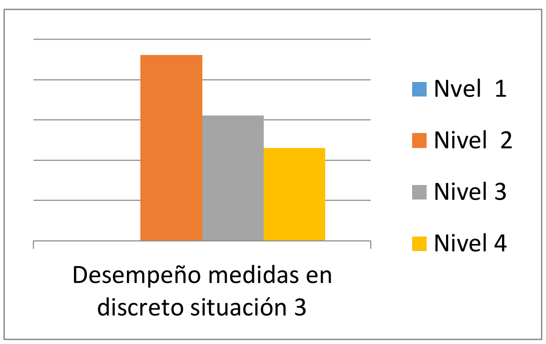


Figura 31. Cantidad de estudiantes en los niveles de desempeño según prueba (Anexo 7)

Conclusiones y Reflexiones

Emplear el Conocimiento Didáctico de Contenido, específicamente la CoRe, como instrumento metodológico para el diseño de una Situación Didáctica, fue una estrategia de gran importancia por cuanto invitó a reflexionar en torno al ¿Cuándo? ¿Cómo? ¿Qué? y el ¿por qué? del proceso de enseñanza-aprendizaje. En consecuencia, surgió la importancia de reconocer los saberes previos de los estudiantes, sus intereses y necesidades, el uso de REDA y material concreto que facilitó el aprendizaje y la forma de hacer entendible el conocimiento a los estudiantes.

Adicionalmente, en la construcción de la CoRe, se evidenció que el manejo de material concreto es un excelente punto de partida para iniciar con los estudiantes el estudio del concepto de fracción como parte-todo, es así que a la hora del diseño de las Situaciones Didácticas es necesario a tener en cuenta. En este mismo sentido, implementar la CoRe en el diseño de las Situaciones Didácticas, permitió que los estudiantes desarrollaran actividades en el aula que llevaron a alcanzar paulatinamente una comprensión, cada vez más clara, del tópico en estudio. Dado que, la CoRe posee un carácter específico para este grupo de estudiantes, ella encaminó el uso de estrategias pertinentes para alcanzar el aprendizaje de la comprensión del concepto de fracción como parte-todo; evidenciado en los resultados arrojados por los instrumentos de evaluación de las Situaciones Didácticas.

Las Situaciones Didácticas diseñadas contribuyeron a consolidar la comprensión de la fracción como parte-todo; ya que en éstas se diseñaron e implementaron actividades que involucraron material concreto permitiendo que los estudiantes manipularan objetos reales que representaban objetos abstractos. Dar la oportunidad a los estudiantes que interactuaran con material concreto, como medio para la comprensión de la fracción, permitió que relacionaran el símbolo matemático con objetos palpables así como su representación pictórica.

El uso de los REDA contribuyó a que los estudiantes tuvieran una visión más clara y dinámica de las representaciones de la fracción como parte-todo tanto en medidas continuas como discretas. Permitieron que los estudiantes exploraran, descubrieran y analizaran; de este modo realimentaron el conocimiento adquirido en las Situaciones Didácticas en las cuales interactuaron con material concreto.

De este modo, los REDA seleccionados que se centraron en manipulativos virtuales, permitieron que los estudiantes relacionaran el denominador y el numerador en un contexto de parte-todo; escribieran el símbolo de la fracción que representa una cantidad de un total en contextos de medidas discretas o continuas; observaran figuras y escribieran la fracción que representa una parte coloreada o no coloreada; y relacionaran las partes con el todo en barras para que compararan equivalencias entre fracciones e incluso establecieran relaciones de orden.

Otro aspecto importante fue la organización del trabajado en forma grupal, lo cual permitió a los estudiantes analizar, evaluar y reformular los aprendizajes adquiridos en las Situaciones Didácticas a través de la interacción con sus compañeros, las discusiones formadas y la realimentación que se adquiría a través de las ideas de sus compañeros.

Como se mostró en el análisis de resultados, se logró establecer la comprensión del concepto de fracción como parte-todo al implementar el CDC en el diseño de las situaciones didácticas con el apoyo de REDA y material concreto. Es así como la mayoría de los estudiantes mostraron una evolución gradual en el nivel de aprendizaje evidenciado en el contraste de la caracterización inicial y final (ver Figura 5), además del desempeño mostrado en los resultados arrojados por el instrumento para evaluar cada situación didáctica (ver Figura 6)

Así mismo, se encontró a través de los instrumentos para recoger evidencias de aprendizaje (Anexo 5 y Anexo 6) y el diario de trabajo (Anexo 12) que los estudiantes alcanzaron actos de comprensión como la *Identificación* dado que comprendieron que las fracciones son parte de conjuntos, partes de un todo y que para representarlas es necesario particionar igualmente, además comprendieron que una fracción puede ser presentada en un todo de diferentes maneras y que una parte de un todo puede convertirse en un todo. A su vez, gran parte de los estudiantes relacionó el número de partes del todo y el número de partes tomadas de ese todo, llegando al acto de comprensión de la discriminación, comprendiendo que esta relación se representa con una simbología matemática particular: a/b, donde b es el todo y a es un número de partes de ese todo.

Este trabajo de intervención pedagógica, permitió desarrollar un ejercicio mediado por la práctica reflexiva, que inició desde la construcción del instrumento de la CoRe, en donde se advirtió la necesidad de reflexionar en cada una de las actividades planteadas en las Situaciones Didácticas en aspectos como la gestión de aula, clima de aula, los aprendizajes logrados y la evaluación desde el enfoque formativo. Ya en la implementación en el aula se generaron interrogantes que permitieron corroborar la efectividad de la propuesta y que no habían sido previstas en la planificación. En la práctica de aula se generaron interacciones con los estudiantes y el docente que permitieron negociaciones entre los integrantes de los grupos de trabajo colaborativo, las cuales gracias a la evaluación formativa merecieron un espacio para la reflexión.

Esta práctica reflexiva generó cambios en la práctica de aula dado que invitó a repensar las acciones llevadas al aula; este hábito en la praxis docente, invita a cambiar las prácticas, a reflexionar sobre lo vivido en el aula y en muchos casos a mejorar, de acuerdo a los resultados obtenidos en las sesiones de clase, donde se colocaron en marcha las situaciones didácticas, permitiendo, así, validar las situaciones didácticas, los REDA y el material concreto implementados a partir de la caracterización del CDC (CoRe y PaP-eRs) sobre la fracción como parte-todo.

Referentes Bibliográficos

Acevedo, J. (2009). Conocimiento didactico del contenido para la enseñanza de la naturaleza de la ciencia (I): el marco teorico. *Revista Eureka sobre Enseñanza y Divulgacion de las Ciencias,* Volumen (6), 21-46. Recuperado de http://www.uh.cu/

Andonegui, M. (2006). *Fracciones: concepto y representación*. Caracas: Federación Internacional Fe y Alegría. Recuperado de http://scioteca.caf.com/

Andrade, L., Espitia, C., Huertas, E., Aldana E., y Bacca, P. (2012). Tocar o Mirar: Comparación de Procesos Cognitivos en el Aprendizaje con o sin Manipulación Física. *Psicología Educativa*, volumen (18), 29-40. Recuperado de http://nebulosa.icesi.edu.co

Baroody, A. (1994). *El pensamiento matemático de los niños: Un marco evolutivo para maestros de preescolar, ciclo inicial y educación especial*. Madrid: Editorial Antonio Machado

Bruner, J. (1965). *El proceso mental en el aprendizaje*. Madrid: Ediciones Narcea, S.A.

Brousseau, G. (1987). *Fundamentos y métodos de la didáctica de las matemáticas.* Recuperado de http://fractus.uson.mx/

Calderón, P. (2014). *Percepciones de los y las docentes del primer ciclo básico, sobre la implementación del método Singapur en el colegio Mario Bertero Cevasco*. (Tesis de Maestría). Universidad de Chile, Santiago.

Candela, B., y Viafara, B. (2014). *Aprendiendo a enseñar química. La CoRe y los Pa-Pers como instrumentos para identificar y desarrollar el CPC*. Universidad del Valle.

Castillo, S. (2008). Propuesta pedagógica basada en el constructivismo para el uso óptimo de las TIC en la enseñanza y el aprendizaje de la matemática. RELIME. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*. Vol. 11, Nº. 2. México.

Dedekin, R. (1997). *¿Qué son y para que sirven los numeros? , y otros escritos sobre los fundamentos de la matemática*. Recuerado de http://www.tau.ac.il

Dos Santos, P., y Carvalho, J. (2016). Materiais Manipuláveis no âmbito do Ensino de Matemática: *Revista FSA*, volumen (13), p. 4. Recuperado de http://189.43.21.151/revista/index.php/fsa/article/view/1064

Erazo, A. (2017). *Caracterización del CDC de la red conceptual: materia, mezclas y separación de mezclas, aplicada al diseño de una situación didáctica con el uso de rea*. (Tesis de maestría). ICESI, Cali.

Furman, M. (2013). *Orientaciones técnicas para la producción de secuencias didácticas para un desarrollo profesional situado en la áreas de matemáticas y ciencias*. Ministerio de Educacion Nacional de Colombia. Recuperado de http://www.colombiaaprende.edu.co/

García, I., y Cabañas, G. (2013). El concepto de fracción en situaciones de medición, división y la relación parte-todo con estudiantes de nivel medio superior. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 213-221. Recuperado de http://funes.uniandes.edu.co

Godino, J., Batanero, C., y Font, V. (2003). *Fundamentos de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas para maestros*. Granada: ReproDigital. Recuperado de http://www.ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/

Guilar, M. (2009). Las ideas de Bruner: “de la revolución cognitiva” a la “revolución cultural”. *EDUCERE Ideas y Personajes*, Volumen (44), 235-241. Recuperado de http://www.scielo.org.ve/pdf/edu/v13n44/art28.pdf

Hidalgo, H., Tenorio, G., y Ramírez, M. (2016). Atributos de innovación en el desarrollo de competencias digitales en educación básica usando recursos educativos abiertos en una comunidad rural de Colombia. *Revista de Investigación Educativa CPU*-e, volumen (22), 52-73. Recuperado de http://www.icesi.edu.co/biblioteca/bases_datos.php

MEN. (1998). *Lineamientos curriculares del área de matemáticas.* Ministerio de Educación Nacional de Colombia. Bogota: Imprenta Nacional de Colombia.

MEN. (2001). Computadores para Educar. Ministerio de Educacion Nacional de Colombia. Recuperado de http://www.computadoresparaeducar.gov.co/

MEN. (2006). *Estándares Basicos de Competencia en Matematica.* Ministerio de Educacion Nacional de Colombia. Bogota: Imprenta Nacional de Colombia.

MEN. (2009). *Fundamentaciones y orientaciones para la implementación del Decreto 1290*. Ministerio de Educacion Nacional de Colombia. Bogota: Imprenta Nacional de Colombia.

MEN. (2010). *Conozca todo sobre las pruebas Saber 3.°, 5.° y 9.°* Instituto Colombiano para el Fomento de la Educación Superior. Recuperado de http://www.icfes.gov.co/

MEN. (2012a). Programa Todos a Aprender: para la transformación de la calidad educativa. Ministerio de Educación Nacional. Recuperado de mineducacion.gov.co/

MEN. (2012b). *Recursos Educativos Digitales Abiertos*. Ministerio de Educación Nacional de Colombia. Recuperado de http://www.colombiaaprende.edu.co/

MEN. (2012c). *Secuencias didacticas en Matemáticas*. Ministerio de Educacion Nacional de Colombia. Recuperado de http://www.mineducacion.gov.co/

MEN. (2016a). Siempre Día E: Informe por colegio 2016. Resultados pruebas saber 3º, 5º y 9º. Recuperado de https://diae.mineducacion.gov.co/

MEN. (2016b). *Documento Fundamentación Teórica de los Derechos Básicos de Aprendizaje (V2) y de las Mallas de Aprendizaje para el Área de Matemáticas*. Ministerio de Educacion Nacional de Colombia. Recuperado de http://aprende.colombiaaprende.edu.co/

MEN. (2017). *Mallas de aprendizaje matematicas grado 5º. Documento para la implementación de los DBA.* Ministerio de Educacion Nacional de Colombia. Recuperado de http://aprende.colombiaaprende.edu.co/

Mishra, P., y Koehler, M. (2006). Technological pedagogical content knowledge: A framework for integrating technology in teacher knowledge. *Teachers College. Record*, volumen (6), 1017-1054.

Mora, W., y Parga, D. (2008). El conocimiento didáctico del contenido en química: integración de las tramas de contenido histórico-epistemológicas con las tramas de contexto-aprendizaje. *TED, Episteme y Didaxis*, volumen (24), 55-81. Recuperado de http://revistas.pedagogica.edu.co/index.php/TED/article/view/1083/1092

NTCM. (2000).*Estándares curriculares y de evaluación para la educación*. Publicaciones de la S.A.E.M.

Obando, G. (2003). La enseñanza de los números racionales a partir de la relación parte-todo. *Revista EMA.* Volumen (8), 157-182. Recuerado de http://funes.uniandes.edu.co/1521/1/99_Obando2003La_RevEMA.pdf

Obando, G., Vanegas, M., y Vasquéz, N. (2006). *Pensamiento numérico y sistemas numéricos*. SecretarÌa de Educación para la Cultura de Antioquia. Recuperado de http://www.galileodidacticos.com/

Panizza, M. (2007). *Conceptos Básicos de la Teoría de Situaciones Didácticas*. Recuperado de http://crecerysonreir.org/docs/Matematicas_teorico.pdf

Perrin, M. (2009). Utilidad de la teoría de las situaciones didácticas para incluir los fenómenos vinculados a la enseñanza de matemáticas en clases normales. *Revista internacional MAGISTERIO*, volumen (39), 10-16.

Pinto, J., y González, M. (2008). El conocimiento didáctico del contenido en el profesor de matemáticas: ¿una cuestión ignorada?. *Educación matemática*, volumen (20), 83-91. Recuperado de http://www.scielo.org.mx/pdf/ed/v20n3/v20n3a5.pdf

PTA. (2017). Marco y modelo del metodo de singapur para la enseñanza de las matematicas. Ministerio de Educacion Nacional de Colombia. Recuperado de http://aprende.colombiaaprende.edu.co/

Restrepo, B. (2004). La investigación-acción educativa y la construcción de saber pedagógico. *Educación y Educadores*, Volumen (7), 45-55.

Restrepo, B. (2012). Paradigmas metodológicos de investigación educativa. *Investigación en Educación*. Instituto Colombiano para el Fomento de la Educación Superior, ICFES. Recuperado de http://biblioteca.uccvirtual.edu.ni

Sadovsky, P. (2005). *La Teoría de las Situaciones Didácticas: un marco para pensar y actuar la enseñanza de la matemática*. Reflexiones teóricas para la Educación Matemática. Buenos Aires: Libros del Zorzal.

