

ANÁLISIS DEL DESEMPEÑO DE LA MODULACIÓN WAVELET



TRABAJO DE GRADO

Jesús Mauricio Ramírez Viáfara

José Alejandro Moreno Peña

Director: Msc. Harold Armando Romo Romero

Universidad del Cauca

Facultad de Ingeniería Electrónica y Telecomunicaciones

Grupo I+D GNTT

Departamento de Telecomunicaciones

Popayán, Julio de 2009

TABLA DE CONTENIDO

	Pág.
1. INTRODUCCIÓN _____	1
2. ESQUEMAS LINEALES DE TRANSMISIÓN DIGITAL _____	3
2.1. INTRODUCCIÓN _____	3
2.2. TRANSMISIÓN DIGITAL EN BANDA BASE _____	5
2.3. TRANSMISIÓN DIGITAL PASA BANDA LINEAL _____	20
3. CONCEPTOS DE LA TRANSFORMADA WAVELET DISCRETA _____	30
3.1. TRANSFORMADA WAVELET CONTÍNUA _____	30
3.2. TRANSFORMADA WAVELET DISCRETA _____	32
3.3. ANÁLISIS MULTIRESOLUCIÓN _____	33
3.4. ALGORITMO DE MALLAT _____	35
3.5. CARACTERÍSTICAS ESPECTRALES DE LAS WAVELETS _____	38
4. TEORÍA DE LA MODULACIÓN WAVELET _____	46
4.1. INTODUCCIÓN _____	46
4.2. MODULACIÓN WAVELET A ESCALA ÚNICA, BINARIA, EN BANDA BASE _____	46
4.3. MODULACIÓN WAVELET A ESCALA UNICA, PASABANDA, BINARIA _____	51
4.4. MODULACIÓN WAVELET A ESCALA ÚNICA, M-ARIA _____	56
4.5. MODULACIÓN WAVELET MULTI-ESCALA BINARIA _____	60
4.6. MODULACIÓN WAVELET MULTI-ESCALA M-ARIA _____	65
5. SIMULACIÓN Y RESULTADOS DE LA MODULACIÓN WAVELET _____	69
5.1. ASPECTOS RELACIONADOS CON LA IMPLEMENTACIÓN DE LOS ALGORITMOS EN TIEMPO DISCRETO _____	69
5.2. DESCRIPCIÓN DEL SISTEMA _____	72

5.3.	IDENTIFICACIÓN DE VARIABLES	74
5.4.	MODELO DEL SISTEMA	75
5.5.	IMPLEMENTACIÓN Y PRUEBAS DE VALIDACIÓN	84
5.6.	RESULTADOS DE LA SIMULACIÓN	87
6.	CONCLUSIONES	97
7.	REFERENCIAS	100
8.	APÉNDICES	101
9.	ANEXOS	122

ÍNDICE DE FIGURAS

	Pág.
Figura 2.1. Diagrama en bloques de un sistema genérico de transmisión digital _____	4
Figura 2.2. Diagrama en bloques de un sistema de transmisión digital banda base de M estados (M -ario _____)	5
Figura 2.3. Diagrama de constelación para una señal M-PAM con $M = 8$ _____	6
Figura 2.4. Conversión de señalización unipolar a polar _____	6
Figura 2.5. Señal cuyas muestras cumplen la condición de Nyquist _____	11
Figura 2.6. a) Pulso de coseno <i>roll off</i> para distintos valores del factor de <i>roll off</i> . b) Espectros correspondientes _____	12
Figura 2.7. Diagramas de ojo para una señal 4-PAM con distintos valores del parámetro α . a) $\alpha = 0.1$. b) $\alpha = 0.9$ _____	14
Figura 2.8. Sistema de transmisión usando codificación duobinaria simple _____	16
Figura 2.9. a) Respuesta en amplitud y fase del filtro duobinario simple. b) Respuesta al impulso _____	17
Figura 2.10. Implementación física equivalente del sistema duobinario simple _____	18
Figura 2.11. Sistema de comunicación usando codificación duobinaria modificada _____	18
Figura 2.12. a) Respuesta en amplitud y fase del filtro duobinario modificado b) Respuesta impulsiva _____	19
Figura 2.13. Implementación física equivalente del sistema duobinario Modificado _____	20
Figura 2.14. Traslación espectral directa en modulación lineal _____	21
Figura 2.15. Sistema de transmisión digital lineal pasabanda M-ario _____	22
Figura 2.16. Constelaciones representativas de los tres esquemas básicos de modulación digital lineal. a) 4-ASK. b) 8-PSK. c) 16-QAM _____	25

Figura 2.17. Densidad espectral de potencia de una señal digital modulada linealmente en pasabanda y utilizando formación de pulso de coseno <i>roll off</i>	28
Figura 2.18. a) Señal 4-PSK con factor <i>roll off</i> igual a 0.7. b) Señal 16-QAM con el mismo factor de <i>roll off</i>	29
Figura 3.1. Implementación de la FWT mediante un banco de filtros	36
Figura 3.2. Diagrama de la IFWT con banco de filtros	37
Figura 3.3. <i>Wavelet</i> de Haar y su espectro	40
Figura 3.4. <i>Wavelet</i> Daubechies $N = 2$ y su espectro	40
Figura 3.5. <i>Wavelet</i> Daubechies $N = 5$ y su espectro	41
Figura 3.6. <i>Wavelet</i> Daubechies $N = 8$ y su espectro	42
Figura 3.7. <i>Wavelet symlet</i> $N = 4$ y su espectro	42
Figura 3.8. <i>Wavelet symlet</i> $N = 8$ y su espectro	43
Figura 3.9. <i>Wavelet coiflet</i> $N = 1$ y su espectro	44
Figura 3.10. <i>Wavelet coiflet</i> $N = 4$ y su espectro	44
Figura 3.11. <i>Wavelet</i> Meyer discreta y su espectro	45
Figura 4.1. Aspecto de una señal modulada en <i>wavelet</i> a escala única en banda base, a partir de un mensaje binario arbitrario	48
Figura 4.2. Espectro de potencia de la señal modulada	48
Figura 4.3. Aspecto de una señal modulada en <i>wavelet</i> banda base con la <i>wavelet</i> de Haar y su equivalencia al código Manchester	49
Figura 4.4. Diagrama en bloques del sistema de modulación <i>wavelet</i> banda base a escala única	51
Figura 4.5. Diagrama en bloques del sistema de comunicación con modulación <i>wavelet</i> DSB-SC de escala única	51
Figura 4.6. Aspecto de una señal modulada <i>wavelet</i> en doble banda lateral con portadora suprimida y su espectro de potencia	52
Figura 4.7. Espectro de la señal modulada en <i>wavelet</i> SSB a partir de la señal modulada en DSB-SC	54
Figura 4.8. Aspecto de la señal modulada en SSB, junto con la señal DSB-SC y el mensaje digital	54
Figura 4.9. Comparación entre la señal sin pre-filtraje (izquierda) y con pre-filtraje pasabanda (derecha)	55

Figura 4.10. Sistema de comunicación con modulación <i>wavelet</i> SSB binaria	55
Figura 4.11. Diagrama en bloques de un sistema de comunicación con modulación <i>wavelet M-aria</i> banda base, a escala única	56
Figura 4.12. Diagrama de constelación lineal con $M = 8$	56
Figura 4.13. Sistema de comunicación usando modulación <i>wavelet</i> SSB binaria a escala única	57
Figura 4.14. a) Constelación cuadrada para $M = 16$ símbolos. b) Espectro de potencia de una señal <i>WM MQ-aria</i> , con $M = 16$, $f_c = 8\text{Hz}$ y $R_b = 4\text{ bps}$	59
Figura 4.15. Sistema de comunicación para el esquema de modulación <i>wavelet MQ-ario</i> a escala única	59
Figura 4.16. Gráfico ilustrativo del proceso de división y asignación de datos a cada nivel de resolución	61
Figura 4.17. Gráfico de la eficiencia espectral en función del número de niveles de resolución	63
Figura 4.18. Proceso de formación de la señal modulada <i>wavelet multi-escala</i> , con tres niveles de resolución, usando la <i>wavelet symlet</i> de orden 5	64
Figura 4.19. Diagrama en bloques del sistema de comunicación <i>WM_MS banda base</i>	64
Figura 4.20. Sistema de comunicación usando <i>WM_MS SSB</i>	65
Figura 4.21. Diagrama en bloques de un sistema con modulación <i>M-WM_MS BB</i>	66
Figura 4.22. Sistema de comunicación con <i>M-WM_MS SSB</i>	66
Figura 4.23. Diagrama en bloques del sistema de comunicación usando modulación <i>MQ-WM_MS</i>	67
Figura 5.1. Ilustración del proceso de introducción de los datos para la modulación <i>wavelet</i> a escala única	70
Figura 5.2. Espectro periódico de la señal discreta, con $f_s = 16 R_s$	70
Figura 5.3. Implementación de la <i>FWT</i> en el receptor para modulación a escala única	71
Figura 5.4. Proceso de distribución de la información para obtener la señal modulada <i>wavelet</i> multi-escala	72
Figura 5.5. Implementación de la <i>FWT</i> en el receptor del esquema de modulación multi-escala	72

Figura 5.6. Modelo del sistema M-WM1EBB _____	76
Figura 5.7. Característica entrada – salida del decisor para un alfabeto lineal de 8 símbolos _____	78
Figura 5.8. Modelo del sistema para el esquema <i>M-WM1ESSB</i> _____	79
Figura 5.9. Modelo del sistema para el esquema <i>MQ-WM1EDSB</i> _____	81
Figura 5.10. Modelo del sistema para el esquema <i>M-WMMSBB</i> _____	82
Figura 5.11. Desempeño del esquema <i>WM1EBB</i> para varios tipos de <i>wavelet</i> _____	87
Figura 5.12. Desempeño del esquema <i>WM1ESSB</i> para varios tipos de <i>wavelet</i> _____	88
Figura 5.13. Desempeño del esquema 4- <i>WM1ESSB</i> para varios tipos de <i>wavelet</i> _____	88
Figura 5.14. Desempeño del esquema 8- <i>WM1ESSB</i> para varios tipos de <i>wavelet</i> _____	89
Figura 5.15. Desempeño del esquema 4Q- <i>WM1EDSB</i> para varios tipos de <i>wavelet</i> _____	90
Figura 5.16. Desempeño del esquema 16Q- <i>WM1EDSB</i> para varios tipos de <i>wavelet</i> _____	90
Figura 5.17. Desempeño del esquema 64Q- <i>WM1EDSB</i> para varios tipos de <i>wavelet</i> _____	91
Figura 5.18. Desempeño del esquema <i>WMMSBB</i> para varios tipos de <i>wavelet</i> _____	92
Figura 5.19. Desempeño del esquema <i>WMMSSSB</i> para varios tipos de <i>wavelet</i> _____	92
Figura 5.20. Desempeño del esquema 4- <i>WMMSSSB</i> para varios tipos de <i>wavelet</i> _____	93
Figura 5.21. Desempeño del esquema 8- <i>WMMSSSB</i> para varios tipos de <i>wavelet</i> _____	94
Figura 5.22. Desempeño del esquema 4Q- <i>WMMSDSB</i> para varios tipos de <i>wavelet</i> _____	94
Figura 5.23. Desempeño del esquema 16Q- <i>WMMSDSB</i> para varios tipos de <i>wavelet</i> _____	95
Figura 5.24. Desempeño del esquema 64Q- <i>WMMSDSB</i> para varios tipos de <i>wavelet</i> _____	95

ACRÓNIMOS

WM1EBB	Modulación wavelet a escala única, banda base, binaria.
WM1EDSB	Modulación wavelet a escala única, doble banda lateral, binaria.
WM1ESSB	Modulación wavelet a escala única, banda lateral única, binaria.
WMMSBB	Modulación wavelet multi – escala, banda base, binaria.
WMMSDSB	Modulación wavelet multi – escala, doble banda lateral, binaria.
WMSSSB	Modulación wavelet multi – escala, banda lateral única, binaria.
M – WM1EBB	Modulación wavelet a escala única, banda base, M – aria.
M – WM1EDSB	Modulación wavelet a escala única, doble banda lateral, M – aria.
M – WM1ESSB	Modulación wavelet a escala única, banda lateral única, M – aria.
M – WMMSBB	Modulación wavelet multi – escala, banda base, M – aria.
M – WMMSDSB	Modulación wavelet multi – escala, doble banda lateral, M – aria.
M – WMSSSB	Modulación wavelet multi – escala, banda lateral única, M – aria.
MQ – WM1EDSB	Modulación wavelet a escala única, doble banda lateral, de M estados en cuadratura.
MQ – WMMSDSB	Modulación wavelet multi – escala, doble banda lateral, de M estados en cuadratura.
DWT	Transformada wavelet discreta.
IDWT	Transformada wavelet discreta inversa.
FWT	Transformada rápida wavelet.

IFWT	Transformada rápida wavelet inversa.
PSD	Densidad espectral de potencia.
M – ASK	Modulación por desplazamiento de amplitud M – aria.
M – PAM	Modulación por amplitud de pulsos M – aria.
M – PSK	Modulación por desplazamiento de fase M – aria.
M – QAM	Modulación por amplitud en cuadratura M-aria.
BPSK	Modulación por desplazamiento de fase binaria.
QPSK	Modulación por desplazamiento de fase cuaternaria.
SSB	Transmisión en banda lateral única.
DSB	Transmisión en doble banda lateral.
BER	Tasa de error de bit.
ISI	Interferencia inter-símbolo.
LTI	Sistema lineal temporalmente invariante.
FIR	Filtro digital de respuesta al impulso finita.

1. INTRODUCCIÓN

La modulación *wavelet* es una técnica de modulación digital que trata de aprovechar al máximo las bondades de un tipo de señal muy particular conocido como *wavelet*. Las *wavelets*, surgidas en el análisis de fenómenos sísmicos, son señales de corta duración y alta concentración espectral, que pueden ser generadas a través de filtros digitales de longitud relativamente pequeña. La lógica de funcionamiento del esquema de modulación consiste en lo siguiente: El transmisor se encarga de representar cada símbolo del mensaje con una *wavelet* (síntesis), luego, el receptor realiza una estimación del símbolo enviado a partir de la señal ruidosa recibida (análisis y rectificación) [1]. El objetivo es lograr el mejor desempeño en cuanto a la tasa de error de bit, usando la menor cantidad de potencia y ocupando el menor ancho de banda posible, para lo cual es necesario implementar algunas operaciones adicionales según el caso.

La ventaja principal de la modulación *wavelet* radica en el carácter ortogonal de las funciones base utilizadas para generar la forma de onda, con lo que la información representada a través de dicha señal se puede recuperar sin ambigüedad, siempre y cuando la cantidad de ruido introducido por el canal sea arbitrariamente pequeña.

Este trabajo trata varios aspectos de la modulación *wavelet*, en primer lugar, reúne y sintetiza las definiciones matemáticas más importantes relacionadas con el esquema de modulación, luego, evalúa el comportamiento de algunas variantes de la modulación sobre canales con ruido blanco aditivo Gaussiano (AWGN) y realiza su respectiva comparación con técnicas de modulación tradicionales como Modulación por desplazamiento de amplitud M-aria (M-ASK), modulación por desplazamiento de fase binaria (BPSK), modulación por desplazamiento de fase cuaternaria (QPSK) y modulación por amplitud en cuadratura M-aria (M-QAM).

