

**ANÁLISIS DEL FUNCIONAMIENTO Y DESEMPEÑO DEL CÓDIGO DE ALAMOUTI EN  
SISTEMAS MIMO**



**ANEXO B**

**“CONCEPTOS DEL ÁLGEBRA LINEAL UTILIZADOS EN LA CODIFICACIÓN  
ALAMOUTI Y ASPECTOS DE LA VARIABLE ALEATORIA EN LAS  
TELECOMUNICACIONES”**

**UNIVERSIDAD DEL CAUCA**

**FACULTAD DE INGENIERÍA ELECTRÓNICA Y TELECOMUNICACIONES**

**DEPARTAMENTO DE TELECOMUNICACIONES**

**POPAYÁN**

**2008**

## TABLA DE CONTENIDO

	<b>Pág.</b>
1. INTRODUCCIÓN.....	4
2. CONCEPTOS DE ALGEBRA LINEAL .....	5
2.1 Combinación lineal .....	5
2.2 Independencia y dependencia lineal .....	5
2.3 Base .....	7
2.4 Dimensión vectorial .....	8
2.5 Ortogonalidad en espacios vectoriales .....	8
2.6 Productos interiores definidos en espacios vectoriales .....	8
2.7 Rango de una matriz.....	9
2.8 Vectores y valores propios.....	9
3. VARIABLES ALEATORIAS.....	12
3.1 Variables Aleatorias Continuas .....	12
3.2 El valor esperado de una variable aleatoria continua .....	12
3.3 La varianza de una variable aleatoria .....	13
3.4 La distribución normal o gaussiana.....	15
3.4.1 Propiedades de la distribución gaussiana.....	15
3.5 Aplicación de la distribución gaussiana en las telecomunicaciones .....	18
BIBLIOGRAFÍA.....	21

<b>TABLA DE FIGURAS</b>	<b>Pág.</b>
FIGURA 1. Gráfica de la fdp gaussiana .....	16
FIGURA 2. Autocorrelación del AWGN .....	19
FIGURA 3. Densidad espectral de potencia del AWGN .....	19

## 1. INTRODUCCIÓN

En este anexo se presentan algunos conceptos del álgebra lineal utilizados en el desarrollo matemático sobre el cual se sustenta el funcionamiento de la codificación espacio-tiempo, especialmente la de Alamouti.

Además se presentan aspectos relacionados con la variable aleatoria, como su valor esperado, la varianza, y su aplicación en el comportamiento del ruido gaussiano en las telecomunicaciones.

## 2. CONCEPTOS DE ALGEBRA LINEAL

### 2.1 Combinación lineal

Un vector  $X$  se dice que es combinación lineal de un conjunto  $A$  de vectores  $\{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$  si existe una forma de expresarlo como una suma de parte o de todos los vectores de  $A$  multiplicados cada uno de ellos por un coeficiente escalar  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ , de la forma [1]:

$$X = a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = \sum_{i=1}^n a_ix_i . \quad (2.1)$$

Así,  $X$  es combinación lineal de los vectores de  $A$  si se puede expresar  $X$  como una suma de múltiplos de una cantidad finita de elementos de  $A$ .

### 2.2 Independencia y dependencia lineal

Un conjunto de vectores es linealmente independiente si ninguno de ellos puede ser escrito como una combinación lineal de los restantes.

Sea  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  un conjunto de vectores, se dice que son linealmente dependientes si existen números  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , no todos iguales a cero, tal que [1]:

$$a_1v_1 + a_2v_2 + \dots + a_nv_n = 0 . \quad (2.2)$$

Nótese que el cero en el lado derecho es el vector nulo, no el número cero y el conjunto de vectores nulos forma la matriz nula.

Si tales números no existen, entonces los vectores son linealmente independientes.

Esta idea es importante porque los conjuntos de vectores que son linealmente independientes y generan a un espacio vectorial, forman una base para dicho espacio.

