

## ANEXO A

# Fundamentos matemáticos OFDM

### A.1. FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS OFDM

#### A.1.1 Representación Matemática de la Señal OFDM

La salida del transmisor OFDM se define como la suma de múltiples portadoras que son multiplicadas por los símbolos modulados  $X_i = [X_0, X_1, \dots, X_{i-1}]$  como se muestra en la Figura A. 1.

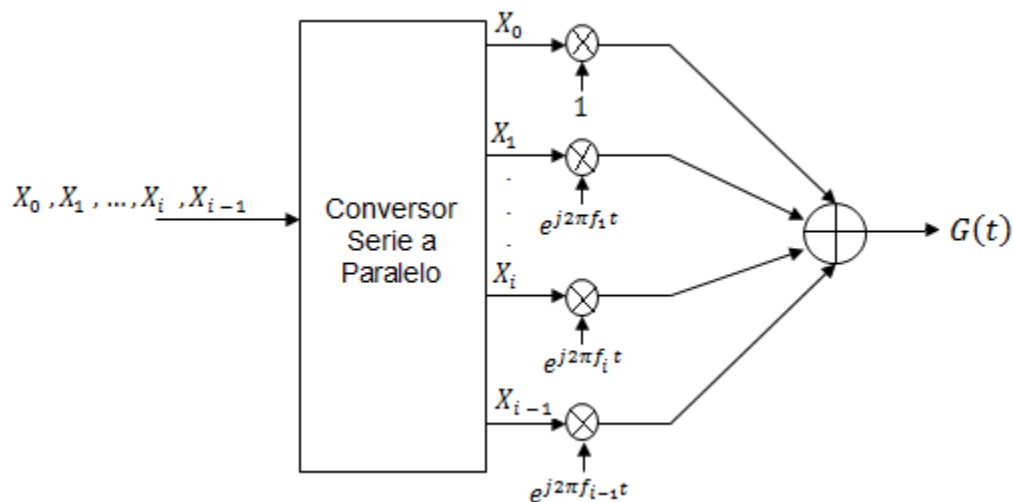


Figura A. 1 Generación de la señal OFDM

Los símbolos modulados  $K$  a transmitir son  $X_i$ ,  $i = 0, 1, \dots, K - 1$ , donde  $X_i$  es el número complejo dado por la constelación de QAM y la  $i$ -ésima frecuencia portadora para  $X_i$  es  $f_i$ , entonces la señal OFDM  $G(t)$  está dada por la ecuación (A. 1).

$$G(t) = \sum_{i=0}^{K-1} X_i e^{j2\pi f_i t} \text{rect}_T(t) \quad (\text{A. 1})$$

Donde  $\text{rect}_T(t)$  representa un pulso rectangular de duración  $t$ .



Si se muestrea la señal  $G(t)$ ,  $N$  veces en el tiempo del símbolo  $T$ , con una frecuencia  $f_s$  que es un múltiplo del espaciamento entre portadoras  $\Delta f$ , entonces el intervalo de cada muestra  $t_s$  se describe en la ecuación (A. 2).

$$t_s = T/N = 1/(\Delta f * N) \quad (\text{A. 2})$$

Y la señal OFDM muestreada es dada por la ecuación (A. 3) donde  $n$  es el número de muestra.

$$G(nt_s) = \sum_{i=0}^{K-1} X_i e^{j2\pi f_i n t_s} \text{rect}_T(nt_s) \quad (\text{A. 3})$$

Como las frecuencias portadoras están uniformemente espaciadas en el dominio de la frecuencia por un espaciamento  $\Delta f$ , entonces  $f_i = i\Delta f$ ,  $i = 0, 1, \dots, K - 1$ , por lo tanto la ecuación (A. 2) cambia por la expresión dada en la ecuación (A. 4).

$$G(nt_s) = \sum_{i=0}^{K-1} X_i e^{j2\pi i \Delta f n t_s} \text{rect}_T(nt_s) \quad (\text{A. 4})$$

Ahora bien, despejando  $\Delta f$  de (A. 2) y reemplazando en la ecuación (A. 4), la señal OFDM queda descrita por la ecuación (A. 5).

$$G(n) = G(nt_s) = \sum_{i=0}^{K-1} X_i e^{\frac{j2\pi i n}{N}} \quad (\text{A. 5})$$

Si se toma una secuencia  $g(i) = X_i$  para  $0 \leq i \leq K$  y  $g(i) = 0$  para  $K < i \leq N$ , entonces la ecuación (A. 5) cambia a la forma descrita en la ecuación (A. 6).

$$G(n) = \sum_{i=0}^{N-1} g(i) e^{\frac{j2\pi i n}{N}}; \quad n=0,1,2,\dots,N-1 \quad (\text{A. 6})$$

Si se compara la ecuación (A. 7), la cual describe la forma general de la Transformada Inversa de Fourier en Tiempo Discreto (IDFT, *Inverse Discrete Fourier Transform*), con la ecuación (A. 6), se observa que esta última es equivalente a la IDFT sin el factor multiplicativo.



$$Y(n) = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} y(i) e^{\frac{j2\pi in}{N}}; \quad n=0,1,2,\dots,N-1 \quad (\text{A. 7})$$

Por lo tanto, las muestras en el tiempo del símbolo OFDM  $G(n)$  corresponden con la IDFT de la secuencia  $g(k)$ . De esta manera en la Transformada Rápida de Fourier Inversa (IFFT, *Inverse Fast Fourier Transform*) cada símbolo  $X_k$  es multiplicado por una subportadora, es por esto que la IFFT se utiliza para la generación de la señal OFDM [1].

#### A.1.1.1 Ortogonalidad entre Portadoras

La técnica de transmisión OFDM permite organizar un conjunto de subportadoras de tal modo que no exista interferencia entre ellas. Para esto las subportadoras adyacentes deben ser ortogonales.

