

# DISEÑO DE UN ESQUEMA DE MODULACIÓN BIORTOGONAL N-DIMENSIONAL BASADO EN MATRICES HADAMARD



Martha Liliana Mosquera Arbeláez  
Rosemberth Rodríguez Arteaga

Trabajo de grado en Ingeniería Electrónica y Telecomunicaciones

Director:

Jesus Mauricio Ramirez Viáfara  
Msc En Ingeniería Electrónica y Telecomunicaciones

Universidad Del Cauca  
Facultad de Ingeniería Electrónica y Telecomunicaciones  
Departamento de Telecomunicaciones  
Popayán, Enero de 2017

Martha Liliana Mosquera Arbeláez

Rosemberth Rodríguez Arteaga

DISEÑO DE UN ESQUEMA DE MODULACIÓN  
BIORTOGONAL N-DIMENSIONAL BASADO EN  
MATRICES HADAMARD

Trabajo de grado presentado en la Facultad de Ingeniería en Electrónica y  
Telecomunicaciones de la Universidad del Cauca para la obtención del  
Título de

Ingeniero en:  
Electrónica y Telecomunicaciones

Director:  
Jesus Mauricio Ramirez Viáfara  
Msc En Ingeniería Electrónica y Telecomunicaciones

Popayán  
2017

*A mi familia y amigos, por haberme acompañado en la realización de  
este sueño.*

*A mi madre, Blanca Arbeláez, por enseñarme, apoyarme, guiarme y  
ser la persona que más admiro.*

*Martha Liliana Mosquera Arbeláez*

*A mis padres, por estar pendientes en todos los momentos de mi vida,  
iluminándome el camino con su protección y bendición.*

*Rosemberth Rodriguez Arteaga*

## Tabla Contenido

1. Introducción .....	1
1.1 Motivación .....	1
1.2 Planteamiento del problema.....	2
1.3 Estado del Arte.....	2
1.4 Contenido.....	4
2. Teoría de modulación digital.....	7
2.1. Sistema de Comunicación .....	7
2.1.1. Mensaje .....	7
2.1.2. Señal.....	7
2.1.3. Canal .....	7
2.1.4. Respuesta de un sistema .....	8
2.1.5. Ancho de banda de una señal .....	8
2.1.6. Ancho de banda de un sistema.....	8
2.2. Sistema de Comunicación Digital.....	8
2.3. Canal AWGN.....	8
2.4. Modulación Digital.....	9
2.4.1 Introducción .....	9
2.4.2 Pulsos de Modulación para evitar ISI.....	11
2.4.4 Implementación del Receptor .....	19
2.4.5 Ortogonalidad y ortonormalidad de señales .....	23
3. Modulación N dimensional basada en matrices de Hadamard.....	25
3.1 Matrices de Hadamard .....	25
3.2 Constelaciones Multidimensionales .....	27
3.2.1 Introducción .....	27
3.2.2 Tipos de constelaciones N-dimensionales.....	27
3.3 Generalidades de la modulación N-dimensional. ....	29
3.4 Modulación en 2D y 4D basada en matrices de Hadamard .....	31
3.4.1 Modulación en 2D con constelación Biortogonal .....	31
3.4.2 Modulación en 4D con constelación biortogonal .....	34

3.4.3	Análisis teórico del desempeño frente al ruido de los esquemas de modulación N- dimensionales .....	37
4.	Diseño y simulación .....	43
4.1	Metodología.....	43
4.2	Análisis de requerimientos .....	43
4.3	Diseño .....	44
4.3.1	Descripción del sistema .....	44
4.3.2	Identificación de variables.....	45
4.3.3	Modelo del sistema .....	46
4.4	Implementación y pruebas de validación.....	52
4.4.1	Parámetros de las simulaciones .....	52
4.4.2	Esquema de modulación biortogonal en 2D a partir de matrices de Hadamard .....	53
4.4.3	Esquema de modulación biortogonal en 4D a partir de matrices de Hadamard .....	57
4.4.4	Pruebas de validación.....	60
4.4.5	Comparación de desempeño entre esquemas de modulación en 2D y 4D 68	
4.5	Análisis de resultados.....	69
4.5.1	Eficiencia espectral y ancho de banda.....	69
4.5.2	Bit Error Rate (BER) .....	70
5.	Conclusiones y trabajos futuros .....	73
	Bibliografía.....	77

## LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1. Bloques de un sistema de comunicación digital.....	10
Figura 2.2. Pulso $p(t) = \text{sinc}(t)$ y su espectro en el dominio de la frecuencia $P(f)$ .....	12
Figura 2.3. Pulso Nyquist trapezoidal a la tasa $1/T$ con exceso de ancho de banda $\beta$ ..	14
Figura 2.4. Pulso Nyquist obtenido a partir del producto de dos funciones $\text{sinc}$ . .....	15
Figura 2.5. Pulso de coseno alzado para diferentes valores de roll off. ....	16
Figura 2.6. Sistema de transmisión de datos digital.....	19
Figura 3.1. Constelaciones ortogonales. a) $N=2$ , b) $N=3$ . ....	27
Figura 3.2. Constelaciones biortogonales. a) $N=1$ , b) $N=2$ , c) $N=3$ . ....	28
Figura 3.3. Constelaciones binarias para una (a), dos (b) y tres dimensiones (c). ....	28
Figura 3.4. Estructura de filtros adaptados .....	30
Figura 3.5. Decisor según el criterio de distancia mínima.....	30
Figura 3.6. Modulador $N$ -dimensional basado en matrices de Hadamard. ....	31
Figura 3.7. Demodulador $N$ -dimensional basado en matrices de Hadamard. ....	31
Figura 3.8. Constelación biortogonal en 2D. ....	33
Figura 3.9. Ejemplo de conformación de la señal modulada en 2D .....	33
Figura 3.10. Modulador bidimensional basado en matrices Hadamard .....	34
Figura 3.11. Demodulador bidimensional basado en matrices Hadamard.....	34
Figura 3.12. Conformación de la señal modulada en 4 dimensiones para los primeros cuatro símbolos .....	36
Figura 3.13. Modulador tetra-dimensional basado en matrices Hadamard.....	37
Figura 3.14. Demodulador tetra-dimensional basado en matrices Hadamard .....	37
Figura 3.15. Distancia mínima de constelación en 2D. ....	39
Figura 4.1. Metodología de trabajo .....	43
Figura 4.2. Bloques del algoritmo de simulación del esquema en 2D.....	47
Figura 4.3. Bloques del algoritmo de simulación del esquema en 4D.....	47
Figura 4.4. Pulso en raíz de Coseno Alzado.....	48
Figura 4.5. Funciones base del esquema en 2D (izquierda) y sus versiones negadas (derecha). ....	49
Figura 4.6. Funciones base del esquema en 4D (izquierda) y sus versiones negadas (derecha). ....	50
Figura 4.7. Parte real e imaginaria de los símbolos enviados en esquema en 2D.....	54
Figura 4.8. Señal modulada transmitida en esquema de modulación en 2D .....	55
Figura 4.9. Ancho de banda resultante para esquema de modulación 2D.....	55
Figura 4.10. Curva BER vs $E_b/N_0$ para esquema de modulación en 2D .....	56

Figura 4.11. Componentes del mensaje enviado en esquema en 4D .....	58
Figura 4.12. Señal modulada transmitida en esquema de modulación en 4D.....	59
Figura 4.13. Ancho de banda resultante para esquema de modulación 4D. ....	59
Figura 4.14. Curva BER vs $E_b/N_0$ para esquema de modulación en 4D .....	60
Figura 4.15. Mensaje transmitido y recibido sin errores en 2D.....	61
Figura 4.16. Mensaje transmitido y recibido sin errores en 4D.....	62
Figura 4.17. Mensaje transmitido y recibido tras su paso por el decisor en esquema en 2D. ....	63
Figura 4.18. Mensaje transmitido y recibido tras su paso por el decisor en esquema en 4D .....	63
Figura 4.19. Diagrama de ojo esquema de modulación 2D .....	65
Figura 4.20. Diagrama de ojo esquema de modulación 4D. ....	66
Figura 4.21. Ancho de banda obtenido en las simulaciones para variaciones del factor de roll-off .....	67
Figura 4.22. Comparación curvas BER vs $E_b/N_0$ para 2D y 4D.....	69

## LISTA DE TABLAS

Tabla 1.1. Contribuciones y brechas esquemas de modulación.....	3
Tabla 1.2. Contribuciones y brechas esquemas de codificación.....	4
Tabla 3.1. Mapeo de constelación 2D .....	32
Tabla 3.2. Mapeo de constelación 4D .....	35
Tabla 4.1. Media, desviación estándar y valor teórico de eficiencia espectral en 2D.....	70
Tabla 4.2. Media, desviación estándar y valor teórico de ancho de banda en 2D .....	70
Tabla 4.3. Media, desviación estándar y valor teórico de eficiencia espectral en 4D.....	70
Tabla 4.4. Media, desviación estándar y valor teórico del ancho de banda en 4D.....	70
Tabla 4.5. Media y desviación estándar de BER en esquema en 2D .....	71
Tabla 4.6. Media y desviación estándar de BER en esquema en 4D .....	71

## LISTA DE ACRÓNIMOS

AWGN:	Ruido blanco aditivo Gaussiano ( <i>Additive White Gaussian Noise</i> ).
BER:	Tasa de error de bit ( <i>Bit Error Rate</i> ).
HCM:	Modulación codificada de Hadamard ( <i>Hadamard Coded Modulation</i> ).
IID:	Independientes e idénticamente distribuidos ( <i>Independent and Identically Distributed</i> ).
IR:	Radio impulsivo ( <i>Impulsive Radio</i> ).
ISI:	Interferencia intersimbólica ( <i>Intersymbol Interference</i> ).
LTI:	Lineal e invariante en el tiempo ( <i>Linear Time-Invariant</i> ).
MAP:	Máxima probabilidad a posteriori ( <i>Maximum A Posteriori Probability</i> ).
MATLAB:	Laboratorio de matrices ( <i>MATrix LABoratory</i> ).
ML:	Máxima verosimilitud ( <i>Maximum Likelihood</i> ).
M-PAM:	Modulación por amplitud de pulsos de M estados ( <i>Pulse Amplitude Modulation</i> ).
M-QAM:	Modulación por amplitud de cuadratura de M estados ( <i>Quadrature Amplitude Modulation</i> ).
NASA:	Administración Nacional de la Aeronáutica y el Espacio ( <i>National Aeronautics and Space Administration</i> ).
OFDM:	Multiplexación por división de frecuencias ortogonales ( <i>Orthogonal Frequency Division Multiplexing</i> ).
PPM:	Modulación por posición de pulso ( <i>Pulse Position Modulation</i> ).

- SER: Tasa de error de símbolo (*Symbol Error Rate*).
- SNR: Relación señal a ruido (*Signal To Noise Ratio*).
- SRRC: Filtro en raíz cuadrada de coseno alzado (*Square Root Raised Cosine*).
- TR: Transmisión con referencia (*Transmit-Reference*).
- UBE: Estimación de fronteras de unión (*Union Bound Estimation*).
- UWB: Ultra ancho de banda (*Ultra Wide Band*).

## LISTA DE VARIABLES

$p(t)$ : Pulso de modulación.

$P(f)$ : Transformada de Fourier de la función  $p(t)$ .

$\beta$ : Factor de roll-off.

$BW$ : Ancho de banda.

$R$ : Tasa de transmisión de símbolo

$f$ : Frecuencia

$f_s$ : Frecuencia de muestreo.

$t_0$ : Retardo en el dominio del tiempo

$h_{Tx}(t)$ : Respuesta al impulso del filtro transmisor.

$r(t)$ : Respuesta al impulso del canal.

$h_{Rx}(t)$ : Respuesta al impulso del filtro receptor.

$H_{Tx}$ : Transformada de Fourier del filtro transmisor.

$H_{Rx}$ : Transformada de Fourier del filtro receptor.

$\rho$ : Eficiencia espectral.

$\rho_0$ : Eficiencia espectral nominal.

$N_0$ : Densidad espectral de potencia de ruido.

$\lambda$ : Distancia de un símbolo al origen

$\sigma$ : Desviación estándar

$R_b$ : Tasa de transmisión de bits.

$L$ : Número de bits transportados.

$T$ : Período de símbolo.

$N$ : Dimensión de la constelación.

$M$ : Tamaño de la constelación.

$\{m_i\}$ : Secuencia de bits transmitidos.

$\{x\}$ : Vector símbolo transmitido.

$\{x_i(t)\}$ : Grupo de formas de onda de señal moduladas.

$R(t)$ : Señal a la entrada del receptor contaminada con ruido AWGN.

$\{Q\}$ : Vector símbolo recibido.

$\{\widehat{m}_i\}$ : Mensaje binario estimado.

$a_k$ : Símbolo transmitido.

$\hat{a}_k$ : Símbolo estimado.

Pr: Probabilidad

$P_S$ : Probabilidad de error de símbolo.

$P_b$ : Probabilidad de error de bit.

$E_{av}$ : Número promedio de bits errados por símbolo.

$H$ : Matriz de Hadamard.

$H^T$ : Transpuesta de una matriz de Hadamard.

$I$ : Matriz identidad

$\bar{b}$ : Número promedio de bits por dimensión.

$\psi_k(t)$ : Función base.

$U$ : Factor de sobremuestreo

$X(t)$ : Proceso estocástico de la señal modulada

$Z(t)$ : Proceso no correlacionado de ruido blanco Gaussiano.

$q[k]$ : Secuencia de vectores a la salida del demodulador.

$k$ : Instante k-ésimo.

$c_{n,m}$ : Coeficientes de la matriz de Hadamard.

$E_\psi$ : Energía de la función  $\psi_k(t)$ .

$d$ : Distancia mínima entre símbolos.

$\gamma_c$ : Ganancia de codificación nominal.

$E_b$ : Energía de bit.

$E_S$ : Energía de símbolo.

$k_v$ : Número promedio de vecinos de cada símbolo.

$D$ : Distancia entre dos vectores.

$E_b/N_0$ : Relación de energía de bit a densidad espectral de ruido.

$X(f)$ : Transformada de Fourier de la señal modulada.

$A$ : Alfabeto de la modulación.

$B_0$ : Ancho de banda nominal.

$Q(x)$ : Función de distribución acumulativa normal estándar complementaria.

# 1. Introducción

## 1.1 Motivación

La necesidad de comunicarse ha existido en la humanidad desde el inicio de la misma, los mecanismos empleados para la comunicación han variado según la época y los conocimientos desarrollados hasta el momento; con el paso de los años, el crecimiento y expansión de la población sobre el planeta ha requerido ingeniar formas eficientes de conectividad, garantizando transmitir ideas y difundir conocimiento de manera confiable y cada vez en mayor volumen y a una mayor velocidad.

La comunicación hace parte de la vida cotidiana, la telefonía móvil o fija, los radios, los televisores, las computadoras con acceso a Internet en hogares y lugares de trabajo son capaces de proporcionar comunicaciones rápidas desde diversos lugares sobre la tierra [1]. Teniendo claro entonces la importancia de establecer comunicaciones fiables, han sido muchos los estudios realizados para profundizar sobre este tema, como por ejemplo, los llevados a cabo por Nyquist y Shannon, quienes establecieron bases teóricas fundamentales, hasta hoy consideradas esenciales en la comprensión de la teoría de las comunicaciones [2].

Los sistemas desarrollados inicialmente no incluían dentro de su diseño la necesidad de transmisión de grandes cantidades de datos, así como tampoco presentaban una alta confiabilidad en la información transmitida [3], por tanto, cuando las exigencias al respecto cambiaron, surgió la motivación permanente de diseñar sistemas robustos que trabajen a una mayor velocidad, con una baja probabilidad de error en la detección. En este trabajo de grado se estudia la posibilidad de mejorar el desempeño de un sistema de telecomunicaciones cuando se emplea un esquema de modulación biortogonal con constelación  $N$ -dimensional, generado a partir de matrices de Hadamard. Para dicho estudio se llevaron a cabo simulaciones que permitieron analizar la tasa de error de bit (BER) y la eficiencia espectral del esquema de modulación.

## 1.2 Planteamiento del problema

Los sistemas de comunicación digital tradicionales presentan comúnmente errores en la detección de los símbolos debido en la mayoría de los casos, a la escasa distancia existente entre símbolos vecinos dentro de la constelación del respectivo esquema de modulación. En ese sentido, la probabilidad de error se ve influenciada por la distancia mínima de la constelación [4]. Por ejemplo, un esquema de modulación binario, tiene alta inmunidad al ruido, debido a que su constelación se constituye únicamente de dos símbolos, por su parte, esquemas de modulación M-arios, al emplear un alfabeto de mayor cantidad de elementos (símbolos), requieren una mayor cantidad de energía por símbolo transmitido para mantener una distancia mínima aceptable, mientras que su eficiencia espectral se incrementa de manera logarítmica en función de la cantidad de símbolos de su constelación [5].

El incremento de energía requerido para mantener cierta distancia mínima suele ser más crítico mientras menor sea la dimensión del espacio Euclidiano donde está definida la constelación, así, si se compara un esquema de modulación por amplitud de pulso de M estados (M-PAM) respecto a un esquema de modulación por amplitud de cuadratura de M estados (M-QAM), se encuentra que la energía promedio por símbolo, en función del número de estados (M), es mayor para el caso de M-PAM, dado que este esquema posee una constelación unidimensional, mientras que M-QAM posee una constelación bidimensional [6], [7].

Lo anteriormente expuesto pone a consideración la posibilidad de obtener un mejor desempeño frente al ruido (menor probabilidad de error en función de la relación energía de bit a densidad espectral de potencia de ruido) cuando se aumenta el número de dimensiones de la constelación del esquema de modulación.

## 1.3 Estado del Arte

A continuación se describen algunos trabajos relacionados con el diseño de esquemas de codificación, modulación digital y el uso eventual de matrices de Hadamard para la construcción de los mismos. También se indican las brechas existentes entre ellos y el presente trabajo de grado.

<b>Esquemas de modulación</b>		
<b>Trabajo relacionado</b>	<b>Contribución</b>	<b>Brechas</b>
C. Xiaoli, R.D. Murch [8].	- Esquema de modulación biortogonal eficiente en potencia, empleando N pulsos ortogonales conformados en conjunción con M códigos Walsh-Hadamard.	- No se considera el uso de pulsos de coseno alzado en el esquema de modulación y solo se orienta el diseño a sistemas UWB iR.
Martin Kutter [9].	- Uso de un esquema de modulación de M estados orientado a técnicas de Watermarking, construido a partir de una matriz Hadamard de orden M.	- Se analiza el desempeño del sistema cuando se incrementa el número de símbolos del esquema de modulación sin considerar el efecto que podría tener un aumento en el número de dimensiones.
Chen, Yueyun, and T. Zhenhui [10].	- Algoritmo para obtener funciones biortogonales basadas en un análisis general de series de Fourier.  - Esquema de modulación Biortogonal Scramble generado a partir del algoritmo desarrollado.	- No se considera el uso de matrices de Hadamard como una herramienta para la creación de formas de onda biortogonales en un espacio de N dimensiones.
Hao Zhang and T.A. Gulliver [11].	- Novedoso esquema de modulación biortogonal construido a partir de señales PPM (moduladas por posición de pulso) y sus versiones antípodas.	- No se tiene en cuenta el efecto que tendría en el desempeño, el incremento del número de dimensiones del esquema de modulación, mediante el empleo de matrices de Hadamard.
M. Noshad, M. Brandt-Pearce [12].	- Uso de la modulación codificada de Hadamard (HCM) como alternativa a OFDM para enfrentar los fenómenos no lineales producidos cuando se incrementa la potencia de la señal transmitida.	- El objetivo primordial de los autores de este trabajo es reducir el efecto que tienen los fenómenos no lineales sobre OFDM, sin embargo no se plantea la creación de un esquema de modulación multidimensional.

Tabla 1.1. Contribuciones y brechas esquemas de modulación.

Esquemas de Codificación		
Trabajo relacionado	Contribución	Brechas
Al-Qaraawy, M Saleh [13].	- Receptor TR <sup>1</sup> basado en la versión modificada de una matriz de Hadamard que elimina completamente la interferencia inter pulso mediante códigos biortogonales.	- Las matrices de Hadamard pueden ser usadas además de un mecanismo de detección y corrección de errores, como herramienta para generar el espacio de un esquema de modulación N dimensional y no solamente para combatir la Interferencia inter pulso.
Xianren Wu, et al [14].	- Uso de palabras código Hadamard para el diseño de un pulso óptimo a nivel espectral, en donde todas las palabras código se organizan en orden ascendente según el número de transiciones de signo que tengan las mismas.	- Aunque se vinculan palabras códigos Hadamard, el trabajo no se extiende al diseño de un esquema de modulación, pues asume la existencia de este, como la base para direccionar la investigación en la conformación del pulso óptimo.
C.K. Rushforth [15].	- Uso de matrices Hadamard para la construcción de códigos ortogonales y su respectiva decodificación	- El estudio se limita a la creación de códigos ortogonales, sin extenderse, a la utilización de las matrices de Hadamard para la creación del espacio de señal de un esquema de modulación multidimensional
A. Iossifides [16].	- Sistema con codificación binaria antípoda ortogonal compleja para canales de desvanecimiento Rayleigh basado en matrices complejas ortogonales construidas con matrices Hadamard amigables.	- Se propone el uso de las matrices de Hadamard como base para la construcción del sistema de codificación pero no de un esquema de modulación.

Tabla 1.2. Contribuciones y brechas esquemas de codificación.

## 1.4 Contenido

El documento se encuentra organizado de la siguiente manera: en el capítulo 1 se realiza una introducción, en la que se aclara la motivación para la realización del

<sup>1</sup> Un receptor TR codifica los datos en la diferencia de fase de un par de pulsos; el primer pulso no lleva información pero sirve como un pulso de referencia; el segundo pulso está modulado por los datos y es llamado pulso de datos.

trabajo de grado, así como también se define de manera clara el problema objeto de estudio, mencionando los aportes realizados hasta el momento, las contribuciones dadas en la temática que se aborda y el contenido que se va desarrollar.

Por su parte en el capítulo 2 se exponen los fundamentos teóricos de la teoría de modulación digital, necesarios para entender con claridad el funcionamiento de un sistema de comunicación digital y las características necesarias para una transmisión confiable. En el capítulo 3 se menciona la teoría relacionada con la modulación N-dimensional, explicando cómo las matrices de Hadamard se vinculan en el diseño del esquema de modulación. El cuarto capítulo resume las etapas consideradas para la implementación de la simulación, así como los resultados obtenidos y finalmente en el capítulo 5 se destacan las conclusiones más importantes obtenidas del trabajo de grado, proponiendo también algunos trabajos futuros.



## **2. Teoría de modulación digital**

El presente capítulo define conceptos claves para este trabajo de grado, esta explicación se realiza a fin de proporcionar al lector bases de conocimiento requeridas para comprender la temática abordada en el presente trabajo de grado y el desarrollo de los objetivos propuestos.

### **2.1. Sistema de Comunicación**

Un sistema de comunicación es el conjunto de mecanismos y procesos que transmiten información desde una fuente hasta un destino a cierta distancia [5].

#### **2.1.1. Mensaje**

Se define como cualquier tipo de información que se busca llegue del emisor al receptor por medio de un sistema de comunicación, el cual busca reproducir en el receptor una réplica aceptable de este [17].

#### **2.1.2. Señal**

Las señales son función de una o más variables independientes, contienen información acerca del comportamiento o naturaleza de algún fenómeno [18].

#### **2.1.3. Canal**

El canal de comunicación hace referencia al medio físico de interconexión entre la fuente y el destino, existen diversos tipos de canales, pero sin excepción todos introducen contaminaciones a la señal transmitida debido al efecto de ciertos

fenómenos que ocurren dentro de él, como por ejemplo ruido, distorsión, interferencia, retardo y atenuación entre otros [5] [19].

#### **2.1.4. Respuesta de un sistema**

Un sistema produce una respuesta a señales particulares produciendo otras señales o algún comportamiento deseado [18].

#### **2.1.5. Ancho de banda de una señal**

Longitud del intervalo de frecuencias donde se encuentra concentrada la mayor parte de la energía de señal [1].

#### **2.1.6. Ancho de banda de un sistema**

Hace referencia a la banda de frecuencias destinada a la transmisión de la señal del mensaje [1].

## **2.2. Sistema de Comunicación Digital**

Es un sistema que permite la transmisión y posterior recepción de mensajes digitales a saber, secuencias ordenadas de símbolos pertenecientes a un alfabeto finito discreto [4].

