AXIOMÁTICA Y REALIDAD A TRAVÉS DE LAS GEOMETRÍAS NO EUCLIDIANAS

Jorge Armando Ortega Erazo

Universidad del Cauca

Facultad de Ciencias Naturales, Exactas y de la Educación

Maestría en Educación

Popayán

2018

AXIOMÁTICA Y REALIDAD A TRAVÉS DE LAS GEOMETRÍAS NO EUCLIDIANAS

JORGE ARMANDO ORTEGA ERAZO

Trabajo de grado

Presentado como requisito para optar al título de Magister en Educación

Directora

Doctora Martha Lucía Bobadilla Alfaro

Universidad del Cauca

Facultad de Ciencias Naturales, Exactas y de la Educación

Maestría en Educación

Popayán

2018

Nota de aceptación

Director: **Doctora Martha Lucía Bobadilla Alfaro**

Jurado externo: **Doctora Maribel Patricia Anacona**

Jurado interno: **Doctor Elkin Darío Cárdenas**

Coordinador de la Maestría: **Magister Pedro Anibal Yanza**

Fecha de sustentación: 16 de agosto de 2018

Dedicado a toda mi familia.

AGRADECIMIENTOS

Doy infinitas gracias a:

Dios por darme salud para poder cumplir mis metas.

A mis queridos padres y hermanos por su apoyo incondicional y la confianza y paciencia puestas en mí.

A mi novia por la ayuda y compañía en toda esta etapa de mi vida.

A mi directora la doctora Martha Bobadilla por su gran colaboración en esta etapa de mi formación.

A todos los profesores que estuvieron presentes durante toda mi evolución académica.

Jorge Armando Ortega Erazo

Universidad del Cauca

Agosto de 2018

ÍNDICE GENERAL

RESUMEN

En este trabajo se realiza un estudio histórico epistemológico acerca de las geometrías no euclidianas, de sus orígenes, su surgimiento, su formalización y su consolidación gracias a la física. Estas geometrías son un claro ejemplo de teoría matemática que nace desde lo abstracto[1] y luego llega a lo concreto[2] por medio de representaciones visuales y trabajos físicos. Cada una de estas geometrías, por lo menos la elíptica y la hiperbólica, poseen su propio sistema axiomático; mediante la confrontación de estos sistemas axiomáticos con el euclidiano se reevaluará el concepto de axioma como una verdad absoluta. Además, se utilizará esta confrontación para caracterizar la relación concreto-abstracto que se presenta en el proceso de construcción de conocimiento matemático. Luego se utilizarán estas ideas para construir unas sesiones de clase para el curso de pensamiento matemático, orientado en la Universidad del Cauca en los programas de matemáticas y licenciatura en matemáticas.

[1]Entendiendo abstracto como el proceso mental de construcción y análisis de los sistemas axiomáticos. Luego, cuando en este documento hacemos referencia a la axiomática, estamos haciendo referencia también a lo abstracto.

[2]Lo concreto lo interpretamos como el mundo sensible, el que es percibido por nuestros sentidos. Desde este punto de vista, existirán realidades que no son concretas, como la forma del espacio.

INTRODUCCIÓN

La presente investigación es un estudio histórico que centra su atención en las ideas más importantes que rodearon la aparición de las teorías sobre geometrías no euclidianas. Además de estudiar consideraciones importantes de grandes matemáticos respecto a la axiomática y a la realidad, el trabajo termina proponiendo un plan de unidad para un curso universitario.

De acuerdo a la clasificación que presenta Anacona (2003), nuestra investigación es de corte histórico-epistemológico, en la que pretendemos evidenciar los elementos lógicos y epistemológicos que fueron claves en el proceso de constitución de las geometrías no euclidianas[3]. En el desarrollo del trabajo se estudiarán los sistemas axiomáticos de estas geometrías y su relación con la realidad. Específicamente, nos concentraremos en la evolución que tuvo el quinto postulado[4], sabiendo que dicha evolución fue la que dio paso a la construcción de las nuevas teorías geométricas, las que al mismo tiempo contribuyeron en la sustentación de la teoría física de la relatividad; teoría que permitió el abordaje al estudio de la forma del espacio. Por tanto, la investigación permitirá ver el camino que recorrieron las matemáticas desde lo axiomático hasta lo concreto.

[3] Además de llevar estos elementos al aula con una propuesta de plan de unidad.

[4] Enunciado que hace parte de la axiomática de la geometría euclidiana.

Dentro de la investigación utilizaremos la historia como un puente entre ciencia y educación. Partiendo del hecho de que las matemáticas son una construcción humana y mediante una propuesta de plan de unidad, queremos llevar la construcción de las geometrías no euclidianas al aula. Lo anterior con el fin de propiciar en el estudiante un acercamiento distinto al conocimiento matemático, dándoles la oportunidad de construir teoría. Pues, según Anacona (2003):

> «Esta consideración humanizante de la ciencia genera en el aprendiz una posición distinta frente al conocimiento y estimula en él una participación analítica, crítica y creativa, distinta de aquella que se obtendría a partir de una exposición estática y acabada de los conceptos, en la cual todo está perfectamente terminado y donde las múltiples contingencias de construcción teórica quedan ocultas.» (p 41).

Para trabajar sobre las ideas anteriormente mencionadas se establecieron los siguientes objetivos: el principal, identificar la relación entre axiomática y realidad a través de la evolución histórica de las geometrías no euclidianas. Los específicos, realizar un análisis histórico epistemológico de la constitución de las geometrías no euclidianas, analizar diversos planteamientos respecto a la relación entre axiomática y realidad; y finalmente diseñar actividades didácticas, dirigidas a estudiantes de matemáticas, para conducirlos de lo concreto hacia lo axiomático.

No cabe duda que la combinación entre la investigación histórica y las ideas de grandes pensadores matemáticos como Poincaré y Hilbert nos propició el material más importante que permitió hablar con firmeza de la relación existente entre la axiomática y la realidad.

Para dar cumplimiento a los objetivos, en el primer capítulo se exponen algunas ideas de Hilbert, Poincaré y Haddamard en relación con los sistemas axiomáticos y con la forma que deben presentarse al estudiante. Luego, se toman algunas conclusiones que se consideran importantes y basados en ellas se construye, en el tercer capítulo, el plan de unidad tomando como guía principal la investigación histórica. Pues, según Piaget y García (1984): «los estados que tienen lugar en un instante dado no pueden ser comprendidos sino a partir de su historia pasada.» (p 252).

Entre las conclusiones más importantes destacamos la de Poincaré que aclara que los axiomas no son verdades absolutas, que están sujetos a cambios y más aún que se pueden construir. También, y ayudados por las ideas de Hadamard, se elabora dicho plan de unidad dando prioridad a lo que Haddamard llama acumulación de ideas en los estudiantes; con el fin de que el estudiante alcance un grado de invención. Estos planteamientos los utilizaremos para el diseño de las sesiones didácticas que expondremos en el tercer capítulo; lo que se constituirá en uno de nuestros aportes a la educación matemática.

Es así como se pueden apreciar tres capítulos dentro del documento. En el primero escribimos acerca de las axiomáticas y sus relaciones con la realidad, en el segundo hacemos un análisis histórico sobre la aparición de las teorías geométricas no euclidianas y el tercero surge como la conclusión y articulación de los otros dos. Hemos tomado como referencias principales Hilbert (1993), Poincaré (1984), Haddamard (1947), Bonola (1945) y Campos (1994); estos dos últimos se convirtieron en los textos más importantes para la exposición de la parte histórica de la investigación. El capítulo tres se fue construyendo en la medida que se iba haciendo la investigación histórica.

En el primer capítulo resaltamos lo concreto de las matemáticas y cómo estas se fueron construyendo a partir de experiencias y necesidades humanas. También tratamos de explicar cómo la axiomática euclidiana está influenciada por aspectos concretos. Luego, mostramos el importante papel que jugan las rupturas de pensamiento en la construcción de conocimiento matemático y reevaluamos la concepción tradicional del concepto de axioma[5].

[5]Sobre todo en los cursos del programa de matemáticas, en los cuales el axioma se acepta solo porque ya está construido y lo escribe el profesor. En la mayoria de estos cursos las clases se presentan tradicionales, partiendo del axioma para empezar a construir la teoría. Casi no se tiene en cuenta que el axioma debería ser el punto de llegada y no el punto de partida.

En el segundo capítulo se exponen los resultados de nuestro análisis hitórico, eje de la investigación. En este capítulo se quiere resaltar el viaje que hicieron las geometrías, desde lo axiomático hasta lo concreto. Es decir, cómo fue que los estudios durante casi veinte siglos dentro de una axiomática propuesta para una geometría, dieron paso al descubrimiento de una realidad como lo es la forma del espacio. Aquí concentramos nuestro interés en el postulado de las paralelas cuyo análisis permitió la construcción axiomática de las nuevas geometrías. Mostraremos que su recíproco es un teorema, lo cual llevó a muchos pensadores a querer demostrarlo a partir de los otros cuatro postulados euclidianos. Hubo gran cantidad de intentos durante muchos siglos pero sin conclusión alguna. Fue solo hasta el siglo $XVII$ con los trabajos de Gerolamo Saccheri que se empezó a aclarar el tema con respecto a este enunciado geométrico. Lo curioso con este matemático, fue que creyó tener la prueba de que con un enunciado diferente[6] al quinto postulado no se podía hacer geometría y que la única posible era la de Euclides. Lo que nunca advirtió fue que sus suposiciones, que para él tenían que ser contradictorias, darian lugar a teorías consistentes: las geometrías no euclidianas.

Estas nuevas teorías geométricas llegan al patrimonio científico público gracias a Lobachevsky, siendo el primer matemático en atreverse a publicar sobre este tema, ya que por miedo a la sensura, muchos de sus antecesores no lo habían hecho. Es por esta época que las nuevas geometrías adquieren sus propios sistemas axiomáticos gracias a Lobachevsky[7] y sus propios modelos de representación gracias a Beltrami, estaban un paso más cerca de la total aceptación científica[8]. Fue la física la que las llevó hacia dicha aceptación, cuando las empezó a utilizar en sus trabajos. Más específicamente fue el físico Albert Einstein el

[6]Saccheri trabajó por reducción al absurdo con las negaciones del quinto postulado.

[7]En principio los trabajos de Lobachevsky fueron duramente criticados y solo hasta 1868, cuando Beltrami construye un modelo euclidiano para su geometría, es que logra su reconocimiento científico y deja de ser una exposición abstracta de ideas, para convertirse en una teoría con significado real. Tomado de Anacona, M y Arboleda, L (1994).

[8]Hay que resaltar que cerca al siglo XIX, las teorías matemáticas necesitaban de cierta aplicabilidad que ofrecia la física para su aceptación. No obstante, tenemos claro que esa es apenas una forma de hacer matemáticas.

personaje que le dio el reconocimiento final que necesitaban las geometrías no euclidianas al utilizarlas dentro de sus investigaciones, que entre otras muchas cosas, hablaban de la verdadera forma del espacio.

Es así como las geometrías no euclidianas terminan su viaje entre la axiomática y la realidad, haciéndose consistentes, representables y aplicables.

Reiteramos que fueron todas estas ideas, conjugadas con los planteamientos de Hilbert, Poincaré y Haddamard, lo que nos permitió la construcción del plan de unidad que se presenta en el tercer capítulo; que consideramos es nuestro aporte concreto a la educación matemática.

CAPÍTULO 1

AXIOMÁTICA Y REALIDAD SEGÚN POINCARÉ, HILBERT Y HADAMARD

Las matemáticas, como actividad propiamente humana, tienen sus orígenes en lo concreto, en la experiencia empírica; aparecen como consecuencia de necesidades culturales como la de medir o la de contar. Por ejemplo los primeros resultados de la geometría, el lenguaje más concreto de las matemáticas, encuentran sus inicios en la necesidad del ser humano de medir, más específicamente de medir la tierra; claro está, con una medida empírica directa, pues el concepto matemático de medida fue estudiado mucho después de sus orígenes. Estos primeros resultados geométricos, luego de establecidos y verificados desde la experiencia[1], le abren camino a la abstracción, al lenguaje estricto y a la axiomatización. Se empiezan a construir teorías matemáticas partiendo de supuestos indemostrables llamados axiomas que permiten visualizar la demostración de un resultado matemático verificado ya desde lo concreto; se resalta aquí la axiomatización construida por Euclides en los *Elementos* para demostrar un resultado que ya estaba siendo utilizado para medir: el teorema de Pitágoras. Es decir, Euclides llevó la geometría desde la realidad

[1]Resultados observables de mediciones que se pueden verificar en el mundo concreto, en la realidad sensible, como por ejemplo el teorema de Pitágoras.

hacia la axiomática.

Es así como la geometría se empieza a mover entre lo concreto y lo abstracto después de la aparición de la axiomática euclidiana; en primer lugar desde la realidad hacia la axiomática. Cuando Euclides construye sus axiomas para demostrar un hecho concreto está realizando este viaje. Cabe resaltar que dentro de esa construcción axiomática, Euclides deja ver un notorio rasgo de intuición. Por ejemplo cuando define la recta y la interpreta como una cuerda tensada[2]. Quiza ese rasgo intuitivo fue lo que ayudó a la geometría euclidiana a permanecer dentro de la comunidad académica a lo largo de la história.

No obstante, el sistema de axiomas construido por el geómetra fue muy criticado durante mucho tiempo, especialmente por el quinto postulado. Todas esas críticas al sistema euclidiano permiten afirmar que la construcción de axiomas debe ser un proceso muy cuidadoso, pues según sea la elección de estos enunciados, menos inconvenientes encontrará la teoría en su desarrollo. Euclides construyó matemáticas construyendo axiomas, partió de lo concreto[3] y llegó a lo abstracto[4]. Cabe resaltar que las matemáticas «deben» partir de lo concreto y siempre que sea posible, regresar a lo concreto, aunque a veces ese regreso tarde siglos o simplemente sea un encuentro inesperado en la investigación.

Pero no podemos quedarnos solamente con la idea de que los axiomas son producto de la realidad, ni que ellos son enunciados que se construyen únicamente después de analizado y observado el hecho concreto, pues muchas veces tal hecho no es percibido por ninguno de nuestros sentidos. Es solo la investigación científica la que dará paso al conocimiento de ciertas realidades que son imperceptibles bajo el análisis de nuestra observación. Por ejemplo, la concepción del espacio euclidiano, que solo queda aclarada después del estudio

[2]Una visión topográfica del significado de recta.

[3]Al menos en su primer libro se puede observar que construye todo ese armazón axiomático para demostrar el resultado concreto del teorema de Pitágoras.

[4]Lo abstracto entendido como la construcción del sistema axiomático expuesto en el libro I de su obra *Elementos*.

realizado a la axiomática de los *Elementos* de Euclides.

En esta investigación estudiaremos el análisis que se le hizo por casi veinte siglos al quinto postulado de Euclides. Después de este estudio, podremos concluir que fue este análisis que se realizó dentro del sistema axiomático, el que dio paso al conocimiento de una realidad muy cercana aunque imperceptible, el espacio. Es decir, veremos, en el caso de las geometrías no euclidianas, cómo las matemáticas se mueven desde la axiomática hacia la realidad.

Finalmente resaltemos que encontrar relaciones entre los sistemas axiomáticos y la realidad debe convertirse en una actividad matemática. Querer que todas las teorías matemáticas regresen a lo concreto es una utopía, pero afortunadamente el estudio histórico de las geometrías no euclidianas nos permiten hacer ese recorrido. Para desarrollar esta actividad matemática, se hace indispensable el estudio de los sistemas axiomáticos, además de la verificación constante de los resultados obtenidos bajo estos sistemas con el fin de extraerlos un poco de ese mundo lógico. Para ello, una de las formas de contribuir a dicha relación, será viendo los axiomas en funcionamiento. Esto se puede lograr construyendo imágenes o dibujos concretos que permitan observar el axioma en acción. Otra forma también sería, intentar poner a prueba los resultados matemáticos en lo concreto, dado que el trabajo puramente lógico[5] es solo una parte del trabajo de los matemáticos. Dicho trabajo lógico lleva a las matemáticas a construir proposiciones lógicamente verdaderas, la otra parte del trabajo debería consistir en buscarle aplicabilidad a esas proposiciones encontradas.

[5]Cuando solo se trabaja en el papel avanzando con implicaciones lógicas y sin tener en cuenta los posibles escenarios en los cuales estos avances pudieran contribuir.

1.1. Los sistemas axiomáticos y la historia

Algo que pretendemos con esta investigación es identificar cómo se da el desarrollo de pensamiento matemático, resaltando que en las matemáticas son necesarias las rupturas para acceder a nuevos conocimientos; aspecto indispensable a tener en cuenta en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Tales rupturas, necesarias para el abordaje de nuevas teorías, se hacen más evidentes dentro de las investigaciones históricas, las cuales permiten mostrar al estudiante, entre otros aspectos, que el axioma no es una verdad absoluta o que la interpretación del concepto de recta cambia dependiendo del espacio geométrico en el cual se trabaje; esto conlleva al estudiante a realizar rupturas con sus conocimientos previos, contribuyendo así con el desarrollo de su pensamiento matemático. Para alcanzar este objetivo las ideas Hilbert, Poincaré y Hadamard en lo que respecta a la axiomática y al desarrollo de pensamiento dentro del campo matemático, nos resultan de mucha utilidad.

Respecto a la relación entre la historia y el desarrollo de pensamiento matemático vemos interesantes algunas ideas de Piaget y Garcia (1984). Según Piaget y García, en su libro *Psicogénesis e Historia de la Ciencia*, hay tres aspectos generales de comparación entre estas dos nociones: los instrumentos comunes de adquisición de conocimiento, los procesos que resultan de su aplicación y los mecanismos de conjunto.

Para Piaget y Garcia (1984):

> «La fuente general de los instrumentos de adquisición de conocimiento,..., es la asimilación de los objetos o eventos a los esquemas o a las estructuras anteriores del sujeto, que van desde los reflejos en el nivel de la psicogénesis hasta las formas más elevadas del pensamiento científico» (Pag 246).

Hablando de conocimiento matemático, esta asimilación siempre será más efectiva a la vez que entendamos los procesos evolutivos de las teorías. Así, asimilar nueva información se convierte en toda una construcción de estructuras mentales que se hacen fuertes en la medida que la asimilación de los conocimientos previos sea fuerte. En este sentido es que la historia juega un papel muy importante en el desarrollo de pensamiento.

Entre todos los resultados expuestos por Piaget y García en cuanto al desarrollo de pensamiento matemático, nos quedaremos con la tesis que afirma que, un equilibrio cognoscitivo se logra como consecuencia de inestabilidades sucesivas; lo que reconocemos como rupturas de pensamientos previos, aspecto necesario para el aprendizaje de las matemáticas. O en otras palabras, Pieaget y Garcia (1984): «los estados que tienen lugar en un instante dado no pueden ser comprendidos sino a partir de su historia pasada» (Pag 252).

Afirma Anacona (2003): «las matemáticas son una construcción social compleja que se edifica durante miles de años en arduos procesos de interrelación cultural»[6] (p.32). En este sentido, podemos ver y analizar a las matemáticas como una ciencia que se encuentra ineludiblemente ligada a su historia; una historia que puede dar cuenta de su desarrollo conceptual.

Ahora bien, si las ciencias en general tienen como objetivo elaborar teorías a partir de la observación de hechos, la construcción de teorías matemáticas tiene como fuente principal el establecimiento de cierto armazón de conceptos que van a permitir demostrar tales hechos; ese armazón de conceptos es lo que reconocemos como un sistema axiomático. Así como lo hizo Euclides en su primer libro, demostrando el hecho concreto enunciado en el teorema de Pitágoras mediante la construcción de un sistema axiomático.

Hilbert, Poincaré y Hadamard tienen su propia concepción sobre la constitución y formalización de estos sistemas axiomáticos matemáticos, tal como lo expondremos a continuación.

[6]Con esta afirmación pretendemos resaltar el rol que juega la historia en su contribución al desarrollo de pensamiento matemático, no solo desde de parte de la evolución de la teoría o el concepto, sino desde todos los aspectos culturales que intervienen a la hora de hacer ciencia.

1.2. Algunas consideraciones de Henri Poincaré

1.2.1. Sobre los sistemas axiomáticos

La geometría, como ciencia deductiva, debe fundarse en un cierto número de axiomas indemostrables, ya que toda conclusión supone ciertas premisas [7]. Estas premisas son las que Poincaré llama axiomas. Pero, ¿qué es entonces un axioma? En principio podemos decir que son enunciados evidentes por sí mismos o que simplemente no tienen necesidad de demostración. Euclides, por ejemplo, construye una lista de estos enunciados en su obra los *Elementos*; unos más cercanos a proposiciones geométricas que otros. Por ello Poincaré hace una primera distinción entre este tipo de enunciados, los que hablan directamente de geometría y los que no. Para resaltar uno de estos últimos: «dos cantidades iguales a una tercera son iguales entre sí», que Poincaré la llama proposición del análisis.

Partamos del hecho de que hasta ahora (siglo XXI) sobre espacios homogeneos se conocen tres teorías geométricas diferentes[8], cada una con su propio sistema axiomático. Teniendo estos sistemas algunos axiomas en común. La aparición, el análisis y el estudio de estos sistemas, será expuesto en el siguiente capítulo de este trabajo.

Entre las ideas expuestas por Henrí Poincaré en relación a los sistemas axiomáticos y las matemáticas; podemos encontrar que los axiomas geométricos conocidos [9] no pueden ser los únicos que existan para hacer geometría, ya que por ejemplo el quinto postulado varía según sea la geometría estudiada. Además aclara que toda definición construida en

[7]Reconociendo conclusión como un resultado geométrico (el teorema de Pitágoras) y premisas como los enunciados que lo demuestran

[8]Resaltamos que geometría no euclidiana es toda geometría diferente a la euclidiana, por tanto existen muchas geometrías. Pero sobre espacios homogeneos solo hay tres. Este tema será profundizado más adelante.

[9]Los axiomas de los *Elementos* de Euclides

geometría implicará un axioma, reconociendo así la existencia de los axiomas implícitos. Por ejemplo la definición de la igualdad de dos figuras, que da paso a la suposición (axioma) del movimiento de una figura sin deformaciones, invariable; como si el espacio donde se mueve fuera homogéneo. Y para Poincaré, es claro que la realidad física no es un espacio homogéneo, Poincaré (1964):

> «Sin duda, en nuestro mundo, los sólidos naturales experimentan igualmente variaciones de forma y de volumen debidas al calentamiento o al enfriamiento. Pero despreciamos esas variaciones al establecer los fundamentos de la geometría, pues además de ser muy pequeñas, son irregulares y nos parecen en consecuencia accidentales» (pag 165).

Se empiezan así a encontrar inconvenientes[10] con el sistema axiomático propuesto por Euclides.

Siendo el axioma un enunciado que tiene como una de sus finalidades no entrar en contradicción con alguna parte de la realidad o la teoría, además de ser un enunciado evidente, define Poincaré el concepto de axioma como una convención que nos permitirá la demostración, como algo que se puede construir. Poincaré (1964) «...nuestra elección entre todas las convenciones posibles es guiada por los hechos experimentales, pero permanece libre, y solo responde a la necesidad de evitar toda contradicción» (p.185).

Uno de los primeros inconvenientes que expone Poincaré hablando del sistema axiomático euclidiano, es el de los desplazamientos; aspecto importante en el estudio de la geometría. Afirma Poincaré (1964): «por definición dos figuras son iguales cuando una se puede desplazar de tal manera que coincida con la otra, es decir cuando se les puede superponer» (p 180). Pero recordemos que toda definición implica un axioma, en este caso el axioma que se estaría suponiendo es que los objetos se desplazan sin deformarse. Para un estudiante primíparo la idea anterior sería sin duda un desplazamiento, en el cual

[10]Dado que para Euclides, el espacio es homogeneo y todos los objetos que por este se mueven son invariantes bajo traslaciones.

la figura no cambia de forma, como si fuera un sólido ideal; un desplazamiento llamado euclidiano. Pero estamos además rodeados también de sólidos naturales que en ciertos casos se deforman con los desplazamientos. Es más, en geometría euclidiana, cuando estudiamos congruencia trabajamos estrictamente con sólidos ideales y no nos preocupamos de la forma del espacio en el cual estos se mueven[11]. En esta geometría, la invariancia de una figura bajo cualquier movimiento, es una verdad evidente (Poincaré, H. 1964), un axioma.

¿Debemos entonces aceptar la verdad de todos los axiomas matemáticos con los cuales trabajamos, son los axiomas verdades evidentes? ¿Acaso son verdades tan absolutas que no admiten otra forma o al menos otra interpretación? Poincaré nos da una luz con respecto a esta manera de entender los axiomas. Los axiomas pueden cambiar, no son verdades evidentes; se pueden construir teorías exentas de contradicción cambiando los axiomas (Poincaré, H. 1964). Al menos en geometría se pueden apreciar tres sistemas axiomáticos diferentes y además consistentes que conducen a tres teorías diferentes.

Los axiomas son enunciados que permiten una construcción. Además se pueden cambiar dentro de un sistema ya consolidado para obtener nuevos resultados; claro está, con el objetivo de conservar la no contradicción lógica. Por ejemplo, leamos el enunciado del siguiente teorema, que Poincaré lo llama de la cuarta geometría: una recta real puede ser perpendicular a sí misma (Poincaré, H. 1964). El teorema anterior está demostrado lógicamente utilizando un sistema axiomático diferente al euclidiano, pero su tesis, aunque lógicamente verdadera, es poco intuitiva. Pues nuestro pensamiento plano (euclidiano), con el cual nos formaron desde nuestros inicios en la escuela, nos impide imaginarnos tal situación. Esta idea es otro ejemplo de las rupturas de pensamiento que son necesarias para entender el proceder matemático.

Después de lo expuesto anteriormente, uno estaría tentado a pensar que pueden existir

[11]En esta geometría, el espacio es un espectador.

infinitas geometrías, en la medida que se puede jugar construyendo o cambiando cualquier axioma. Pero esta situación, según Poincaré, queda aclarada con el teorema de Lie. Supongamos que se admiten las siguientes premisas:

1. El espacio tiene n dimensiones.

2. El movimiento de una figura invariable es posible.

3. Se necesitan p condiciones para determinar la posición de dicha figura en el espacio.

De esta manera el número de geometrías compatibles con estas premisas será limitado. Se puede agregar que si se da n, se puede asignar a p un límite superior. Además, si se admite la posibilidad del movimiento, solo se podrá inventar un número finito (y también bastante restringido) de geometrías de tres dimensiones (Poincaré, H. 1964). Cabe resaltar que Riemann y Hilbert construyen muchas más geometrías. Riemann, por ejemplo, establece diferentes definiciones de longitud de curva, y cada una de estas definiciones da lugar a una nueva geometría; obteniendo así infinitas geometrías. Mientras que Hilbert las construye desechando el axioma de Arquímedes[12]. En ambos casos sin suponer la segunda premisa del teorema de Lie (Poincaré, H. 1964).