Matemáticamente es posible tener un conjunto de señales  $\Psi$ , donde  $\Psi_p$  indica la p-esima señal y  $\Psi_q$  la q-esima señal del conjunto, las señales  $\Psi_p$  y  $\Psi_q$  son ortogonales si cumplen con la propiedad de correlación dada en las ecuaciones (A. 8) y (A. 9) durante el periodo del símbolo modulado  $T$ .

$$R_{\Psi_p, \Psi_q(t)} = \frac{1}{T} \int_0^T \Psi_p(t) \cdot \Psi_q^*(t) dt = \begin{cases} 1, & \text{si } p = q \\ 0, & \text{si } p \neq q \end{cases} \quad (\text{A. 8})$$

$$R_{\Psi_p, \Psi_q(t)} = \frac{1}{T} \int_0^T e^{j2\pi(p-q)\Delta f t} dt \quad (\text{A. 9})$$

Donde \* denota la señal compleja conjugada de  $\Psi_q$ ,  $f_p = p\Delta f$  y  $f_q = q\Delta f$ , reemplazando en la ecuación (A. 9) se obtiene la ecuación (A. 10).

$$R_{\Psi_p, \Psi_q(t)} = \frac{1}{T} \int_0^T e^{j2\pi(f_p - f_q)t} dt \quad (\text{A. 10})$$

Si  $f_p = f_q$ , la solución de la integral dada en la ecuación (A. 10) se presenta en la ecuación (A. 11), por lo tanto las señales son iguales.



$$\frac{1}{T} \int_0^T 1 dt = 1 \quad (\text{A. 11})$$

Si  $f_p \neq f_q$ , la solución de la integral en la ecuación (A. 10) está dada en (A. 12).

$$\frac{1}{T} \left[ \frac{e^{j2\pi(f_p - f_q)t}}{j2\pi(f_p - f_q)} \right]_0^T = 0 \quad (\text{A. 12})$$

Para que la igualdad se cumpla,  $e^{j2\pi(f_p - f_q)T} = 1$ . Este factor también se representa en términos de las funciones trigonométricas seno y coseno como se muestra en la ecuación (A. 13).

$$e^{j2\pi(f_p - f_q)T} = \cos(2\pi(f_p - f_q)T) + j \sin(2\pi(f_p - f_q)T) \quad (\text{A. 13})$$

Donde  $\sin(2\pi(f_p - f_q)T) = 0$ , siempre que  $(2\pi(f_p - f_q)T) = 2\pi n$ , por lo tanto  $e^{j2\pi(f_p - f_q)T} = \cos(2\pi(f_p - f_q)T) = 1$ . Estas igualdades se cumplen si el argumento de la función coseno es  $2\pi n$ , tal como se muestra en la ecuación (A. 14).

$$2\pi(f_p - f_q)T = 2\pi n \quad (\text{A. 14})$$

Despejando la ecuación (A. 14), la separación entre subportadoras se representa mediante la ecuación (A. 15).

$$(f_p - f_q) = n/T \quad (\text{A. 15})$$

Por lo tanto la diferencia entre subportadoras adyacentes  $f_s = f_p - f_q$  debe ser igual al inverso del periodo del símbolo modulado  $T$  para cumplir la condición de ortogonalidad. Esta relación está dada en la ecuación (A. 16).

$$\Delta f = 1/T \quad (\text{A. 16})$$

Así el conjunto de subportadoras ortogonales entre sí, se representan mediante la notación compleja en banda base dada en la ecuación (A. 17).

$$C(t) = e^{j2\pi i \Delta f t} \text{rect}_t(t) \quad (\text{A. 17})$$

donde  $f_i = i\Delta f$  denota la frecuencia central de la subportadora  $i$ -ésima [1].

### A.2.1 Generación de la señal OFDM

La señal de entrada de un sistema OFDM es una trama serie de datos (codificados o sin codificar). Esta señal se divide en varios flujos en paralelo, cada flujo se modula de acuerdo al esquema de modulación seleccionado (M-QAM). A la salida del modulador se obtienen símbolos complejos y a cada uno de ellos se les asigna una portadora por medio de la IFFT que se encarga de generar múltiples portadoras ortogonales. El ancho de banda total de la señal OFDM está dado por la ecuación (A. 18).

$$BW = N_C * \Delta f \quad (A. 18)$$

Donde  $N_C$  representa el número de portadoras y  $\Delta f$  la separación que hay entre ellas. Luego se adiciona el prefijo cíclico para mitigar la ISI y la Interferencia Interportadora (ICI, *Inter Carrier Interference*), generando la señal OFDM, esta pasa por un conversor digital-analógico (DAC, *Digital-to-Analog Converter*) el cual entrega una señal analógica en banda base que se modula en fase y cuadratura por medio de un modulador I/Q, estas dos componentes se combinan y la señal resultante se modula en radiofrecuencia para ser transmitida por el canal.

En este trabajo de grado no se considera necesario la inserción del prefijo cíclico debido a que no se implementa un canal con multitrayectoria que genere ISI o ICI. Sin embargo a continuación se explica el proceso completo que realiza el transmisor OFDM para enviar la señal de información y el receptor OFDM para recuperar la señal transmitida [2].