## **2.3. Canal AWGN**

Es uno de los modelos matemáticos más sencillos para representar distintos canales de comunicación físicos, como bien pueden ser líneas cableadas o canales radio. Contamina la señal transmitida con un proceso estocástico con distribución

Gaussiana de media cero y potencia proporcional al ancho de banda del canal. Dicho proceso es no correlacionado consigo mismo ni con la señal de entrada [20].

## 2.4. Modulación Digital

### 2.4.1 Introducción

La transmisión digital de información se efectúa mediante el envío y recepción de señales con carácter discreto tanto en tiempo como en valor. La modulación digital es el proceso de convertir una secuencia de bits, en formas analógicas para que puedan ser enviadas sobre un canal físico.

Al caracterizar una fuente digital, se debe tener en cuenta, la definición de algunos parámetros fundamentales, a saber:

- *Alfabeto o constelación*: Contiene el conjunto de todos los valores posibles que puede tomar la señal.
- *Símbolo*: Corresponde a un valor particular del alfabeto.
- *Distribución de probabilidad del alfabeto*: Determina la cantidad de información que emite la fuente en un instante dado.
- *Distribución de probabilidad condicional de los símbolos*: Estima la relación existente entre el símbolo actual emitido y los anteriores.
- *Periodo de símbolo*: Define la duración en el tiempo de un símbolo.
- *Independencia estadística entre símbolos*: Significa que un símbolo emitido en un instante  $i$ -ésimo no se ve afectado por los valores que toma otro símbolo enviado en un instante anterior  $k$ -ésimo.
- *Símbolos equiprobables*: Implica que las probabilidades de todos los símbolos de la constelación son iguales, en otras palabras, el alfabeto presenta una distribución de probabilidad uniforme [21].

En la Figura 2.1 se ilustran los elementos básicos de un sistema de comunicación digital.

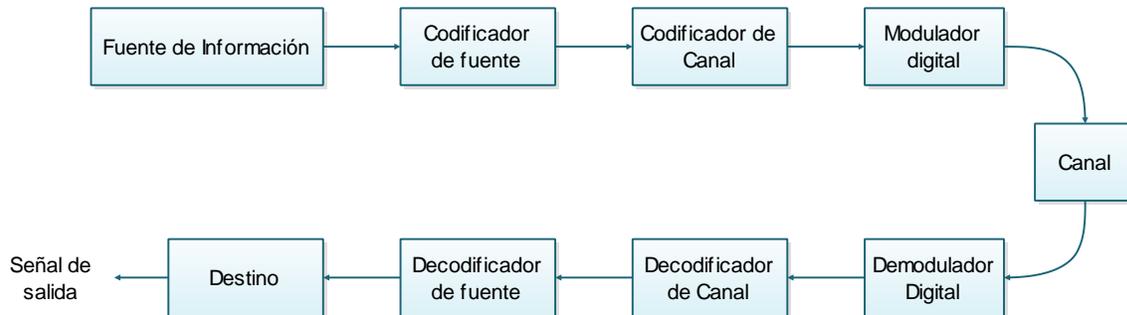


Figura 2.1. Bloques de un sistema de comunicación digital

En un sistema de comunicación digital, el mensaje producido por la *fuentes digital* se convierte en una secuencia de dígitos binarios; se busca que esta representación se realice de manera eficiente, es decir, con la menor cantidad de dígitos binarios posibles, minimizando la redundancia o haciéndola nula. El proceso de convertir eficazmente la salida de cualquier fuente, en una secuencia de dígitos binarios, es realizado por el *codificador de fuente*.

La secuencia generada por el codificador de fuente se conoce como *secuencia de información*, la cual posteriormente pasa al *codificador de canal*, donde, de manera controlada, se le introduce redundancia útil para superar los efectos del ruido e interferencia encontrados en la transmisión de la señal a través del canal.

El *modulador digital* recibe la secuencia de información saliente del codificador de canal y la mapea en una forma de onda de señal óptima para ser transmitida. El *canal de comunicación* es el medio físico usado para enviar la señal de la fuente al destino, éste tiene efectos perjudiciales en la señal, tales como el ruido, la interferencia, desvanecimiento entre otros.

Del otro lado del sistema, el *demodulador digital* procesa la forma de onda recibida, deteriorada por los efectos del canal, obteniendo una estimación de los símbolos transmitidos; esta secuencia pasa al *decodificador de canal*, el cual, conociendo el código empleado en el codificador de canal y la redundancia contenida en los datos, trata de reconstruir la secuencia original.

Finalmente el *decodificador de fuente* recibe la secuencia resultante en el decodificador de canal (conociendo el método de codificación de fuente empleado) y trata de reconstruir la señal original, obteniendo una estimación de la misma, difiriendo entre sí debido a la distorsión introducida por el sistema de comunicación digital [2].

#### 2.4.2 Pulsos de Modulación para evitar ISI

Si se omite el efecto del ruido en el proceso de modulación, las formas de onda moduladas son generalmente representadas por una secuencia de símbolos multiplicados por translaciones de un pulso  $p(t)$ , denominado *pulso de modulación*. La elección de dicho pulso es fundamental para evitar la presencia de interferencia intersimbólica y lograr rescatar la señal contaminada que llega al receptor.

El inconveniente existente al trabajar con pulsos limitados en el tiempo, es que su espectro en frecuencia se esparce significativamente, por ejemplo, un pulso rectangular en el dominio del tiempo corresponde en frecuencia a una función  $\text{sinc}(f)$ , la cual posee un ancho de banda infinito.

**Pulso Sinc:** El pulso  $\text{sinc}(t)$  no presenta Interferencia Inter Simbólica (ISI) para instantes adecuados de muestreo, sin embargo, ante una leve pérdida de sincronización, éste fenómeno puede representar un gran problema, ya que el pulso no está acotado en el tiempo y las contribuciones de ISI de los símbolos interferentes pueden degradar considerablemente la señal transmitida. La solución más indicada por tanto, es truncar dicho pulso de tal forma que únicamente se vea la ISI de un número finito de símbolos.

Un pulso  $\text{sinc}(t)$  decrece a una tasa de  $1/t$ , y la ISI producida por un símbolo interferente se encuentra a intervalos de símbolo  $n$  y decae de la forma  $1/n$ , por lo tanto, en el peor de los casos, la contribución de los símbolos interferentes tiene la forma:  $\sum_{n=1}^{\infty} (1/n)$ , ecuación correspondiente a una serie armónica, cuyo resultado es

divergente. Lo anterior resalta la importancia de un rápido decaimiento de la función en el tiempo para obtener un pulso más robusto ante fallos de sincronización.

La Figura 2.2 muestra una función  $\text{sinc}(t)$  y su respectivo espectro en el dominio de la frecuencia, cuya forma resultante es teóricamente rectangular.

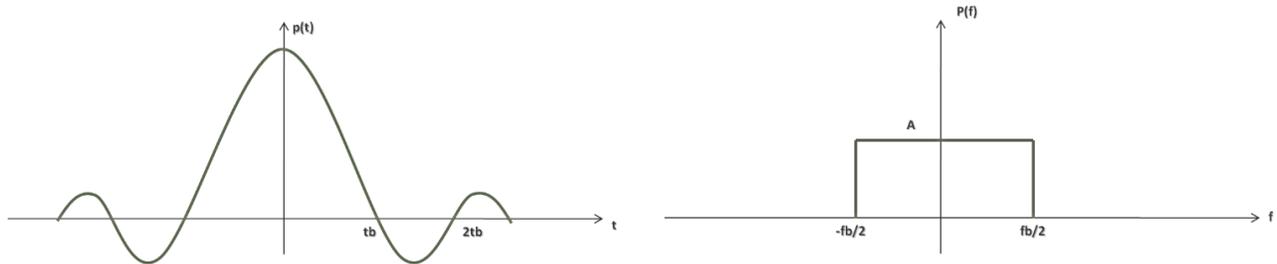


Figura 2.2. Pulso  $p(t) = \text{sinc}(t)$  y su espectro en el dominio de la frecuencia  $P(f)$ .

Nyquist desarrolló algunos criterios bien definidos mediante los cuales se busca elegir la forma idónea de los pulsos para evitar la presencia de ISI.

**Criterio de Nyquist en el dominio del tiempo:** Un pulso  $p(t)$  es de Nyquist para señalización a la tasa  $1/T$ , si las muestras espaciadas de los símbolos de la señal modulada son iguales a los símbolos  $a_k$ , o un múltiplo escalar de los mismos, esto es:

$$p(kT) = a_k, \forall k \in \mathbb{Z}^+, \quad (2.1)$$

ecuación que garantiza la ausencia de ISI para tiempos de muestreo separados por el período de símbolo  $T$ .

**Criterio de Nyquist en el dominio de la frecuencia:** Un pulso  $p(t)$  con transformada de Fourier  $P(f)$  es de Nyquist para señalización a la tasa  $1/T$  si:

$$p(kT) = \delta_k = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ 0, & k \neq 0 \end{cases}, k \in \mathbb{Z}, \quad (2.2)$$

ó de forma equivalente:

$$\frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} P\left(f + \frac{k}{T}\right) = 1. \quad (2.3)$$

Es decir que existe una correspondencia uno a uno entre las muestras de una señal en el dominio del tiempo y la suma de las versiones trasladadas de la transformada de Fourier.

Un *Pulso Nyquist de ancho de banda mínimo* se define como:

$$P(f) = \begin{cases} T, & |f| \leq \frac{1}{2T} \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (2.4)$$

donde  $P(f)$  es la transformada de Fourier de una función  $\text{sinc}(t/T)$ , cuyo decrecimiento, como se mencionó anteriormente, es lento en el tiempo. No obstante, es posible acelerar la caída de la señal, expandiendo su espectro en frecuencia, es decir, agregando un exceso de ancho de banda; el *exceso de ancho de banda* o factor de roll-off ( $\beta$ ) se define como la fracción de ancho de banda sobre el mínimo requerido para evitar ISI a una tasa de símbolo dada.

**Pulso trapezoidal:** surge del producto entre dos pulsos sinc de distinta duración:

$$p_1(t) = \text{sinc}\left(\frac{t}{T}\right), \quad (2.5)$$

$$p_2(t) = \text{sinc}\left(\frac{\beta t}{T}\right), \quad (2.6)$$

al operar las funciones descritas en (2.5) y (2.6), se obtiene una forma de onda  $p_3(t)$ :

$$p_3(t) = \text{sinc}\left(\frac{t}{T}\right) \text{sinc}\left(\frac{\beta t}{T}\right), \quad (2.7)$$

que decrece a la tasa de  $1/t^2$ , esto significa que ésta señal decae más rápido que un pulso *sinc* y produce un espectro que presenta una forma trapezoidal con exceso de ancho de banda  $\beta$ .

La Figura 2.3 muestra un bosquejo del espectro generado al realizar la transformada de Fourier de la ecuación (2.7).

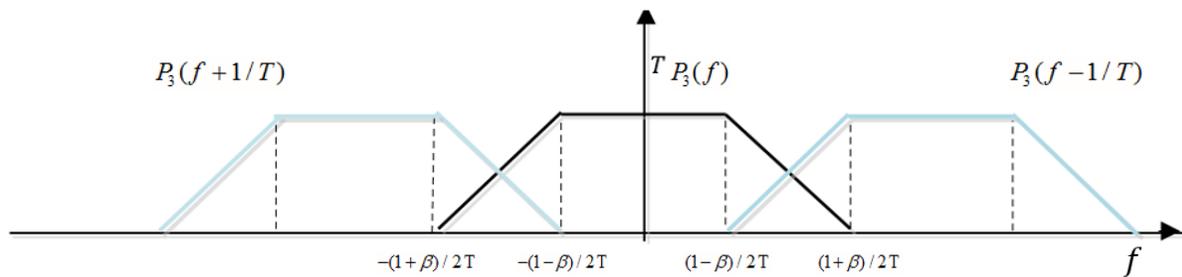


Figura 2.3. Pulso Nyquist trapezoidal a la tasa  $1/T$  con exceso de ancho de banda  $\beta$ .

Nótese que el ancho de banda de este tipo de pulsos puede ser expresado de la siguiente forma:

$$BW = \frac{1}{2T}(1 + \beta) = \frac{R}{2}(1 + \beta), \quad (2.8)$$

donde  $R$  indica la tasa de transmisión de símbolo. Por ejemplo, al efectuar el producto de las funciones  $p_1(t)$  y  $p_2(t)$  para  $\beta = 0.25$  y  $T = 1$  se obtiene el resultado mostrado en la Figura 2.4.

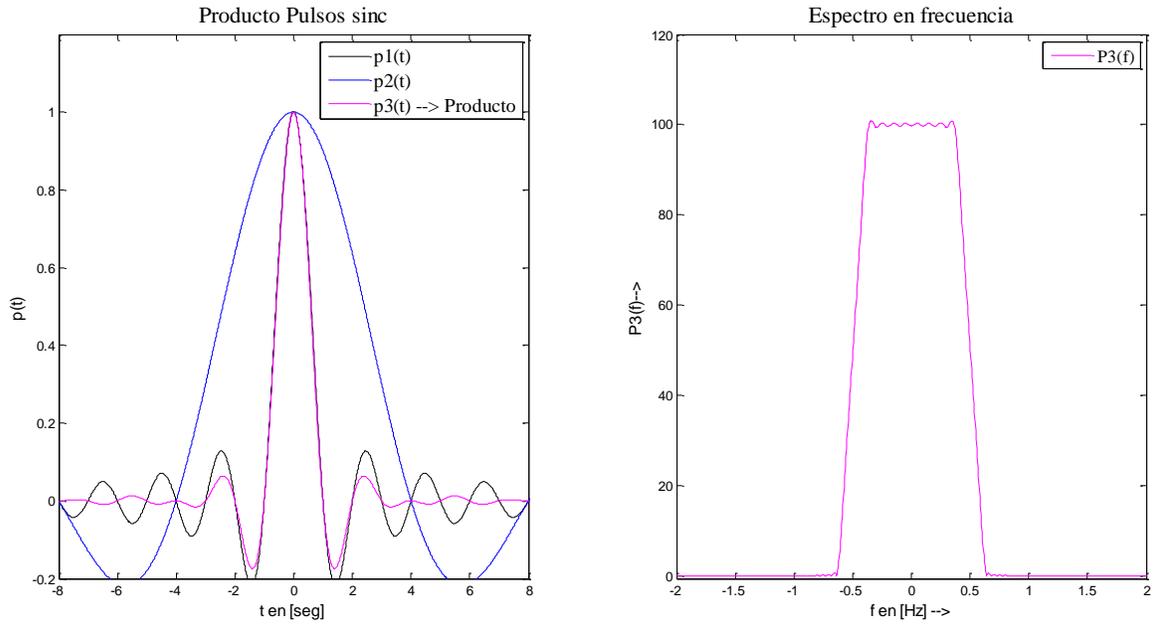


Figura 2.4. Pulso Nyquist obtenido a partir del producto de dos funciones *sinc*.

La gráfica obtenida permite apreciar que  $p_1(t)$  se encarga de generar los cruces por cero del pulso resultante  $p_3(t)$  para múltiplos enteros de  $T = 1/\beta$ , lo cual significa que en particular estos pulsos son Nyquist a una tasa de  $\beta = 1/T$ .

**Pulso de Coseno Alzado:** La idea básica de este tipo de pulsos es suavizar las líneas rectas de los pulsos trapezoidales por medio de una curva en forma de coseno, en consecuencia se consigue una caída más rápida de la señal en el dominio del tiempo.

En general un Pulso de coseno alzado tiene la siguiente forma espectral:

$$P(f) = \begin{cases} T, & |f| \leq \frac{1-\beta}{2T}, \\ \left(\frac{T}{2}\right) \left(1 + \cos\left(\left(|f| - \frac{1-\beta}{2T}\right) \left(\frac{\pi T}{\beta}\right)\right)\right), & \frac{1-\beta}{2T} \leq |f| \leq \frac{1+\beta}{2T}, \\ 0, & |f| \geq \frac{1+\beta}{2T}, \end{cases} \quad (2.9)$$

donde el valor de  $\beta$  se escoge típicamente en el rango  $0 \leq \beta \leq 1$ ; la transformada inversa de este tipo de pulsos es:

$$p(t) = \text{sinc}\left(\frac{t}{T}\right) \left( \frac{\cos\left(\frac{\pi\beta t}{T}\right)}{1 - \left(\frac{2\beta t}{T}\right)^2} \right). \quad (2.10)$$

La ecuación (2.10) adiciona un factor  $1/t$ , por lo tanto el pulso de coseno alzado decae a una tasa de  $1/t^3$ , característica que lo destaca como un pulso conformador óptimo para emplearse en un esquema de modulación.

La ocupación espectral de este tipo de forma de onda es idéntica a la de un pulso trapezoidal, por consiguiente, su ancho de banda también está determinado por la ecuación (2.8). La Figura 2.5 muestra un pulso de coseno alzado junto con su representación espectral para  $T = 1$  y valores de  $\beta = 0.3, 0.6, \text{ y } 0.9$ .

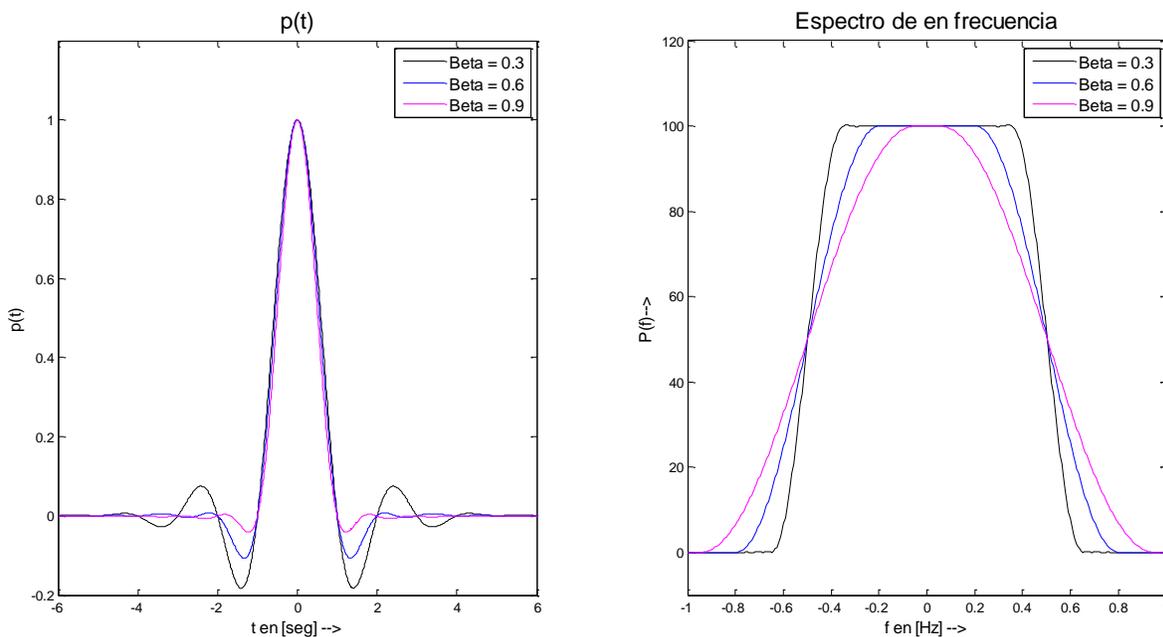


Figura 2.5. Pulso de coseno alzado para diferentes valores de roll off.

En la Figura 2.5 se evidencia claramente la velocidad de caída en el tiempo del pulso de coseno alzado en relación a los pulsos estudiados anteriormente, además, mediante la variación del parámetro  $\beta$  se consigue adaptar el sistema a los requerimientos de ancho de banda; para valores de  $\beta$  próximos a cero se logra el ancho de banda mínimo o nominal definido por Nyquist, sin embargo, esto complica el diseño de los filtros de transmisión y recepción, por otro lado para valores de  $\beta$  cercanos a uno, se sacrifica el recurso espectral pero se facilita el diseño de los filtros [21].

En la práctica, es muy común dividir la formación de este pulso entre el filtro transmisor y receptor, otorgando a cada uno características espectrales idénticas, de este modo, en vez de diseñar dos filtros, solo hace falta realizar uno.

La respuesta global del sistema está dada por:

$$p(t) = h_{Tx}(t) * r(t) * h_{Rx}(t), \quad (2.11)$$

donde  $h_{Tx}(t)$  representa la respuesta al impulso del filtro transmisor,  $r(t)$  indica la respuesta al impulso del canal y  $h_{Rx}(t)$  la respuesta al impulso del filtro receptor. Efectuando la transformada de Fourier de la ecuación (2.11) y asumiendo un comportamiento ideal del canal<sup>2</sup>, se tiene:

$$P(f) = H_{Tx}(f)H_{Rx}(f), \quad (2.12)$$

$$P(f) = |H_{Tx}|^2, \quad (2.13)$$

por tanto,

$$H_{Tx} = \sqrt{|P(f)|} e^{-j2\pi f t_0}. \quad (2.14)$$

La ecuación (2.14) representa la respuesta en frecuencia de un *filtro raíz cuadrada de coseno alzado* (SRRC: *Square Root Raised Cosine*), donde  $t_0$  constituye un retardo de la respuesta al impulso en el dominio del tiempo para asegurar la

<sup>2</sup> Un canal se dice ideal si su comportamiento es constante (igual a uno) para  $0 \leq f \leq (1 + \beta)/2T$

implementación física del filtro [20]. La respuesta al impulso de este tipo de señal se describe en la ecuación (2.15):

$$p(t) = \frac{2\beta}{\pi\sqrt{T}} \frac{\cos[(1+\beta)\pi t/T] + \frac{\sin[(1-\beta)\pi t/T]}{4\beta t/T}}{1-(4\beta t/T)^2}. \quad (2.15)$$

Aunque ésta no satisface el criterio de Nyquist, puede demostrarse que la convolución de éste pulso consigo mismo si lo hace [22].

**Eficiencia espectral:** Se define como la tasa de transmisión de bits por unidad de ancho de banda ocupado [bps/Hz].

$$\rho = \frac{R_b}{BW}, \quad (2.16)$$

despejando el valor de  $R_b$  de la ecuación (2.16), se tiene que para una señalización  $M$ -aria, la tasa de bit es igual al número de bits transportados por periodo de símbolo, esto es:

$$R_b = \frac{\log_2 M}{T} = \frac{L}{T}, \quad (2.17)$$

donde  $L$ , indica el número de bits transportados; ahora bien, si se considera el ancho el ancho de banda ocupado por un pulso roll-off, y además se reemplaza la ecuación (2.17) en (2.16) se obtiene:

$$\rho = \frac{\frac{L}{T}}{\frac{(1+\beta)}{2T}} = \frac{2L}{1+\beta} = \frac{2\log_2 M}{1+\beta}, \quad (2.18)$$

es decir que la eficiencia espectral está determinada por el número de símbolos del alfabeto y el valor de roll off elegido ( $0 \leq \beta \leq 1$ ), por tanto se tiene [23]:

$$\log_2 M \leq \rho \leq 2 \log_2 M. \quad (2.19)$$

#### 2.4.4 Implementación del Receptor

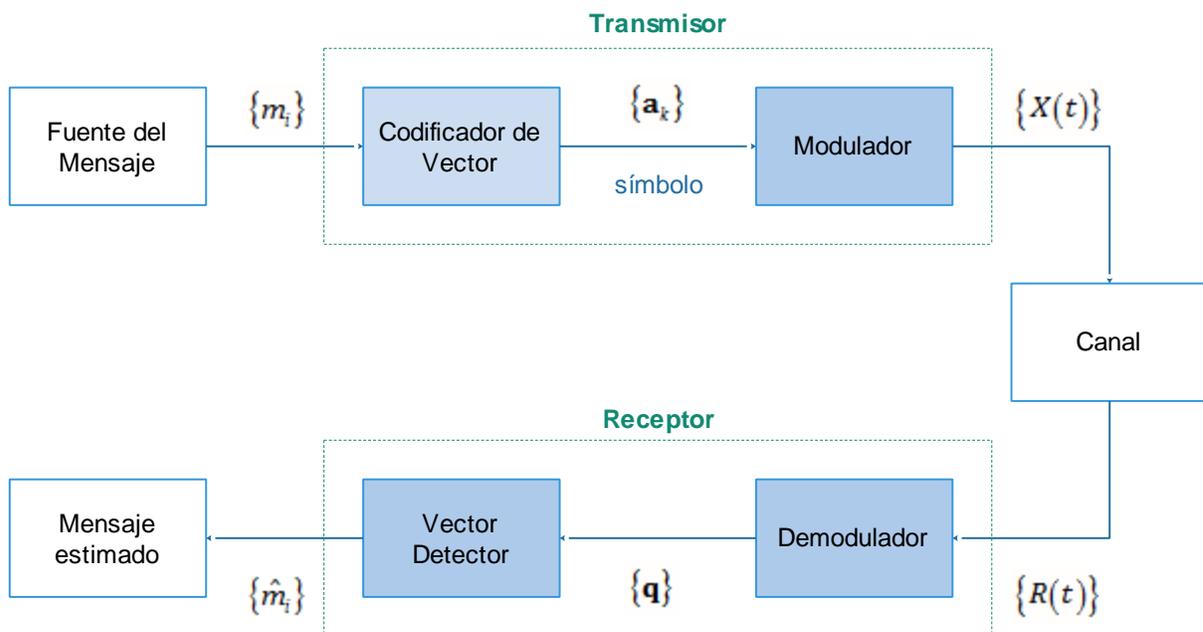


Figura 2.6. Sistema de transmisión de datos digital

En la Figura 2.6 se muestra un sistema de transmisión digital [24]; el receptor óptimo, es conocido como receptor MAP, dado que trabaja bajo el criterio de máxima probabilidad a posteriori, a éste le llega la señal  $R(t)$ , resultado de la señal transmitida y el ruido del canal; tras operarle, el demodulador, convierte ésta señal, en un vector  $\mathbf{y}$ , mediante el cual, el detector, trata de estimar el vector de símbolos enviado  $\mathbf{a}_k$  y por tanto, cuál fue el mensaje enviado  $\hat{m}_i$ , buscando minimizar la probabilidad de error de símbolo, entendida como la probabilidad de que el símbolo detectado en un instante dado difiera del símbolo transmitido en ese mismo instante:  $P_S = \Pr(\hat{a}_k \neq a_k)$ , donde  $\hat{a}_k$  es el símbolo estimado y  $a_k$  es el símbolo transmitido.