Podemos concluir entonces que los axiomas se pueden construir y en algunos casos cambiar por otros sin perder consistencia. Es por esto que como objetivo específico, pretendemos con esta investigación darle al estudiante la posibilidad de la construcción de un sistema axiomático para una geometría (no euclidiana). Claro está, no partiendo de la nada, sino tomando como referencia el sistema de los cinco postulados propuestos por Euclides para la geometría plana.

Por otro lado, Poincaré se preocupó por la enseñanza de las matemáticas y resaltó su preocupación en el tema del entendimiento de esta ciencia. Citando Poincaré (1984):

[12]Propiedad de no tener elementos infinitamente grandes ni infinitamente pequeños.

> «¿Cómo se hace para que haya tantos espíritus que se rehusen a comprender las matemáticas? ¿No hay aquí algo paradógico? He aquí una ciencia que sólo apela a los principios de la lógica, al principio de contradicción, por ejemplo, a éste que es por así decir, el esqueleto de nuestro entendimiento, a éste cuya ausencia implicaría la del pensar; ¡Y hay personas que la encuentran oscura, y son la mayoría! Que ellos sean incapaces de invetar, pase aún, pero que sean incapaces de comprender las demostraciones que se les hacen, que permanezcan ciegos cuando les presentamos una luz que nos parece brillar con fulgor propio, esto es sencillamente prodigioso.» (Pag 213)

Sin duda el problema es bastante grande, nosotros por ejemplo estamos construyendo nuestro aporte.

Una buena definición, según Poincaré, es aquella que es comprendida por los alumnos. Esta idea pone en versus dos posiciones en cuanto a las definiciones matemáticas; las buenas definiciones lógico matemáticas y las definiciones que son comprendidas y asimiladas por los estudiantes. Pues según Poincaré (1984), para algunos estudiantes de matemáticas, entender una definición es solamente reconocer el sentido de todos los términos empleados y verificar que ello no implica ninguna contradicción. Por ello, algunos estudiantes aseguran poder seguir una demostración sin asimilar qué es lo que se les está demostrando. Es una visión muy lógica de las matemáticas. En pocas palabras, existe una buena definición para el matemático y una buena definición para el estudiante.

No obstante, esto no es así para la mayor parte, Poincare (1964)[13]:

> «...porque casi todos son mucho más exigentes, quieren saber no solamente si todos los silogismos de una demostración son correctos, sino porque se encadenan en tal orden y no en tal otro. Tanto que parecerán engendrados por el capricho, y no por una inteligencia constantemente conscistente de la meta a alzanzar...» (Pag 214).

[13]Esa mayoría probablemente se encuentra estudiando el programa de matemáticas o de licenciatura en matemáticas.

Por lo anterior es que consideramos importante resaltar, que en los cursos de los programas de matemáticas, las definiciones y los teoremas no se nos deben imponer, se deben buscar alternativas[14] que permitan construirlos y evidenciarlos.

Por otra parte, la cadena de razonamientos matemáticos hace que cada último teorema se apoye sobre los anteriores. El problema radica en que cualquiera de esos teoremas utilizados como base para la demostración de este último puede ser no comprendido, o al menos olvidado. Es como cuando nos enseñan a trabajar con anillos, en álgebra, cuando apenas y comprendemos el concepto de grupo y sus utilidades. Pues recordemos que un anillo es un grupo con otra operación. O sin ir tan lejos, cuando queremos aprender a calcular logaritmos sin siquiera poder calcular potencias, o querer calcular potencias sin saber hacer multiplicaciones, y más abajo, querer hacer multiplicaciones sin saber hacer sumas o sumas sin saber contar. Quizá por esto, dice Poincaré, que se llega a ser incapaz de comprender las matemáticas.

La definición matemática debe evocar una imagen sensible, que en cada etapa de una demostración el estudiante la vea transformarse y evolucionar (Poincaré, H. 1984); esta es la condición de comprensión y retención que pone Poincaré. Lo anterior se puede trabajar utilizando la confrontación de las definiciones que aparecen en las axiomáticas de las geometrías no euclidianas. Pues hay que preparar a los estudiantes para que puedan entender las definiciones. Este aspecto metodológico lo profundizaremos en el siguiente capítulo.

1.2.2. Sobre la intuición en matemáticas

Para Poincaré existen dos espíritus matemáticos; los lógicos y los intuitivos. Diferencia que se puede apreciar también en los estudiantes, ya que unos tratan los problemas por el análisis y los otros por la geometría. A Euclides, en su forma de pensar la geometría, lo

[14]Este documento expone una de esas tantas alternativas tomando a la historia como la principal herramienta para su construcción.

podemos ubicar en el segundo grupo, el de los intuitivos. Pues su geometría se caracteriza por tener axiomas muy intuitivos basados en abstracciones de la realidad. Por ejemplo, en la axiomática euclidiana la recta es entendida como una cuerda tensada, por ello el primer axioma geométrico permite pasar solo una cuerda sobre dos puntos[15] y es definida como una línea que yace por igual sobre todos sus puntos; es decir, el axioma se escribió después de observada la realidad. Es por esto que podemos darle a la axiomática euclidiana un carácter intuitivo. Intuición misma que llevó a escribir el quinto de sus postulados; tema que trataremos en el segundo capítulo.

Si esta distinción, entre intuición y lógica, existe entre los matemáticos y entre los estudiantes de matemáticas[16], podriamos estudiarla en las matemáticas mismas. El trabajo dentro de las matemáticas se puede mover entre la intuición y la lógica [17]. La dificultad actual es que estamos muy sumergidos en el mundo de la lógica[18], esa lógica que nos brinda certeza en nuestros razonamientos y que a la vez pareciera alejarnos de nuestra realidad. En palabras de Poincaré (1984): «lo que han ganado en seguridad lo han perdido en objetividad. Es alejándose de la realidad como han adquirido esa pureza perfecta» (Pag 218). Entonces, hacemos las matemáticas rigurosas o las hacemos prácticas, al menos este documento apunta un poco más a lo segundo.

Como uno de los productos de esta investigación, el ideal que buscamos sería el de hacerle entender al estudiante que la realidad puede dar lugar al axioma. Trataremos de hacer surgir una imagen que permita construirlo, utilizando las superficies de las tres geometrías como herramienta visual para dicha elaboración de axiomas. Luego, lo esencial será que el estudiante aprenda a razonar justamente sobre los axiomas que él mismo elaboró. Estos es, evocaremos el espíritu geométrico de los estudiantes para dicha cons-

[15]Como lo hacen los topógrafos cuando miden terrenos con cuerda

[16]Según Poincaré (1964): «Es la propia naturaleza de sus espíritus la que los hace lógicos o intuitivos.» (Pag 19)

[17]Reconociendo la intuición y la lógica como habilidades humanas

[18]Por ejemplo, la idea de continuidad (en principio una idea muy intuitiva) se ha resuelto en un sistema complicado de desigualdades basadas en números enteros (Poincaré 1984).

trucción; dado que, según Poincaré, la abstracción los ha privado de toda imagen sensible (Poincaré, H. 1984). Vamos a sacarlos un poco de ese armazón de conceptos y teoremas, vamos a desarrollar facultades del espíritu intuitivo. Pues en palabras de Poincaré (1984): «hay una realidad más sutil que sostiene la vida de los seres matemáticos y que es diferente a la lógica» (Pag 219).

Para hablar un poco de intuición, Poincaré afirma que existen muchas clases. Primero resalta la intuición que es llamada por los sentidos y la imaginación, y para dar un ejemplo de este tipo de intuición podemos nombrar a Klein, quien estudió una de las cuestiones más abstractas de la teoría de funciones. Klein reemplaza la superficie de Riemann por una superficie metálica, le pone corriente y dice: «la corriente tendrá que pasar y la forma cómo esta corriente sea distribuida sobre la superficie definirá una función cuyas singularidades serán precisamente las que se buscan y que están previstas por el enunciado a demostrar.» Tomado de Poincaré (1964-Pag 20). Es claro que Klein pretendía demostrar una cuestión abstracta haciendo uso de la intuición, de la imaginación.

Otra clase de intuición, considera Poincaré, es la generalización por inducción, calcada sobre los procedimientos de las ciencias experimentales y que se considera como la intuición responsable de engendrar el verdadero razonamiento matemático (Poincaré, H. 1964), el razonamiento inductivo; también llamada la intuición del número puro. Este es el razonamiento que permite a los matemáticos ir desde lo particular hasta lo general, por ejemplo cuando se conjetura que la suma de los primeros n números naturales es igual a $\dfrac{n(n+1)}{2}$. Este resultado se cumple para los infinitos naturales y es solo el proceso inductivo el que permite garantizar la veracidad de dicha igualdad en todo $\mathbb{N}$, pues sería imposible verificarlo infinitas veces. Entonces la importancia de los procesos inductivos en matemáticas es innegable, ya que permite, además de lanzar conjeturas, encontrar las demostraciones; sin embargo muchos matemáticos creen que este razonamiento sólo es útil en las ciencias experimentales. Pero la matemática también es «experimental», también requiere de ensayo error y también es falible. La generalización por inducciones es entonces la que ilumina y orienta a los analistas, es la que permite no solo demostrar sino también inventar. Esta intuición permite visualizar el edificio lógico sin que los sentidos parezcan intervenir, es la que permite avanzar sin necesidad de la imaginación.

La intuición no solo nos permite conjeturar resultados sino que también la utilizamos para encontrar el camino de la demostración y entender la globalidad de la misma. Poincaré (1984): «El fin principal de la duda matemática es desarrollar ciertas facultades del espíritu, y, entre ellas la intuición. Es merced a ella que el mundo matemático permanece en contacto con el mundo real» (Pag 221). Con esto no se quiere desprestigiar el espíritu lógico de los matemáticos; pero hay que tener en cuenta que, Poincaré (1984): «No se puede demostrar todo y no se puede definir todo, será siempre necesario pedir prestado a la intuición; qué importa hacerlo un poco más pronto o un poco menos, con tal que, sirviéndonos correctamente de las premisas de que nos ha provisto, aprendamos a razonar bien.» (Pag 223).

1.2.3. La ciencia y los axiomas

Por otro lado, resaltemos ahora la importancia de los sistemas axiomáticos en la ciencia en general. Estos sistemas tienen a las matemáticas como ciencia pionera en esta forma de hacer investigación y a la geometría euclidiana como el primer sistema axiomático matemático. Pero el manejo de estos sistemas axiomáticos, en principio, puede hacer tendencia en el pensamiento del estudiante haciéndolo más lógico. Luego debemos tener en cuenta que no debemos someter al estudiante a la axiomática sino que debemos conducirlo hasta ella.

Sin embargo, Poincaré (1984): «...toda ciencia deductiva, y la geometría en particular, debe fundarse en un cierto número de axiomas indemostrables» (Pag 173). Además, y es una de las partes a aprovechar en esta investigación, dice que la geometría elíptica y la geometría hiperbólica son susceptibles de representaciones concretas. Es decir, se pueden representar sobre espacios visuales, en este caso sobre superficies del espacio tridimensional con curvaturas constantes. Estas representaciones nos ayudaran, no a imponer el método axiomático al estudiante, sino acercarlo a esta forma de hacer matemáticas.

Dice Poincaré (1984): «Un ente matemático existe con tal que su definición no implique contradicciones, sea con sigo mismo o sea con proposiciones anteriormente admitidas» (Pag 180). Por esto es que podemos afirmar que los axiomas son susceptibles de cambio en cuanto cumplan esta condición. En particular, Poincaré (1984): «los axiomas geométricos no son ni juicios sintéticos a priori [19] ni hechos experimentales» (Pag 185). Los objetos de estudio en matemáticas son objetos abstractos, creados y representados por nuestro pensamiento. Pero si estos objetos son representaciones de nuestro pensar, cómo experimentar con ellos. Poincaré (1984): «No se experimenta sobre rectas o circunferencias ideales: solo se puede hacer sobre objetos materiales» (Pag 185). Por esto es que la geometría pide a la experiencia las propiedades de los cuerpos sólidos y con ello el conocimiento a profundidad del espacio en el cual estos cuerpos se desplazan, el espacio geométrico.

Las geometrías no euclidianas, al igual que la euclidiana, son verdaderas y consistentes. Pero Poincaré (1984): «Una geometría no puede ser más verdadera que otra, solamente puede ser más cómoda» (Pag 186). Aquella comodidad que encontramos al trabajar con la geometría euclidiana tiene su fundamento en la experimentación; cuando la experiencia nos enseña y nos demuestra, por ejemplo, que la suma de los ángulos de un triángulo es igual a dos rectos. Pero esta situación se debe a que los triángulos con los que estamos trabajando son relativamente pequeños. La diferencia se puede evidenciar más claramente sobre triángulos grandes; según Lobachevski, aquella diferencia será proporcional a la superficie del triángulo y no será notoria sino en triángulos con vértices planetarios. Es por esto que la geometría euclidiana es, y parece que seguirá siendo la más cómoda, pues es verdadera localmente.

» [19]Estos juicios se entienden como estrictamente universales y necesarios. Puesto que son a priori, su validez se establece y es conocida independientemente de la experiencia.

Recordemos que el axioma implícito de la geometría euclidiana es la invariancia de la forma en los movimientos de las figuras. Pero existen situaciones en las cuales las figuras cambian de forma cuando se trasladan. Por ejemplo las gotas de agua cuando caen, que se deforman según la velocidad que lleven. Es por esto, dice Poincaré, que los axiomas no se nos pueden imponer con tal fuerza que no podríamos siquiera concebir la proposición contraria, ni construir sobre ella un edificio teórico.

Ahora bien, Poincaré se pregunta ¿cómo transmitir esta idea a los estudiantes? ¿Cómo hacerles entender que los axiomas que soportan las teorías no son verdades absolutas? Que se pueden construir. En la enseñanza, una buena definición es aquella que es comprendida por los alumnos; pero las definiciones matemáticas a veces están tan adentro en la teoría que si no comprendemos la axiomática que soporta estas definiciones, tendremos dificultades. Por ello es que muchos estudiantes llegan a ser incapaces de comprender las matemáticas. Poincaré nos brinda una respuesta a esta inquietud. Poincaré (1984):

> «Muchos (estudiantes) se preguntarán siempre para qué sirve esto. No habrán comprendido sino encuentran al rededor de ellos, en la práctica o en la naturaleza, la razón de ser de tal o cual explicación matemática. Bajo cada palabra quisieran tener una imagen sensible; es preciso que la definición evoque esta imagen, que a cada etapa de la demostración ellos la vean transformarse y evolucionar. Sólo con esa condición es que comprenderán y retendrán.» (Pag 215).

Las geometrías no euclidianas, gracias a sus representaciones visuales, nos servirán de herramienta en esta investigación para tal efecto.

Finalmente hay que resaltar la importancia de la historia en los cursos de matemáticas. Poincaré (1984): «El educador debe hacer pasar al niño por donde han pasado sus padres; más rápidamente, pero sin saltarse ninguna etapa. De esta manera, la historia de la ciencia debe ser nuestra primera guia[20].» (Pag 221). Todo esto con el fin de aportar a la construcción del conocimiento matemático, desarrollando ciertas facultades del espíritu, entre ellas la intuición, puente entre símbolo y realidad (Poincaré, H. 1984). Mientras la lógica la utilizamos para demostrar, la intuición la utilizamos para inventar. Más aun, con las solas reglas de la lógica no estamos en capacidad de demostrar aquí también requerimos de la intuición.

El fortalecimiento del razonamiento lógico es uno de los papeles más importantes de las matemáticas. Los sistemas axiomáticos sirven como herramientas para que los estudiantes fortalezcan su razonamiento. Ahora, si podemos crear imágenes sensibles que les permitan a los estudiantes observar el comportamiento de los axiomas o que ellos mismos desarrollen la capacidad de construirlos, sin duda tendremos más probabilidades de éxito a la hora de fortalecer su razonamiento lógico. Pues, según Poincaré, lo esencial es aprender a razonar sobre los axiomas.

1.3. David Hilbert y el método axiomático

Hilbert, al igual que Poincaré, reconoce a la geometría como la ciencia que se encarga de estudiar el espacio y los objetos que por este se desplazan. Por ello, no la pone como una rama estrictamente pura de las matemáticas[21]. Aunque su axiomática la saque de

» [20]La analogía presentada aquí por Poincaré hace del niño el estudiante y de los padres la evolución de las teorías.

[21]Párrafo escrito por Hibert en un curso que él enseño en 1891, tomado de Corry (2002): «La geometría es la ciencia que trata de las propiedades del espacio. Ella es esencialmente diferente de los dominios puros de la matemática tale como la teoría de los números, el álgebra o la teoría de las funciones. Los resultados de éstas ultimas se obtienen a través del pensamiento puro ... La situación es completamente diferente en el caso de la geometría. Yo nunca podré penetrar las propiedades del espacio por pura reflexión, tal y como no podré hacerlo en lo referente a las leyes de la mecánica o cualquier otra ley física de esta manera. El espacio no es un producto de mis reflexiones. Antes bien, me es dado a través de los sentidos.» (Pag 12)

toda realidad, Hilbert aclara que, en geometría, la concepción de espacio no puede ser producto exclusivo del pensamiento puro; que esta concepción también llega a través de los sentidos. Por eso resalta el hecho que es casi indispensable el uso de la intuición y el experimento para hacer geometría (Hilbert, D. 1993).

Hilbert fue un investigador que profundizó en el problema de los fundamentos[22] de las matemáticas que se venía trabajando desde mediados del siglo XIX. En su obra *fundamentos de la Geometría* se resalta su idea para la axiomatización y el formalismo, dándole un carácter más lógico[23] a los fundamentos matemáticos[24]. La presentación de la geometría a la manera de Hilbert dió un gran impulso a la matemática moderna. Giovannini (2014):

> «Dicha presentación axiomática de la geometría euclídea trajo aparejada una nueva manera de entender la naturaleza de las teorías geométricas y matemáticas en general, que logró capturar magistralmente el creciente impulso hacia la abstracción y la sistematización que venía dominando la matemática desde la segunda mitad del siglo XIX.» (Pag 122).

A pesar de que en sus trabajos, Hilbert pierde todo rastro de la experiencia cuando fundamenta la geometría; resalta que: Giovannini (2014): «los hechos geométricos fundamentales, sobre los que se construye nuestro conocimiento geométrico, provienen de la experiencia y por tanto tienen un carácter empírico» (Pag 125).

Así, podemos decir que: Giovannini (2014): «la geometría euclidiana se funda en un conjunto de hechos, leyes y conceptos básicos que no pueden ser adquiridos a través del pensamiento puro sino que se nos dan a través de la experiencia y la intuición. De esta

[22]Con su obra *fundamentos de la geometría*, Hilbert hace nacer el método axiomático moderno. En su idea, Hilbert (1923): «los axiomas establecen las condiciones que definen a los objetos geométricos involucrados en ellos. Es decir, si los axiomas satisfacen las condición de ser no contradictorios entre si, entonces resultaran verdaderos y existentes los objetos definidos a través de ellos.» (Pag 10).

[23]Separó a la geometría de la intuición.

[24]Hilbert (1993): «En el periodo que va de 1900 a 1917, Hilbert había reconocido la necesidad de una extensión del método axiomático a toda la matemática y a toda la ciencia.» (Pag 10)

manera, podemos decir que el trabajo del geómetra, será describir y ordenar este conjunto de hechos» (Pag 126).

Hilbert aclara que la relación existente entre la geometría y los hechos, es decir el mundo que nos rodea, nos permite afirmar que la geometría es una de las primeras ramas de la física. Y dado que esta disciplina puede ser sometida a un tratamiento axiomático, entonces Giovannini (2014): «la geometría puede ser considerada la más completa de las ciencias naturales» (Pag 126).

De lo anterior se puede concluir que para Hilbert, la geometría puede ser puesta como una ciencia natural, pero solo en cuanto a su origen (Giovannini, E. 2014). Un origen que debe darle un papel muy importante a la experiencia y la intuición. Citando a Corry (2002): «Es el proceso mismo de la axiomatización el que transforma la ciencia natural de la geometría, con su contenido empírico factual, en una ciencia matemática pura.» (Pag 14).

Pero cuando Hilbert estudiaba la geometría no se preocupaba por el aspecto físico, no le interesaba cuál de las geometrías era la que hacia la descripción correcta de la realidad de nuestro espacio. Su énfasis estaba centrado en la naturaleza sintética de los conceptos geométricos y en la necesidad de realizar un examen axiomático de nuestras intuiciones geométricas (Giovannini, E. 2014). Es por esto que Hilbert es reconocido como un matemático estrictamente axiomático y formal.

Hoy en día Hilbert es reconocido como el padre del formalismo, no por ello se le puede considerar formalista[25], pues lo que él considera es que la fundamentación de las ma-

[25] Citando a Corry (2002), Hilbert escribe en una de sus conferencias públicas dictadas en 1919-1920: «De ninguna manera se trata aquí de arbitrariedad. La matemática no tiene nada de parecido a un juego cuyas metas se establecen por medio de reglas arbitrariamente estipuladas. Se trata, más bien, de un sistema conceptual dotado de una necesidad interna que puede ser tan sólo así y no de alguna otra manera.» (Pag 7)

temáticas requieren de un sistema formal, pero la actividad matemática no es netamente formal. Lo que nos permite hacer una distinción entre lo que significa la actividad matemática y la fundamentación matemática. Veamos cómo se produce esta distinción.

Hablemos del significado formalista de Hilbert. Hilbert (1993):

> «Si consideramos en conjunto los hechos que conforman una cierta esfera del conocimiento más o menos comprensiva, nos percataremos de inmediato de que la totalidad de los mismos es susceptible de un orden. La ordenación se lleva a cabo recurriendo a una cierta trama de conceptos relacionados entre si, de tal manera que a cada objeto y a cada hecho del campo de conocimiento de que se trate les corresponda, respectivamente, un concepto de esa trama y una relación lógica entre conceptos del mismo. La trama de conceptos no es otra cosa que la teoría de esa esfera del saber.» (Pag 23).

Así, para Hilbert, una teoría matemática es la evolución lógica de una trama de conceptos. Estos conceptos los llama axiomas y establece para su construcción la condición fundamental de no entrar en conflicto con otras ciencias al empezar a desarrollar teoría[26]. A estos conceptos se les impone la condición de incluir o representar la totalidad de los hechos matemáticos que componen la teoría. En geometría euclidiana se resalta que ese entramado de conceptos, según Hilbert, no constituye una descripción directa o inmediata del espacio físico (Giovannini, E. 2014). Para Hilbert, el método axiomático es el prevalente y más general en la matemática moderna. Por esto, nos apoyaremos en Hilbert para tener la interpretación del significado de teoría axiomatizada y el de proceder matemático.

Hilbert afirma que en todas las ciencias podemos encontrar proposiciones fundamentales. Es decir, enunciados que son verificados mediante la experimentación. Por ejemplo en matemáticas tenemos el teorema de Pitágoras. Este teorema se estableció mediante la experiencia y no aparece como resultado de un ejercicio deductivo del pensamiento puro. Tal como lo describe Hilbert, es como si Euclides hubiera construido todo ese armazón

[26]En total, son cuatro las condiciones que establece Hilbert para la construcción de axiomas: completitud, consistencia, independencia y simplicidad. Tomado de Corry (2002, Pag 18)

lógico para poder demostrar esta proposición fundamental. Además, podemos observar que es la última proposición del libro I de los *Elementos* y pareciera que se desarrolla todo este el libro para llegar a su demostración.

Pero sustentar una teoría con proposiciones fundamentales no es suficiente. Hilbert, afirmaba que es necesario construir sistemas axiomáticos para poder demostrar aquellas proposiciones fundamentales. Luego, dice Hilbert: «el método axiomático es una re fundamentación en profundidad de las proposiciones fundamentales que tiene como finalidad dar orientación y orden en el desarrollo de una teoría científica».

Después de establecido un sistema axiomático, hay que ponerlo a prueba. Primero para verificar que no hallan contradicciones entre ellos y así poder construir una teoría consistente y segundo, para que no hallan contrariedades con los otros dominios científicos. Según Hilbert, las teorías, en este caso matemáticas, aparecen en el vivir, en lo concreto, como el teorema de Pitágoras, después van a lo abstracto por formalización, es aquí donde construyen axiomas, y luego hay que poner a prueba estas formalizaciones para verificar que no haya contradicciones. Pero, veremos en esta investigación que existen teorías, como las geometrías no euclidianas, que nacen directamente desde la axiomática y tiempo después les encontramos representaciones para luego encontrarles aplicabilidad.

En conclusión, un conjunto de axiomas escogido para fundar una teoría geométrica no es un conjunto de verdades evidentes acerca de los objetos geométricos intuitivos, aun cuando su origen se encuentra en la experiencia y en la intuición. Es por esto que no se puede decir que las geometrías son falsas o verdaderas (Giovannini, E. 2014).

Además de que los axiomas no son verdades absolutas, ellos son susceptibles de cambios en el caso de presentarse una contradicción dentro de la misma teoría (Hilbert, D. 1910); esta última condición vista como el requisito fundamental para la creación de los sistemas axiomáticos, la no contradicción. Como es el caso del quinto postulado, que se cambió trabajando dentro de la misma axiomática y luego de reemplazarlo por otro se construyó teoría no contradictoria. O también el caso de Zermelo Fraenklen, quien construyó toda una axiomática para evitar las paradojas[27]. Esta relatividad de la verdad de los axiomas es una de los aspectos que se quiere evidenciar en el desarrollo de la presente investigación. Construir matemáticas construyendo axiomas. Dado que el método axiomático parece llamar a las matemáticas a desempeñar un papel conductor de la ciencia en general (Hilbert, D. 1910), pues las matemáticas son pioneras en la utilización de este tipo de sistemas como se evidencia con las geometrías.