Entre las investigaciones previas más importantes acerca de la modulación *wavelet* se encuentran la realizada por Wornell y Oppenheim, quienes fueron los primeros en proponer el esquema de modulación *wavelet*, ellos plantearon el diseño del transmisor y el receptor y calcularon analíticamente la probabilidad de error de bit (BER) sobre un canal AWGN, la cual fue equivalente a la del esquema BPSK [1]. Ptasinski y Fellman simularon el esquema de modulación usando la *wavelet* de Daubechies de orden 4, y llegaron a los mismos resultados teóricos deducidos por Wornell y Oppenheim [2]. Manglani y Bell simularon el esquema de modulación *wavelet* sobre tres tipos de canal, el AWGN, el canal con desvanecimiento plano y el canal con desvanecimiento selectivo; en sus ensayos utilizaron un esquema de envío redundante de información sobre varios niveles de resolución e implementaron un algoritmo para identificar el tipo de canal y descartar los datos contaminados [3]. Kavehrad y Hamzeh aplicaron la modulación *wavelet* a la transmisión inalámbrica de pulsos láser a través del espacio libre. Ellos utilizaron la *wavelet* de Meyer y enviaron información redundante sobre varios niveles de resolución [4]. Jamin y Mahonen propusieron la técnica de modulación *wavelet* por paquetes para comunicaciones inalámbricas. La idea clave de su trabajo consistió en

hacer una división irregular del plano tiempo – frecuencia de manera que se tuviese un esquema flexible frente a las condiciones del canal [5].

El presente trabajo introduce los conceptos teóricos básicos del esquema de modulación *wavelet*, indicando los bloques funcionales involucrados en el diseño del transmisor y el receptor. En ese sentido se plantean algunas variantes del diseño original que permiten un menor consumo de recursos primarios de comunicación (potencia y ancho de banda). Posteriormente, se evalúa el desempeño de dichas variantes del esquema de modulación sobre un canal del tipo AWGN, esto a través de una simulación desarrollada por los autores, cuyos resultados se resumen en una curva de tasa de error de bit (BER) vs relación energía de bit a densidad de ruido (E_b / N_0). Finalmente, se realiza una comparación a nivel de comportamiento de la BER, entre la modulación *wavelet* y los esquemas de modulación digital lineales pertinentes para cada variante, por ejemplo, la modulación *wavelet* binaria pasabanda se compara directamente con BPSK, la modulación *wavelet* MQ-aria con M-QAM, etc.

Como aportes novedosos a los trabajos previos se tienen:

El modelo del sistema de modulación *wavelet* con transmisión en banda lateral única SSB, que permite incrementar al doble la eficiencia espectral cuando se transmite una señal modulada en *wavelet* en pasabanda; el esquema de modulación *wavelet* M-ario con dos tipos de constelación, la lineal, cuyo comportamiento se asemeja al de M-ASK, y en cuadratura, donde el comportamiento se asemeja al de M-QAM; el esquema de modulación *wavelet* multi-escala, el cual permite aumentar considerablemente la eficiencia espectral al tomar ventaja de la ortogonalidad y las propiedades espectrales de las *wavelets* con distintos niveles de resolución, y los algoritmos de simulación que permiten evaluar el desempeño de las variantes propuestas, sobre canales AWGN.

La estructura del documento es la siguiente: en el capítulo 2 se exponen los fundamentos teóricos de los esquemas de modulación digital lineales que serán tomados como referencia para realizar la comparación mencionada. En el capítulo 3 se hace un repaso del análisis *wavelet*, en especial de la transformada *wavelet* discreta y su implementación computacional, la cual es la herramienta clave para el desarrollo del esquema de modulación. En el capítulo 4 se establece el soporte matemático de la modulación *wavelet* y todas sus variantes, y se definen las características fundamentales del esquema de modulación, tales como el ancho de banda y la eficiencia espectral. En el capítulo 5 se resumen las etapas tenidas en cuenta para implementar el algoritmo de simulación y se muestran los resultados obtenidos en el desempeño de la BER, en función de la relación energía de bit a densidad de ruido. Finalmente, el capítulo 6 destaca las conclusiones más importantes surgidas a lo largo del trabajo de investigación y sugiere algunas alternativas para trabajos futuros.

2. ESQUEMAS LINEALES DE TRANSMISIÓN DIGITAL

2.1. INTRODUCCIÓN

La transmisión digital de datos hace referencia al envío y recepción de señales con carácter discreto tanto en tiempo como en valor. El conjunto de posibles valores que puede tomar la señal se conoce como *alfabeto* y cada valor particular que compone dicho conjunto se conoce como *símbolo*. El tiempo transcurrido entre la emisión de cualquier par de símbolos consecutivos se supone constante y se denomina *periodo de símbolo*. La unidad encargada de generar una señal discreta en tiempo y valor, denominada de ahora en adelante *señal digital*, se conoce como *fuentes* [6].

El diseño de una fuente de información digital consiste en definir un conjunto de parámetros que la caracterizan completamente, entre los más importantes se tienen:

Alfabeto: Determina el tamaño de la fuente.

Distribución de probabilidad del alfabeto: Determina el grado de incertidumbre y por tanto, la cantidad de información que emite la fuente en un instante determinado.

Distribución de probabilidad condicional de los símbolos: Informa sobre el grado de correlación existente entre el símbolo actual y los símbolos anteriormente emitidos.

Periodo de símbolo: Proporciona información sobre la cantidad de símbolos emitidos por unidad de tiempo. El inverso multiplicativo del periodo de símbolo se conoce como *tasa de baudios* y define la porción espectral mínima del canal necesaria para una transmisión confiable.

Una señal digital generada a partir de un alfabeto de M elementos se conoce como *señal M – aria*, para el caso particular de $M=2$, la señal resultante es una *señal binaria*. En la práctica, el número de símbolos que componen el alfabeto es una potencia entera de dos, esto es, $M=2^n$, donde $n=1,2,\dots$, y los símbolos por lo general cumplen dos condiciones que maximizan la cantidad de información emitida por la fuente¹, estas son [6]:

- *Independencia estadística entre símbolos*: lo que significa que un símbolo emitido en un instante determinado no depende de sus antecesores ni condiciona los siguientes. Esto matemáticamente se expresa de la siguiente manera: Sean s_i y s_k los símbolos emitidos por una fuente en los instantes i y k respectivamente; si los símbolos son estadísticamente independientes, se tienen las siguientes probabilidades condicionales,

¹ La cantidad de información emitida por una fuente se mide a través de un parámetro conocido como *entropía*, el cual determina el contenido de información promedio que aporta cada símbolo de la fuente, matemáticamente se calcula como:

$$H(L) = \sum_k p_k \log_2(1/p_k)$$

Donde, $H(L)$ es la entropía de la fuente L , y p_k es la probabilidad de emitir el símbolo k .

$$P(s_i | s_k) = P(s_i), \quad (2.1)$$

$$P(s_k | s_i) = P(s_k). \quad (2.2)$$

En las ecuaciones (2.1) y (2.2) se observa que las probabilidades de los símbolos se mantienen intactas a pesar del evento condicionante. Estas ecuaciones se cumplen para todos los valores enteros de i y k tal que i sea diferente de k .

- *Símbolos equiprobables*: Las probabilidades individuales de cada símbolo son iguales, es decir, el alfabeto tiene una distribución de probabilidad *uniforme*, con lo que se tiene:

Sean $\{p_i\}$, $i=1,2,\dots,M$, las probabilidades de cada símbolo de la fuente; si la fuente es equiprobable, dichas probabilidades toman la siguiente forma,

$$p_i = \frac{1}{M}, \quad i = 1,2,\dots,M. \quad (2.3)$$

Un sistema de transmisión digital en cualquiera de sus versiones está compuesto por los bloques funcionales mostrados en la figura 2.1, el papel que desempeña cada uno de ellos se describe a continuación [7].

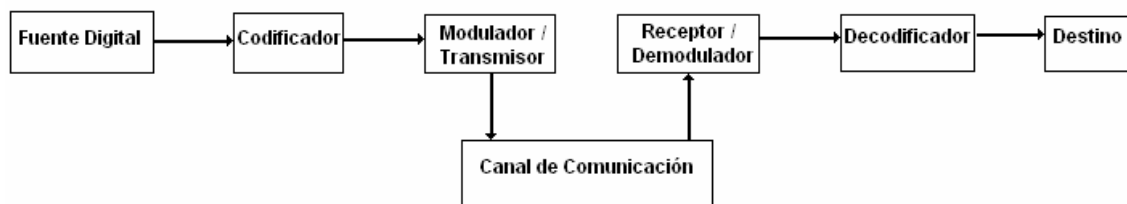


Figura 2.1. Diagrama en bloques de un sistema genérico de transmisión digital.

Fuente: Es donde se genera la información digital en su forma más simple, es decir, sin ninguna operación externa para fines de transmisión.

Codificador: Tiene la función de aplicar dos tipos diferentes de codificación sobre la versión original del mensaje, estos son: *codificación de fuente*, que detecta y remueve información redundante presente en la señal de entrada; y *codificación de canal*, que introduce redundancia de manera controlada al mismo mensaje para tareas de detección y corrección de errores.

Modulador / Transmisor: Es el bloque encargado de transformar reversiblemente los símbolos de la fuente en señales continuas en el tiempo apropiadas para viajar por el canal de comunicaciones.

Canal de comunicación: Es el escenario físico que interconecta a la fuente con el destino. La señal que sale del canal es una versión degradada de la entrada debido al efecto conjunto de una serie de fenómenos contaminantes que ocurren dentro del canal, entre ellos, el ruido, la distorsión, la interferencia, la atenuación, el retardo, etc.

Receptor / Demodulador: Tiene como objetivo recuperar adecuadamente la información contenida en la señal que recibe del canal, esto a través de un procesamiento previo de

amplificación, filtraje, mezclado, etc., y posteriormente, una transformación inversa a la efectuada en el *modulador / transmisor*, es decir, una conversión *analógica – digital* de la señal de entrada.

Decodificador: La función de este dispositivo consiste en efectuar las operaciones numéricas inversas realizadas por el codificador; estas son en su respectivo orden: *decodificación de canal* y *decodificación de fuente*. La primera detecta y / o corrige posibles errores provocados por las imperfecciones del canal; la segunda, descifra y restablece el mensaje digital original a través de un algoritmo de descompresión.

Destino: Es el punto final de la transmisión. Se supone que este dispositivo de llegada tiene la capacidad de entender y procesar la información digital.

2.2. TRANSMISIÓN DIGITAL EN BANDA BASE

Sistema banda base M-ario

La transmisión digital en banda base se refiere al envío y recepción de señales digitales sin *traslación espectral* a una frecuencia portadora. En la figura 2.2 se muestra un diagrama en bloques representativo de un sistema de transmisión digital en banda base *M-ario*. En seguida de la figura se describe detalladamente la tarea de cada bloque [6].

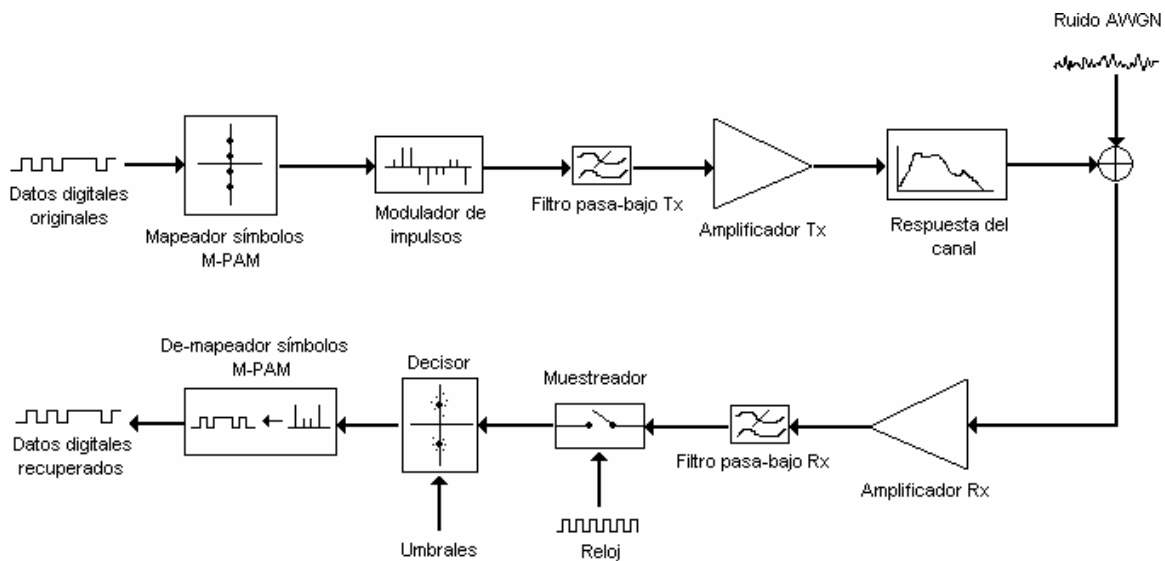


Figura 2.2. Diagrama en bloques de un sistema de transmisión digital banda base de M estados (*M-ario*)

Datos digitales originales: Es una secuencia de bits de la forma $\{b_i\}$, con $b_i \in \{0,1\}$. Se supone que los bits son equiprobables, estadísticamente independientes, y además están separados entre sí un periodo de tiempo T_b conocido como *periodo de bit*. El inverso de esta cantidad, $1/T_b$, se conoce como la *tasa de bit*, que se simboliza con R_b .

*Mapeador de símbolos M-PAM*²: Este dispositivo se encarga de generar símbolos a partir de los datos binarios de entrada. El conjunto de posibles símbolos tiene un tamaño M , donde M es una potencia entera de dos, es decir, $M = 2^n$, $n \in \mathbb{Z}^+$, por tanto cada valor que genera el *mapeador* lo hace evaluando una secuencia de $n = \log_2 M$ bits consecutivos de información. Por esta razón, se genera un símbolo cada $T = nT_b$ segundos, dando lugar a las siguientes relaciones:

$$T = (\log_2 M)T_b, \quad (2.4)$$

$$\frac{1}{T} = \frac{R_b}{\log_2 M}. \quad (2.5)$$

Los posibles valores que pueden llegar a tomar los símbolos a la salida del *mapeador* son: $\{C_k\} \in \{\pm 1, \pm 3, \dots, \pm(M-1)\}$ por tanto al trazar su constelación observa algo muy similar a lo mostrado por la figura 2.3.

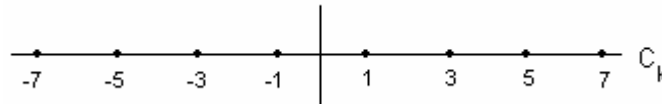


Figura 2.3. Diagrama de constelación para una señal M-PAM con $M = 8$.

Si $M = 2$, se tiene un sistema de transmisión binario, donde la única particularidad es el hecho de que el *periodo de símbolo* es igual al *periodo de bit* y los bits pasan a representarse con los valores $\{-1, 1\}$. En la práctica, el *mapeador de símbolos* se sustituye por un convertor de señalización *unipolar* a señalización *polar*. En la figura 2.4 se observa un ejemplo representativo de esta conversión.



Figura 2.4. Conversión de señalización unipolar a polar.

Modulador de impulsos: Este dispositivo se encarga de generar una secuencia de funciones delta de Dirac separadas entre sí T segundos y con amplitudes iguales a los valores instantáneos de los símbolos de salida del *mapeador M-PAM*.

La señal de salida del modulador de impulsos tiene la forma:

² PAM: Es un esquema de modulación de pulsos analógico donde a cada valor muestra de una señal continua se le asigna un pulso rectangular de duración τ . Esta técnica no suele considerarse como un esquema de modulación en el estricto sentido, más bien es un proceso intermedio en la conversión analógica a digital de una señal limitada en banda (PCM).

M-PAM es la versión digital de PAM, la señal generada por este esquema es discreta en tiempo (muestreo) y en amplitud (cuantización a M niveles).

$$s_{\delta}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k \delta(t - kT), \quad (2.6)$$

donde $\{C_k\} \in \{\pm 1, \pm 3, \dots, \pm(M-1)\}$ y δ denota a la función delta de Dirac.