#### A.2.1.1 Esquema del Transmisor OFDM

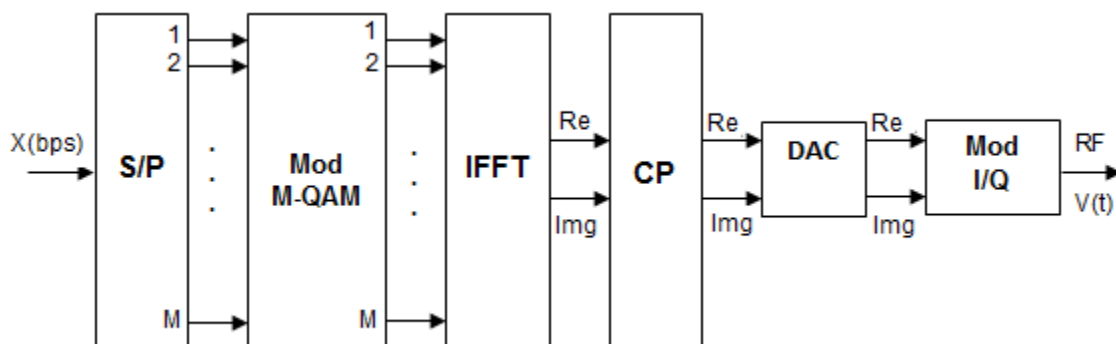


Figura A. 2 Transmisor OFDM

En la Figura A. 2 se presenta el esquema del transmisor OFDM. La señal a ser transmitida de alta velocidad pasa a través de un conversor serie-paralelo, que genera M flujos de datos paralelos y de menor velocidad para incrementar el periodo de los símbolos obtenidos a la salida del modulador.

Los flujos paralelos ingresan al bloque correspondiente a la modulación (mapeador M-ario), para este trabajo de grado se utiliza las modulaciones 16-QAM y 64-QAM. Como

resultado se obtienen símbolos que tienen componentes en fase y cuadratura representados por números complejos.

Los símbolos obtenidos después de la modulación ingresan al bloque de la IFFT, donde se le asigna una subportadora a cada uno, es decir cada subportadora se modula por un símbolo 16-QAM o 64-QAM, conformando el símbolo OFDM<sup>1</sup>  $G_i(t)$ . Como resultado se obtienen muestras complejas del símbolo OFDM en el dominio del tiempo.

Luego, se inserta al comienzo de cada símbolo el prefijo cíclico, el cual está constituido por las últimas  $l_p(t)$  muestras de  $G_i(t)$ , de esta manera el símbolo OFDM es periódico. El símbolo OFDM con prefijo cíclico se representa en la ecuación (A. 19).

$$V(t) = G_i(t) + l_p(t) \quad (\text{A. 19})$$

Donde:

$G_k(t)$ : Símbolo OFDM.

$l_p(t)$ : Longitud del prefijo añadido a cada símbolo.

$V(t)$ : Símbolo OFDM con prefijo cíclico.

A continuación los símbolos  $V(t)$  pasan a través de un conversor paralelo-serie, el cual entrega la señal OFDM; esta última se procesa mediante un DAC y un modulador I/Q.

### A.3.1.1 Esquema del Receptor OFDM

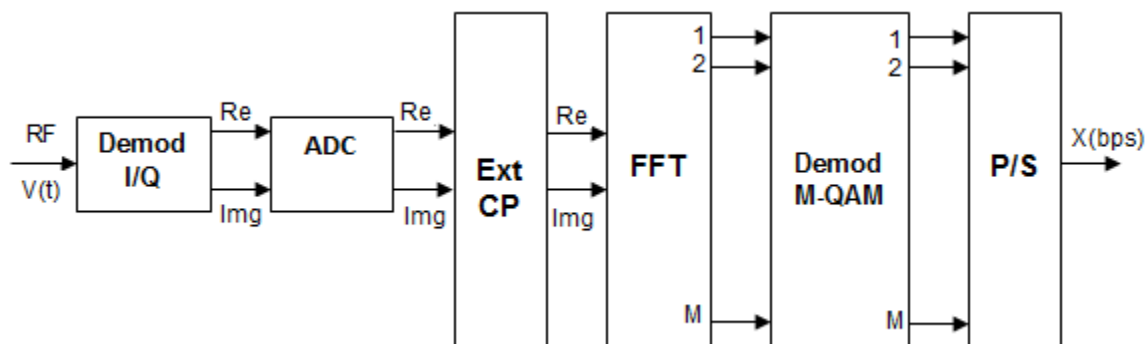


Figura A. 3 Receptor OFDM

La Figura A. 3 representa el receptor OFDM. La señal recibida a través del canal de transmisión pasa por un demodulador I/Q que demodula la señal en fase y cuadratura para luego ser procesada por el Conversor Analógico Digital (ADC, *Analog-to-Digital Converter*), el cual entrega una versión digital de la señal.

Posteriormente, la señal constituida por varios símbolos  $V(t)$ , ingresa al bloque de extracción del prefijo cíclico para remover las muestras correspondientes a  $l_p(t)$ , después

<sup>1</sup> Se considera  $G_i(t)$  como cada símbolo OFDM que conforma la señal  $G(t)$ .



se aplica la FFT que se encarga de realizar la demodulación de las subportadoras que transportan los símbolos QAM, obteniéndose  $N$  muestras en frecuencia de la señal OFDM, siendo las  $K$  primeras los símbolos QAM transmitidos, como se muestra en la ecuación (A. 20).

$$g(k) = \sum_{n=0}^{N-1} G(n)e^{-j2\pi kn/N}; \quad k = 1, 2, \dots, N - 1 \quad (\text{A. 20})$$

Cada símbolo QAM se demodula para recuperar la información. Los flujos de información pasan a través del conversor paralelo-serie el cual entrega la señal recibida [1].