Al tener un mensaje de tamaño grande y símbolos independientes e idénticamente distribuidos (iid), la probabilidad de error es posible de estimar a través de la tasa de error de símbolo SER (*symbol error rate*), definida como el cociente entre el número de símbolos detectados erróneamente y el número total de símbolos transmitidos. Por su parte la probabilidad de error de bit, puede definirse en función de la probabilidad de error de símbolo:

$$P_b = \frac{E_{av} P_s}{\log_2 M}, \quad (2.20)$$

siendo  $E_{av}$  el número promedio de bits errados por símbolo detectado de manera errónea, el cual equivale a 1 al trabajar con codificación Gray<sup>3</sup>.

El minimizar la probabilidad de error, equivale a trabajar con la regla de máxima probabilidad a posteriori, escogiendo el  $\hat{a}_k \in A$ , tal que la  $\Pr(\hat{a}_k|\mathbf{r})$  sea máxima de entre todas las  $\Pr(\mathbf{a}_j|\mathbf{r})$ ,  $\mathbf{a}_j \in A$ . Por ley de Bayes se tiene:

$$\Pr(\mathbf{a}_j|\mathbf{r}) = \frac{\Pr(\mathbf{r}|\mathbf{a}_j)\Pr(\mathbf{a}_j)}{\Pr(\mathbf{r})}. \quad (2.21)$$

Teniendo en cuenta que  $\mathbf{r}$  es un vector aleatorio continuo,  $\Pr(\mathbf{r}) \propto f(\mathbf{r})$  expresa la función de densidad de probabilidad de  $\mathbf{r}$  y  $\Pr(\mathbf{r}|\mathbf{a}_j) \propto f(\mathbf{r}|\mathbf{a}_j)$  la función de densidad de probabilidad condicional de  $\mathbf{r}$  dado  $\mathbf{a}_j$ . Si las señales  $\mathbf{a}_j$  son equiprobables,  $\Pr(\mathbf{a}_j) = 1/M$  para todo  $j$ , entonces, la regla MAP equivale a la regla de máxima verosimilitud (ML), es decir, escoger el  $\hat{a}_k \in A$  tal que  $\Pr(\mathbf{r}|\hat{a}_k)$  sea máxima de entre todas las  $\Pr(\mathbf{r}|\mathbf{a}_j)$ ,  $\mathbf{a}_j \in A$ .

En un canal AWGN con densidad espectral de potencia  $N_0/2$  se tiene:

$$f(\mathbf{r}|\mathbf{a}_j) = f_w(\mathbf{r} - \mathbf{a}_j) = (\pi N_0)^{-N/2} e^{-\|\mathbf{r} - \mathbf{a}_j\|^2 / N_0}, \quad (2.22)$$

<sup>3</sup> Asignar a símbolos vecinos de la constelación, secuencias binarias que solo difieren en un bit a la vez.

siendo  $f_w(w)$ , la función de densidad de probabilidad del ruido AWGN. La regla de máxima verosimilitud (ML) equivale a la regla de distancia mínima (MD), para lo cual se escoge el  $\hat{a}_k$  tal que:

$$\hat{a}_k = \underset{a_j \in A}{\operatorname{argmin}} [\| \mathbf{r} - \mathbf{a}_j \|^2]. \quad (2.23)$$

### Probabilidad de error en la modulación 2-PAM

Para la modulación 2-PAM con símbolos equiprobables, definiendo los símbolos recibidos como:  $r_k = a_k + z_k$ , con símbolos  $a_k \in A = \{\pm\lambda\}$  y  $z_k \sim N(0, \sigma^2)$ .

$$\text{Si: } a_k = -\lambda, \quad r_k = -\lambda + z_k, \quad \sim N(-\lambda, \sigma^2),$$

$$a_k = \lambda, \quad r_k = \lambda + z_k, \quad \sim N(\lambda, \sigma^2),$$

el símbolo estimado es:  $\hat{a}_k = \begin{cases} -\lambda, & r_k < 0 \\ \lambda, & r_k > 0 \end{cases}$ ,  $\hat{a}_k \in A = \{\pm\lambda\}$ ,  $\hat{a}_k = \lambda \operatorname{sgn} r_k$ ,

entonces, la probabilidad de error de bit, que es igual a la probabilidad de error de símbolo es:

$$\begin{aligned} P_b &= P_S = \Pr\{\hat{a}_k \neq a_k\}, \\ &= \Pr(\lambda \operatorname{sgn} r_k = \lambda \mid a_k = -\lambda), \\ &= \Pr(\operatorname{sgn} r_k = 1 \mid a_k = -\lambda), \\ &= \Pr(r_k > 0 \mid a_k = -\lambda), \\ &= \Pr(a_k + z_k > 0 \mid a_k = -\lambda), \\ &= \Pr(-\lambda + z_k > 0), \\ &= \Pr(z_k > \lambda) = \int_{\lambda}^{\infty} f_w(x) dx = \int_{\lambda}^{\infty} \frac{e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}}{\sigma\sqrt{2\pi}} dx, \end{aligned} \quad (2.24)$$

mediante el cambio de variable:  $u = x/\sigma$  se tiene:

$$P_b = \frac{1}{2\pi} \int_{\lambda/\sigma}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du = Q\left(\frac{\lambda}{\sigma}\right), \quad (2.25)$$

donde  $Q(\lambda/\sigma)$  es la función de distribución complementaria normal estándar, la cual es monótona decreciente, que indica que la probabilidad de error decrece con el incremento de su argumento  $\lambda/\sigma$ .

Para expresar la probabilidad de error en función de la *energía de bit a densidad espectral de potencia de ruido* ( $E_b/N_0$ ):

$$\begin{aligned} E_b = E_s = E[|a_k|^2] &= q\lambda^2 - (1-q)(-\lambda)^2 = \lambda^2 = E_b, \\ \lambda &= \sqrt{E_b}, \end{aligned} \quad (2.26)$$

donde  $q$  y  $1-q$  son las probabilidades absolutas de los símbolos a transmitir.

$$\text{Despejando: } \sigma^2 = \frac{N_0}{2} \rightarrow \sigma = \sqrt{\frac{N_0}{2}}, \quad (2.27)$$

entonces, al reemplazar los valores de  $\lambda$  y  $\sigma$ , expresados en (2.26) y (2.27), se tiene que:

$$P_b = Q\left(\frac{\lambda}{\sigma}\right) = Q\left(\frac{\sqrt{E_b}}{\sqrt{\frac{N_0}{2}}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right), \quad (2.28)$$

éste valor es un referente para el análisis de desempeño de diferentes esquemas de modulación M-arios, analizando la  $E_b/N_0$  requerida para alcanzar cierta probabilidad de error, estableciendo que el mejor desempeño está dado por el esquema que requiera la menor  $E_b/N_0$  para una  $P_b$  estipulada [23].

### 2.4.5 Ortogonalidad y ortonormalidad de señales

El producto interno de dos señales complejas  $\gamma_1(t), \gamma_2(t)$ , definidas en el intervalo  $[a, b]$ , se denota por  $\langle \gamma_1(t), \gamma_2(t) \rangle$  y se define como:

$$\langle \gamma_1(t), \gamma_2(t) \rangle = \int_a^b \gamma_1(t) \gamma_2^*(t) dt, \quad (2.29)$$

donde, el operador \* denota la operación complejo conjugado. Estas señales se dicen ortogonales si su producto interno es cero. Por otra parte, la norma de una señal se define como:

$$\| \gamma(t) \| = \left( \int_a^b |\gamma(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.30)$$

Se dice entonces que un grupo de señales son ortonormales, si son ortogonales entre sí y sus normas son todas unitarias [2].



## 3. Modulación N dimensional basada en matrices de Hadamard

### 3.1 Matrices de Hadamard

Las *matrices de Hadamard* fueron descritas por Jacques Hadamard en un artículo publicado en 1893 [25]. Una matriz de Hadamard de orden  $N$  es una matriz cuadrada de tamaño  $N \times N$  cuyos elementos corresponden a +1s y -1s, de tal forma que todas las filas de la matriz son mutuamente ortogonales<sup>4</sup> y se diferencian entre sí en exactamente  $N/2$  posiciones.

Las características anteriormente descritas permiten diseñar formas de onda ortogonales con igual energía, sin embargo, los valores de  $N$  solo pueden ser potencias enteras de 2. Hoy en día existe una gran variedad de técnicas para la construcción de matrices de Hadamard, entre ellas el método recursivo de Sylvester, el cual permite construir una matriz Hadamard de orden  $N$  a partir de una matriz Hadamard de orden  $N/2$  [4] [25]. Algunos ejemplos de matrices de Hadamard de orden 1, 2 y 4 respectivamente se presentan a continuación:

$$\mathbf{H}_1 = (1), \mathbf{H}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \mathbf{H}_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.1)$$

En general, una matriz Hadamard obtenida por el método de Sylvester tiene la siguiente forma:

$$\mathbf{H}_N = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{N/2} & \mathbf{H}_{N/2} \\ \mathbf{H}_{N/2} & \overline{\mathbf{H}_{N/2}} \end{bmatrix}, \quad (3.2)$$

donde  $\overline{\mathbf{H}_{N/2}}$  denota el complemento de la matriz  $\mathbf{H}_{N/2}$ .

<sup>4</sup> El producto interno entre cualquier par de filas diferentes es igual a cero.

### Algunas propiedades de las matrices Hadamard

Además de la ortogonalidad, las matrices de Hadamard poseen otras propiedades interesantes a saber:

1.  $HH^T = NI$ , es decir que el producto de una matriz Hadamard de orden  $N$  por su transpuesta es igual a la matriz identidad multiplicada por  $N$ .

2.  $\frac{1}{N}H^T = H^{-1}$ , ésta propiedad implica una forma sencilla de calcular la inversa de una matriz Hadamard a partir de su transpuesta [25].

**Secuencias Walsh-Hadamard:** A partir de una matriz Hadamard de orden  $N$  si los +1s son reemplazados por 0's y los -1s por +1s, es posible obtener una matriz Hadamard binaria, cuyas filas constituyen las palabras código de la secuencia. Por ejemplo, si se considera el caso de una matriz  $H_4$  y su versión binaria negada  $\overline{H_4}$ , se puede notar que en total se tienen 8 secuencias distintas:

$$H_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\overline{H_4} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Los códigos obtenidos a partir de las filas de matrices Hadamard son ampliamente usados para la detección y corrección de errores en sistemas que trabajan sobre canales muy ruidosos. La NASA usó estos códigos por primera vez en 1971 para transmitir fotos de Marte hacia la tierra mediante la sonda espacial Mariner 9. En la teoría de la modulación digital, las secuencias Hadamard pueden ser usadas para generar un conjunto de  $M=N$  señales ortogonales, y por tanto, un conjunto de  $M=2N$  señales biortogonales si se incluyen las versiones antípodas de las formas de onda, en una constelación  $N$  dimensional.

## 3.2 Constelaciones Multidimensionales

### 3.2.1 Introducción

Una constelación N-dimensional representa los  $M$  puntos de señal de su alfabeto  $A = \{a_j, 1 \leq j \leq M\}$ , como vectores o N-tuplas, donde  $a_j \in \mathbb{R}^N$ . Los parámetros básicos son su dimensión ( $N$ ), su tamaño ( $M$ ), su energía promedio ( $E(A) = \frac{1}{M} \sum_j \|a_j\|^2$ ) y su distancia mínima al cuadrado ( $d(A)^2$ ), la cual se considera una medida elemental de la resistencia al ruido [7].

### 3.2.2 Tipos de constelaciones N-dimensionales

**Constelación Ortogonal:** Surge al representar la información mediante  $M = N$  vectores ortogonales, de este modo, el tamaño de la constelación es igual al número de dimensiones. Al trazar las constelaciones para  $M = 2$  y  $M=3$  se obtiene un gráfico similar al de la Figura 3.1 [24].

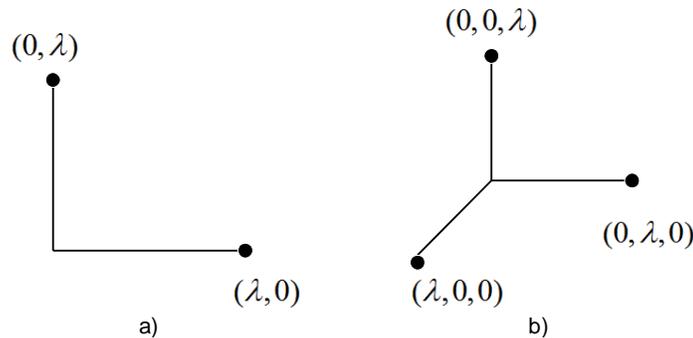


Figura 3.1. Constelaciones ortogonales. a)  $N=2$ , b)  $N=3$ .

**Constelación Biortogonal:** Ésta constelación duplica el tamaño del alfabeto respecto a la constelación ortogonal, mediante la inclusión de las versiones negadas de las señales, de esta manera se tiene  $M = 2N$  puntos. La Figura 3.2 muestra las constelaciones biortogonales para una, dos y tres dimensiones [24].

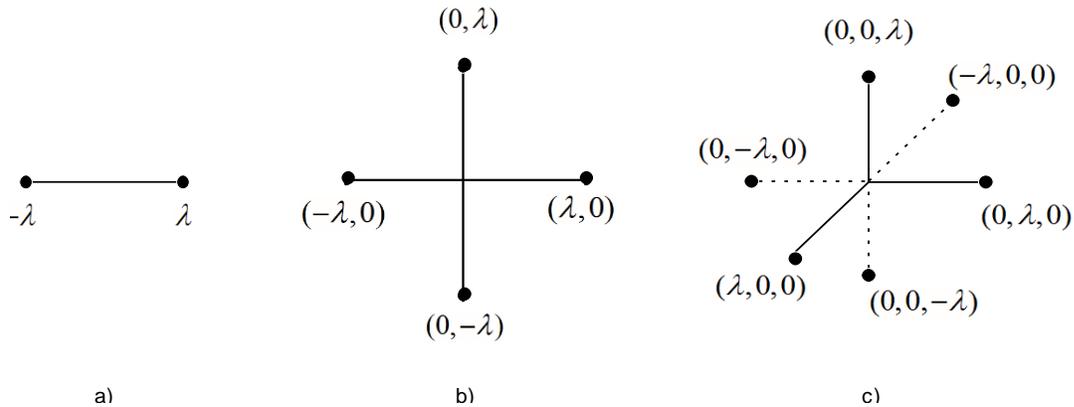


Figura 3.2. Constelaciones biortogonales. a) N=1, b) N=2, c) N=3.

**Constelación binaria:** Una constelación binaria N dimensional se conforma de dos posibles valores de igual magnitud pero signo contrario [24], la forma de éstos está dada por:  $(\pm\lambda, \pm\lambda, \dots, \pm\lambda)$ , donde geoméricamente, éste es el grupo de todos los  $2^N$  vértices de un N-cubo, centrado en el origen. En la Figura 3.3 se muestran constelaciones binarias en 1, 2 y 3 dimensiones [26].

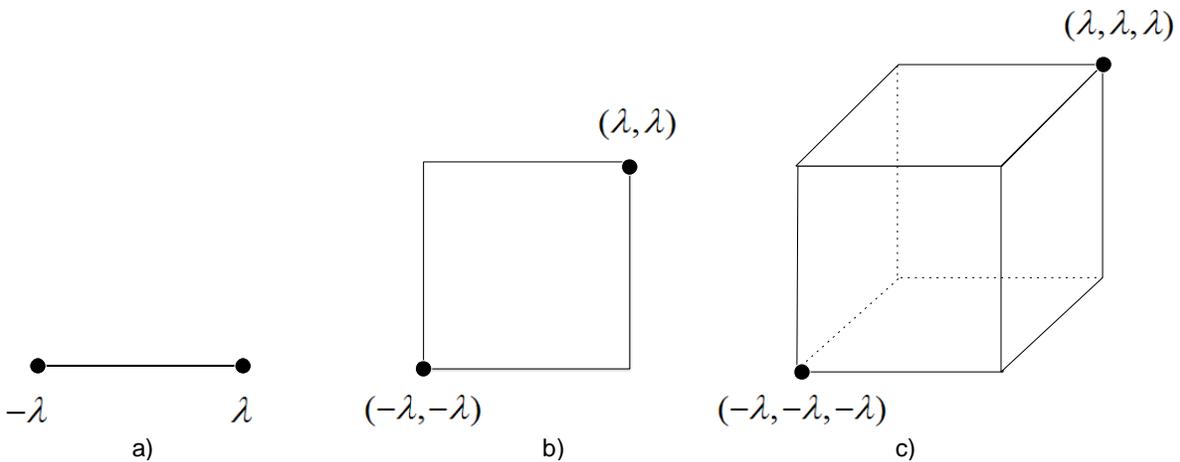


Figura 3.3. Constelaciones binarias para una (a), dos (b) y tres dimensiones (c).

### 3.3 Generalidades de la modulación N-dimensional.

En una modulación de N dimensiones, los datos binarios se representan mediante vectores reales de N componentes, posteriormente, estos vectores se convierten en señales analógicas adecuadas para la transmisión por el canal. El alfabeto consta de M vectores y un conjunto de N funciones mutuamente ortogonales, llamadas funciones base del esquema de modulación. Las funciones base del esquema N dimensional propuesto, se construyen a partir de una matriz Hadamard de orden N y versiones trasladadas ( $T$  veces) de un pulso en raíz de coseno alzado.

Sea  $\mathbf{a}[k] = [a_k^1 a_k^2 \dots a_k^N]^T$  el vector transmitido en el k-ésimo período de símbolo y sea  $\boldsymbol{\psi}_k(t)$  el conjunto de funciones base del esquema de modulación. La señal modulada es el proceso aleatorio dado por la ecuación (3.4):

$$X(t) = \sum_k [\mathbf{a}[k]]^T \begin{bmatrix} \psi_1(t - kT) \\ \vdots \\ \psi_N(t - kT) \end{bmatrix}, \quad (3.3)$$

$$X(t) = \sum_k \sum_{j=1}^N a_j[K] \psi_j(t - kT), \quad (3.4)$$

donde  $a_j[K]$  es el componente j-ésimo del símbolo  $\mathbf{a}[k]$  y  $\psi_j(t - kT)$  es el componente j-ésimo del vector de funciones base  $\boldsymbol{\psi}_k(t)$ .

La ecuación (3.4) indica la necesidad de disponer de N funciones base ortonormales para modular una secuencia de símbolos de N componentes.

Tras el paso de  $X(t)$  a través de un canal AWGN con densidad espectral de potencia  $N_0/2$ , se obtiene una señal  $R(t)$  a la entrada del receptor, dada por:

$$R(t) = X(t) + Z(t),$$

siendo  $Z(t)$  un proceso no correlacionado de ruido blanco Gaussiano.

El demodulador genera a partir de la señal recibida  $R(t)$  una secuencia de vectores  $\mathbf{q}[k]$  cuyos elementos contienen las coordenadas de  $R(t - kT)$  en la base utilizada en el modulador  $\{\psi_j(t), j = 1, \dots, N\}$ . Cada vector  $\mathbf{q}[k_0]$  de la secuencia  $\mathbf{q}[k]$  puede obtenerse mediante una estructura de filtros adaptados a partir del valor de  $R(t)$ , como se muestra en la Figura 3.4.

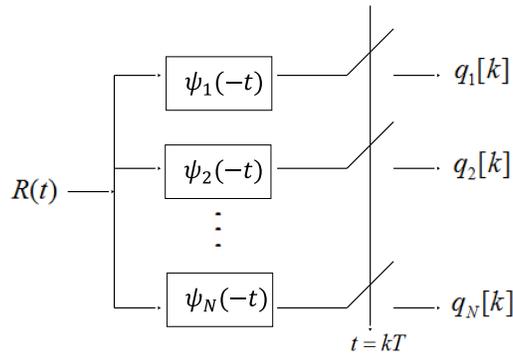


Figura 3.4. Estructura de filtros adaptados

Cada vector de la secuencia  $\mathbf{q}[k]$  es estadísticamente independiente de los demás vectores de la secuencia y contiene toda la información relevante para decidir sobre un símbolo de  $\mathbf{a}[k]$ . Esto es,  $\mathbf{q}[k]$  toma la forma:

$$\mathbf{q}[k] = \mathbf{a}[k] + \mathbf{Z}[k],$$

donde  $\mathbf{Z}[k]$ , componente de ruido, es un proceso estocástico discreto multidimensional Gaussiano cuyas muestras son estadísticamente independientes.

Como se mencionó en el capítulo 2, el decisor óptimo es un decisor MAP, el cual se reduce a un decisor ML por trabajar con símbolos equiprobables. En la Figura 3.5 se muestra el esquema de éste decisor.

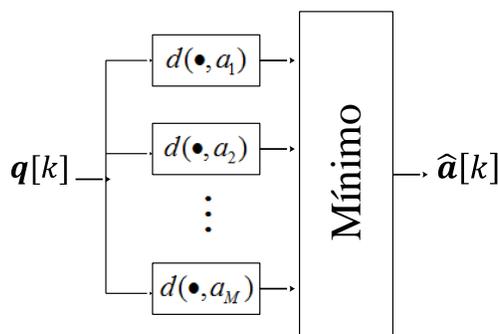


Figura 3.5. Decisor según el criterio de distancia mínima.

Finalmente la secuencia de símbolos a la salida del decisor,  $\hat{a}[k]$ , se transforma en una secuencia de bits, mediante un demapeador.

En la Figura 3.6 y la Figura 3.7 se muestran respectivamente los bloques del modulador y demodulador N dimensional basados en matrices de Hadamard.

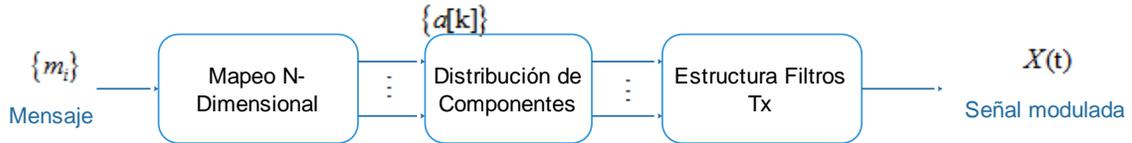


Figura 3.6. Modulador N-dimensional basado en matrices de Hadamard.