Sandoval, C. (2002). *Investigación cualitativa*. Instituto colombiano para el fomento de la educación superior, ICFES. Recuperado de http://aprendeenlinea.udea.edu.co/revistas/index.php /ceo/article/view/1567/1223

SEP. (2012). *Las estrategias y los instrumentos de evaluación desde el enfoque formativo.* Secretaria de Educación Pública de Mexico. Recuperado de http://www.educacionespecial .sep.gob.mx

Shulman, L. (1986). Those who undertand: Knowlwdge growth in teaching. *Educational Researcher*, (57), 4-14.

Souza, D. (2007).*How the Brain Learns Mathematics, California*, United States of American: Corwin Press. Recuperado de https://green-gables-coaching-nook.wikispaces.com/file/view/CPA.pdf/463115476/CPA.pdf

Thompson. (2008). *Documento de internet: Thompson "Las fracciones"*. Recuperado de https://vdocuments.mx/documents/las-fracciones-secuencia-didactica-de-thompson.html

Tobón, S., Pimienta, J., y Garcia, J. (2010). *Secuencias didácticas: aprendizaje y evaluación de competencias*. Mexico: Pearson Educación. Recuperado de https://www.researchgate.net/

UNA. (Universidad Nacional Abierta). (2014). Historia de las fracciones [Biblioteca UNA]. Venezuela. Recuperado de https://www.youtube.com/watch?v=zOU6VP81Vxc

Anexos

Anexo 1. Sistematización de la CoRe del concepto fracción como parte-todo

Tabla 4

Sistematización de la CoRe concepto de fracción

1. Identificación del tópico y conceptos centrales
a) De donce vienen las fracciones La fracción tiene un contexto en su desarrollo histórico que pasa por civilizaciones como la egipcia, babilonia y la matemática griega. En culturas como la griega y la babilonia, el conocimiento matemático inicial de los campos numéricos se dio a través de los números naturales (contar, medida, operar para solucionar problemas). Sin embargo los problemas de la vida diaria no se limitaban solo a estas operaciones, se presentaban situaciones en las que aparece un nuevo elemento a considerar: la relación entre la parte (la porción de tierra recibida, el monto del tributo o impuesto pagado...) y el todo (la superficie total de la tierra a repartir, el total de los bienes poseídos...). Esta expresión de parte-todo se denotaba con números naturales. La civilización egipcia, que utilizó un sistema de numeración aditivo pictográfico, elaboró una forma de escribir las fracciones. No se escribían todas las fracciones y toda fracción se expresaba como una suma de fracciones, por ejemplo, la fracción 2/5 se escribía 2/5=1/3+1/15. No se sabe por qué los egipcios escribían solamente fracciones unitarias, respecto a esto es posible que conceptualmente para ellos era más fácil entender la división de una unidad en partes iguales. Otra característica de la civilización egipcia era que no repetían una fracción cuando la descomponían, por cuanto consideraban que cada fracción era única. En un papiro llamado *Rhind*, aparece una tabla donde aparecen muchas fracciones expresadas como suma de fracciones unitarias y es en el estudio de esas tablas es que matemáticos de épocas posteriores elaboraron algunas conjeturas que permitieron escribir esas fracciones como composición de fracciones unitarias. Los egipcios utilizaron símbolos de acuerdo a su sistema de numeración. Así dice, las fracciones del tipo $\frac{1}{n}$ (excepto $\frac{1}{2}$ $y\frac{1}{4}$) se representaban con la notación correspondiente del número *n* y un óvalo o punto superpuesto al número. Las demás fracciones (salvo $\frac{2}{3}$, que tenía también su símbolo particular de representación) se reducían a una “suma” de fracciones unitarias. Una notación actual, $\frac{2}{5}=\frac{1}{3}+\frac{1}{15}$, los egipcios llegaban a ella de la siguiente forma: $\frac{2}{5}=\frac{1}{5}+\frac{1}{5}$, como $\frac{1}{5}$ es tres veces $\frac{1}{15}$ entonces, $\frac{2}{5}=\frac{1}{5}+\frac{1}{5}=\left(\frac{1}{15}+\frac{1}{15}+\frac{1}{15}\right)+\left(\frac{1}{15}+\frac{1}{15}+\frac{1}{15}\right)=\frac{1}{15}+\left(\frac{1}{15}+\frac{1}{15}+\frac{1}{15}+\frac{1}{15}+\right.$

$\left.\frac{1}{15}\right) = \frac{1}{15} + \frac{5}{15} = \frac{1}{15} + \frac{1}{3}$

Los babilonios resalta que utilizaron fracciones cuyos *denominadores* eran potencias de 60 y con ellas representaban las fracciones de la forma 1/n. Por ejemplo:

igi 2 gál-bi 30' se traduce en términos actuales como: $\frac{1}{2} = \frac{30}{60}$

igi 8 gál-bi 7 30' se traduce como: $\frac{1}{8} = \frac{7}{60} + \frac{30}{60^2}$

No se sabe a ciencia cierta del por qué los babilonios escogieron este número. Una podría ser que el número 60 es un número relativamente pequeño, que tiene un gran número de divisores. Este sistema de numeración además indica, les permitió a los babilonios realizar un gran número de cálculos, incluidos los cálculos con fracciones, lo cual era muy conveniente por cuanto lo utilizaban en la astronomía.

Las ventajas de este sistema de numeración babilónico se pudo evidenciar en sus tablas numéricas, ellas se presentaban en arreglos de dos columnas que se asemejaban a la siguiente:

$7;30 = 7 + \frac{30}{60}$

4	15
5	12
6	10
7	
8	7;30
9	6;40
10	6
11	
12	5
13	
14	
15	4
16	3;45
17	
18	3;20

Aquí el punto y coma se utiliza para separar la parte entera de la parte fraccionaria (Estos símbolos no fueron utilizados por los babilonios, esta traducido para la comunicación). Aquí al multiplicar cada par de números en la misma fila se obtiene 60, se tiene así que cada fila de la tabla contiene un número y a la derecha su recíproco sexagesimal. En la tabla hay huecos, es decir que faltan números, la razón de esta falta es que solamente las fracciones sexagesimales finitas eran comprensibles para los babilonios, los recíprocos sexagesimales de los números que faltan en la tabla no tienen una representación sexagesimal finita.

Tanto los babilonios como los egipcios le dieron un uso solo práctico a las fracciones, no hubo una preocupación teórica, la que sí tuvo la cultura griega. En esta cultura, existían los pitagóricos los cuales solo consideraban como números los números naturales, no las fracciones. La relación dos números la lograban con el principio de conmensurabilidad (todo puede ser medido), es decir dada dos magnitudes siempre habrá una menor que encaje un número exacto de veces en cada una de las dos magnitudes relacionadas.

Dados dos segmentos $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$, puede suceder que $\boldsymbol{a}$ no encaje un numero de veces exactas en $\boldsymbol{b}$ y viceversa. Se podrá entonces encontrar un segmento $\boldsymbol{c}$ que encaje exactamente $\boldsymbol{m}$ veces en $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{n}$ veces en $\boldsymbol{b}$, de tal manera que la relación entre $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ será $\frac{\boldsymbol{m}}{\boldsymbol{n}}$.

Esta relación y su expresión no eran consideradas como un nuevo número sino como la expresión numérica de la relación entre ellas, no se admitía que ambas estuvieran ligadas como un par “parte-todo”, en los griegos entonces a diferencia de los babilonios y egipcios, no existieron las fracciones como números. En la civilización griega los cálculos los hacían de manera geométrica, utilizaban las fracciones sexagesimales de los babilonios y una expresión de las fracciones con cierta similitud a la que se utiliza hoy en día.

La idea de fracción como número se consolidó solo a partir del Renacimiento con Simon Stevin en 1585, al proponer una nueva definición: “número es aquello mediante lo que se explica la magnitud de alguna cosa” Definición que Newton clarifica en 1707, en su Arithmetica Universalis: se entiende por número no tanto una multitud de unidades cuanto la razón entre una cantidad abstracta cualquiera y otra del mismo género que se toma por unidad Andonegui la intrepreta como: un número que mide el número de veces que la parte esta contenida en el todo, considerado éste como la unidad. Así, las fracciones, se convierten en números-medida de magnitudes comparadas con la unidad y por consiguiente, todos ellos pueden representarse como puntos de la recta numérica.

b) Concepto de fraccion y sus formas de representacion

La fraccion es una expresión de la relación entre una parte y el todo. Para definirlo, se necesitan tres elementos:

1. Un todo, considerado como unidad
2. Una partición de ese todo en b partes congruentes (b > 0)
3. La referencia a un número a de esas partes.

El concepto de fraccion es polimorfo, es decir puede adoptar diversas formas o sistemas de representación, ellas son: verbal, numérico, gráfico continuo, gráfico discreto, decimal, puntos ubicados en la recta y porcentual.

Los cuatro primeros sistemas responden más directamente a la relación parte - todo.

Sistema Verbal: la mitad, los dos tercios, una de las dos partes, dos de las tres partes.

Sistema numérico: Explicitar los dos números naturales que reflejen la magnitud de la relación entre la parte y el todo.

Sistema gráfico continuo: Se refiere a magnitudes continuas tales como la longitud de un segmento, el área de una superficie, el volumen de un sólido, etc.

Sistema gráfico discreto: Se refiere a magnitudes discretas, como el número de objetos de un conjunto, la cantidad de dinero, etc.

c) Algunas consecuencias derivadas del concepto de fracción

El todo como unidad

Cada fracción en particular hace referencia a un todo que se toma como unidad, y que puede variar de una situación a otra. Por eso, el todo es lo primero que hay que precisar cuando de fracciones se trata.

La partición de la unidad

El segundo elemento necesario para la definición de la fracción es la partición del todo en b partes congruentes (b > 0).

¿Por qué el número de partes ha de ser mayor que 0?

Porque no tiene sentido dividir algo en 0 partes, no se puede. Por consiguiente, no puede haber fracciones de la forma a/0.

¿Se puede dividir un todo en una parte?

Sí. Dividir un todo en una parte significa que la parte es única y coincide con el todo. Es decir, el todo se deja intacto. Por consiguiente, sí puede haber fracciones de la forma a/1.

Por otro lado las partes son congruentes. Esto significa que si las magnitudes son continuas (longitudes, áreas, volúmenes, tiempos...), las partes han de ser del mismo tamaño. Y que si son discretas, han de contar con el mismo número de elementos.

Considerar algunas de esas partes

Tenemos un todo dividido en b partes. ¿se puede considerar ninguna de esas partes, es decir, referirse a 0 partes?

Sí. Por ejemplo, de yo ser tomado en cuenta para el reparto de un pastel y luego renunciar a la parte que me corresponde: me estaría llevando 0 partes del pastel (0/b), es decir, nada, 0. Por consiguiente, 0 es una fracción, que responde a la forma 0/b, cualquiera que sea el valor de b > 0.

¿Un número natural a puede ser considerado como una fracción?

Se acaba de ver que 0 es una fracción. Afirmar que cualquier otro número natural, por ejemplo el 3, también puede ser considerado como fracción exige establecer qué sentido tiene 3 como fracción: significa que el todo ha sido dividido en una parte –es decir, se deja intacto– y que ahora considero 3 todos, 3 unidades. Así, la representación numérica más inmediata de 3 como fracción sería 3/1. Por consiguiente, cualquier número natural a puede ser considerado como una fracción.

¿Existen fracciones negativas?

Evidentemente, no. El número de partes en que se divide el todo viene dado por un número natural mayor que 0. Y el número de partes que se toman o consideran viene dado también por cualquier número natural, incluido el 0. Nunca aparecen números negativos, y tampoco es posible una relación negativa entre la parte y el todo. Por consiguiente, no se puede hablar de fracciones negativas.

¿Existen fracciones de la forma a/b en las que a pueda ser igual o mayor que b?

La respuesta es afirmativa en ambos casos. Si a = b, se habla del número 1, ya que la situación indica que el todo se divide en b partes, de las cuales consideramos todas; es decir, estamos tomando el todo, la unidad. Si a > b, simplemente estamos indicando que consideramos un número a de partes que es mayor que el número b de partes en que se dividió el todo; lógicamente, esta fracción excede el valor del todo, de la unidad. Este ultimo caso (fracciones impropias) no se tratará en la secuencia didactica.

d) La representación numérica de la fracción: a/b

¿cuántos significados puede tener una expresión del tipo a/b?

- No se acepta como fracción cualquier expresión numérica de la forma a/b.
- a/b como fracción: Expresa la relación entre los valores de una parte y del todo del que proviene la parte (La tratada en la secuencia).
- a/b como razón: Expresa la relación entre los valores de dos magnitudes cualesquiera, de la misma o diferente naturaleza.
- a/b como división de dos cantidades enteras: Expresa justamente eso, una división indicada (por ejemplo, un reparto a efectuar), y la necesidad de calcular el cociente (resultado del reparto).
- a/b como número racional: Es un elemento de un conjunto numérico abstracto, denotado Q, que está formado por clases de pares ordenados equivalentes de números enteros (positivos y negativos) cuyo segundo elemento es ≠ 0. Un número racional no hace referencia a la medida de magnitudes que se relacionan como una parte con un todo (caso de las fracciones) o como dos magnitudes entre sí (caso de las razones). Es algo abstracto, sin referentes, propio de la matemática pura. Y puede ser negativo, situación que no se da ni en las fracciones ni en las razones.

Conceptualmente, estos cuatro "objetos" matemáticos son diferentes, a pesar de que pueden presentarse bajo la misma forma. No es, por tanto, la forma lo que distingue a estos conceptos, sino el análisis de la situación en que aparecen en cada caso.

Las fracciones tampoco están obligadas a presentarse siempre en la forma a/b. Hay otros seis posibles sistemas de representación.

e) Los numeradores y denominadores

Estos dos terminos no se estrenan en la matematica. La aparición de los términos numerador y denominador en el discurso matemático no debe reservarse al momento en que se entra en el terreno de las fracciones, sino desde que se mencionan cantidades referidas a alguna entidad particular.

¿qué significa numerador y denominador?

Cada término o expresión que se utiliza para numerar. Y denominador, cada término o expresión que se utiliza para denominar. En el campo de la gramática, estas expresiones corresponden a los adjetivos numerales y a los sustantivos, respectivamente.

Por ejemplo, en la expresion 'tres sillas', tres es el numerador y sillas es el denominador. Análogamente al hablar de cinco centenas".

En la fraccion 3/5 entonces 3 es el adjetivo numeral, lo que numera y "quinto" debe verse como un sustantivo, como silla en "tres sillas". "Quinto" es el sustantivo que designa "la quinta parte" de cualquier todo.

Es importante dotar de este sentido a las fracciones, empezando con las unitarias. Una fracción como 1/5 puede verse como una unidad, como un objeto-unidad (similar a "una silla"), que permite acciones de conteo (un quinto, dos quintos, tres quintos, etc.) y, posteriormente, de suma y de resta (dos quintos más seis quintos son ocho quintos).

Las fracciones no unitarias pueden considerarse como expresiones que equivalen a "tantas veces la unidad fraccionaria". Por ejemplo, 3/5, leído como "tres quintos", indica que estamos considerando "tres veces un quinto", de una forma similar a como la expresión "tres sillas" se puede entender como "tres veces una silla".