# ANEXO B

## Libro de códigos para la transmisión de los puertos de antena

### B.1 LIBRO DE CÓDIGOS PARA LA TRANSMISIÓN DE LOS PUERTOS DE ANTENA

Codebook index	Number of layers	
	$\nu = 1$	$\nu = 2$
0	$\frac{W_0^{(1)}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$	$\frac{W_0^{(12)}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
1	$\frac{W_0^{(2)}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$	$\frac{W_0^{(12)}}{2} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$
2	$\frac{W_2^{(1)}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ j & j \end{bmatrix}$	$\frac{W_2^{(12)}}{2} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ j & -j \end{bmatrix}$
3	$\frac{W_2^{(2)}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -j & -j \end{bmatrix}$	-

Figura B. 1 Libro de códigos para la transmisión de los puertos de antena AP=0, 1 [3]

CB index	$u_n$	Number of layers $\nu$			
		1	2	3	4
0	$u_0 = [1 \ -1 \ -1 \ -1]^T$	$W_0^{(1)}$	$W_0^{(14)}/\sqrt{2}$	$W_0^{(124)}/\sqrt{3}$	$W_0^{(1234)}/2$
1	$u_1 = [1 \ -j \ 1 \ j]^T$	$W_1^{(1)}$	$W_1^{(12)}/\sqrt{2}$	$W_1^{(123)}/\sqrt{3}$	$W_1^{(1234)}/2$
2	$u_2 = [1 \ 1 \ -1 \ 1]^T$	$W_2^{(1)}$	$W_2^{(12)}/\sqrt{2}$	$W_2^{(123)}/\sqrt{3}$	$W_2^{(3214)}/2$
3	$u_3 = [1 \ j \ 1 \ -j]^T$	$W_3^{(1)}$	$W_3^{(12)}/\sqrt{2}$	$W_3^{(123)}/\sqrt{3}$	$W_3^{(3214)}/2$
4	$u_4 = [1 \ (-1-j)/\sqrt{2} \ -j \ (1-j)/\sqrt{2}]^T$	$W_4^{(1)}$	$W_4^{(14)}/\sqrt{2}$	$W_4^{(124)}/\sqrt{3}$	$W_4^{(1234)}/2$
5	$u_5 = [1 \ (1-j)/\sqrt{2} \ j \ (-1-j)/\sqrt{2}]^T$	$W_5^{(1)}$	$W_5^{(14)}/\sqrt{2}$	$W_5^{(124)}/\sqrt{3}$	$W_5^{(1234)}/2$
6	$u_6 = [1 \ (1+j)/\sqrt{2} \ -j \ (-1+j)/\sqrt{2}]^T$	$W_6^{(1)}$	$W_6^{(13)}/\sqrt{2}$	$W_6^{(134)}/\sqrt{3}$	$W_6^{(1324)}/2$
7	$u_7 = [1 \ (-1+j)/\sqrt{2} \ j \ (1+j)/\sqrt{2}]^T$	$W_7^{(1)}$	$W_7^{(13)}/\sqrt{2}$	$W_7^{(134)}/\sqrt{3}$	$W_7^{(1324)}/2$
8	$u_8 = [1 \ -1 \ 1 \ 1]^T$	$W_8^{(1)}$	$W_8^{(12)}/\sqrt{2}$	$W_8^{(124)}/\sqrt{3}$	$W_8^{(1234)}/2$
9	$u_9 = [1 \ -j \ -1 \ -j]^T$	$W_9^{(1)}$	$W_9^{(14)}/\sqrt{2}$	$W_9^{(134)}/\sqrt{3}$	$W_9^{(1234)}/2$
10	$u_{10} = [1 \ 1 \ 1 \ -1]^T$	$W_{10}^{(1)}$	$W_{10}^{(13)}/\sqrt{2}$	$W_{10}^{(123)}/\sqrt{3}$	$W_{10}^{(1324)}/2$
11	$u_{11} = [1 \ j \ -1 \ j]^T$	$W_{11}^{(1)}$	$W_{11}^{(13)}/\sqrt{2}$	$W_{11}^{(134)}/\sqrt{3}$	$W_{11}^{(1324)}/2$
12	$u_{12} = [1 \ -1 \ -1 \ 1]^T$	$W_{12}^{(1)}$	$W_{12}^{(12)}/\sqrt{2}$	$W_{12}^{(123)}/\sqrt{3}$	$W_{12}^{(1234)}/2$
13	$u_{13} = [1 \ -1 \ 1 \ -1]^T$	$W_{13}^{(1)}$	$W_{13}^{(13)}/\sqrt{2}$	$W_{13}^{(123)}/\sqrt{3}$	$W_{13}^{(1324)}/2$
14	$u_{14} = [1 \ 1 \ -1 \ -1]^T$	$W_{14}^{(1)}$	$W_{14}^{(13)}/\sqrt{2}$	$W_{14}^{(123)}/\sqrt{3}$	$W_{14}^{(3214)}/2$
15	$u_{15} = [1 \ 1 \ 1 \ 1]^T$	$W_{15}^{(1)}$	$W_{15}^{(12)}/\sqrt{2}$	$W_{15}^{(123)}/\sqrt{3}$	$W_{15}^{(1234)}/2$

Figura B. 2 Libro de códigos para la transmisión de los puertos de antena AP=0, 1, 2, 3 [3]





## ANEXO C

### C.1 Distribuciones de probabilidad para establecer modelos de la propagación de las ondas radioeléctricas

#### C.1.1 Introducción

La experiencia ha mostrado que la información sobre los valores medios de las señales recibidas no es suficiente para caracterizar la calidad de funcionamiento de los sistemas de radiocomunicaciones, por lo que se han de tener también en cuenta las variaciones en función del tiempo, del espacio y de la frecuencia.

El comportamiento dinámico de las señales deseadas e interferentes desempeña un papel decisivo en el análisis de la fiabilidad del sistema y en la elección de los parámetros del sistema, tal como el tipo de modulación. Es esencial conocer el alcance y la rapidez de las fluctuaciones de la señal para poder especificar parámetros como, el tipo de modulación, la potencia de transmisión, la relación de protección contra la interferencia, las medidas de diversidad, el método de codificación, etc.

Para la descripción de la calidad de funcionamiento de un sistema de comunicaciones a menudo es suficiente observar la serie temporal de la fluctuación de las señales y caracterizar estas fluctuaciones como un proceso estocástico. Sin embargo, para establecer modelos de las fluctuaciones de las señales con el propósito de predecir el funcionamiento del sistema radioeléctrico, se requiere además el conocimiento de los mecanismos de interacción de las ondas radioeléctricas con la atmósfera (atmósfera neutra e ionosfera).