Pero el método axiomático no es el único método de construcción propuesto por Hilbert. Analizando sus estudios con respecto a la teoría de la demostración, se pueden identificar dos, el axiomático y el genético. El primero supone la existencia de un sistema o dominio de objetos de naturaleza cualquiera, en el cual se introduce un conjunto de axiomas que establecen relaciones entre tales objetos. Claros ejemplos para este método serán los construidos para las diferentes geometrías. Cabe resaltar que la consistencia relativa de este método será garantizada por la existencia de modelos (Arboleda, L. C. 2009), que en el caso de las geometrías pueden ser visuales. En resumen, según Arboleda (2009) «el método axiomático consiste en demostrar la consistencia y completitud de dicho sistema». Por otro lado, el método genético consiste en engendrar el concepto mucho más general por medio de extensiones sucesivas del concepto simple. Esto es, como hacer engendrar el concepto de número real utilizando extensiones sucesivas del concepto de número natural.

Finalmente Hilbert aclara su preferencia con respecto a estos dos métodos diciendo: «A pesar del gran valor pedagógico y heurístico que pueda tener el método genético, el método axiomático resulta claramente preferible para una exposición definitiva y lógicamente segura de los contenidos de nuestro conocimiento» (Hilbert 1900, p180-p184). Lo que muestra que el método Axiomático es la forma final de exponer las teorías matemáticas; es el fin pero no el medio para construir teorías o conocimiento matemático.

[27]Entre ellas, la paradoja del conjunto de todos los conjuntos

1.4. Jaques Hadamard y la invención en matemáticas

De acuerdo con Hadamard (1947), desde el punto de vista psicológico, la invención es una consecuencia del razonamiento lógico y sistemático acompañado de la intuición. En su libro, *Psicología de la invención en el campo matemático*, expone el proceso de invención como un proceso constituido por cuatro etapas: preparación, incubación, iluminación y trabajo posterior.

Las tres primeras etapas tienen lugar en el pensamiento inconsciente, un fenómeno del pensamiento diferente del consciente, que actúa, podríamos decir, sin la voluntad del individuo. El inconsciente existe y tiene la propiedad de ser múltiple, como si estuviera constituido por capas en el pensamiento, unas más profundas que otras. Las ideas, por ejemplo, están en estado consciente cuando las expresamos al hablar, pero la siguiente frase que pronunciamos está en el inconsciente. En palabras de Francis Galton (1947) «el inconsciente es la antecámara del consciente» (pag 55). Por ejemplo cuando pensamos en algo, cualquier cosa, las ideas que están en el pleno consciente parecieran atraer con un raro magnetismo a otras que se encuentran muy cerca, pero fuera del alcance de éste. Es como si hubiera una cámara llena de ideas esperando su oportunidad de actuar y llegar al consciente.

Pero, ¿cómo preparamos bien al inconsciente para lograr que el estudiante invente? Es claro que este proceso de preparación empieza desde los niveles más bajos de la formación. En estos niveles, el estudiante empieza a recolectar un sin número de ideas, que se puede llamar información, que en cierto momento de su formación se pueden conectar para producir invención. En palabras de Hadamard, «la invención o descubrimiento, tanto en matemáticas como en cualquier otra ciencia, tiene lugar mediante la combinación de ideas» (Hadamard, J. 1947). En este sentido pretendemos, como uno de los resultados de esta investigación, que el estudiante logre conectar esas ideas previas y que además haga rupturas de pensamiento con el objetivo de entender un poco más el proceder de la ciencia matemática.

Ahora pensemos en la cantidad de ideas que acumulamos desde nuestras primeras etapas de formación, y más aún, en la cantidad de conexiones posibles que se pueden formar con esas ideas. No cabe duda que existe un número extraordinario de tales combinaciones, muy pocas fructíferas y la mayoría de poco interés. Entonces, ¿cuáles de esas conexiones podemos llamar inventos o descubrimientos? Hadamard es muy preciso en esta cuestión y afirma muy acertadamente que, inventar es elegir; elegir entre todas esas combinaciones.

En nuestro pensamiento podemos encontrar una gran cantidad de ideas previamente asimiladas y al mismo tiempo empezar a construir combinaciones de ellas para formar ideas mejores, que en algunos momentos de iluminación nos den paso a la invención. Todo ese proceso anterior es trabajo exclusivo del inconsciente, no solo el de construir esas combinaciones, sino el más delicado y esencial de seleccionar aquellas que satisfacen nuestro sentido de belleza. Podemos decir entonces que con este trabajo se pretende, entre otras cosas, contribuir a que el estudiante aprenda a combinar sobre la acumulación de sus ideas. A diferencia de la enseñanza tradicional, que lo que hace es que el estudiante acumule información, se haga ideas pero no sepa qué hacer con ellas. De esta manera, estaremos dando a los estudiantes más herramientas cognitivas para que en algún momento de iluminación logren inventar, logren construir.

La última etapa de la invención es el trabajo consciente posterior. En esta etapa la invención se direcciona hacia la verificación, precisión y la utilización del resultado obtenido. Aquí se utilizaran las ayudas visuales para que el estudiante logre, a partir de la observación y el análisis, la verificación y el funcionamiento de sus hallazgos. Esta idea se expondrá con detalle en el último capítulo de este trabajo.

Preguntémonos ahora, ¿por qué estamos resaltando la importancia de las imágenes, de lo concreto, de lo tangible en esta investigación? ¿Por qué, si muchas partes de las matemáticas ya están fundamentadas y se puede trabajar lógicamente con ellas y muchas otras están en trabajo de construir sus propios fundamentos, queremos trabajar en los espíritus intuitivos? ¿Será qué estamos yendo en contravía al proceder matemático moderno? Primero podemos nombrar a Aristóteles, quien afirma: «no podemos pensar sin imágenes» (Hadamard, J. 1947); o también en palabras de Hadamard: «Es difícil un descubrimiento completamente lógico. Para iniciar el trabajo lógico es necesario por lo menos alguna intervención de la intuición proveniente del inconsciente» (Hadamard, J. 1947).

Luego, considerando el acuerdo que tiene esta investigación con la tesis de Hadamard: «un estudiante resolviendo un problema, es un individuo haciendo trabajo de invención» (Hadamard, J. 1947). Podemos decir que existe cierta analogía entre el proceso de producción de nuevas teorías matemáticas y el proceso de aprendizaje. Leyendo a Hadamard nos sentimos enfrentados al problema de cómo manejar ese inconsciente que de alguna manera lo podemos asociar al papel de la intuición de la que habla Poincaré.

Finalicemos el aporte de Hadamard a esta investigación con una respuesta escrita por Albert Einstein a una de sus preguntas. En esta respuesta, se puede evidenciar la importancia que le da el físico al papel que juegan las imágenes [28] a la hora de producir conocimiento. Luego, si somos capaces de construir imágenes que permitan visualizar el axioma, y no solo eso sino también verlo transformarse, estaríamos aportando a la invención del estudiante de matemáticas.

La pregunta escrita por Hadamard es la siguiente: Desde el punto de vista psicológico sería muy importante saber cuáles son las imágenes interiores o de qué forma de «palabra interior» se sirven los matemáticos; si ellas son motoras, auditivas, visuales o mixtas y si

[28] Las imágenes, entendidas en esta investigación como representaciones visuales, se pueden interpretar como una de las partes concretas de las que estamos hablando

varían según el asunto que se está estudiando (Hadamard 1947, pag 230). A lo cual Einstein respondió: «Las palabras o el lenguaje, escrito o hablado, no creo que desempeñen ningún papel en el mecanismo de mi pensamiento. Los entes físicos que parecen servir de elementos al pensamiento son ciertos signos y ciertas imágenes más o menos claras que pueden ser "voluntariamente" reproducidas y combinadas» (Hadamard 1947, pag 233).

En la respuesta de Einstein se puede apreciar su preferencia con respecto a la construcción de conocimiento, lo visual y la imaginación por encima del lengüaje. Resalta la importancia de lo concreto (imágenes) por encima de lo lógico a la hora de la invención. Por lo anterior, se hacen indispensables los estudios que permitan encontrar relaciones entre estas dos concepciones, lo concreto y lo axiomático. Por ello, esta investigación estará apuntando al encuentro de esas relaciones, pues son las matemáticas las ciencias pioneras en esta forma de hacer ciencia.

CAPÍTULO 2

LA HISTORIA DE LAS GEOMETRÍAS: UN VAIVÉN ENTRE AXIOMÁTICA Y REALIDAD

2.1. Dentro del primer sistema axiomático

Uno de los primeros y más importantes resultados de las matemáticas se encuentra en la geometría y es conocido con el nombre del teorema de Pitágoras. Para este teorema se conocen más de 300 demostraciones, a resaltar la de Euclides, la de Leonardo da Vinci y la de James Abram Garfield (Newman, J. 1985). Este teorema es un fiel ejemplo donde se puede apreciar el origen concreto de las matemáticas, pues su tesis fue usada por muchas culturas para realizar medidas en construcciones antiguas o para trazar ángulos rectos a campo traviesa.

Por ejemplo, los egipcios se servían de cuerdas y nudos para establecer las lineas-guias de construcción, lo hacían uniendo los extremos de una cuerda doblada dos veces formando tres lados de 12, 13 y 5 nudos respectivamente. Desafortunadamente los egipcios no dejaron instrucciones sobre estos procedimientos ni pistas de su generalización para obtener el teorema que sería redactado más tarde por Pitágoras. Dentro de las construcciones de la cultura egipcia se encuentra la pirámide de Kefren, datada en el siglo $XXVI$ a.C., construida bajo las medidas del llamado triángulo sagrado egipcio de proporciones $3, 4$ y 5 (Newman, J. 1985).

Pero no solo fueron los egipcios los que utilizaron este resultado matemático en lo concreto, se sabe, a partir de las sulvustras, secciones de las escrituras védicas de la antigua India, que la exacta ubicación de los ángulos rectos en sus altares ceremoniales se obtenían utilizando cuerdas marcadas por triadas como $3, 4$ y 5 o $5, 12$ y 13. También se puede encontrar en las tablas de arcilla Babilónicas del segundo milenio a.C. problemas planteados en los cuales se puede suponer que utilizan ternas pitagóricas (Newman, J. 1985).

El teorema de Pitágoras se convirtió entonces en un resultado geométrico utilizado en lo concreto, pero no por ello se puede ubicar a la geometría como un campo de experimentación, como una «ciencia real». Tampoco podríamos ser estrictos y ubicarla exclusivamente como una ciencia formal, aunque desde Euclides se le puede ver como una axiomática pero informal[1]. El filósofo Gustavo Bueno, en su escrito titulado ¿qué es la ciencia? (Bueno, G. 1995), hace distinción entre estas dos acepciones. Afirma que a un sistema formal de proposiciones que se derivan de principios se le puede llamar ciencia formal; mientras que ciencia real es aquella en la cual los talleres son convertidos en escuelas, es decir, laboratorios. Esta última es por ejemplo la ciencia de Newton o de Galileo, la ciencia de la experimentación. Es más, según este filósofo, la geometría terminará negando la dicotomía entre ciencia formal y ciencia real, la geometría se reinterpretará (Bueno, G. 1995). Queriendo decir con esto que se moverá a lo largo de su evolución histórica entre

[1]La geometría euclidiana es una axiomática informal, la axiomática formal aparece a partir de los estudios Hilbert.

axiomática y realidad.

Euclides, en su obra *Elementos*, logró establecer la primera axiomatización para la geometría, quizá con el objetivo, en su primer libro, de demostrar el teorema de Pitágoras aunque esto sea muy difícil de constatar. Otros autores como Campos (1994) consideran que el objetivo de los *Elementos* era la construcción de los sólidos platónicos. También señala Campos, que la enseñanza de los aprendices fue otro de los motivos de Euclides para la creación de la obra (Campos, A. 1994); dado que este geómetra fue visto, además de un investigador, como un gran maestro de escuela. El establecer una teoría de la medida también es tomado como objetivo para la construcción de la obra.

A pesar de que la obra euclidiana tuvo muchos detractores, en general fue reconocida como un gran trabajo matemático en cuanto a la validez en el discurso y la calidad de su razonamiento. En palabras de Proclo, crítico de la obra, «los *Elementos* contienen una guía incontestable y perfecta de la exposición científica misma en materia de geometría». Este documento matemático euclidiano consta de 132 definiciones, 5 postulados, 5 nociones comunes o axiomas y unas 465 proposiciones para la geometría (que se pueden clasificar entre teoremas y problemas) distribuidas en 13 libros; además de utilizar un método deductivo de razonamiento para demostrar dichas proposiciones (Euclides, 1991). La obra euclidiana se convirtió en todo un paradigma de exposición matemática.

Los *Elementos* fijaron una especie de estándar metodológico o nivel básico de exigencia tanto en lo referente a la sistematización deductiva de un cuerpo de conocimientos como en lo referente al rigor informal de la prueba matemática. En esta obra se puede observar un trabajo que se puede condensar de la siguiente manera: partiendo de los axiomas como un núcleo deductivo, la geometría inicia una conversión sintética hacia la deducción de teoremas y problemas. El libro I de la obra consta de 48 proposiciones de las cuales 14 son problemas y 34 son teoremas. Para explicar la diferencia entre problemas y teoremas, comenta María Luisa Puertas, que en la época de Euclides, un problema representaba ante todo un objeto geométrico a construir. En cambio un teorema era una proposición a establecer acerca de alguna característica, propiedad o relación esencial de objetos matemáticos construidos o dados (Euclides, 1991). En la solución de problemas se puede contar con la lógica relativamente abierta de ciertas condiciones de posibilidad (intuición), pero en la demostración de teoremas solo cuenta la lógica estricta de la necesidad o de la imposibilidad, capaz de sentar conclusiones absolutas y generales (lógica).

Poincaré afirma que la experiencia desempeña una función indispensable en la génesis de la geometría; quizá por esto podríamos entender a Euclides en su forma de presentar la axiomatización de esta rama de las matemáticas. Dado que la axiomática euclidiana deja ver sus rasgos concretos; por ejemplo cuando presenta la definición de linea[2] recta[3]. Al respecto afirma Einstein (2005):

> «No hay duda alguna que en los tiempos antiguos la geometría era una ciencia semi empírica, una especie de física primitiva. Un punto era un cuerpo de cuya extensión se hacia abstracción, una recta se definía como conjunto de puntos que aparecían confundidos al mirarlos en dirección conveniente, o como imagen de un hilo tenso. Se trataba, pues, de conceptos que, como ocurre siempre con los conceptos, no proceden exclusivamente de la experiencia, ni son consecuencia lógica de ella, pero que se establecen en relación directa con hechos reales. Las propiedades de puntos, rectas, igualdad de segmentos o de ángulos eran al mismo tiempo, desde el punto de vista del conocimiento, propiedades de ciertos fenómenos observados en objetos de la naturaleza.» (Pag 677).

Debemos tener en cuenta que para realizar construcciones axiomáticas es necesario partir de la realidad. No obstante, dice Giuisti (2000) que los objetos matemáticos deben representar la esencia despojada de las impurezas materiales. Por esto afirma que la definición de recta no es abstracción de un objeto de la naturaleza[4]. También, que la

[2]Euclides (1991): «La linea es longitud sin anchura» (Pag 189)

[3]Euclides (1991): «Una linea recta es aquella que yace por igual respecto de los puntos que están en ella.» (Pag 190)

[4]En palabras de Giusti, en la naturaleza hay «casi rectas».

abstracción matemática no viene de los hechos de la realidad, sino de las operaciones que se pueden hacer con los objetos presentes en dicha realidad, las llama operaciones de la artesania. Giusti (2000):

> «que los objetos matemáticos proceden, no de la abstracción de los objetos reales que describirían sus rasgos característicos, pero si de un proceso de objetivación de los procedimientos. No derivan de una realidad exterior, independiente del hombre, representan la esencia despojada de las impurezas materiales, pero formalizan la acción humana. Siempre se trata, y no podría ser de otra manera, de un desarrollo de abstracción, una cristalización en un pequeño número de rasgos invariables de la variedad infinita de las operaciones en efecto cumplidas.» (Pag 25-26)

Es por esto que las construcciones axiomáticas deben ser lo último dentro de las construcciones matemáticas. Euclides por ejemplo cristalizó la geometría con su sistema axiomático y su técnica de operar[5]. Visto de esta manera, la elección de las mejores técnicas y operaciones se convertirá en trabajo de un artesano. En palabras de Giusti, las matemáticas no son hijas de la naturaleza, sino del arte[6].

Euclides cuando construye su axiomática da existencia a ciertos objetos matemáticos, entre ellos la recta.[7] La recta para Euclides hace referencia en la realidad a una cuerda tensada por estacas, cuerdas y estacas que eran los instrumentos principales de la geometría práctica, la geometría del agrimensor; la técnica usada para dividir tierras. El hecho de que la linea yace por igual sobre todos sus puntos, corresponde a tirar una cuerda de un extremo a otro tensándola con estacas en sus extremos. Por esto es que Giusti entiende la definicón euclidiana de linea recta como una abstracción de la operación sobre el terreno. Así mismo, los tres primeros postulados euclidianos se convierten también en reproducciones de las operaciones del agrimensor. El segundo por ejemplo sería prolongar la cuerda acabada inmediatamente a la continuación y según la misma dirección, mientras que el tercero sería la operación en la cual se deja una estaca fija y se tensa una cuerda para

[5] Regla y compás

[6] El término arte no se refiere al artista sino a el artesano

[7] La linea recta es la que yace por igual sobre todos sus puntos, los *Elementos*, libro I, definición 4.

hacerla girar desde el otro extremo, describiendo así una circunferencia y en el interior un círculo.

Por lo anterior, afirma Giusti que, la geometría es hija de la técnica[8], en donde los objetos geométricos no son abstracción de la realidad física sino abstracción de operaciones. Bobadilla (2012) escribe al respecto, «la geometría es la encargada de representar las nociones físicas -como longitud, área y volumen en términos de sus respectivas nociones geométricas. Las definiciones geométricas se obtienen enunciando las técnicas de medición y dotando las operaciones, de esas técnicas, del carácter preciso y absoluto de la geometría» (Pag 201).

Es así como podemos decir que la axiomática euclidiana es muy intuitiva (Poincaré, H. 1984). Que por ello la llaman axiomática material, ingenua e informal; a diferencia de la axiomática abstracta, postulacional y formal que tiene entre sus representantes a Hilbert (Euclides 1991), quien fue uno de los responsables de alejar a la geometría de la esfera del empirismo. Los conceptos matemáticos tienen una naturaleza empírica, pero no son juicios sintéticos *apriori* como lo establecía Kant. Si los axiomas fueran juicios sintéticos *apriori* serían tan fuertes que ni siquiera podríamos imaginarnos una proposición contraria a ellos, ni construir teoría sobre sus negaciones. Fue quiza esta consideración la que impidió una aceptación rápida de las geometrías no euclidianas. La concepción de Kant con respecto a los axiomas euclidianos se convirtió en un obstáculo epistemológico.

Pero no podemos concluir a partir de esto que los axiomas de la geometría sean verdades experimentales, pues no se puede experimentar sobre rectas o circunferencias, son ideales; solo se experimenta sobre objetos materiales. Aunque la experiencia sirvió de guía para axiomatizar la geometría de Euclides, no podemos concluir que sea experimental. Si así fuese, no sería exacta. Por ello Poincaré conluye que los axiomas geométricos no son, ni juicios que se validan independientemente de la experiencia, ni hechos experimentales;

[8]La geometría es el resultado de una práctica matemática particular.

son simplemente convenciones (Poincaré, H. 1984).

Es por esto que los postulados pueden permanecer rigurosamente válidos, como le ocurrió a los euclidianos por casi 20 siglos, aun cuando las leyes experimentales que han determinado su adopción sólo son aproximadas.

Por otro lado, en el cuerpo de los *Elementos* se puede apreciar una particular importancia en las construcciones diagramáticas[9] y en el entrenamiento en ciertos métodos de construcción; también se trata de saber hacer, de verificar con los objetos y las figuras geométricas una especie de «experimentos mentales» cuyo éxito viene garantizado por unas condiciones de construcción determinadas (Euclides, 1991). Es esta idea la que se quiere utilizar para la construcción del plan de unidad que se expondrá más adelante. Para tal efecto, las condiciones de construcción serán construidas por los estudiantes y se trabajará con dichas condiciones para realizar construcciones geométricas sobre diferentes espacios geométricos. Entendiendo espacio geométrico como el objeto de estudio de la geometría y como el lugar por donde se mueven todos sus elementos y figuras.

2.2. La evolución de los axiomas

Hoy en día algunas ramas de las matemáticas ya están fundamentadas y poseen su propio sistema formal. Aunque David Hilbert y su escuela de pensamiento son los grandes responsables de esta forma de fundamentar, su aporte se realizó casi veinte siglos después de los *Elementos*. Cabe resaltar que la diferencia entre la axiomatización a la manera de Euclides y la fundamentación a la manera de Hilbert es que, la primera es una axiomática de contenidos, donde los objetos como punto, recta y plano son abstracciones e idealizaciones de objetos físicos; una axiomática física. Mientras que la segunda es una axiomática de forma de enunciados, donde la atención no se enfoca hacia el fondo o contenido de los

[9]Entre las conclusiones de Panza (2012): los diagramas de la geometría euclidiana se pueden utilizar para motivar una interpretación de este entendimiento.

enunciados sino hacia los encadenamientos de los mismos. Esta axiomática de Hilbert es una axiomática abstracta (Campos, A. 1994). Es en la axiomática de Hilbert donde el objeto matemático se «separa» de la realidad liberando los razonamientos de consideraciones ligadas a su naturaleza, lo que permite resaltar la idea fundamental de la demostración.

Después de la fundamentación de algunas ramas de las matemáticas modernas, hacer investigación en este campo se ha convertido en un trabajo, casi, puramente lógico. Se construyen edificios teóricos muy altos cuyos cimientos están construidos sobre axiomas irrefutables y libres, en muchos casos, del espíritu intuitivo.

Es tan alto el techo de algunos de estos edificios teóricos que sus resultados se ven borrosos hasta para algunos de los mismos matemáticos. Por esto quizá se ha invertido el orden de una de las buenas maneras de aprender matemáticas; pues en los cursos avanzados de matemática, por lo general, partimos de los axiomas y luego trabajamos con los teoremas. Es decir, se la da prioridad a lo abstracto y casi nunca se piensa en las aplicaciones concretas; esto como consecuencia de que los investigadores matemáticos actualmente no están muy preocupados por la aplicación, contrario a como se trabajaba anteriormente[10]. Depués de Hilbert, los requerimientos de los sistemas axiomáticos se enfocan en que sean completos, consistentes, independientes y simples, Curry (2002).

Por otro lado, la existencia de un ente matemático es muy diferente de la existencia de uno material. En palabras de Stuart Mill «Un ente matemático existe con tal que su definición no implique contradicción, sea consigo mismo o sea con proposiciones anteriormente admitidas» (Poincaré, H. 1984, pag 180). Es tanto lo que se ha avanzado en algunas de estas teorías axiomatizadas y fundamentadas que sería «mal visto» cambiar la axiomática que ha producido tanta teoría. Esta es la forma en la cual se está avanzando en investigación en matemática. Construyendo edificios teóricos tan altos y fuera de toda intuición. Tendriamos entonces que pensar en los axiomas como verdades irrefutables o

[10]Hasta Hilbert.

como enunciados susceptibles de cambio. Al menos las geometrías no euclidianas nos enseñan a ver los axiomas como enunciados que se pueden construir y cambiar.

En los *Elementos* se puede apreciar, no solo el primer sistema axiomático en matemáticas sino el único que perduró por muchos siglos. Se podría decir entonces que Euclides fue un pionero de la matemática moderna. Euclides nos heredó una forma de trabajar en este campo haciendo razonamientos deductivos sobre unos fundamentos escogidos. Heredamos de él y sus contemporaneos el paradígma de la demostración matemática.

Afirma el profesor Alberto Campos, que en los postulados escogidos por Euclides para la axiomatización de la geometría, afortunadamente quedaron gérmenes que impulsaron el desarrollo desde el mismo interior de la teoría. Ya que el respeto que se le tenía a la obra maestra, hubiera impedido cualquier intento de modificación desde fuera (Campos, A. 1994).

2.3. El problema del quinto postulado

Si leemos detenidamente cada uno de los cinco postulados podemos encontrar algunas diferencias entre el quinto y los otros cuatro. El quinto tiene una escritura más compleja y es escrita en forma de condicional, con antecedente y consecuente. Además, no era demasiado evidente para aceptarlo sin demostración, más aun sabiendo que su recíproco es un teorema (Proposición 17, libro I), por lo cual trataron de deducirlo como consecuencia de los anteriores. Así, empezaron los intentos de demostración del quinto postulado.

Quinto postulado:

Antecedente: una recta al incidir sobre otras dos determina ángulos menores que dos ángulos rectos.

Consecuente: las dos rectas se encuentran, al prolongar por el lado de la recta incidente en que están los ángulos menores que dos rectos.

Proposición 17: En todo triángulo dos ángulos tomados juntos de cualquier manera son menores que dos rectos.

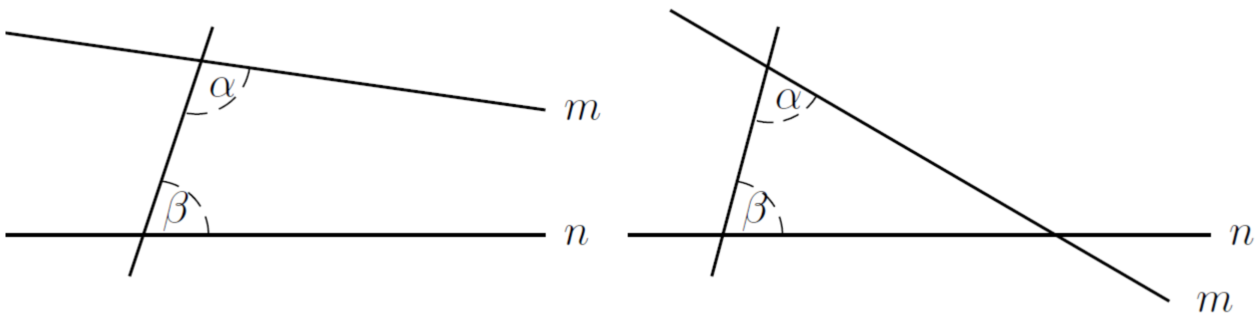

Figura 2.1: El quinto postulado y la proposición 17

Es importante resaltar aquí que para Euclides, rectas paralelas son rectas coplanarias que no se intersectan al prolongarse indefinidamente en ambos sentidos (definición 23 libro I). Por esto, algunos geómetras pensaron que rectas asintóticas podían interpretarse como rectas paralelas según el sentido de Euclides. Cabe resaltar que la pareja formada por la definición 23 y el quinto postulado, restringen el paralelismo a la equidistancia (Campos, A. 1994).