En este mismo aspecto del numerador y el denominador, se sugiere utilizar términos que sean del lenguaje común del diario vivir, como: un cuarto para las cinco, media cucharada, un cuarto de panela, un cuarto de café, las cinco y media, dos de cinco goles. Para que el lenguaje nos sirva de vehículo entre el concepto y su representación simbólica, y asi dotarla de sentido pleno.

Familiarizarce con las fracciones no supone solamente acostumbrarse a sus conversiones de un sistema de representación a otro, o a sus equivalencias dentro de un mismo sistema, sino saber "verlas" y "utilizarlas" en nuestra vida.

2. ¿Qué intenta que aprendan sus estudiantes alrededor de este tópico?

Que los estudiantes:

1. Reconozcan que los números se pueden representar de diferentes maneras, y que algunas representaciones son más útiles que otras en ciertas situaciones de resolución de problemas.
2. Desarrollen la habilidad de reconocer las diferentes representaciones que tiene un número fraccionario como parte todo: la verbal, la numérica, la gráfico continuo y la gráfico discreta.
3. Que conozca como un concepto matemático evoluciona y se construye a través de la historia, y evidencie que el conocimiento matemático está conectado con la vida social de los hombres.
4. Interpreten las fracciones en diferentes contextos de relaciones parte todo.

5. Comprendan los significados de los números fraccionarios en situaciones cotidianas relacionadas con contar, agrupar, medir, representar, comparar, relacionar y operar.
6. Deternimen relaciones numéricas de orden y equivalencia entre números fraccionarios.
7. Empiecen en la comprensión de la operación suma a partir de la comprensión de las acciones, las relaciones y transformaciones que se hacen sobre las cantidades representadas con material concreto. Es decir con acciones como agregar y desagregar, reunir y separar, componer y descomponer, como base para comprender esta operación.
8. Comprendan a través de la manipulación y la observación la relación de orden entre dos fracciones y determine cuando era una mayor, menor o igual a otra dada.
9. Reconozcan la fracción como parte-todo
10. Representen gráficamente las fracciones en contextos continuos y discretos
11. Utilicen el lenguaje natural y la representación numérica para enunciar una fracción
12. Den significado y utilizar la fracción como parte-todo en contextos continuos y discretos para resolver problemas
13. Resuelvan situaciones problema sencillas con fracciones de uso común que requieran de la suma para su solución
14. Usen lenguaje grafico o pictórico y terminología adecuada para explicar relaciones numéricas.
15. Iidentifiquen una fracción en cualquiera de sistemas de representación; la representen en todos ellos; saber traducirla de cada sistema a todos los demás; lo que incluye, cuando sea posible, buscar "traducciones" dentro de un mismo sistema.

Siete criterios (Godino, 2004) para comprender la relación parte-todo:

- Considerar que una región entera se puede dividir en partes
- Darse cuenta que el mismo todo se puede dividir en diferente número de partes iguales, y podemos elegir el número de partes
- Las partes de la partición agotan el todo
- El número de partes puede no ser igual al número de cortes
- Todas las partes son iguales
- Cada parte en sí misma se puede considerar como un "todo"
- El "todo" se conserva, aún cuando se haya dividido en partes (p.225).

Comprender la idea de fracción en un conjunto discreto de objetos, dado que los estudiantes no consideran el conjunto total como un todo. (Llinares y Sánchez, 1988, p. 81).

- Un todo está compuesto por elementos separables. Una región o superficie es vista como divisible.
- La separación se puede realizar en un número determinado de partes. El "todo" se puede dividir en

el número de partes pedido.

- Las subdivisiones cubren el todo; ya que algunos niños cuando se les pedía dividir un pastel entre tres muñecos, cortaban tres trozos e ignoraban el resto.
- El número de partes no coincide con el número de cortes.
- Los trozos —partes— son iguales. Las partes tienen que ser del mismo tamaño —congruentes—.
- Las partes también se pueden considerar como totalidad (un octavo de un todo se puede obtener dividiendo los cuartos en mitades).
- El “todo” se conserva.
- Manejar el control simbólico de las fracciones, es decir, los símbolos relacionados a las fracciones;
- Considerar las relaciones parte-todo en contextos continuos y discretos; reconocer subdivisiones equivalentes; por ejemplo, notar que un tercio es equivalente a dos sextos, a tres novenos, etc.

3. ¿Por qué es importante que los estudiantes sepan este tópico?

- Familiarizarse con las fracciones, lo cual supone saber “verlas” y “utilizarlas” en su vida. Por ejemplo en actividades destinadas a medir la altura de un objeto, indicar un punto en él, y estimar qué fracción representa, respecto a la altura total o respecto a otro objeto.
- Tener un conjunto de objetos, de ellos tomar algunos y determinar la fracción que se tomó.
- Ayudar a que los estudiantes a comprender el “reparto” mediante experiencias en el aula ayudados de material concreto o Recursos Educativos digitales, dado que la comprensión del concepto de fracción, cuando se trata de la fracción de conjuntos, los estudiantes suelen pensar la “mitad” como cualquier parte de un todo, más que, una de dos partes iguales del todo.
- Cuando se enfrentan a problemas con figuras diferentes es un desafío, dado que cambiar la forma de la figura es casi como cambiar el problema para el estudiante.
- Comprender que las fracciones pueden darse en situaciones de reparto en discreto, medidas continuas, problemas rutinarios de fracciones como partes de un conjunto o de un todo y la notación fraccionaria.
- Los estudiantes deben aprender acerca de las fracciones como relación parte - todo (actividades geométricas y numéricas relativas a situaciones de la vida real), en contextos de medida y de reparto, mediante la interacción con diferentes materiales y recursos, más que la memorización de reglas y términos.
- Adquirir habilidades para representar matemáticamente una situación utilizando diferentes lenguajes (verbal, gráfico y numérico) y estableciendo correspondencias entre los mismos.
- Comprender la fracción como parte todo implica un inicio conveniente para adentrase en la suma

de números fraccionarios.

4. ¿Cuáles son las dificultades/limitaciones relacionadas con la enseñanza y el aprendizaje de este tópico?

- Los estudiantes no atribuyen un significado correcto a la noción de fracción, y por tanto, a cada uno de los numeros que aparecen en la escritura de una fracción.
- Se trata de una notación nueva para los alumnos, ya que hasta este momento sólo conocen los números naturales.
- Confunden 1/7 con 7/1, o bien, 1/7 y 7/1, los consideran como dos escrituras equivalentes.
- El conocimiento de los naturales puede ser un obstáculo para el dominio de los números fraccionarios; por ejemplo, algunos niños pueden afirmar que $1/3 < 1/5$ explicando que $3 <5$.
- Para sumar entre sí dos fracciones, suman los numeadores entre si y los denominadores entre si. de Llinares y Sánchez (1988, cap. 6)
- Los estudiantes consideran las partes como totalidad y en algunas ocasiones no reconoce subdivisiones equivalentes.

5. ¿Qué formas específicas de evaluación del entendimiento o de la confusión de los estudiantes emplea alrededor de este tópico?

- Los estudiantes en este grado escolar es necesario relacionar los objetos abstractos con representaciones concretas y simbolicas. Por esta razón, se inicia el proceso con la manipulacion de material para que relacionen esos objetos palpables con la abstraccion del simbolo matemático. Reconocer el todo representado de diferentes maneras les permitirá paulatinamente asociarlo con la unidad o el numero uno y particionarlo igualmente o hacer un reparto igual, dará origen a las fracciones.
- En este grado tambien se observa que no relacionan la simbologia, tanto los numeros como la raya de en medio, no reconocen esta como una relacion entre los dos numeros ni determinan que el numerador representa las partes tomadas de un todo particionado en un numero de partes que las da el denominador.

6. ¿Qué conocimientos acerca del pensamiento de los estudiantes influyen en su enseñanza de este tópico??

- Que idenifiquen la expresion que relaciona la parte con el todo, para ello deben hacerlo en tres elementos: primero un todo, que se considera como unidad, segundo una particion de ese todo en b partes congruentes (b>0), y tercero la referencia a un número a de esas partes.
- Establecer que la fracción es un concepto polimorfo, dado que puede adoptar diversas formas de representación como parte-todo, se estableceran: la verbal, numérica, gráfico continuo, gráfico discreto.
- Es necesario establecer que el simbolismo a/b, obedece a fracción cuando expresa la relación entre los valores de una parte y del todo del que proviene la parte.
- Establecer que no es la forma a/b lo que distingue a una fraccion como parte-todo, sino el análisis de la situación en que aparecen en cada caso.
- Es importante que el estudiante domine el concepto de fracción como parte-todo y esto se dará cuando sea capaz de identificarlo en cualquiera de sus posibles sistemas de representación; representarlo en todos ellos; y saber traducirlo de un sistema a todos los demás.
- Familiarizarce con las fracciones, lo cual supone no solamente acostumbrarnos a sus conversiones de un sistema de representación a otro, o a sus equivalencias dentro de un mismo sistema, sino saber verlas y utilizarlas en la vida.

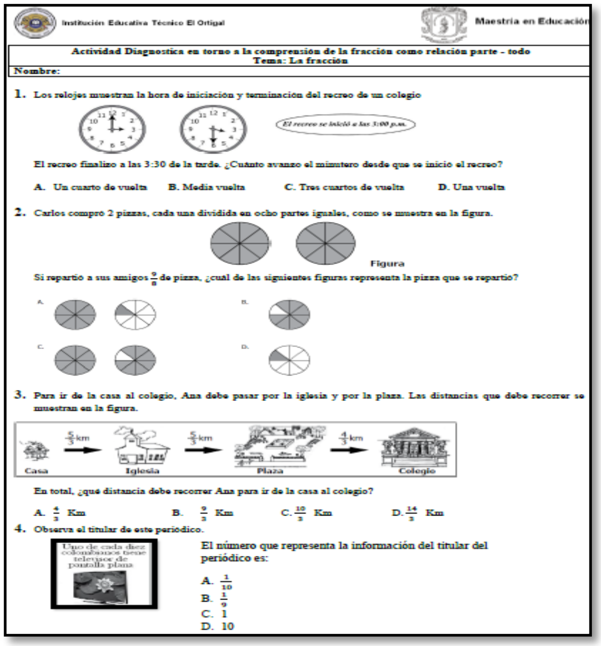
7. Preparación de material concreto, selección de los REDA y las situaciones didacticas

- REDA manipulador virtual Mercado matemático mágico. Relaciona el denominador y el numerador en un contexto de parte-todo.
- REDA manipulador virtual visualizador de fracciones. Escribir en una caja de texto la fracción que representa una parte del total en medidas discretas.
- REDA manipulador virtual fracciones. Observar figuras y escribir en las cajas de texto la fracción que representa la parte coloreada o no colereada.
- REDA manipulador virtual barras de fracciones. Relacionar las partes del todo en un cotexto de medidas continuas.
- REDA manipulador virtual comparando fracciones. Comparar la parte con el todo en diferentes representaciones continuas
- REDA manipulador virtual fracciones y colores. Tomar aleatoriamente un cuadrado dividido en numero de parte y debe en las cajas de texto, escribir la fracción que

corresponde según los colores.

- REDA recurso digital video historia de las fracciones. Video elaborado para representar un breve repaso por la historia respecto a diferentes civilizaciones que usaron las fracciones y la evolución que sufrió este concepto.
- Material Concreto Equipo de las fracciones (dado de las fracciones, tableros con fichas de fracciones)
- Barras de madera
- Circulos en fomi
- Galletas
- Rectangulo dividido en cuatro partes y a su vez cada parte dividida en cuarto, octavos, medios y cuartos

Anexo 2. Actividad de caracterización



Institución Educativa Técnico El Ortigal

Maestría en Educación

Actividad Diagnostica en torno a la comprensión de la fracción como relación parte - todo
Tema: La fracción

Nombre:

1. Los relojes muestran la hora de iniciación y terminación del recreo de un colegio

El recreo finalizo a las 3:30 de la tarde. ¿Cuánto avanzo el minutero desde que se inició el recreo?

A. Un cuarto de vuelta B. Media vuelta C. Tres cuartos de vuelta D. Una vuelta

2. Carlos compró 2 pizzas, cada una dividida en ocho partes iguales, como se muestra en la figura.

Figura

Si repartió a sus amigos $\frac{9}{8}$ de pizza, ¿cuál de las siguientes figuras representa la pizza que se repartió?

A. B. C. D.

3. Para ir de la casa al colegio, Ana debe pasar por la iglesia y por la plaza. Las distancias que debe recorrer se muestran en la figura.

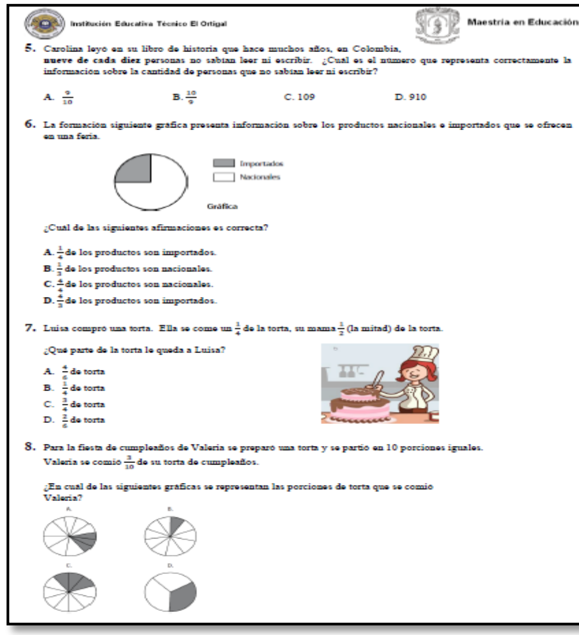
En total, ¿qué distancia debe recorrer Ana para ir de la casa al colegio?

A. $\frac{4}{3}$ Km B. $\frac{9}{3}$ Km C. $\frac{10}{3}$ Km D. $\frac{14}{3}$ Km

4. Observa el titular de este periódico.

El número que representa la información del titular del periódico es:

A. $\frac{1}{10}$
B. $\frac{1}{9}$
C. 1
D. 10



Institución Educativa Técnico El Ortigal

Maestría en Educación

5. Carolina leyó en su libro de historia que hace muchos años, en Colombia, **nueve de cada diez** personas no sabían leer ni escribir. ¿Cuál es el número que representa correctamente la información sobre la cantidad de personas que no sabían leer ni escribir?

A. $\frac{9}{10}$ B. $\frac{10}{9}$ C. 109 D. 910

6. La formación siguiente gráfica presenta información sobre los productos nacionales e importados que se ofrecen en una feria.

¿Cuál de las siguientes afirmaciones es correcta?

A. $\frac{1}{4}$ de los productos son importados.
B. $\frac{1}{3}$ de los productos son nacionales.
C. $\frac{4}{4}$ de los productos son nacionales.
D. $\frac{4}{3}$ de los productos son importados.