Entre las propiedades de los vectores linealmente dependientes e independientes se encuentran [1]:

- Un conjunto de vectores es linealmente dependiente si y solamente si alguno de los vectores es combinación lineal de los demás.
- Si un conjunto de vectores es linealmente independiente cualquier subconjunto suyo también lo es.
- Si un conjunto de vectores es linealmente dependiente también lo es todo conjunto que lo contenga.
- Geoméricamente, dos vectores son independientes si no tienen la misma dirección (con sentidos idénticos u opuestos). Esta definición supone que el vector nulo tiene todas las direcciones.
- Tres vectores son independientes si y solo si no están contenidos en el mismo plano vectorial, o sea si ninguno de ellos es una combinación lineal de los otros dos (en cuyo caso estaría en el plano generado por estos vectores).
- El espacio generado por un sistema de vectores es el conjunto de todas las combinaciones lineales de estos vectores. El espacio generado por un vector no nulo es la recta vectorial dirigida por este vector. El espacio generado por dos vectores independientes es el plano que los contiene.

### Ejemplo

¿Son los tres vectores siguientes linealmente independientes?

$$u = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Se buscan tres escalares  $a_1, a_2, a_3$  que satisfagan la ecuación:

$$a_1 u + a_2 v + a_3 w = a_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + a_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

lo que equivale al sistema de ecuaciones siguiente:

$$2a_1 + a_2 + a_3 = 0,$$

$$3a_2 + 2a_3 = 0,$$

$$4a_3 = 0,$$

de donde la única solución es la trivial ( $a_1 = a_2 = a_3 = 0$ ), por lo tanto los tres vectores son linealmente independientes.

### 2.3 Base

Se dice que un conjunto ordenado  $B$  es base de un espacio vectorial  $V$  si se cumplen las siguientes condiciones [2]:

- Todos los elementos de la base  $B$  deben ser linealmente independientes.
- Todos los elementos de la base  $B$  deben pertenecer al espacio vectorial  $V$ .
- $B$  debe "generar"  $V$ . Es decir que todo elemento perteneciente a  $V$  se tiene que poder escribir como una combinación lineal de los elementos de la base  $B$ .
- Las bases son conjuntos ordenados. Es decir que si bien  $\{a, b, c\}$  y  $\{b, a, c\}$  generan el mismo espacio vectorial, las bases no son iguales.

De la observación anterior se desprende que las bases no son únicas. En general, suele haber infinitas bases distintas para un mismo espacio vectorial. Por ejemplo, si  $V = \mathbb{R}^3$  una posible base de  $V$  es:

$$B = \{(1 \ 0 \ 0), (0 \ 1 \ 0), (0 \ 0 \ 1)\} .$$

Pero otras posibles bases de  $V$  son:

$$B_1 = \{(2 \ 0 \ 0), (0 \ 1 \ 0), (0 \ 0 \ 1)\} ,$$

$$B_2 = \{(1 \ 1 \ 1), (1 \ 1 \ 0), (1 \ 0 \ 0)\} .$$

En general, una base cualquiera de  $\mathbb{R}^3$  estará formada por tres vectores linealmente independientes que pertenezcan a  $\mathbb{R}^3$ . Cuando el espacio vectorial en sí mismo es un conjunto finito entonces necesariamente existe un número finito de bases.

Si  $V$  es un espacio vectorial de dimensión finita, entonces todas las bases de  $V$  serán finitas y tendrán la misma cantidad de elementos.

No todas las bases tienen un número finito de elementos. Por ejemplo, las bases del espacio vectorial de los polinomios tienen infinitos elementos. Una posible base es la formada por las potencias de  $X$ :

$$B = \{1, x, x^2, x^3, \dots\} .$$

## 2.4 Dimensión vectorial

La dimensión de un espacio vectorial se define como el número de elementos o cardinal de una base de dicho espacio [2]. De este modo:

- la dimensión de  $\mathbb{R}^n$  es  $n$ .
- la dimensión de las matrices de tamaño  $m \times n$  es  $m \times n$ .
- la dimensión de los polinomios de grado  $n$  es  $n + 1$ .

