



## ANEXO A. TEORIA DE WAVELETS

### A.1 Introducción

Las *wavelets* [4] son familias de funciones ortonormales de rango finito con las cuales se puede analizar diversas señales como las sonoras, sísmica, cardíacas, etc, las *wavelets* examinan la señal de interés para obtener sus características de espacio, tamaño y dirección; la familia está definida por:

$$h_{a,b} = \frac{h\left(\frac{x-b}{a}\right)}{\sqrt{|a|}}; a, b \in \mathfrak{R}, a \neq 0 \quad (\text{A.1.1})$$

y son generadas a partir de funciones madre  $h(x)$ . A esa función madre se le agregan un par de variables que son la escala ( $a$ ) que permite hacer dilataciones y contracciones de la señal y la variable de traslación ( $b$ ), que nos permite mover la señal en el tiempo. Estas variables son números reales y para una escala de 0 la función se indetermina. Un ejemplo de una función que cumple con estas condiciones es la función:

$$h(x) = \begin{cases} 1; 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ -1; \frac{1}{2} \leq x < 1 \\ 0; \text{otro\_caso} \end{cases} \quad (\text{A.1.2})$$

y su gráfica se muestra en la *figura A.1*. Ahí podemos ver que efectivamente es una *wavelet* sencilla, sin embargo es muy utilizada para análisis de señales usando transformadas discretas y continuas.

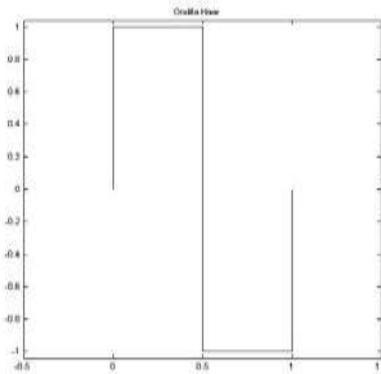


Figura A.1. Wavelet Haar

Otra *wavelet* que es muy utilizada en el análisis de señales es la *Mexican hat*. Cuyo nombre proviene de la forma que describe su gráfica que está definida por:

$$mexh(x) = \frac{2(1-x^2)e^{-x^2/2}}{\pi^{1/4}\sqrt{3}}. \quad (\text{A.1.3})$$

Esta *wavelet* es la segunda derivada de la función de densidad de probabilidad Gaussiana. Como se muestra en la *figura A.2* es simétrica, característica que le permite examinar a las señales de un modo simétrico y lineal en la fase, igual que la *wavelet Haar*. No todas las *wavelet* son simétricas, y la efectividad del análisis de señales es altamente dependiente de la *wavelet* a elegir.

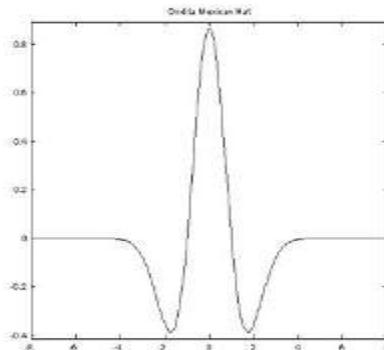
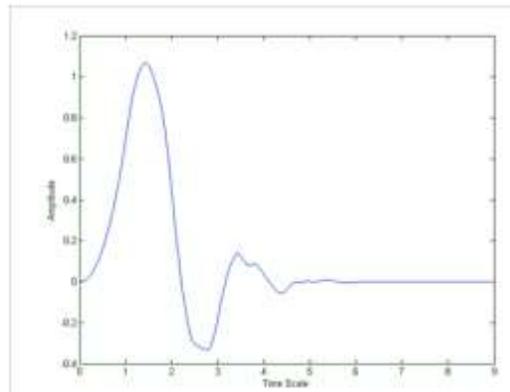


Figura A.2. Wavelet Mexican Hat

Las *wavelets* también se pueden agrupar en familias, como las *Daubechies*. Las familias de *wavelets* se agrupan bajo un orden  $N$  dependiendo del número de momentos de desvanecimiento que se deseen, siendo  $N$  un entero positivo que denota el número de coeficientes de filtro que tiene esa *wavelet*; por ejemplo, la *Daubechies* de orden 1 (*db1*) es la *wavelet Haar* previamente mostrada.