7. Luisa compró una torta. Ella se come un $\frac{1}{4}$ de la torta, su mama $\frac{1}{2}$ (la mitad) de la torta.

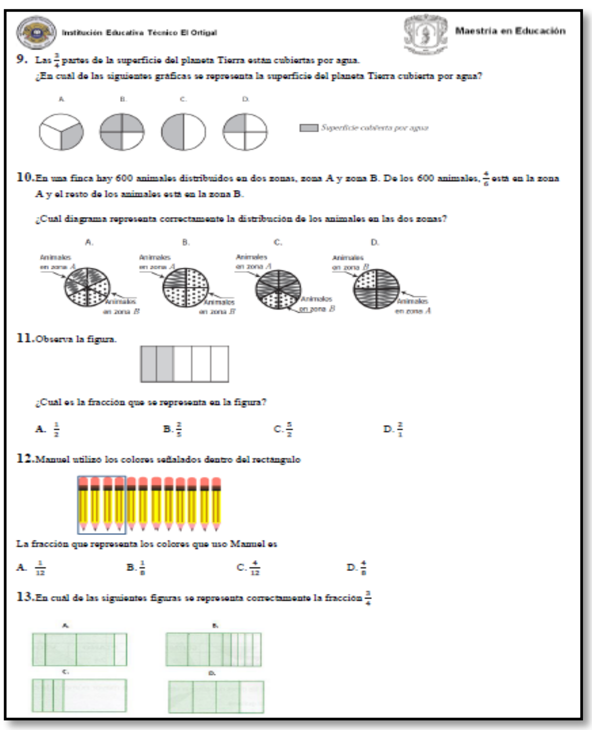
¿Qué parte de la torta le queda a Luisa?

A. $\frac{4}{6}$ de torta
B. $\frac{1}{4}$ de torta
C. $\frac{3}{4}$ de torta
D. $\frac{2}{6}$ de torta

8. Para la fiesta de cumpleaños de Valeria se preparó una torta y se partió en 10 porciones iguales. Valeria se comió $\frac{3}{10}$ de su torta de cumpleaños.

¿En cuál de las siguientes gráficas se representan las porciones de torta que se comió Valeria?

A. B. C. D.



Institución Educativa Técnico El Ortigal

Maestría en Educación

9. Las $\frac{3}{4}$ partes de la superficie del planeta Tierra están cubiertas por agua.
¿En cuál de las siguientes gráficas se representa la superficie del planeta Tierra cubierta por agua?

A. B. C. D.

10. En una finca hay 600 animales distribuidos en dos zonas, zona A y zona B. De los 600 animales, $\frac{4}{6}$ está en la zona A y el resto de los animales está en la zona B.

¿Cuál diagrama representa correctamente la distribución de los animales en las dos zonas?

11. Observa la figura.

¿Cuál es la fracción que se representa en la figura?

A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{2}{5}$ C. $\frac{5}{2}$ D. $\frac{2}{1}$

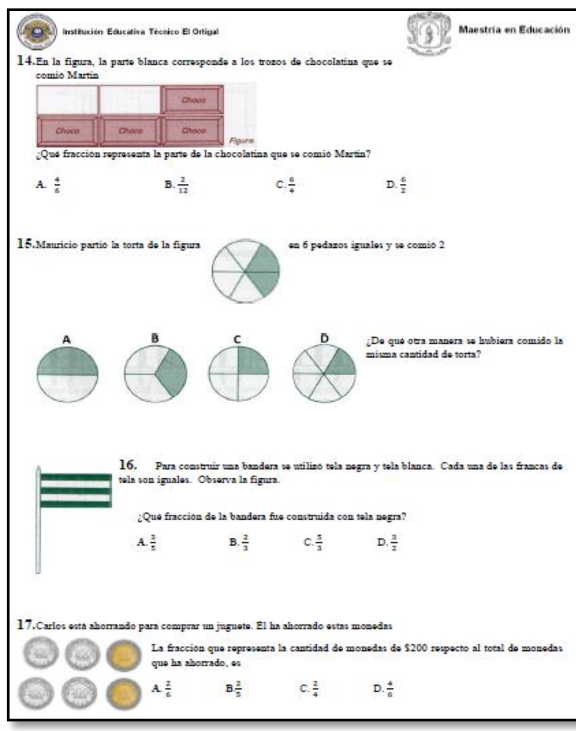
12. Manuel utilizó los colores señalados dentro del rectángulo

La fracción que representa los colores que uso Manuel es

A. $\frac{1}{12}$ B. $\frac{1}{8}$ C. $\frac{4}{12}$ D. $\frac{4}{8}$

13. En cuál de las siguientes figuras se representa correctamente la fracción $\frac{3}{4}$

A. B. C. D.



Institución Educativa Técnico El Ortigal

Maestría en Educación

14. En la figura, la parte blanca corresponde a los trozos de chocolatina que se comió Martin

¿Qué fracción representa la parte de la chocolatina que se comió Martin?

A. $\frac{4}{6}$ B. $\frac{2}{12}$ C. $\frac{6}{4}$ D. $\frac{6}{2}$

15. Mauricio partio la torta de la figura en 6 pedazos iguales y se comió 2

A B C D

¿De qué otra manera se hubiera comido la misma cantidad de torta?

16. Para construir una bandera se utilizo tela negra y tela blanca. Cada una de las francas de tela son iguales. Observa la figura.

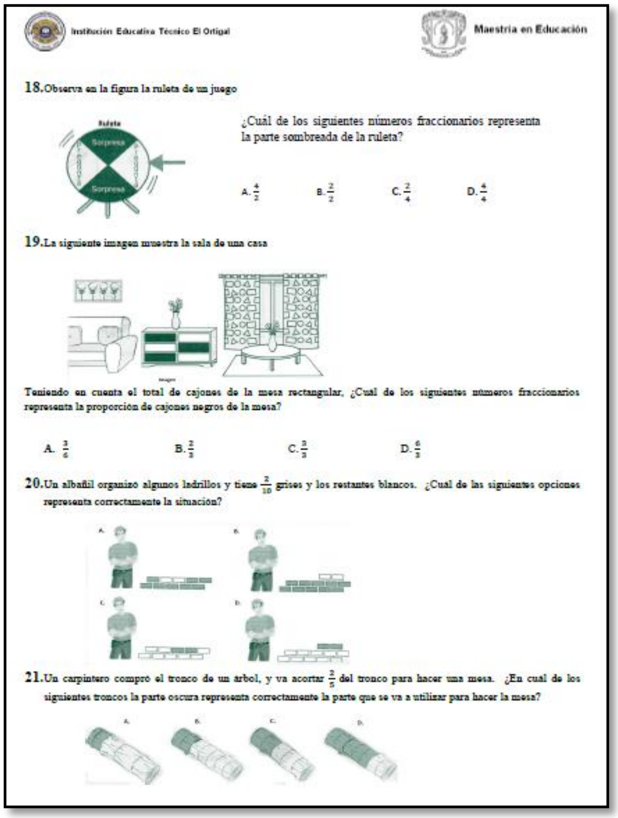
¿Que fracción de la bandera fue construida con tela negra?

A. $\frac{3}{5}$ B. $\frac{2}{3}$ C. $\frac{5}{3}$ D. $\frac{3}{2}$

17. Carlos está ahorrando para comprar un juguete. Él ha ahorrado estas monedas

La fracción que representa la cantidad de monedas de $200 respecto al total de monedas que ha ahorrado, es

A. $\frac{2}{6}$ B. $\frac{2}{5}$ C. $\frac{2}{4}$ D. $\frac{4}{6}$



Institución Educativa Técnico El Ortigal

Maestría en Educación

18. Observa en la figura la ruleta de un juego

¿Cuál de los siguientes números fraccionarios representa la parte sombreada de la ruleta?

A. $\frac{4}{2}$ B. $\frac{2}{2}$ C. $\frac{2}{4}$ D. $\frac{4}{4}$

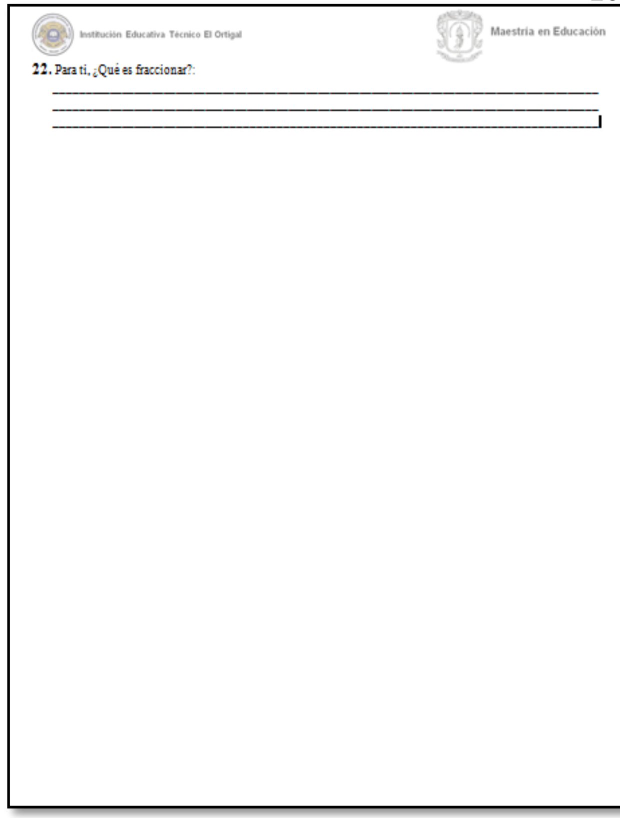
19. La siguiente imagen muestra la sala de una casa

Teniendo en cuenta el total de cajones de la mesa rectangular, ¿Cuál de los siguientes números fraccionarios representa la proporción de cajones negros de la mesa?

A. $\frac{3}{6}$ B. $\frac{2}{3}$ C. $\frac{3}{3}$ D. $\frac{6}{3}$

20. Un albañil organizó algunos ladrillos y tiene $\frac{2}{10}$ grises y los restantes blancos. ¿Cuál de las siguientes opciones representa correctamente la situación?

21. Un carpintero compró el tronco de un árbol, y va acortar $\frac{2}{5}$ del tronco para hacer una mesa. ¿En cuál de los siguientes troncos la parte oscura representa correctamente la parte que se va a utilizar para hacer la mesa?



Institución Educativa Técnico El Ortigal

Maestría en Educación

22. Para ti, ¿Qué es fraccionar?:

____

____

____

Anexo 3. Formato adaptado para la planificación de la secuencia

Propuesta De Planeación Secuencia Didáctica Matemáticas Grado 5°		
Objetivos de aprendizaje:		
Tema	**Estándar**	**Derechos Básicos de Aprendizaje – Mallas de aprendizaje- evidencias**
VISIÓN GENERAL DE LA SECUENCIA		
Conceptos claves		

Sesión No:		**Nombre de la situación:**	
Preguntas guía	**Ideas claves**	**Evidencia de aprendizaje**	**Actividades**

Anexo 4. Instrumento para recoger evidencia de aprendizaje situaciónes

Institución Educativa Técnico El Ortigal

Maestría en Educación

Evidencia de aprendizaje Situación "repartiendo galletas" situación 3

Nombre:

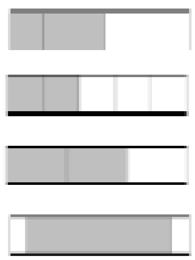
1. Cuál de las siguientes representaciones simboliza la fracción $\frac{3}{8}$

A.

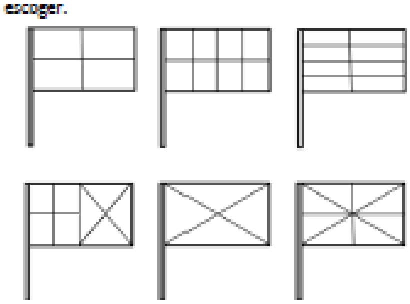
B.

C.

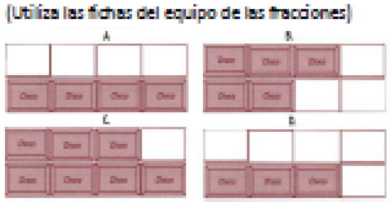
D.



2. Un colegio realiza un concurso para elegir el diseño de su bandera. Se preseleccionaron las siguientes, pero aún falta darles color. La condición es que solo debe tener dos colores, y uno de ellos deber ser $\frac{1}{4}$ de la bandera. Ayuda a la rectora a pintarlas para que pueda escoger.



3. Martin ha comprado una rica chocolatina en la tienda del colegio. Él le comparte a su mejor amigo Juan $\frac{1}{4}$ de la chocolatina y Martin se come $\frac{3}{8}$. En la figura, la parte blanca corresponde a los trozos de chocolatina que Martin compartió y se comió. ¿Cuál de las figuras representa mejor la situación?
(Utiliza las fichas del equipo de las fracciones)



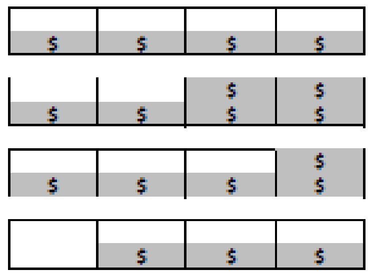
4. María se ha gastado $\frac{1}{2}$ del dinero que le dio su mama en una gaseosa. También se ha gastado $\frac{1}{8}$ de ese dinero en un pastel. Que figura representa la situación del dinero de María. (Utiliza las fichas del equipo de las fracciones)

A.

B.

C.

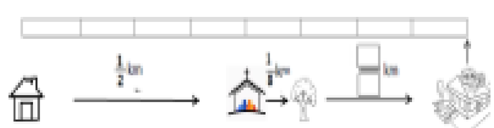
D.



5. Relaciona mediante una línea cada fracción de la izquierda con una fracción de la derecha del tal forma que al sumarlas obtengas el todo (1).

$\frac{1}{2}$	$\frac{4}{4}$
$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{8}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{4}$
$\frac{3}{8}$	$\frac{7}{8}$
0	$\frac{3}{4}$
$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$

6. Marta sale de su casa para la escuela y realiza el total de recorrido que muestra la figura. Escribe la fracción del recorrido que le falta a Marta para llegar al colegio.



7. Cuál de los siguientes enunciados es FALSO.
(Utiliza las fichas del equipo de las fracciones)

A. $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$

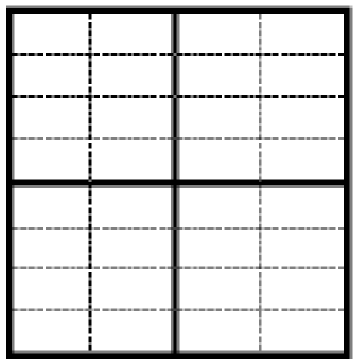
B. $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=1$

C. $\frac{4}{8}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=1$

D. $\frac{4}{8}+\frac{8}{4}=1$

8. Camilo va a pintar su ventana de varios colores, ha decido que quiera pintar sus 4 vidrios así:
    - La $\frac{1}{2}$ (la mitad) de un vidrio de color amarillo
    - $\frac{1}{8}$ del otro vidrio de color verde.
    - $\frac{1}{4}$ (Cuarta parte) de otro color azul
    - el otro todo rojo.