## 2.5 Ortogonalidad en espacios vectoriales

Formalmente, en un espacio vectorial  $V$ , dos vectores  $x \in V$  y  $y \in V$  son ortogonales si el producto escalar de  $(x, y)$  es cero. Esta situación denota que  $x$  y  $y$  son perpendiculares. Además, un conjunto  $A$  se dice que es ortogonal a otro conjunto  $B$ , si cualquiera de los vectores de  $A$  es ortogonal a cualquiera de los vectores del conjunto  $B$  [2].

## 2.6 Productos interiores definidos en espacios vectoriales

En el espacio vectorial  $\mathbb{R}^n$  se suele definir el producto interior (llamado, en este caso en concreto, *producto punto*) por [2]:

$$A \cdot B = (a_1, a_2, a_3, \dots, a_n) \cdot (b_1, b_2, b_3, \dots, b_n) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n. \quad (2.3)$$

En el espacio vectorial  $\mathbb{C}^n$  se suele definir el producto interior por [2]:

$$A \cdot B = (a_1, a_2, a_3, \dots, a_n) \cdot (b_1, b_2, b_3, \dots, b_n) = a_1 \bar{b}_1 + a_2 \bar{b}_2 + \dots + a_n \bar{b}_n. \quad (2.4)$$

En el espacio vectorial de las matrices de  $m \times n$  elementos [2]:

$$A \cdot B = \text{tr}(B^t A), \quad (2.5)$$

donde  $\text{tr}$  es la traza de la matriz.



## 2.7 Rango de una matriz

El rango de una matriz  $A$  de tamaño  $m \times n$  es el número de columnas (filas respectivamente) que son linealmente independientes [1]. El rango fila y el columna son iguales, este número es llamado simplemente rango de  $A$ . Comúnmente se expresa como  $Rang(A)$ .

El número de columnas independientes de una matriz  $A$  de tamaño  $m \times n$  es igual a la dimensión del espacio columna de  $A$  [1]. También la dimensión del espacio fila determina el rango.

## 2.8 Vectores y valores propios

Los vectores propios, autovectores o eigenvectores de un operador lineal son los vectores no nulos que, cuando son transformados por el operador, dan lugar a un múltiplo escalar de sí mismos, con lo que no cambian su dirección. Este escalar  $\lambda$  recibe el nombre valor propio, autovalor, valor característico o eigenvalor. A menudo, una transformación queda completamente determinada por sus vectores propios y valores propios. Un espacio propio, autoespacio o eigenespacio es el conjunto de vectores propios con un valor propio común [1].

Formalmente, se definen los vectores propios y valores propios de la siguiente manera:

Si  $A:V \rightarrow V$  es un operador lineal en un cierto espacio vectorial  $V$ ,  $v$  es un vector diferente de cero en  $V$  y  $\lambda$  es un escalar tales que  $Av = \lambda v$ , entonces se dice que  $v$  es un vector propio del operador  $A$ , y su valor propio asociado es  $\lambda$ .

Una herramienta importante para encontrar valores propios de matrices cuadradas es el polinomio característico: decir que  $\lambda$  es un valor propio de  $A$  es equivalente a decir que el sistema de ecuaciones lineales  $(A - \lambda I)v = 0$  (donde  $I$  es la matriz identidad) tiene una solución no nula  $v$  (un vector propio), y de esta forma es equivalente al determinante [1]:

$$\det(A - \lambda I) = 0 . \quad (2.6)$$

La función  $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$  es un polinomio de  $\lambda$  pues los determinantes se definen como sumas de productos. Éste es el polinomio característico de  $A$ : los valores propios de una matriz son los ceros de su polinomio característico.

Todos los valores propios de una matriz  $A$  pueden calcularse resolviendo la ecuación  $p(\lambda) = 0$ .

Si  $A$  es una matriz  $n \times n$ , entonces  $p(\lambda)$  tiene grado  $n$  y  $A$  tiene al menos  $n$  valores propios.

El teorema fundamental del álgebra dice que esta ecuación tiene exactamente  $n$  raíces (ceros), teniendo en cuenta su multiplicidad. Todos los polinomios reales de grado impar tienen un número real como raíz, así que para  $n$  impar toda matriz real tiene al menos valor propio real. En el caso de las matrices reales, para  $n$  par e impar, los valores propios no reales son pares conjugados.