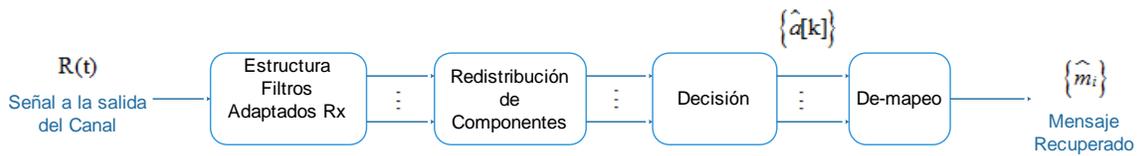


Figura 3.7. Demodulador N-dimensional basado en matrices de Hadamard.

## 3.4 Modulación en 2D y 4D basada en matrices de Hadamard

### 3.4.1 Modulación en 2D con constelación Biortogonal

Este esquema de modulación se construye a partir del conjunto de funciones base  $\psi_k(t)$  obtenidas como resultado de la operación entre un vector compuesto por un pulso SRRC, su versión trasladada ( $T$  unidades) y las filas de una matriz de Hadamard de orden 2, como se describe en la ecuación (3.5).

$$\boldsymbol{\psi}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p(t) \\ p(t-T) \end{bmatrix}, \quad (3.5)$$

$$\psi_1(t) = p(t) + p(t-T), \quad \psi_2(t) = p(t) - p(t-T), \quad (3.6)$$

$$\boldsymbol{\psi}(t) = \begin{bmatrix} \psi_1(t) \\ \psi_2(t) \end{bmatrix}. \quad (3.7)$$

Cabe notar que las funciones del vector  $\psi(t)$  descritas en la ecuación (3.7) son ortogonales entre sí y a sus versiones desplazadas en  $kT$  segundos; las funciones base deben cumplir la condición de ortonormalidad, para lo cual es necesario dividirles entre la raíz cuadrada de su energía definida por la ecuación (3.8) (éste cálculo es posible apreciar en el apéndice A):

$$E_{\psi} = \int_{-\infty}^{\infty} \|\psi_k(t)\|^2 dt = \sum_n c_n^2, \quad (3.8)$$

la cual indica que la energía de las funciones base del esquema de modulación depende únicamente de los coeficientes  $c_n$  proporcionados por los componentes de las filas de la matriz Hadamard. Por consiguiente, la energía para las funciones base del esquema de modulación en 2D es igual a  $E_{\psi} = 1^2 + 1^2 = 2$ .

Por tanto, el conjunto de funciones base normalizadas para el esquema en 2D, es igual a:

$$\psi(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \psi_1(t) \\ \psi_2(t) \end{bmatrix}. \quad (3.9)$$

La constelación del esquema de modulación está representada en la Figura 3.8 está compuesta por 4 símbolos (transportando 2 bits por símbolo), representados por vectores de dos dimensiones, obtenidos a partir de la regla de mapeo de la Tabla 3.1 en la cual se emplea la codificación Gray, por tanto, el error en la detección de un símbolo equivale a la detección errada de sólo un bit.

Grupo de bits	Representación geométrica	Símbolo
00	$(\lambda, 0)$	$a_1$
01	$(0, \lambda)$	$a_2$
11	$(-\lambda, 0)$	$a_3$
10	$(0, -\lambda)$	$a_4$

Tabla 3.1. Mapeo de constelación 2D

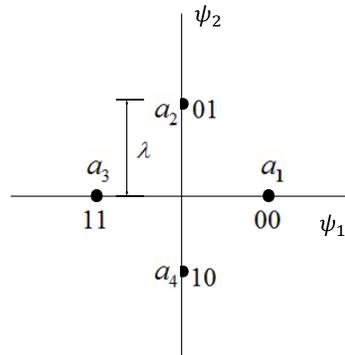


Figura 3.8. Constelación biortogonal en 2D.

Para una mejor comprensión del funcionamiento del esquema de modulación, se considera por ejemplo una secuencia mensaje de la forma:  $\vec{m} = 1011001000 \dots$ , el cual se mapea según la regla establecida en la Tabla 3.1. La señal modulada (para los primeros 5 símbolos) se conforma como se muestra en la Figura 3.9.

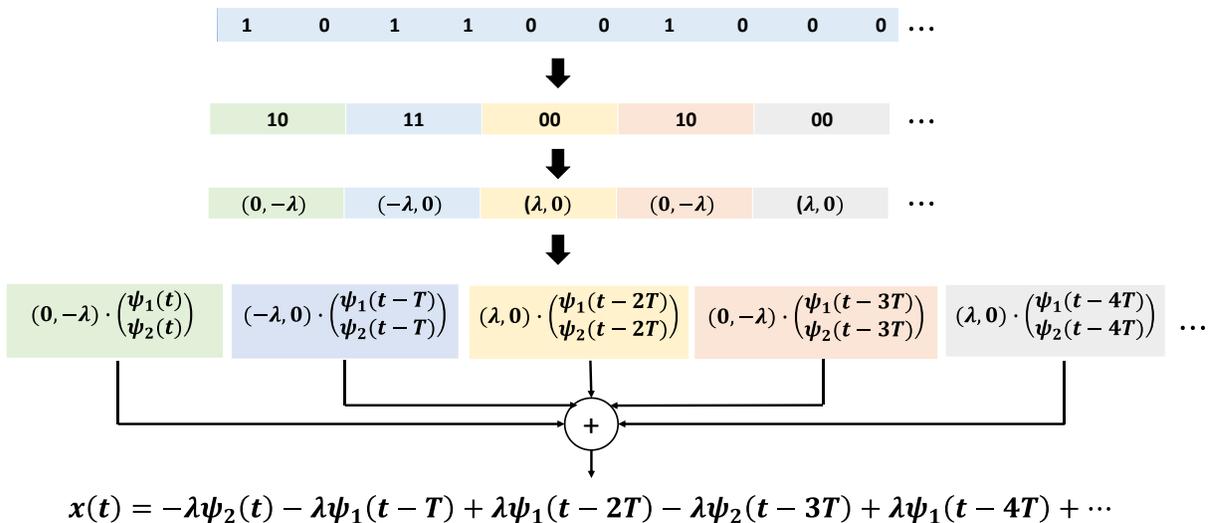


Figura 3.9. Ejemplo de conformación de la señal modulada en 2D

A cada símbolo se le asigna su correspondiente representación geométrica acorde a los grupos de bits establecidos (Tabla 3.1) y posterior a esto se multiplica por la base correspondiente.

En la Figura 3.10 y la Figura 3.11 se muestran respectivamente los bloques del modulador y demodulador en 2D basados en matrices Hadamard.

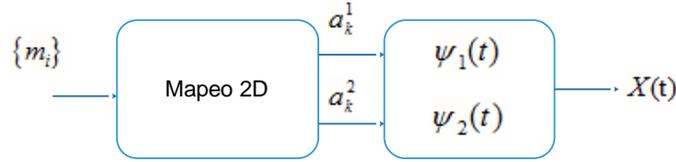


Figura 3.10. Modulador bidimensional basado en matrices Hadamard



Figura 3.11. Demodulador bidimensional basado en matrices Hadamard

### 3.4.2 Modulación en 4D con constelación biortogonal

Este esquema de modulación representa la secuencia de bits mediante vectores con componentes en 4 dimensiones, las funciones base del espacio de señal, surgen como el producto entre una matriz Hadamard de orden 4 ( $H_4$ ) y un vector columna (4x1) que contiene versiones desplazadas  $T$  veces (período de símbolo) de un pulso SRRC, como se describe en la ecuación (3.10).

$$\boldsymbol{\psi}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p(t) \\ p(t-T) \\ p(t-2T) \\ p(t-3T) \end{bmatrix}. \quad (3.10)$$

El conjunto base  $\boldsymbol{\psi}(t)$  y las funciones que lo constituyen quedan conformados como indican las ecuaciones (3.11) y (3.12) respectivamente.

$$\begin{aligned} \psi_1(t) &= p(t) + p(t-T) + p(t-2T) + p(t-3T), \\ \psi_2(t) &= p(t) - p(t-T) + p(t-2T) - p(t-3T), \\ \psi_3(t) &= p(t) + p(t-T) - p(t-2T) - p(t-3T), \\ \psi_4(t) &= p(t) - p(t-T) - p(t-2T) + p(t-3T), \end{aligned} \quad (3.11)$$

$$\boldsymbol{\psi}(t) = \begin{bmatrix} \psi_1(t) \\ \psi_2(t) \\ \psi_3(t) \\ \psi_4(t) \end{bmatrix}, \quad (3.12)$$

al igual que en el esquema de 2 dimensiones, las funciones ortogonales se normalizan, al dividirles entre la raíz cuadrada de su energía ( $\sqrt{4}$ ), calculada a partir de la ecuación (3.9), obteniendo así:

$$\boldsymbol{\psi}(t) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \psi_1(t) \\ \psi_2(t) \\ \psi_3(t) \\ \psi_4(t) \end{bmatrix}. \quad (3.13)$$

La constelación del esquema de modulación biortogonal en 4 dimensiones, está compuesta por 8 símbolos (3 bits por símbolo), representados por vectores en 4 dimensiones obtenidos a partir de la regla de mapeo de la Tabla 3.2.

Grupo de bits	Representación Vectorial	Símbolo
000	$(\lambda, 0, 0, 0)$	$a_1$
010	$(0, \lambda, 0, 0)$	$a_2$
110	$(0, 0, \lambda, 0)$	$a_3$
011	$(0, 0, 0, \lambda)$	$a_4$
111	$(-\lambda, 0, 0, 0)$	$a_5$
101	$(0, -\lambda, 0, 0)$	$a_6$
001	$(0, 0, -\lambda, 0)$	$a_7$
100	$(0, 0, 0, -\lambda)$	$a_8$

Tabla 3.2. Mapeo de constelación 4D

La regla de mapeo establecida para este esquema no puede emplear codificación Gray, dado que cada símbolo dentro de la constelación, se encuentra a una distancia mínima de  $d = \sqrt{2}\lambda$  respecto a los símbolos vecinos, y a una distancia de  $d = 2\lambda$  respecto a su versión antípoda. Bajo estas consideraciones se decide asignar a las versiones antípodas, el grupo de bits que presente el mayor número de cambios

simultáneos, es decir en este caso, cuando cambien 3 bits simultáneamente, así, se garantiza que al errar en un símbolo, se detecten de manera errada 1 o 2 bits.

Por ejemplo, dado el vector mensaje anteriormente utilizado  $\vec{m} = 101100100001 \dots$  al mapearlo según la Tabla 3.2. La señal modulada para los primeros 4 símbolos se conforman como se muestra en la Figura 3.12.

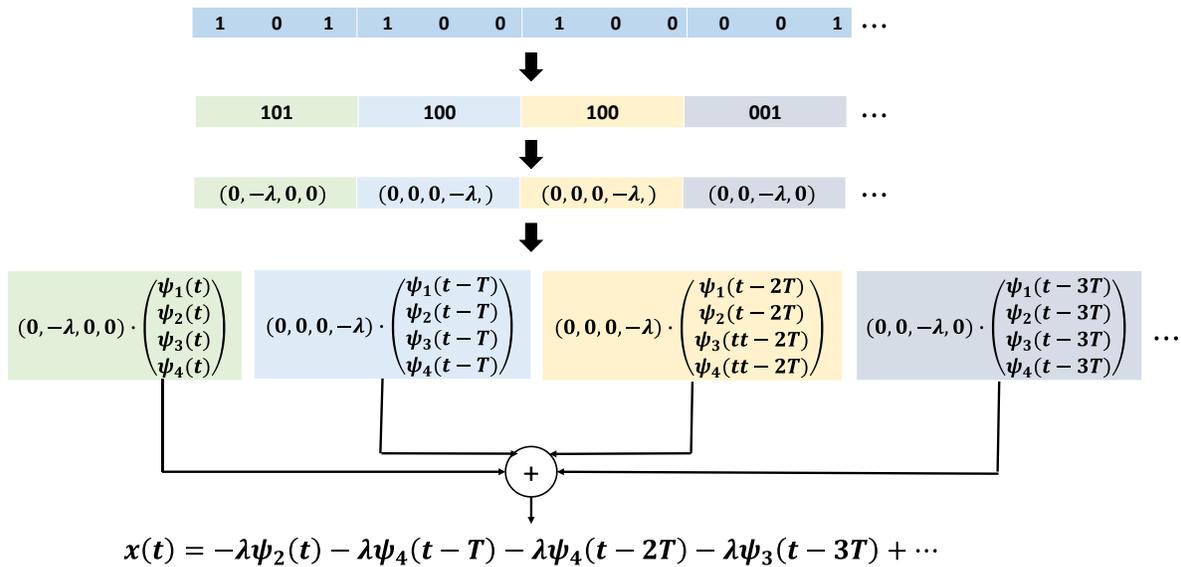


Figura 3.12. Conformación de la señal modulada en 4 dimensiones para los primeros cuatro símbolos

Siendo  $x(t)$  una función muestra de la señal modulada en un espacio biortogonal en 4 dimensiones.

En la Figura 3.13 y la Figura 3.14 respectivamente se muestran los bloques del modulador y demodulador en 4D basados en matrices Hadamard.

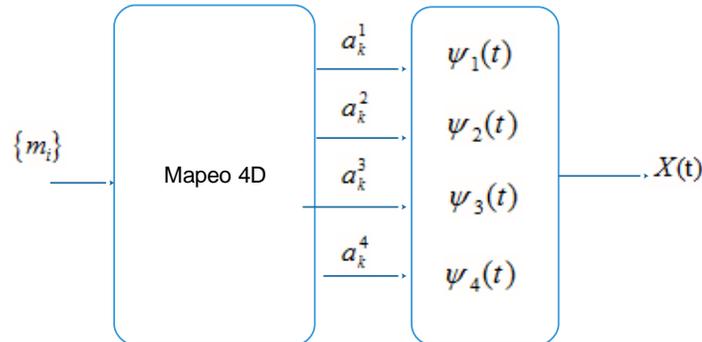


Figura 3.13. Modulador tetra-dimensional basado en matrices Hadamard

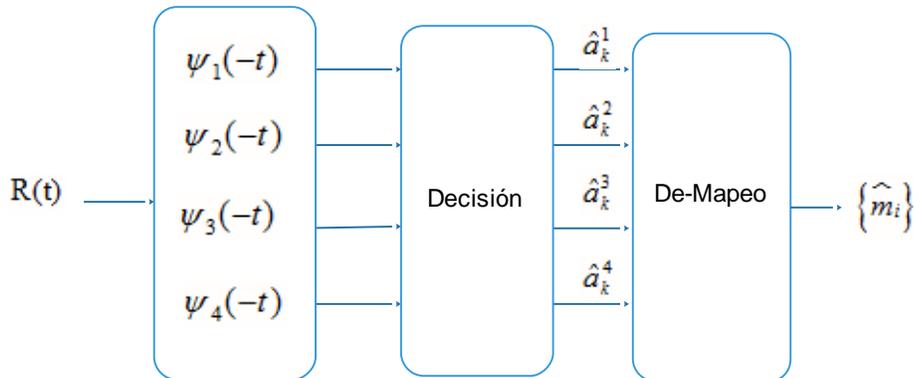


Figura 3.14. Demodulador tetra-dimensional basado en matrices Hadamard

### 3.4.3 Análisis teórico del desempeño frente al ruido de los esquemas de modulación N- dimensionales.

A continuación se realiza el cálculo teórico de la ganancia de codificación nominal correspondiente a cada uno de los esquemas de modulación. La ganancia de codificación compara dos sistemas que transmiten el mismo número de bits por dimensión, especificando la mejora de una constelación sobre otra [24]; La estimación de fronteras de unión (UBE) permite hallar ésta ganancia de codificación, la cual está definida como [26]:

$$\gamma_c = \frac{d^2}{4E_b}, \quad (3.14)$$

siendo  $E_b$  la energía de bit y  $d$  la distancia mínima euclidiana entre elementos de la constelación. La estimación de fronteras de unión es una técnica para obtener la probabilidad de error de bit  $P_b$  en función de  $E_b/N_o$  en esquemas de modulación M-arios.

Supuestos iniciales:

- 1) Se satisface el criterio de Nyquist para evitar ISI:

$$r_k = a_k + z_k.$$

- 2) La regla de decisión es la de distancia mínima.

$$P_s \cong k_v Q\left(\frac{d}{2\sigma}\right), \text{ donde:}$$

- $Q(x) = \int_x^\infty \frac{e^{-\frac{u^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} du.$
- $\sigma = \sqrt{\frac{N_o}{2}}$ , desviación estándar de ruido AWGN.
- $k_v$ : Número promedio de vecinos de cada símbolo.

### Ganancia de codificación para esquema de modulación en 2D

La distancia mínima entre símbolos en la constelación bidimensional es  $d = \sqrt{2}\lambda$ , como se indica en la Figura 3.15.

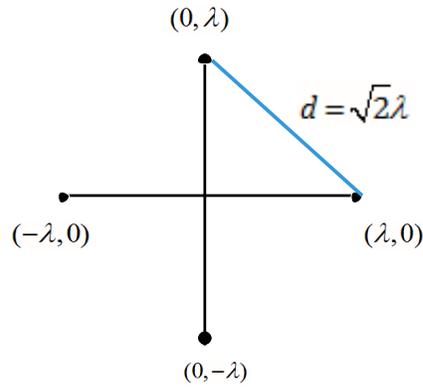


Figura 3.15. Distancia mínima de constelación en 2D.

El cálculo de la energía de bit, en función de la energía de símbolo es:

$$E_b = \frac{E_s}{\log_2 M} = \frac{\sum_{i=1}^M \|a_i\|^2 \Pr\{a_k = a_i\}}{\log_2 M},$$

$$E_b = \frac{E_s}{2} = \frac{1}{2} \left\{ 4 \left( \frac{1}{4} * \lambda^2 \right) \right\},$$

$$E_b = \frac{\lambda^2}{2},$$

reemplazando  $\lambda$  en función de  $d$ :

$$E_b = \frac{1}{2} \left( \frac{d}{\sqrt{2}} \right)^2 = \frac{1}{4} d^2,$$

por tanto:

$$d = 2\sqrt{E_b}. \tag{3.15}$$

El valor hallado de  $d$  en función de la energía de bit, se reemplaza en la ecuación (3.14) para determinar el valor de ganancia de éste esquema de modulación:

$$\gamma_c = \frac{d^2}{4E_b} = \frac{(2\sqrt{E_b})^2}{4E_b} = 1, \tag{3.16}$$

por tanto la ganancia de codificación nominal del esquema en 2D es de 0 dB respecto a 2-PAM.

### Ganancia de codificación para esquema de modulación en 4D

La distancia entre dos vectores  $x, y \in \mathbb{R}^n$  se define como el número real no negativo [27]:

$$D(x, y) = \|x - y\|.$$

Los puntos de la constelación del esquema en 4D se ubican en 8 de los 16 vértices de un tesseracto. La distancia para puntos de señal ortogonales entre sí, está dada por:  $d = \sqrt{2}\lambda$ , siendo ésta la distancia mínima posible, ya que un punto de señal se encuentra a una distancia  $d = 2\lambda$  de su versión antípoda.

El cálculo de la energía de bit en función de la energía de símbolo es:

$$E_b = \frac{E_s}{\log_2 M} = \frac{\sum_{i=1}^M \|a_i\|^2 \Pr\{a_k = a_i\}}{\log_2 M},$$

$$E_b = \frac{E_s}{3} = \frac{1}{3} \left\{ 8 \left( \frac{1}{8} * \lambda^2 \right) \right\},$$

$$E_b = \frac{\lambda^2}{3},$$

al reemplazar  $\lambda$  en función de  $d$ :

$$E_b = \frac{1}{3} \left( \frac{d}{\sqrt{2}} \right)^2 = \frac{d^2}{6},$$

por tanto:

$$d = \sqrt{6E_b}. \tag{3.17}$$

Al reemplazar éste valor en la ecuación (3.14) se tiene:

$$\gamma_c = \frac{d^2}{4E_b} = \frac{(\sqrt{6E_b})^2}{4E_b} = \frac{3}{2}, \quad (3.18)$$

valor en veces, que equivale a una ganancia de codificación teórica de 1.76 dB respecto del esquema de modulación 2-PAM.



## 4. Diseño y simulación

### 4.1 Metodología

Tal como se había planteado en el Anteproyecto de grado y con la finalidad de cumplir satisfactoriamente los objetivos propuestos el modelo metodológico empleado es el modelo en cascada o modelo lineal, el cual sugiere un enfoque sistemático secuencial para el desarrollo de las siguientes fases:

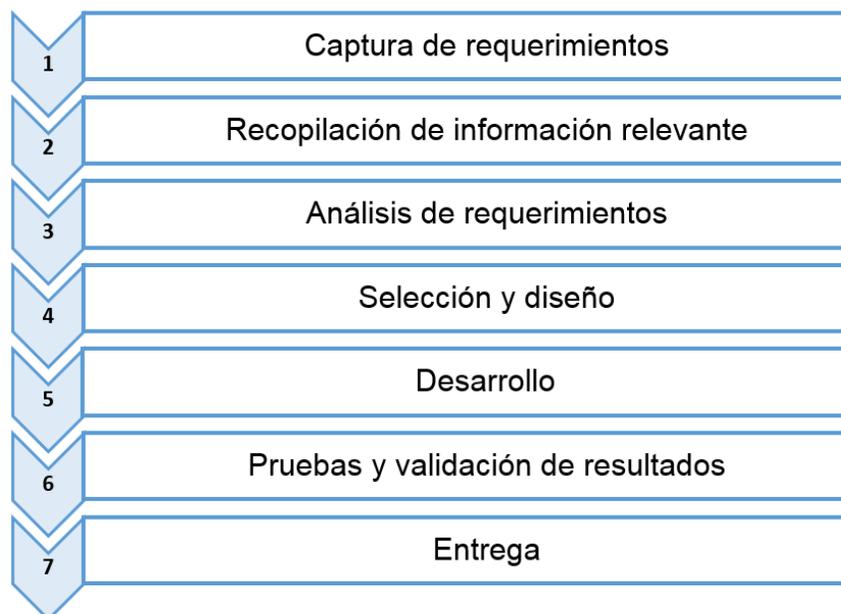


Figura 4.1. Metodología de trabajo

### 4.2 Análisis de requerimientos

Los requisitos necesarios para el cumplimiento del objetivo general se sintetizan en:

- Describir matemáticamente la modulación y demodulación correspondientes a los esquemas de modulación propuestos.

- Analizar la tasa de error de bit (BER) cuando la transmisión se realiza sobre un canal con ruido blanco aditivo gaussiano (AWGN).
- Determinar la eficiencia espectral de los esquemas de modulación propuestos mediante la herramienta de simulación MATLAB.

## 4.3 Diseño

### 4.3.1 Descripción del sistema

El algoritmo de simulación del esquema de modulación N dimensional basado en matrices de Hadamard, consiste en generar una secuencia discreta de símbolos aleatorios, la cual posteriormente se module y atravesase de manera exitosa un canal ruidoso; a partir de la señal ruidosa en el receptor, debe ser posible recuperar los datos transmitidos por la fuente. El sistema se divide en transmisor, canal y receptor.

Los símbolos generados aleatoriamente representan la fuente de información, en el proceso de modulación se convierten los datos discretos en una señal discreta en tiempo y de amplitud continua, con una tasa de muestreo mayor a la del mensaje original.

En el canal, se genera el proceso estocástico de ruido blanco aditivo gaussiano (AWGN), para superponerlo a la señal modulada; la potencia de la señal de ruido se define en términos de una relación señal a ruido establecida con anterioridad.

En recepción se tiene la función de recuperar los datos enviados por la fuente, reduciendo la probabilidad de detección errada en este proceso.

Mediante el algoritmo desarrollado para el esquema de modulación N dimensional basado en matrices de Hadamard, se busca principalmente determinar la posibilidad de obtener un mejor desempeño al de la modulación 2-PAM en un sistema de comunicaciones ante la presencia de ruido, analizando parámetros como la tasa de error de bit (BER) para una relación energía de bit a densidad de ruido ( $E_b/N_0$ ) dada a la entrada del receptor. Para comprobar el comportamiento anteriormente mencionado, es necesario determinar como supuestos válidos para la simulación:

- El canal AWGN es un canal de comportamiento lineal invariante en el tiempo, cuya respuesta en frecuencia se asemeja a la de un filtro pasa bajo ideal con un ancho de banda mayor al de la señal modulada; la perturbación introducida por el canal es el ruido blanco aditivo Gaussiano.
- Los símbolos generados presentan el mayor grado de incertidumbre posible, es decir son equiprobables.
- El ruido blanco (con igual presencia en todas las bandas de frecuencia), presenta una potencia de ruido en cada banda, proporcional al ancho de banda.
- El criterio bajo el cual trabaja el decisor es el de máxima verosimilitud, su regla de decisión es la de distancia mínima entre la muestra recibida y los posibles valores del alfabeto, seleccionando la menor distancia obtenida de entre todas las comparaciones realizadas.
- La sincronización, entre la señal discreta obtenida a la salida del transmisor y la que llega al receptor, es perfecta, por tanto, las muestras de la señal recibida corresponden a las muestras de la señal transmitida más el ruido añadido por el canal.
- La codificación Gray se asume para el esquema de modulación 2D, con lo que se obtiene  $BER = SER/\log_2 M$ .
- Se supone la energía de símbolo como  $E_s = E_b \log_2 M$
- Cada simulación se ejecuta con una secuencia mensaje distinto.