En la *Figura A.3*, podemos ver la *wavelet Daubechies* de orden 5 (*db5*), donde el número de momentos de desvanecimiento es igual al orden de la *wavelet*. Para este caso, la *wavelet db5* tienen los siguientes coeficientes de filtro pasa bajo de descomposición  $\{c_{db5}\} = \{0.0033, -0.0126, -0.0062, 0.0776, -0.0322, -0.2423, 0.1384, 0.7243, 0.6038, 0.1601\}$ . Podemos ver que existe una relación del doble entre los números de coeficiente de filtro y los momentos de desvanecimiento. Esta *wavelet* cuenta con las características de ortogonalidad y biortogonalidad.



*Figura A.3*

## **A.2 Transformada Wavelet Discreta (DWT)**

La transformada *wavelet* se utiliza para la compresión tanto de imágenes como de audio. En el proceso de análisis de la transformada *wavelet*, las señales son representadas utilizando un grupo de funciones básicas producidas por el desplazamiento y el escalado de una función madre o función principal. La transformada *wavelet* es la descomposición de una señal en grupos de funciones [19]. La Transformada *Wavelet* Discreta (*Discrete Wavelet Transform - DWT*) unidimensional descompone recurrentemente la señal de entrada,  $S_0(n)$ , en coeficientes de detalle y de aproximación en cada iteración. Sean  $S_i(n)$  y  $W_i(n)$  los

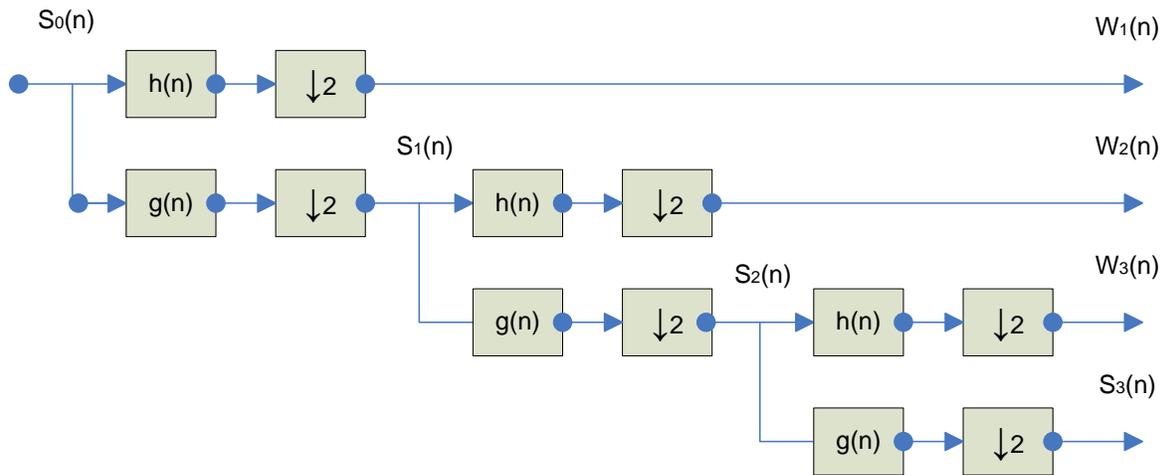
coeficientes de aproximación y detalle respectivamente, y sea  $i$  el nivel de aplicación de la transformada. La aproximación de la señal en el nivel  $i+1$  se calcula usando:

$$S_{i+1}(n) = \sum_k g(k)S_i(2n - k). \quad (\text{A.2.1})$$

Y el detalle de la señal en el nivel  $i+1$  se calcula usando:

$$W_{i+1}(n) = \sum_k h(k)S_i(2n - k). \quad (\text{A.2.2})$$

Las ecuaciones (A.2.1) y (A.2.2) describen la computación de la DWT. Esta técnica de cálculo de la DWT es a menudo referenciada como el algoritmo piramidal o algoritmo de Mallat [2]. Los tres niveles de cálculo de la DWT 1-D se muestran en la *figura A.4*.



*Figura A.4. Diagrama de bloques del banco de Filtros de la DWT*

La DWT bidimensional se consigue aplicando la transformada multi-resolución en cada sentido, la cual es usada comúnmente para la compresión de imágenes. Tal como los filtros 1-D se utilizan para computar la DWT 1-D, para computar la DWT 2-D utilizamos filtros 2-D calculados a partir de la convolución de los filtros 1-D sobre ellos mismos. Estos filtros 2-D pueden ser separables o no separables, donde un filtro 2-D  $f(n1, n2)$  es separable si es expresable como  $f(n1, n2) = f1(n1) f2(n2)$ . La DWT 2-D separable descompone una imagen

$S_i(n_1, n_2)$  en una imagen aproximación y tres imágenes detalle, de acuerdo con las expresiones:

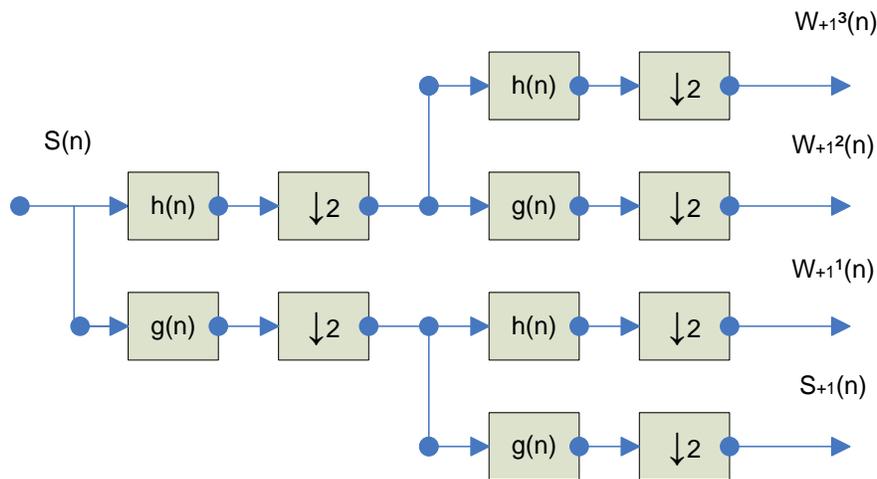
$$S_{i+1}(n_1, n_2) = \sum_{k_1} \sum_{k_2} g(k_1)g(k_2)S_i(2n_1 - k_1, 2n_2 - k_2) \quad (\text{A.2.3})$$

$$W_{i+1}^1(n_1, n_2) = \sum_{k_1} \sum_{k_2} g(k_1)h(k_2)S_i(2n_1 - k_1, 2n_2 - k_2) \quad (\text{A.2.4})$$

$$W_{i+1}^2(n_1, n_2) = \sum_{k_1} \sum_{k_2} h(k_1)g(k_2)S_i(2n_1 - k_1, 2n_2 - k_2) \quad (\text{A.2.5})$$

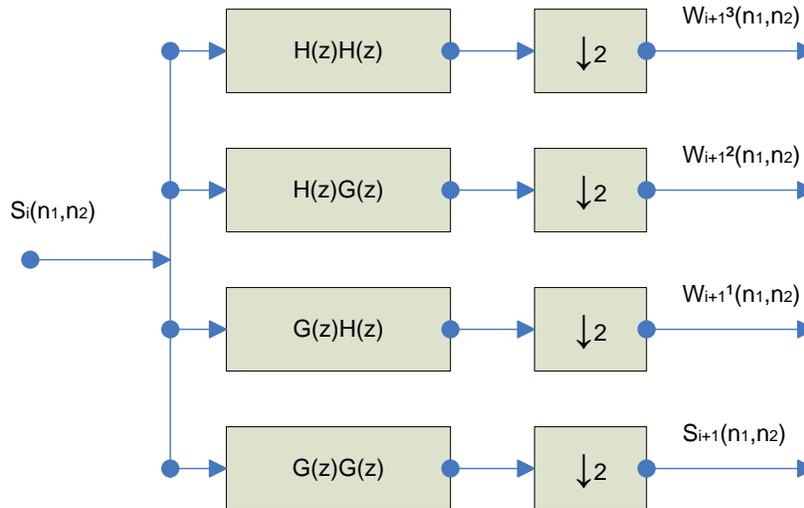
$$W_{i+1}^3(n_1, n_2) = \sum_{k_1} \sum_{k_2} h(k_1)h(k_2)S_i(2n_1 - k_1, 2n_2 - k_2) \quad (\text{A.2.6})$$

La señal  $S_{i+1}(n_1, n_2)$  es un suavizado de baja resolución de la imagen  $S_i(n_1, n_2)$ . Este suavizado se calcula desde  $S_i(n_1, n_2)$  mediante dos filtros pasa-bajo. Las señales  $W_{i+1}^1(n_1, n_2)$ ,  $W_{i+1}^2(n_1, n_2)$  y  $W_{i+1}^3(n_1, n_2)$  contienen el detalle de  $S_i(n_1, n_2)$ . El nivel 1 de la DWT 2-D se calcula como muestra la *figura A.5*.