Una vez que se conocen los valores propios  $\lambda$ , los vectores propios se pueden hallar resolviendo:  $(A - \lambda I)v = 0$ .

En la práctica, los valores propios de las matrices extensas no se calculan usando el polinomio característico. Calcular el polinomio resulta muy costoso, y extraer las raíces exactas de un polinomio de grado alto puede ser difícil de calcular y expresar: el teorema de Abel-Ruffini implica que las raíces de los polinomios de grado alto (5 o superior) no pueden expresarse usándose simplemente raíces enésimas. Existen algoritmos eficientes para aproximar raíces de polinomios, pero pequeños errores en la estimación de los valores propios pueden dar lugar a errores grandes en los vectores propios. En consecuencia, los algoritmos generales para encontrar vectores propios y valores propios son iterativos. La manera más fácil es el método de las potencias: se escoge un vector aleatorio  $v$  y se calcula una secuencia de vectores unitarios:

$$\frac{Av}{\|Av\|}, \frac{A^2v}{\|A^2v\|}, \frac{A^3v}{\|A^3v\|}, \dots \quad (2.7)$$

Esta secuencia casi siempre convergerá a un vector propio correspondiente al mayor valor propio. Este algoritmo es sencillo, pero no demasiado útil aisladamente. Sin embargo, hay métodos más populares, como la descomposición  $QR$ .

La multiplicidad algebraica de un valor propio  $\lambda$  de  $A$  es el orden de  $\lambda$  como cero del polinomio característico de  $A$ ; en otras palabras, si  $\lambda$  es una de las raíces del polinomio, es el número de factores  $(t - \lambda)$  en el polinomio característico tras la factorización. Una matriz  $n \times n$  tiene  $n$  valores propios, contados de acuerdo con su multiplicidad algebraica, ya que su polinomio característico tiene grado  $n$ .

Un vector propio conjugado es un vector que tras la transformación pasa a ser un múltiple escalar de su conjugado, donde el escalar recibe el nombre de valor propio conjugado de la transformación lineal. Los vectores propios y valores propios conjugados representan esencialmente la misma información y significado que los vectores propios y valores propios, pero aparecen cuando se utiliza un sistema de coordenadas alternativo. La ecuación correspondiente es [1]:

$$Av = \lambda v^* . \quad (2.8)$$

### 3. VARIABLES ALEATORIAS

#### 3.1 Variables Aleatorias Continuas

El caso más importante (y el que se encuentra con más frecuencia) aparece cuando  $X$  es una variable aleatoria continua con fdp (Función de Densidad de probabilidad)  $f$  y  $H$  es una función continua. Por tanto  $Y = H(X)$  es una variable aleatoria continua, y el propósito será obtener su fdp, llamada  $g$ .

El procedimiento general será así [3]:

- a. Obtener  $G$ , la fda (Función de Distribución Acumulativa) de  $Y$ , en donde  $G(y) = P(Y \leq y)$ , al encontrar el suceso  $A$  (en el recorrido de  $X$ ) que es equivalente al suceso  $\{Y \leq y\}$ .
- b. Diferenciar  $G(y)$  con respecto a  $y$  para obtener  $g(y)$ .
- c. Determinar los valores de  $y$  en el recorrido de  $Y$  para los cuales  $g(y) > 0$ .

#### 3.2 El valor esperado de una variable aleatoria continua

En los modelos matemáticos no determinísticos o aleatorios, los parámetros también pueden usarse para señalar la distribución de probabilidades. Con cada distribución de probabilidades se pueden asociar ciertos parámetros que dan información valiosa acerca

de la distribución (tal como la pendiente de una recta da una información útil acerca de la relación lineal que representa) [3].

Existe una manera de establecer la fdp de una variable aleatoria en función de algunos parámetros numéricos apropiados, entre los que se encuentra el valor esperado.