Los primeros en tratar de demostrar el quinto postulado fueron los griegos. Proclo (410-485), crítico de la obra euclidiana, empezó haciendo diferencia entre lo que significaba rectas paralelas para Euclides y para Posidonio (siglo I a.C.). Posidonio redefine paralelas como rectas coplanarias y equidistantes, mientras que Euclides dice que dos rectas son paralelas si son coplanarias y que prolongadas cuanto se quiera, no se encuentran (Bonola, R. 1945). Sin embargo, Proclo argumenta que estos dos hechos pueden presentarse separadamente aduciendo a la hipérbola y sus respectivas asíntotas, pues estas líneas son paralelas en el sentido de Euclides pero no en el de Posidonio. Luego si se quiere concordar la definición Euclidea con la de Posidonio, es necesario demostrar que dos rectas que no se encuentran son equidistantes. Pero para tal demostración Euclides se apoya justamente en su postulado (Bonola, R. 1945), creando dudas en Proclo.

Después de una demostración hecha por Tolomeo (siglo II d.C.), del cual se resalta el razonamiento lógico que utilizó al decir que existen tres posibilidades para los ángulos internos entre paralelas: ser mayores, ser menores o ser iguales a dos ángulos rectos, y criticada por Proclo, éste intenta su demostración del quinto postulado utilizando como evidente la siguiente afirmación (Bonola, R. 1945):

«*La distancia entre dos puntos situados sobre dos rectas que se cortan puede hacerse tan grande como se quiera, prolongando suficientemente las dos rectas*»

De la afirmación anterior, evidente para Proclo, se deduce el lema: *Una recta que encuentra a una de dos paralelas encuentra necesariamente también a la otra*. Veamos la demostración dada por Proclo del quinto postulado:

Sean AB y CD dos paralelas, y EG una transversal, incidente en F sobre la primera. Ver figura 2.2.

La distancia de un punto variable sobre el rayo FG a la recta AB crece más allá de todo límite cuando el punto se aleja indefinidamente de F, y puesto que *la distancia de dos paralelas es finita*, la recta EG deberá necesariamente encontrar a CD.

Pero en su demostración, Proclo introduce la hipótesis que la distancia entre dos paralelas se mantiene finita, hipótesis de la que lógicamente se deduce la de Euclides. Luego, todavía no se encontraba la manera de probar el quinto postulado.

Así como la proposición de Proclo resulta ser equivalente al quinto postulado, en la actualidad existen varias proposiciones equivalentes a este postulado euclidiano. Entre ellas, la más conocida y trabajada es la de Playfair: POR UN PUNTO EXTERIOR A UNA

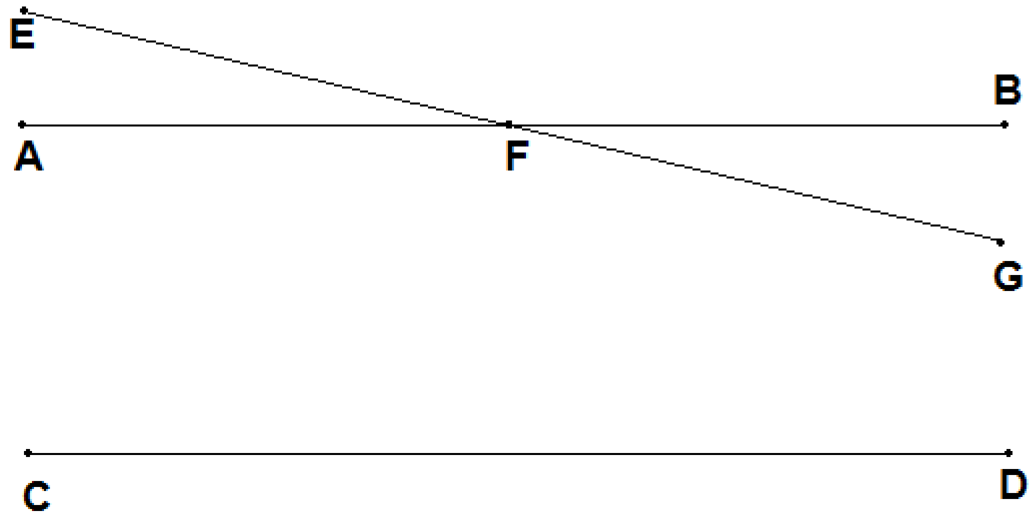

Figura 2.2: Axioma de Proclo

RECTA DADA PASA UNA Y SOLO UNA PARALELA A DICHA RECTA.

Teorema: El quinto postulado euclidiano es equivalente al postulado de Playfair.

Demostración:

Supongamos que se cumple el postulado de Playfair.

Sean ℓ y m dos rectas dadas y t una secante tal que $\alpha_1 + \alpha_2 < 180$, ver figura 2.3, comprobemos que ℓ y m se cortan en el mismo plano. Es claro que $\alpha_1 + \alpha_3 = 180$. Como $\alpha_1 + \alpha_2 < 180$, entonces $\alpha_1 + \alpha_2 < \alpha_1 + \alpha_3 \Rightarrow \alpha_2 < \alpha_3$. Luego por la proposición 23 existe un único rayo BC talque: $B'\widehat{B}C \cong B\widehat{B'}m \cong \alpha_2$. Por tanto $m\,||\overline{BC}$, utilizando la proposición 27. Ahora $B \in \ell$, $B \in r$ y $r||m$. Por el postulado de Playfair por B solo pasa una paralela, de donde ℓ no es paralela a m, pues $\ell \neq r$, lo que implica que ℓ y m se cortan.

Supongamos ahora que se cumple el quinto postulado.

Sea l una recta dada y $P \notin l$. Sea t la perpendicular a l por el punto P y sea y r la perpendicular a t por el punto P, ver figura 2.4. Luego se cumple que $r\,||l$, dado que los ángulos alternos internos son congruentes por ser las rectas perpendiculares y por la

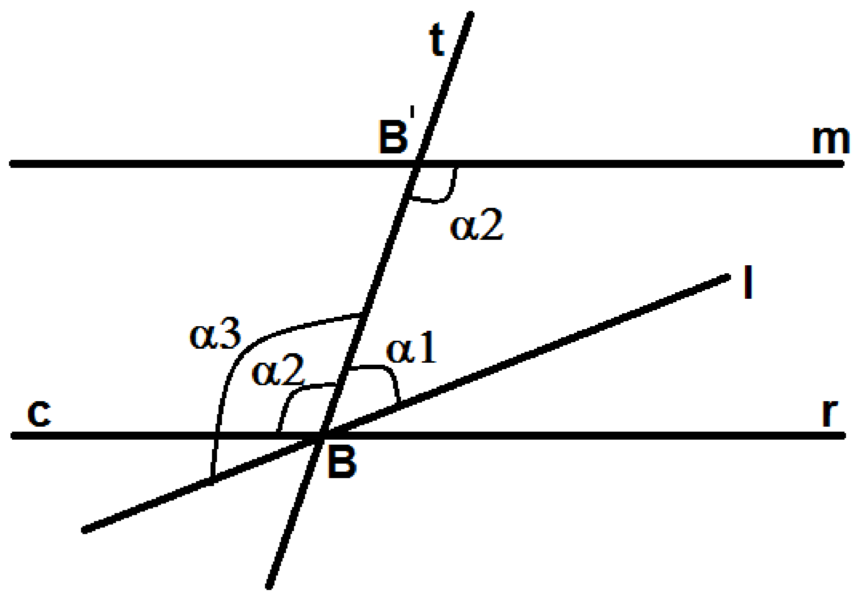

Figura 2.3: Playfair 1

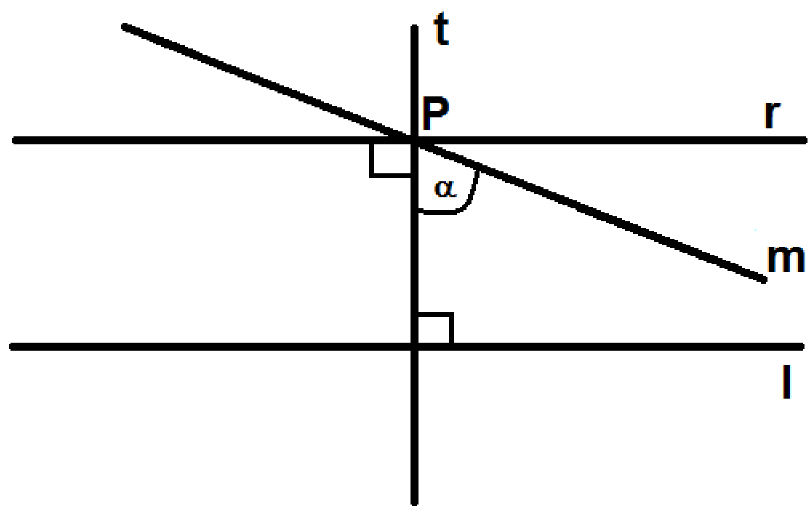

Figura 2.4: Playfair 2

proposición 23. Supongamos ahora otra recta m que pasa por el punto P con $m \neq r$. Sea α el ángulo agudo que hace m con t. Luego se cumple que $\alpha + 90 < 180$, así, por el quinto postulado, las rectas l y m se cortan del lado donde se encuentra el ángulo agudo.

De esta manera se comprueba la equivalencia entre el quinto postulado y el postulado de Playfair. Pero también existen muchas otras proposiciones equivalentes con las cuales los geómetras hacían sus trabajos, sin darse cuenta que implícitamente estaban utilizando el postulado de las paralelas. Creyeron que hacían geometría sin necesidad de utilizar el quinto postulado pero no era así; para resaltar solo un caso podemos nombrar a Proclo.

Siguiendo el recorrido, en la antigüedad, no solamente fueron los griegos quienes trabajaron sobre el quinto postulado. También podemos mencionar algunos avances que hicieron los árabes, sucesores de los griegos en la supremacía matemática. Entre ellos se puede resaltar la demostración de Aganiz (siglo IX) en la cual implementa la definición de paralelas como equidistantes (Bonola, R. 1945).

Omar Jayam (1050(?)-1123) parece haber sido el primer geómetra en utilizar un cuadrilátero para el estudio del quinto postulado (Campos, A. 1994). Idea que después retomará Saccheri quizás con otros fines. Jayam mostró que si los lados que se alzan sobre la base de un cuadrilátero son iguales entonces los ángulos que forman en la otra parte también son iguales.

Nasír-Eddín (1201-1274) tuvo otra forma de intentar resolver este cuestión y en ella se resalta la idea original de anteponer explícitamente el teorema sobre la suma de los ángulos de un triángulo y por su forma de razonar (Bonola, R. 1945). La hipótesis utilizada por Nasír fue: Si dos líneas rectas π y γ son la una perpendicular y la otra oblicua a un segmento AB, las perpendiculares trazadas de γ a π son menores que AB por el lado en que γ forma un ángulo agudo con AB, y, mayores que AB por el lado en que γ forma un ángulo obtuso con AB, ver figura 2.5.

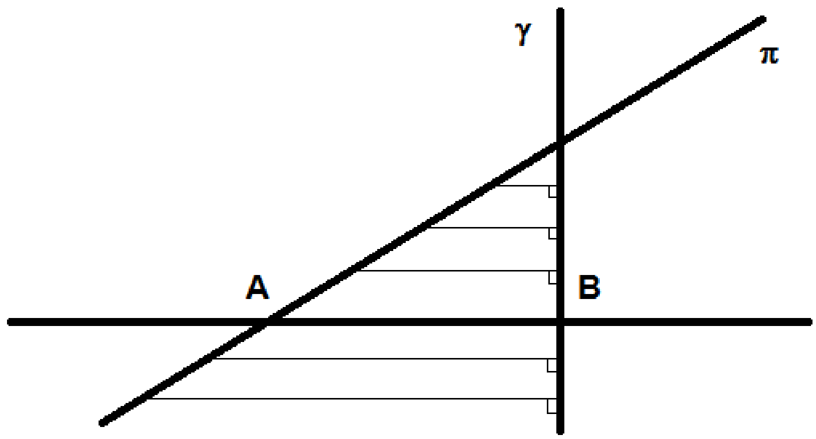

Figura 2.5: Nasír

2.4. Intentos de demostración

Tiempo después, ya en el renacimiento, vuelven los trabajos científicos en el quinto postulado. Lo que buscaban estos estudios era, quizá, reducir al máximo el número de axiomas propuesto por Euclides prescindiendo de alguna manera del postulado de las paralelas; dada su compleja escritura en forma de condicional y su diferencia con los anteriores. Pero por qué ese afán de demostrarlo, qué tiene ese postulado que causó tanta intriga.

Recordemos que una de las primeras observaciones que motivó la investigación al rededor del quinto postulado fue el hecho de que su recíproco se encontraba escrito como una proposición. Lo que llevó a pensar que él también podía ser una proposición y por ende se podía demostrar.

Otra observación que dio paso a la investigación fue su compleja escritura, que a pesar de compleja era muy intuitiva; y fue esto quizá lo que dividió a la comunidad matemática de la época entre los que lo aceptaban como principio y entre los que querían e intentaban demostrarlo. En otras palabras, la intuición daba la certeza de la veracidad del quinto pero la lógica no lo podía admitir como principio dado que su recíproco era una proposición. Se empezaba a resaltar una confrontación entre la lógica y la intuición.

Una de las primeras ideas trabajadas por los matemáticos fue intentar demostrarlo partiendo de los cuatro primeros. A este intento de demostración se llamó demostración directa.

Entre estos trabajos científicos podemos encontrar los de F. Commandino (1509-1575) quien a mediados del siglo XV, trabajó definiendo paralelas como rectas equidistantes, repitiendo así una demostración como la de Proclo (Bonola, R. 1945).

C. Clavio (1537-1612) a su vez, criticando la exposición de Proclo, presenta una demostración del postulado euclidiano basándose en su hipótesis: *La línea equidistante de una recta es una recta.* Demostración que se asemeja mucho a la de Nasír-Eddín.

Otros trabajos importantes que se pueden resaltar por esta época y que investigaron acerca del postulado de Euclides son P. A. Cataldi (?-1626), G.A. Borelli (1608-1679), Giordano Vitale (1633-1711), quien al igual que Jayam trabajó con cuadriláteros, y J. Wallis (1616-1703). Este último con su hipótesis: para cualquier figura, existe una figura semejante de magnitud cualquiera. Todos los autores anteriormente nombrados tienen en común que lo que intentaron hacer fue una demostración directa del quinto postulado, en algunos casos redefiniendo el concepto de paralelas.

Pero no solo fue la demostración directa con la cual se intentó la demostración del quinto. Según Giusti (2000), todos los intentos de demostración que se trabajaron se pueden dividir en tres grupos. Primero los que lo intentaron de forma directa, es decir tomando como datos los cuatro primeros. Segundo los que lo intentaron cambiando la definición de rectas paralelas, por ejemplo definiendo rectas paralelas como rectas equidistantes. Finalmente los que trabajaron razonando por reducción al absurdo, esto es, negando el quinto y buscando una contradicción tomando como hipótesis los otros cuatro.

Los intentos fallidos de demostración del quinto postulado, llevaron a los matemáticos a buscar nuevos caminos que les permitieran obtener conclusiones relativas a esta cuestión; en este momento es donde aparecen las investigaciones que darán paso decisivo a las geometrías no euclidianas. Empezaremos mencionando la del Italiano Gerolamo Saccheri, quien con su idea dio paso a la génesis de estas teorías.

2.5. Las tres hipótesis de Saccheri y su prueba del quinto postulado

Gerolamo Saccheri (1667-1733) dedica gran parte de su obra, *Euclides ab omni naevo vindicatus* (Saccheri, G. 1733), a la demostración del quinto postulado. Como se mencionó anteriormente y a diferencia de los antiguos intentos de demostración, Saccheri intentó una demostración por reducción al absurdo, utilizando un razonamiento similar al de Tolomeo usando tres posibilidades. Para ello, toma como datos las veintiocho primeras proposiciones del libro de Euclides, teniendo en cuenta que Euclides no utiliza el quinto postulado sino hasta la proposición veintinueve[11] (Euclides, 1991), y supone como hipótesis la negación del postulado de las paralelas. Lo que buscaba Saccheri con esta idea, era encontrar una contradicción en dos de sus tres suposiciones y así concluir que la única hipótesis posible era la euclidiana.

El objeto geométrico que utilizó Saccheri para sus trabajos fue el cuadrilátero birrectángulo isósceles. De este objeto geométrico se obtienen las tres hipótesis con las

[11]La recta que incide sobre rectas paralelas hace los ángulos alternos iguales entre sí, y el (ángulo) externo igual al interno y opuesto, y los (ángulos) internos del mismo lado iguales a dos rectos

cuales realizó sus estudios, a las cuales llamó: *la hipótesis del ángulo recto* (la cual sería equivalente al quinto postulado de Euclides), *la hipótesis del ángulo agudo* y *la hipótesis del ángulo obtuso*.

Proposición I de Saccheri (Saccheri, G. 1733): Si un cuadrilátero tiene dos ángulos consecutivos, en A y en B, rectos, y los lados AC y BD desiguales, entonces, de los ángulos en C y en D es mayor el adyacente al lado menor; es menor, el adyacente al lado mayor. Si un cuadrilátero tiene dos ángulos consecutivos, en A y en B, rectos, y los lados AC y BD iguales, entonces, los ángulos en C y en D son iguales.

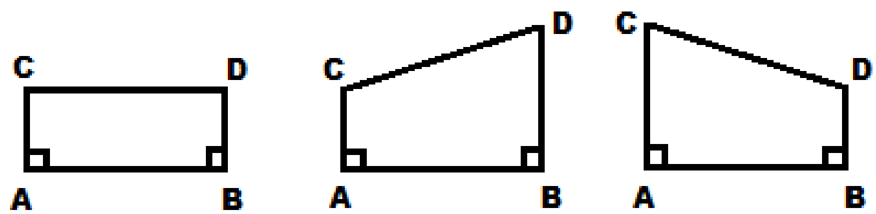

Figura 2.6: Saccheri

La parte final de la proposición I le permite a Saccheri proponer sus tres hipótesis de la siguiente manera: Si los ángulos en C y en D son iguales, entonces pueden ser iguales y rectos o iguales y agudos o iguales y obtusos. A cada una de estas suposiciones las llamó hipótesis.

- **Hipótesis del ángulo obtuso**: $\widehat{C} = \widehat{D} > 1$ ángulo recto
- **Hipótesis del ángulo recto**: $\widehat{C} = \widehat{D} = 1$ ángulo recto
- **Hipótesis del ángulo agudo**: $\widehat{C} = \widehat{D} < 1$ ángulo recto

Es importante aclarar que los dibujos adjuntos indican cómo hay que entender los enunciados, no cómo serían realmente, pues al ser trazados sobre una hoja de papel (sobre un plano), se procede euclidianamente, es decir, con la hipótesis del ángulo recto. Figura 2.7.

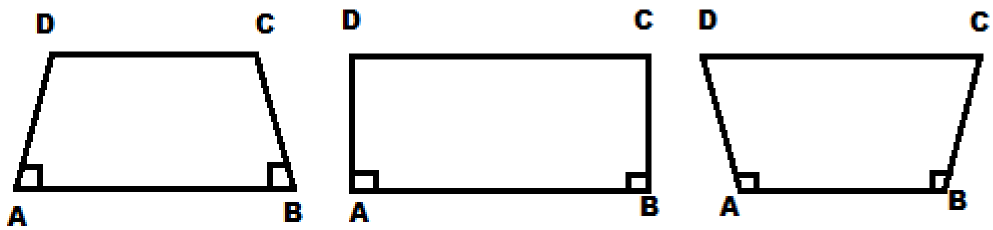

Figura 2.7: Saccheri

Trabajando con la hipótesis del ángulo obtuso, Saccheri encuentra la contradicción de la siguiente manera: En las proposiciones V, VI y VII de su obra *Euclides ab omni naevo vindicatus* (Saccheri, G. 1733), Saccheri comprueba que cada hipótesis, la del ángulo recto, la de ángulo obtuso y la del ángulo agudo, excluye a las otras dos.

Analicemos las proposiciones IX y XII, dos de las principales proposiciones que utilizó para descartar la hipótesis de ángulo obtuso (proposición XIV) (Chavez, A. y Espitia, C. 2009):

Proposición IX: En todo triángulo si se cumple la hipótesis del ángulo recto, la hipótesis del ángulo obtuso o la hipótesis del ángulo agudo, entonces la suma de los ángulos internos es igual, mayor o menor que dos ángulos rectos respectivamente[12].

Proposición XII: En un triángulo rectángulo en B, si M es el punto medio de $\overline{AC}$ y $\overline{MN} \perp \overline{AB}$, entonces $AN < NB$.

La demostración de esta última proposición se puede apreciar con detalle en el documento de Chávez y Espitia (2009). En esta prueba Saccheri deduce la hipótesis del ángulo recto teniendo como premisa la hipótesis del ángulo obtuso. Lo cual contradice el carácter

[12]Parte de esta prueba es mostrada en el capítulo del plan de unidad que se presenta en este documento.

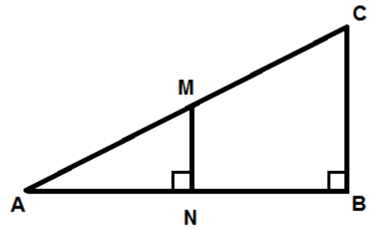

Figura 2.8: Proposición 12

excluyente de estas hipótesis. De esta manera, Saccheri enuncia la proposición XIV: La hipótesis del ángulo obtuso es absolutamente falsa por contradictoria. La cual se demuestra teniendo en cuenta las proposiciones IX y XII. Citando (Chavez, A. y Espitia, C. 2009):

«*Desde un punto de vista más ligado a Euclides, se puede determinar que la hipótesis del ángulo obtuso contradice el segundo de sus postulados, pues no permite que todas las rectas tengan longitud infinita...*»

Desde el punto de vista lógico, lo anterior se puede explicar de la siguiente manera: la proposición 19 es implicada por la 18 y esta a su vez de la 16. Y Euclides implícitamente supone para la demostración de la proposición 16 la infinitud de la recta; pero esta hipótesis es incompatible con la del ángulo obtuso (Campos, A. 1994).

Ya solo le restaba encontrar la contradicción trabajando con la hipótesis del ángulo agudo.

Saccheri buscaba una contradicción trabajando con la hipótesis del ángulo agudo, así como la encontró con la del ángulo obtuso, que le permitiera con autoridad concluir la verdad del V postulado de Euclides. Pero esa contradicción nunca llegó, por el contrario demostraba más y más proposiciones sin llegar a contradicción alguna.

Desafortunadamente para Saccheri, el no encontrar una contradicción utilizando la hipótesis del ángulo agudo, para limpiar el nombre de Euclides, lo llevó a escribir la proposición $XXXIII$. A saber, la hipótesis del ángulo agudo es absolutamente falsa, porque repugna a la naturaleza de la línea recta (Campos, A. 1994). Con esto, creyó haber terminado su prueba pero nunca publicó su trabajo.

Es importante resaltar que la forma de trabajar de Saccheri empezó a dar luz a un mundo de posibilidades en cuanto al espacio geométrico, a un mundo cuyo espacio no es homogéneo o plano, donde las rectas se pueden interpretar de otras maneras, a ver el espacio como un objeto de estudio desde la geometría; espacio que todos pensaban estar idealizando (Bonola, R. 1945).

2.6. La investigación del quinto postulado en el siglo XVIII

Más adelante, en 1763, el Alemán Klügel (1739-1812), estudiante de la universidad de Gotinga, publica un trabajo en el cual examina una treintena de demostraciones del quinto postulado y concluye que tales demostraciones son insuficientes (Campos, A. 1994). Pero sugiere: «qué tal caos sea un contrasentido, lo sabemos, no por rigurosas consideraciones, ni en virtud de claros conceptos de líneas rectas y curvas, sino más bien, mediante la experiencia y el juicio de nuestros ojos» (Campos, A. 1994). Al parecer, Klügel quería acabar la discusión haciendo alusión a la intuición, dándole la razón a los sentidos y a las observaciones; poniendo a la intuición por encima de la lógica. Esta interpretación al problema del quinto postulado le da un respiro a los intentos lógicos fallidos de tal demostración y le da a la intuición un papel más importante en la construcción axiomática.

Otro precursor de las geometrías no euclidianas fue el Suizo Juan Enrique Lambert (1728-1777) , que aunque no se tiene certeza si conocía el trabajo de Saccheri, sus investigaciones son muy similares a las de él, con la diferencia de que el objeto geométrico utilizado por el Suizo fue el cuadrilátero trirrectángulo (Campos, A. 1994). Lambert concluyó que la hipótesis del ángulo obtuso tiene consecuencias como las de la geometría sobre una esfera y que la hipótesis del ángulo agudo tiene consecuencias como las de una geometría sobre una esfera de radio imaginario (Campos, A. 1994). Es decir, si construimos una teoría con los cuatro primeros postulados euclidianos y reemplazando el quinto por la hipótesis del ángulo obtuso, obtenemos una teoría geométrica consistente y observable sobre la superficie de una esfera. En esta geometría hay que redefinir el concepto de la infinitud de la recta para poder trabajar. Análogamente, cambiando el quinto por la hipótesis del ángulo agudo, obtenemos otra geometría consistente y observable, esta vez, sobre la superficie de una hipérbole.

La no publicación de los trabajos de Saccheri y de Lambert al no encontrar una cuestión contundente que les permitiese hablar con certeza del V postulado, da paso, en la segunda mitad del siglo $XVIII$, a la convicción de aceptar sin demostración el postulado de las paralelas o algún otro postulado equivalente.

A finales del siglo $XVIII$, D.Alembert (1717-1783) sostiene que el problema del V postulado radica en la definición y propiedades de rectas y paralelas, a las cuales llama trampas y escándalos de la geometría. Esto es, que con una buena definición de rectas y paralelas se acabaría el problema (Bonola, R. 1945). Por su parte Lagrange (1736-1813) ya veía la independencia del quinto postulado en sus trabajos sobre trigonometría esférica (Bonola, R. 1945). También pensaron sobre este postulado hombres importantes como L.N.N.Carnot (1753-1823), Laplace (1749-1827), A.M.Legendre (1752-1833) y J.B.Fourier (1768-1830). Este último en su modo de presentar los fundamentos de la geometría, tomando la distancia entre dos puntos como concepto primitivo y definiendo en su respectivo orden la esfera, el plano y la recta (Bonola, R. 1945). El plano como el lugar equidistante de dos puntos dados y la recta como el lugar equidistante de tres puntos dados.