Aplicando la transformada de Fourier a la señal de la ecuación (2.6) se tiene:

$$\begin{aligned} CFT\{s_{\delta}(t)\} &= CFT\left\{\sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k \delta(t - kT)\right\} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-j2\pi ft) \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k \delta(t - kT) dt \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - kT) \exp(-j2\pi ft) dt \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k \exp(-j2\pi kT f), \end{aligned} \quad (2.7)$$

donde CFT denota al operador *transformada continua de Fourier*.

Como puede observarse, el espectro de la señal a la salida del modulador de impulsos es una función periódica de la frecuencia, que se repite cada $1/T$ Hertz.

Filtro pasa bajo transmisor: Este filtro, cuya respuesta al impulso es $g(t)$, tiene como función conformar una señal continua en el tiempo que atraviese adecuadamente el canal de comunicaciones y permita la correcta recuperación de la información, esto a pesar de todos los embates y contaminaciones que sufre la señal en su tránsito por el canal. Por otro lado, la aplicación de este filtro permite limitar el espectro de la señal de salida del modulador de impulsos, el cual se encuentra disperso sobre todo el eje de las frecuencias.

Suponiendo que el filtro es un *sistema lineal*, la señal a su salida está dada por:

$$\begin{aligned} s_T(t) &= s_{\delta}(t) * g(t) \\ &= \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k \delta(t - kT) \right] * g(t) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k g(t - kT), \end{aligned} \quad (2.8)$$

donde $*$ denota al operador de convolución.

Como puede observarse, la señal resultante consiste en una superposición de pulsos de la forma $g(t)$ desplazados entre sí T segundos y amplificadas cada uno por un factor C_k igual al valor de cada símbolo.

El espectro que ocupa dicha señal está dado por:

$$\begin{aligned}
 CFT\{s_T(t)\} &= CFT\left\{\sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k g(t - kT)\right\} \\
 &= G(f) \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k \exp(-j2\pi kTf),
 \end{aligned}
 \tag{2.9}$$

donde $G(f)$ es la transformada de Fourier de la forma de pulso $g(t)$, es decir, $G(f)$ es la respuesta en frecuencia del filtro transmisor.

El espectro de la señal a la salida del filtro transmisor es igual al espectro periódico anterior, pero ahora enmarcado dentro de una *función de confinamiento* $G(f)$, por tanto, el ancho de banda ocupado por la señal a transmitir es igual al ancho de banda del filtro transmisor.

Amplificador del transmisor: Tiene como objetivo proporcionar a la señal un nivel adecuado de amplitud que le permita superar la inevitable atenuación introducida por el canal, esto planeado de acuerdo a un nivel mínimo de relación señal a ruido necesario en recepción para efectos de una transferencia confiable.

Suponiendo que el amplificador posee una característica de transferencia ideal (respuesta lineal en el rango dinámico de la señal de entrada), la señal enviada al canal será una réplica idéntica de la señal de salida del filtro transmisor, salvo por un factor escalar constante. Para simplificar el análisis, no se tendrán en cuenta los factores de amplificación suministrados por las diferentes etapas amplificadoras que hacen parte del sistema total, asumiendo siempre un comportamiento perfectamente lineal por parte de dichos amplificadores.

Canal de comunicación: El canal, dada su naturaleza, tiene una respuesta frecuencial propia que puede ser estacionaria ó variable en el tiempo, lineal ó no lineal, etc. Para este caso se asume un canal lineal y estacionario (Sistema LTI³) que introduce *ruido blanco aditivo gaussiano* (AWGN). Por tanto, suponiendo que la respuesta al impulso del canal está dada por $r(t)$, la señal a la salida del canal está dada por:

$$x(t) = s_T(t) * r(t) + w(t), \tag{2.10}$$

donde $w(t)$ es un proceso de ruido blanco con distribución *gaussiana* de *media* cero y *varianza* N_0 . El carácter de ruido blanco se debe al hecho que su función de *autocorrelación* es una función delta de Dirac centrada en el origen, por lo que su *densidad espectral de potencia* es constante sobre toda la banda de frecuencias, al igual que la luz blanca en óptica ondulatoria. Esto quiere decir que el ruido AWGN es no correlacionado, o sea, las muestras de ruido tomadas en instantes distintos tienen todas la misma distribución de probabilidad y no están condicionadas entre si [6].

³ Sistema LTI: Sistema lineal temporalmente invariante, es un sistema modelado por una función de transferencia que cumple dos condiciones, a saber, no varía con el tiempo y no genera componentes de frecuencia adicionales a las ya presentes en la señal de entrada. La salida de un sistema LTI está dada por la *convolución* entre la señal de entrada y la respuesta al impulso del propio sistema.

Continuando con el desarrollo de la ecuación (2.10) se llega a lo siguiente:

$$\begin{aligned} x(t) &= \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k g(t - kT) \right] * r(t) + w(t) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k h(t - kT) + w(t), \end{aligned} \quad (2.11)$$

donde $h(t) = g(t) * r(t)$, es la respuesta de la acción combinada del filtro pasa bajo transmisor y el canal.

Amplificador del receptor: Suponiendo que su característica es ideal, amplifica linealmente tanto la señal afectada por el canal como el ruido, por ende, la relación señal a ruido se mantiene constante a la salida de este dispositivo.

Filtro pasa bajo receptor: Este dispositivo tiene dos funciones básicas: limitar el ruido presente en la señal de entrada y terminar la conformación de la forma de pulso previa a la detección. Suponiendo que se trata de un sistema lineal con respuesta al impulso $q(t)$, la señal a la salida del filtro está dada por:

$$\begin{aligned} y(t) &= x(t) * q(t) \\ &= \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k h(t - kT) + w(t) \right] * q(t) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k p(t - kT) + n(t), \end{aligned} \quad (2.12)$$

donde

$$p(t) = h(t) * q(t) = g(t) * r(t) * q(t) \quad (2.13)$$

y

$$n(t) = w(t) * q(t). \quad (2.14)$$

El término del lado izquierdo de la ecuación (2.13) es la respuesta global del sistema en el dominio del tiempo, mientras que el término $n(t)$ en la ecuación (2.14) es el *ruido blanco filtrado* resultante.

El ruido blanco filtrado tiene la propiedad que al ser $q(t)$ un sistema LTI, mantiene las mismas propiedades estadísticas iniciales sin importar la forma de $q(t)$; en efecto, puede continuarse considerando al proceso $n(t)$ como gaussiano con media cero y varianza $N_0 B$ (B : Ancho de banda del filtro) [6].

Muestreador: Este dispositivo extrae muestras de la señal de entrada cada T segundos según una señal de reloj generada localmente por un *circuito recuperador de sincronización*. La función de este dispositivo es establecer el *instante óptimo de muestreo* en cada periodo de símbolo.

La secuencia a la salida del muestreador está dada por:

$$\{y_m\} = \{y(mT)\} = \left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k p(mT - kT) + n(mT) \right\}. \quad (2.15)$$

Decisor: Tiene la función de comparar cada nivel y_m entregado por el muestreador con un conjunto de niveles umbral preestablecidos. Para una fuente que emite símbolos independientes y equiprobables, el criterio de decisión está dado por la regla: *Elegir el valor de D_k que satisfaga la condición,*

$$\min\{|y_m - D_k|\} = d_{\min} \quad (2.16)$$

Este criterio se conoce como criterio de decisión de distancia mínima o *máxima verosimilitud* (ML: "maximum likelihood"), su nombre se debe al hecho que la elección consiste en determinar el punto referente (D_k) que se encuentre mas cercano geoméricamente al nivel muestreado (y_m), con lo cual se consigue minimizar la *probabilidad de error*⁴ [6].

De-mapeador de símbolos M-PAM: Su función consiste en restablecer los datos binarios originales a partir de los símbolos recibidos. La salida de este dispositivo es una secuencia de dígitos binarios de la forma $\{v_i\}$.

Datos digitales recuperados: La *tasa de error de bit* en este punto determina la calidad del sistema de transmisión. La BER está dada por:

$$BER = \frac{\text{Número de bits errados}}{\text{Número de bits enviados}} = P_e \quad (2.17)$$

El nivel de la BER que garantiza un grado de calidad mínimo es relativo al tipo de servicio ofrecido por el sistema de comunicación, por ejemplo, para transmisión de voz suele estar alrededor de 10^{-3} , mientras para transmisión de datos se debe mantener por debajo de 10^{-6} . En general, la BER es un parámetro que decrece con el aumento de la potencia de transmisión, por lo tanto el diseño de un sistema de comunicación es en últimas un proceso de negociación entre el grado de calidad ofrecido y el consumo de recursos que implica la prestación de dicho servicio (potencia y ancho de banda) [8].

Forma de los pulsos para evitar la Interferencia inter-símbolo (ISI)⁵

⁴ Probabilidad de error: Un error en comunicaciones digitales ocurre cuando el símbolo detectado no corresponde al símbolo enviado en un instante determinado. La probabilidad de error es la medida de la frecuencia promedio de ocurrencia de dicho fenómeno.

⁵ ISI: Fenómeno indeseable en comunicaciones digitales en el cual los pulsos que representan a los distintos símbolos se traslapan entre sí, provocando confusiones y errores en la detección. La ISI se puede producir por muchas causas, entre ellas, los efectos dispersivos del canal y una mala elección de la forma de pulso que representa los símbolos. Esta última se presenta generalmente cuando se utilizan pulsos no limitados en banda, como los pulsos rectangulares, debido a que el canal es inevitablemente limitado en espectro.

La ecuación (2.15) representa la secuencia de muestras obtenidas cada T segundos de la señal a la salida del filtro pasabajo receptor. Omitiendo el segundo término del lado derecho de esta ecuación, el cual corresponde exclusivamente al efecto del ruido, y suponiendo que las muestras se hacen en los instantes óptimos, la ausencia de ISI se verifica si se cumple la siguiente condición [8]:

$$y_m = \begin{cases} C_k & \text{si } m = k \\ 0 & \text{si } m \neq k, \end{cases} \quad (2.18)$$

para un instante específico k .

Por tanto, la respuesta global del sistema $p(t)$, dada por la ecuación (2.13), cumple la siguiente condición:

$$p(kT - mT) = \begin{cases} 1 & \text{si } m = k \\ 0 & \text{si } m \neq k, \end{cases} \quad (2.19)$$

o su equivalente:

$$p(kT) = \begin{cases} 1 & \text{si } k = 0 \\ 0 & \text{si } k \neq 0. \end{cases} \quad (2.20)$$

Por tanto, la versión muestreada cada T segundos de la forma de pulso $p(t)$ en los instantes óptimos, es igual a la señal discreta mostrada en la figura 2.5. Una señal en el tiempo cuyas muestras periódicas cumplen con la ecuación (2.20) se conoce como *pulso Nyquist* [8].

La señal discreta de la figura 2.5 se obtiene a partir de la siguiente operación:

$$p_\delta(t) = p(t) \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT) \right] \quad (2.21)$$

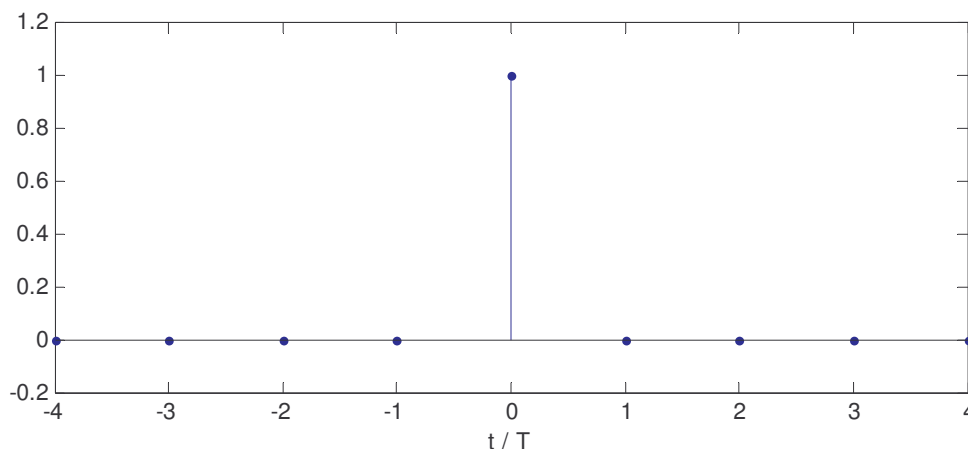


Figura 2.5. Señal cuyas muestras cumplen la condición de Nyquist.

Expresando el segundo término del producto de la ecuación (2.21) como una serie compleja de Fourier y luego aplicando la transformada de Fourier a ambos lados, se tiene:

$$P(f) * \left[\frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(f - kT) \right] = 1, \quad (2.22)$$

de donde se obtiene la condición en frecuencia para un pulso Nyquist, la cual está dada en la ecuación (2.23).

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} P\left(f - \frac{k}{T}\right) = T. \quad (2.23)$$

Existen muchas formas de onda que cumplen con la condición de Nyquist para ausencia de ISI (por ejemplo, un pulso rectangular de duración T centrado en el origen), sin embargo, son de especial interés aquellas que produzcan un *espectro limitado en banda*, esto debido a la escasez del recurso de ancho de banda. Entre este subconjunto se encuentra la más utilizada de las formas de pulso Nyquist, a saber, la de *coseno roll off* o *coseno elevado*, la cual se muestra en la figura 2.6a y su correspondiente espectro en la figura 2.6b. Su uso mayoritario se debe a la relativa facilidad en la construcción de sus filtros y su espectro estrictamente limitado en banda [8].

Un pulso de coseno *roll off* está definido en el dominio del tiempo por la siguiente expresión:

$$p(t) = \frac{\sin\left(\frac{\pi \cdot t}{T}\right)}{\frac{\pi}{T}} \cdot \frac{\cos\left(\frac{\pi\alpha \cdot t}{T}\right)}{1 - \left(\frac{2\alpha \cdot t}{T}\right)^2}, \quad (2.24)$$

donde α : Factor de *roll off*, $0 \leq \alpha \leq 1$.

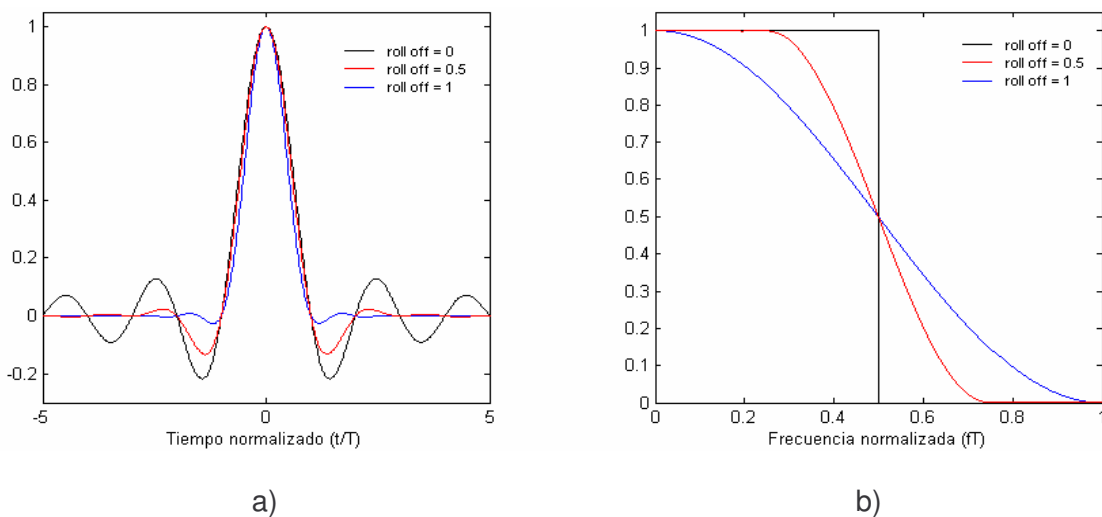


Figura 2.6. a) Pulso de coseno *roll off* para distintos valores del factor de *roll off*. b) Espectros para los distintos valores del parámetro *roll off*.