Sea  $X$  una variable aleatoria continua con fdp  $f$ . El valor esperado de  $X$  se define como:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx . \quad (3.1)$$

Puede suceder que esta integral (impropia) no converja. Por tanto se dice que  $E(X)$  existe si y solo si:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} |x|f(x)dx , \quad (3.2)$$

es finita.

### 3.3 La varianza de una variable aleatoria

Suponiendo que para una variable aleatoria  $X$  se encuentra que  $E(X)$  es igual a 2. ¿Cuál es la importancia de esto? Es importante que no se atribuya más significado a esta información que la justificada. Significa, sencillamente, que si se considera un gran número de valores de  $X$ ,  $x_1, \dots, x_n$ , y si se promedian esos valores de  $X$ , este promedio se aproximará a 2 si  $n$  es grande. Sin embargo, es muy importancia que no se dé mucha importancia a este valor esperado. Por ejemplo, supóngase que  $X$  representa la duración de una bombilla que se recibe de un fabricante, y que  $E(X) = 1000$  horas. Esto podría significar una de varias posibilidades. Podría significar que se espera que la mayor parte de las bombillas dure entre 900 y 1100 horas. También podría significar que las bombillas que se entregan están formadas por dos tipos de bombillas muy diferentes: alrededor de la mitad son de muy alta calidad y con duración de cerca de 1300 horas, mientras que la otra mitad son de muy mala calidad y durarán cerca de 700 horas [3].

Hay una necesidad obvia de presentar una medida cuantitativa que distinga entre tales situaciones. Varias medidas se sugieren por sí mismas, pero la siguiente es la cantidad usada más comúnmente.

Sea  $X$  una variable aleatoria, se define la varianza de  $X$ , denotada por  $V(X)$  o  $\sigma_X^2$ , como sigue [3]:

$$V(X) = E[X - E(X)]^2. \quad (3.3)$$

La raíz cuadrada positiva de  $V(X)$  se llama desviación estándar de  $X$  y está denotada por  $\sigma_X$ .

Se definen las siguientes observaciones:

- El número  $V(X)$  está expresado en unidades cuadradas de  $X$ . Esto es, si  $X$  se mide en horas, entonces  $V(X)$  está expresada en  $(\text{horas})^2$ . Esta es una razón para considerar la desviación estándar. Se expresa en las mismas unidades que  $X$ .
- Otra medida posible podría haber sido  $E|X - E(X)|$ . Por diferentes razones, una de las cuales es que  $X^2$  es una función mejor comportada que  $|X|$ , se prefiere la varianza.
- $V(X)$  como se definió en (3.3) es un caso especial del concepto más general siguiente. El  $k$ -ésimo momento de la variable aleatoria  $X$  respecto a su esperanza se define como  $\mu_k = E[X - E(X)]^k$ . Evidentemente para  $k = 2$ , se obtiene la varianza.

La expresión (3.3) puede desarrollarse de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} V(X) &= E[X - E(X)]^2, \\ V(X) &= E\{X^2 - 2XE(X) + [E(X)]^2\}, \\ V(X) &= E(X^2) - 2E(X)E(X) + [E(X)]^2, \\ V(X) &= E(X^2) - 2[E(X)]^2 + [E(X)]^2, \\ V(X) &= E(X^2) - [E(X)]^2. \end{aligned} \quad (3.4)$$

La expresión (3.4) simplifica el cálculo de  $V(X)$ .

### 3.4 La distribución normal o gaussiana

La variable aleatoria  $X$ , que toma todos los valores reales  $-\infty < x < +\infty$ , tiene una distribución normal o gaussiana si su fdp es de la forma [3]:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{1}{2}\left[\frac{x-\mu}{\sigma}\right]^2\right), \quad -\infty < x < +\infty, \quad (3.5)$$

donde los parámetros  $\mu$  y  $\sigma$  deben satisfacer las condiciones  $-\infty < \mu < +\infty$ ,  $\sigma > 0$  y la notación  $\exp(t)$  representa  $e^t$ . Frecuentemente, la distribución gaussiana tiene la notación  $N(\mu, \sigma^2)$ .