La composición y el estado físico de la atmósfera es muy variable en el espacio y en el tiempo. Por tanto, el establecimiento de modelos de interacción de la onda, exige el uso extensivo de métodos estadísticos para caracterizar diversos parámetros físicos que describan la atmósfera, así como los parámetros eléctricos que definen el comportamiento de la señal y los procesos de interacción que relacionan estos parámetros.

A continuación, se proporciona información general sobre las distribuciones de probabilidad más importantes. Esto puede suministrar un antecedente común a los métodos estadísticos para la predicción de la propagación utilizados en las Recomendaciones de la Comisiones de Estudio de Radiocomunicaciones [4].

#### C.1.2 Distribuciones de probabilidad

Los procesos estocásticos se describen generalmente mediante una función de densidad de probabilidad o mediante una función de distribución acumulativa. La función de densidad de probabilidad, designada aquí por  $p(x)$  para la variable  $x$ , es de naturaleza tal que existe una probabilidad  $p(x) dx$  de que  $x$  tome un valor comprendido en el intervalo infinitesimal de  $x$  a  $x + dx$ . La función de distribución acumulativa, designada  $F(x)$ ,



determina la probabilidad de que la variable tome un valor inferior a  $x$ , es decir, que estas funciones están relacionadas como sigue:

$$p(x) = \frac{d}{dx} [F(x)] \quad \text{ó} \quad F(x) = \int_c^x p(t) dt$$

Donde  $c$  es el límite inferior de los valores que puede tomar  $t$ .

Las siguientes distribuciones son las más importantes y las utilizadas corrientemente en la propagación de las ondas radioeléctricas:

- Distribución normal o gaussiana,
- Distribución log-normal,
- Distribución de Rayleigh,
- Distribución combinada log-normal y de Rayleigh,
- Distribución de Nakagami-Rice (distribución  $n$  de Nakagami),
- Distribución gamma y distribución exponencial,
- Distribución  $m$  de Nakagami,
- Distribución  $\lambda^2$  de Pearson.

### C.1.3 Distribución gaussiana o distribución normal

Esta distribución se aplica a una variable continua de cualquier signo. La densidad de probabilidad tiene la forma:

$$p(x) = e^{-T(x)} \quad (\text{C.1})$$

donde  $T(x)$  es un polinomio de segundo grado no negativo. Si se utilizan como parámetros el valor medio,  $m$ , y la desviación típica,  $\sigma$ ,  $p(x)$  se escribe en la forma usual:

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{x-m}{\sigma} \right)^2 \right] \quad (\text{C.2})$$

de donde:

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{t-m}{\sigma} \right)^2 \right] dt = \frac{1}{2} \left[ 1 + \operatorname{erf} \left( \frac{x-m}{\sigma\sqrt{2}} \right) \right] \quad (\text{C.3})$$

con:

$$\operatorname{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-t^2} dt \quad (\text{C.4})$$



La distribución normal acumulativa  $F(x)$  se tabula generalmente en forma reducida, es decir, considerando  $m$  como nulo y  $\sigma$  igual a la unidad. En ese caso, la Tabla C. 1 da la correspondencia entre  $x$  y  $F(x)$  para ciertos valores redondeados sea de  $x$  sea de  $F(x)$ .

x	1 - F(x)	x	1 - F(x)
0	0,5	1,282	10-1
1	0,1587	2,326	10-2
2	0,02275	3,090	10-3
3	1,350 x 10-3	3,719	10-4
4	3,167 x 10-5	4,265	10-5
5	2,867 x 10-7	4,753	10-6
6	9,866 x 10-10	5,199	10-7
		5,612	10-8

**Tabla C. 1** Correspondencia entre  $x$  y  $F(x)$  para ciertos valores

En los cálculos prácticos se puede representar  $F(x)$  mediante funciones aproximadas como, por ejemplo, la siguiente, que es válida para  $x$  positivo con un error relativo inferior a  $2,8 \times 10^{-3}$ :

$$1 - F(x) = \frac{\exp(-x^2/2)}{\sqrt{2\pi} \left( 0,661 x + 0,339 \sqrt{x^2 + 5,51} \right)} \quad (C.5)$$

La distribución gaussiana se da sobre todo cuando los valores de la magnitud considerada resultan del efecto aditivo de varias causas aleatorias, cada una de las cuales tiene una importancia relativamente pequeña.

En la propagación, la mayoría de las magnitudes físicas que intervienen (potencia, tensión, duración de un desvanecimiento, etc.) son magnitudes esencialmente positivas, y, por tanto, no pueden representarse directamente mediante una distribución gaussiana. En cambio, esta distribución interviene en dos casos importantes:

- Para representar las fluctuaciones de una magnitud alrededor de su valor medio (centelleo);
- Para representar el logaritmo de una magnitud. Se obtiene entonces la distribución log-normal que se estudia más adelante.

Existen en el comercio diagramas en los que una de las coordenadas tiene la forma denominada gaussiana, es decir que la graduación es tal que una distribución gaussiana se representa mediante una recta. Estos diagramas se utilizan mucho, incluso para representar distribuciones que no son gaussianas [4].



#### C.1.4 Distribución log-normal

Es la distribución de una variable positiva cuyo logaritmo tiene una distribución gaussiana. Se pueden, pues, escribir directamente la densidad de probabilidad y la distribución acumulativa:

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \frac{1}{x} \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{\ln x - m}{\sigma} \right)^2 \right] \quad (C.6)$$

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_0^x \frac{1}{t} \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{\ln t - m}{\sigma} \right)^2 \right] dt = \frac{1}{2} \left[ 1 + \operatorname{erf} \left( \frac{\ln x - m}{\sigma\sqrt{2}} \right) \right] \quad (C.7)$$

Sin embargo, en estas relaciones,  $m$  y  $\sigma$  son el valor medio y la desviación típica, no de la variable  $x$  sino del logaritmo de esta variable. Las magnitudes características de la variable  $x$  se deducen sin dificultad. Siendo:

- el valor más probable:  $\exp(m - \sigma^2)$
- el valor mediano:  $\exp(m)$
- el valor medio:  $\exp \left( m + \frac{\sigma^2}{2} \right)$
- el valor cuadrático medio:  $\exp(m + \sigma^2)$
- la desviación típica:  $\exp \left( m + \frac{\sigma^2}{2} \right) \sqrt{\exp(\sigma^2) - 1}$

A diferencia de la distribución gaussiana, la distribución log-normal es extremadamente asimétrica. En particular, el valor medio, el valor mediano y el valor más probable (a menudo denominado moda) no son idénticos.