F.L.Wachter (1792-1827), discípulo de Gauss, utilizando las ideas de Wolfgang Bolyai, compañero de Gauss; escribe una cuestión muy interesante en una carta después de una conversación con su maestro: «sobre la esfera, aun en el caso de falsedad del postulado V, sería válida una geometría idéntica a la del plano ordinario» (Bonola, R. 1945). Se acerca entonces la aparición de las geometrías no euclidianas.

Todos los esfuerzos infructuosos realizados por casi veinte siglos en investigaciones acerca del postulado euclidiano estaban a punto de calificar de irresoluble el problema de las paralelas; es decir, que el quinto postulado no se podía demostrar a partir de los otros cuatro. Al menos esto se pensaba en la escuela de Gottinga desde 1763 (Bonola, R. 1945). No obstante, fue el Alemán Carlos Federico Gauss (1777-1855) el primer matemático en tener una visión clara de una geometría independiente del V postulado, a la cual llama geometría anti euclidiana. Pero quiza por la seguridad de no ser entendido, Gauss nunca publicó sus estudios, solo se sabe acerca de ellos por cartas que le enviaba a sus colegas (Bonola, R. 1945). Otros nombres importantes que hicieron su aporte, contemporáneos a Gauss, fueron Fernando Carlos Schweikart (1780-1859) y Francisco Adolfo Taurinus (1794-1874), este último sobrino de Schweikart.

2.7. La consistencia de las geometrías no euclidianas

Sin embargo el Ruso Nicolás Ivanovich Lobachevski (1793-1856) fue el matemático que puso a las geometrías no euclidianas a formar parte del patrimonio científico público, cerca de 1830, con su obra *Los fundamentos de la geometría* (Bonola, R. 1945). Lobachevski supone el principio de que: por un punto exterior a una recta se pueden trazar varias paralelas a dicha recta; además conserva los otros cuatro de la geometría de Euclides. Con estas hipótesis deduce una serie de teoremas en los cuales es imposible encontrar contradicción alguna[13] y construye una geometría cuya lógica impecable en nada cede a

[13]Entre los teoremas más sobresalientes se pueden encontrar: Smogorzhevski (1978), teorema 1: la suma de los ángulos de un triángulo es menor a dos rectos (Pag 54). También el teorema 5: Si los tres ángulos

la de la geometría euclidiana (Poincaré, H. 1984).

Esta pangeometría publicada por Lobachevski, aunque ya trabajada por otros pensadores como lo vimos anteriormente, reposa principalmente en la idea de Saccheri, aceptando las primeras veintiocho proposiciones del libro de Euclides y trabajando con una negación del quinto postulado. Antes de Lobachevski nadie tuvo la valentía de publicar sus investigaciones, quizá por miedo al rechazo de la comunidad matemática de la época, pues esto significaba cambiar un paradigma que había perdurado por casi veinte siglos. Esto lleva el nombre del alemán a la parte alta de los fundadores de las geometrías no euclidianas. Cabe resaltar que las investigaciones de Lobachevski para establecer esta nueva geometría tienen una dimensión astronómica en donde los datos le daban la razón.

En palabras de Lobachevski: «La infructuosidad de las tentativas (de demostración del quinto postulado),..., despertó en mí la sospecha de que en los mismos datos no estuviese contenida la verdad que se había querido demostrar, y que para su confirmación pudieran servir, como en el caso de otras leyes naturales, las experiencias, a ejemplo de las observaciones astronómicas» (Bonola, R. 1945, p 97). Con estas palabras, Lobachevski hace entrar a la geometría en el campo de las ciencias experimentales.

Juan Bolyai (1802-1860), matemático Húngaro, es otro de los personajes a los cuales se le atribuye la construcción de las geometrías no euclidianas al igual que a Lobachevski. El húngaro se propuso construir una teoría absoluta del espacio, aplicando el método deductivo pero sin decidir a priori sobre la validez o no validez del postulado V (Bonola, R. 1945). En sus investigaciones, Bolyai lo que hace, a diferencia de Lobachevski, es poner en evidencia las proposiciones y construcciones que en la geometría no dependen del postulado de las paralelas. A estas proposiciones las llama absolutamente verdaderas y afirma que pertenecen a la ciencia absoluta del espacio.

del triángulo ABC son iguales, respectivamente, a los tres ángulos del triángulo A'B'C', dichos triángulos son iguales. (Pag 57). Este último teorema transforma el critério ángulo-ángulo-ángulo, de semejanza en la geometría plana, en un criterio de congruencia en la geometría de Lobachevski.

2.8. El espacio geométrico como referente teórico

Dentro de las conclusiones de algunos físicos como Álvarez-Gaumé (2005) «el espacio no es un espectador de la física, el espacio y su geometría son objetos de la dinámica. El espacio es un concepto emergente y derivado». Ayudados de los físicos es que podemos decir que el espacio esta lleno de diferentes geometrías, que dependiendo del estudio que se vaya a realizar se deberá tomar la respectiva teoría geométrica. Lo que si es claro es que cada geometría matemáticamente consistente consta de su propio espacio de estudio, a este espacio lo llamamos el espacio geométrico.

El lugar donde se mueven todas las teorías geométricas es el espacio geométrico. Mientras que para Poincaré el espacio geométrico es el objeto de estudio de la geometría; para Euclides es el lugar donde se mueve. Euclides estudiaba la geometría como si los objetos fueran invariantes bajo traslaciones, como si el espacio fuera homogéneo hasta el infinito. Mientras que Poincaré dice que las figuras que estudia la geometría son susceptibles de transformaciones bajo ciertos movimientos; y eso va a depender del espacio geométrico donde estas figuras se muevan. Esta es una pista que nos permite decir que debe haber más de una geometría.

Luego, siendo el espacio geométrico el objeto de estudio de la geometría, y como veremos existen al menos tres geometrías, entonces deberán existir tres espacios geométricos. Afortunadamente para cada una de estas geometrías existe un modelo representativo contenido en el espacio tridimensional y por tanto representable gráficamente. Aspecto que profundizaremos en la siguiente sección.

Observemos entonces que existe una distinción entre el espacio que nos representamos, espacio representativo según Poincaré, y el espacio que estudian los geómetras, espacio geométrico. Poincaré hace esta distinción de la siguiente manera: en principio le atribuye al segundo unas propiedades esenciales; es continuo, infinito, tiene tres dimensiones, es homogéneo e isótropo. Homogéneo en el sentido que todos sus puntos son idénticos entre sí e isótropo en el sentido de que todas las rectas que pasan por un mismo punto son idénticas entre sí. Es quizá la interpretación de espacio pensada por Euclides. Es un marco muy intuitivo, cómodo e idéntico al de muchos geómetras, sería el objeto de estudio de la geometría euclidiana. No obstante resalta el hecho que ninguna de nuestras sensaciones, aislada, habría podido conducirnos a la idea de espacio; hemos sido conducidos a ella solamente estudiando las leyes según las cuales esas sensaciones se suceden (Poincaré, H. 1984).

Asimismo, Poincaré afirma que el espacio representativo es aquel que percibimos mediante nuestras sensaciones, ya sean visuales, táctiles o motrices. Sensaciones que percibimos utilizando nuestros sentidos. Luego, el espacio representativo es distinto al espacio geométrico. Para resaltar una diferencia podríamos mencionar la tridimensionalidad, ya que el espacio representativo es bidimensional al ser formado por imágenes bidimensionales en el fondo de la retina del ojo (Poincaré, H. 1984, pag 158).

De esta manera el espacio representativo no es más que una imagen del espacio geométrico (Poincaré, H. 1984). Lo que nos representamos solo es una reproducción de nuestras sensaciones. Es por esto, dice Poincaré, que ninguna de nuestras sensaciones, aislada, habría podido conducirnos a la idea de espacio. Se conoció el concepto de espacio gracias al trabajo de investigación matemática que se le realizó a la axiomática de la geometría de Euclides, más precisamente al quinto postulado. Estudio que concluyó con la aparición de las geometrías no euclidianas; geometrías que nos pusieron en la necesidad de repensar lo que parecía intuitivo. Además de permitirnos descubrir, a partir de la teoría, la verdadera forma del espacio natural. Las geometrías no euclidianas nos pusieron en la tarea de repensar las relaciones entre las construcciones geométricas y el mundo físico (Euclides, 1991).

Así, las geometrías no Euclidianas, llamadas «geometrías imaginarias» por Lobachebsky, aparecen en una época revolucionaria de la historia de la matemática, una época de crisis de los fundamentos de esta ciencia (finales del siglo XIX y principios del siglo XX). Su aparición cuestiona lo que es un sistema axiomático y lo que significa la consistencia de una teoría matemática. Además de desarrollarse prácticamente en el aire, sin un apoyo en la «realidad». Este último aspecto tan importante para la época, dado que lo que no era aplicable a la «realidad» no era «verdadero». Es por esto que las geometrías no Euclidianas solo eran, hasta el momento, trabajos teóricos que surgían por el trabajo de los matemáticos sobre el quinto postulado. La geometría de los *Elementos* era considerada como una abstracción de la realidad, la geometría más cómoda en palabras de Poincaré, y por tanto como la única posible.

Lobachevski y Bolyai establecieron de manera irrefutable que la demostración del quinto postulado es imposible (Poincaré, H. 1984).

2.9. Las tres geometrías

Veamos ahora algunos aspectos de los sistemas axiomáticos de las tres teorías que surgieron después de la investigación sobre el quinto postulado. En términos de Saccheri, la hipótesis del ángulo recto, la hipótesis del ángulo agudo y la hipótesis del ángulo obtuso. En términos de superficie: geometría plana, geometría hiperbólica y geometría elíptica. O según el reconocimiento a sus autores: geometría euclidiana, geometría de Lobachevski y geometría Riemanniana, respectivamente. En cuanto a los principios de estas geometrías podemos decir que difieren de la euclidiana, esencialmente, en el quinto postulado. Ver el cuadro 3.1: tabla de postulados.

Teniendo en cuenta el postulado de las paralelas en la versión de Playfair y queriendo

GEOMETRÍA PLANA	GEOMETRÍA HIPERBÓLICA	GEOMETRÍA ELÍPTICA
Postulado 1: Dos puntos determinan una recta.	**Postulado 1**: Dos puntos determinan una recta.	**Postulado 1**: Dos puntos, no antipodales, determinan una recta.
Postulado 2: Las rectas se pueden extender infinita e ilimitadamente.	**Postulado 2**: Las rectas se pueden extender infinita e ilimitadamente.	**Postulado 2**: Las rectas se pueden extender ilimitadamente pero son finitas.
Postulado 3: Con un centro y un radio se puede trazar una circunferencia.	**Postulado 3**: Con un centro y un radio se puede trazar una circunferencia.	**Postulado 3**: Con un centro y un radio se puede trazar una circunferencia.
Postulado 4: Todos los ángulos rectos son iguales.	**Postulado 4**: Todos los ángulos rectos son iguales.	**Postulado 4**: Todos los ángulos rectos son iguales.
Postulado 5: Por un punto exterior a una recta pasa una y solo una paralela a dicha recta.	**Postulado 5**: Por un punto exterior a una recta pasa más de una paralela a dicha recta.	**Postulado 5**: Por un punto exterior a una recta no pasa ninguna paralela a dicha recta.

Cuadro 2.1: Tabla de postulados

hacer investigación con su negación, se pueden apreciar dos formas de trabajar: con la negación de la unicidad o con la negación de la existencia. Luego, si construimos una teoría con los primeros cuatro postulados y la negación de la unicidad de la paralela; es decir que por un punto exterior a una recta pasa más de una paralela, se construye la geometría hiperbólica. Ahora, si construimos una teoría con los primeros cuatro postulados y la negación de la existencia de la paralela; es decir que por un punto exterior a una recta no pasa ninguna paralela, se construye la geometría elíptica. Esta última geometría no difiere de la plana exclusivamente en el quinto postulado, también se debe tener en cuenta el segundo; dado que si para Euclides las rectas son ilimitadas e infinitas, para la geometría elíptica las rectas son ilimitadas pero no infinitas.

Estas tres teorías geométricas resultan ser consistentes lógicamente con la elección de cualquiera de las tres opciones para el quinto postulado. Al menos no se había encontrado contradicción contundente. Ya que, la contradicción que encontró Saccheri con respecto a la infinitud de la recta[14], se puede corregir redefiniendo el concepto de recta; como se hace en la geometría elíptica. Entonces, se habían construido al menos dos teorías consistentes que hablaban acerca de geometría y que además eran diferentes a la euclidiana.

Uno de los resultados matemáticos que hacen ver notoria la diferencia entre estas tres teorías es el teorema de la suma de la medida de los ángulos internos de un triángulo, proposición 32 del libro I de Euclides. Según la teoría euclidiana la suma de los ángulos internos de un triángulo es igual a dos rectos. Según la geometría hiperbólica, esta suma es menor que dos ángulos rectos y según la geometría elíptica, esta suma es mayor a dos ángulos rectos (la demostración de este último resultado se conoce como el teorema de Girard y su demostración será presentada en el siguiente capítulo). No es fácil pensar en un triángulo, como tradicionalmente lo conocemos, cuya suma de sus ángulos internos sea mayor o menor a dos rectos. Esto va a depender de dónde ubicamos el triángulo, del espacio, de la superficie. Asunto que aclararemos en un momento.

[14]Esta contradicción se encuentra en la página 47 de este documento

Otro aspecto a resaltar es, la infinitud de la recta en la geometría plana; que tiene una interpretación diferente en la geometría elíptica. Dado que en esta última geometría, como se mencionó anteriormente, las rectas son ilimitadas pero no infinitas en cuanto a magnitud. Pero cómo entender esta diferencia: es como si camináramos por una circunferencia; si completamos una vuelta diríamos que recorrimos toda su magnitud (finita), pero si quisiéramos seguir dando vueltas lo podríamos hacer ilimitadamente.

2.10. Superficies de representación

Teniendo consistentes las tres teorías geométricas, aún no se podía concebir un modelo concreto en el cual se pudiera ver el funcionamiento de estos sistemas axiomáticos diferentes al propuesto por Euclides. Luego estas teorías eran, para la época, solo trabajos lógicos. Dado que, la veracidad de la teoría matemática iba de la mano con la aplicabilidad en la física y para las geometrías no euclidianas aún no se había encontrado aplicabilidad. Para entonces la física que se investigaba era la física de Newton y esta física se basa en geometría plana. Es a partir de estas épocas que la noción de espacio toma una gran importancia para la aceptación física de las geometrías no euclidianas.

Bolyai y Lobachevski habían demostrado que no es posible deducir el quinto postulado a partir de los otros. Pero aun no tenían certeza de la consistencia de ninguna de las geometrías; ni conocían una representación de ellas, por lo cual se resistían a aceptarlas como teorías matemáticas. El primer matemático que dio una ilustración del funcionamiento de las teorías sobre geometrías no euclidianas fue Eugenio Beltrami (1835-1900), quien encontró modelos visuales de representación para estas geometrías; encontró superficies bidimensionales que modelaban estos sistemas. Beltrami obtiene que una tal superficie debe tener una propiedad que se expresa diciendo que es de curvatura constante. Intuitivamente, esto quiere decir que la superficie se curva o se separa de un plano, de la misma manera en todas las direcciones (Campos, A. 1994).

Estas superficies tridimensionales de curvatura constante encontradas por Beltrami, en 1868, permitieron visualizar el funcionamiento de la axiomática de las geometrías no euclidianas. Más aun, permitieron condicionar la consistencia de las geometrías no euclidianas a la de la euclidiana.

El argumento de Beltrami: si la geometría euclidiana tridimensional es no contradictoria, la geometría no euclidiana bidimensional es no contradictoria. Y, si la geometría bidimensional no euclidiana es contradictoria, entonces, la geometría euclidiana tridimensional es contradictoria (Campos, A. 1994).

De esta manera el plano, la esfera y el hiperboloide aparecen como superficies de representación para las tres geometrías. En términos topológicos se pueden entender como superficies de curvaturas constantes. Gauss afirma que, existe una constante k para todas las superficies que se pueden flexionar pero no extender; como la superficie plana. A esta constante la llamó curvatura. De esta manera se pueden construir superficies de curvatura constante, distinguiendo los tres casos posibles. Cuando $k = 0$, cuando k es positivo y cuando k es negativo (Bonola, R. 1945). Cuando $k = 0$ se obtienen superficies aplicables sobre el plano. Cuando k es positivo se obtienen superficies aplicables sobre una esfera. Finalmente, cuando k es negativo se obtienen superficies aplicables sobre un hiperboloide (Bonola, R. 1945).

Veamos ahora la forma en la cual se apreciaría un triángulo sobre cada una de estas tres superficies geométricas, ver figura 2.11:

2.10.1. La silla de montar

Pero además de las superficies bidimensionales, también existen otros modelos en los cuales se puede ver el funcionamiento de la axiomática de las geometrías no euclidianas.

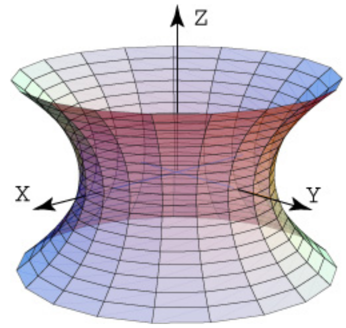

Figura 2.9: Superficie hiperbólica

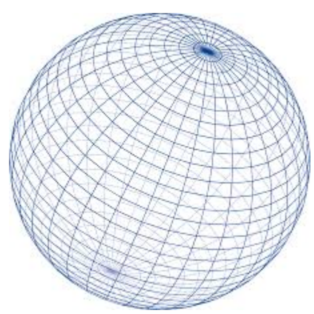

Figura 2.10: Superficie esférica

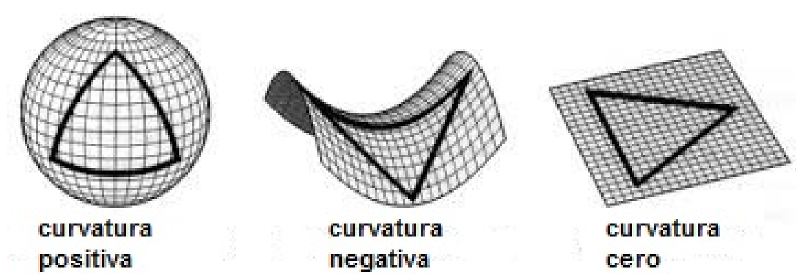

Figura 2.11: Triángulos en las tres superficies

A continuación les presentaremos tres modelos diferentes de la geometría hiperbólica tomados de Ruiz (1999). Trataremos de explicar el concepto de recta y de paralela, ya que estos son los conceptos que más difieren en las tres geometrías.

Empecemos con la silla de montar, figura 2.12, modelo que permite visualizar los objetos de la geometría hiperbólica. Esta geometría se puede representar como si el plano fuera una silla de montar a caballo. Observemos en el dibujo una recta I y un punto P fuera de la recta. Se puede observar facilmente que pasa más de una paralela a la recta I por el punto P.

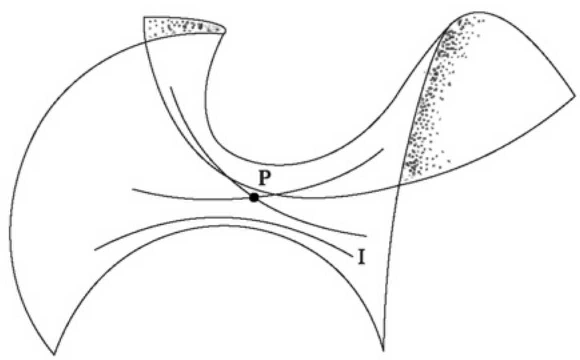

Figura 2.12: La silla de montar

2.10.2. Modelo de Beltrami-Klein

Para este modelo primero dibujamos un círculo C en un plano euclidiano normal. Llamemos O al centro del círculo. Además, si R es un punto sobre la circunferencia, entonces OR es el radio. También tomemos Y como un punto interior de C. Es claro que el interior de C consiste en todos los puntos Y tales que $OY < OR$. Como en la figura 2.13.

Los puntos al interior del círculo representarán los puntos del plano hiperbólico, mientras que los puntos de la circunferencia no pertenecerán a dicho plano.

Una cuerda es un segmento que conecta dos puntos A y B que están en la circunferen-

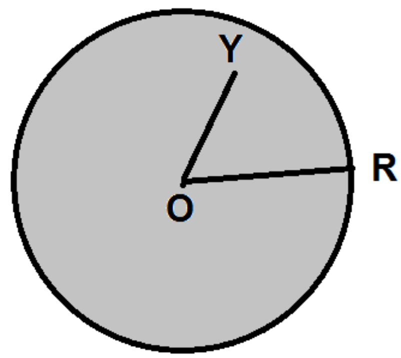

Figura 2.13: Modelo de Beltrami-Klein

cia. Este segmento sin los puntos terminales se llama cuerda abierta. Entonces una recta en este modelo es una cuerda abierta. Es decir, las cuerdas abiertas son las rectas de este plano. En la figura 2.14 se muestran las rectas AB y CD.

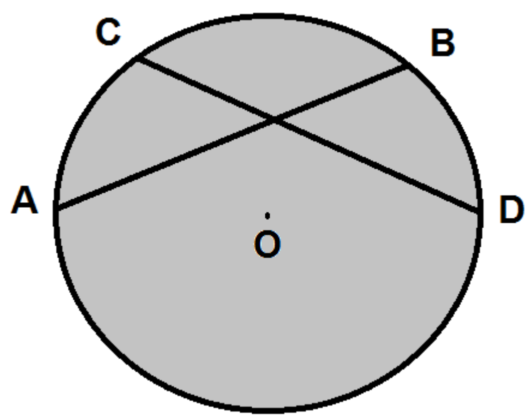

Figura 2.14: Rectas en el plano hiperbólico

En este sentido, note que dado un punto P y una recta l, se pueden trazar más de una paralela a l y que pase por el punto p. Aquí es importante aclarar que la definición de paralelismo es que no hayan puntos en común. Es decir, que las cuerdas son paralelas si no se intersectan. En la figura 2.15, las rectas $l1$ y $l2$ son paralelas a l sobre el punto P.

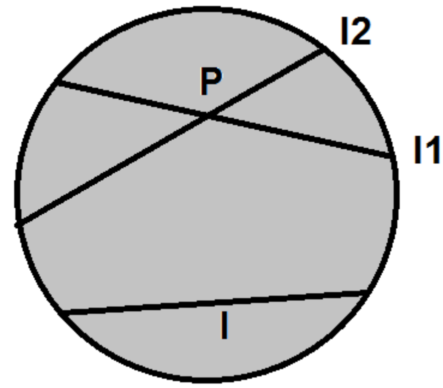

Figura 2.15: Paralelas en este modelo

2.10.3. Disco de Poincaré

El disco de Poincaré es otro modelo para la geometría hiperbólica, geometría en la cual hay más de una paralela a una recta dada en referencia al quinto postulado. Se toma, también, como plano al conjunto de los puntos del interior de un círculo. Sin embargo las rectas se definen de manera diferente al modelo de Beltrami-Klein. En primer lugar, todos los diámetros son rectas. Serán rectas tambien las que se definen de la siguiente manera: dado el círculo C constrúyase un círculo D que sea ortogonal a C. Es decir que en sus puntos de intersección, sus respectivos radios sean perpendiculares. Ver figura 2.16.

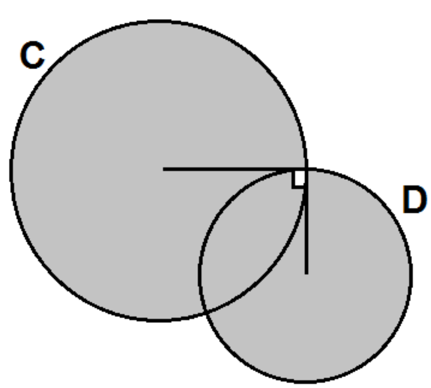

Figura 2.16: Círculos perpendiculares

Así, El arco del círculo D que está dentro del interior de C representa una recta del plano de Poincaré. Se debe recordar siempre que el plano hiperbólico no incluye los puntos en la circunferencia de C. Entonces, los diámetros de C y estos arcos así construidos son las rectas del plano de Poincaré. Ver figura 2.17.

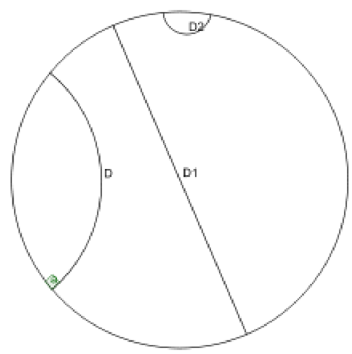

Figura 2.17: Rectas en el disco de Poincare

Un detalle: las longitudes se distorsionan cerca de la frontera de la circunferencia para hacerla inalcanzable.

2.11. Consolidación de las geometrías no euclidianas

Después de todo ese análisis que se hizo a la axiomática de Euclides desde su interior, con ese germen que dejó el quinto postulado, se empiezan a consolidar unas teorías geométricas diferentes a la plana. Al menos consistentes, en el sentido de que su consistencia depende de la consistencia de la geometría euclidiana, y representables después de los trabajos de Lobachevski y Beltrami. Ya solo restaba buscarles aplicabilidad para su consolidación y aquí es donde aparece la influencia de la física.

Tengamos en cuenta que las matemáticas en cercanías al siglo XIX, necesitaban de la física para su validéz y aun no existía una teoría física que se apoyara en una de estas geometrías. En palabras de Morris Kline: «La corrección de las matemáticas debe ser juzgada por su aplicabilidad al mundo físico» (Kline, M. 1985). Era como si le debiéramos la verdad a la aplicabilidad de la física. Y como la geometría euclidiana fue tan eficaz durante tantos siglos, por ser la más cómoda, la gente la confundió con la verdad (Kline, M. 1985). Pero hay que resaltar que fue la aparición de las geometrías no euclidianas la que nos permitió conocer nuestro espacio natural. Esta situación se asemeja al descubrimiento de Neptuno, que se descubrió primero en el papel y trabajando en la teoría.