La distribución gaussiana sirve como una aproximación excelente a una gran cantidad de distribuciones que tienen mucha importancia práctica. Aún más, esta distribución tiene varias propiedades matemáticas apreciables que hacen posible deducir importantes resultados teóricos.

#### 3.4.1 Propiedades de la distribución gaussiana

- a. Suponiendo que  $f$  es una fdp legítima y evidentemente  $f(x) \geq 0$ . Además se debe verificar que  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$ . Definiendo  $t = \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$ , se puede escribir  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$  como  $\left(1/\sqrt{2\pi}\right) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2/2} dt = I$ .

El “truco” utilizado para evaluar esta integral es considerar en lugar de  $I$ , el cuadrado de esta integral, llamada  $I^2$ . Así:

$$I^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2/2} dt \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-s^2/2} ds,$$

$$I^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(s^2+t^2)/2} ds dt.$$

Se introducen las siguientes coordenadas polares:

$$s = r \cos \alpha, \quad t = r \operatorname{sen} \alpha.$$

Luego el elemento de área  $dsdt$  se transforma en  $rdrd\alpha$ . Cuando  $s$  y  $t$  varían entre  $-\infty$  y  $+\infty$ , mientras que  $r$  varía entre  $0$  y  $\infty$ , mientras que  $\alpha$  varía entre  $0$  y  $2\pi$ . Luego:

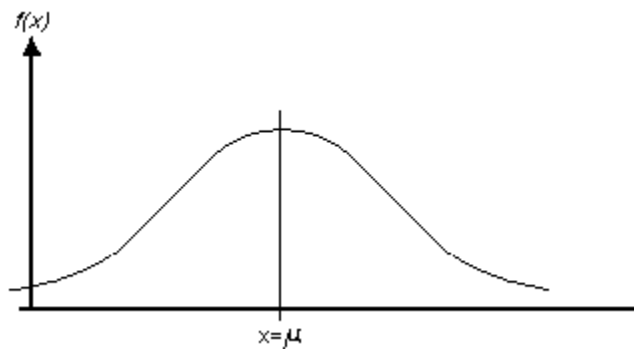
$$I^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{+\infty} r e^{-r^2/2} dsd\alpha,$$

$$I^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} -e^{-r^2/2} \Big|_0^{\infty} d\alpha,$$

$$I^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\alpha = 1,$$

por lo tanto  $I = 1$  como se quería demostrar [3].

- b. Considerando la forma del gráfico de  $f$ , tiene la muy conocida forma de campana indicada en la figura 1.



**FIGURA 1.** Gráfica de la fdp gaussiana

Puesto que  $f$  depende sólo de  $x$  mediante la expresión  $(x - \mu)^2$ , es evidente que el gráfico de  $f$  será simétrico respecto a  $\mu$ .

El parámetro  $\sigma$  puede interpretarse geoméricamente. Obsérvese que para  $x = \mu$  el gráfico de  $f$  es cóncavo hacia abajo. Cuando  $x \rightarrow \pm\infty$ ,  $f(x) \rightarrow 0$ ,



asintóticamente. Puesto que  $f(x) \geq 0$  para todo  $x$ , esto significa que para grandes valores de  $x$  (positivos o negativos), el gráfico de  $f$  es cóncavo hacia arriba. El punto en el cual cambia la concavidad se llama punto de inflexión y se determina al resolver la ecuación  $f''(x) = 0$ . Cuando se hace esto, se encuentra que los puntos de inflexión ocurren en  $x = \mu \pm \sigma$ . Esto es,  $\sigma$  unidades a la derecha y a la izquierda de  $\mu$  el gráfico de  $f$  cambia de concavidad. Así, si  $\sigma$  es relativamente grande, el gráfico de  $f$  tiende a ser achatado, mientras que si  $\sigma$  es pequeño el gráfico de  $f$  tiende a ser muy aguzado [3].