Pinta la ventana de Camilo

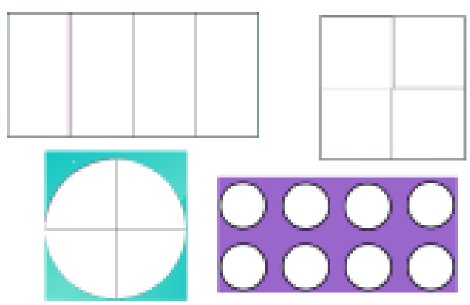


¿Qué fracción de **TODA** la ventana es amarillo?__________

¿Qué fracción de **TODA** la ventana es verde?__________

¿Qué fracción de **TODA** la ventana es rojo?__________

9. Representa la fracción $\frac{3}{8}$ en cada una de las siguientes figuras



Anexo 5. Evidencia de aprendizaje para la situación dos

Institución Educativa Técnico El Ortigal

Maestría en Educación

Tema: La fracción como relación Parte - Todo

Nombres:

1. ¿Cómo puedo partir un objeto en partes iguales?

2. ¿Al unir las partes iguales en que se partió un objeto, que resultado tengo?

3. ¿las fichas están etiquetadas de una forma particular, qué significan los números?

4. ¿Qué relación existe entre los pedazos con la tira entera?

5. Si sacan la fracción $\frac{1}{4}$ y necesitan $\frac{1}{8}$, ¿por qué piensa que está no servirá? ¿Qué puede decir del tamaño de las piezas? ¿Cómo se diferencian?

6. ¿Cómo podemos verificar que un grupo ganó el juego?

7. ¿Si la tira se rompe en cuatro partes iguales, entonces cuantos pedazos necesitan para hacer la tira?

8. ¿Si la tira se rompe en ocho partes iguales, entonces cuantos pedazos necesitan para hacer la tira?

9. Un grupo afirma que gano con las fichas $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ y $\frac{1}{8}$. Comprueba la solución.

Institución Educativa Técnico El Ortigal

Maestría en Educación

11. Ordena las siguientes fracciones de mayor a menor: $\frac{3}{8}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{10}{16}$, 1, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{16}$, $\frac{1}{8}$

12. Manipulemos las regletas y escribamos las relaciones que podemos encontrar entre ellas

	La regleta verde neón	La regleta roja	La regleta verde	La regleta azul	La regleta amarilla	La regleta rosada	La regleta negra	La regleta blanca
Una regleta verde neón que parte es de								
Una regleta roja que parte es de								
Una regleta verde que parte es de								
Una regleta azul que parte es de								
Una regleta amarilla que parte es de								
Una regleta rosada que parte es de								
Una regleta negra que parte es de								
Una regleta blanca que parte es de								

¿QUÉ APRENDIERON HOY?

Anexo 6. Instrumento para recoger evidencias de aprendizaje situación tres

Institución Educativa Técnico El Ortigal

Maestría en Educación

Evidencia de aprendizaje Situación "repartiendo galletas" situación 3

Nombres:

1. ¿Cómo puedes determinar que parte de los círculos son de un color particular (B-R-A) de un total de 12?

2. ¿Cuántos del total de círculos son blancos?

   ______ de ______

   En forma de fracción como se escribe:

3. ¿Cuántos del total de círculos son rojos?

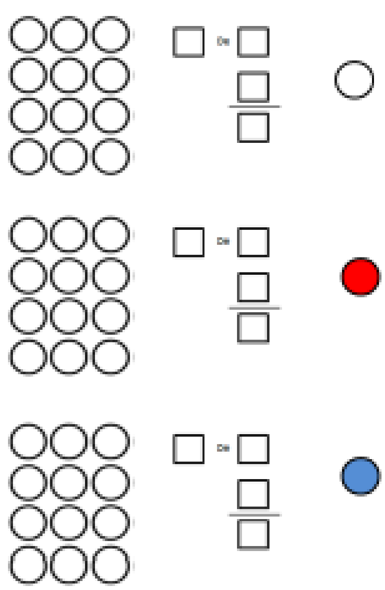
   En forma de fracción como se escribe:

4. ¿Cuántos del total de círculos son azules?

   ______ de ______

   En forma de fracción como se escribe:

5. Colorea y escribe la información que falta



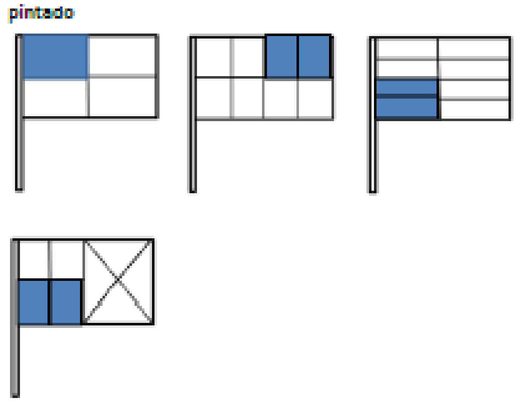
6. ¿Cómo puedes repartir 16 galletas que hay en una caja a 4 niños, de tal manera que no sobren galletas en la caja?

Dibuja la estrategia que utilizaste

¿Cuál es la porción para cada niño?

7. Representa $\frac{2}{3}$ en la siguiente figura

8. Observa las siguientes banderas y la parte que se ha pintado



¿La sección de la bandera que se ha pintado, crees que es diferente o igual? Justifica.

Anexo 7. Instrumento evidencias medidas en discreto en situacion tres

Institución Educativa Técnico El Ortigal

Maestría en Educación

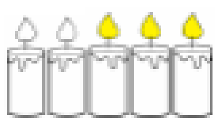
Evidencia de aprendizaje Situación "Repartir Galletas"
Nombre:

1. La abuela de Samuel le regalo un cuadro para que lo pinte. Ella le dibujo un frutero con manzanas, Samuel decide que en su cuadro $\frac{1}{2}$ de las manzanas las pintara rojas, $\frac{2}{6}$ serán verdes y las restantes amarillas. Ayuda a Samuel a pintar el cuadro.

2. El papa de Juan le ha regalado unas monedas para el colegio.

Que parte de las monedas son de $500: —

3. Qué número fraccionario representa las velas prendidas

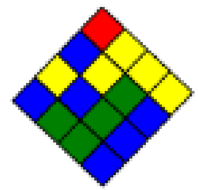


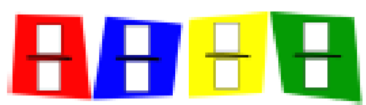
A. $\frac{2}{5}$ B. $\frac{2}{3}$ C. $\frac{3}{5}$ D. $\frac{3}{2}$

4. Que fracción de los pasteles son cuadrados

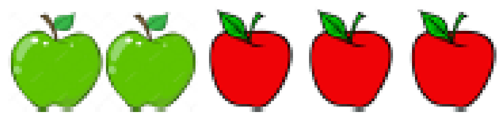
A. $\frac{3}{7}$ B. $\frac{3}{10}$ C. $\frac{7}{3}$ D. $\frac{7}{10}$

5. Escribe la fracción que representa a cada color



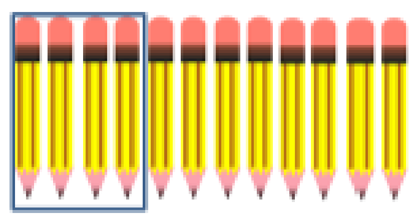


6. Escribe el número fraccionario que representa las manzanas verdes del total de manzanas



—

7. Manuel utilizó los colores señalados dentro del rectángulo. La fracción que representa los colores que uso Manuel es:



—

8. Observa el panal de huevos

Que fracción de los huevos es blanco.

A. $\frac{1}{6}$ B. $\frac{5}{6}$ C. $\frac{1}{5}$ D. $\frac{5}{1}$

i

Anexo 8. Rúbrica de autoevaluación de los desempeños obtenidos en las situaciones

Institución Educativa Técnico El Ortigal

Maestría en Educación

INSTRUMENTO DE AUTOEVALUACION DE LOS DESEMPEÑOS OBTENIDOS EN LAS SITUACIONES					Puntos		
Nombre:	Nivel 1 (2 puntos)	Nivel 2 (3 puntos)	Nivel 3 (4 puntos)	Nivel 4 (5 puntos)	S1	S2	S3
REDA	No sentiste interés ni motivación por las actividades presentadas en los recursos educativos digitales.	Sentiste interés y motivación por las actividades presentadas en los recursos educativos digitales, pero estos no favorecieron tu aprendizaje.	Sentiste interés y motivación por las actividades presentadas en los recursos educativos digitales y reconoces que favorecieron medianamente tu aprendizaje.	Sentiste gran interés y motivación por las actividades presentadas en los recursos educativos digitales y reconoces que favorecieron considerablemente tu aprendizaje.			
Trabajo colaborativo	No asumo mi rol e interfiero en el trabajo de los demás sin aportar ideas al grupo.	Asumo mi rol pero tiendo a interferir en el trabajo de los demás y aporto ideas al grupo.	Asumo mi rol, no interfiero en el trabajo de los demás y a veces aporto ideas al grupo.	Asumo mi rol sin interferir en el trabajo de los demás y aporto ideas al grupo.			
Material concreto	No sentiste interés ni motivación por las actividades presentadas con el material concreto.	Sentiste interés y motivación por las actividades presentadas con el material concreto, pero estos no favorecieron tu aprendizaje.	Sentiste interés y motivación por las actividades presentadas con el material concreto y reconoces que favorecieron medianamente tu aprendizaje.	Sentiste gran interés y motivación por las actividades presentadas con el material concreto y reconoces que favorecieron considerablemente tu aprendizaje.			
Aprendizaje	Demuestro una comprensión limitada del concepto de fracción	Demuestro cierta comprensión del concepto de fracción	Demuestro una buena comprensión del concepto de fracción	Demuestro una excelente comprensión del concepto de fracción			

Anexo 9. Rejilla para determinar los aprendizajes en torno al aprendizaje del tópico fracción

REJILLA DE APRENDIZAJE DEL TOPICO FRACCION COMO PARTE TODO	
Acto de comprensión	EVIDENCIA DE APRENDIZAJE
Identificación	Identifica que las fracciones son parte de conjuntos, partes de un todo y que para representarlas es necesario particionar igualmente
Identificación	Identifica que una fracción puede ser presentada en un todo de diferentes maneras
Identificación	Identifica que una parte de un todo puede convertirse en un todo
Discriminación	Determina la relación entre el número de partes del todo y el número de partes tomadas de ese todo
Generalización	Comprende que la unión de las partes del todo forman el todo y lo representa con la simbología matemática
Generalización	Comprende que en la simbología **a/b**, ***b*** es el todo y ***a*** es un número de partes de ese todo

Anexo 10. Lista de los estudiantes para registro de respuestas

Institución Educativa Técnico El Ortigal

Maestría en Educación

Rejilla post - situación														
No	Nombre				Pregunta No - clave									
					C	Bandera	D	A	Emparejar	recorrido	D	Emparejar	ventana	representar
					1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	ARAQUE	MARTINEZ	KEVIN	ANDRES										
2	BONILLA	MANZANO	SHARY	GISEL										
3	CAICEDO	DOMINGUEZ	BRENDA	ESTEFANY										
4	CANIZALES	ORTIZ	FABIAN	ANDRES										
5	SANCHEZ	CARABALI	ALLISON	DAYAN										
6	CASTILLO	APONZA	VALENTINA											
7	CORDOBA	IMBAJOA	ADRIAN	CAMILO										
8	CUENCA	BARONA	KEVIN	DARIO										
9	ESCOBAR	COLORADO	KENNEDY	YUSSEF										
10	GOMEZ	COLORADO	MAICOL	ALEXANDER										
11	GRISALES	GONZALEZ	EILEEN	CRISTINA										
12	JURADO	MUÑOZ	JHOAN	ALEXIS										
13	MUÑOZ	GUERRERO	LISETH	VALENTINA										
14	MUÑOZ	MARTINEZ	SHARICK	DANIELA										
15	PENILLA	PEÑA	BEYSA	YODAHIS										
16	PINO	CUARAN	JARRISON											
17	REINA	RIASCOS	LUISA	FERNANDA										
18	RIVAS	IBARRA	KAREN	MELISSA										
19	TORRES	MORENO	VALERY	YISSEL										
20	VERGARA	GOMEZ	JUAN	SEBASTIAN										
21	VILLEGAS	HERNANDEZ	FRANK	DEIVY										
22	ZAMBRANO	MELENDEZ	PAULA	ANDREA										

Anexo 11. Rejilla para registrar respuestas actividad de caracterización

Institución Educativa Técnico El Ortigal

Maestría en Educación

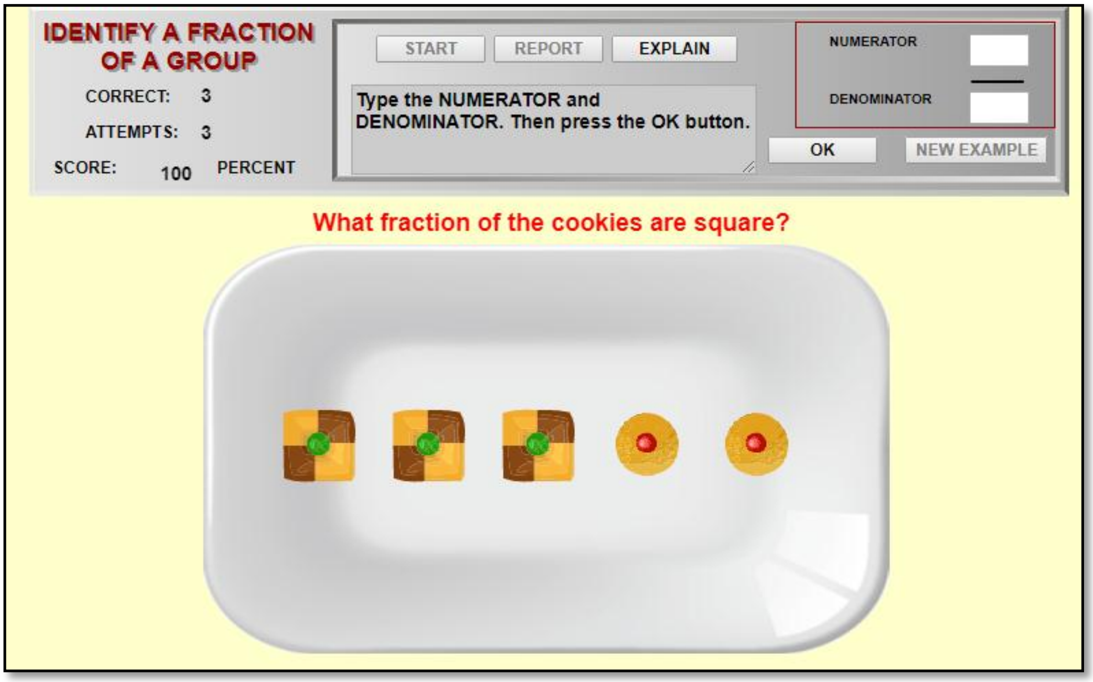
REJILLA PARA LA ACTIVIDAD DIAGNOSTICA																								
No	Nombre			Pregunta No - clave																				
				1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
1	MARTINEZ A.	KEVIN	ANDRES																					
2	MANZANO B.	SHARY	GISEL																					
3	DOMINGUEZ C.	BRENDA	ESTEFANY																					
4	ORTIZ C.	FABIAN	ANDRES																					
5	CARABALI S.	ALLISON	DAYAN																					
6	APONZA C.	VALENTINA																						
7	IMBAJOA C.	ADRIAN	CAMILO																					
8	BARONA C.	KEVIN	DARIO																					
9	COLORADO E.	KENNEDY	YUSSEF																					
10	COLORADO G.	MAICOL	ALEXANDER																					
11	GONZALEZ G.	EILEEN	CRISTINA																					
12	MUÑOZ J.	JHOAN	ALEXIS																					
13	GUERRERO M.	LISETH	VALENTINA																					
14	MARTINEZ M.	SHARICK	DANIELA																					
15	PEÑA P.	BEYSA	YODAHIS																					
16	CUARAN P.	JARRISON																						
17	RIASCOS R.	LUISA	FERNANDA																					
18	IBARRA R.	KAREN	MELISSA																					
19	MORENO T.	VALERY	YISSEL																					
20	GOMEZ V.	JUAN	SEBASTIAN																					
21	HERNANDEZ V.	FRANK	DEIVY																					
22	MELENDEZ Z.	PAULA	ANDREA																					