Con respecto a la geometría, el físico Albert Einstein entendía que los axiomas y principios de la lógica derivan de la experiencia y se preguntaba «por qué largas e intrincadas cadenas de razonamiento puro, que es independiente de la experiencia e implica conceptos creados por la mente humana, pueden producir conclusiones tan notablemente aplicables» (Kline, M. 1985). Pareciera que Einstein también se preguntaba sobre la relación entre la axiomática y la realidad. Sin embargo, en una conferencia pronunciada en 1921 (Bosh, A. 1982), Einstein dice que: «la geometría no predica nada acerca del comportamiento de las cosas reales y solo la geometría unida a la totalidad de las leyes físicas puede hacerlo» (p 27). Para el físico, la geometría debía ser desprovista de su caracter meramente lógico-formal y llevada a la aplicabilidad para poder considerarla. A esta geometría aplicable la llamó geometría práctica y se preguntaba si la geometría práctica del universo es o no euclidiana. La respuesta a esta cuestión solo la podría brindar la experiencia.

Sabemos que uno de los principios de la teoría de la relatividad es la ley empírica que dice que la luz se propaga en linea recta. La pregunta es ¿cómo debemos entender el concepto de linea recta? Este concepto, en palabras de Einstein, debe ser entendido en términos de la geometría práctica.

En los trabajos de Einstein acerca de la teoría de la relatividad fue que se empezó a dar uso a las geometrías no euclidianas[15]. En esta teoría existen dos suposiciones con respecto al espacio. A saber, el universo es espacialmente infinito o espacialmente finito. Las anteriores suposiciones con respecto al espacio se podrían comprobar teniendo en cuenta

[15] La geometría euclidiana tenía problemas en los niveles submoleculares y de orden cósmico

la densidad respecto a su volumen y la masa total de las estrellas[16]. Resultados que según la experiencia estamos lejos de comprobar.

Pero, ¿somos capaces de visualizar un universo tridimensional que sea finito y a pesar de ello sin límites? Mostraremos a continuación una ilustración hecha por Einstein (Bosh, A. 1982) que nos permitirá observar un poco la hipótesis del universo finito. En palabras de Einstein (1921) «visualizar una teoría significa proporcionar a la mente esa abundancia de experiencias sensibles con respecto a las cuales la teoría ofrece una ordenación esquemática» (p 31).

Empecemos explicando el concepto de universo infinito como lo hace Einstein. Supongamos que tenemos un gran número de cajas cúbicas, todas del mismo tamaño. De acuerdo con la geometría euclidiana, podemos ponerlas unas por encima, por debajo y junto a las otras hasta cubrir, arbitrariamente, una amplia parte del espacio. Pero esta construcción jamas estaría terminada. Es decir, el espacio es infinito en relación con los cuerpos rígidos[17]. Analogamente, haciendo el mismo ejercicio con cuadrados sobre un plano, se puede concluir que mientras el espacio es un continuo infinito de tres dimensiones, el plano es un continuo infinito de dos en relación a la geometría euclidiana.

Pero en geometría se puede encontrar un continuo bidimensional finito e ilimitado, la superficie de la esfera. Ilimitado en el sentido de que sobre ella podemos ubicar un disco de tal manera que al moverlo sobre toda la superficie de la esfera, este nunca se topará ni encontrara con nada. Finito en el sentido que podemos ubicar varios discos sobre la superficie de la esfera llegando en algún momento a cubrirla sin que quede espacio para otro disco. Por lo anterior, este continuo finito e ilimitado debe poseer una geometría diferente de la euclidiana, una geometría que como lo vimos anteriormente se llama geometría elíptica.

[16]Si la densidad tiende a cero el universo es infinito. Si la densidad media es distinta de cero el universo es espacialmente finito

[17]Las leyes de localización de los cuerpos rígidos las proporciona la geometría euclidiana

Según la teoría de la relatividad, es probable que nuestro espacio tridimensional posea una geomería aproximadamente eférica (Bosh, A. 1982). Es decir que nuestro espacio es finito. Esta es una afirmación poco intuitiva pero que Einstein intenta explicarla de la siguiente manera: En la figura 2.12, K representa la superficie de la esfera que se toca en S con el plano E. Denominemos L un disco sobre la superficie esférica. Ahora imaginemos que en el punto N de la superficie esférica, diametralmente opuesto a S, existe un punto luminoso que proyecta una sombra L' sobre el plano E.

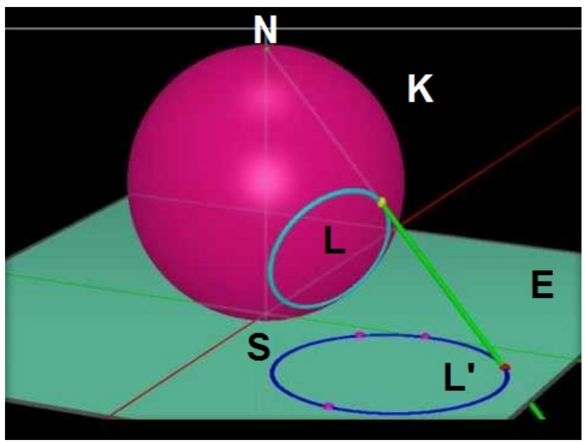

Figura 2.18: Proyección de la esfera al plano

Si el disco sobre la esfera K es movido, también se moverá su sombra L' sobre el plano E. Cuando el disco L esta en S, coincide casi exactamente con su sombra. Si se mueve sobre la superficie esférica alejandose de S hacia arriba, la sombra sobre el plano E también se aleja de S, hacia la parte externa del plano y se agranda en la medida que se aleja. Si el disco L se acerca al punto N, la sombra L' se desplaza hacia el infinito y se agranda infinitamente.

Es evidente que la geometría de las sombras L' sobre el plano E es equivalente a la geometría sobre la esfera. Si denominamos a los discos sombra figuras rígidas, la geometría esférica es válida sobre el plano E con respecto a estas figuras rígidas. En particular, el plano es finito respecto a los discos sombra, porque solo un número finito de sombras puede tener lugar dentro del plano (Bosh, A. 1982). De esta manera podemos ver el plano, que en principio es infinito, como un espacio finito. Lo que permite concluir que los discos sombra están relacionados con los discos rígidos sobre la superficie de la esfera, en el sentido de la geometría euclidiana.

La representación anterior hecha por Einstein nos permitió cuestionarnos respecto a la infinitud del plano y también nos permitirá transferirla al ámbito tridimensional, para cuestionarnos por la infinitud del espacio. Haciendo un análisis análogo, imaginemos un punto S de nuestro espacio y una gran cantidad de esferas L', a las que es posible hacer coincidir unas con otras. Pero estas esferas no han de ser rígidas, aumentarían su tamaño en la medida que se alejen de S hacia el infinito de la misma manera que los discos sombra sobre el plano. En ese sentido nuestro espacio es finito porque a causa del «crecimiento» de las esferas sólo un número finito de ellas puede tener cabida en el espacio.

En su conferencia y hablando del ejemplo anterior, Einstein concluye diciendo «mi único objetivo ha sido demostrar que la facultad humana de visualización no esta condenada a rendirse ante la geometría no euclidiana» (p 36). Este científico fue el que puso las geometrías no euclidianas a formar parte de lo concreto, de la realidad.

Fue así que la aparición de las geometrías no euclidianas permitieron a Einstein concluir sus investigaciones. Investigaciones que entre otras muchas cosas permitieron descubrir la verdadera forma del espacio natural. Es decir, podemos hablar del espacio como el producto de una investigación que tuvo sus orígenes en un sistema axiomático. Una investigación que viajó desde la axiomática hasta la realidad.

Consolidadas ya las geometrías no euclidianas y analizando el trabajo previo que duró casi veinte siglos, nos damos cuenta de la cantidad de ideas que fueron necesarias para poder construir teoría, para hacer rupturas de pensamientos previos y para desarrollar pensamiento matemático.

CAPÍTULO 3

LA ESTRATEGIA DIDÁCTICA, EL PLAN DE UNIDAD

3.1. Introducción

El docente debe asumir la tarea de explotar las habilidades y destrezas que le permitan al estudiante sobresalir en una comunidad académica. Más precisamente, para los estudiantes de Matemáticas o Licenciatura en Matemáticas de la universidad del Cauca; el fortalecimiento de los espíritus, tanto el intuitivo como el lógico, es una de las tareas que debe trabajar el docente universitario. Para ello existen algunas formas de contribución. Una de ellas es, por ejemplo, el contenido sistemático de un curso. Justo como lo queremos mostrar en esta investigación y que apunta hacia el fortalecimiento del pensamiento intuitivo del estudiante.

El escenario ideal para poner en marcha las ideas anteriormente mencionadas, es el curso de *Pensamiento Matemático* ofrecido en la universidad del Cauca para los programas de Matemáticas y Licenciatura en Matemáticas. Para el programa de Licenciatura en Matemáticas el curso de *Pensamiento Matemático* hace parte del plan de estudios y se ubica en el segundo semestre[1], mientras que en el pograma de Matemáticas se puede tomar como un curso electivo o de interes personal. Este curso es un seminario donde los objetivos apuntan hacía el desarrollo de pensamiento matemático. Uno de ellos es: Propiciar en el estudiante una reflexión crítica sobre el acto de conocer en matemáticas. Es por esto que el resultado de las sesiones de clase construidas en esta investigación pretenden hacer un aporte al contenido de dicho curso. Ya que si algo queremos, con las sesiones de clase aquí construidas, es que el estudiante reflexione respecto al campo matemático.

Utilizaremos las geometrías como las herramientas ideales que nos servirán para evidenciar la relación entre la lógica y la intuición, entre la axiomática y la realidad y entre lo abstracto y lo concreto; categorias que están intimamente relacionadas[2]. Recordemos que la geometría, además de ser la primera rama axiomatizada de las matemáticas, es la primera que construyó sus axiomas fuera del pensamiento puro; los construyó a partir de la experiencia, de lo empírico. Pues Euclides deja ver un claro rastro de la intuición dentro de su axiomática. Es por esto que la geometría en sus inicios, fue la rama de las matemáticas que más se acercó a la idea de ciencia experimental, en el sentido que la construcción de sus axiomas sirvió para demostrar resultados experimentales, del vivir, de lo concreto. Aunque Hilbert lograra después axiomatizarla sacándola de cualquier rasgo de interpretación intuitiva y llevándola a lo abstracto.

Por lo anterior es que la idea esencial que persigue la unidad didáctica, es que el estudiante pueda construir axiomas partiendo del hecho concreto de la observación sobre superficies. Que lleve lo concreto a lo abstracto construyendo axiomas. Que fortalezca su espíritu intuitivo.

[1]Para este programa también existe un curso llamado *Pensamiento Matemático II*, el cual tiene como requisito el curso de *Pensamiento Matemático.*

[2]El estudio de estas categorias merecen un análisis más profundo, sin embargo esto se encuentra fuera de nuestros objetivos.

3.2. Unidad didáctica

Como producto de esta investigación, se brindará al docente una unidad didáctica en torno a las geometrías, que servirá de fortalecimiento al pensamiento matemático del estudiante. Para tal efecto, entenderemos unidad didáctica como: la participación de todos los elementos que intervienen en el proceso de enseñanza-aprendizaje con una coherencia metodológica interna y por un período de tiempo determinado a un tema o contenido en particular (Prieto, C. A. 2012). También debemos tener en cuenta que para la realización de la unidad didáctica es necesario contemplar dos aspectos. Primero, la planificación y distribución temática de los aprendizajes que se pretenden orientar en una clase. Segundo, la planificación y temporización, dentro de cada nivel, de los aprendizajes correspondientes (Prieto, C. A. 2012).

Esta unidad didáctica la presentaremos en sesiones de clase que deben tener como objetivo, entre otros: guiar los procesos interactivos de enseñanza-aprendizaje que tienen lugar durante la puesta didáctica. Ayudar al profesorado a prepararse cognitiva e instrumentalmente para el proceso de enseñanza aprendizaje. Recordemos que toda esta planificación vendrá guiada por el estudio histórico epistemológico realizado en esta investigación.

De esta manera se presentará la unidad didáctica con las siguientes especificaciones (Prieto, C. A. 2012):

- Descripción de la unidad didáctica.
- Objetivos didácticos.
- Contenidos de aprendizaje.
- Secuencias de actividades.
- Recursos materiales.

- Organización del espacio y el tiempo.
- Evaluación.

3.3. Objetivos didácticos

Como objetivos didácticos nos proponemos que los estudiantes:

- Reconozcan las matemáticas como una ciencia que nace en lo concreto antes de ir a lo axiomático.
- Reconozcan el axioma como un enunciado que se puede construir.
- Visualizen modelos concretos de las geometrías no euclidianas y sus diferentes axiomáticas.
- Construyan los axiomas de las geometrías no euclidianas utilizando los modelos de las superficies.
- Noten la diferencia de los objetos geométricos en estos modelos.
- Fortalezcan el espíritu intuitivo para hacer matemáticas.

En una unidad didáctica se debe decir el número de sesiones indispensables para el abordaje del tema, con una descripción detallada de las actividades a desarrollar en cada sesión y sugerir un modelo de actividades. En este orden de ideas, a continuación presentamos las sesiones de clase que, a manera de sugerencia, el profesor puede hacer al interior del aula.

3.4. Sesiones de clase

3.4.1. Primera Sesión (Las matemáticas y lo concreto)

En esta primera sesión se mostrará al estudiante un resultado concreto de las matemáticas. El teorema de Pitágoras. El estudiante observará cómo se utilizaba la igualdad aritmética entre los cuadrados de algunos números naturales para realizar ciertas mediciones. En particular, mediciones de ángulos rectos; muy necesarias para hacer construcciones o para dividir terrenos. Se pondrá en práctica el teorema.

Primero, se construirá una cuerda con 13 nudos a igual distancia. Empezando la cuerda con el nudo número 1 y terminando con el nudo número 13, justo como se muestra en la figura 3.1.[3]. Luego, se le pedirá al estudiante que construya triángulos con dicha cuerda de tal manera que los vértices del triángulo coincidan con cualquiera de los nudos de la cuerda. Después de todos los intentos de construcción, el estudiante podrá concluir que la única forma de construir un triángulo rectángulo con dicha cuerda será tensandola y ubicando los vértices en los nudos 1 (13), 5 y 8. Figura 3.2.

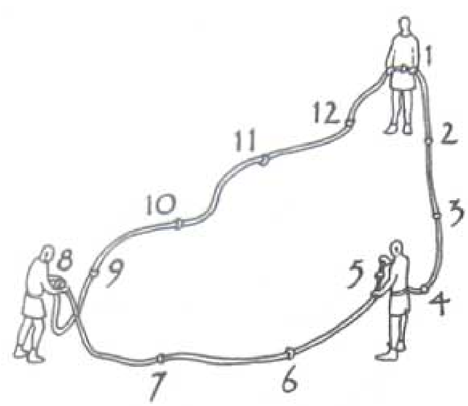

Figura 3.1: Cuerda

Construyendo el triángulo de esta forma, el estudiante podrá evidenciar experimentalmente el resultado del teorema de Pitágoras. Ya que al tener los nudos igual distancia

[3]Para cerrar la cuerda el nudo número 1 coincidirá con el nudo número 13.

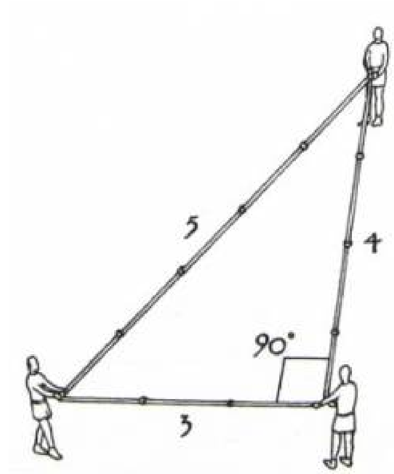

Figura 3.2: Cuerda templada

entre sí, se observa que el triángulo formado tiene lados 3, 4 y 5 unidades, que es la terna pitagórica más pequeña con números naturales. Además de observar también que dicho triángulo, así construido, forma un ángulo recto entre los lados que miden 3 y 4 unidades. Dado que el teorema aplica si y solo si en triángulos rectángulos. Es decir, se determinan ángulos rectos utilizando una cuerda; justo como lo hacían algunas culturas antiguas para realizar algunas de sus medidas.

El profesor deberá aclarar que el sistema axiomático de los cinco postulados euclidianos es la base para la demostración lógica de este teorema. Que dicho sistema axiomático creado para la geometría fue el primero en matemáticas. Además de aclarar que existen muchas más demostraciones diferentes para esta misma igualdad aritmética. Demostraciones más intuitivas y experimentales como se puede apreciar en los siguientes videos (dejo los enlaces correspondientes):

- https://www.youtube.com/watch?v=1er3cHAWwIM
- https://matematicascercanas.com/2016/06/06/demostraciones-teorema-de-pitagoras/

El docente debe recordar también que el teorema de Pitágoras es, en palabras de Hilbert, una proposición fundamental. Y que la axiomática utilizada y escrita por Euclides es una re fundamentación lógica en profundidad para obtener dicha prueba. Que aquella demostración se alcanza en libro I de los *Elementos* en la proposición 48. También, que así como el teorema de Pitágoras es una proposición fundamental para la geometría, existen otras para diferentes campos como el álgebra, el cálculo o el análisis.

Se finalizará la sesión con reflexiones y comentarios de los estudiantes con el fin de fortalecer su motivación. Se dejará lectura de los cinco postulados euclidianos que axiomatizan la geometría plana para la siguiente sesión.

3.4.2. Segunda sesión (Axiomática de Euclides)

En esta sesión se presentarán los cinco postulados euclidianos de la geometría plana; estos con previa lectura. Se insistirá en que el teorema de Pitágoras es un resultado lógico de estos principios. Pero se resaltará que este teorema no es el punto de llegada ni la conclusión de estos principios. Por el contrario, la axiomática construida es un trabajo posterior que da paso a la demostración del teorema en la parte final del libro I de los *Elementos*. Es decir, que los axiomas se construyeron para demostrar dicho resultado geométrico.

Se hablará en clase de todos los principios que utilizó Euclides para construir su obra los *Elementos*, entre ellos, axiomas, postulados, nociones comunes y definiciones. Dejando a interpretación propia del estudiante la definición 23 que habla de paralelas y reflexionando al respecto. También, se resaltará el papel que jugó la intuición en el pensamiento euclidiano para fundamentar la geometría plana; esa idea vaga e intuitiva de entender la recta como un rayo o haz de luz.

En lo que respecta a los postulados se centrará la atención en el quinto. Se puede empezar pidiendo al estudiante que identifique las diferencias entre este y los otros cuatro. Lo ideal con este ejercicio es que el estudiante identifique que el quinto postulado, a diferencia de los otros cuatro, está escrito en forma de condicional. Después, se puede ir al tablero a dibujar una recta y un punto, con el único objetivo de que el estudiante se cuestione respecto al quinto en su versión de Playfair[4]. Se le pueden hacer las siguientes preguntas puntuales: ¿qué pasa con la geometría si negamos este enunciado? ¿Se pierde consistencia? ¿Se puede pensar en una geometría negando el quinto? Después de esta reflexión y con respuestas puntuales del profesor, se continuará con la demostración de la primera proposición del libro uno de los *Elementos* para que el estudiante observe la idea de demostración de dicha obra geométrica. Demostraciones muy constructivas e intuitivas.

Proposición 1: Construir un triángulo equilátero sobre una recta finita dada.

Antes de la demostración «formal», se pedirá al estudiante que intente una prueba. [5]

Demostración:

Sea $\overline{AB}$ la recta finita dada. Así pues, hay que construir sobre la recta $\overline{AB}$ un triángulo equilátero. Descríbase con el centro A y la distancia AB el círculo $B\gamma\alpha$ (postulado 3), y con el centro B y la distancia BA descríbase a su vez el círculo $A\gamma\beta$. Luego, a partir del punto γ donde se intersectan entre si los dos círculos se trazan las rectas $\overline{\gamma A}$ y $\overline{\gamma B}$ hasta los puntos A y B (postulado 1). Ver la figura 3.3.

Así, por la definición 15 (definición de circunferencia) se tiene que las rectas $\overline{AB}$, $\overline{\gamma A}$ y $\overline{\gamma B}$ son iguales entre sí. Por lo tanto el triángulo formado por estas tres rectas es equilátero.

Para finalizar esta sesión, se dejará como lectura la proposición 17 del primer libro de los *Elementos*.

[4]Se le aclarará al estudiante que esta demostración de equivalencia se hará en la tercera sesión

[5]Panza (2012) afirma que los postulados euclidianos no garantizan la existencia de dicho punto de interseción y de esto concluye la fuerte influencia de los diagramas en la geometría euclidiana. Panza (2012): «Una posible solución de la dificultad es admitir que el argumento de Euclides está basado en un diagrama y esa continuidad (de las circunferencias) le proporciona un fundamento en la medida en que se entiende como una propiedad de Diagramas.» (Pag 2)

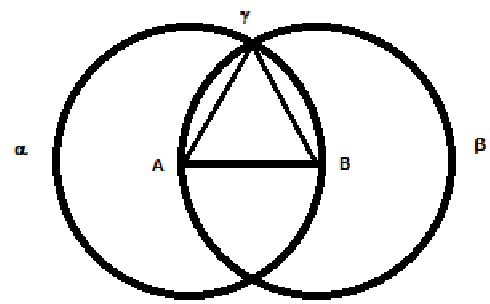

Figura 3.3: Proposición 1

3.4.3. Tercera sesión (El problema del quinto postulado)

Como se tenía de lectura previa la proposición 17 del libro I de los *Elementos*, esta sesión empezará con un ejercicio de identificación. Se pedirá al estudiante que identifique el antecedente y el consecuente de esta proposición. Luego, en un ejercicio un poco más complejo, se pedirá al estudiante que identifique el antecedente y el consecuente del quinto postulado; ya que en la sesión anterior se debió concluir que el quinto postulado está escrito en forma de condicional.

Se les mostrará la figura 3.4, presentada a continuación, para que visualicen las ideas respecto a la comparación.

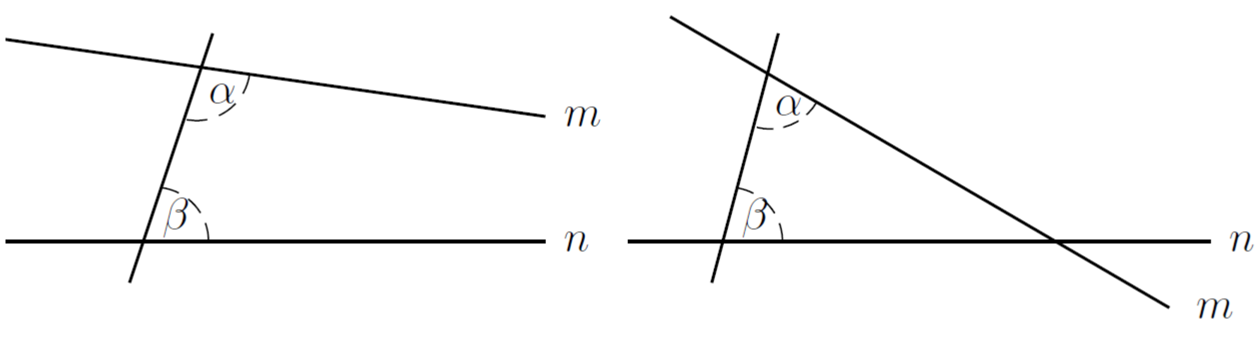

Figura 3.4: El quinto postulado y la proposición 17

En esta parte se les hablará a los estudiantes de todas las proposiciones del libro I de los *Elementos* que no necesitaron al quinto postulado para su demostración. Esto es, las primeras 28 proposiciones. También se hablará de que aunque la proposición 27 y la 28 hablan de paralelas, no utilizan el quinto postulado en su demostración. Se les explicará, a manera de proyección de conocimiento, que a estas proposiciones son reconocidas como teoremas de la geometría pura.

Luego se explicará el concepto de enunciados equivalentes. Se probará la equivalencia del quinto postulado con la versión de Playfair, que es la más conocida y trabajada. Recordemos que esta prueba se encuentra en el segundo capítulo de este documento.

Más adelante se le preguntará al estudiante su concepto acerca de rectas paralelas. Luego se comparará su idea con la de Euclides (definición 23) y con la de otros geómetras (equidistancia). Se les interrogará sobre las rectas asintóticas y si éstas caben dentro de la definición de rectas paralelas para Euclides.

Después de toda esta reflexión, se les explicará a los estudiantes que fue ese «germen» dentro del quinto postulado el que impulsó el trabajo matemático dentro de un sistema axiomático. Que dichos intentos de demostración se pueden resumir en tres grupos de ideas: los que intentaron la demostración cambiando la definición de paralelas. Los que la intentaron buscando una contradicción trabajando de manera directa, utilizando como hipótesis solo los cuatro primero postulados. Y los que trabajaron por reducción al absurdo con su negación.

Para finalizar esta sesión se pedirá al estudiante investigar sobre la vida del matemático *Gerolamo Saccheri*.

3.4.4. Cuarta sesión (Idea de demostración de Saccheri)

Después de presentar al matemático Gerolamo Saccheri, se explicará que este matemático tenía como fin reivindicar a Euclides y su obra. Saccheri quería convencer al mundo académico que la axiomática de Euclides era perfecta y que el quinto postulado no tenía otra salida si no ser verdadero. Sin imaginarse que su idea iba a concluir en algo muy diferente a lo que pretendía.

¿Pero cuál fue la idea de Saccheri? Trabajar por reducción al absurdo de la siguiente manera: Tomaba como datos las primeras 28 proposiciones del libro I de los *Elementos*, pues no se utiliza el quinto postulado sino hasta la proposición 29, y suponía la falsedad del postulado de las paralelas. Lo anterior con la esperanza de encontrar contradicciones trabajando con la negación del quinto postulado y así reivindicar a Euclides y su suposición.

Para tal efecto, Saccheri trabajo con el cuadrilátero birrectángulo isósceles. Es una figura geométrica plana de cuatro lados, con un segmento de recta que llamaremos base, con los ángulos de dicha base rectos y los lados que se alzan sobre los ángulos rectos de la base iguales. En la primera proposición de la investigación de Saccheri, éste prueba que si se construye un cuadrilátero birrectángulo isósceles, los ángulos que se forman en la parte opuesta a la base tienen que ser iguales. Es aquí donde plantea sus tres hipótesis. Aquellos ángulos superiores son iguales y además son rectos, o son iguales y además son agudos, o son iguales y además son obtusos. Que respectivamente llamó, la hipótesis del ángulo recto, la hipótesis del ángulo agudo y la hipótesis del ángulo obtuso. Para tener una imagen de esta idea, veamos la figura 3.5.