#### 4.3.2 Identificación de variables

VARIABLES DE ENTRADA:

- *Alfabeto*: conjunto de símbolos mensaje generados de manera aleatoria, con la característica de ser equiprobables.
- *Mensaje original*: secuencia discreta a transmitir a través del canal.
- *Forma de onda base*: forma de onda empleada para modular la información; se emplean dos y cuatro formas de onda base, para la modulación en 2D y 4D respectivamente.

- *Relación energía de bit a densidad espectral de ruido ( $E_b/N_0$ ):* medida a la entrada del receptor indica qué tan fuerte es la señal, así como también determina la potencia de ruido que el canal introduce a la señal modulada.

Variables de salida:

- *Tasa de error de bit (BER):* cociente entre el número de bits recibidos erróneamente y el número total de bits transmitidos. Se obtiene tras comparar posición a posición el vector del mensaje original transmitido con el vector mensaje recibido.
- *Eficiencia espectral ( $\rho$ ):* capacidad de confinar una determinada tasa de bit en un ancho de banda.
- *Gráficas ilustrativas:* diagrama de constelación y diagrama de ojo, para el esquema en dos dimensiones y el espectro de la señal transmitida para ambos esquemas de modulación.

### **4.3.3 Modelo del sistema**

En la Figura 4.2 y la Figura 4.3 se muestran los bloques del algoritmo de simulación correspondiente al esquema de modulación en 2D y 4D respectivamente. La funcionalidad de los bloques del algoritmo de simulación para ambos esquemas es la misma.

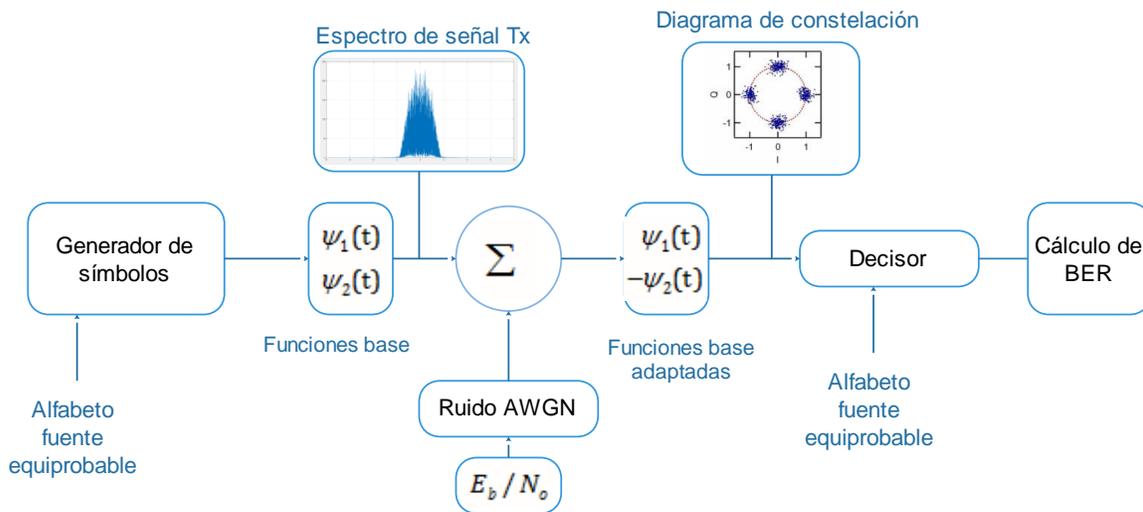


Figura 4.2. Bloques del algoritmo de simulación del esquema en 2D

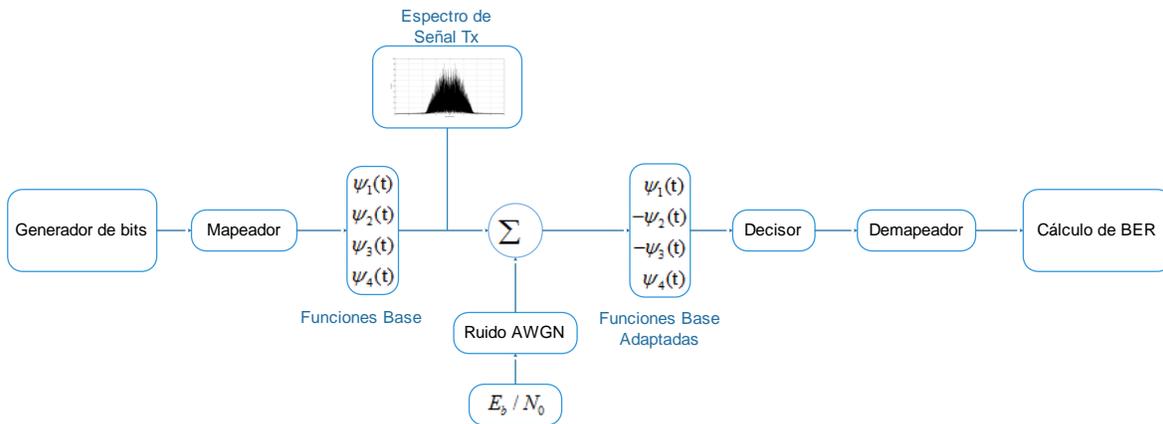


Figura 4.3. Bloques del algoritmo de simulación del esquema en 4D

- Generador de símbolos:** En éste bloque se generan los símbolos a transmitir. La función de matlab empleada para este proceso es *randsrc*, la cual, acorde al número de símbolos ingresado, genera un vector aleatorio, compuesto de símbolos independientes y equiprobables. Cabe aclarar que estos símbolos son sobremuestreados empleando la función *upsample* de Matlab

Para obtener una secuencia aleatoria de símbolos pertenecientes a la constelación biortogonal en dos dimensiones, se hace uso de los números complejos, ya que éstos pueden ser vistos como vectores de dos componentes, una real y otra imaginaria. De esta forma, se reduce la carga computacional del algoritmo, al evitar el proceso de mapeo de bits a símbolos.

- *Mapeador*: En el caso del esquema de modulación en cuatro dimensiones, es necesario generar primero una secuencia aleatoria de bits y mapearlos en los símbolos pertenecientes al alfabeto fuente de éste esquema, esto se realiza debido a la imposibilidad de aplicar codificación Gray a los símbolos de la constelación en 4D.
- *Formas de onda generadoras del espacio de señal*: En esta parte del algoritmo se construyen las funciones base del esquema de modulación que se emplean para modular el mensaje a ser transmitido; como se contempla en la Figura 4.4 la forma de pulso destinada para éste propósito es el pulso en raíz de coseno alzado. La longitud del filtro implementado es de 8 duraciones de símbolo, con un valor de sobremuestreo de 8 en el caso del esquema en 2D, y de 4 para el esquema en 4D. La función empleada en matlab para la implementación del pulso SRRC es `rcosdesign` la cual tiene como parámetros de entrada el factor de roll-off, la longitud del filtro en duraciones de símbolo y el factor de upsampling.

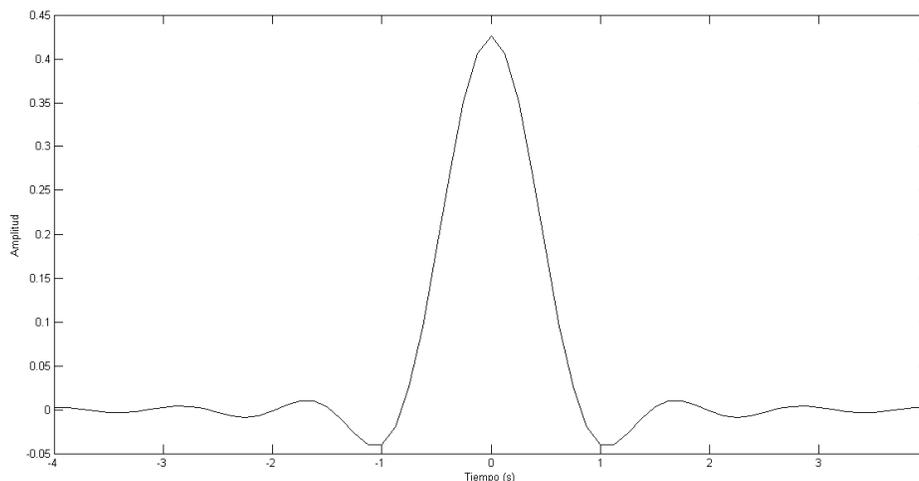


Figura 4.4. Pulso en raíz de Coseno Alzado

En la Figura 4.5 se observan las formas de onda generadoras y sus versiones antípodas para el esquema en 2D obtenidas en el presente trabajo de grado.

Vale la pena destacar que éstas funciones, son sobremuestreadas, de tal manera que el total de muestras para cada función, coincide con el sobremuestreo aplicado a cada símbolo transmitido. Una forma de onda generadora se encarga de modular la parte real y la otra la parte imaginaria del mensaje original.

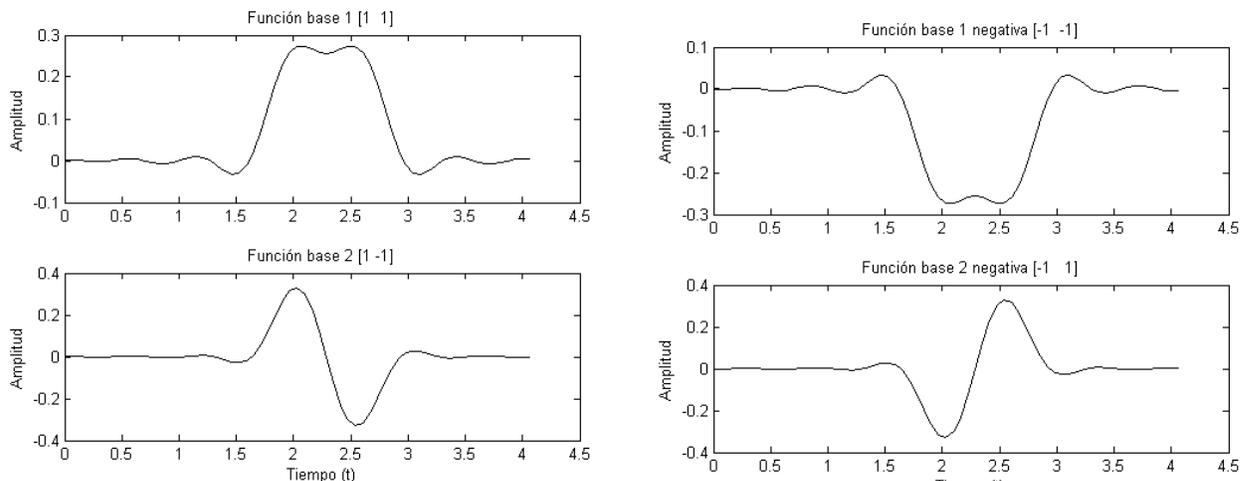


Figura 4.5. Funciones base del esquema en 2D (izquierda) y sus versiones negadas (derecha).

En la Figura 4.6 se observan las formas de onda base y sus versiones antípodas para el esquema en 4D. Cada función base se encarga de modular una de las componentes del vector símbolo tetradimensional.

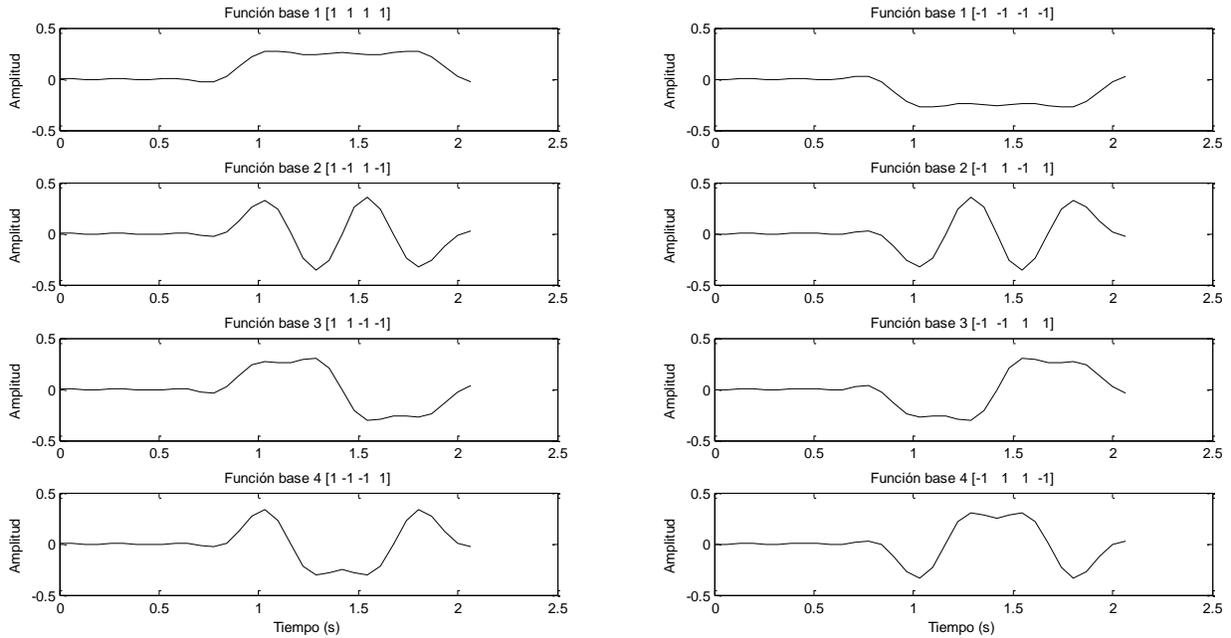


Figura 4.6. Funciones base del esquema en 4D (izquierda) y sus versiones negadas (derecha).

- **Ruido AWGN:** A la señal modulada resultante se le adiciona ruido AWGN, teniendo en cuenta la relación señal a ruido ( $SNR$ ) por muestra, la cual se expresa en función de  $E_b/N_0$ ; el cálculo de éste valor se realiza considerando que la relación  $SNR$  puede ser vista como la potencia de la señal dividida entre la potencia de ruido en la banda nominal [7].

$$SNR = \frac{P_s}{P_N} = \frac{E_s R}{N_0 f_s / 2} = \frac{2E_s R}{N_0 f_s}, \quad (4.1)$$

al definir la frecuencia de muestreo ( $f_s$ ) en función del factor de sobremuestreo ( $U$ ) y la tasa de símbolo ( $R$ ), se tiene:

$$f_s = \frac{16 \text{muestras}}{\text{seg}} = U \frac{\text{muestras}}{\text{símbolo}} * R \frac{\text{símbolo}}{\text{seg}}.$$

Reemplazando esta equivalencia en (4.1) queda:

$$SNR = \frac{2E_s R}{N_0 UR} = \frac{2E_s}{N_0 U} = \frac{2}{U} \log_2 M \frac{E_b}{N_0},$$

$$SNR_{[dB]} = \left( \frac{E_b}{N_0} \right)_{[dB]} + 10 \log \left( \frac{2}{U} \right) + 10 \log(\log_2 M). \quad (4.2)$$

Con la ecuación (4.2), se calcula el valor correspondiente de la relación señal a ruido, en función de  $E_b/N_0$ , el factor de sobremuestreo  $U$ , y el tamaño del alfabeto  $M$  [28].

- *Funciones base adaptadas:* Al llegar al receptor la señal contaminada con ruido, pasa a través de una estructura de filtros adaptados<sup>5</sup>, así, la parte real e imaginaria de la señal recibida, se separan utilizando la correspondiente versión invertida en el tiempo de la forma de onda generadora empleada para su transmisión.
- *Decisor:* Una vez obtenido el mensaje estimado, mediante la función *downsample* se decrementa la tasa de muestreo, manteniendo cada enésima muestra e iniciando con la posición que se considere como el instante óptimo de muestreo. Una gran ventaja de la constelación biortogonal es la simplicidad con la que se puede implementar la regla de decisión en el algoritmo, pues basta con encontrar la componente del símbolo con mayor valor absoluto, asignarle el signo correspondiente al mismo y asociarlo con algún caso particular del alfabeto. Por ejemplo, si al realizar el downsampling de la señal a la salida del filtro adaptado en el esquema en 2D se tiene un vector  $u=[0.125 \ 0.81]$ , entonces el decisor lo asocia al símbolo  $s=[0 \ 1]$ . El algoritmo de decisión en el caso del esquema en 4D actúa de igual forma, diferenciándose únicamente por el número de componentes que se debe comparar, es decir cuatro.

<sup>5</sup> Filtro cuya respuesta al impulso es una versión retardada, invertida en el tiempo de una señal ortonormal  $\psi(t)$  [21].

- *Demapeador*: Este módulo se implementa únicamente para el esquema en cuatro dimensiones, con el fin de convertir los símbolos recibidos a tramas de bits.
- *Cálculo de BER*: Con el mensaje submuestreado recibido, se procede a realizar la comparación posición a posición con el mensaje original, a fin de obtener la tasa de error de bit.

## 4.4 Implementación y pruebas de validación

La herramienta elegida para implementar la simulación de los esquemas de modulación diseñados, es Matlab en su versión R2015a. La razón principal que justifica la elección de esta herramienta, además de la robustez de la misma, es la facilidad de manejo y el hecho de incluir muchas funciones útiles en el campo de las comunicaciones digitales.

### 4.4.1 Parámetros de las simulaciones

- Número de etapas en el algoritmo en 2D: 5
- Número de etapas en el algoritmo en 4D: 7
- Tasa de símbolo: 1 símbolo/segundo
- Frecuencia de muestreo en las simulaciones: 16R
- Número de iteraciones independientes para cada valor de  $E_b/N_0$ :
  - Para esquema en 2D: 10
  - Para esquema en 4D: 3
- Número de símbolos transmitidos en cada iteración:
  - Para esquema en 2D: 1000000
  - Para esquema en 4D: 1000000
- Tasa de error de bit: cociente entre el número de bits errados transmitidos y el número total de bits transmitidos.
- Ancho de banda: siendo  $X(f)$  la transformada de Fourier de la señal modulada, su ancho de banda, se calcula, realizando la suma cuadrática del valor absoluto de la mitad de las muestras de dicha transformada, acumulando el valor

obtenido, hasta alcanzar un valor de percentil de 99.95. Éste cálculo es válido, dado que la señal generada es puramente real, razón por la cual, su espectro es simétrico respecto al origen.

#### 4.4.2 Esquema de modulación biortogonal en 2D a partir de matrices de Hadamard

La constelación de éste esquema de modulación se constituye de cuatro puntos dispuestos en el plano bidimensional, cada uno a una distancia  $\lambda$  del origen. El alfabeto de la modulación es:

$$A = \left\{ \begin{bmatrix} \lambda \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\lambda \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ \lambda \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -\lambda \end{bmatrix} \right\}, \lambda > 0.$$

*Desempeño teórico:*

- *Ancho de banda nominal:* el ancho de banda nominal para un esquema de modulación N dimensional está dado por [28]:

$$B_0 = \frac{N}{2} R(1 + \beta).$$

Por tanto, para el esquema en 2D ( $N = 2, \beta = 0$ ) su valor es de:

$$B_0 = R.$$

- *Ganancia de codificación nominal:*

$$\gamma_c = 1 \equiv 0dB.$$

- *Probabilidad de error de bit teórica (UBE):*

$$P_b = Q \left( \sqrt{\frac{2E_b}{N_0}} \right).$$

- *Eficiencia espectral nominal:*

$$\rho_0 = \frac{R_b}{B_0} = \frac{R \log_2 M}{R} = 2 \text{ bps/Hz} \quad ; M = 4.$$

El cálculo de la probabilidad de error de bit teórica puede verse en el apéndice B.

### Resultados de la simulación:

En la Figura 4.7 y la Figura 4.8 se expone el mensaje transmitido y la señal modulada obtenida a partir de ese mensaje; se transmiten 100 símbolos para una mejor apreciación tanto del mensaje como de la señal modulada.

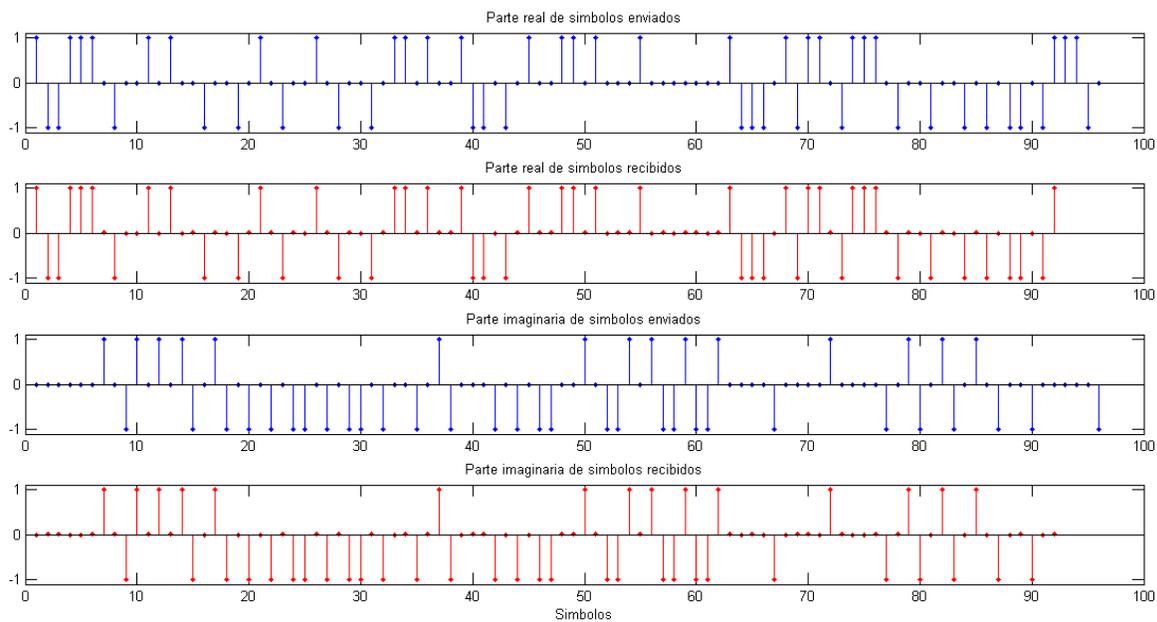


Figura 4.7. Parte real e imaginaria de los símbolos enviados en esquema en 2D

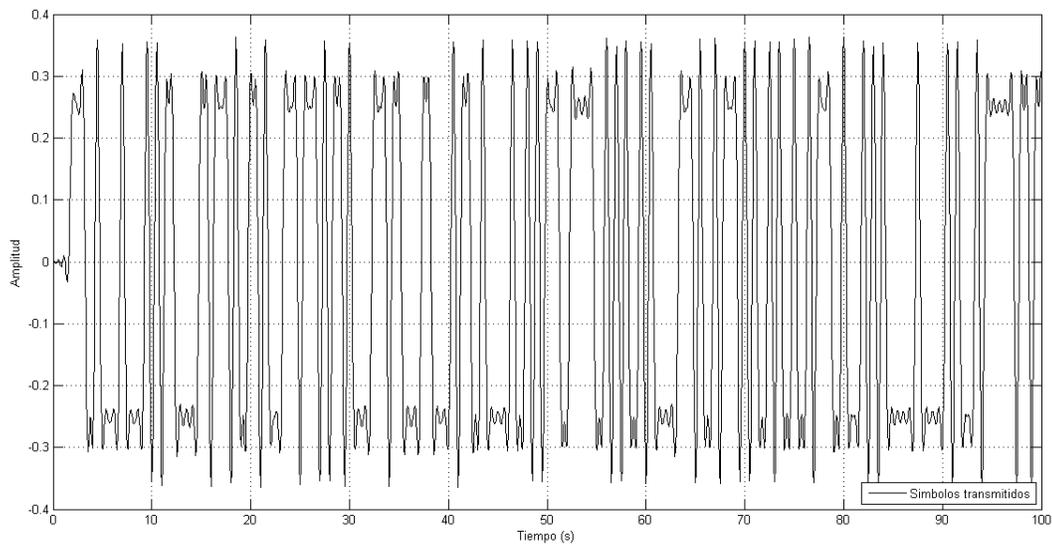


Figura 4.8. Señal modulada transmitida en esquema de modulación en 2D

En la Figura 4.9 aparece el ancho de banda correspondiente, el cual se calcula teniendo en cuenta el 99.95% de la energía contenida en el espectro de la señal, el factor de roll-off empleado en la simulación es de 0,75.