La transformada de Fourier de $p(t)$ está dada por:

$$P(f) = \begin{cases} 1 & , |f| \leq \frac{1-\alpha}{2T} \\ \cos^2\left(\frac{\pi T}{2\alpha}\left(|f| - \frac{1-\alpha}{2T}\right)\right) & , \frac{1-\alpha}{2T} \leq |f| \leq \frac{1+\alpha}{2T} \\ 0 & , |f| > \frac{1+\alpha}{2T} \end{cases} \quad (2.25)$$

El pulso $p(t)$ tiene un ancho de banda $(1+\alpha)/2T$. La elección del factor de *roll off* es un aspecto muy importante dentro del diseño del sistema de comunicaciones. Un factor de *roll off* cercano a cero aumenta la eficiencia espectral pero complica el diseño de los filtros, mientras que un factor de *roll off* cercano a uno facilita el diseño de los filtros pero sacrifica la *eficiencia espectral*.

Otro aspecto muy importante, a tener en cuenta en el diseño, es la manera como se reparte la formación del pulso Nyquist entre transmisor y receptor [8]. A partir de las ecuaciones (2.13) y (2.24) se tiene la siguiente expresión:

$$g(t) * r(t) * q(t) = \frac{\sin\left(\frac{\pi \cdot t}{T}\right)}{\frac{\pi}{T}} \cdot \frac{\cos\left(\frac{\pi\alpha \cdot t}{T}\right)}{1 - \left(\frac{2\alpha \cdot t}{T}\right)^2}, \quad (2.26)$$

aplicando transformada de Fourier a ambos lados de la ecuación (2.13) se tiene:

$$P(f) = G(f) \cdot R(f) \cdot Q(f), \quad (2.27)$$

donde $P(f)$ está dado por la ecuación (2.25).

Suponiendo que el canal tiene una respuesta ideal sobre la banda ocupada por la señal, esto es, el canal tiene un comportamiento constante en $0 \leq f \leq (1+\alpha)/2T$, se tiene que:

$$P(f) = KG(f) \cdot Q(f), \quad (2.28)$$

donde K es el valor constante de la respuesta del canal sobre la banda $0 \leq f \leq (1+\alpha)/2T$.

De acuerdo a estimaciones probabilísticas de la potencia promedio de transmisión, el ruido AWGN del canal y la interferencia de canal adyacente, el modo de repartición espectral que otorga el mejor funcionamiento (menor BER) consiste en dividir uniformemente la formación entre transmisor y receptor, esto es, conformar $[P(f)]^{1/2}$ en el transmisor y $[P(f)]^{1/2}$ en el receptor [3]. Por lo tanto omitiendo el término de escalonamiento K en la ecuación (2.28) se tiene:

$$G(f) = Q(f) = \sqrt{P(f)} \quad (2.29)$$

La ecuación (2.29) establece que los filtros conformadores de transmisión y recepción son idénticos, lo cual constituye una ventaja, puesto que sólo es necesario diseñar un filtro en lugar de dos. El filtro común de transmisión y recepción se conoce como *filtro raíz cuadrada de coseno roll off*.

Puede demostrarse, que la respuesta impulsiva de un filtro raíz cuadrada de coseno *roll off* por sí sola no cumple con la condición de Nyquist para ausencia de ISI, sin embargo, la acción combinada del transmisor y el receptor hace que se tenga la respuesta deseada justo antes del muestreador, que es en últimas donde interesa eliminar la ISI [8].

En la figura 2.7 se observan algunos *diagramas de ojo*⁶ representativos para un esquema 4-PAM. En la figura 2.7(a) se tiene un factor de *roll off* de 0.1 y en la figura 2.7(b) un factor de *roll off* de 0.9. Aquí puede observarse la diferencia en el margen contra errores de sincronización que resulta en cada caso; nótese que el factor de *roll off* cercano de 0.9 mejora considerablemente este aspecto, logrando una mayor apertura del ojo pero a cambio de un mayor ancho de banda ocupado [8].

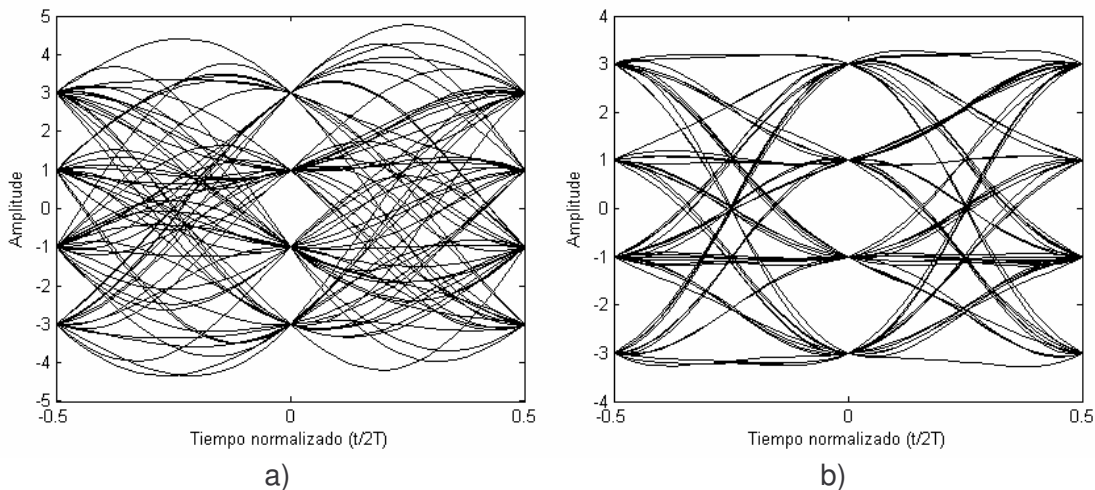


Figura 2.7. Diagramas de ojo para una señal 4-PAM con distintos valores del parámetro α . a) $\alpha = 0.1$. b) $\alpha = 0.9$.

Eficiencia espectral

La eficiencia espectral es igual al cociente entre la tasa de bits y el ancho de banda ocupado por la señal que se transmite a tal velocidad. Se simboliza con la letra η y está dada por:

$$\eta = \frac{Rb}{BW_T} \quad (2.30)$$

⁶ Diagrama de ojo: Es un diagrama obtenido a partir del trazado superpuesto, sobre un solo periodo de símbolo, de todas las posibles formas de onda en los diferentes periodos de símbolo.

Su significado está relacionado al número de bits por segundo (*bps*) que se transmiten por cada *hertz* de ancho de banda, por tanto la eficiencia espectral mide el grado de aprovechamiento de la porción espectral asignada al sistema de comunicación [8].

Para un sistema M-ario en banda base que utiliza pulsos de coseno *roll off*, la eficiencia espectral está dada por:

$$\eta = \frac{2 \log_2(M)}{1 + \alpha} \quad (2.31)$$

Como puede observarse, la eficiencia espectral no solo depende de la cantidad de símbolos de la constelación (M), sino también del factor *roll off*, lográndose la mayor eficiencia cuando éste último se aproxima a cero, lo cual en la práctica representa enormes dificultades en el diseño del filtro. Sin embargo, existe un esquema de transmisión en banda base que permite enviar una señal binaria a una velocidad R_b ocupando un ancho de banda exactamente igual a la mitad de la tasa de señalización ($R_b / 2$), pero esta vez utilizando filtros bastante sencillos. Este esquema de modulación en banda base se conoce con el nombre de *señalización con respuesta parcial*, el cual se explica en detalle a continuación.

Señalización con respuesta parcial

La señalización con respuesta parcial hace referencia al uso controlado de ISI entre símbolos adyacentes para reducir la tasa de baudios sin reducir la velocidad de información, con lo que se aumenta la eficiencia espectral del sistema de transmisión [9].

El hecho de generar un cierto grado de correlación entre los dígitos enviados es contraproducente cuando la detección del símbolo actual se basa en estimaciones de los símbolos anteriores, pues se corre el riesgo de que los errores se propaguen. Por esa razón, los esquemas de señalización con respuesta parcial hacen uso de una precodificación en el transmisor, con el fin de que la estimación del símbolo actual en el receptor no dependa de las estimaciones de los símbolos anteriores, eliminando así la propagación de errores [6].

Existen dos categorías de señalización en respuesta parcial, las cuales se explicarán a continuación.

A) Codificación duobinaria simple:

El sistema de comunicación con *codificación duobinaria simple* se muestra en la figura 2.8. En primera instancia, los datos digitales originales se precodifican a través de una suma realimentada módulo 2 o una compuerta *XOR*, posterior a ello, las muestras resultantes se pasan por un *filtro duobinario*, el cual en forma teórica consiste de un elemento de retardo de un periodo de bit conectado en cascada con un filtro pasabajos ideal de ancho de banda $1 / 2Tb$.

La señal de salida del precodificador está dada por:

$$u_k = b_k \oplus u_{k-1}, \quad (2.32)$$

donde el símbolo \oplus denota al operador suma módulo 2.

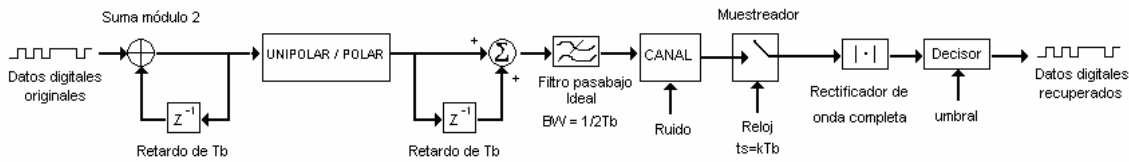


Figura 2.8. Sistema de transmisión usando codificación duobinaria simple.

La función de transferencia del filtro duobinario está dada por:

$$\begin{aligned} H(f) &= (1 + \exp(-j2\pi T_b f)) \text{rect}\left(\frac{f}{1/T_b}\right) \\ &= 2 \exp(-j\pi T_b f) \cos(\pi T_b f) \text{rect}(f T_b) \end{aligned} \quad (2.33)$$

Las respuestas de amplitud y fase del filtro duobinario están dadas, respectivamente, por:

$$|H(f)| = 2 \cos(\pi T_b f) \text{rect}(f T_b) \quad (2.34)$$

$$\arg[H(f)] = -\pi T_b f \quad (2.35)$$

En la figura 2.9a se muestra la respuesta en amplitud y fase del filtro duobinario simple y su correspondiente respuesta al impulso en la figura 2.9b.

Como puede observarse, es un filtro bastante fácil de diseñar debido a la suavidad de la curva de amplitud y a la característica de respuesta de fase lineal sobre la banda de interés [9]. La respuesta al impulso de este filtro está dada por la transformada inversa de Fourier de la ecuación (2.33), la cual conduce a:

$$h(t) = CFT^{-1}\{H(f)\} = \text{senc}\left(\frac{t}{T_b}\right) + \text{senc}\left(\frac{t-T_b}{T_b}\right) \quad (2.36)$$

La secuencia previa al filtro pasabaja ideal está dada por:

$$\gamma_k = u_k + u_{k-1} \quad (2.37)$$

El esquema de detección, suponiendo sincronización perfecta a nivel de símbolo, está dado por:

$$\hat{b}_k = \begin{cases} 1, & \text{si } |\hat{\gamma}_k| < 1 \\ 0, & \text{si } |\hat{\gamma}_k| > 1 \end{cases} \quad (2.38)$$

Como se verifica en la ecuación (2.38), las decisiones no son realimentadas sino independientes (sólo dependen de los valores actuales de γ_k).

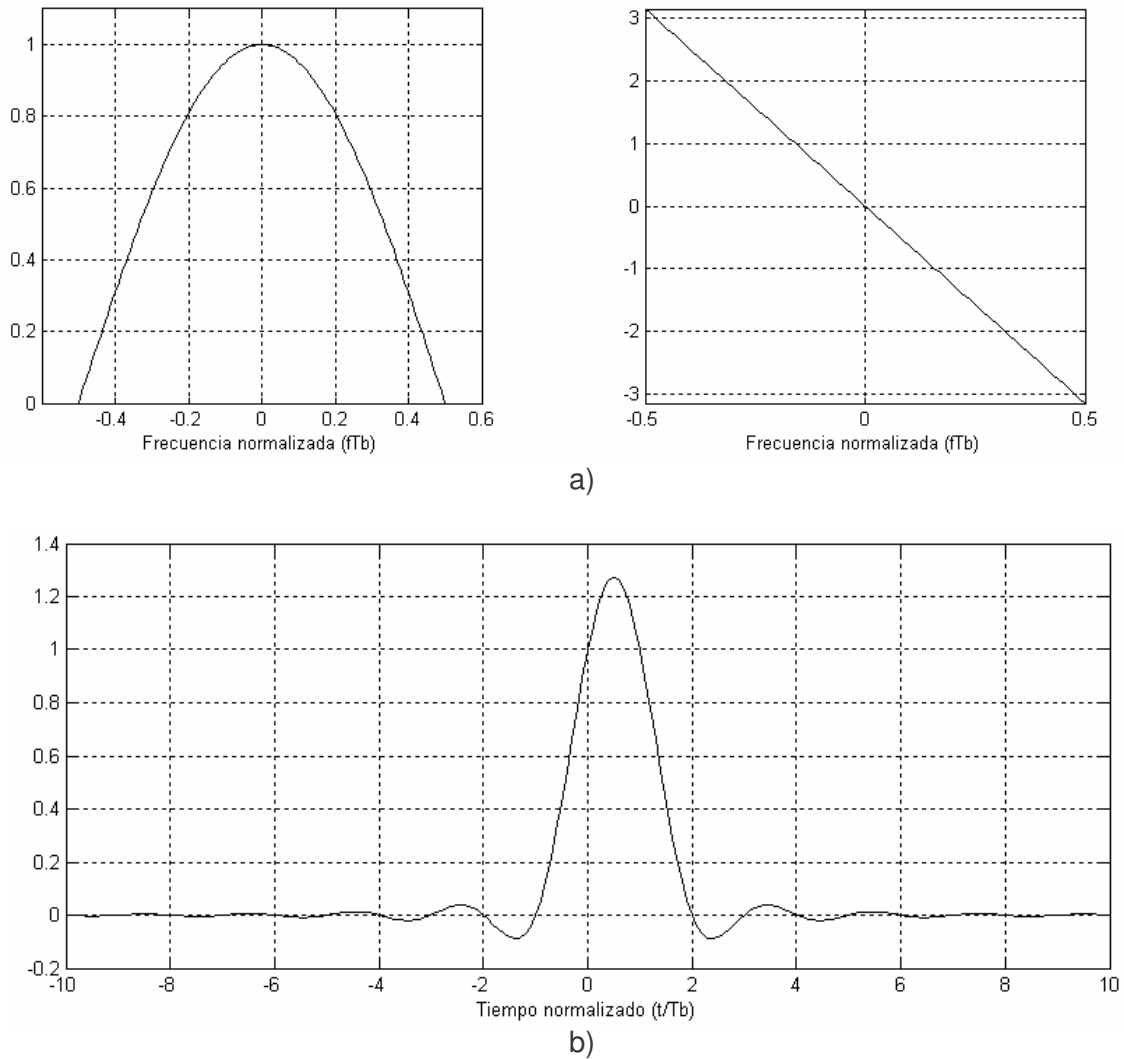


Figura 2.9. a) Respuesta en amplitud y fase del filtro duobinario simple. b) Respuesta al impulso.

Este esquema de transmisión digital logra una velocidad de $1 / T_b$ bps ocupando estrictamente un ancho de banda de $1 / 2T_b$ Hz, con lo que se tiene una eficiencia espectral exacta de 2 bps/Hz. En la figura 2.10 se muestra la implementación equivalente del sistema duobinario simple.