La distribución log-normal se aplica a menudo en propagación, principalmente para magnitudes relacionadas, bien con un nivel de potencia o de campo, bien con una duración. En el caso de los niveles de potencia o de campo como suelen estar expresados sólo en decibelios, se habla más bien de una distribución normal de los niveles. En el caso de duraciones (por ejemplo, las duraciones de los desvanecimientos), la distribución log-normal se utiliza explícitamente, pues la variable natural es el segundo o el minuto y no su logaritmo.

Como la inversa de una variable que tiene una distribución log-normal tiene también la misma distribución, ésta se aplica en ciertos casos a intensidades (inversas de la duración). Por ejemplo, se utiliza para representar la distribución de las intensidades de la lluvia, al menos para las intensidades de lluvia bajas y medias.



Frente a la distribución gaussiana, se puede considerar que la intervención de la distribución log-normal significa que los valores numéricos de la variable resultan de la acción de numerosas causas de poca importancia individual, pero que actúan con efecto multiplicador [4].

### C.1.5 Distribución de Rayleigh

La distribución de Rayleigh se aplica a una variable continua positiva no limitada. Está ligada a la distribución gaussiana del modo siguiente. Dada una distribución gaussiana bidimensional con dos variables independientes  $y$  y  $z$  de media cero y con la misma desviación típica  $\sigma$ , la variable aleatoria:

$$x = \sqrt{y^2 + z^2} \quad (\text{C.8})$$

Tiene una distribución de Rayleigh, y el valor más probable de  $x$  es igual a  $\sigma$ . Como  $x$  representa la longitud de un vector que une un punto de una distribución gaussiana bidimensional con el centro de esta distribución, se puede deducir que la distribución de Rayleigh representa la distribución de la longitud de un vector que es la suma de un gran número de vectores de pequeña amplitud y cuyas fases tienen una distribución uniforme.

La densidad de probabilidad y la distribución acumulativa vienen dadas por:

$$p(x) = \frac{x}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) \quad (\text{C.9})$$

$$F(x) = 1 - \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) \quad (\text{C.10})$$

Los valores característicos de la variable son los siguientes:

- el valor más probable:  $\sigma$
- el valor mediano:  $\sigma\sqrt{2\ln 2} = 1,18\sigma$
- el valor medio:  $\sigma\sqrt{\frac{\pi}{2}} = 1,25\sigma$
- el valor cuadrático medio:  $\sigma\sqrt{2} = 1,41\sigma$
- la desviación típica:  $\sigma\sqrt{2 - \frac{\pi}{2}} = 0,655\sigma$

Obsérvese que  $\sigma$  es la desviación típica de la distribución gaussiana asociada a la distribución Rayleigh.

La distribución de Rayleigh suele utilizarse únicamente en las inmediaciones del origen, es decir, para valores bajos de  $x$ . En ese caso, se tiene:



$$F(x) \cong \frac{x^2}{2\sigma^2} \quad (\text{C.11})$$

Lo que se interpreta de la siguiente manera: la probabilidad de que la variable aleatoria  $X$  tenga un valor inferior a  $x$  es proporcional al cuadrado de este valor. Si la variable considerada es una tensión, su cuadrado representa la potencia de la señal. En otros términos, en una escala en decibelios, la potencia disminuye 10 dB por cada década de probabilidad. Esta propiedad permite a menudo saber si un nivel recibido tiene una distribución de Rayleigh, al menos asintóticamente. Sin embargo, cabe observar que otras distribuciones pueden tener el mismo comportamiento.

En particular, la distribución de Rayleigh se produce en los fenómenos de dispersión [4].

### C.1.6 Distribución combinada log-normal y de Rayleigh

En ciertos casos, la distribución de una variable aleatoria puede considerarse como resultante de la combinación de dos contribuciones: una distribución log-normal para las variaciones a largo plazo y una distribución de Rayleigh para las variaciones a corto plazo. La distribución de los valores instantáneos se obtiene considerando una variable de Rayleigh cuyo valor medio (o valor cuadrático medio) es en sí una variable aleatoria que tiene una distribución log-normal.

Si se designan con  $m$  y  $\sigma$ , respectivamente, el valor medio y la desviación típica de la distribución gaussiana asociada a la distribución log-normal, se obtiene la distribución siguiente:

$$1 - F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left[ -x^2 e^{-2\sigma u} - \frac{u^2}{2} \right] du \quad (\text{C.12})$$

En esta fórmula, la desviación típica  $\sigma$  se expresa en neperios. Si se designa con  $\sigma'$  su valor en decibelios, se obtiene:

$$\sigma = 0,115 \sigma' \quad (\text{C.13})$$

Esta distribución interviene principalmente en la propagación por inhomogeneidad del medio, cuando las características de éste tienen variaciones significativas a largo plazo, como, por ejemplo, en la difusión troposférica.





### C.1.7 Distribución de Nakagami-Rice (distribución $n$ de Nakagami)<sup>2</sup>

La distribución de Nakagami-Rice se deduce también de la distribución gaussiana, y generaliza la distribución de Rayleigh. Puede considerarse como la distribución de la longitud de un vector que es la suma de un vector fijo y de un vector cuya longitud tiene una distribución de Rayleigh. De forma alternativa, dada una distribución gaussiana bidimensional con dos variables independientes  $x$  e  $y$  y con la misma desviación típica  $\sigma$ , la longitud de un vector que une un punto de la distribución con un punto fijo, diferente del centro de la distribución, tiene una distribución de Nakagami-Rice.