Después de presentado el gráfico, se le preguntará al estudiante sobre «la figura correcta». Cuando el estudiante observe estas figuras estará tentando a pensar, como es normal, que la única forma posible que existe para los ángulos superiores es que sean iguales y además sean rectos (el cuadrilátero del medio). Se les dirá entonces que aquella figura

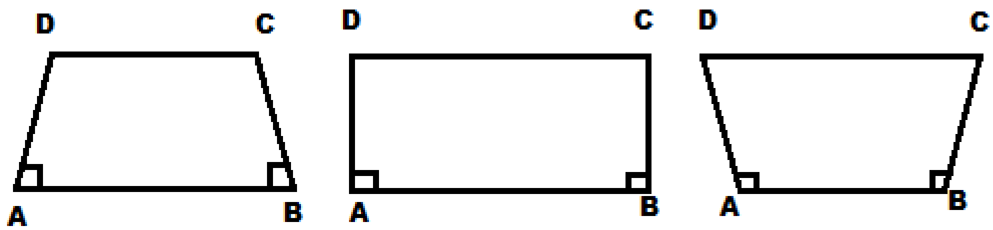

Figura 3.5: Saccheri

es la que coincide con el quinto postulado. Se les preguntará si es posible pensar en un cuadrilátero con tales condiciones y que se pueda construir como el primero o el tercero de la figura 3.5. La respuesta ideal y esperada es que si, y que se puede construir solo si se «dobla» el plano. Dado que el plano es uno de los obstáculos epistemológicos para la comprensión de las geometrías no euclidianas. De no encontrar esa respuesta, será deber del docente exponerla.

Luego de estas reflexiones se explicará a los estudiantes, de manera intuitiva, como fue que Saccheri encontró las contradicciones en las figuras primera y tercera, para finalmente concluir que la única posible tiene que ser la segunda. Es decir, el quinto postulado tiene que ser verdadero. Para esto, volvamos a mostrar otra imagen pero ya «no tan plana» como la primera y analicemos intuitivamente como fue que llegó Saccheri a sus contradicciones.

En la hipótesis del ángulo obtuso, que se puede observar en la figura 3.6, vemos la necesidad de «doblar» las rectas para poder hacer de los ángulos superiores obtusos. Ahora bien, intuitivamente podemos apreciar que si construimos el cuadrilátero de esta manera y prolongamos tanto queramos los lados que suben desde la base, estos terminaran intersectándose. Dejando la figura de ser cuadrilátero y convirtiéndose en un triángulo, contradicción. En palabras de Saccheri, la contradicción se la expresa de la siguiente ma-

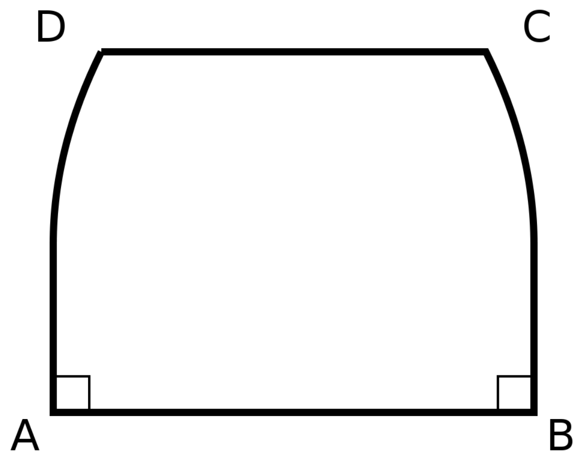

Figura 3.6: Hipótesis del ángulo obtuso

nera: «*se puede determinar que la hipótesis del ángulo obtuso contradice el segundo de sus postulados, pues no permite que todas las rectas tengan longitud infinita...*».

Después de esto se hará, a manera de reflexión, la siguiente pregunta: ¿será que llegar a la contradicción de un postulado es suficiente para concluir la falsedad de una teoría? La respuesta es no.

Continuando, se le dirá al estudiante que trabajando con la hipótesis del ángulo agudo, Saccheri nunca encontró contradicción alguna. Bajo esta hipótesis lo único que se atrevió a decir fue que «*la hipótesis del ángulo agudo es absolutamente falsa, porque repugna a la naturaleza de la línea recta*». Con esto pensó haber resuelto el problema del quinto postulado. Pero no fue así, lo que hizo fue dar una nueva luz a la interpretación del espacio en donde se mueven las geometrías.

Para finalizar esta sesión se pedirá al estudiante que investigue acerca de la superficie esférica y la superficie hiperbólica. Además de llevar a la clase una esfera de icopor, de mínimo 20 centímetros de diámetro, marcadores, tijeras y un pedazo de cartón paja dos veces más grande, de largo y ancho, que el diámetro de la esfera de icopor. Por ejemplo, si el diámetro de la esfera de icopor es de 20 centímetros, las dimensiones del pedazo de cartón paja deben ser de 40x40 centímetros como mínimo.

3.4.5. Quinta sesión (Construyamos axiomas)

Empezaremos la sesión diciendo que las tres hipótesis de Saccheri son consistentes. Que hoy en día se conocen como geometrías no euclidianas, más exactamente, geometría elíptica y geometría hiperbólica. Es más, que hoy en día son aplicables en lo concreto resaltando las teorías físicas que se apoyan en ellas. Solo para decir un nombre de esto, Albert Einstein. Que estas teorías geométricas difieren de la euclidiana en algunos aspectos axiomáticos, esencialmente en el quinto postulado y que se modelan en superficies diferentes al plano. De esta manera, el trabajo de construcción axiomática que sigue será muy importante.

Se pedirá al estudiante que construya los axiomas de una geometría que no se mueve en el plano. En este caso, que se visualice sobre la esfera, herramienta que deben tener como la esfera de icopor. Para tal efecto se escribirán en el tablero los cinco postulados euclidianos, al igual que las definiciones de recta, ángulo y de paralelas, de tal forma que el estudiante empiece con un ejercicio de comparación.

En primer lugar se les recordará a los estudiantes que la geometría de Euclides se visualiza estrictamente en el plano. Que todas sus definiciones y principios tienen su representación visual sobre las superficies planas. Pero, ¿la geometría debe moverse estrictamente sobre un plano? ¿Nuestra realidad es plana? Al menos sabemos que nuestro mundo no lo es, y que para desplazarnos, por ejemplo, desde Colombia hasta Japón, no podremos hacerlo de la forma que nos recomienda Euclides, en línea recta, forzosamente tenemos que curvar nuestro trayecto.

Como sabemos que la superficie esférica es un modelo de representación de una de las geometrías no euclidianas, la elíptica. También que esta geometría posee su propio sistema axiomático. Entonces, el estudiante utilizando la experiencia y la observación construirá la axiomática de esta geometría que se puede representar sobre la superficie de una esfera.

En primer lugar se les pedirá que ubiquen un punto sobre la superficie de la esfera igual que lo representaban sobre el plano. Recordemos que el ejercicio es comparativo respecto a la axiomática euclidiana. Después se les pedirá que ubiquen otro punto en una posición diferente del primero y que teniendo esos puntos se pregunten por el primer postulado, el segundo y la definición de recta. Se les preguntará: ¿cómo deben cambiar estos postulados?, ¿cómo sería entonces una regla para trabajar sobre esta superficie? y ¿qué sería necesario redefinir? Todo lo anterior para seguir teniendo consistencia.

Las respuestas esperadas son las siguientes:

- **Para la cuestión de la recta:** que las rectas sobre esta superficie se tienen que definir como circunferencias diametrales sobre la esfera, o como circunferencias antipodales.
- **Para la cuestión del primer postulado:** que dos puntos determinan solo un segmento de recta pero diametral.
- **Para la cuestión del segundo postulado:** que las rectas se pueden extender ilimitadamente, en el sentido que puede seguir girando sobre ellas cuanto se quiera, pero que tienen longitud finita, el diámetro de la circunferencia.
- **Para la cuestión de la regla:** que la regla ya no puede ser «estática», habrá que curvarla según la superficie esférica para trazar las rectas.

El estudiante empezará a darse cuenta que los axiomas no son verdades absolutas, que se pueden construir.

En esta parte de la sesión el estudiante deberá, ingeniosa y creativamente, construir una regla, un compás y un transportador que les sirvan como herramienta para dibujar figuras sobre la esfera que llevó a la clase. Con esto finalizará la sesión y se dejará como tarea terminar dichas herramientas.

La siguiente es una idea para construir las herramientas. Esta idea debe presentarse finalizando la sesión para que el estudiante de manera creativa piense en la suya. Ver figura 3.7.

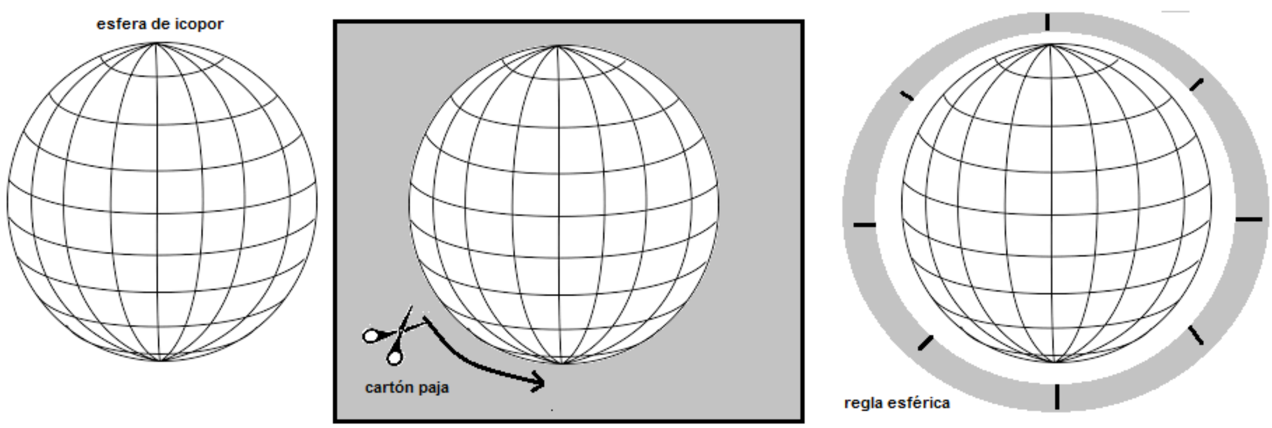

Figura 3.7: Regla esférica

El transportador será uno muy similar al transportador plano, pero curvado. En el caso del compás servirá el mismo de la geometría euclidiana.

3.4.6. Sexta sesión (Continua la construcción de axiomas)

Llevados la regla, el compás y el transportador elíptico, podemos empezar a construir figuras sobre la esfera.

En primer lugar se le pedirá al estudiante que ubique dos puntos antipodales sobre la esfera. Luego, que sobre estos puntos analice el enunciado del primer postulado y reflexione al respecto. Este análisis le permitirá darse cuenta de la modificación que habría que hacerle a este postulado euclidiano para hacerlo consistente en la geometría elíptica.

Continuando con la dinámica, se les pedirá que construyan un triángulo sobre esta superficie utilizando la definición euclidiana de triángulo. Se les preguntará ¿qué diferencias se pueden apreciar respecto a los dos triángulos, el plano y el esférico? ¿Qué resultados o teoremas con respecto a triángulos podrían cambiar en estas dos geometrías? La respuesta esperada es que, bajo dicha observación y análisis intuitivo, la suma de las medidas de los ángulos internos de un triángulo es mayor en el triángulo esférico que en el triángulo plano. Si el estudiante no logra reconocer la diferencia, se le pedirá que dibuje dos rectas completas, círculos diametrales, de tal forma que al intersectarse en cualquiera de sus dos puntos formen ángulos rectos. Estas medidas serán verificadas por aproximación con el transportador elíptico construido. Así verificarán el teorema de los ángulos internos del triángulo esférico en comparación con el mismo teorema en el triángulo plano.

El estudiante empezará a darse cuenta que si se va a trabajar con la geometría elíptica, habrá que cambiar la axiomática. Llegando a la conclusión que los axiomas no son verdades absolutas. Pero aún no se llega al punto clave de esta experimentación, falta que el estudiante investigue sobre el enunciado del quinto postulado en la geometría elíptica.

Experimentalmente se puede evidenciar que un triángulo esférico no cumple con el teorema de los ángulos internos. Es decir, que la suma de los ángulos internos es igual a dos rectos. Analicemos entonces la prueba euclidiana que da paso a dicho resultado y hagamos que el estudiante reflexione respecto a esta prueba y pueda concluir algo respecto al quinto postulado.

Recordemos la demostración de la suma de los ángulos internos de un triángulo, la proposición 32 del libro de los *Elementos*.

Proposición 32: En todo triángulo, si se prolonga uno de los lados, el ángulo externo es igual a los dos ángulos internos y opuestos, y los tres ángulos internos del triángulo son iguales a dos rectos.

Debemos recordar al estudiante que para esta prueba, ya se utiliza el quinto postulado como hipótesis, pues se utiliza en la demostración de la proposición 29.

La demostración de la proposición 32 se dejará al estudiante con ayuda del siguiente gráfico, figura 3.8, donde el triángulo en cuestión es el triángulo ABC y la recta $\overline{CE} \,||\, \overline{AB}$:

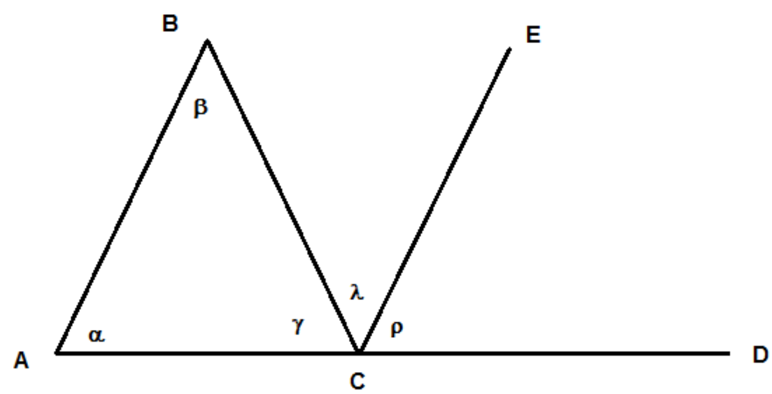

Figura 3.8: Proposición 32

Después de ver la demostración se le pedirá al estudiante que intente replicar los argumentos utilizados en esta prueba euclidiana y pasarlos a la superficie esférica. Se les preguntará ¿cuál parte del argumento euclidiano no aplica en la geometría sobre la esfera para realizar dicha demostración? La respuesta esperada es que en la geometría esférica no existen rectas paralelas.

Otro resultado importante de comparación, entre la geometría plana y la geometría esférica, puede ser el teorema de Pitágoras. Este teorema, demostrado en la geometría euclidiana, no puede aplicar sobre la superficie de la esfera, ya que requiere del quinto postulado para su demostración. Recordemos que el teorema de Pitágoras es un resultado muy importante utilizado en matemáticas para calcular distancias estableciendo sistemas de referencia. Luego, para poder establecer la comparación, construimos un triángulo rectángulo con tres cuerdas diferenntes de tal manera que al superponerlas sobre un tablero se evidencie un triángulo rectángulo. Después, con esas mismas cuerdas pero ahora superponiendolas sobre la superficie de una esfera (globo) verificamos que el ángulo entre los lados que en el tablero formaban un ángulo recto, sobre la esfera no va a suceder. El estudiante deberá concluir la falsedad del teorema de Pitágoras sobre la superficie de la esfera.

Finalmente el estudiante deberá concluir escribiendo todas las modificaciones realizadas a los postulados de la geometría de Euclides para que sean «verdaderos» en la geometría sobre la esfera. El resultado comparativo esperado será el siguiente:

GEOMETRÍA PLANA	**GEOMETRÍA ELÍPTICA**
Postulado 1: Dos puntos determinan una recta.	**Postulado 1**: Dos puntos, no antipodales, determinan una recta.
Postulado 2: Las rectas se pueden extender infinita e ilimitadamente.	**Postulado 2**: Las rectas se pueden extender ilimitadamente pero son finitas.
Postulado 3: Con un centro y un radio se puede trazar una circunferencia.	**Postulado 3**: Con un centro y un radio se puede trazar una circunferencia.
Postulado 4: Todos los ángulos rectos son iguales.	**Postulado 4**: Todos los ángulos rectos son iguales.
Postulado 5: Por un punto exterior a una recta pasa una y solo una paralela a dicha recta.	**Postulado 5**: Por un punto exterior a una recta no pasa ninguna paralela a dicha recta.

Cuadro 3.1: Tabla comparativa de postulados

3.4.7. Séptima sesión (Algunos resultados de la geometría elíptica)

En esta sesión presentaremos algunas proposiciones que se pueden demostrar en la geometría elíptica utilizando los axiomas construidos. En primer lugar pediremos al estudiante que construya una circunferencia sobre la superficie de la esfera. El estudiante debe concluir a partir de su análisis y observación que la longitud de la circunferencia, en comparación con la geometría euclidiana, es mayor a $2\pi r$; donde r es el radio de la circunferencia. Aquí podemos decir que las circunferencias pueden llegar a ser rectas; por esta razón los círculos diametrales o las rectas en geometría elíptica también son llamados círculos máximos.

Dándole otra mirada a los resultados de la geometría elíptica haremos lo siguiente: Se le pedirá al estudiante construir un cuadrilátero de Saccheri sobre la superficie de la esfera, haciendo coincidir la base del cuadrilátero con el Ecuador (en cuyo caso la base será el pleno equivalente de una línea recta), los ángulos internos de los vértices superiores de la cumbre del cuadrilátero serán obtusos. Es decir, construiremos la hipótesis que fue desechada por Saccheri dado el hecho de que esta hipótesis estaba en contradicción directa con el quinto postulado de Euclides; postulado que permite trazar una sola paralela a una recta dada por un punto externo a ella. Además se podrá observar también que las paralelas cuando son extendidas en ambas direcciones hacia el infinito tarde o temprano se intersectan, contradiciendo también el segundo postulado de la geometría Euclidiana. Ver la figura 3.9.

Al igual que en la geometría desarrollada por Saccheri, dos rectas «paralelas» tendrán una línea que será una perpendicular común a ambas. En tal región del espacio, la imagen que empieza a surgir en la geometría de Saccheri es la de dos paralelas que tienen una perpendicular común y que fuera de ella van mostrándose como en la figura 3.9.

En otro ejercicio, sabemos que en geometría plana la figura más simple es el triángulo,

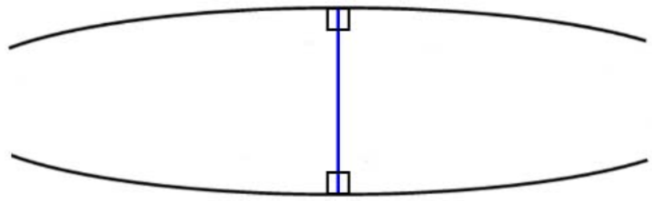

Figura 3.9: Contradicción encontrada por Saccheri

dado que solo se puede cerrar una región con mínimo tres rectas. ¿Pero será que ocurre esto también en la geometría esférica? Se le hará esta pregunta al estudiante y se esperará que responda que sobre la superficie de una esfera se pueden construir figuras de dos lados. En efecto, si trazamos dos círculos máximos, estos determinarán o cerraran áreas, cuatro en total si utilizamos solo dos círculos máximos. A estas regiones que determinan áreas las llamaremos lunas o lunetas. Los vértices de estas lunetas tienen que ser puntos antipodales. Ver figura 3.10.

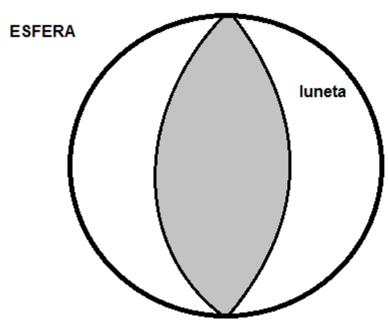

Figura 3.10: Luneta eférica

Cada luna esférica determina un ángulo (los dos ángulos internos de cada luna son iguales). Veamos como determinar el área de la luna. Primero se le pedirá al estudiante que la determine dándole la información que el área de la superficie de una esfera de radio R es $4\pi R^2$. De no lograrse, empezaremos con la exposición formal de dicho cálculo.

Sabemos que el área de la superficie de una esfera de radio R es $4\pi R^2$. Un círculo máximo divide la superficie de la esfera en dos hemisferios congruentes. Por tanto el área de cada uno de esos hemisferios será $2\pi R^2$. Si trazamos otro gran círculo que se intersecta con el primero formando ángulos rectos, esta construcción dividirá a la esfera en cuatro lunas congruentes; cada una de ellas con área igual a πR^2. Si hacemos esto de nuevo, dividiendo las cuatro lunas en dos lunas congruentes, obtenemos ocho lunas congruentes donde cada una tiene un área de $\dfrac{4\pi R^2}{8} = \dfrac{\pi R^2}{2}$. Este proceso se puede repetir muchas veces. Notemos que cada luna, así construida, esta contenida en un hemisferio de la esfera. Luego si dividimos un hemisferio en q lunas iguales, la esfera se va a dividir en $2q$ lunas. El área de cada luna será $\dfrac{4\pi R^2}{2q} = \dfrac{2\pi R^2}{q}$ y el ángulo de cada luna será $\dfrac{2\pi}{2q} = \dfrac{\pi}{q}$.

Ahora, si unimos p de estas lunas vamos a encontrar una luna de ángulo $\dfrac{\pi p}{q}$ y de área $\dfrac{2p\pi R^2}{q}$. De esta manera se puede concluir que el área de una luna de ángulo lunar α, que denotaremos A_α, donde $\alpha = \dfrac{p\pi}{q}$ es:

$$A_\alpha = 2R^2\alpha$$

Este razonamiento prueba esta igualdad para todos los ángulos de la forma $\dfrac{p\pi}{q}$, pero es válida para cualquier ángulo α dado que se puede aproximar utilizando múltiplos racionales de π.

Ahora si estamos listos para la demostración del teorema de Girard. Este resultado permite determinar el área de un triángulo esférico. Además de probar que la suma de los ángulos internos de un triángulo, en geometría elíptica, es mayor a dos rectos.

Teorema de Girard: Si R es el radio de una esfera, y a, b y c son los ángulos internos de un triángulo (medidos en radianes) cuyos lados son segmentos de círculos máximos de dicha esfera, entonces el área A_t de dicho triángulo estará dada por la relación:

$$A_t = (a + b + c - \pi)\, R^2$$

Demostración:

Construyamos un triángulo sobre una esfera de radio R con ángulos a, b y c. Observemos que los lados del triángulo son segmentos de círculos máximos y por tanto cada ángulo del triángulo también corresponde a una luna esférica. Veamos en los siguientes gráficos las lunas correspondientes a cada ángulo. Ver figuras 3.11, 3.12 y 3.13.

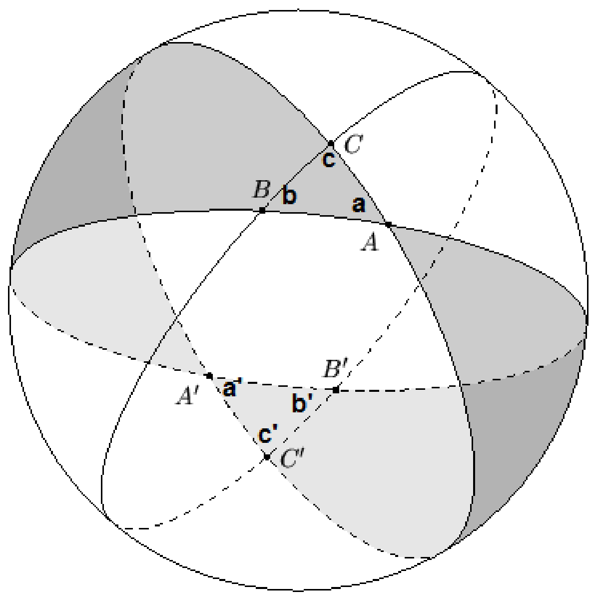

Figura 3.11: Triángulo esférico-lunas del ángulo a

Ahora, como el área total de la superficie de la esfera ($4\pi R^2$) es igual a la suma de las áreas de las lunetas formadas por los ángulos internos el triángulo; además de saber que el área cubierta por las seis lunas correspondientes a los ángulos interiores, excede al área completa de la esfera en cuatro áreas del triángulo con ángulos a, b y c. Tenemos que:

$$4\pi R^2 = 2A_a + 2A_b + 2A_c - 4A_t$$

siendo A_a, A_b y A_c las áreas de las lunetas correspondientes a los ángulos a, b y c. Y A_t el área del triángulo.

Sabemos también que el área de una luna de ángulo a es $2R^2a$ luego:

$$4\pi R^2 = 2(2R^2a) + 2(2R^2b) + 2(2R^2c) - 4A_t$$

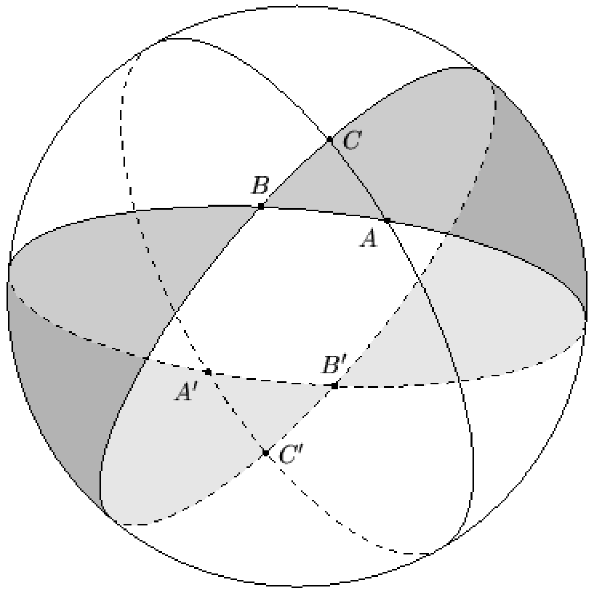

Figura 3.12: Triángulo esférico-lunas del ángulo b

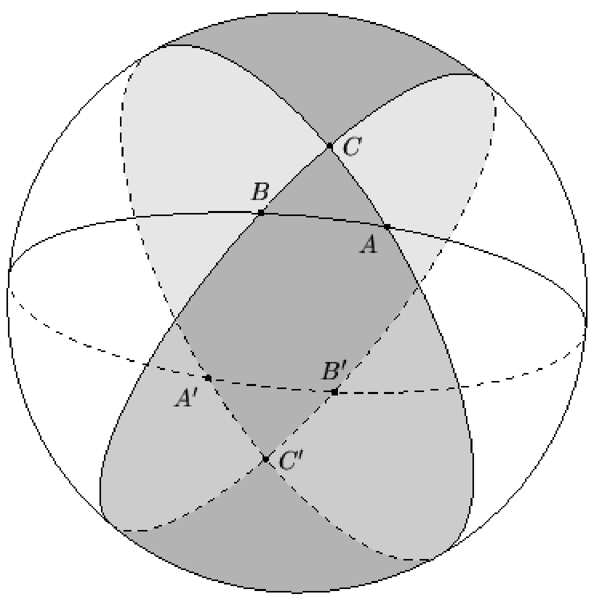

Figura 3.13: Triángulo esférico-lunas del ángulo c

así:

$$4\pi R^2 = 4R^2a + 4R^2b + 4R^2c - 4A_t$$

dividiendo todo por $4R^2$ obtenemos:

$$\pi = a + b + c - \frac{A_t}{R^2}$$

con lo que finaliza la prueba.