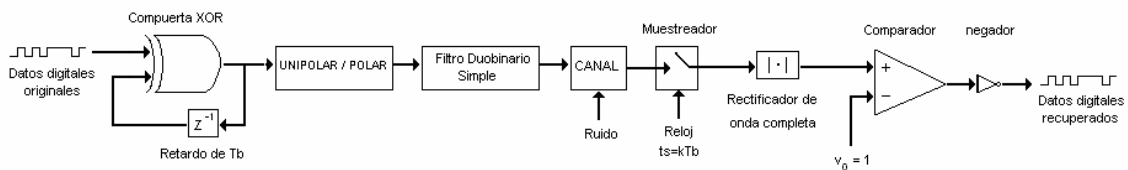


Figura 2.10. Implementación física equivalente del sistema duobinario simple.

B) Codificación duobinaria modificada:

El gran problema de la codificación duobinaria simple es el alto contenido de *DC* presente en la señal enviada, pues para muchos canales en la práctica es imposible transmitir una señal con esas características (cables de par trenzado, cobre, etc.). La *codificación duobinaria modificada* surge para solucionar este inconveniente y logra transmitir una señal con la misma eficiencia espectral de 2 bps/Hz sin propagación de errores, pero esta vez suprimiendo el nivel de *DC* sin importar las características estadísticas de los símbolos de la fuente [6].

En la figura 2.11 se tiene el diagrama en bloques esquemático de un sistema de transmisión utilizando codificación duobinaria modificada.

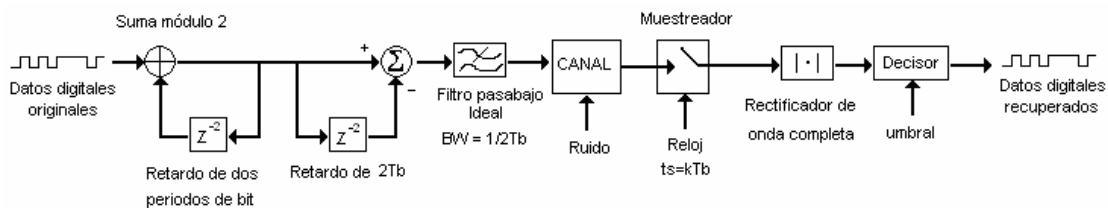


Figura 2.11. Sistema de comunicación usando codificación duobinaria modificada.

La señal de salida del precodificador está dada por:

$$u_k = b_k \oplus u_{k-2} \quad (2.39)$$

La función de transferencia del filtro duobinario modificado está dada por la ecuación (2.40).

$$\begin{aligned} H(f) &= (1 - \exp(-j4\pi T_b f)) \text{rect}\left(\frac{f}{1/T_b}\right) \\ &= j2 \exp(-j2\pi T_b f) \sin(2\pi T_b f) \text{rect}(fT_b) \end{aligned} \quad (2.40)$$

Las respuestas de amplitud y fase del filtro duobinario modificado, cuyas gráficas se muestran en la gráfica 2.12a junto con su correspondiente respuesta impulsiva en la gráfica 2.12b, están dadas respectivamente por las ecuaciones (2.41) y (2.42).

$$|H(f)| = 2|\sin(2\pi T_b f)| \text{rect}(fT_b) \quad (2.41)$$

$$\arg[H(f)] = \frac{\pi}{2} - 2\pi T_b f \quad (2.42)$$

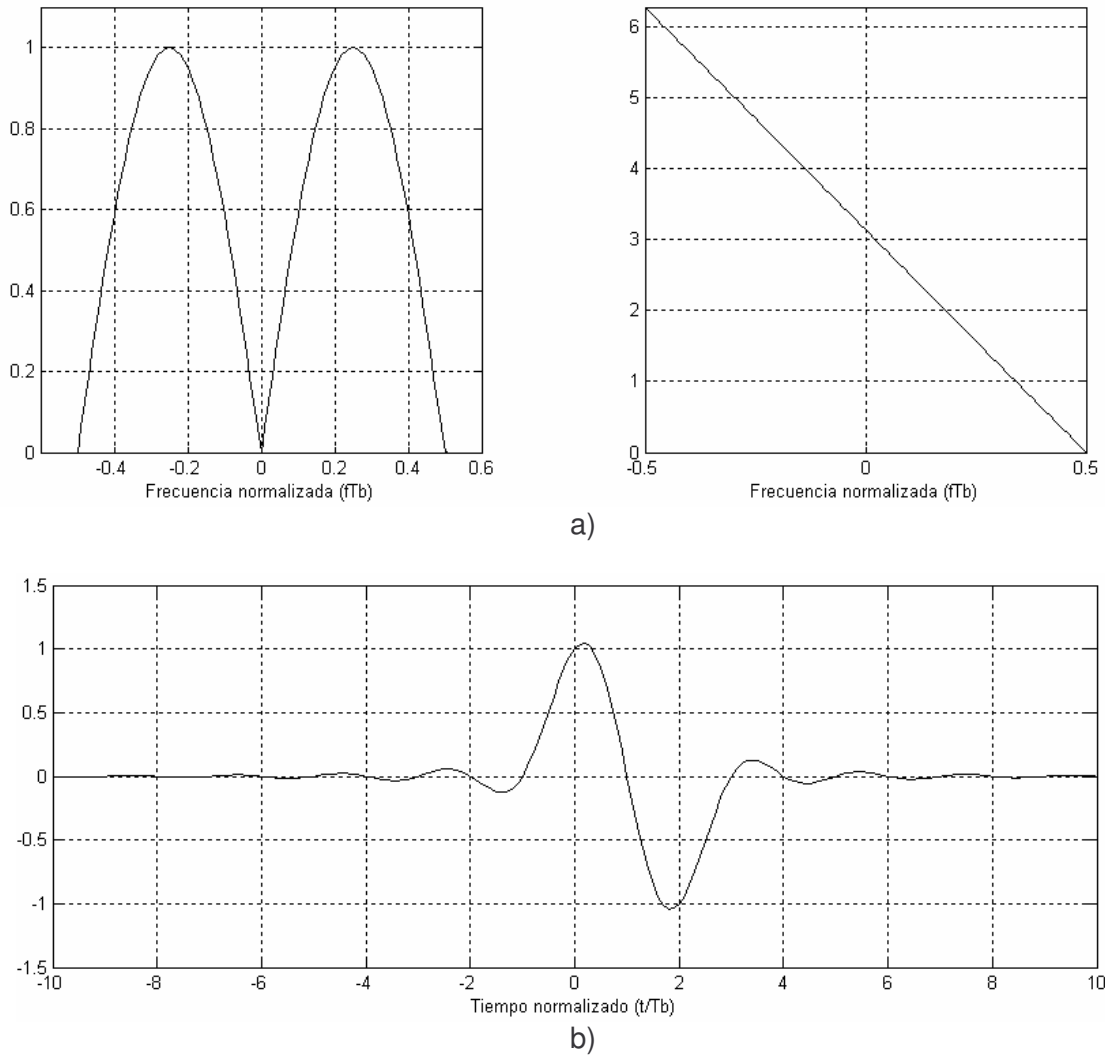


Figura 2.12. a) Respuesta en amplitud y fase del filtro duobinario modificado b) Respuesta impulsiva.

La respuesta al impulso de este filtro está dada por la transformada inversa de Fourier de la ecuación (2.40), con lo que se tiene:

$$h(t) = CFT^{-1}\{H(f)\} = \text{senc}\left(\frac{t}{T_b}\right) - \text{senc}\left(\frac{t - 2T_b}{T_b}\right) \quad (2.43)$$

La secuencia previa al filtro pasabajo ideal está dada por la ecuación (2.44).

$$\gamma_k = u_k + u_{k-2} \quad (2.44)$$

El esquema de detección, suponiendo sincronización perfecta a nivel de símbolo, está dado por la ecuación (2.45).

$$\hat{b}_k = \begin{cases} 1, & \text{si } |\gamma_k| > \frac{1}{2} \\ 0, & \text{si } |\gamma_k| < \frac{1}{2} \end{cases} \quad (2.45)$$

La implementación física del sistema de transmisión está dada en la figura 2.13.

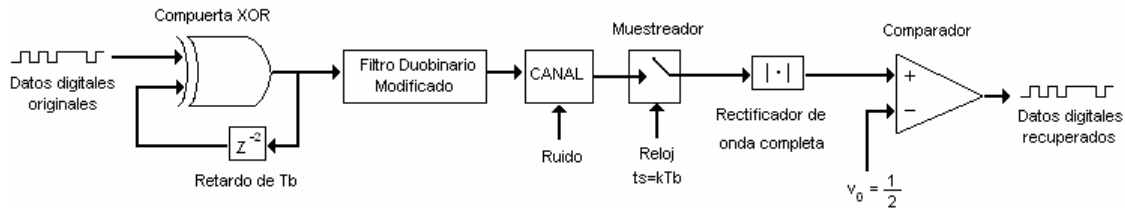


Figura 2.13. Implementación física equivalente del sistema duobinario modificado.

El envío y recepción de señales en banda base es posible en muchos canales, sin embargo, existen algunos entornos de comunicación donde es imposible transmitir las señales directamente, ya sea por la incapacidad de los receptores en la detección de dichas señales ⁷, o bien por la necesidad de compartir un canal común entre muchos usuarios de manera simultánea sin que sus emisiones se interfieran entre sí, en ese sentido, es conveniente ubicar las radiaciones en distintos lugares del espectro que permitan una emisión libre de radiaciones y en frecuencias apropiadas para la propagación de acuerdo al mecanismo utilizado para generar las señales. A partir de este punto surge el estudio de los sistemas de transmisión pasabanda, los cuales se abordarán en lo que sigue, haciendo énfasis en los sistemas de modulación digitales lineales [7].

2.3. TRANSMISIÓN DIGITAL PASABANDA LINEAL

La *modulación lineal pasa banda* consiste en la traslación espectral directa del flujo de datos en banda base a una frecuencia central diferente de cero, conocida como *frecuencia portadora*. Generalmente, el valor de esta frecuencia es mucho más grande que la máxima componente en banda base de la señal de datos. La traslación espectral tiene lugar a través del uso de *moduladores balanceados* ⁸, con lo que se obtiene a la salida una señal modulada en amplitud de *doble banda lateral* y *portadora suprimida* (DSB-SC). Por tanto, el análisis de los esquemas de modulación digital lineal es muy similar al de los sistemas AM convencionales [8].

⁷ En radiocomunicaciones, la longitud de las antenas receptoras debe ser aproximadamente la décima parte de la longitud de onda de la radiación emitida, por tanto, si las señales se transmitiesen en banda base, se necesitarían antenas kilométricas para su detección.

⁸ Modulador Balanceado: También conocido como modulador de producto, es una configuración de dos moduladores en amplitud puros dispuestos en contra fase de forma que se anulen las portadoras mutuamente al mismo tiempo que se refuerzan las componentes que transportan información [7].

En la figura 2.14 se muestra el proceso de traslación espectral en un esquema de modulación lineal.

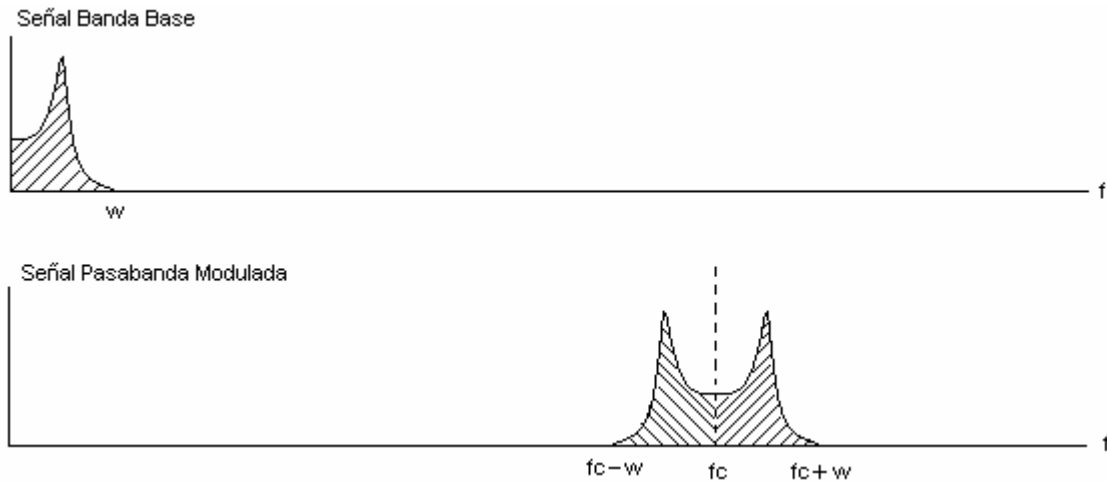


Figura 2.14. Traslación espectral directa en modulación lineal.

Hay dos aspectos a tener en cuenta en la traslación espectral (modulación lineal):

- La portadora se suprime, por lo que es necesario que la detección sea *coherente* o *sincrónica*⁹.
- El ancho de banda ocupado por la señal después de la traslación es el doble del ancho de banda previo a la traslación (en banda base).

Sistema general de transmisión digital pasabanda lineal

La figura 2.15 muestra el diagrama en bloques de un sistema de transmisión digital pasabanda. Enseguida se describe el progreso de la señal a lo largo del sistema.

El flujo de bits original con velocidad R_b es subdividido en bloques de n bits con $n = \log_2 M$ siendo M el número de posibles símbolos de la modulación.

Cada bloque de n bits es convertido en un símbolo complejo de la forma

$$c_k = a_k + jb_k, \quad (2.46)$$

donde $a_k, b_k \in R$ y $k \in Z$.

⁹ Detección Coherente: También conocida como detección sincrónica, consiste en recuperar el mensaje en banda base a partir del conocimiento exacto de la frecuencia y fase de la portadora utilizada para enviar la señal en pasa banda. Un error en la adquisición de los datos puede representar la pérdida parcial o total de la información por efecto del repentino decaimiento que sufre la señal en el receptor.

Con esto se tiene un símbolo cada $T = nT_b$ segundos. El alfabeto fuente al cual pertenece el número complejo c_k se conoce con el nombre de *constelación*. La distribución de los símbolos dentro de dicha constelación determina el esquema de modulación que está siendo utilizado [8].

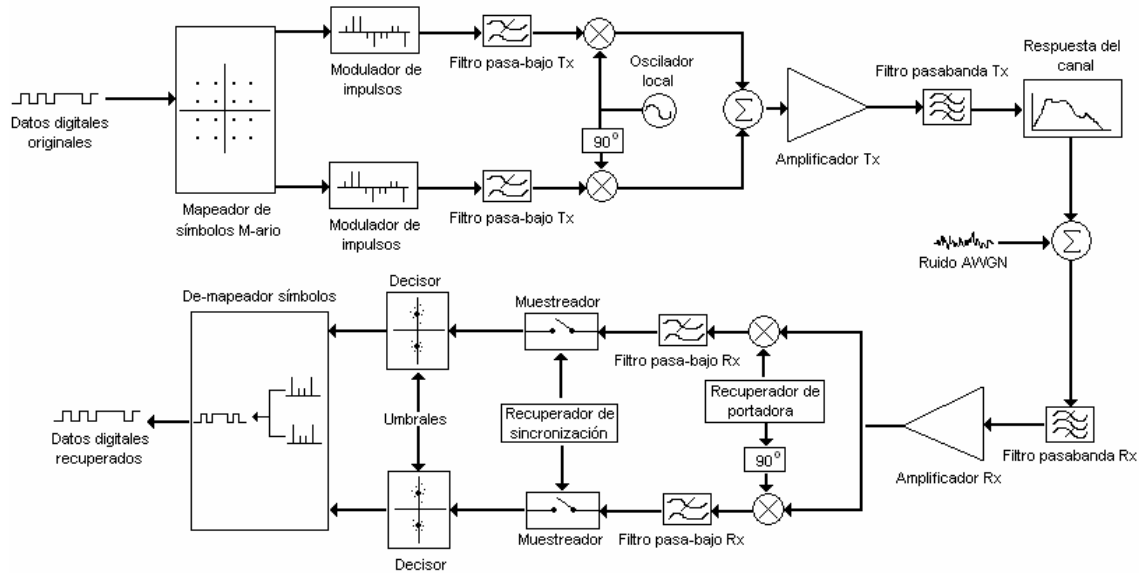


Figura 2.15. Sistema de transmisión digital lineal pasabanda M-ario.