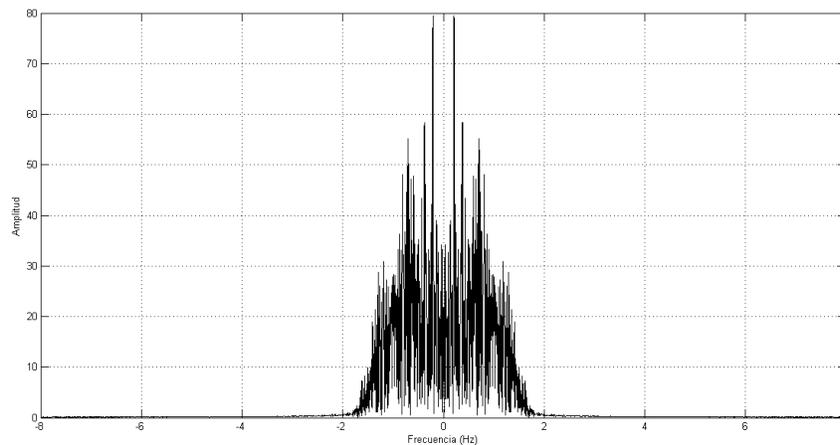


Figura 4.9. Ancho de banda resultante para esquema de modulación 2D.

El valor obtenido de ancho de banda es de: 1,4230 Hz, consecuentemente la eficiencia espectral en esta simulación es de 1,4054 bps/Hz.

En la Figura 4.10 se muestra la curva  $BER$  vs  $E_b/N_0$  obtenida al realizar la simulación con el presente esquema de modulación. De las curvas es posible afirmar que el esquema de modulación en 2D presenta el mismo desempeño frente al ruido que el esquema de modulación 2-PAM, por lo cual su ganancia de codificación efectiva es 0dB respecto a 2-PAM.

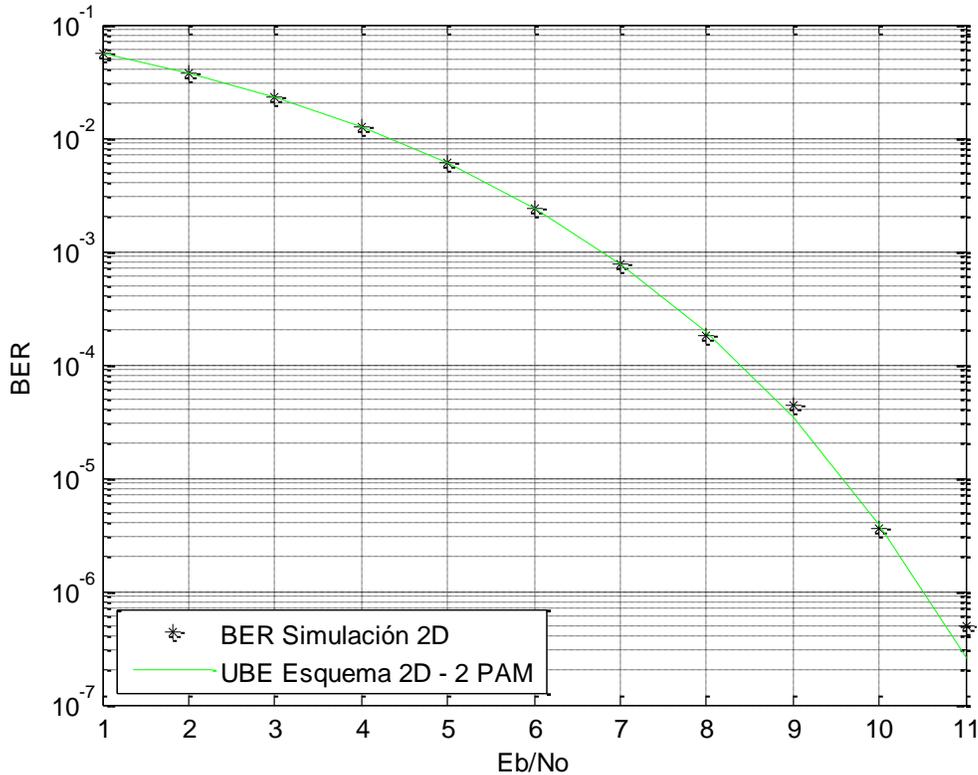


Figura 4.10. Curva BER vs  $E_b/N_0$  para esquema de modulación en 2D

Por otra parte, se evidencia que el cálculo de BER teórico obtenido a partir de la estimación de fronteras de unión (UBE), es aproximadamente el mismo al resultante a partir de las simulaciones realizadas.

#### 4.4.3 Esquema de modulación biortogonal en 4D a partir de matrices de Hadamard

La constelación de éste esquema de modulación se constituye de ocho puntos dispuestos en los ejes del espacio euclidiano  $\mathbb{R}^4$ , a una distancia  $\lambda$  del origen. Los símbolos se representan geoméricamente por los vectores:

$$A = \left\{ \begin{bmatrix} \lambda \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ \lambda \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \lambda \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \lambda \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\lambda \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -\lambda \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\lambda \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\lambda \end{bmatrix} \right\}, \lambda > 0.$$

*Desempeño teórico:*

- *Ancho de banda nominal:*

$$B_0 = 2R.$$

- *Ganancia de codificación nominal:*

$$\gamma_c = \frac{3}{2} \equiv 1,76dB.$$

- *Probabilidad de error teórica (UBE):*

$$P_b = 2Q \left( \sqrt{\frac{3E_b}{N_0}} \right).$$

- *Eficiencia espectral:*

$$\rho_0 = \frac{R_b}{B_0} = \frac{R \log_2 M}{2R} = \frac{3}{2} \text{ bps/Hz} \quad ; M = 8.$$

El cálculo de la probabilidad de error de bit teórica de este esquema puede apreciarse en el apéndice B.

### Resultados de la simulación:

En la Figura 4.11 se expone el mensaje transmitido y en la Figura 4.12 la señal modulada obtenida a partir del mensaje y el ancho de banda correspondiente.

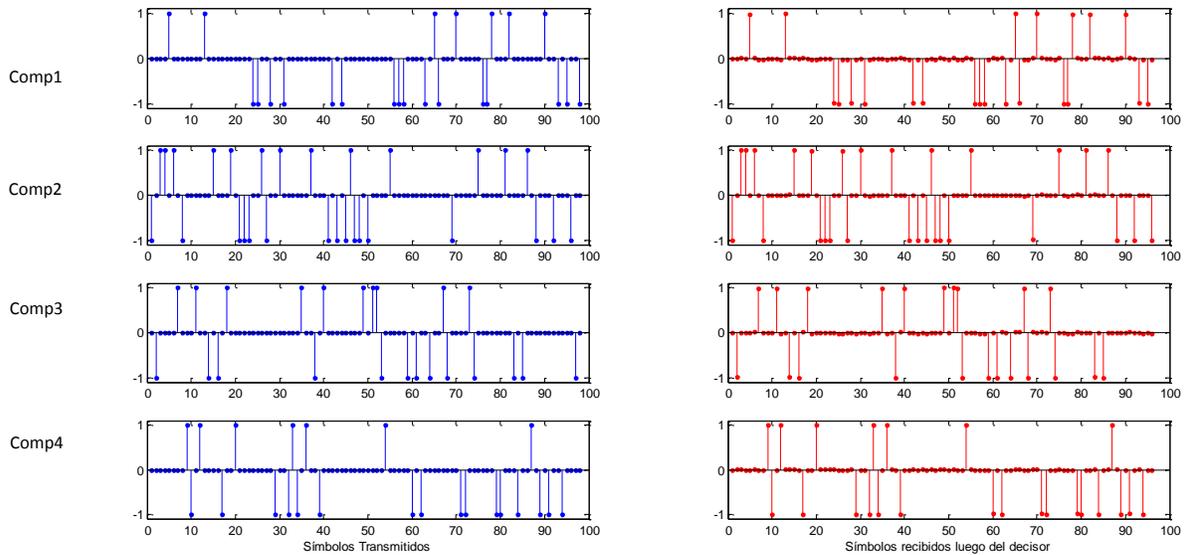


Figura 4.11. Componentes del mensaje enviado en esquema en 4D

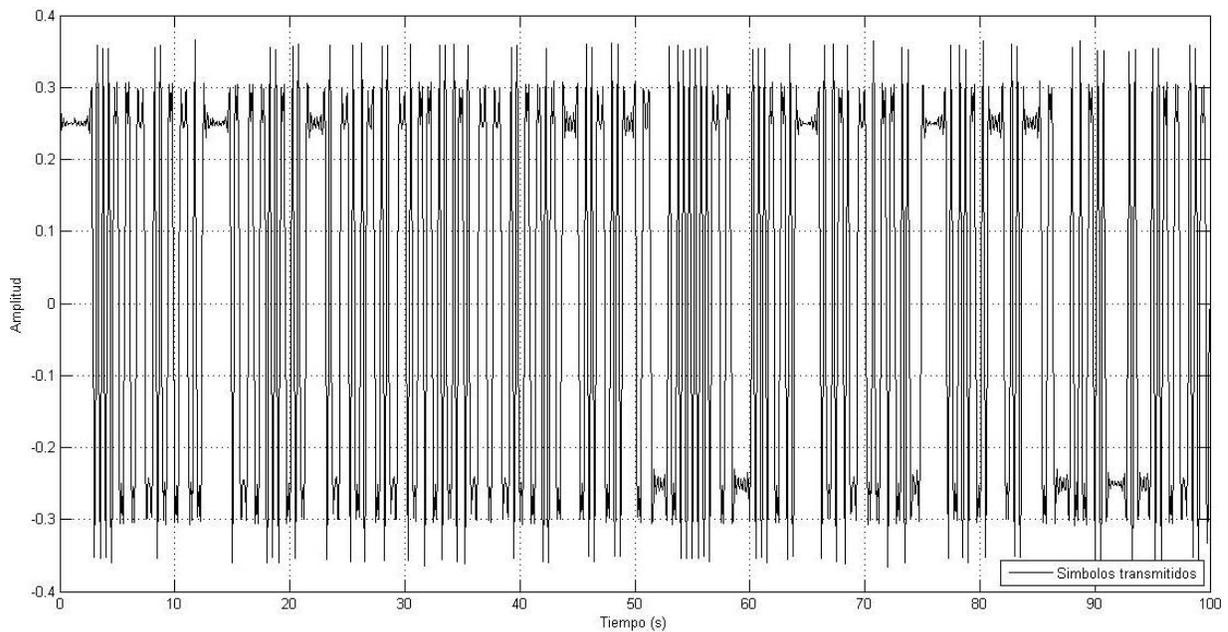


Figura 4.12. Señal modulada transmitida en esquema de modulación en 4D

El ancho de banda obtenido en esta simulación fue de: 2,9040 Hz, tal como se observa en la Figura 4.13, por tanto el valor de la eficiencia espectral correspondiente fue: 1,0330 bps/Hz; al igual que en el esquema en 2D, el factor de roll-off empleado fue de 0,75.

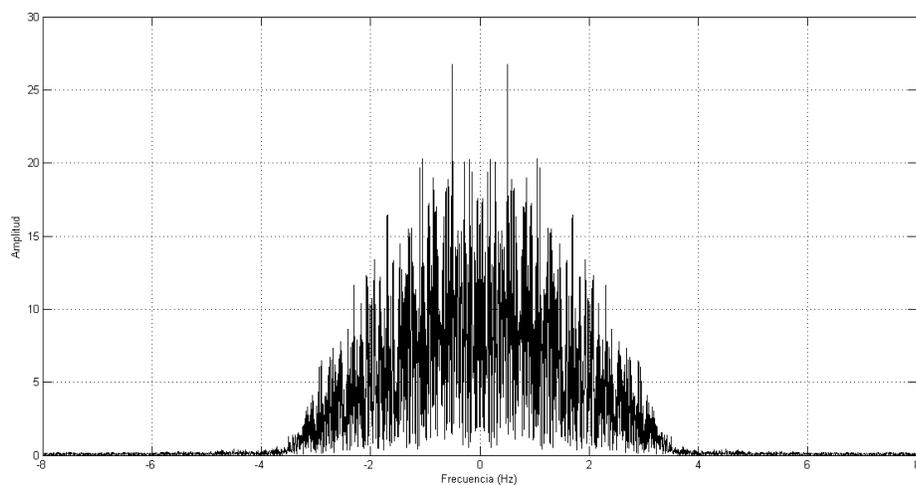


Figura 4.13. Ancho de banda resultante para esquema de modulación 4D.

En la Figura 4.14 se muestra la curva  $BER$  vs  $E_b/N_0$  obtenida al realizar la simulación con el esquema de modulación en 4D.

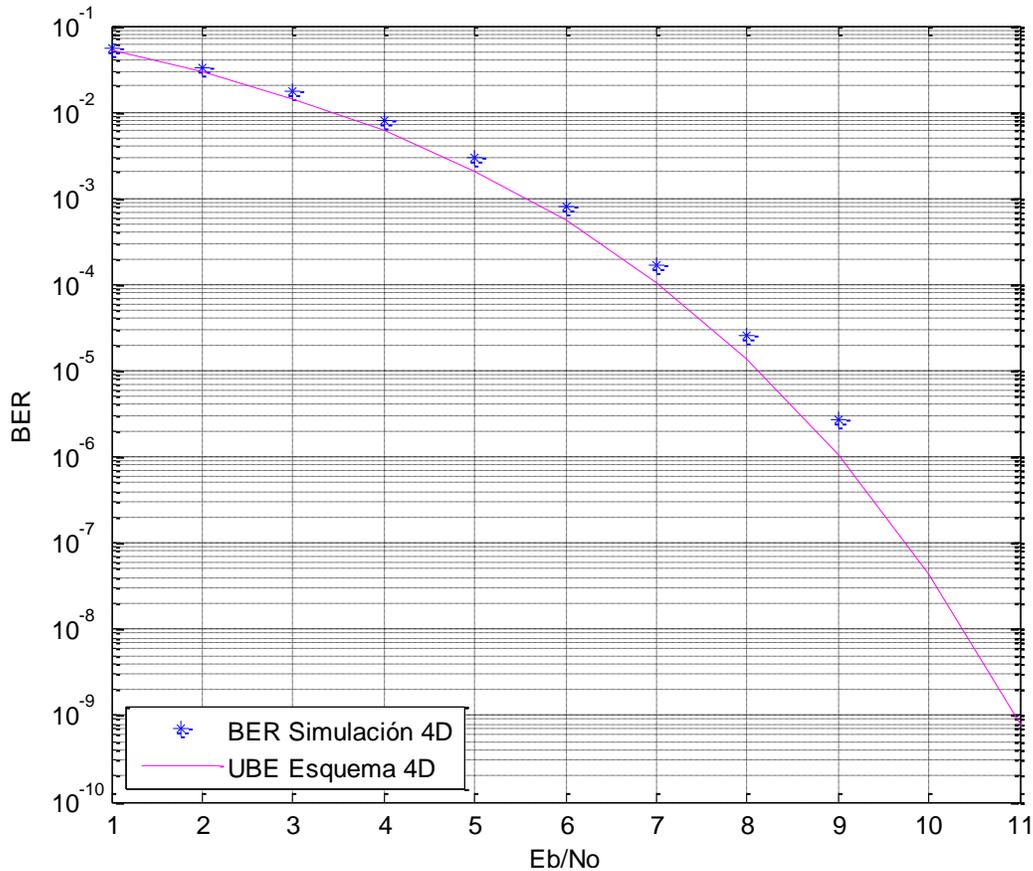


Figura 4.14. Curva BER vs  $E_b/N_0$  para esquema de modulación en 4D

De igual manera, la curva resultante a partir de simulación, se acerca en gran medida al comportamiento obtenido de la BER teórica; sin embargo, los valores de simulación se alejan de la curva teórica a medida que se incrementa la  $E_b/N_0$ .

#### 4.4.4 Pruebas de validación

Las pruebas de validación se realizan bajo condiciones inducidas, a partir de las cuales se busca analizar características específicas.

- *Prueba 1: Implementación del esquema de simulación sin presencia de ruido.*

A partir de esta simulación se espera que el mensaje recuperado se encuentre libre de errores; de igual manera, la secuencia de símbolos detectada a la entrada del decisor debe coincidir exactamente con la secuencia de símbolos transmitida. Mediante esta prueba se verifica que el diseño realizado de los bloques transmisor y receptor del esquema de modulación es correcto. El resultado observado en esta prueba se muestra en la Figura 4.15 para el esquema en 2D (ver apéndice C) y en la Figura 4.16 para el esquema en 4D.

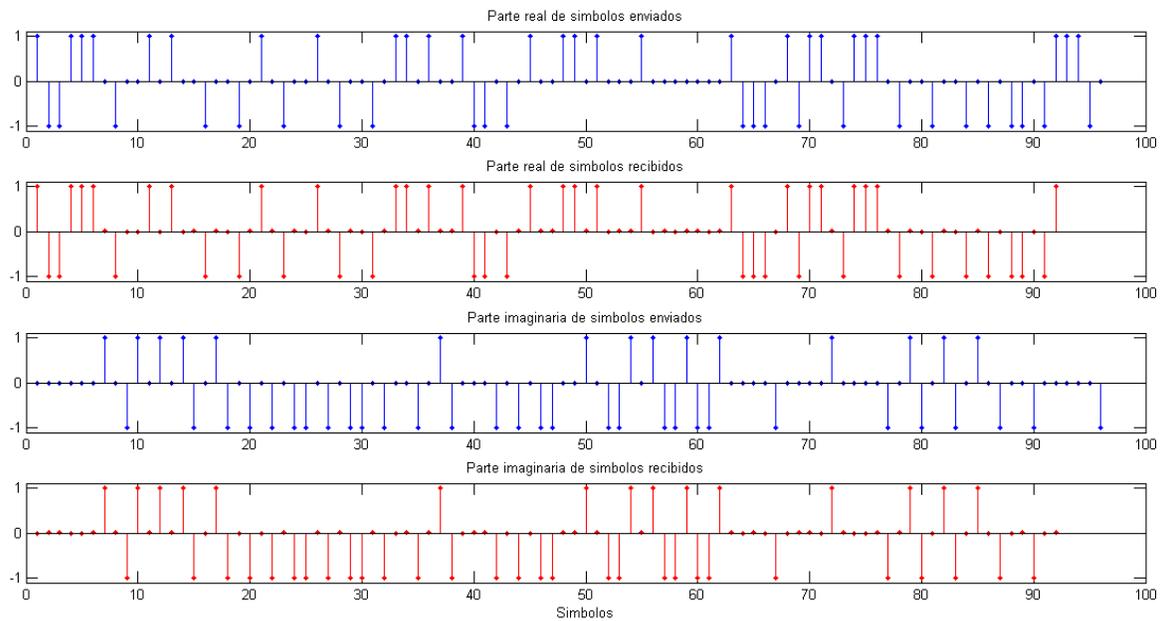


Figura 4.15. Mensaje transmitido y recibido sin errores en 2D.

Como es posible observar tanto en la Figura 4.15 como en la Figura 4.16, el mensaje recibido es idéntico al transmitido, con lo cual se corrobora el correcto diseño del transmisor y receptor.

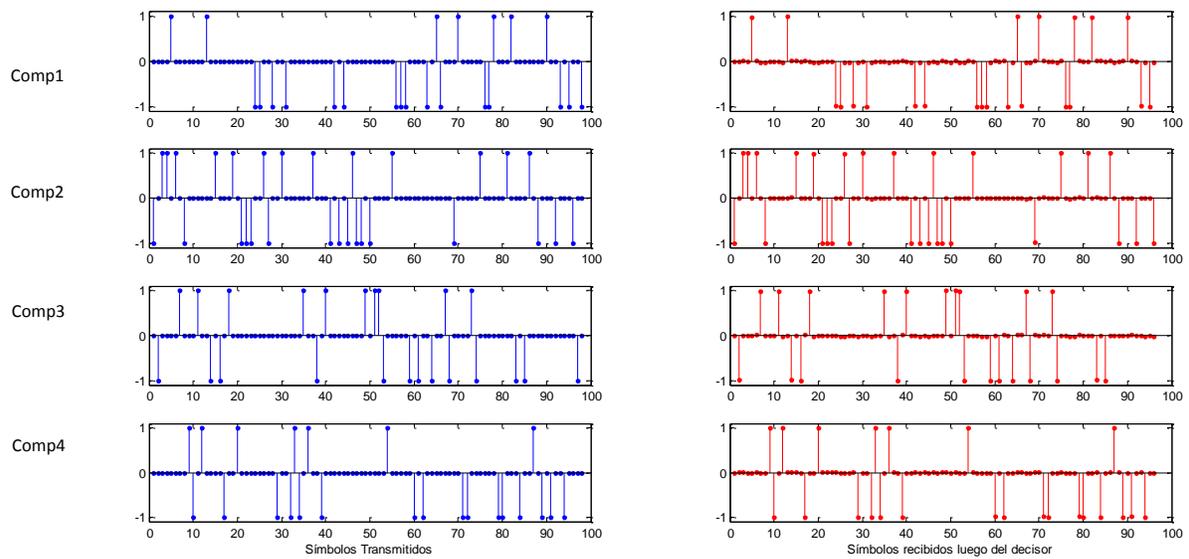


Figura 4.16. Mensaje transmitido y recibido sin errores en 4D

- *Prueba 2: Implementación del esquema de simulación con presencia de ruido.*

Posterior a la realización de esta simulación se espera que el mensaje recuperado presente errores. Para validar esta prueba, la simulación se realiza con una  $E_b/N_0$  de 3dB que permita apreciar el efecto del ruido (ver apéndice C).

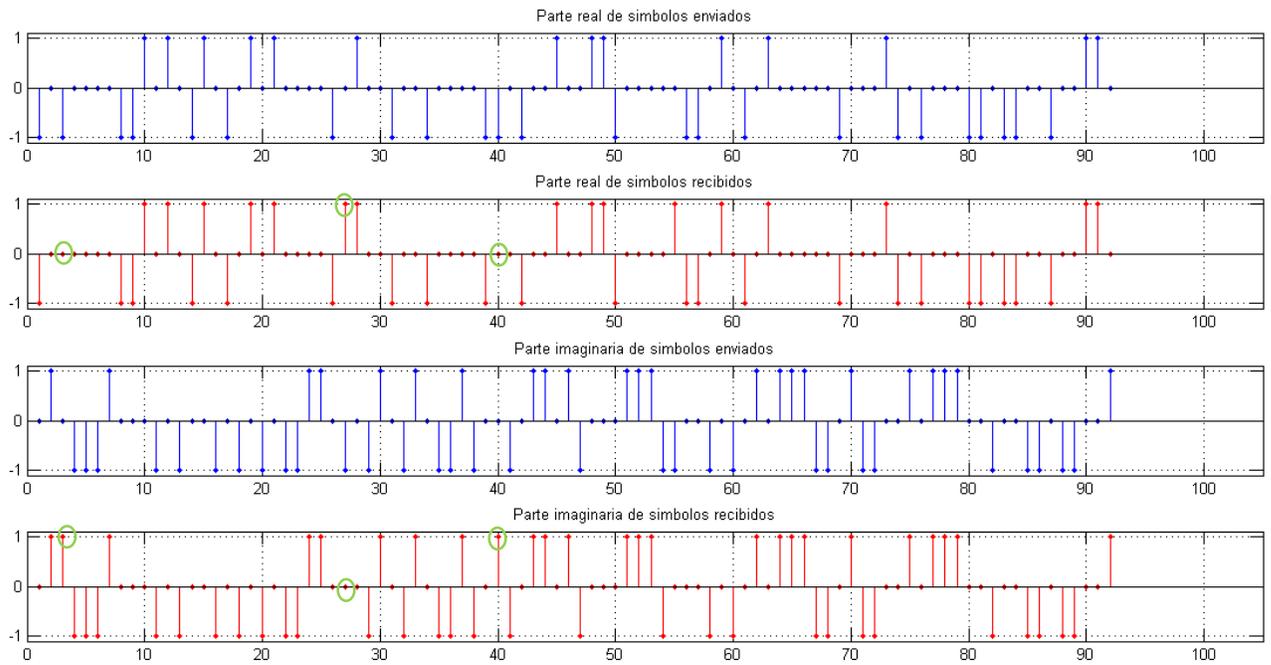


Figura 4.17. Mensaje transmitido y recibido tras su paso por el decisor en esquema en 2D.