Si se designa por  $a$  la longitud del vector fijo, y  $\sigma$  la longitud más probable del vector de Rayleigh, la densidad de probabilidad vendrá dada por:

$$p(x) = \frac{x}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{x^2 + a^2}{2\sigma^2}\right) I_0\left(\frac{ax}{\sigma^2}\right) \quad (\text{C.14})$$

donde  $I_0$  es la función de Bessel modificada de primera especie y de orden cero.

Esta distribución depende de dos parámetros, pero para las aplicaciones a los problemas de propagación, se deberá elegir una relación entre la amplitud  $a$  del vector fijo y la amplitud cuadrática media  $\sigma\sqrt{2}$  del vector aleatorio. Esta relación depende de la aplicación considerada. Las dos aplicaciones principales son las siguientes:

- a) La potencia del vector fijo es constante, pero varía la potencia total de las componentes fija y aleatoria.

Si se estudia la influencia de un rayo reflejado por una superficie rugosa, o si se consideran las componentes por trayectos múltiples además de la componente fija, la potencia media viene dada por  $(a^2 + 2\sigma^2)$ . Esta distribución suele definirse en términos de un parámetro  $K$ :

$$K = 10 \log\left(\frac{a^2}{2\sigma^2}\right) \quad \text{dB} \quad (\text{C.15})$$

que es la relación entre las potencias del vector fijo y de la componente aleatoria.

- b) La potencia total de las componentes fija y aleatoria es constante, pero varían ambas componentes.

Si se estudia la propagación por trayectos múltiples a través de la atmósfera, se puede considerar que la suma de la potencia transportada por el vector fijo y de la potencia media transportada por el vector aleatorio es constante, puesto que la potencia transportada por el vector aleatorio proviene de la del vector fijo. Tomando la potencia total como unidad, se obtiene, pues:

$$a^2 + 2\sigma^2 = 1 \quad (\text{C.16})$$

<sup>2</sup> No debe confundirse con la distribución  $m$  de Nakagami



y la fracción de la potencia total transportada por el vector aleatorio es, pues, igual a  $2\sigma^2$ . Igualmente, si se designa por  $X$  la amplitud instantánea del vector resultante y por  $x$  un valor numérico de esta amplitud, la probabilidad de obtener un nivel instantáneo superior a  $x$  viene dada por:

$$\text{Prob}(X > x) = 1 - F(x) = 2 \exp\left(-\frac{a^2}{2\sigma^2}\right) \int_{x/\sigma\sqrt{2}}^{\infty} v \exp(-v^2) I_0\left(\frac{2va}{\sigma\sqrt{2}}\right) dv \quad (\text{C.17})$$

Para las aplicaciones prácticas, se ha utilizado para las amplitudes una escala en decibelios y, para las probabilidades, una escala tal que una distribución de Rayleigh se representa mediante una recta. Se observa que para los valores de la fracción de potencia del vector aleatorio superior a 0,5 aproximadamente, las curvas se acercan a un límite, que corresponde a una distribución de Rayleigh. Esto se debe a que, en ese caso, el vector fijo tiene una amplitud del mismo orden de magnitud que la del vector aleatorio y prácticamente ya no se distingue de éste. En cambio, para pequeños valores de esta fracción, se puede demostrar que la distribución de la amplitud tiende hacia una distribución gaussiana [4].

### C.1.8 Distribución gamma y distribución exponencial

Contrariamente a las distribuciones precedentes que derivaban de la distribución gaussiana, la distribución gamma deriva de la distribución exponencial, de la que constituye una generalización. Se aplica a una variable positiva y no limitada. La densidad de probabilidad es:

$$p(x) = \frac{\alpha^v}{\Gamma(v)} x^{v-1} e^{-\alpha x} \quad (\text{C.18})$$

donde  $\Gamma$  es la función de Euler de segundo orden.

Esta distribución depende de dos parámetros  $\alpha$  y  $v$ . Sin embargo,  $\alpha$  es sólo parámetro de escala de la variable  $x$ . Los valores característicos de la variable son:

- valor medio:  $\frac{v}{\alpha}$
- valor cuadrático medio:  $\frac{\sqrt{v(1+v)}}{\alpha}$
- desviación típica:  $\frac{\sqrt{v}}{\alpha}$

La integral que expresa la distribución acumulativa no puede evaluarse en forma cerrada, salvo para valores enteros de  $v$ . En cambio se pueden dar los desarrollos siguientes:

Aproximación mediante una serie con  $x \ll 1$ :



$$F(x) = \frac{1}{\Gamma(v+1)} e^{-\alpha x} (\alpha x)^v \left[ 1 + \frac{\alpha x}{v+1} + \frac{(\alpha x)^2}{(v+1)(v+2)} + \dots \right] \quad (C.19)$$

Aproximación asintótica con  $x \gg 1$ :

$$1 - F(x) = \frac{1}{\Gamma(v)} e^{-\alpha x} (\alpha x)^{v-1} \left[ 1 + \frac{v-1}{\alpha x} + \frac{(v-1)(v-2)}{(\alpha x)^2} + \dots \right] \quad (C.20)$$

Para  $v$  igual a la unidad, se obtiene la distribución exponencial. Para  $v$  entero, el desarrollo asintótico posee un número fijo de términos y da la distribución gamma en forma explícita.