Anexo 12. Formato para el diario de trabajo

Anexo 13. REDA manipulador virtual mercado matemático mágico de mendel

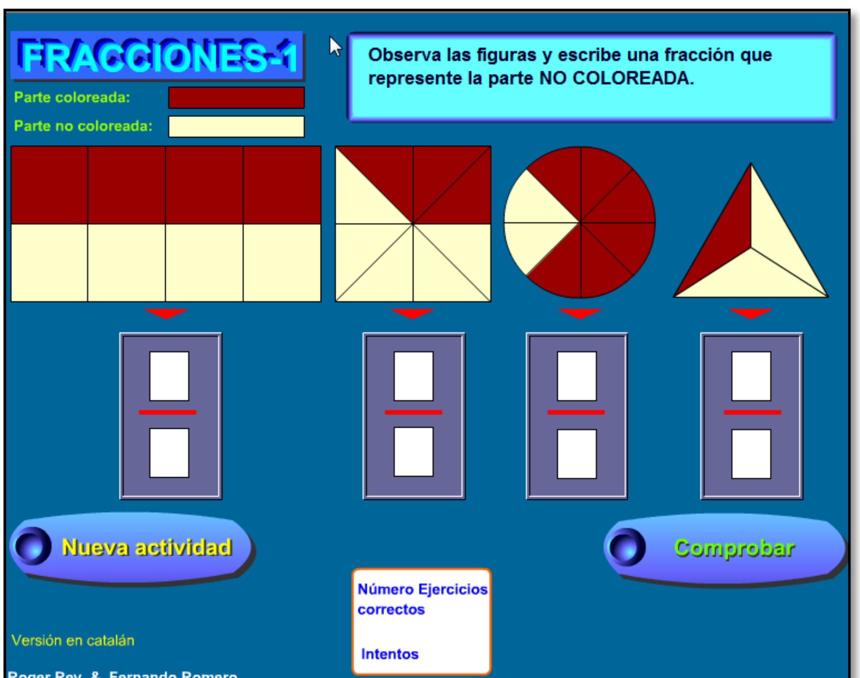
REDA 1. Fuente: Recuperado de
http://matematicasinteractivas.hol.es/MATES/files/fracciones_mercadomatematico.swf

Anexo 14. REDA manipulador virtual visualizador de fracciones



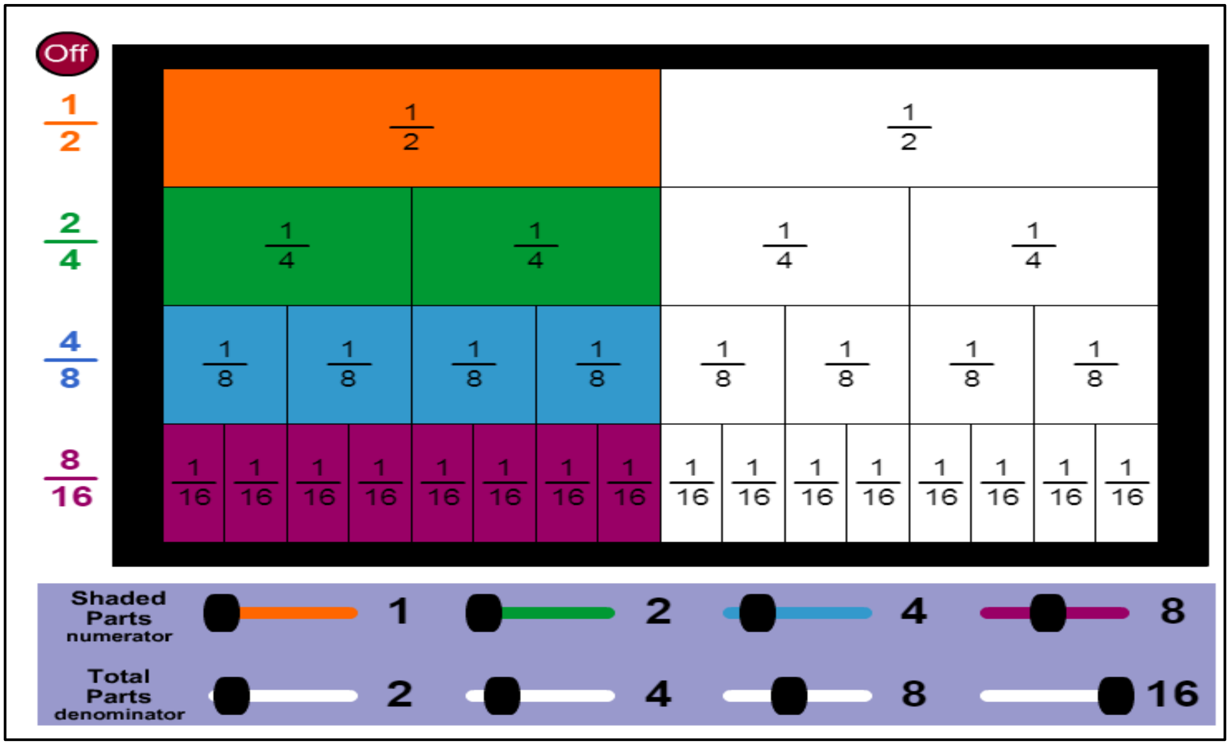
REDA 2. Fuente: Recuperado de https://www.visualfractions.com/IdentifySets/

Anexo 15. REDA manipulador virtual fracciones



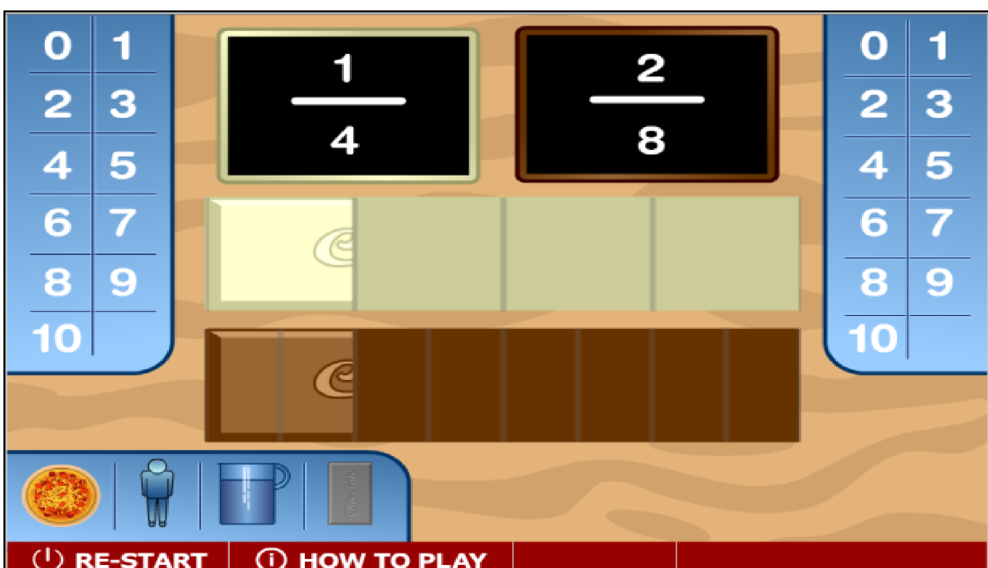
REDA 3. Fuente: Recuperado de http://matematicasinteractivas.hol.es/MATES/files/fracciones.swf

Anexo 16. REDA manipulador virtual barras de fracciones



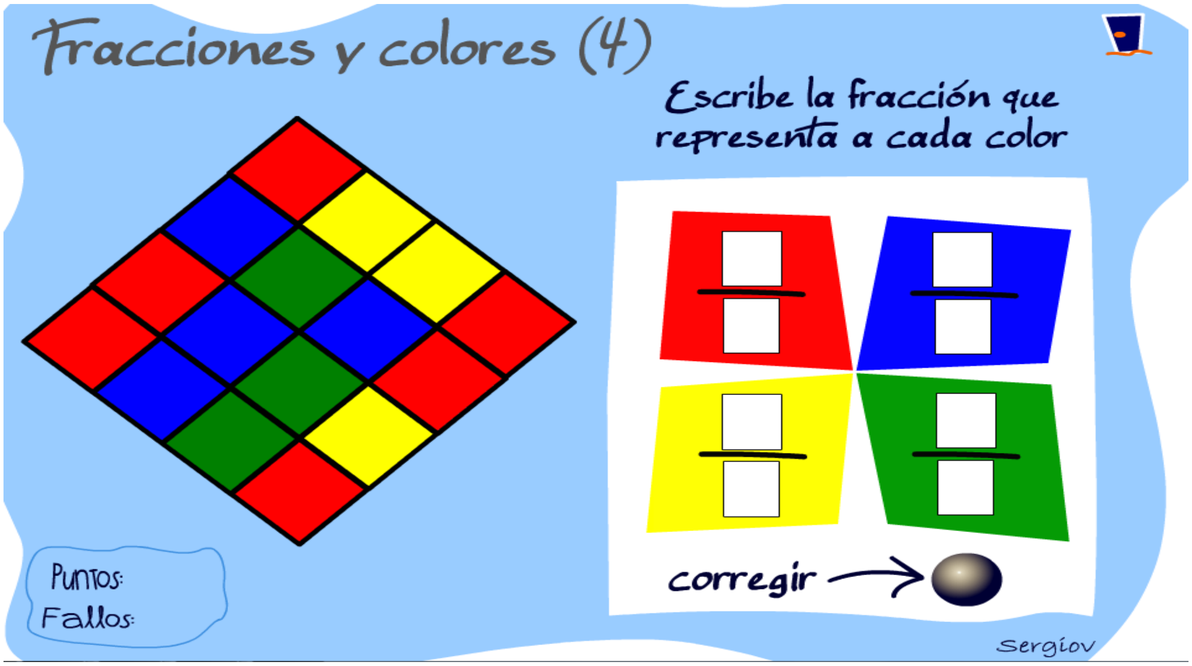
REDA 4. Fuente: Recuperado de https://www.mathplayground.com/Fraction_bars.html

Anexo 17. REDA manipulador virtual comparando fracciones



REDA 5. Fuente: Recuperado de http://matematicasinteractivas.hol.es/MATES/files/comparando-fracciones.swf

Anexo 18. REDA manipulador virtual fracciones y colores



REDA 6. Fuente: Recuperado de http://matematicasinteractivas.hol.es/MATES/files/Fraciones_Colores.swf

Anexo 19. REDA recurso digital historia de las fracciones

Anexo 20. Instrumento para recoger evidencias de aprendizaje situación uno

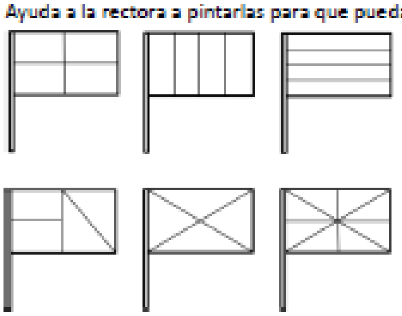
Institución Educativa Técnico El Ortigal

Maestría en Educación

Evidencia de aprendizaje Situación "pintando cuadriláteros"
Nombre:

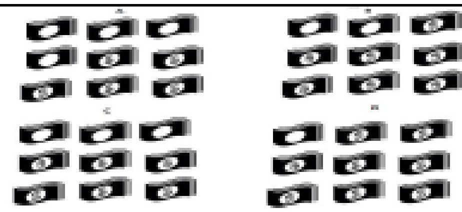
1. Cuál de las siguientes representaciones simboliza la fracción $\frac{2}{3}$

2. Un colegio realiza un concurso para elegir el diseño de su bandera. Se preseleccionaron las siguientes, pero aún falta darles color. La condición es que solo debe tener dos colores, y uno de ellos deber ser $\frac{1}{4}$ de la bandera. Ayuda a la rectora a pintarlas para que pueda escoger.



3. Martin ha comprado una rica chocolatina en la tienda del colegio. Él le comparte a su mejor amigo Juan $\frac{1}{4}$ de la chocolatina y Martin se come $\frac{3}{8}$. En la figura, la parte blanca corresponde a los trozos de chocolatina que Martin compartió y se comió. ¿Cuál de las figuras representa mejor la situación?

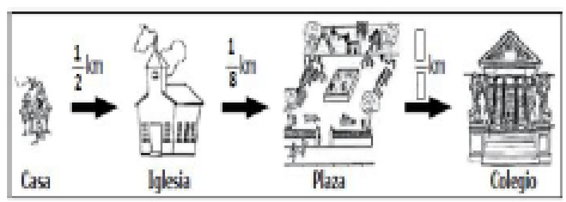
4. María se ha gastado $\frac{1}{3}$ del dinero que le dio su mama en una gaseosa. También se ha gastado $\frac{1}{9}$ de ese dinero en un pastel. Que figura representa la situación del dinero de María.



5. Empareja cada par de fracciones con una línea de tal manera que al unirlas formen el todo

$\frac{1}{2}$	$\frac{4}{4}$
$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{8}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{4}$
$\frac{3}{8}$	$\frac{7}{8}$
0	$\frac{3}{4}$
$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$

6. Marta sale de su casa para la escuela y realiza el total de recorrido que muestra la figura. Escribe la fracción del recorrido que le falta a Marta para llegar al colegio.