La asignación de un símbolo complejo implica que la información es distribuida en dos caminos paralelos, uno para las componentes reales y otro para las componentes imaginarias. Cada camino es pasado de igual forma a través de un modulador de impulsos, un filtro pasabajo conformador y un modulador balanceado, la diferencia radica en que las ondas portadoras que alimentan cada modulador están desfasadas entre sí 90° , con lo que se tienen dos señales ortogonales entre sí, por lo que se pueden mezclar sin temor a perder la capacidad de distinguir entre una y otra [8].

La señal de salida enviada al canal de comunicaciones está dada por:

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k g(t - kT) \cos(2\pi f_c t) - \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k g(t - kT) \sin(2\pi f_c t), \quad (2.47)$$

donde $g(t)$ es la forma del pulso resultante del efecto combinado del filtro pasabajo conformador y el filtro pasabanda a la salida del transmisor, suponiendo siempre una respuesta ideal de los amplificadores y los osciladores cuyo factor de amplificación no se toma en cuenta en la ecuación (2.47).

El filtro pasabanda a la salida del transmisor tiene la función de suprimir posibles emisiones fuera de banda causadas por las no linealidades del amplificador y el oscilador. La señal a la salida del canal está afectada por la respuesta del medio de transmisión y el ruido del canal. Suponiendo que el canal es un sistema lineal, temporalmente invariante (LTI), que introduce ruido AWGN, la señal a la entrada del receptor está dada por:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k h(t - kT) \cos(2\pi f_c t) - \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k h(t - kT) \sin(2\pi f_c t) + w(t), \quad (2.48)$$

donde $h(t)$ es la forma de pulso debida al canal y $w(t)$ es ruido AWGN.

En el receptor la señal es filtrada a pasa banda y amplificada linealmente. La función de este filtro consiste en discriminar la señal deseada de las emisiones en canales adyacentes y limitar la potencia de ruido del canal. Enseguida de esta etapa, la señal se demodula coherentemente en los dos canales por medio del circuito recuperador de portadora, los moduladores balanceados y el filtro pasa bajo.

La exactitud del circuito recuperador determina el grado de ortogonalidad que aun se mantiene entre los dos caminos transversales.

El circuito recuperador de portadora produce una señal $\cos(2\pi f_c t + \theta)$, y para el caso de reconstrucción de portadora perfecta se tiene $\theta = 0$.

Asumiendo una recuperación perfecta de portadora, se tiene un aislamiento total entre las dos ramas del receptor, manteniéndose así la condición de ortogonalidad entre los caminos. Las señales que se generan en cada rama, tras los filtros pasa bajo, están dadas por:

$$x_I(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k p(t - kT) + n_I(t), \quad (2.49)$$

$$x_Q(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k p(t - kT) + n_Q(t), \quad (2.50)$$

donde $p(t)$ es la forma de pulso total resultante del efecto de los filtros pasa bajo y pasa banda del transmisor, el medio de transmisión y los filtros pasa bajo y pasa banda del receptor.

Por otro lado, las expresiones $n_I(t)$ y $n_Q(t)$ son las componentes de ruido reflejadas respectivamente en cada rama del receptor. Este par de señales presentan dos características interesantes. Primero, son el resultado del paso de un proceso de ruido gaussiano a través de un conjunto de sistemas lineales (LTI) conectados en cascada (filtros del transmisor, canal, filtros del receptor), por tanto, sus características estadísticas se mantienen, esto es, $n_I(t)$ y $n_Q(t)$ son procesos de ruido gaussiano de media cero y varianza N_0B al igual que el ruido original. Segundo, las componentes $n_I(t)$ y $n_Q(t)$ son ortogonales, por tanto, su efecto es el equivalente a tener un par de procesos AWGN independientes, uno en cada rama [6].

La forma del pulso global del sistema debe cumplir con la condición de Nyquist para ausencia de ISI, en efecto, $p(t)$ está dada por la ecuación (2.13). Al igual que en la transmisión banda base, la formación del espectro $P(f)$ dado en (2.25) es repartida uniformemente entre transmisor y receptor, esto bajo un comportamiento ideal del canal. Salvo que esta vez, intervienen dos filtros en lugar de uno en la formación de cada mitad [8].

Las señales pasa bajo dadas por (2.49) y (2.50) son muestreadas cada T segundos en los instantes óptimos de muestreo entregados por el circuito recuperador de sincronización, y las muestras resultantes son evaluadas en los decisores respecto a los correspondientes umbrales. Bajo las condiciones dadas para $p(t)$ en (2.13) las muestras resultantes se desviarán de sus valores correctos por causa exclusivamente del ruido filtrado presente en la señal demodulada.

Finalmente, los valores cuantificados que salen de los decisores son reconvertidos en datos binarios por cuenta del demapeador de símbolos, el cual interpreta cada número complejo como una secuencia de n bits [8].

Clases de modulación

Como se mencionó antes, el esquema de modulación se determina a partir de la constelación de símbolos utilizada en el mapeo de las secuencias de bits. Partiendo del hecho que M es una potencia entera de 2, con $M = 2^n$, se tienen las siguientes clases de modulación lineal [8]:

A) Modulación M-ASK:

Se tiene cuando los números complejos $c_k = a_k + jb_k$ toman la siguiente forma:

$$a_k = \pm 1, \pm 3, \dots, \pm(M-1) \quad (2.51)$$

$$b_k = 0 \quad (2.52)$$

para $\forall k \in Z$.

El esquema M-ASK es muy similar al esquema M-PAM en banda base, de hecho tienen la misma constelación, la diferencia radica en que el primero se envía sobre una frecuencia portadora pasabanda y el segundo se envía tal cual en banda base. En la figura 2.16a se muestra la constelación de un esquema 4-ASK.

B) Modulación M-PSK:

Se obtiene cuando los números complejos $c_k = a_k + jb_k$ toman la siguiente forma:

$$a_k = \cos(\phi_k), \quad (2.53)$$

$$b_k = \sin(\phi_k), \quad (2.54)$$

donde ϕ_k toma los valores de fase de un conjunto de M números complejos distribuidos simétricamente sobre una circunferencia unitaria.

En la figura 2.16b se muestra la constelación de un esquema 8-PSK.

C) Modulación M-QAM:

Se obtiene cuando las componentes real e imaginaria de los números complejos $c_k = a_k + jb_k$ toman la siguiente forma:

$$a_k = \pm 1, \pm 3, \dots, \pm(\sqrt{M} - 1), \quad (2.55)$$

$$b_k = \pm 1, \pm 3, \dots, \pm(\sqrt{M} - 1), \quad (2.56)$$

donde M es un cuadrado perfecto.

En la figura 2.16c se muestra la constelación correspondiente a un esquema 16-QAM.

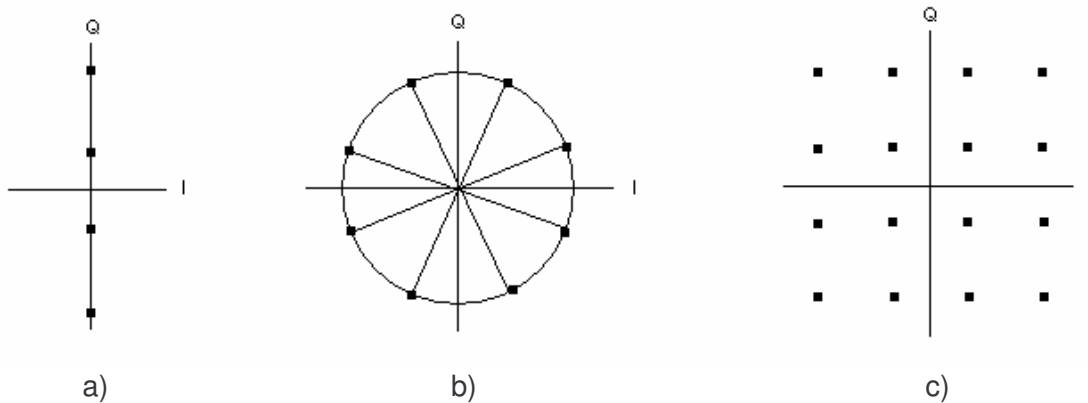


Figura 2.16. Constelaciones representativas de los tres esquemas básicos de modulación digital lineal. a) 4-ASK. b) 8-PSK. c) 16-QAM.

Acerca de los esquemas de modulación lineal, puede decirse lo siguiente:

- M-ASK representa cada símbolo con diferente amplitud de portadora.
- M-PSK representa cada símbolo con la misma amplitud pero con diferente fase de portadora.
- M-QAM representa cada símbolo con diferente amplitud y diferente fase de portadora. Puede considerarse a M-QAM como un esquema híbrido entre M-ASK y M-PSK.
- En la práctica, los esquemas de modulación de mayor interés son los M-PSK y los M-QAM, relegando a los sistemas M-ASK a un segundo plano. El uso más extendido de PSK y QAM se debe a sus mayores ventajas en cuanto a eficiencia espectral y comportamiento frente al ruido [8].

Características espectrales de las señales M-PSK y M-QAM

El espectro ocupado por la señal de salida del transmisor en la ecuación (2.47) está dado por su *densidad espectral de potencia*¹⁰. Para obtener esta densidad espectral de potencia, primero considérese a la señal en (2.47) como la superposición de dos señales no correlacionadas $s_I(t)$ y $s_Q(t)$ esto es

$$s(t) = s_I(t) - s_Q(t), \quad (2.57)$$

donde

$$s_I(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k g(t - kT) \cos(2\pi f_c t), \quad (2.58)$$

$$s_Q(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k g(t - kT) \sin(2\pi f_c t). \quad (2.59)$$

Dado que los símbolos de la fuente son independientes y equiprobables, las señales $s_I(t)$ y $s_Q(t)$ son no correlacionadas, por tanto, la densidad espectral de potencia de la señal transmitida (2.47) es igual a:

$$S_s(f) = S_{s_I}(f) + S_{s_Q}(f) \quad (2.60)$$

En [6] está demostrado que la *PSD* de una señal de la forma $\sum_k d_k h(t - kT)$ está dada por:

$$PSD\left\{\sum_k d_k h(t - kT)\right\} = \frac{|H(f)|^2}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} R(k) \exp(j2\pi k T f), \quad (2.61)$$

donde $H(f)$ es el espectro de la forma de onda utilizada $h(t)$ y $R(k)$ es la autocorrelación de la secuencia discreta d_k .

Si d_k pertenece a un alfabeto de símbolos equiprobables, independientes y de valor DC igual a cero (valor esperado de la fuente), la ecuación (2.62) se reduce a:

$$PSD\left\{\sum_k d_k h(t - kT)\right\} = \frac{|H(f)|^2}{T} \quad (2.62)$$

¹⁰ Densidad espectral de potencia (PSD): Es una medida del espectro de potencia promedio generado por una señal aleatoria. Matemáticamente se calcula como la transformada de Fourier de la función de autocorrelación de la señal en cuestión. La función de autocorrelación es una medida estadística del grado de relación entre una señal y sus propias traslaciones. $R_x(\tau) = E\{x(\tau)x(t + \tau)\}$.

Como puede observarse, estos criterios pueden aplicarse perfectamente en las ecuaciones (2.58) y (2.59) dado que las secuencias a_k y b_k cumplen con las condiciones establecidas para d_k , con lo que se tiene:

$$S_s(f) = \frac{|H_I(f)|^2}{T} + \frac{|H_Q(f)|^2}{T}, \quad (2.63)$$

con

$$H_I(f) = \frac{1}{2} [G(f - f_c) + G(f + f_c)], \quad (2.64)$$

$$H_Q(f) = \frac{1}{j2} [G(f - f_c) - G(f + f_c)]. \quad (2.65)$$

Teniendo en cuenta que $G(f)$ es limitado en banda y que $f_c > 1/T$, se tiene la expresión para la PSD de una señal modulada linealmente en función de la forma de pulso en banda base, la cual está dada por:

$$S_s(f) = \frac{1}{2T} [|G(f - f_c)|^2 + |G(f + f_c)|^2] \quad (2.66)$$

La figura 2.12 ilustra gráficamente el comportamiento de la ecuación (2.67) para el caso en que $g(t)$ es un pulso raíz cuadrada de coseno *roll off*. A partir de esta figura se pueden enunciar varias conclusiones importantes acerca de las señales M-PSK y M-QAM [8].

- El ancho de banda de una señal modulada linealmente, que utiliza formación de pulso de coseno *roll off*, es igual a $(1/T)(1+\alpha)$, esto es, el doble del ancho de banda de la señal en banda base, lo cual corresponde perfectamente con la teoría de la modulación AM.
- Los esquemas de modulación M-PSK y M-QAM distribuyen de la misma forma la energía sobre el ancho de banda definido para su correspondiente transmisión.
- No se advierte la presencia de una línea impulsiva en la frecuencia portadora, lo que significa que no se transmite componente de portadora, por tanto, toda la potencia que se transmite corresponde a contenido de información.
- La potencia se encuentra distribuida simétricamente alrededor de la portadora, alcanzando su valor máximo precisamente en la frecuencia portadora. Esto significa que este modo de transmisión imposibilita la utilización de alguna otra alternativa de modulación en amplitud, como por ejemplo, esquemas de banda lateral única o banda lateral residual, pues el uso en este caso resultaría en una distorsión total de la información.
- La eficiencia espectral para los esquemas M-PSK y M-QAM está dada por:

$$\eta = \frac{\log_2 M}{1 + \alpha} \quad (2.67)$$

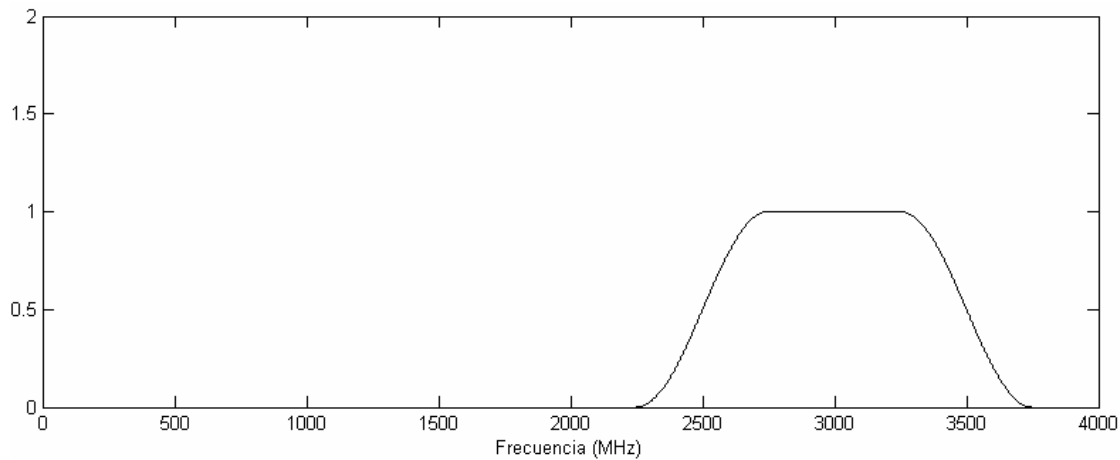


Figura 2.17. Densidad espectral de potencia de una señal digital modulada linealmente en pasabanda y utilizando formación de pulso de coseno *roll off*.