Este resultado importante de la geometría elíptica, no solo nos brinda la herramienta matemática para determinar áreas. En este teorema también se puede verificar que la suma de los ángulos internos de cualquier triángulo esférico excede los dos ángulos rectos. Cuestión que se quería mostrar por ser uno de los resultados más notorios, en cuanto a teoremas, entre la geometría plana y la elíptica.

Otro resultado importante que se puede observar diferente en la geometría elíptica es el teorema de Pitágoras. En geometría plana sabemos que en todo triángulo rectángulo, la suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa. En forma de ecuación:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

donde c es la hipotenusa y a, b son los catetos. Pero este resultado es dependiente del quinto postulado euclidiano, y como este es falso en geometría elíptica no puede ser verdadero en esta geometría. A manera de comparación, mostraremos al estudiante el equivalente de este teorema pero en la geometría elíptica:

Proposición: En todo triángulo rectángulo trazado sobre la superficie de una esfera con radio R, el coseno del cociente entre la hipotenusa c y el radio de la esfera R es igual al producto de los cosenos de los cocientes entre los catetos y el radio de la esfera.

$$cos\left(\frac{c}{R}\right) = cos\left(\frac{a}{R}\right) cos\left(\frac{b}{R}\right)$$

En este teorema el coseno tiene la misma interpretación dada en trigonometría.

CAPÍTULO 4

CONCLUSIONES

Empecemos reconociendo que las prácticas matemáticas han estado generalmente en un continuo movimiento entre la axiomática y la realidad. Por ello, debemos esforzarnos para poder llevar nuestras teorías a la aplicación y no quedarnos tan sumergidos en el mundo de la lógica. A continuación estableceremos algunas de las relaciones, producto de la investigación histórica, entre las geometrías no euclidianas y su movimiento entre la realidad y la axiomática.

En primer lugar observamos que las matemáticas como una práctica humana, tiene su génesis en lo concreto; que aparecen como producto de ciertas necesidades básicas del hombre como la de contar o la de medir. Entre otras necesidades, contar siembras, animales o integrantes de una familia; o medir terrenos, construcciones o áreas de terrenos. Dichas necesidades inicialmente se estudiaron matemáticamente con los nombres de aritmética y geometría. Por ejemplo, diferentes culturas utilizaban el resultado del teorema de Pitágoras para medir ángulos rectos; lo hacían utilizando una cuerda con trece nudos y formando un triángulo con la misma. Este resultado geométrico fue utilizado en la práctica antes de ser demostrado basándose en un sistema axiomático[1]. Es por esto que

[1]Cabe resaltar que el sistema axiomático euclidiano que dio paso a una demostración para este teorema,

la geometría y la aritmética forman parte fundamental del origen de las matemáticas.

Tiempo después, las matemáticas empezaron con la tarea de buscar un sistema que permitiera consolidar esta verdad experimental[2]. Fue entonces que apareció el sistema axiomático propuesto por Euclides[3]. Este sistema está compuesto por ciertas verdades llamadas axiomas que permitieron construir una demostración para el teorema de Pitágoras. Cabe resaltar que la axiomática construida por Euclides deja ver un rastro concreto, por ejemplo cuando define la línea recta. El hecho de que la línea yace por igual sobre todos sus puntos, corresponde a «tirar una cuerda» de un extremo a otro tensándola con estacas en sus extremos. Es una visión muy concreta del concepto. Por esto es que Giusti entiende la definición euclidiana de línea recta como una abstracción de la operación sobre el terreno, al igual que lo hace con los tres primeros postulados. Por lo anterior es que Giusti afirma que la geometría es hija de la técnica; en donde los objetos geométricos no son abstracción de la realidad física sino abstracción de operaciones. Lo que nos permite concluir que el primer sistema axiomático, también tienen sus orígenes en lo concreto.

Fue así como la geometría dio su primer paso desde lo concreto hacia lo axiomático, pues aquel sistema constituido por «verdades evidentes» no dejaba duda de la veracidad del resultado geométrico encontrado en la práctica[4].

Pero construir axiomas partiendo de la observación de realidades es apenas una pequeña parte del estudio matemático. Es cierto que de desde hace algún tiempo algunos matemáticos se han encargado de construir sistemas axiomáticos que no dejan dudas sobre la consistencia de las teorías matemáticas[5], pero este objetivo es también otra pequeña parte del estudio matemático.

---

deja ver un rastro concreto a la hora de establecer sus enunciados.

[2]Estas verdades experimentales son las que Hilbert llama proposiciones fundamentales.

[3]El aporte más importante de Euclides fue que nos heredó la idea del significado de la prueba matemática.

[4]La geometría dio el primer paso al concepto de formalización de los resultados encontrados

[5]Esta época se conoció como la era de los fundamentos

La dificultad que pudimos observar[6] cuando un sistema se consolida, es que se convierte en un grupo de verdades tan absolutas e inmodificables que pareciera que toda la verdad estuviera dentro de la teoría que se construye con ellos[7]. Por esta razón es que algunos matemáticos se quedan solo construyendo y construyendo teoría dentro del sistema, dejando de lado la aplicabilidad concreta que estas verdades pudieran producir. En ciertas ramas de la matemática los edificios teóricos son tan altos que resultan borrosos para los mismos matemáticos. Las matemáticas actualmente se han encargado, casi exclusivamente, del fortalecimiento en la construcción de los edificios lógicos, abandonando de manera progresiva las aplicaciones que con estas teorías pudiéramos hacer.

Una de las enseñanzas que nos deja esta investigación histórica, es que pueden existir realidades que se descubren negando sistemas axiomáticos consolidados. Como el descubrimiento de la realidad imperceptible de la verdadera forma del espacio. Una realidad a la que ninguna de nuestras sensaciones hubiera sido capaz de conducirnos. En pocas palabras, que las geometrías no euclidianas viajaron de lo axiomático hacia lo concreto.

Por todo lo anterior es que podemos decir que las teorías matemáticas no poseen la verdad absoluta de la realidad, en otras palabras, deben permanecer en constante contacto con lo concreto buscando aplicaciones de sus resultados. Las matemáticas no se deben perder tanto en el mundo de la lógica[8], lo cual es la gran dificultad de los matemáticos actuales que se encuentran muy sumergidos en este mundo. La historia de la geometría nos brinda un claro ejemplo de que el tránsito entre la axiomática y la realidad es posible, que se puede hacer matemáticas construyendo o cambiando axiomas. Cabe resaltar que nuestra visión de matemáticas como ciencia es que, debe partir de lo concreto y regresar

[6]En la axiomática de Euclides

[7]No podemos olvidar que según Poincaré, los axiomas son convenciones.

[8]Este mundo matemático donde se construyen cadenas interminables de implicaciones que se alejan cada vez más de la realidad. No obstante, este mundo forma parte de la formación de pensamiento matemático y no puede ser excluido del proceso de formación.

a lo concreto, aunque a veces ese regreso tarde siglos o simplemente sea un encuentro inesperado con la realidad.

La investigación histórica nos mostró que el primer inconveniente que encontraron las geometrías no euclidianas fue la concepción de la realidad. Recordemos que estas nuevas geometrías difieren de la euclidiana principalmente en el quinto postulado. Los matemáticos, cuando se empezó a investigar sobre las nuevas versiones del quinto postulado, no eran capaces de abandonar el pensamiento plano. Por ejemplo, pensar que no pueden existir rectas paralelas a una dada o que exista más de una paralela los obligaba a reevaluar su concepción de recta, lo que el pensamiento plano no les permitía. Quizá era tan fuerte la influencia euclidiana que el solo hecho de pensar en otras interpretaciones era un absurdo. A pesar que las axiomáticas de las geometrías no euclidianas se estaban comportando lógicamente estables y consistentes, los matemáticos que investigaban en este campo no se atrevían a publicar sus avances. El miedo al rechazo del entorno académico impidió que grandes pensadores trabajaran con confianza sobre estas teorías.

No cabe duda que la física fue la luz al final del túnel, fue la que nos dio la certeza de que los descubrimientos lógicos encontrados matemáticamente si tenían modelos reales y aplicables. La física contribuyó con la consolidación de las geometrías no euclidianas. Fueron casi veinte siglos de estudios e investigaciones para encontrarnos con una realidad concreta. Definitivamente el regreso de las teorías matemáticas a lo concreto es el paso más complicado. Por ejemplo, el encuentro de la geometría con la realidad fue simplemente un accidente. Un accidente que empezó a tomar fuerza con las ideas de Saccheri, que sin quererlo y con la única meta de reivindicar a Euclides, terminó dando origen a la construcción de las geometrías no euclidianas.

El encuentro inesperado dentro del estudio de estas nuevas geometrías fue la realidad del espacio. En términos generales, el espacio es todo lo que nos rodea, es el lugar por donde se mueven los objetos, desde los microscópicos hasta los macroscópicos. Pero resulta que cada lugar del espacio viene dotado de su propia geometría[9] y esto se da por la presencia de lo que los físicos llaman el campo gravitatorio. El campo gravitatorio curva el espacio y dependiendo del tamaño de la curvatura, cambiará la geometría. No es lo mismo estudiar el movimiento de una partícula entre planetas que el movimiento de una partícula entre lugares cercanos a nosotros. Como lo vimos en el documento, las tres geometrías, aplicables al estudio de los movimientos de todo lo que se puede mover, vienen determinadas por la curvatura del espacio. Curvatura que tiene tres posibilidades, positiva, negativa o nula[10].

Para citar un caso, cuando se plantean ejercicios de encontrar la altura de un edificio, aquí basta con la geometría euclidiana. Pero si queremos estudiar el movimiento de un fotón de luz desde el sol hasta la tierra, no podremos utilizar la geometría euclidiana. Entre más nos alejamos de un planeta, más puede cambiar el espacio[11], ya que los físicos descubrieron que el espacio se deforma por la presencia de las masas. Por esta razón es que algunas mediciones de Lobachevski, respecto a distancias entre estrellas, no cuadraban. Es así como la geometría euclidiana nos resulta tan cómoda, pues nos alcanza para medir lo que es «concreto» para nosotros, además de ser aplicable para nuestros ejemplos de clase.

Otra de las enseñanzas que nos deja esta investigación histórica alrededor de las geometrías no euclidianas es que los sistemas axiomáticos construidos no pueden ser estrictamente los únicos, ni los dueños de toda la verdad matemática. Si en la geometría plana nos dimos cuenta que cambiando una axioma también se hacía teoría consistente entonces debemos convencernos que los sistemas axiomáticos admiten cambio bajo ciertas condiciones[12]. Por eso no podemos abandonar la idea de cambiar axiomas dentro de un sistema o, más aun, construir sistemas axiomáticos completos. Es claro que esto último no es un objetivo sencillo, pero por qué no ponérselo de ejercicio a los estudiantes de matemáticas;

[9]No necesariamente euclidiana.

[10]Geometrías no euclidianas.

[11]Entiendase el cambio del espacio por la curvatura del mismo, el espacio cambia cuando se curva

[12]Recordemos que en palabras de Poincaré los axiomas son convenciones.

quizá nos sorprendan los resultados. En alguna parte de la investigación se propone que el estudiante construya un sistema axiomático, pero no partiendo de la nada, sino tomando como base el sistema euclidiano y apoyándose mucho en la observación. Esta observación se hará sobre las superficies en las cuales las geometrías no euclidianas se mueven. En otras palabras, se propone que el estudiante construya axiomas haciendo observación, utilizando las figuras y también los modelos.

Dicha observación que queremos resaltar hace parte de lo concreto, de lo real, y es una ayuda importante para que el estudiante entienda el funcionamiento de los axiomas y de sus primeros pasos en la investigación matemática. Pues la utilización de las imágenes sensibles son la condición de comprensión y retención que pone Poincaré a los estudiantes para alcanzar la asimilación. Si el estudiante puede ver la transformación y evolución de una teoría, tendrá una mejor comprensión.

La observación será de ayuda importante para que el estudiante pueda asimilar que el axioma no puede ser una verdad absoluta. Por ejemplo cuando se le muestra la recta dentro de la geometría elíptica, este podrá reconocer su diferencia con respecto al concepto de recta de la geometría plana, lo que lo llevará a concluir que el primer axioma euclidiano debe cambiar. El estudiante se dará cuenta que también se puede hacer matemáticas construyendo axiomas.

Tengamos presente que las rupturas de pensamiento son necesarias a la hora de estudiar matemáticas y decir que el axioma no es una verdad absoluta es un ejemplo de dichas rupturas. Debemos preparar al estudiante para hacer rupturas. Dado que este está muy sumergido en el mundo de lo axiomático y la lógica, lo que lo lleva a entender la demostración solo como una secuencia de pasos lógicos. Por ello, algunos estudiantes aseguran poder seguir una demostración sin asimilar qué es lo que se les está demostrando. Están sumergidos en una visión muy lógica de las matemáticas. Entender que el concepto de recta cambia dependiendo del espacio geométrico en el cual se trabaje es otro ejemplo de ruptura de pensamiento que se trabajó dentro de esta investigación.

Lo que pretendemos es que el estudiante comprenda que las matemáticas no se pueden perder tanto en el mundo de la lógica, de lo abstracto. Que entienda que los axiomas son enunciados que se pueden construir y hacerles ver que todo ese mundo lógico puede estar relacionado con cosas concretas. Que se debe aprovechar lo visual y su intuición como una ayuda importante para entender el funcionamiento de lo axiomático. Si se descubrieron realidades negando enunciados dentro de sistemas axiomáticos consolidados, la tarea no debería ser tan tediosa.

Finalmente, concluimos que las matemáticas deben estudiarse dentro de ese constante movimiento entre la axiomática y la realidad. Son las matemáticas las ciencias pioneras en construir axiomas para demostrar hechos concretos. También fueron las matemáticas las que haciendo investigación y estudio sobre sus propios sistemas axiomáticos, lograron avanzar a tal punto de contribuir en el descubrimiento de situaciones y cosas concretas. La historia de las geometrías presentada en esta investigación es un claro ejemplo de esta situación. Pudimos apreciar un recorrido muy interesante: que el primer sistema axiomático conocido en matemáticas lo tiene la geometría. Que algunos historiadores concluyen que dicho sistema se construyó para demostrar un hecho concreto como el enunciado en el teorema de Pitágoras[13]. Que luego de establecido el sistema, los estudios realizados dentro de él, permitieron construir otros sistemas diferentes que dieron paso a las geometrías no euclidianas, y estas geometrías se convirtieron en teorías fundamentales que dieron paso al entendimiento de nuevas cosas concretas como el espacio.

La gran dificultad que se presenta en la relación entre la axiomática y la realidad la expresa Einstein (1982) diciendo: «en la medida que las proposiciones matemáticas se refieren a la realidad no son seguras y, viceversa, en la medida en que son seguras, no se

[13]Esta es apenas una suposición, pues no se tiene certeza del objetivo de Euclides para la construcción de sus axiomas.

refieren a la realidad» (p 24). Lo anterior pareciera una estocada a la idea de encontrar relaciones entre estos conceptos, pero no puede convertirse en un ultimátum. Al contrario, las matemáticas nos han demostrado que estas relaciones se pueden encontrar, que la investigación debe continuar. Nuestro trabajo muestra que en la geometría existe una estrecha relación entre la axiomática y la realidad; sería interesante analizar esta relación en otras ramas de la matemática. Por ejemplo sería un desafío verificar esta relación en la teoría de conjuntos infinitos.

Por otro lado, el plan de unidad construido en el tercer capítulo de este documento fue elaborado con la idea de aprovechar lo visual como herramienta para la construcción de axiomas. Lo que queremos es hacer surgir en el estudiante una imagen sensible que le permita construirlo. Como herramienta para cumplir con este objetivo, se utilizaron las superficies de las tres geometrías. Lo esencial será que el estudiante aprenda a razonar justamente sobre los axiomas que él mismo elaboró. Estos es, evocaremos el espíritu geométrico de los estudiantes para dicha construcción; dado que, según Poincaré, la abstracción los a privado de toda imagen sensible.

Todas las ideas propuestas para las sesiones de clase son producto del estudio histórico-epistemológico realizado alrededor de las geometrías no euclidianas. En la medida que se iban construyendo los dos primeros capítulos se fue armando el plan de unidad. Lo que hicimos fue llevar toda esa construcción humana, que dio paso a la consolidación de las geometrías no euclidianas, al aula. Pues, según Anacona (2003) «Esta consideración humanizante de la ciencia genera en el aprendiz una posición distinta frente al conocimiento y estimula en él una participación analítica, crítica y creativa, distinta de aquella que se obtendría a partir de una exposición estática y acabada de los conceptos, en la cual todo está perfectamente terminado y donde las múltiples contingencias de construcción teórica quedan ocultas.» (p 41).

Algo que perseguimos con la construcción del plan de unidad, fue que el estudiante desarrollara pensamiento matemático. Uno de los caminos para este objetivo lo expone Haddamard con el tema de la invención. Según Haddamard, la acumulación de ideas es un camino a este objetivo. Aprovechamos que en nuestro pensamiento podemos encontrar una gran cantidad de ideas previamente asimiladas para a partir de ellas empezar a construir combinaciones con el fin de formar ideas mejores, que en algunos momentos de iluminación den paso a la invención. Solo pensemos en la cantidad de ideas que acumulamos desde nuestras primeras etapas de formación, y más aún, en la cantidad de conexiones posibles que se pueden formar con esas ideas. Visto de esta forma, el plan de unidad puede contribuir al desarrollo de pensamiento matemático.

Las ilusiones y expectativas con la puesta en marcha de los resultados de esta investigación son muy grandes. La aplicación de las sesiones propuestas en el tercer capítulo no fueron contempladas dentro del cronograma de esta investigación pero esperamos hacerlo a futuro. Sin embargo, gracias a que dicho contenido está sustentado en un marco teórico compuesto por ideas de pensadores matemáticos, se guarda gran ilusión respecto a los resultados. Entre ellos, que el estudiante desarrolle su pensamiento matemático desde una visión diferente a como normalmente se expone en los cursos universitarios. Además, este trabajo se puede tomar como un punto de partida a futuras investigaciones. Investigaciones en las cuales se puedan estudiar los resultados de la aplicación de estos contenidos o más estudios históricos que permitan establecer contenidos similares[14]. De ser favorable el resultado obtenido por estos contenidos, se abre la puerta a futuras investigaciones que persigan una idea como la presentada aquí.

[14]Estudios históricos que evidencien la transformación de una teoría y que permitan construir planes de unidad para llevar al aula

BIBLIOGRAFÍA

[1] Álvarez-Gaumé y Vázquez-Mozo. (2005). *Einstein y la geometría*. Universidad de Salamanca. Enero-Marzo 2005.

[2] Anacona, M. (2003). *La historia de las matemáticas en la educación matemática*. Revista EMA, Vol 8 $N^o 1$ $30 - 46$.

[3] Anacona, M y Arboleda, L. (1994). *Las geometrías no euclidianas en Colombia. La apuesta euclidiana del profesor Julio Garavito (1865-1920)*. Grupo historia de las matemáticas. Universidad del Valle. Quipu, vol 11 pp 7-24.

[4] Arboleda, L. C. (2009). *Hilbert y el método de los elementos ideales*, Mathesis III. UNAM, México (p239-p263).

[5] Barraza, O y Reyes, R. (2012). *Introducción al estudio de las geometrías no euclidianas a través de la geometría esférica. Desde una perspectiva docente.* Universidad de Santiago de Chile, Santiago de Chile.

[6] Bobadilla, M. (2012). *Desarrollo conceptual de la integral y la medida: un tránsito entre lo geométrico y lo analítico*. Universidad del Valle.

[7] Bonola, R. (1945). *Geometrías no Euclidianas, exposición histórico-crítica de su desarrollo*, taducido del italiano por Arroyo,L.G. Madrid:Calpe.

[8] Bosch, M. y Gascón, J. (2007). *25 años de transposición didáctica.* En Ruiz, L., Estepa, A. y García, F. Sociedad Escuela y Matemáticas. Aportaciones de la Teoría Antropológica de lo Didáctico. Universidad de Jaen. Pp. 349-371.

[9] Bosh, A. (1982). *Sobre la teoría de la relatividad y otras contribuciones científicas.* Barcelona pp 24-36.

[10] Bueno, G. (1995).*¿Qué es la ciencia?* La respuesta de la teoría del cierre categorial. Ciencia y Filosofía. Pentalfa, Oviedo.

[11] Brum y Schuhmacher. (2014). *uma abordagem de conceitos elementares de geometria naoeuclidiana: uma experiencia vivenciada no ensino de matematica a partir de uma sequencia didáctica*, Universidad de Blumenau.

[12] Brum W, Schuhmacher E, de Carvalho Rutz da Silva S. (2017). *A utilização de documentários enquanto organizadores prévios no ensino de geometria não Euclidiana em sala de aula.* Acta Scientiarium: Education -serial online-. January 2016;38(1):43-49. Available from: Academic Search Complete, Ipswich, MA. Accessed February 8, 2017.

[13] Campos, A. (1994). *Axiomática y geometría desde Euclides hasta Bourbaki*, Bogotá.

[14] Castrejón, G. (2013). *La idealidad del espacio en Kant y las geometrías no euclidianas.* Revista Filosofía Nº 24. Universidad de Los Andes. Mérida-Venezuela / ISSN: 1315-3463.

[15] Cavailles, J. (1938) *Méthode axiomatique et formalisme.* Hermann, Paris. Tradución al español: Método Axiomático y Formalismo.

[16] Chavez, A. (2001). *Versión crítica y comentada de la teoría de paralelas de Lobachevski en español.* Universidad del Valle, programa de matemáticas.

[17] Chavez, A. y Espitia, C. (2009). *La hipótesis del ángulo obtuso de Saccheri.* Revista SIGMA, departamento de matemáticas, Universidad de Nariño.

[18] Corry, L. (2002). *David Hilbert y su Filosofía Empirista de la Geometría*, Boletín de la asociación Matemática Venezolana, 9(1) 2002.

[19] Einstein, A. (2005). Geometría no euclídea y física (1926). Scientiae Studia, 3(4), 677-681.

[20] Espitia, C. (2009). *la obra Saccheriana en el surgimiento de las geometrías no euclidianas*. Universidad de Nariño, San Juan de Pasto.

[21] Etayo, F. (2010). *Matemáticas y realidad. Geometrías no Euclideas y universo*. Real academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Vol. 104, N^0 1 pp 97-105.

[22] Euclides (1991). *Elementos, libros I-IV*. Traducción y comentarios de Maria Luisa Puertas. Editorial gredos, Madrid.

[23] Giovannini, E. (2014). *Geometría, formalismo e intuición: David Hilbert y el método axiomático formal*. Concejo nacional de investigaciones científicas y técnicas, Argentina. Revista de filosofía, Vol 39.

[24] Giusti, E. (2000). *La naissance des objets mathématiques*. Ellipses Édition, Paris.

[25] Hadamard, J. (1947). *Psicología de la invención en el campo matemático*. Espasa Calpe, S. A. Buenos Aires.

[26] Hilbert, D. (1910). *Axiomatisches Denken, publicado en Mathematische Anncden* volumen 78. Págs. 405-415.

[27] Hilbert, D. (1993).*Fundamentos de las matemáticas*. Traducción directa del Alemán y notas de Luis Felipe Segura. Primera edición, México.

[28] Hilbert, D. (1973). *Über den Zahlbegriff, Jahresbericht der Deuts-chen Mathematiker-Vereinigung*, 8: 180-84. Traducción al inglésen:Ewald [1996, 1089-1096]. Traducción al Castellano en: Álvarezy Segura [1973, 17-22].

[29] Kline, M. (1985). *La perdida de la certidumbre*. Siglo XXI editores.

[30] Newman, J. (1985). Sigma. *El mundo de las matemáticas*. Editorial Grijalbo.

[31] Otte, M. (2007). *Mathematical history, philosophy and education*. Published online: 27 March 2007. Springer Science.

[32] Panza, M. (2011). *The twofold role of diagrams in Euclids plane geometry*. Synthese, 186, 55102.

[33] Piaget, J. y Garcia, R. (1984). *Psicogénesis e historia de la ciencia* . Siglo XXI editores.

[34] Poincaré, H. (1984). *Filosofía de la ciencia*. Consejo nacional de ciencia y tecnología, México.

[35] Poincaré, H. (1964). *El valor de la ciencia*. Colección austral. Tercera edición, editorial Espasa-Calpe, S.A. Madrid.

[36] Prenowitz, W.(1990). *Basic concepts of geometry*. Editorial Ardsley House, Publishers, Inc. 4720 Boston Way. Lanham, MD 20706.

[37] Ruiz, A. (1999). *Geometrías no euclidianas*. Editorial de la universidad de Costa Rica, primera edición.

[38] Prieto, C. A. (2012). *La comprensión del sistema de numeración decimal y su adecuado uso en las operaciones aritméticas.* Univesidad Nacional de Colombia. Bogotá Colombia.

[39] Saccheri, G. (1733). *Euclides ab omni naevo vindicatus*, editado y traducido al ingles G.B. Halsted, New York: Chelsea Publishing Company, primera edición (1920).

[40] A. S. Smogorzhevski (1978). *Acerca de la geometría de Lobachevski.* Traducido del ruso por el ingeniero Virgilio Llanos Más. Editorial Mir (1978).