7. Cuál de los siguientes enunciados es falso

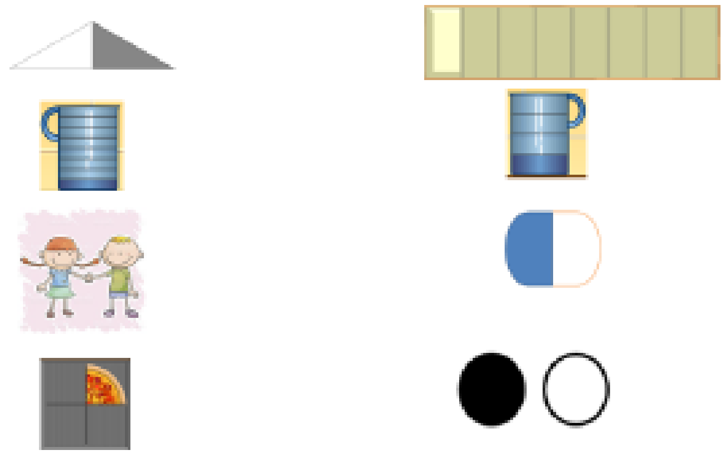
A. $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$

B. $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=1$

C. $\frac{4}{8}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=1$

D. $\frac{4}{8}+\frac{8}{4}=1$

8. Relaciona mediante una línea, las figuras que representan el mismo número fraccionario e indica cual es la fracción.



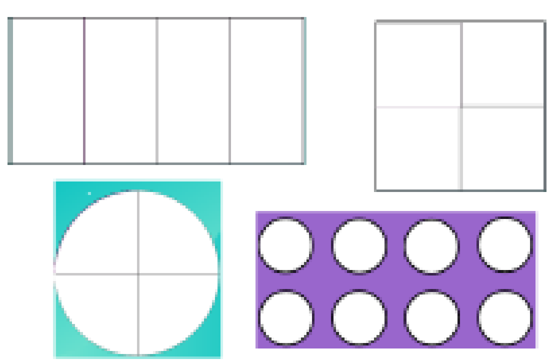
9. Camilo va a pintar su ventana de varios colores, ha decido que quiera pintar los vidrios de su ventana, $\frac{1}{2}$(la mitad) de uno de ellos amarillo, $\frac{1}{3}$ (tercera parte) de otro de color verde. El $\frac{1}{4}$ (cuarta parte) de otro azul y el otro todo rojo. Pinta la ventana de Camilo

¿Qué fracción de la ventana es amarillo?___________

¿Qué fracción de la ventana es verde?___________

¿Qué fracción de la ventana es rojo?___________

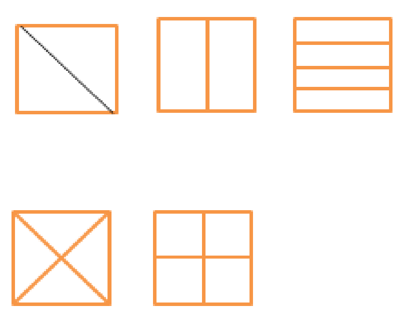
10. Representa la fracción $\frac{3}{8}$ en cada una de las siguientes figuras



Anexo 21. Secuencia Didáctica

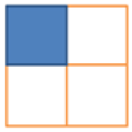
<table>
<tr><th colspan="3">Propuesta De Planeación Secuencia Didáctica Matemáticas Grado 5°</th></tr>
<tr><td colspan="3">Objetivos de aprendizaje:
- Identificar la fracción como una expresión que relaciona la parte con el todo
- Relacionar el número de partes del total con el número de partes a ser repartidos
- Comprender que las fracciones son parte de conjuntos, partes de un todo
- Entender que los objetos y un conjunto de objetos pueden dividirse en partes iguales
- Comprender que las tareas de reparto varían de acuerdo a la unidad</td></tr>
<tr><th>Tema</th><th>Estándar</th><th>Derechos Básicos de Aprendizaje – Mallas de aprendizaje</th></tr>
<tr><td>La fracción como parte todo</td><td>Interpreto las fracciones en diferentes contextos: situaciones de medición, relaciones parte todo, cociente, razones y proporciones</td><td>Interpreta y utiliza los números racionales en su representación fraccionaria para formular y resolver problemas aditivos, multiplicativos y que involucren operaciones de potenciación.
Evidencia de aprendizaje de los DBA
Interpreta la relación parte - todo y la representa por medio de fracciones, razones o cocientes.
Interpreta y utiliza números fraccionarios asociados con un contexto para solucionar problemas.</td></tr>
<tr><th colspan="3">VISIÓN GENERAL DE LA SECUENCIA</th></tr>
<tr><td colspan="3">La secuencia propondrá situaciones, desde el punto de vista de Brousseau, en las que los estudiantes aprenderán acerca de las fracciones como relación parte - todo (actividades geométricas y numéricas relativas a situaciones de la vida real), en contextos de medida y de reparto, mediante la interacción con diferentes materiales y recursos, más que la memorización de reglas y términos. Las situaciones que se implementarán tendrán actividades en torno a: repartos en discreto, medidas continuas, problemas rutinarios de fracciones como partes de un conjunto o de un todo y la notación fraccionaria.
Se espera ayudar a que los estudiantes comprendan mejor el "reparto" mediante experiencias en el aula ayudados de material concreto o Recursos Educativos digitales, dado que la comprensión del concepto de fracción, cuando se trata de la fracción de conjuntos, los estudiantes suelen pensar la "mitad" como cualquier parte de un todo, más que, una de dos partes iguales del todo. Otro desafío se podrá presentar con los problemas con figuras diferentes, dado que cambiar la forma de la figura es casi como cambiar el problema para el estudiante.</td></tr>
<tr><th colspan="3">Conceptos claves</th></tr>
<tr><td colspan="3">Concepto clave uno: La fracción se puede entender como una consecuencia de una partición igual, de un reparto igual, o como una parte del todo o parte de un conjunto.
Concepto clave dos: La tarea de reparto varía de acuerdo a la unidad.
Concepto clave tres: Un objeto o un conjunto de objetos pueden dividirse en partes iguales
Concepto clave cuatro: La partición igual sobre un todo o un conjunto, se representa simbólicamente, con esa representación se hace presente el concepto matemático, con él se registra y comunica el conocimiento sobre las matemáticas
Conceptos relacionados: La fracción se puede entender como una consecuencia de una partición igual, de un reparto igual, o como una parte del todo o parte de un conjunto. Los objetos y conjunto de objetos pueden dividirse también en partes iguales. Las tareas de reparto y de partición varían de acuerdo a la unidad. El reparto y partición igual sobre un todo o un conjunto se representa simbólicamente y con esa representación se hace presente el concepto matemático, con él se registra y comunica el conocimiento sobre las matemáticas.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th colspan="2">No Sesiones: 3</th><th colspan="2">Nombre de la situación uno: Pintando cuadrados</th></tr>
<tr><th>PREGUNTAS GUÍA</th><th>IDEAS CLAVES</th><th>EVIDENCIA DE APRENDIZAJE</th><th>Situación</th></tr>
<tr><td>¿Cómo se puede dividir un objeto o un conjunto de objetos en partes iguales?</td><td>• Las fracciones son partes de conjuntos, partes de un todo.
• Los objetos y conjunto de objetos pueden dividirse en partes iguales
• La fracción se puede entender como una consecuencia de una partición igual</td><td>• Divide un objeto en partes iguales
• Utiliza lenguaje común para expresar una parte de un todo
• Expresa que la suma de las partes forman el todo
• Reconoce el símbolo matemático para expresar una fracción
• Determina la expresión matemática asociada a una figura dividida en partes iguales de las cuales se ha coloreado varias de ellas.</td><td>Presentación de un video: la historia de la fracción
Propuesta de pregunta para responder al final de la secuencia didáctica: video del problema de los 19 camellos

Distribución del grupo: grupal (3 estudiantes)
Se reparte 2 figuras de cuadrados de papel. Se pide que hagan plegados que generen partes iguales (Dos partes iguales y cuatro partes iguales). Se espera que los estudiantes apliquen estrategias como medir o doblar obteniendo resultados como los siguientes:

Es necesario recalcar que las partes obtenidas deben ser iguales, dado que es un principio de las fracciones.

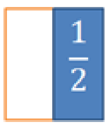
Pedimos que muestren los resultados para que los grupos verifiquen que existen diferentes estrategias y resultados.</td></tr>
</table>

Se solicita que tomen cada una de las figuras y la coloreen, rallen, hagan un dibujo, etc. de una de las partes obtenidas. Por ejemplo:



Preguntamos:
¿Cuántas partes se han coloreado?
Los alumnos responden una y preguntaremos ¿una de cuantas? Se espera que respondan: de dos.

Concluimos que se coloreo o utilizo una de las dos partes. Y decimos que se escribirá así: $\frac{1}{2}$
Se pide rotular con $\frac{1}{2}$ la parte coloreada.
(aun no nos referiremos a $\frac{1}{2}$ *como un medio*)

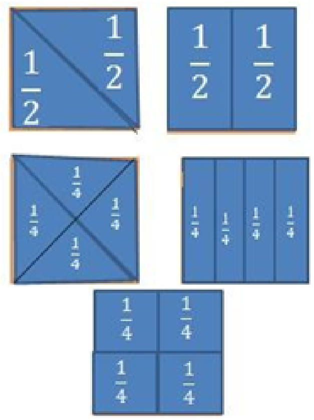


Realizamos el mismo ejercicio con el cuadrado dividido en 4 partes iguales.

Se debe ser incisivo en decir en que se coloreo las partes de 1 cuadrado.

A continuación formamos grupos de tres estudiantes y comparan sus cuadrados y la división que realizaron. Como se ha verificado anteriormente los tipos de divisiones realizadas cada grupo deberá tener los siguientes cinco cuadrados.

Se solicita a cada grupo que coloree o raye todas las partes de cada una de los cinco cuadrados.

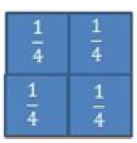


Se preguntará ¿Cuántas partes del cuadrado se han utilizado o coloreado? Esto para los cinco cuadrados.

Se espera la respuesta, dos o cuatro. Se espera también que se den respuestas como cuatro de las cuatro partes de 1 cuadrado, dos de las dos partes, según sea el caso.

Se será muy insistente en referirse que son partes de **1** cuadrado.

Solicitamos que con la tijera tomemos un cuadrado y lo recortemos por los dobleces. Por ejemplo el siguiente cuadrado



Preguntamos: ¿cuantas partes obtuvimos?
Se espera respuesta 4.
¿Qué sucede si unimos las 4 partes?
Se espera respuestas como: todo el cuadrado, 1 cuadrado. Se enfatiza aquí la palabra **todo** y **1**

Se muestra la siguiente relación (aquí unido no se da en el sentido de unión de conjuntos):

$\frac{1}{4}$ **Unido a** $\frac{1}{4}$ **unido a** $\frac{1}{4}$ **unido a** $\frac{1}{4}$ forma **todo** el cuadrado o **1** cuadrado

Se intenta asociar aquí que una de las cuatro partes, más una de las cuatro partes, más una de las cuatro partes, más una de las cuatro partes del cuadrado es igual a 4 de las cuatro partes de un cuadrado.

$\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{4}{4}=1$

De manera análoga se hace con uno de los cuadrados dividido en 2 partes iguales.

Una de las dos partes, más una de las dos partes de un cuadrado, es igual a dos de las dos partes de un cuadrado.

$\frac{1}{2}$ **Unido a** $\frac{1}{2}$ forma **todo** el cuadrado.

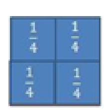
$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{2}{2}=1$
Este mismo ejercicio dependiendo del nivel de desempeño se pasara a estudiar los octavos de manera análoga.

Se refuerza con el REDA siguiente:

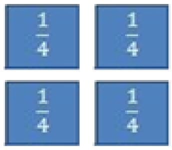
https://drive.google.com/file/d/0B8HVJjnaJNl5enRlcEJaYXBhMlk/view?usp=sharing

Fracciones para colorear

En los mismos grupos realizan la actividad donde deben escribir la fracción que represente la parte coloreada así como la no coloreada en una nueva actividad

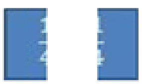
Ahora tomaremos del cuadrado 

y lo recortaremos según las divisiones

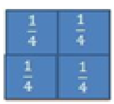


Se solicita tomar una de las partes obtenida y la definimos como el todo

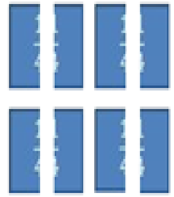
Se pide que lo dividan en dos partes iguales



Ahora se pregunta que este nuevo todo ¿Cuántas partes tiene?
Se espera que respondan 2 y estas se rotulan con $\frac{1}{2}$
Se pregunta que este es $\frac{1}{2}$ del todo $\frac{1}{4}$
Pero si queremos saber que fracción será del todo



Se tendrá que dividir cada cuarto en dos, obteniendo

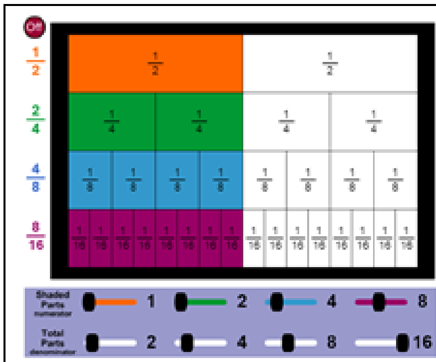


Se pregunta ¿en cuántas partes se ha dividido el todo?
Se espera que respondan 8, y pedimos rotularla con $\frac{1}{8}$

Se concluye que por esto $\frac{1}{2}$ de $\frac{1}{4}$ es $\frac{1}{8}$
Así mismo podemos entonces decir que

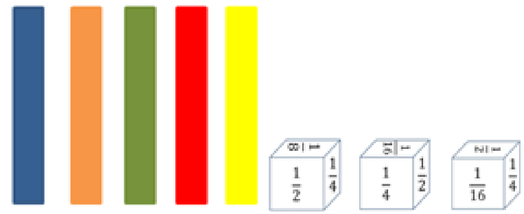
El todo (1) es igual a ocho partes de $\frac{1}{8}$ y representado simbólicamente $\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=1$
O mejor $\frac{8}{8}=1$
Complementamos realizando ejercicios con la página web

https://www.mathplayground.com/Fraction_bars.html



Con ayuda de ella realizamos ejercicios para relacionar partes del todo, estas barras permitirán dividir en partes hasta de 16 y da la oportunidad de comparas equivalencias entre fracciones e incluso orden en estos números