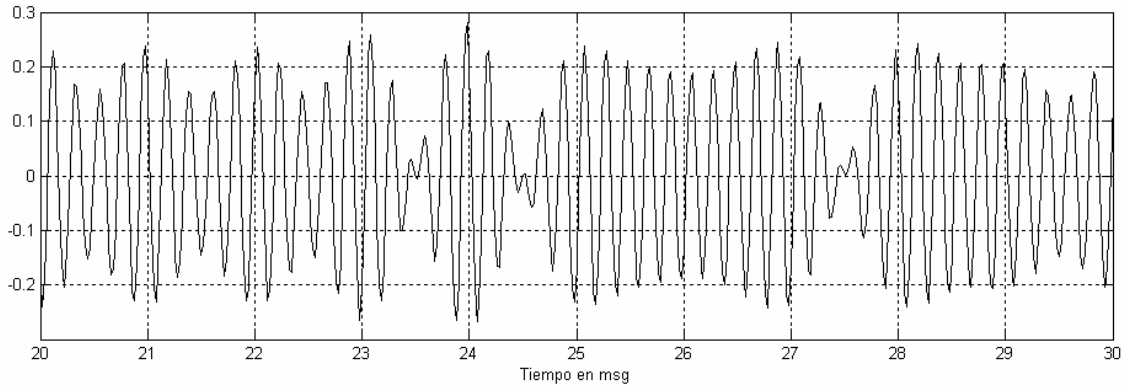
Como puede notarse en la figura (2.17) y en las observaciones hechas al respecto, el comportamiento espectral de M-PSK y M-QAM es exactamente igual. La diferencia fundamental entre M-PSK y M-QAM radica en el comportamiento de la probabilidad de error para un mismo valor de potencia pico y número de símbolos de la constelación.

En efecto, QAM alcanza una mayor distancia entre los símbolos de la constelación para valores de M mayores a 4 respecto al sistema PSK. Por tanto, los sistemas QAM son más robustos frente al ruido que los sistemas PSK. Es por esto, que comercialmente, los sistemas QAM son utilizados en modulaciones de alto nivel ($M > 8$) alcanzando altos niveles de eficiencia espectral [6],[7],[8],[9].

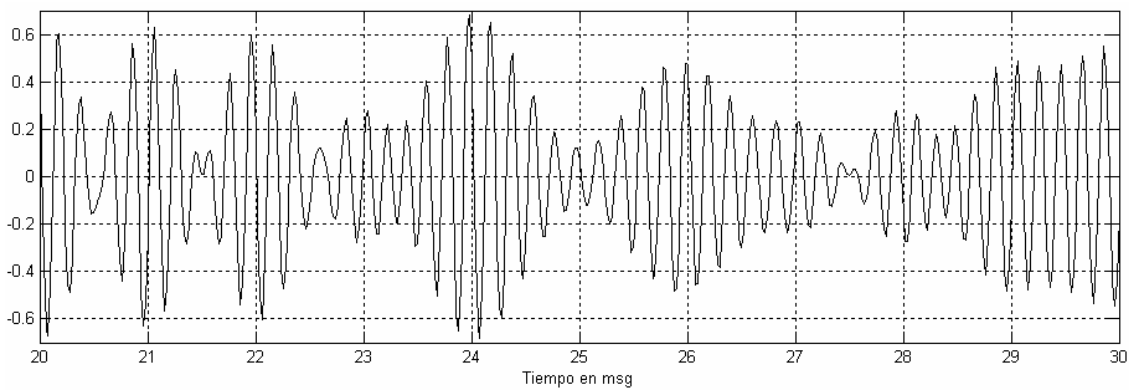
En la figura 2.18 se observan dos señales 4-PSK (figura 2.18a) y 16-QAM (figura 2.18b) utilizando un filtro raíz cuadrada de coseno *roll off* con factor de *roll off* de 0.7. Aquí puede advertirse la baja variación de envolvente de PSK y la alta variación en QAM.

Una ventaja de las señales PSK sobre QAM es su baja variación de envolvente respecto al alto índice de variación del mismo parámetro en QAM. Esto hace que la señal PSK tenga mayor robustez frente a un eventual comportamiento no lineal de los amplificadores y del mismo canal. Por esta razón, para un amplificador con un nivel de saturación dado, es posible radiar con mayor potencia promedio una señal M-PSK que una señal M-QAM para cualquier valor de M .

Los sistemas M-PSK son especialmente utilizados en entornos donde existen limitaciones en potencia y/o posible comportamiento no lineal del canal, por ejemplo, en comunicaciones móviles inalámbricas. Por su parte, los sistemas QAM son más utilizados en microondas digitales por línea de vista, donde las características de los amplificadores y el comportamiento estacionario del canal permiten transmisiones de muy alta velocidad a muy bajas tasas de error [8].



a)



b)

Figura 2.18. a) Señal 4-PSK con factor *roll off* igual a 0.7. b) Señal 16-QAM con el mismo factor de *roll off*.

3. CONCEPTOS DE LA TRANSFORMADA DISCRETA WAVELET

3.1. TRANSFORMADA WAVELET CONTINUA

La *Transformada Wavelet* es una técnica de análisis y procesamiento de señales que surgió como una alternativa de solución a algunos problemas de este campo que no fueron resueltos satisfactoriamente por el análisis de Fourier, específicamente aquellos fenómenos relacionados con *señales no estacionarias*¹¹. Dichas señales, en general se caracterizan por registrar eventos de corta duración y aparición repentina, difíciles de examinar mediante transformaciones que utilizan funciones base infinitas y periódicas como la transformada de Fourier tradicional. La *transformada wavelet* aparece entonces como una opción para superar estos inconvenientes, ya que utiliza las *wavelets* como funciones base, rasgo que la hace ideal para el análisis de fenómenos no estacionarios [10].

Las *wavelets*, simbolizadas con la letra griega *psi* (ψ), son funciones con aspecto parecido al de una señal sísmica que cumplen tres propiedades fundamentales, también llamadas *condiciones de admisibilidad*, estas son:

- Valor medio cero.
- Duración finita.
- Buena localización espectral.

La primera hace referencia al hecho que una *wavelet* no tiene componente D.C., lo que hace que sea considerada como una señal *pasabanda* [10]. Matemáticamente, esta propiedad se puede enunciar de la siguiente manera:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt = 0 \quad (3.1)$$

La segunda propiedad establece que toda *wavelet* tiene un comienzo y un fin, lo cual implica que nunca puede ser estrictamente limitada en banda [11].

La tercera propiedad afirma que el espectro de una función *wavelet*, posee una alta concentración de energía (superior al 90%) sobre cierto intervalo de frecuencia denominado *lóbulo principal* [10].

Existen muchos tipos diferentes de *wavelets* descubiertas hasta el momento, sin embargo, para los propósitos de este documento, son de especial interés aquellas que posean las propiedades adicionales de *ortogonalidad* y *soporte compacto*. La *ortogonalidad* de una *wavelet* es la característica que garantiza una reconstrucción

¹¹ Señal o proceso aleatorio caracterizado por no mantener un comportamiento estadístico constante a través del tiempo, esto es, sus parámetros estadísticos varían de un intervalo de tiempo a otro, con lo que resulta imposible definir un modelo de probabilidad preciso que lo describa completamente.

perfecta de la señal de interés a partir del mismo conjunto de funciones utilizado para su descomposición. Por otro lado, la propiedad de *soporte compacto* permite implementar las operaciones de descomposición y reconstrucción a partir de filtros digitales simples *FIR* (filtros de respuesta al impulso finita). Como ejemplos de este tipo de funciones *wavelet* se tienen entre otras, las *Daubechies de orden N*, las *symlets de orden N*, las *coiflets de orden N*, *Haar*, etc.

La *transformada wavelet continua*, por su parte, consiste en comparar la señal de interés con todas las posibles traslaciones y escalonamientos (expansiones y contracciones) de una misma función *wavelet* conocida como *wavelet madre*. El conjunto de funciones generado por todos los escalonamientos y traslaciones de la *wavelet madre* constituye una *familia wavelet*. En otras palabras, la *transformada continua wavelet* es el proceso de comparación (en el sentido de producto interno de funciones) de todos y cada uno de los elementos de la *familia wavelet* con la señal en cuestión [10]. Matemáticamente, la *transformada wavelet continua* está dada por:

$$S(a,b) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)\psi_{a,b}(t)dt \quad a > 0, b \in \mathfrak{R}, \quad (3.2)$$

donde: $s(t)$ = Señal de interés (señal a descomponer).

$S(a,b)$ = Transformada wavelet continua de $s(t)$.

$\psi_{a,b}(t)$ = Familia wavelet con parámetros a y b .

a = Parámetro de escala.

b = Parámetro de traslación.

La *familia wavelet* es una familia *biparamétrica* (depende de a y b), definida por:

$$\psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}}\psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \quad (3.3)$$

A partir de las ecuaciones (3.2) y (3.3), puede decirse que la transformada wavelet de una señal es una función de dos variables en la cual el parámetro de traslación ' b ' indica la posición temporal del análisis, mientras el parámetro de escala ' a ' hace referencia al ancho de la función que examina a la señal, lo cual pone de manifiesto el grado de fidelidad de la transformación, pues un valor pequeño de ' a ' implica un análisis sobre una porción temporal reducida, esto es, mayor resolución, mientras un valor grande de ' a ' significa una evaluación sobre una amplia región del tiempo, con lo que se tiene menor resolución. Del análisis de Fourier se sabe que las perturbaciones de corta duración presentan altas componentes de frecuencia y viceversa, por tanto, los valores pequeños de ' a ' están relacionados a las altas frecuencias de la misma forma que los valores grandes lo están con las bajas frecuencias. Con esto se tiene un análisis completo de la señal de interés en tiempo y frecuencia con un grado variable de fidelidad [11].

Cuando la familia wavelet utilizada para el análisis cumple la propiedad de ortogonalidad, la reconstrucción de la señal original está dada por:

$$s(t) = C \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} S(a,b) \psi_{a,b}(t) db da, \quad (3.4)$$

donde C es una constante real positiva que no reviste mayor importancia.

3.2. TRANSFORMADA WAVELET DISCRETA

La *transformada wavelet discreta* consiste en especificar la longitud de los escalonamientos y las traslaciones como potencias de 2, de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} a &= 2^{-j} \\ b &= 2^{-j} k, \end{aligned} \quad (3.5)$$

donde $j, k \in \mathbb{Z}$.

Al parámetro j se lo conoce como *nivel de resolución* y al parámetro k como *nivel de traslación*. Como puede observarse en la ecuación (3.5), el parámetro de escala depende exclusivamente del *nivel de resolución*, mientras que el parámetro de traslación depende tanto de j como de k , con lo que 'a' y 'b' ya no son parámetros independientes, contrario a lo que ocurría en la transformada continua [11]. Teniendo en cuenta lo anterior, la *familia wavelet* se redefine de la siguiente manera:

$$\psi_{j,k}(t) = 2^{j/2} \psi(2^j t - k) \quad j, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (3.6)$$

La *wavelet madre* se define entonces como aquel miembro de la familia cuyos parámetros son $j = k = 0$, esto es:

$$\psi(t) = \psi_{0,0}(t) \quad (3.7)$$

Está comprobado matemáticamente que discretizar los parámetros de esta manera es suficiente para lograr una reconstrucción perfecta (usando *wavelets* ortogonales), es más, se elimina gran parte de la redundancia presente en la transformada continua [11]. Esta es la principal razón que explica el uso mayoritario de la transformada discreta por sobre la *transformada continua wavelet*.

La *transformada wavelet discreta* está dada por:

$$S_{j,k} = \int_{-\infty}^{\infty} 2^{j/2} \psi(2^j t - k) s(t) dt \quad (3.8)$$

La función discreta resultante, $S_{j,k}$, se conoce con el nombre de *coeficientes wavelet*.

Se dice que una *familia wavelet* $\psi_{j,k}(t)$ es *ortonormal*¹² si se cumple la siguiente relación:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_{j,k}(t) \psi_{m,n}(t) dt = \delta[j-m, k-n] = \begin{cases} 1 & , \text{si } j = m \text{ y } k = n \\ 0 & , \text{en cualquier otro caso,} \end{cases} \quad (3.9)$$

donde el término $\delta[j-m, k-n]$ es la función *delta de Kroeneker*, la cual es igual a uno cuando su argumento (escalar o vector) es cero, y vale cero en caso contrario.

A partir de esta condición, la reconstrucción de la señal queda determinada completamente por:

$$s(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^{j/2} \psi(2^j t - k) S_{j,k} \quad (3.10)$$

La ecuación (3.10) se conoce como *transformada inversa wavelet discreta*.

3.3. ANÁLISIS MULTIRESOLUCIÓN

El *análisis multiresolución* constituye el soporte teórico que permite una eventual implementación computacional de la *transformada discreta wavelet* a través del uso de funciones *wavelet ortogonales (ortonormales)* y de *soporte compacto*. Este análisis se fundamenta en el hecho que una *familia wavelet ortogonal* forma una base completa para el espacio vectorial de todas las *señales de energía finita* (funciones de cuadrado integrable), $L^2(R)$, o lo que es lo mismo, la *familia wavelet* genera el espacio $L^2(R)$ [11]. A partir de ello se desprenden las siguientes definiciones:

- Para un valor fijo del nivel de resolución, $j = J$, el conjunto de funciones $\{\psi_{J,k}(t), k \in \mathbb{Z}\}$ generan el subespacio W_J , conocido con el nombre de *subespacio wavelet* de nivel de resolución J . Según la ecuación (3.9), los componentes de una *familia wavelet* son ortogonales entre si cuando tienen diferente nivel de resolución, entonces se tiene que todos los subespacios W_j generados para los distintos valores de j son mutuamente ortogonales. Esto en adición al postulado inicial acerca que la *familia wavelet* genera a $L^2(R)$ permite aseverar que el conjunto de todos los *subespacios wavelet* (todos los valores de j) representa una *partición*¹³ del espacio vectorial $L^2(R)$. Las ecuaciones (3.11) y (3.12) expresan matemáticamente la última afirmación.

$$W_j \cap W_m = \phi \quad , \quad \text{para todo } j, m \in \mathbb{Z}, \text{ tal que } j \neq m, \quad (3.11)$$

¹² Un conjunto ortonormal es un conjunto ortogonal con la particularidad que la norma (energía) de todos los elementos del conjunto es igual a uno.

¹³ Se dice que un grupo de elementos representa una partición de un conjunto si y solo si dichos elementos son mutuamente excluyentes y además la unión de todos ellos es exactamente igual al conjunto en cuestión.

$$\bigcup_{j=-\infty}^{\infty} W_j = L^2(\mathfrak{R}), \quad (3.12)$$

donde el símbolo \emptyset denota al conjunto vacío.

La descomposición de una señal mediante *transformada wavelet* implica su proyección sobre el espacio vectorial $L^2(\mathfrak{R})$, sin embargo, tal proyección no es inmediata sino mas bien progresiva, en ese sentido se define V_j como el *subespacio de escala* de nivel de resolución $j = J$. Este subespacio se construye en forma recursiva a través de la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned} V_j &= V_{j-1} \cup W_{j-1} \\ V_{j-1} \cap W_{j-1} &= \emptyset \quad \text{para todo } j \in Z \end{aligned} \quad (3.13)$$

La ecuación (3.13) indica que los subespacios de escala no son ortogonales entre si, en lugar de ello conforman una estructura anidada de subespacios autocontenidos (ver ecuación (3.14)). Por otro lado, W_{j-1} es el complemento ortogonal de V_{j-1} para formar V_j , por tanto, los *subespacios wavelet* y de *escala* son mutuamente ortogonales para un mismo nivel de resolución j . Se tienen entonces las siguientes propiedades:

$$\dots \subset V_{j-1} \subset V_j \subset V_{j+1} \subset \dots \quad (3.14)$$

$$\lim_{j \rightarrow \infty} V_j = V_{\infty} = L^2(\mathfrak{R}) \quad (3.15)$$

$$V_j = \bigcup_{n=-\infty}^{j-1} W_n \quad (3.16)$$

En términos prácticos, el análisis de la señal consiste en realizar proyecciones sucesivas sobre los *subespacios de escala* hasta llegar al nivel de resolución más alto posible. En cada etapa, la señal se proyecta sobre un subespacio V_j en el cual la información se divide en dos categorías independientes, la primera, denominada *información de detalle*, la constituye la proyección sobre el *subespacio wavelet* de nivel $J - 1$, la segunda, la *información promedio o de envolvente*, es la proyección sobre el *subespacio de escala* V_{J-1} . Con esto se tiene que la descomposición de la señal es la recolección de toda la información de detalle surgida a lo largo de las múltiples proyecciones pero sin perder la referencia de la información residual producida en cada iteración [10].