- c. Además de la interpretación geométrica de los parámetros  $\mu$  y  $\sigma$ , la siguiente interpretación probabilística puede asociarse con esas cantidades. Considérese:

$$E(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} x \exp\left(-\frac{1}{2}\left[\frac{x-\mu}{\sigma}\right]^2\right) dx . \quad (3.6)$$

Haciendo  $z = (x - \mu)/\sigma$  y observando que  $dx = \sigma dz$ , se obtiene:

$$E(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (\sigma z + \mu) e^{-z^2/2} dz ,$$

$$E(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sigma \int_{-\infty}^{+\infty} z e^{-z^2/2} dz + \mu \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2/2} dz . \quad (3.7)$$

La primera de las integrales de la expresión (2.7) es igual a cero puesto que el integrando  $g(z)$ , tiene la propiedad de que  $g(z) = -g(-z)$ , y por lo tanto  $g$  es una función impar. La segunda integral (sin el factor  $\mu$ ) representa el área total bajo la fdp gaussiana y ,por lo tanto, es igual a la unidad. Luego  $E(x) = \mu$ .

A continuación se considera:

$$E(X^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \exp\left(-\frac{1}{2}\left[\frac{x-\mu}{\sigma}\right]^2\right) dx . \quad (3.8)$$

Haciendo nuevamente  $z = (x - \mu)/\sigma$ , se obtiene:

$$E(X^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-\infty} (\sigma z + \mu)^2 e^{-z^2/2} dz ,$$

$$E(X^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-\infty} \sigma^2 z^2 e^{-z^2/2} dz + 2\mu\sigma \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-\infty} z e^{-z^2/2} dz$$

$$+ \mu^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} . \quad (3.9)$$

La segunda integral de la expresión (2.9) nuevamente es igual a cero por el argumento usado anteriormente. La última integral (sin el factor  $\mu^2$ ) es igual a la unidad. Para calcular  $\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right) \int_{-\infty}^{+\infty} z^2 e^{-z^2/2} dz$  se integra por partes haciendo  $z e^{-z^2/2} = dv$  y  $z = u$ . Luego  $v = -e^{-z^2/2}$  mientras que  $dz = du$ . Se obtiene:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-\infty} z^2 e^{-z^2/2} dz = \frac{-z e^{-z^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \Big|_{-\infty}^{+\infty} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-\infty} e^{-z^2/2} dz = 0 + 1 = 1 .$$

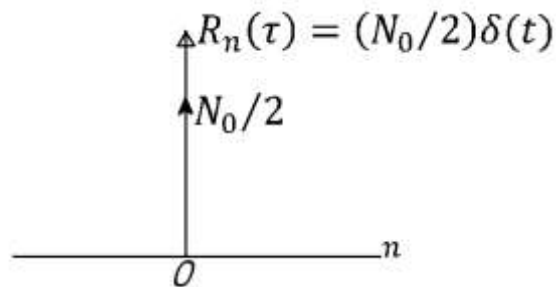
Luego,  $E(X^2) = \sigma^2 + \mu^2$ , por tanto  $V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \sigma^2$ . Así se encuentra que los dos parámetros  $\mu$  y  $\sigma^2$  que caracterizan la distribución gaussiana son la esperanza y la varianza de  $X$ , respectivamente [3].

### 3.5 Aplicación de la distribución gaussiana en las telecomunicaciones

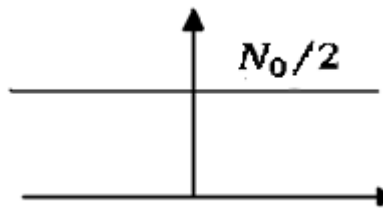
La tarea del demodulador o detector es recuperar el flujo de bits a partir de la forma de onda recibida, libre de error en la medida de lo posible, sin importar la distorsión de la señal. Existen dos causas principales de distorsión. La primera la forman los efectos de filtrado del transmisor, el canal, y el receptor. La segunda causa para la distorsión de señales es el ruido producido por diferentes fuentes, tales como ruido galáctico, ruido

terrestre, ruido en el amplificador, y señales indeseables de otras fuentes. Una causa inevitable de ruido es la movilidad de los electrones en los medios conductores. Tal movilidad produce ruido térmico en los circuitos electrónicos que degrada la señal en forma aditiva; es decir, la señal recibida  $r(t)$  es la suma de la señal transmitida  $s(t)$  y del ruido térmico  $n(t)$  denominado AWGN (Additive White Gaussian Noise, Ruido Aditivo Blanco Gaussiano). La estadística del ruido ha sido desarrollada usando mecánica cuántica y es bien conocida.