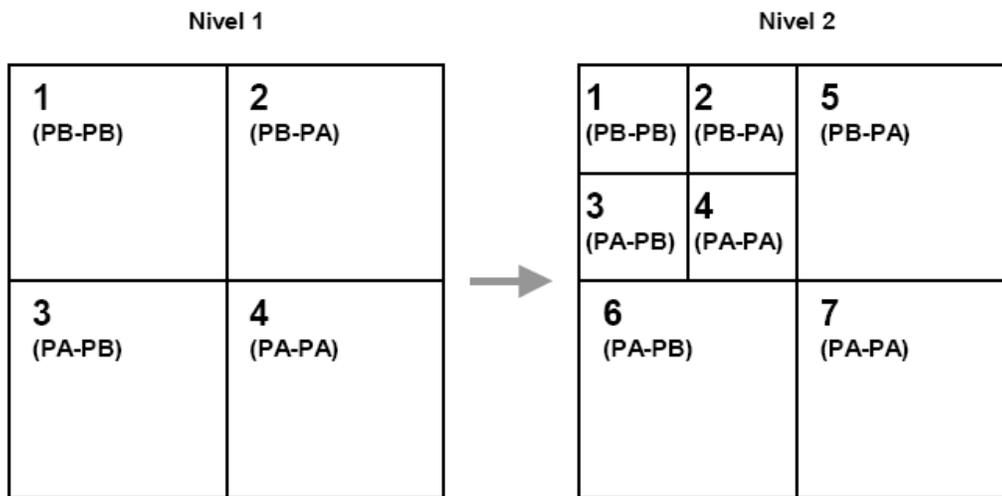


*Figura A.5. Diagrama de bloques del banco de filtros de análisis utilizado para calcular la DWT 2-D.*

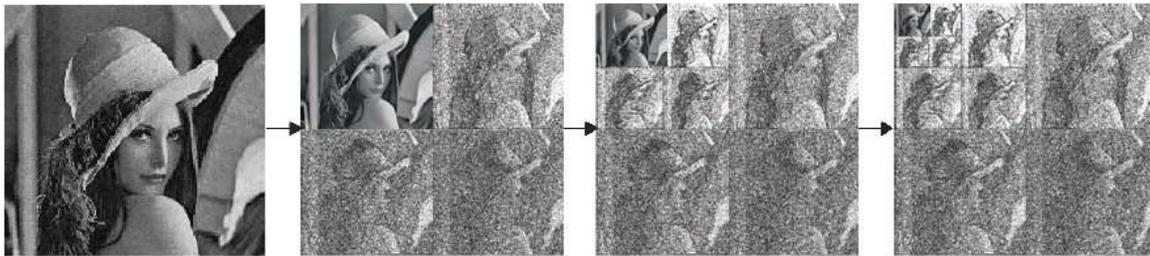
En contraste con los filtros separables, los filtros no separables descomponen directamente una imagen en cuatro sub-imágenes resultados de la aplicación de la DWT por filas y posteriormente por columnas. La *figura A.6* muestra la arquitectura de la DWT no separable con dos niveles de resolución. Hay que notar que cada bloque en esta arquitectura es un filtro 2-D submuestreado. La *figura A.7* ilustra la descomposición en 8 bandas de una imagen utilizando la DWT 2-D.



*Figura A.6. Diagrama de bloques del banco de filtros de análisis utilizado para calcular la DWT 2-D no-separable.*



*Figura A.7. Aplicación de 2 niveles de descomposición wavelet.*



*Figura A.8. Descomposición de la imagen Lena.*

Chakrabarti y Vishwanath [7] propusieron una arquitectura VLSI para la DWT no-separable 2-D con una estructura de filtro paralelo que mejora las desventajas de los filtros separables. Los componentes hardware de esta arquitectura incluyen  $2L^2$  multiplicadores programables,  $2(L^2-1)$  sumadores,  $2NL$  memorias de almacenamiento y una unidad de control, donde  $L$  es la longitud del filtro y  $N$  es el tamaño de columna de una imagen. La estructura de filtro paralelo utiliza el algoritmo piramidal recursivo modificado en 2-D para construir la arquitectura de la DWT 2-D completa, tal que el tiempo de computación puede alcanzar alrededor de  $O(N^2)$ . Esta arquitectura adopta filtros no separables, necesarios para no transponer memoria entre filas y columnas de la DWT. Como resultado, reduce considerablemente el espacio de memoria y el tiempo de latencia. Sin embargo, esta arquitectura contiene un número relativamente alto de componentes hardware lo que entrega un coste muy elevado para la realización de la DWT 2-D no separable.