Instrumento adicional para evidencia de aprendizaje

No de sesiones:	3	Nombre de la situación dos: equipo de las fracciones	
PREGUNTAS GUÍA	**IDEAS CLAVES**	**EVIDENCIA DE APRENDIZAJE**	**ACTIVIDADES**
¿Cómo puedo partir un objeto en partes iguales? ¿Al unir las partes iguales en que se partió un objeto, que resultado tengo? ¿El todo con qué número natural se representa? ¿Qué se obtiene al unir las partes del todo? ¿Cómo rotulo o etiqueto este número de partes? ¿las fichas están etiquetadas de una forma particular, qué significan los números? ¿Qué relación existe entre los pedazos con la tira entera?	La fracción se puede entender como una consecuencia de una partición igual, de un reparto igual, o como una parte del todo o parte de un conjunto. Un objeto y un conjunto de objetos pueden dividirse en partes iguales. La partición igual sobre un todo, se representa simbólicamente, con esa representación se hace presente el concepto matemático	- Establece la relación de orden entre fracciones como $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$ - Comprende que un todo se puede dividir en partes iguales y la unión de esas partes forman el todo. - Comprende que las fracciones son partes iguales de un todo y el todo lo asocia al número uno	**Distribución del grupo:** grupos de 4 estudiantes **Materiales:** 5 tiras de cartulina plana de diferentes colores (dimensión sugerida 10 cm x 64 cm), tijeras, bisturí, dado de fracciones con las seis caras etiquetadas como sigue: ½, ¼, 1/8,1/8, 1/16,1/16.  Se darán las siguientes instrucciones a los estudiantes: **1.** Tomar una tira de cartón de un color particular (azul por ejemplo), y deberán cortarla en dos pedazos iguales. Aquí los estudiantes podrán utilizar estrategias diferentes, una podrá ser medir con una regla y calcularan la mitad de esa medida, otros optaran por hacer un doblez. Es necesario ser insistente que las partes obtenidas de ser iguales. **2.** Etiquetar cada pieza obtenida con $\frac{1}{2}$. Se explicará que el todo (la tira entera) ha sido dividido en dos pedazos del mismo tamaño. Cada trozo es uno de dos pedazos, y la notación es $\frac{1}{2}$ que significa uno de los dos pedazos iguales. **3.** Escoger una segunda tira, y cortarla en cuatro pedazos iguales. Se comentará que cada pedazo, es uno de cuatro pedazos

Si sacan la fracción $\frac{1}{4}$ y necesitan $\frac{1}{8}$, ¿por qué piensa que está no servirá? ¿Qué puede decir del tamaño de las piezas? ¿Cómo se diferencian? ¿Cómo podemos verificar que un grupo ganó el juego? ¿Si la tira se rompe en cuatro partes iguales, entonces cuantos pedazos necesitan para hacer la tira?			iguales **4.** Etiquetar con $\frac{1}{4}$ en cada pedazo **5.** Así mismo doblar, cortar y etiquetar una tercera tira de cartón en ocho pedazos iguales y etiquetar con $\frac{1}{8}$, y una cuarta tira en dieciséis pedazos iguales y etiquetar con $\frac{1}{16}$. **6.** Dejar la quinta tira de cartón entera y se etiquetará con 1 o $\frac{1}{1}$. Este proceso se espera contribuya a que los estudiantes comprendan como tomaron tiras enteras y han formado partes más pequeñas, o fracciones, del todo. Al realizar los dobleces, recortes y etiquetando las piezas los estudiantes relacionan la notación fraccionaria con las piezas concretas y pueden comparar el tamaño de las partes. Infiriendo por ejemplo que $\frac{1}{4}$ es más grande que $\frac{1}{16}$, además los estudiantes pueden comparar y mostrar que dos pedazos de $\frac{1}{8}$ son equivalentes a uno de cuatro ($\frac{1}{4}$) Aquí aún no se utilizara la expresión, un medio, un cuarto, etc. Se utilizará uno de dos, uno de cuatro, unos de ocho, etc. **Juego de cubrir** Con los pedazos obtenidos (fichas): 

Preguntas:
¿Por qué y cómo etiquetamos los pedazos de esta forma particular?, ¿Qué significan los números? ¿Qué relación existe entre los pedazos con la tira entera?

Se realiza el siguiente juego:

Cada jugador (grupo) tiene como referencia su tira entera, es su tablero de juego. La meta es cubrir la tira completamente con las fichas. Una condición será que es prohibido superponer dos piezas.

1. Cada grupo tiene un turno para tirar el dado de las fracciones.
2. La cara del dado que quede encima, dice que tamaño de pieza (ficha) colocar sobre la tira completa.
3. Si un grupo solo necesita una ficha para ganar como por ejemplo $\frac{1}{8}$ o $\frac{1}{16}$, las fichas $\frac{1}{2}$ o $\frac{1}{4}$ no servirán. El grupo debe sacar lo que necesita exactamente, no puede utilizar una ficha más grande.

Preguntas para los estudiantes:

- Si saca en la cara superior la fracción ¼ y usted necesita 1/8, ¿por qué piensa que está no servirá? ¿Qué puede decir del tamaño de las piezas? ¿Cómo se diferencian? Se espera que los estudiantes justifiquen su razonamiento usando las fichas. Así mismo se espera que, los estudiantes vean que ¼ es mucho más grande que 1/8.
- ¿Cómo podemos verificar que el grupo ganó el juego? Unos estudiantes responderán, porque cubrió la tira. Entonces se preguntará, ¿La tira entera con expresión se etiquetó?, Se espera que respondan con 1 o 1/1.
- Luego se determinará que al unir las fichas se deberá obtener 1 o 1/1.

Se harán adicionalmente las preguntas siguientes:

- ¿Si la tira se rompe en cuatro partes iguales, entonces cuantos pedazos necesitan para hacerla tira?
- ¿Si la tira se rompe en ocho partes iguales, entonces cuantos pedazos necesitan para hacerla tira?

Si es necesario los estudiantes se apoyaran en el material concreto para verificar sus respuestas o para determinarlas.

En ese momento se escriben las fichas con las que el grupo ganó. Por ejemplo $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}$ (asumiendo que es correcto).

Indicamos que para hacer la prueba numérica debemos descomponer las fichas, en las fichas más pequeñas. Preguntamos ¿de las 4 fichas cual es la más pequeña?, Se espera que en este momento y con la ayuda del material concreto los estudiantes ya determinen que es $\frac{1}{8}$ la ficha más pequeña.

Se preguntará:
¿En la ficha $\frac{1}{2}$, cuantas fichas $\frac{1}{8}$ caben?
¿En la ficha $\frac{1}{4}$, cuantas fichas $\frac{1}{8}$ caben?

Se escribirá en el tablero entonces:
$\frac{1}{8}\frac{1}{8}\frac{1}{8}\frac{1}{8}\ \ \frac{1}{8}\frac{1}{8}\ \ \frac{1}{8}\ \ \frac{1}{8}$

En este momento puede ser conveniente decirle a los estudiantes que esta escritura la podemos simplificar así:

$\frac{4}{8}\frac{2}{8}\frac{1}{8}\frac{1}{8}$

¿Cuántas fichas de $\frac{1}{8}$ se tienen en total?
Se espera que respondan ocho.

Volvemos a preguntar

¿La tira entera con cuantas fichas de $\frac{1}{8}$ se llena?
Esto con la intención de que observen que son con ocho y por lo tanto será correcto la solución del juego.

Todos los procedimientos se harán con ayuda del material concreto (fichas) con el que cuentan los estudiantes

Es conveniente plantear una solución del juego donde las fichas o se pasen del total o falten y realizar el mismo razonamiento.

A estas alturas, los estudiantes deberían darse cuenta que varias partes iguales hace una tira entera.

Solicite a cada grupo que elabore una manera de crear una tira entera usando diferentes pedazos y que verifiquen su solución descomponiendo en las fichas más pequeñas.

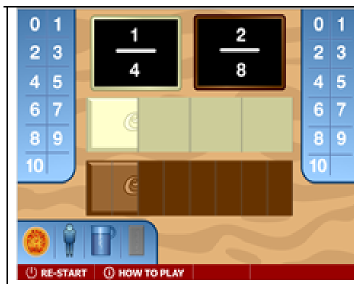
Esta sería una buena oportunidad para introducir la suma de fracciones, dado que

$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=1$
La suma de las fichas que cubrieron 1 tira

$\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=1$
Escribiendo la suma en términos de la ficha mas pequeña

$\frac{8}{8}=1$
La tira entera se completa con 8 fichas de $\frac{1}{8}$

Aplicativo Flash para reforzar el concepto



Con este aplicativo los estudiantes tienen la oportunidad de comparar la parte con el todo en diferentes representaciones continuas. Podrán evidenciar como fracciones como $\frac{1}{4}$ y $\frac{2}{8}$ son equivalentes, dado que representan la misma cantidad

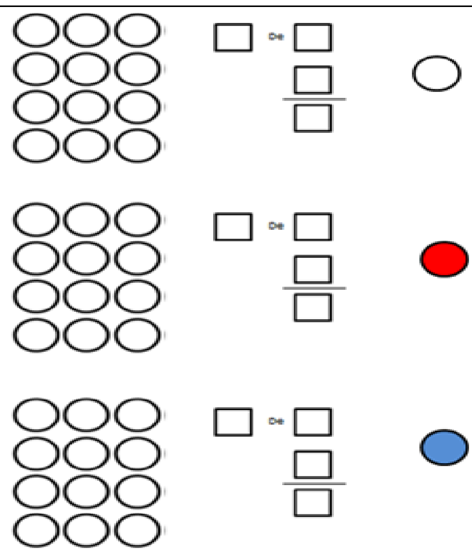
Instrumento para evidencia de aprendizaje

Evaluación

Observar si:

- Existe habilidad para distinguir varias partes de la tira.
- Relacionan las diferentes partes
- Prueban a través de comparaciones que una fracción es más grande o más pequeña que otra.
- Establece la relación de orden entre fracciones como 1/2, 1/4, 1/8, 1/16
- Comprende que un todo se puede dividir en partes iguales y la unión de esas partes forman el todo.
- Comprende que las fracciones son partes iguales de un todo y el todo lo asocia al número uno

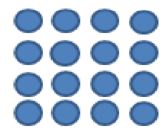
No de sesiones: 3		**Nombre de la situación tres:** Bolas de colores	
PREGUNTAS GUÍA	**IDEAS CLAVES**	**EVIDENCIA DE APRENDIZAJE**	**ACTIVIDADES**
¿Cómo puedes determinar que parte de las bolas son de un color particular (N-R-A) de un total de 20?	Las tareas de reparto varían de acuerdo a la definición de la unidad	• Relaciona el número de partes del total con el número de partes a ser repartidos • Establece una relación entre el total de bolas de un color y el número de bolas totales	**Material:** - 20 bolas de tres colores diferentes (en general 20 objetos con igual característica en forma pero de tres colores diferentes): 10 negras, 6 rojas, 4 azules. - Hoja por estudiante con 20 círculos impresos - Colores o lápiz **Distribución del grupo:** individual Se entrega de manera aleatoria una bola a cada estudiante. Posteriormente se solicita levantar la mano con la bola del color que se pida y un estudiante realiza el conteo. En la hoja con los círculos se solicita pintar o marcar con una letra (N-R-A), el número de círculos contados. Se repite este proceso con las bolas de los 2 colores restantes. Se preguntará: ¿Cuántos del total de círculos (bolas) son negros? Se espera respuestas como, 10 de 20 ¿Cuántos del total de círculos (bolas) son rojos? Se espera respuestas como, 6 de 20 ¿Cuántos del total de círculos (bolas) son azules? Se espera respuestas como, 4 de 20 Se indicará que en lugar de 10 de 20 escribiremos $\frac{10}{20}$, en lugar de 6 de 20 escribiremos $\frac{6}{20}$, y en lugar de 4 de 20 $\frac{4}{20}$ Aun no nos referiremos a esta notación con términos fraccionales como numerador o denominador. La raya se leerá "de", es decir con lenguaje común.



Apoyo a través del REDA

Este recurso digital da la oportunidad a los estudiantes de relacionar el denominador y el numerador en un contexto de parte todo, se muestra por ejemplo tres manzanas que el toca con una varita y va haciendo el conteo, que a la vez aparece en la caja donde ira la fracción. Posteriormente con la varita toca una manzana y la vuelve verde. El recurso le dirá "una de las tres manzanas es verde" y aparece en la caja el número un tercio. Cada vez que termina pide hacer otro ejercicio diferente.

Más adelante proponen ya otro ejercicio de arrastrar para relacionar los trozos de naranja según el color

			Evaluación Formativa: Técnica de observación directa, instrumento de recolección de datos será la rúbrica. Rondas de aprendizaje por los grupos de trabajo cooperativo para realimentar y apoyar el trabajo de los estudiantes. Diario anecdótico o de campo
¿Cómo puedes repartir 16 galletas que hay en una caja a 4 niños, de tal manera que no sobren galletas en la caja? ¿Cuál es la porción para cada niño? ¿Cómo puedes repartir 12 galletas que hay en una caja a 4 niños, de tal manera que no sobren galletas en la caja? ¿Cuál es la porción para cada niño?	Las tareas de reparto varían de acuerdo a la definición de la unidad	• Relaciona el número de partes del total con el número de partes a ser repartidos • Realiza arreglos en columnas y filas para realizar el reparto • Elabora un arreglo agrupando en conjuntos más pequeños • Establece una relación entre galletas y niños (por ejemplo 4 de 16)	**Distribución del grupo:** Grupos de tres estudiantes **Materiales por grupo:** 16 galletas en una caja o bolsa, o 16 galletas impresas en cartulina Se entrega a cada grupo las 16 galletas en una caja y se preguntará: ¿Cómo puedes repartir 16 galletas que hay en una caja a 4 niños, de tal manera que no sobren galletas en la caja? ¿Cuál es la porción para cada niño? - Se espera que los estudiantes razonen sobre como distribuir las galletas igualmente. Se observará los arreglos que hagan los estudiantes con las galletas. Algunos arreglos esperados serán: 

Se espera que al razonar sobre los arreglos en 4 filas y 4 columnas comprendan que le corresponde a cada niño 4 galletas

Si realizan este arreglo se espera que razonen al observar los 4 conjuntos y determinen que a cada niño le corresponde 4 galletas.

Se podrá ir introduciendo lenguaje natural para interpretar este reparto, es decir, se dirá que a cada niño le corresponde 4 de 16 galletas.

- Se propondrán más ejercicios similares para evidenciar que los estudiantes comprenden el concepto reparto igual:

Proponemos de manera similar la pregunta cambiando el número de niños a realizar el reparto:

- 8 niños
- 2 niños

De igual manera se realizara la observación de los arreglos hechos con las galletas por los grupos de estudiantes.

Como la tarea de reparto varía de acuerdo a como está definida la unidad entonces se cambiará el número de galletas a repartir.

Se propondrá la pregunta:

¿Cómo puedes repartir 12 galletas que hay en una caja a 4 niños, de tal manera que no sobren galletas en la caja?

¿Cuál es la porción para cada niño?

Los esquemas con las galletas esperados serán los siguientes:

Se espera que al razonar sobre los arreglos en 4 filas y 3 columnas comprendan que le corresponde a cada niño 3 galletas.

Si realizan este arreglo se espera que razonen al observar los 4 conjuntos y determinen que a cada niño le corresponde 3 galletas.

Se podrá ir introduciendo lenguaje natural para interpretar este reparto, es decir, se dirá que a cada niño le corresponde 3 de 12 galletas.

A continuación se presenta el REDA (Fracciones y colores)

Este se trabaja en los grupos formados en la actividad anterior. En primera instancia se realiza una instrucción del manejo del aplicativo, para posteriormente los estudiantes realicen varios ejercicios hasta lograr una mayor apropiación del concepto abordado que se evidenciara en los puntos y fallos que me arroja el recurso en una de sus funciones