En propagación, los valores interesantes de  $v$  son los valores muy bajos, del orden de  $1 \times 10^{-2}$  a  $1 \times 10^{-4}$ . Ahora bien, para  $v$  próximo a cero, tenemos:

$$\frac{1}{\Gamma(v)} \simeq \frac{v}{\Gamma(v+1)} \simeq v \quad (C.21)$$

Por consiguiente, se puede escribir para  $v$  pequeño y para  $\alpha x$  no demasiado pequeño:

$$1 - F(x) \simeq v \int_{\alpha x}^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt \quad (C.22)$$

Para el cálculo práctico, se puede hallar una aproximación a la integral anterior, por ejemplo:

$$1 - F(x) \simeq v \frac{e^{-\alpha x}}{0,68 + \alpha x + 0,28 \log \alpha x} \quad (C.23)$$

que es válida para  $v < 0,1$  y  $\alpha x > 0,03$ .

### C.1.9 Distribución $m$ de Nakagami<sup>3</sup>

Esta distribución se aplica a una variable positiva no limitada. La densidad de probabilidad es igual a:

$$p(x) = \frac{2m^m}{\Gamma(m) \Omega^m} x^{2m-1} e^{-\frac{m}{\Omega} x^2} \quad (C.24)$$

$\Omega$  es un parámetro de escala que es igual al valor medio de  $x^2$ .

$$\overline{x^2} = \Omega \quad (C.25)$$

<sup>3</sup> En este punto  $m$  indica un parámetro de la distribución  $m$  de Nakagami; no es un valor medio como en los puntos precedentes de este Anexo



Esta distribución tiene varias relaciones con las distribuciones anteriores:

- si una variable tiene una distribución  $m$  de Nakagami, el cuadrado de esta variable tiene una distribución gamma;
- para  $m = 1$ , se obtiene una distribución de Rayleigh;
- para  $m = 1/2$ , se obtiene una distribución normal unilateral.

La distribución  $m$  de Nakagami y la distribución de Nakagami-Rice pueden, pues, considerarse como dos generalizaciones diferentes de la distribución de Rayleigh. Cabe observar que, para señales de niveles muy bajos, la pendiente de la distribución  $m$  de Nakagami tiende hacia un valor que depende del parámetro  $m$  contrariamente a la distribución de Nakagami-Rice, en la cual, la pendiente límite es siempre la misma (10 dB por década de probabilidad) [4].

### C.1.10 Distribución $\chi^2$ de Pearson

La densidad de probabilidad viene dada por la relación:

$$p(\chi^2) = \frac{1}{2^{\frac{\nu}{2}} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} e^{-\frac{\chi^2}{2}} \left(\frac{\chi^2}{2}\right)^{\frac{\nu}{2}-1} \quad (\text{C.26})$$

La variable  $\chi^2$  es positiva e ilimitada; el parámetro  $\nu$  es un número entero positivo, y se denomina número de grados de libertad de la distribución.  $\Gamma$  representa la función de Euler de segundo orden. Según la paridad de  $\nu$  se tiene:

$$\nu \text{ par: } \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) = \left(\frac{\nu}{2} - 1\right)! \quad (\text{C.27})$$

$$\nu \text{ impar: } \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) = \left(\frac{\nu}{2} - 1\right)\left(\frac{\nu}{2} - 2\right) \dots \frac{1}{2} \sqrt{\pi} \quad (\text{C.28})$$

La distribución acumulativa viene dada por:

$$F(\chi^2) = \frac{1}{2^{\frac{\nu}{2}} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \int_0^{\chi^2} e^{-\frac{t}{2}} t^{\frac{\nu}{2}-1} dt \quad (\text{C.29})$$

El valor medio y la desviación típica son los siguientes:

$$m = \nu \quad (\text{C.30})$$

$$\sigma = \sqrt{2\nu} \quad (\text{C.31})$$

Una propiedad esencial de la distribución de  $\chi^2$  es la siguiente: Si  $n$  variables  $x_i$  tienen distribuciones de Gauss con una media  $m_i$  y una desviación típica  $\sigma_i$ , la variable:



$$\sum_{i=1}^n \left( \frac{x_i - m_i}{\sigma_i} \right)^2 \quad (\text{C.32})$$

tiene una distribución de  $\chi^2$  con  $n$  grados de libertad. En particular, el cuadrado de una variable de Gauss tipificada tiene una distribución  $\chi^2$  con un grado de libertad.

Si varias variables independientes tienen distribuciones  $\chi^2$ , su suma tiene también una distribución  $\chi^2$  cuyo número de grados de libertad es igual a la suma de los grados de libertad de cada una de las variables.

La distribución  $\chi^2$  no es esencialmente distinta de la distribución gamma. Se pasa de una a otra mediante las relaciones siguientes:

$$\frac{\chi^2}{2} = \alpha x \quad (\text{C.33})$$

$$\frac{v}{2} = n \quad (\text{C.34})$$

Asimismo, se pasa de la distribución  $\chi^2$  a la distribución  $m$  de Nakagami por la transformación siguiente:

$$\frac{\chi^2}{2} = \frac{m}{\Omega} x^2 \quad (\text{C.35})$$

$$\frac{v}{2} = m \quad (\text{C.36})$$

La distribución de  $\chi^2$  se utiliza en pruebas estadísticas que sirven para determinar si un conjunto de valores experimentales de una magnitud (intensidad de lluvia, atenuación, etc.) puede modelizarse con una distribución estadística dada.





## **REFERENCIAS ANEXOS**

---

- [1] H. Holma and A. Toskala, *LTE for UMTS - OFDMA and SC-FDMA Based Radio Access*: Wiley, 2009.
- [2] T. D. Chiueh, P. Y. Tsai, and I. W. Lai, *Baseband Receiver Design for Wireless MIMO-OFDM Communications*: Wiley, 2012.
- [3] T. S. G. 3GPP, "Evolved Universal Terrestrial Radio Access (E-UTRA); Physical channels and modulation," *3GPP TS 36.211 V8.9.0 Release 8*, pp. 53-54, 2010.
- [4] UIT-R, "Distribuciones de probabilidad para establecer modelos de propagación de las ondas radioeléctricas " *Rec. UIT-R P.1057-1* pp. 1-16, 1994-2001.