El ruido es una variable aleatoria y sólo puede ser modelado a través de su fdp (figura 1), su autocorrelación (figura 2), y su densidad espectral de potencia bilateral (figura 3).



**FIGURA 2.** Autocorrelación del AWGN



**FIGURA 3.** Densidad espectral de potencia del AWGN

donde  $N_0$  es la densidad espectral de potencia de ruido.

Para la detección de señales, el ruido puede partitionarse en dos componentes como:

$$n(t) = \tilde{n}(t) + \hat{n}(t), \quad (3.10)$$

donde  $\tilde{n}(t)$  puede ser visto como el ruido que no es sintonizado por el detector y  $\hat{n}(t)$  representa el ruido que interfiere con el proceso de detección.

El ruido  $n(t)$  se puede expresar mediante un vector de sus coeficientes de la forma:

$$\mathbf{n} = (n_1, n_2, \dots, n_N), \quad (3.11)$$

donde  $\mathbf{n}$  es un vector aleatorio con media cero y distribución gaussiana, las componentes  $n_i (i = 1, \dots, N)$  son independientes y  $N$  es el número de símbolos que componen la señal que llega a la recepción del sistema.

El ruido blanco es un proceso ideal con densidad de potencia bilateral constante e igual a  $N_0/2$  para todas las frecuencias desde  $-\infty$  a  $+\infty$ . Por lo tanto, la varianza de ruido (potencia promedia de ruido con media cero) es:

$$P_n = \sigma^2 = V(n(t)) = \int_{-\infty}^{+\infty} G_N(f) df = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{N_0}{2} df = \infty. \quad (3.12)$$

No obstante que la varianza de AWGN es infinita, la varianza de ruido filtrado es finita. Por ejemplo, si el AWGN es correlacionado con una función de un conjunto ortogonal  $\Psi_j(t)$ , la varianza a la salida del correlador está dada por:

$$\sigma^2 = V(n_j) = E \left\{ \left[ \int_0^T n(t) \Psi_j(t) dt \right]^2 \right\} = \frac{N_0}{2}. \quad (3.13)$$

Para simplificar el análisis, se puede asumir que el ruido de interés en el proceso de detección es el ruido a la salida del correlador o del filtro acoplado con varianza como lo expresa la ecuación (3.13).

En simulaciones, es común utilizar una respuesta normalizada del ruido, esto es, una varianza unitaria  $\sigma^2 = 1$ . Reemplazando este valor en (3.13) se obtiene una densidad espectral de potencia de ruido  $N_0 = 2$ .

Si se requiere expresar la SNR (Signal Noise Ratio, Relación Señal a Ruido) en decibeles y en función de la energía promedio de símbolo, la expresión a utilizar es:

$$SNR_{dB} = 10 \log \left( \frac{\varepsilon_s}{N_0} \right), \quad (3.14)$$

donde  $\varepsilon_s$  es la energía promedio de símbolo en Joules y  $N_0$  es la densidad espectral de potencia de ruido en  $\text{watts}/\text{Hz}$ .

Reemplazando  $N_0 = 2$  en la expresión (3.14) se obtiene:

$$SNR_{dB} = 10 \log \left( \frac{\varepsilon_s}{2} \right). \quad (3.15)$$

## BIBLIOGRAFÍA

- [1] R. Larson, "Introducción al Álgebra Lineal", Ed. Limusa S.A. de C.V., México 2002, 2004.
- [2] D. Poole, "Álgebra lineal : una introducción moderna", Ed. Thomson, México 2004.
- [3] P. L. Meyer, "Probabilidad y aplicaciones estadísticas", Fondo Educativo Interamericano S.A., México D.F. 1973.