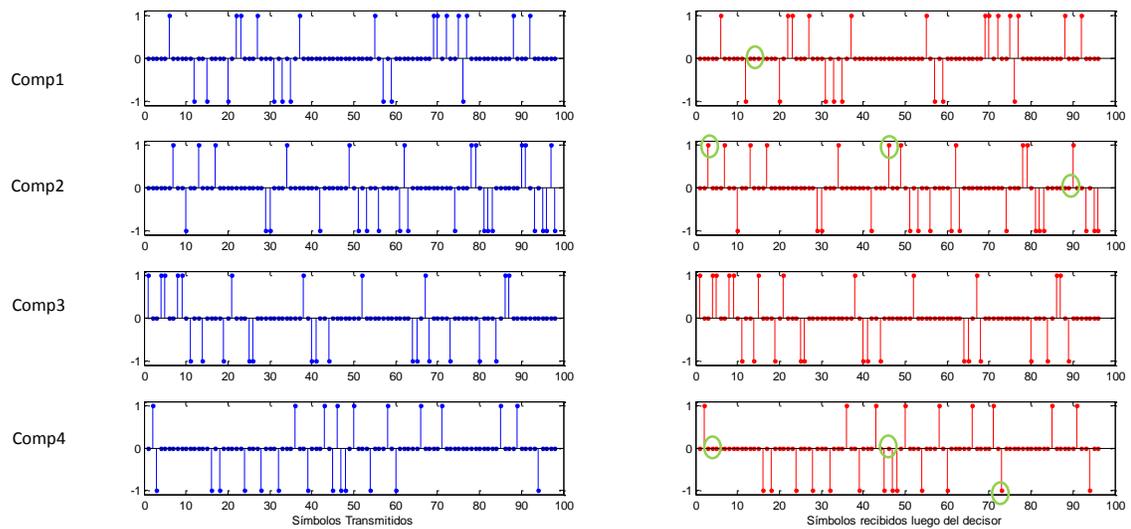


Figura 4.18. Mensaje transmitido y recibido tras su paso por el decisor en esquema en 4D

En la Figura 4.17 y la Figura 4.18 es posible apreciar, el mensaje resultante tras pasar por el decisor en el esquema en 2D y 4D respectivamente; estos mensajes presentan errores en diferentes posiciones, como se señala para algunos en círculos verdes, producto del efecto del ruido tras el paso de la señal por el canal, sin embargo para ambos casos, los símbolos detectados errados no supera la cantidad de símbolos recibidos correctamente.

- *Prueba 3: Variaciones de Relación  $E_b/N_0$ .*

Mediante esta prueba se verifica que se ha realizado un escalamiento adecuado del ruido, induciendo una mejora en el mensaje recibido a partir de los incrementos de la relación  $E_b/N_0$  ingresada. Para esta prueba se realiza la transmisión de 1000 símbolos y se utiliza un factor de roll-off de 0,75.

En la Figura 4.19 y la Figura 4.20 se aprecia el diagrama de ojo, con ruido y sin ruido, de los esquemas de modulación en 2D y 4D respectivamente; mediante estos diagramas se puede afirmar que existe un instante óptimo de muestreo para la detección, y se puede llevar a cabo el análisis gráfico correspondiente a la presencia o ausencia de ISI a la salida del filtro adaptado.

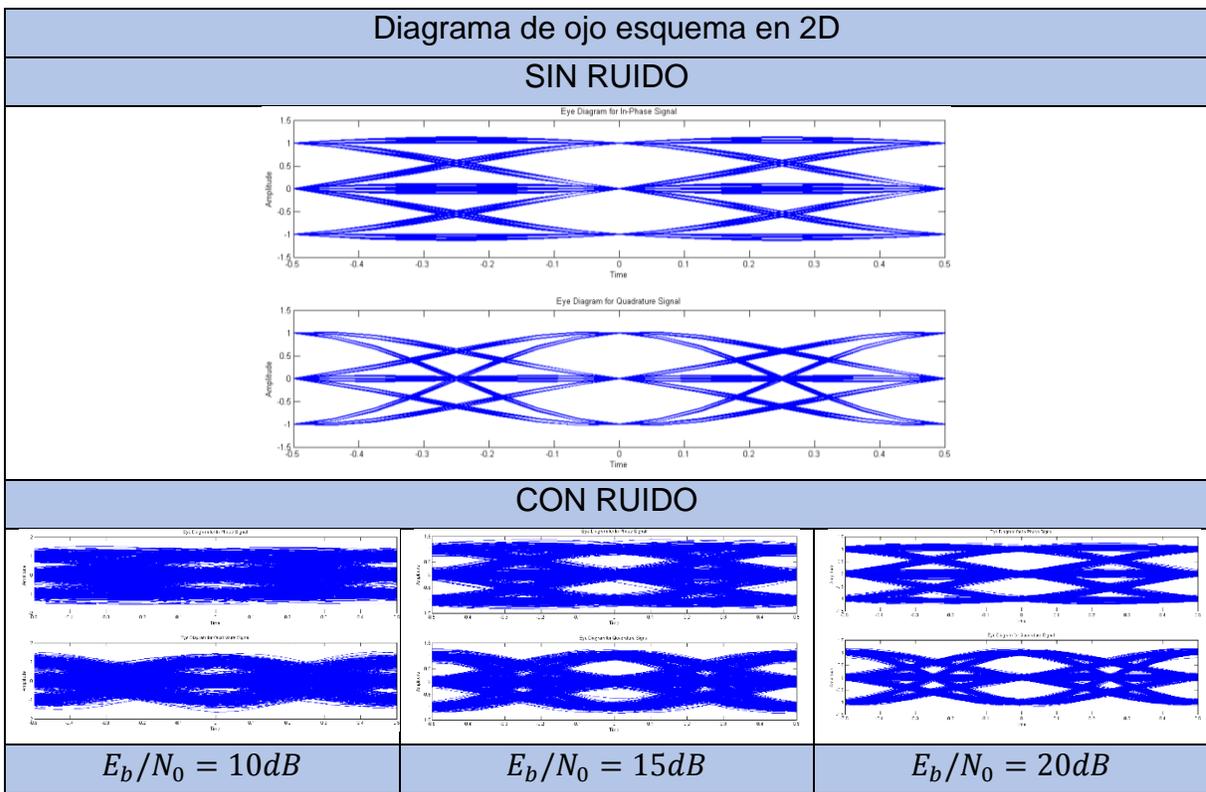


Figura 4.19. Diagrama de ojo esquema de modulación 2D

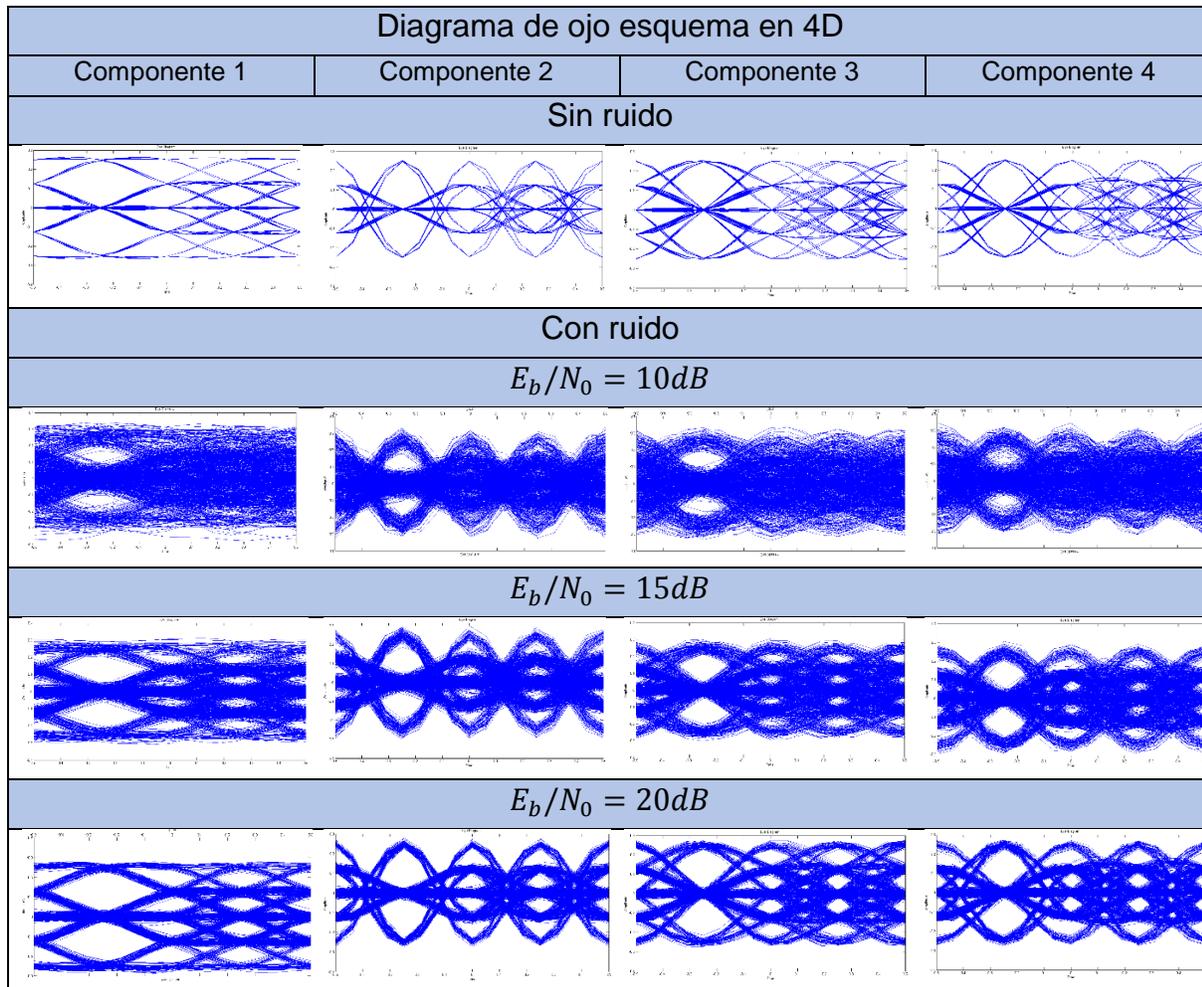


Figura 4.20. Diagrama de ojo esquema de modulación 4D.

En las anteriores figuras es posible apreciar cómo los incrementos en la relación  $E_b/N_0$  mejoran progresivamente la apertura del diagrama de ojo, contribuyendo de esta manera a reducir la probabilidad de error en la detección. De igual manera, se puede observar que no existe presencia de ISI. También puede apreciarse las distintas formas de los diagramas de ojo para cada dimensión en el esquema en 4D, debido a que cada componente a la salida del filtro adaptado presenta una forma de onda característica.

- *Prueba 4: Variación del factor de roll-off para el envío de una secuencia arbitraria.*

Para la realización de esta prueba se ingresan 3 valores de roll-off: 0.25, 0.5 y 0.75; la simulación se lleva a cabo enviando 10000 símbolos, a partir de estas variaciones se espera obtener valores de ancho de banda distintos para cada valor de roll-off ingresado; el porcentaje de ancho de banda estimado es del 99%.

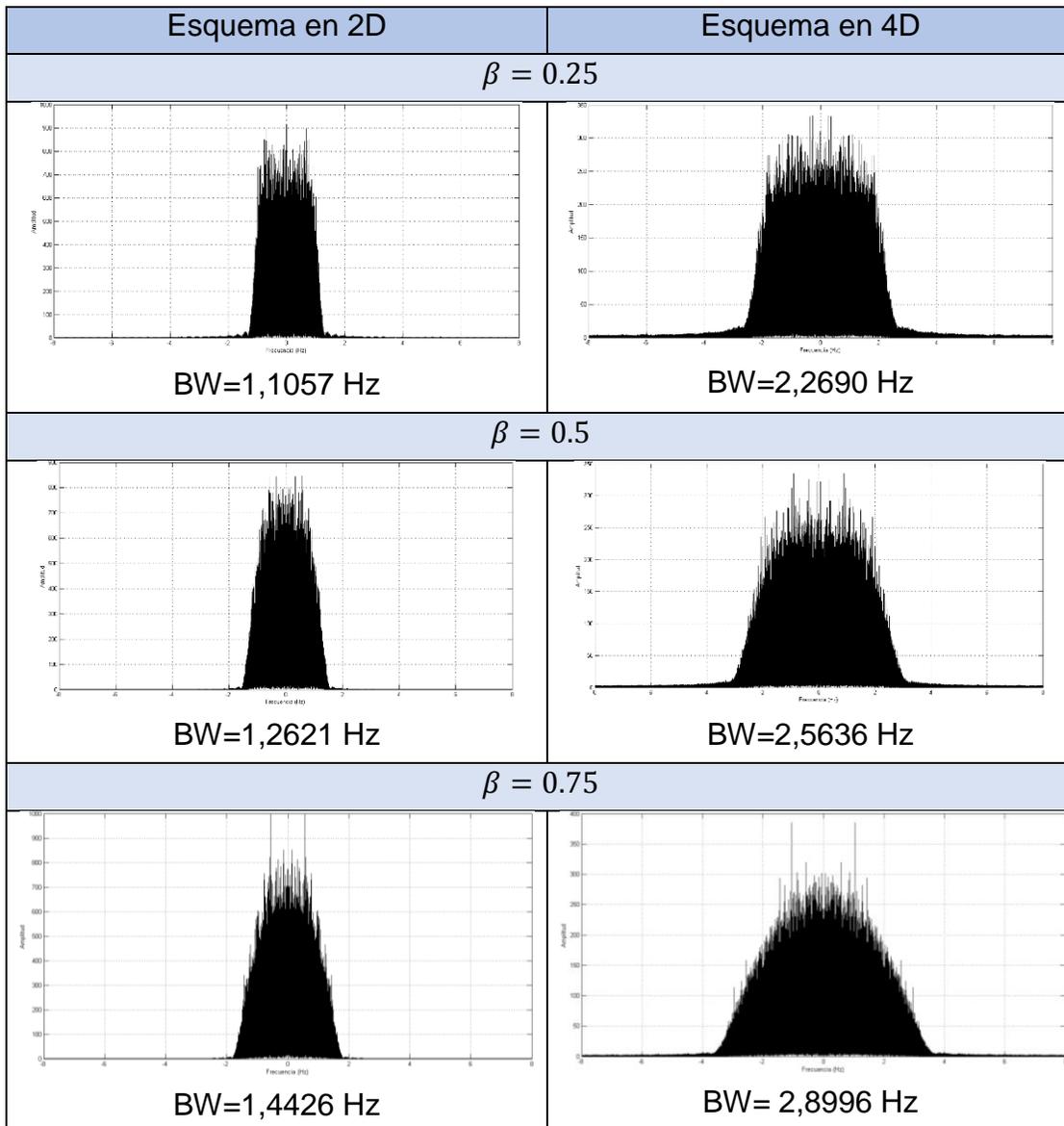


Figura 4.21. Ancho de banda obtenido en las simulaciones para variaciones del factor de roll-off

En la Figura 4.21 se han dispuesto los valores de ancho de banda obtenidos para las tres variaciones de roll-off ingresadas; es posible apreciar que en los tres casos, el ancho de banda del esquema de modulación en 2D es un poco menos de la mitad del ancho de banda del esquema de modulación en 4D, acorde con la teoría existente al respecto, la cual, establece que el ancho de banda nominal para el esquema en 2D es  $R$ , mientras que para el esquema en 4D es de  $2R$ .

A continuación se exponen los esquemas de modulación diseñados en el presente trabajo de grado y los resultados obtenidos a partir de la simulación para cada uno.

#### **4.4.5 Comparación de desempeño entre esquemas de modulación en 2D y 4D**

En la Figura 4.22 se muestra la curva  $BER$  vs  $E_b/N_0$  obtenida al realizar la simulación con el esquema de modulación en 4D, en comparación con el esquema en 2D. De las curvas es posible afirmar que el esquema de modulación en 4D propuesto presenta un mejor desempeño respecto al esquema en 2D; se observa que la diferencia entre las curvas es mayor a medida que la relación  $E_b/N_0$  aumenta. Por ejemplo, cuando la  $BER = 2 \times 10^{-4}$ , la ganancia de codificación efectiva existente del esquema en 4D es de aproximadamente 1 dB y cuando toma el valor de  $3 \times 10^{-6}$ , llega a ser cercana a 1,3 dB.

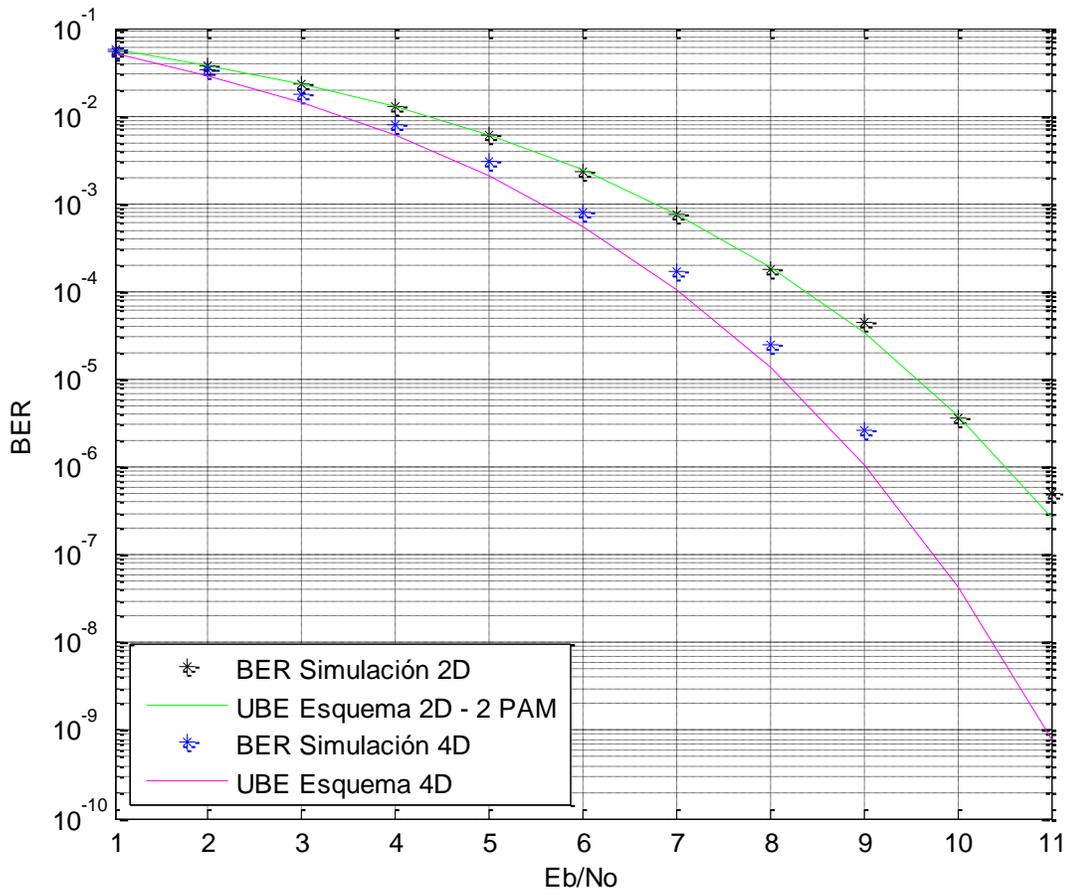


Figura 4.22. Comparación curvas BER vs  $E_b/N_0$  para 2D y 4D.

## 4.5 Análisis de resultados

### 4.5.1 Eficiencia espectral y ancho de banda

En la Tabla 4.1 y Tabla 4.2 se observa la eficiencia espectral y el ancho de banda correspondiente obtenidos al realizar 10 iteraciones (IT) de la simulación para el esquema en 2D, para tres valores de roll-off distintos; se transmiten 300000 símbolos en cada iteración. Se dispone a continuación de la media y la desviación estándar (y se incluye el valor teórico de cada parámetro) obtenidas en las 10 iteraciones (ver apéndice D).

Eficiencia espectral (bps/Hz)			
Roll-off	Media	Desviación estándar	Valor teórico
0.25	1,59923339	0,000271252	1,6008004
0.50	1,397327828	0,000277612	1,33400033
0.75	1,215756149	0,000175314	1,14342886

Tabla 4.1. Media, desviación estándar y valor teórico de eficiencia espectral en 2D

Ancho de banda (Hz)			
Roll-off	Media	Desviación estándar	Valor teórico
0.25	1,250599233	0,000212126	1,249375
0.50	1,4313034	0,000284429	1,49925
0.75	1,645066767	0,000237213	1,749125

Tabla 4.2. Media, desviación estándar y valor teórico de ancho de banda en 2D

Para el esquema en 4D también se halla la media y la desviación estándar (y se incluye el valor teórico correspondiente) de la eficiencia espectral y ancho de banda, tal como se indica en la Tabla 4.3 y Tabla 4.4.

Eficiencia espectral (bps/Hz)			
Roll-off	Media	Desviación estándar	Valor teórico
0.25	1,129572224	0,000873328	1,2006003
0.50	1,050651276	0,000230637	1,00050025
0.75	0,936049155	0,000178921	0,85757164

Tabla 4.3. Media, desviación estándar y valor teórico de eficiencia espectral en 4D

Ancho de banda (Hz)			
Roll-off	Media	Desviación estándar	Valor teórico
0.25	2,6558741	0,002054787	2,49875
0.50	2,8553719	0,000626704	2,9985
0.75	3,20496	0,000612529	3,49825

Tabla 4.4. Media, desviación estándar y valor teórico del ancho de banda en 4D

Es posible apreciar para ambos esquemas de modulación la relación directa entre el roll-off ingresado y el ancho de banda, acorde a la teoría existente, indica que a medida que se incrementa el factor de roll-off, se simplifica el diseño de los filtros, pero implica un aumento en el espectro ocupado.

La desviación estándar obtenida de las distintas iteraciones es mínima, lo que proporciona un alto grado de confianza en los resultados obtenidos para ambos esquemas.

#### 4.5.2 Bit Error Rate (BER)

En la Tabla 4.5 y Tabla 4.6 se han consignado los datos correspondientes a la media y desviación estándar de la BER de los esquemas de modulación en 2D y 4D para

valores incrementales de  $E_b/N_0$ . El roll-off empleado fue de 0,75 y fueron enviados 1 millón de símbolos en cada iteración.

Bit Error Rate – 2D		
Eb/No	Media	Desviación Est
1	5,459E-02	0,000320139
2	3,678E-02	0,000197348
3	2,249E-02	0,000261416
4	1,247E-02	7,80544E-05
5	5,941E-03	3,70559E-05
6	2,360E-03	4,37142E-05
7	7,674E-04	1,42897E-05
8	1,829E-04	1,64509E-05
9	4,388E-05	1,08328E-05
10	3,634E-06	5,71198E-07
11	5,000E-07	1,11606E-22

Tabla 4.5. Media y desviación estándar de BER en esquema en 2D

Bit Error Rate – 4D		
Eb/No	Media	Desviación Est
1	5,576E-02	0,000259488
2	3,333E-02	0,000100639
3	1,758E-02	8,26605E-05
4	7,923E-03	1,88871E-05
5	3,015E-03	1,93064E-05
6	8,065E-04	9,78475E-06
7	1,709E-04	9,01732E-07
8	2,486E-05	5,41666E-06
9	2,671E-06	5,50757E-09
10	0,000E+00	0
11	0,000E+00	0

Tabla 4.6. Media y desviación estándar de BER en esquema en 4D

En las anteriores tablas es factible observar que el esquema en 4D presenta un mejor desempeño respecto al esquema en 2D, ya que para un mismo valor de  $E_b/N_0$  la BER obtenida en simulación en el esquema en 4D es menor a la arrojada por el esquema de modulación bidimensional.



## 5. Conclusiones y trabajos futuros

Las conclusiones más relevantes obtenidas del presente trabajo de grado son:

- El esquema de modulación en 2D no proporciona una mejora representativa en cuanto a desempeño respecto al esquema de modulación 2-PAM; la ganancia de codificación nominal hallada fue de 0dB y posterior a realizar las simulaciones, se comprobó que la ganancia de codificación efectiva fue de 0dB.
- Una desventaja del esquema de modulación en 4D es el ancho de banda ocupado, el cual es aproximadamente el doble que el del esquema en 2D, lo cual incide en una reducción de la eficiencia espectral de aproximadamente 0,5bps/Hz.
- Emplear las matrices de Hadamard para crear espacios de señal ortogonales es un mecanismo eficaz que se puede emplear para esquemas de modulación de orden superior siempre y cuando dicho orden, coincida con el orden de la matriz, es decir, sea múltiplo de 4.
- Del análisis del desempeño puede afirmarse que la ortogonalidad de los pulsos y la forma de la constelación inciden directamente en la probabilidad de error, mientras que la forma del pulso lo hace respecto a la eficiencia espectral de los esquemas de modulación.
- El esquema de modulación en 4D presenta mayor robustez frente al ruido que el esquema en 2D, ya que una probabilidad de error objetivo dada puede ser alcanzada con una  $E_b/N_0$  menor en el esquema en 4D; cabe aclarar que este resultado resulta más evidente para valores de  $E_b/N_0$  superiores a 9dB.
- El uso de las matrices de Hadamard para generar las funciones base de los esquemas de modulación, debe realizarse tratando de optimizar el uso de ancho de banda, en el caso de implementar pulsos SRRC, como una

superposición de los mismos y así conseguir un consumo menor de ancho de banda.

- No es posible calcular la BER a partir de la SER en el esquema de modulación en 4D, dado que es necesario implementar un mapeo distinto al proporcionado por la codificación Gray; este mapeo debe realizarse bajo la consideración de que todos los puntos de señal (exceptuando la versión antípoda de cada uno) se encuentran a una misma distancia mínima.
- Los errores en la detección son menos probables a ocurrir si las formas de onda son fácilmente distinguibles unas de otras, es decir, en términos matemáticos, si se representan en espacios Euclidianos multidimensionales, éstas necesitan estar separadas por distancias mayores, ya que, como fue posible apreciar en el desarrollo del trabajo de grado, todas las representaciones de señal se encuentran a una misma distancia mínima, a excepción de la versión antípoda de la misma.
- Para el esquema en 4D no es posible obtener valores de BER en el orden de  $10^{-7}$  y  $10^{-8}$ , dado que para dichas probabilidades se requiere enviar una cantidad de símbolos de  $10^8$ , lo cual excede la capacidad de procesamiento de los equipos disponibles.

Los trabajos futuros sugeridos a partir del presente trabajo de grado son:

- Emplear el esquema de modulación en 4D planteado para implementar un servicio de comunicación puntual, como por ejemplo en un enlace satelital, el cual no funciona en régimen limitado en ancho de banda.
- Realizar un análisis comparativo entre la complejidad computacional de los algoritmos implementados en el presente trabajo de grado y otros esquemas de modulación tradicionales.

- Trabajar en el diseño de constelaciones N dimensionales que faciliten el mapeo dentro del esquema, teniendo en cuenta, reducir la probabilidad de error de símbolos vecinos sin afectar el desempeño frente al ruido.
- Implementar en el receptor un decisor que trabaje bajo la regla MAP, analizando la diferencia que representa en complejidad computacional así como en desempeño de los esquemas de modulación desarrollados en el presente trabajo de grado.
- Implementar los esquemas de modulación aquí propuestos con codificación de canal, y analizar las mejoras presentes en el desempeño, respecto a los esquemas originales y respecto a esquemas tradicionales.
- Analizar el desempeño de un sistema de comunicaciones que implemente el esquema de modulación en 4 dimensiones, incluyendo efectos de desvanecimiento rápido o lento.



## Bibliografía

- [1] S. Haykin, *Communication Systems*, New York: Jhon Wiley & Sons, Inc, 2001.
- [2] J. Proakis, *Digital Communications*, McGrawHill, 2000.
- [3] F. G. Antonio Rodríguez, *Comunicaciones Digitales*, Madrid, 2012.
- [4] R. Gallager, *Principles Of Digital Communication*, New York: Cambridge University Press, 2008.
- [5] P. C. J. R. Bruce Carlson, *Communications Systems: An Introduction to Signals and Noise in Electrical Communication*, New York: McGraw Hill, 2002.
- [6] G. C. Nevio Benvenuto, *Algorithms for Communications Systems and their Applications*, Chichester: John Wiley & Sons Ltd, 2002.
- [7] R. Gallager, «Course Material for 6.450 Principles of Digital Communications I,» MIT OpenCourseWare, 2006. [En línea]. Available: <http://ocw.mit.edu/>.
- [8] R. M. Xiaoli Chu, «Multidimensional Modulation for Ultra-Wideband Multiple-Access Impulse Radio in Wireless Multipath Channels,» *Wireless Communications, IEEE Transactions*, vol. IV, pp. 2373-2386, 2005.
- [9] M. Kutter, «Performance Improvement of Spread Spectrum Based Image Watermarking Schemes Through M-ary Modulation,» *Lecture Notes in Computer Science*, pp. 1-16, 1999.
- [10] Z. T. Yueyun Chen, «A General Algorithm for Biorthogonal Functions and Performance Analysis of Biorthogonal Scramble Modulation System,» *Wireless Sensor Network*, vol. II, pp. 199-205, 2010.
- [11] A. G. Hao Zhang, «Biorthogonal Pulse Modulation for Time-Hopping Multiple Access UWB Communications,» *Wireless Communications, IEEE Transactions*, vol. IV, nº 3, pp. 1154-1162, 2005.
- [12] M. B.-P. Mohammad Noshad, «Hadamard Code Modulation: An Alternative to OFDM for Optical Wireless Communications,» *IEEE Global Communications Conference* , vol. I, pp. 2102-2107, 2014.
- [13] S. Al-Qaraawy, «Multi-Delay Biorthogonal Coded/Balanced TR-UWB Receiver for WPAN Based on Hadamard Matrix,» *Eng. & Tech. Journal* , vol. XXVII, nº 2, pp. 247-255, 2009.
- [14] Z. T. T. D. G. G. Xianren Wu, «Optimal Waveform Design for UWB Radios,» *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. LIV, nº 6, pp. 2009-2021, 2006.
- [15] C. Rushforth, «Fast Fourier-Hadamard Decoding of Orthogonal Codes,» *Information and Control*, nº 15, pp. 33-37, 1969.
- [16] A. Iossifides, «Complex Orthogonal coded binary transmission with amicable Hadamard matrices over Rayleigh fading channels,» *International Symposium on Computers and Communications*, pp. 335-340, 2011.
- [17] P. John, *Digital Signal Processing, Principles, Algorithms, and Applications*, New Jersey : Prentice Hall, 1996.

- [18] O. Alan, Señales y sistemas, México D.F.: Prentice Hall Hispanoamérica, 1998.
- [19] J. M. Jesus Ramírez, Análisis de Desempeño de la Modulación WAVELET, Popayán: Universidad del Cauca, 2009.
- [20] M. S. John Proakis, Communications Systems Engineering, New Jersey: Prentice Hall, Inc., 2002.
- [21] U. Madhow, Introduction to Communication Systems, Santa Barbara, 2014.
- [22] E. Cubukcu, «Root Raised Cosine (RRC) Filters and Pulse Shaping in Communication Systems,» Engineering Nasa, Distrito de Columbia, 2012.
- [23] A. Grami, Introduction to Digital Communications, London: Elseiver Inc, 2016.
- [24] J. Cioffi, «Stanford University,» Noviembre 2003. [En línea]. Available: <https://web.stanford.edu>. [Último acceso: 4 Abril 2016].
- [25] S. Wicker, Error Control Systems for Digital Communications and Storage, Prentice Hall, 1994.
- [26] D. Forney, «MIT Open Course Ware,» marzo 2005. [En línea]. Available: <http://ocw.mit.edu/>. [Último acceso: 11 Noviembre 2015].
- [27] F. Ros, «Universidad de Sevilla,» [En línea]. Available: <http://www.matematicaaplicada2.es/>. [Último acceso: 29 Septiembre 2016].
- [28] M. Ramirez, Esquema de Modulación Digital de Constelación N-Dimensional Basado en Wavelets, Popayán: Universidad del Cauca, 2014.
- [29] G. Stüber, Principles of Mobile Communication, New York: Kluwer Academics Publishers, 2002.

# DISEÑO DE UN ESQUEMA DE MODULACIÓN BIORTOGONAL N-DIMENSIONAL BASADO EN MATRICES HADAMARD

## APÉNDICES



Martha Liliana Mosquera Arbeláez  
Rosemberth Rodríguez Arteaga

Trabajo de grado en Ingeniería Electrónica y Telecomunicaciones

Director:

Jesus Mauricio Ramirez Viáfara

Msc En Ingeniería Electrónica y Telecomunicaciones

Universidad Del Cauca

Facultad de Ingeniería Electrónica y Telecomunicaciones

Departamento de Telecomunicaciones

Popayán, Enero de 2017

## Tabla de contenido

1.	APÉNDICE A.....	1
1.1	Energía de las funciones base de los esquemas de modulación.....	1
2.	APÉNDICE B.....	3
2.1	Probabilidad de error teórica (cálculo).....	3
2.1.1	UBE para esquema de modulación en 2D.....	3
2.1.2	UBE para esquema de modulación en 4D.....	4
3.	APÉNDICE C.....	5
3.1	Diagramas de constelación esquema en 2D.....	5
4.	APÉNDICE D.....	7
4.1	Resultados de eficiencia espectral, ancho de banda y tasa de error de bit obtenidos en diferentes iteraciones de simulación.....	7
4.1.1	Esquema en 2D:.....	7
4.1.2	Esquema en 4D:.....	7

## **LISTA DE TABLAS APÉNDICE C**

Tabla ApendC.1 Diagramas de constelación esquema en 2D para distintos Eb/No .....	5
Tabla ApendC.2 Diagrama de constelación esquema en 2D para distintos roll-off .....	6

## **LISTA DE TABLAS APÉNDICE D**

Tabla ApendD.1 Eficiencia espectral hallada en 10 iteraciones para esquema en 2D.....	7
Tabla ApendD.2 Ancho de banda hallado en 10 iteraciones para esquema en 2D.....	7
Tabla ApendD.3 Eficiencia espectral hallada en 10 iteraciones para esquema en 4D.....	7
Tabla ApendD.4 Ancho de banda hallado en 10 iteraciones para esquema en 4D.....	8
Tabla ApendD.5 BER hallada para 10 iteraciones en esquema en 2D.....	8
Tabla ApendD.6 BER hallada para 3iteraciones en esquema en 4D .....	9

# 1. APÉNDICE A.

## 1.1 Energía de las funciones base de los esquemas de modulación.

La expresión correspondiente al cálculo de la energía de las funciones base se demuestra a continuación:

$$E_{\psi} = \int_{-\infty}^{\infty} \|\psi_k(t)\|^2 dt,$$

$$E_{\psi} = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_n c_n p(t - nT) \sum_m c_m p(t - mT) dt,$$

$$E_{\psi} = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_n \sum_m c_n c_m p(t - mT) p(t - nT) dt,$$

$$E_{\psi} = \sum_n \sum_m c_n c_m \int_{-\infty}^{\infty} p(t - mT) p(t - nT) dt,$$

$$E_{\psi} = \sum_n \sum_m c_n c_m \delta[n - m],$$

$$E_{\psi} = \sum_n \sum_{m=n} c_n c_m,$$

$$E_{\psi} = \sum_n c_n^2.$$



## 2. APÉNDICE B.

### 2.1 Probabilidad de error teórica (cálculo)

Para el cálculo de la probabilidad de error de símbolo, mediante la estimación de fronteras de unión es necesario tener en cuenta las consideraciones mencionadas en el apartado 3.4.3 del documento, así, se tiene:

#### 2.1.1 UBE para esquema de modulación en 2D

$$P_s \cong k_v Q\left(\frac{d}{2\sigma}\right) \cong SER,$$

- $k_v = 2,$
- $d = 2\sqrt{E_b},$
- $\sigma = \sqrt{\frac{N_o}{2}},$

reemplazando estos valores en la expresión, se tiene:

$$P_s \cong 2Q\left(\frac{2\sqrt{E_b}}{2\sqrt{\frac{N_o}{2}}}\right),$$

$$P_s \cong 2Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_o}}\right),$$

B.1

entonces la probabilidad de error de bit está dada por:

$$P_b \cong \frac{P_s}{\log_2 M},$$

$$P_b \cong \frac{1}{\log_2 4} \left( 2Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_o}}\right) \right),$$

$$P_b \cong Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_o}}\right). \quad \text{B.2}$$

### 2.1.2 UBE para esquema de modulación en 4D

$$P_s \cong k_v Q\left(\frac{d}{2\sigma}\right) \cong SER,$$

- $k_v = 6,$
- $d = \sqrt{6E_b},$
- $\sigma = \sqrt{\frac{N_o}{2}},$

reemplazando los valores en la expresión , se tiene:

$$P_s \cong 6Q\left(\frac{\sqrt{6E_b}}{2\sqrt{\frac{N_o}{2}}}\right),$$

$$P_s \cong 6Q\left(\sqrt{\frac{3E_b}{N_o}}\right), \quad \text{B.3}$$

por tanto, la probabilidad de error de bit está dada por:

$$P_b \cong \frac{1}{\log_2 8} \left( 6Q\left(\sqrt{\frac{3E_b}{N_o}}\right) \right),$$

$$P_b \cong 2Q\left(\sqrt{\frac{3E_b}{N_o}}\right). \quad \text{B.4}$$

### 3. APÉNDICE C.

#### 3.1 Diagramas de constelación esquema en 2D.

Mediante los diagramas de constelación en el esquema en 2D también es posible apreciar el efecto del ruido; en la Tabla ApendC.1 se muestran los diagramas de constelación correspondientes a tres valores de  $E_b/N_0$  los cuales se reducen paulatinamente, ocasionando símbolos cada vez más distantes del valor nominal en la constelación. Para estas simulaciones fueron transmitidos 10000 símbolos, y el valor de roll off utilizado fue de 0,75.

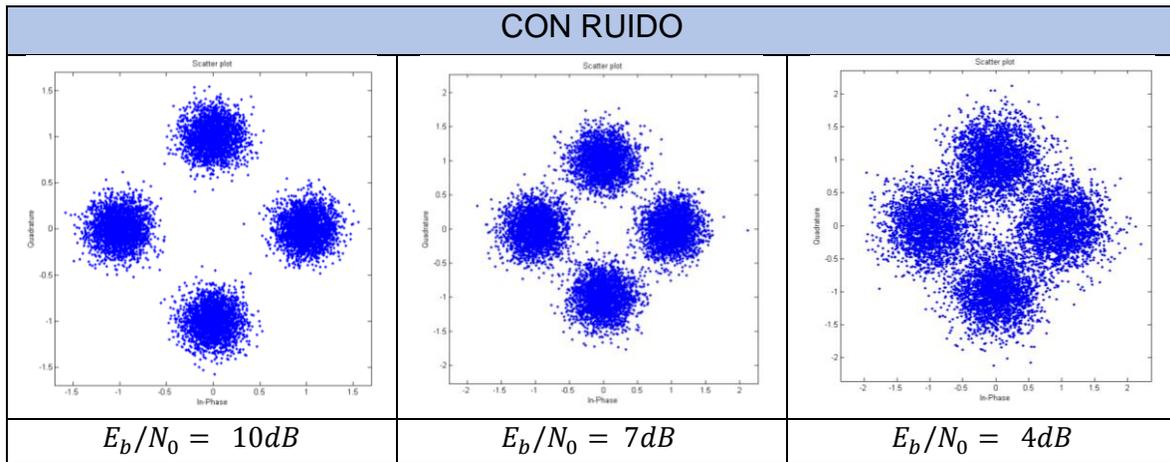


Tabla ApendC.1 Diagramas de constelación esquema en 2D para distintos  $E_b/N_0$

En la Tabla ApendC. 2 se muestran los diagramas de constelación obtenidos para tres casos de roll-off. Como es posible apreciar, el diagrama de constelación, mejora a medida que el valor de roll-off aumenta; cuando  $\beta = 0$  existe presencia de ISI, dada la similitud del pulso conformador con una función  $sinc(t)$  y la duración finita del mismo.

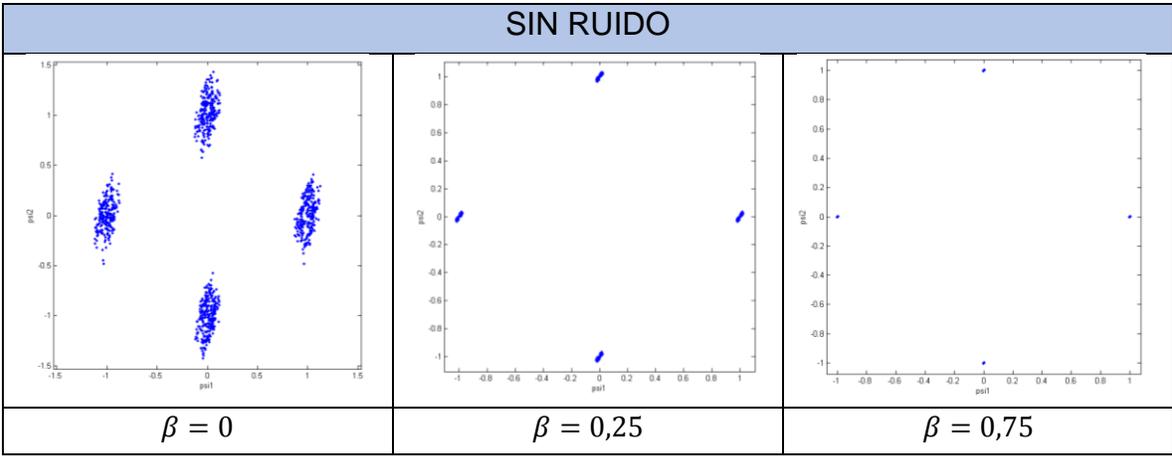


Tabla ApendC. 2 Diagrama de constelación esquema en 2D para distintos roll-off

## 4. APÉNDICE D.

### 4.1 Resultados de eficiencia espectral, ancho de banda y tasa de error de bit obtenidos en diferentes iteraciones de simulación.

A continuación se reúnen los datos obtenidos de las 10 iteraciones realizadas para determinar la eficiencia espectral y ancho de banda.

#### 4.1.1 Esquema en 2D:

Eficiencia espectral										
Roll-off	IT1	IT2	IT3	IT4	IT5	IT6	IT7	IT8	IT9	IT10
<b>0.25</b>	1,8188	1,8189	1,8190	1,8185	1,8182	1,81826361	1,81895594	1,8182581	1,80867992	1,80767509
<b>0.50</b>	1,5817	1,5811	1,5820	1,5815	1,5813	1,58141185	1,58194972	1,58104473	1,58289166	1,58361484
<b>0.75</b>	1,3836	1,3834	1,3831	1,3838	1,3834	1,38344303	1,38400403	1,38399254	1,38607679	1,38596281

Tabla ApendD. 1 Eficiencia espectral hallada en 10 iteraciones para esquema en 2D.

BW (99%)										
Roll-off	IT1	IT2	IT3	IT4	IT5	IT6	IT7	IT8	IT9	IT10
<b>0.25</b>	1,0996	1,0996	1,0995	1,0998	1,1000	1,1000	1,0995	1,1000	1,1058	1,1064
<b>0.50</b>	1,2645	1,2649	1,2642	1,2646	1,2648	1,2647	1,2643	1,2650	1,2635	1,2629
<b>0.75</b>	1,4455	1,4457	1,4460	1,4453	1,4457	1,4457	1,4451	1,4451	1,4429	1,4430

Tabla ApendD. 2 Ancho de banda hallado en 10 iteraciones para esquema en 2D

#### 4.1.2 Esquema en 4D:

Eficiencia espectral										
Roll-off	IT1	IT2	IT3	IT4	IT5	IT6	IT7	IT8	IT9	IT10
<b>0.25</b>	1,32280	1,32342	1,32327	1,32315	1,32280	1,32285	1,32342	1,32327	1,32280	1,32285
<b>0.50</b>	1,16879	1,16858	1,16926	1,17029	1,16879	1,16949	1,16858	1,16926	1,16879	1,16949
<b>0.75</b>	1,03300	1,03301	1,03319	1,03252	1,03300	1,03300	1,03301	1,03319	1,03300	1,03300

Tabla ApendD. 3 Eficiencia espectral hallada en 10 iteraciones para esquema en 4D

BW (99%)										
Roll-off	IT1	IT2	IT3	IT4	IT5	IT6	IT7	IT8	IT9	IT10
<b>0.25</b>	2,2679	2,2669	2,2671	2,2673	2,2679	2,2678	2,2669	2,2671	2,2679	2,2678
<b>0.50</b>	2,5668	2,5672	2,5657	2,5635	2,5668	2,5652	2,5672	2,5657	2,5668	2,5652
<b>0.75</b>	2,9042	2,9041	2,9036	2,9055	2,9042	2,9042	2,9041	2,9036	2,9042	2,9042

Tabla ApendD. 4 Ancho de banda hallado en 10 iteraciones para esquema en 4D

La Tabla ApendD. 5 los valores de BER obtenidos en 10 iteraciones distintas para  $E_b/N_0$  incremental para el esquema en 2D.

EbNo	IT1	IT2	IT3	IT4	IT5	IT6	IT7	IT8	IT9	IT10
<b>1</b>	5,48E-02	5,49E-02	5,48E-02	5,47E-02	5,49E-02	5,41E-02	5,41E-02	5,41E-02	5,46E-02	5,48E-02
<b>2</b>	3,67E-02	3,68E-02	3,70E-02	3,63E-02	3,68E-02	3,69E-02	3,69E-02	3,69E-02	3,69E-02	3,67E-02
<b>3</b>	2,25E-02	2,27E-02	2,28E-02	2,28E-02	2,27E-02	2,21E-02	2,21E-02	2,21E-02	2,25E-02	2,25E-02
<b>4</b>	1,26E-02	1,23E-02	1,24E-02	1,25E-02	1,23E-02	1,25E-02	1,25E-02	1,25E-02	1,25E-02	1,26E-02
<b>5</b>	5,99E-03	5,95E-03	5,90E-03	5,97E-03	5,95E-03	5,94E-03	5,94E-03	5,94E-03	5,87E-03	5,99E-03
<b>6</b>	2,33E-03	2,39E-03	2,39E-03	2,27E-03	2,39E-03	2,36E-03	2,36E-03	2,36E-03	2,42E-03	2,33E-03
<b>7</b>	7,68E-04	7,64E-04	7,78E-04	7,53E-04	7,64E-04	7,58E-04	7,58E-04	7,58E-04	8,03E-04	7,68E-04
<b>8</b>	1,77E-04	1,99E-04	1,99E-04	1,77E-04	1,99E-04	1,65E-04	1,65E-04	1,65E-04	2,07E-04	1,77E-04
<b>9</b>	5,83E-05	3,90E-05	2,90E-05	3,17E-05	3,90E-05	5,00E-05	5,00E-05	5,00E-05	3,35E-05	5,83E-05
<b>10</b>	3,33E-06	4,50E-06	3,34E-06	4,34E-06	4,50E-06	3,33E-06	3,33E-06	3,33E-06	3,00E-06	3,33E-06
<b>11</b>	5,00E-07									

Tabla ApendD. 5 BER hallada para 10 iteraciones en esquema en 2D.

La Tabla ApendD. 6 contiene la tasa de error de bit de tres iteraciones distintas, realizadas en el esquema en 4D. Se aclara que la diferencia entre el número de iteraciones para ambos esquemas radica en la cantidad de símbolos enviados, ya que en el esquema en 4D, en las simulaciones llevadas a cabo fueron enviados 1 millón de símbolos.

<b>EbNo</b>	<b>IT1</b>	<b>IT2</b>	<b>IT3</b>
1	5,566E-02	5,605E-02	5,556E-02
2	3,344E-02	3,332E-02	3,324E-02
3	1,753E-02	1,768E-02	1,754E-02
4	7,932E-03	7,901E-03	7,936E-03
5	3,014E-03	2,996E-03	3,034E-03
6	8,008E-04	8,178E-04	8,008E-04
7	1,708E-04	1,700E-04	1,718E-04
8	2,168E-05	3,111E-05	2,178E-05
9	2,667E-06	2,677E-06	2,668E-06
10	0,000E+00	0,000E+00	0,000E+00
11	0,000E+00	0,000E+00	0,000E+00

Tabla ApendD. 6 BER hallada para 3iteraciones en esquema en 4D