Un *subespacio de escala* a un nivel de resolución j , V_j , se genera a partir de un conjunto de funciones base simbolizadas con la letra griega *phi* (φ), las cuales están dadas por:

$$\varphi_{j,k}(t) = 2^{j/2} \varphi(2^j t - k) \quad j, k \in Z \quad (3.17)$$

Estas funciones son mutuamente ortogonales para un mismo valor de j , sin embargo no lo son para distintos valores de j , debido al carácter anidado de los subespacios V_j . La función $\varphi_{0,0}(t) = \varphi(t)$ se conoce con el nombre de *función de escala* y al conjunto de todas sus traslaciones y escalonamientos diádicos se le denomina *familia de funciones de escala*. Es importante notar que la *función de escala* está relacionada de manera unívoca

con la *función wavelet* usada, por tanto, cada tipo de *wavelet* tiene asociada una *función de escala* única y viceversa.

La función de escala cumple las siguientes propiedades:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) dt \neq 0 \quad (3.18)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{j,k}(t) \psi_{j,n}(t) dt = 0, \quad \text{para todo } j, k, n \in \mathbb{Z} \quad (3.19)$$

La ecuación (3.18) establece que la función de escala siempre tiene componente D.C., por tanto, es una *señal pasabajo*. La ecuación (3.19) afirma la ya mencionada condición de ortogonalidad entre las funciones de *escala* y *wavelet* en un mismo nivel de resolución j . La proyección de la señal sobre un *subespacio wavelet* W_j produce los *coeficientes wavelet* correspondientes al nivel j , mientras que la proyección sobre el *subespacio de escala* al mismo nivel de resolución da origen a otro conjunto de coeficientes conocidos como *coeficientes de escala*, los cuales están dados matemáticamente por:

$$A_{j,k} = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{j,k}(t) s(t) dt \quad (3.20)$$

Por todo lo anterior se concluye que, la *información de detalle* de la señal de interés está representada por los *coeficientes wavelet* $S_{j,k}$, mientras que la *información promedio* está dada en términos de los *coeficientes de escala* $A_{j,k}$.

3.4. ALGORITMO DE MALLAT

El *algoritmo de Mallat*, también conocido como *transformada rápida wavelet* (FWT), es el resultado más importante del *análisis multiresolución*. Este algoritmo permite calcular la *transformada discreta wavelet* (directa e inversa) a partir de un par de filtros digitales definidos de acuerdo a la *función wavelet* utilizada [11].

Los procesos de descomposición y reconstrucción consisten en disponer los filtros mencionados en una estructura denominada *banco de filtros*, en la cual se realiza el cálculo de los coeficientes de *escala* y *wavelet* en forma recursiva y con la ayuda de otros operadores discretos simples (sobremuestreo, decimación, suma). Los filtros definidos en el *algoritmo de Mallat* corresponden a un filtro pasa bajo FIR y un filtro pasa alto FIR, los cuales guardan entre si una relación de *conjugación o cuadratura* además de satisfacer la condición de ortogonalidad. Lo anterior se expresa matemáticamente mediante las siguientes ecuaciones:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]h[n-2m] = \delta[m] \quad , \text{ para todo } m \in Z \quad (3.21)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} g[n]g[n-2m] = \delta[m]$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]g[n-2m] = 0 \quad , \text{ para todo } m \in Z \quad (3.22)$$

$$g[n] = (-1)^n h[L-1-n] \quad , \text{ para } n=0,1,\dots,L-1 \quad (3.23)$$

donde: $h[n]$ = Filtro pasa bajo FIR.

$g[n]$ = Filtro pasa alto FIR.

L = Longitud del filtro $h[n]$ (igual a la longitud de $g[n]$).

$\delta[n]$ = Función delta de Kroeckneker.

La ecuación (3.21) muestra la ortogonalidad de los filtros respecto a si mismos, las ecuaciones (3.22) y (3.23) indican la relación de conjugación o cuadratura entre los filtros g y h . Los coeficientes de los filtros $h[n]$ y $g[n]$ están ligados exclusivamente al tipo de *wavelet* utilizado, por esa razón, en la definición de una función *wavelet* siempre se especifican los coeficientes de los filtros asociados a ella. Cuando la longitud de los filtros (número de coeficientes) correspondientes a una *wavelet* es un número finito, se dice que dicha *wavelet* tiene *soporte compacto*.

La *transformada rápida wavelet* directa (FWT) está dada por el siguiente par de ecuaciones:

$$A_{j,k} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n-2k]A_{j+1,n} \quad (3.24)$$

$$S_{j,k} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g[n-2k]A_{j+1,n} \quad (3.25)$$

Como puede observarse, esta operación involucra el cálculo de los *coeficientes wavelet* y de *escala* en un nivel de resolución particular a partir de los *coeficientes de escala* del nivel inmediatamente superior. Los procesos a realizar en cada etapa son filtraje y decimación¹⁴ de orden dos. La figura (3.1) ilustra la implementación de la FWT.

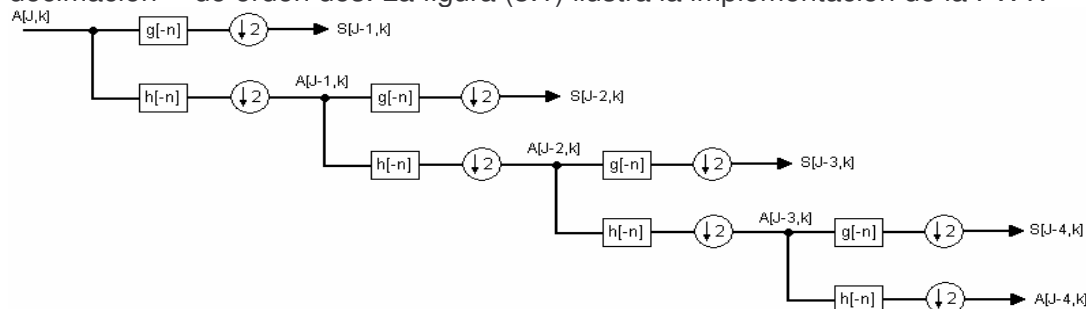


Figura 3.1. Implementación de la FWT mediante un banco de filtros.

¹⁴ La decimación de orden N es una operación sobre señales discretas que consiste en conservar una de cada N muestras consecutivas y eliminar las $N-1$ restantes. La señal de salida disminuye su longitud N veces.

La transformada rápida inversa wavelet (IFWT) está dada por la ecuación:

$$A_{j,k} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (h[k-2n]A_{j-1,n} + g[k-2n]S_{j-1,n}) \quad (3.26)$$

En esta ocasión, los *coeficientes de escala* a un nivel de resolución dado se obtienen a partir de los *coeficientes wavelet* y de *escala* del nivel inmediatamente inferior. Las operaciones realizadas en cada iteración son sobremuestreo¹⁵ de orden dos seguido de filtraje. La figura (3.2) constituye la implementación física de la ecuación (3.26).

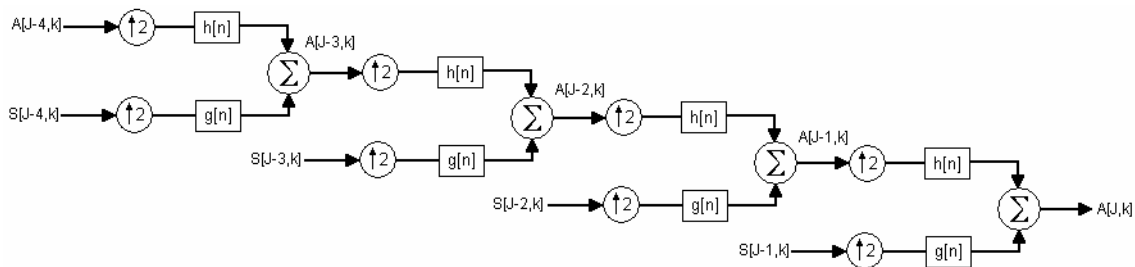


Figura 3.2. Diagrama de la IFWT con banco de filtros.

En general, la descomposición de una señal mediante el *algoritmo de Mallat* consiste en asumir que los *datos muestrales* de la señal de interés (señal a descomponer) corresponden a los *coeficientes de escala* de algún nivel de resolución arbitrario, por ejemplo J , se procede entonces conforme a la figura (3.1) y se obtienen los *coeficientes de escala* y *wavelet* correspondientes al nivel $J-1$, esto es $A_{J-1,k}$ y $S_{J-1,k}$, ahora, tomando como referencia los coeficientes $A_{J-1,k}$ se calculan los coeficientes del nivel $J-2$, $A_{J-2,k}$, $S_{J-2,k}$, mientras tanto, los coeficientes $S_{J-1,k}$ son guardados en memoria. Esta operación se repite de igual manera durante N iteraciones, almacenando en cada paso los *coeficientes wavelet*, y tomando a los *coeficientes de escala* como referencia para la siguiente iteración, así hasta llegar a la última iteración, en la cual no solo se almacenan los *coeficientes wavelet* surgidos en ese momento, sino también los *coeficientes de escala* de dicho nivel. La información guardada la conforman todos los *coeficientes wavelet* extraídos en cada etapa mas los *coeficientes de escala* que resultaron de la última iteración, con eso es suficiente para reconstruir perfectamente la señal de interés. Cabe notar que el número de iteraciones N es completamente arbitrario, y que la señal se reconstruye de la misma manera (con la misma fidelidad) independientemente del valor de N . Este hecho puntual se debe a que el número de coeficientes almacenados para recuperar la información es aproximadamente el mismo número de muestras que conforman la señal. La reconstrucción, por su parte, requiere la utilización de todos los datos anteriormente almacenados, sin embargo, su orden de aparición es completamente inverso al orden en el cual surgieron en el proceso de descomposición, de esa forma se llega iterativamente a la versión original de la señal.

Si una señal $x[k]$ está formada por L muestras, se tiene lo siguiente respecto a su descomposición: El número de *coeficientes de escala* es siempre igual al número de *coeficientes wavelet* en un mismo nivel de resolución (debido a que los filtros tienen la

¹⁵ El sobremuestreo de orden N , por su parte, consiste en interponer entre cada par de muestras consecutivas $N-1$ ceros. La señal de salida tendrá una longitud N veces más grande.

misma longitud y reciben datos de una misma fuente). Entonces el número de *coeficientes de escala y wavelet* tras la primera iteración es aproximadamente igual a $L / 2$ por causa de la decimación (suponiendo que la longitud de la señal es mucho mayor que la longitud de los filtros), de esa forma, el número de coeficientes al siguiente nivel será $L / 4$, después $L / 8$ y así sucesivamente hasta llegar a la última etapa que tendrá $L / (2^N)$ *coeficientes de escala y wavelet*, donde N es el número de iteraciones. Entonces la cantidad de datos almacenados estará dada aproximadamente por:

$$\frac{L}{2} + \frac{L}{4} + \frac{L}{8} + \dots + 2\left(\frac{L}{2^N}\right) = \sum_{i=1}^N \frac{L}{2^i} + \frac{L}{2^N} = L(1 - 2^{-N} + 2^{-N}) = L \quad (3.27)$$

El significado de la ecuación (3.27) radica en que la descomposición de una señal mediante *transformada wavelet* no origina ni pérdida ni ganancia de información, es decir, la información almacenada es *necesaria y suficiente*.

3.5. CARACTERÍSTICAS ESPECTRALES DE LAS WAVELETS

Las funciones *wavelet*, como se dijo desde un principio, cumplen con las *condiciones de admisibilidad*, por tanto su espectro presenta algunas características especiales que serán resaltadas a continuación.

- *La componente de frecuencia cero (D.C) del espectro de cualquier tipo de wavelet es siempre cero* [11]. Esta situación se expresa matemáticamente a través de la ecuación (3.28), en donde se ha tenido en cuenta la ecuación (3.1) para llegar al resultado deseado.

$$\Psi(0) = CFT\{\psi(t)\}\Big|_{f=0} = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt = 0, \quad (3.28)$$

donde $\Psi(f)$ es el espectro de $\psi(t)$ y *CFT* denota al operador *transformada continua de Fourier*.

- *Ningún tipo de wavelet es limitado en banda en el estricto sentido*. Esto se debe al principio de incertidumbre de Heisenberg, el cual establece que toda señal temporalmente finita es espectralmente infinita, mientras que lo opuesto no es necesariamente cierto, es decir, el carácter de infinita duración de una señal es una condición necesaria pero no suficiente para lograr la limitación en banda.

- *Todos los miembros de una familia wavelet con igual nivel de resolución j , tienen la misma magnitud espectral*. Para demostrar el último enunciado, se tiene que el espectro de cualquier miembro de la *familia wavelet* $\psi_{j,k}(t)$ puede expresarse en términos del espectro de la *wavelet madre* usando conjuntamente los teoremas de traslación temporal y cambio de escala de la *transformada de Fourier*, con lo que se obtiene lo siguiente:

$$\Psi_{j,k}(f) = CFT\{2^{j/2}\psi(2^j t - k)\} = 2^{-j/2} \exp(-i2\pi k 2^{-j} f) \Psi(2^{-j} f), \quad (3.29)$$

donde $\Psi_{j,k}(f)$ denota al espectro de un miembro representativo de la *familia wavelet* y $\Psi(f)$ corresponde al espectro de la *wavelet madre*. Aplicando valor absoluto a ambos lados de la ecuación (3.29), se llega al siguiente resultado:

$$|\Psi_{j,k}(f)| = 2^{-j/2} |\Psi(2^{-j} f)| \quad (3.30)$$

La ecuación (3.30) comprueba que la *magnitud del espectro* (valor absoluto de la *transformada de Fourier*) de cualquier miembro de la *familia wavelet* es una función que depende únicamente del nivel de resolución j (es independiente de k), con lo que queda demostrada la afirmación. El resultado de la ecuación (3.30) también revela otro importante rasgo de las *familias wavelet*, y es que cada aumento de una unidad del nivel de resolución j ensancha al doble la *magnitud del espectro* con relación al nivel anterior. Por lo tanto, los altos niveles de resolución implican amplios barridos en frecuencia (debido a la corta duración de las *wavelets*) y viceversa.

- La *energía espectral* de una *wavelet* con nivel de resolución j , está concentrada sobre el intervalo $[0 \ 2^{j+1}]$ Hz con un porcentaje mayor al 90% de su energía total. La forma que adquiere el espectro sobre dicho intervalo se conoce como *lóbulo principal* y el valor 2^{j+1} Hz corresponde al *ancho de banda* de la *wavelet* en el nivel de resolución j .

A continuación se muestran los gráficos de algunos tipos de *wavelet* que serán utilizados en el desarrollo del documento junto con sus correspondientes *espectros de potencia* (*magnitud del espectro* al cuadrado). En ellos se pueden corroborar algunas de las afirmaciones realizadas anteriormente. En todos los casos, las *wavelets* tienen nivel de resolución cero y los espectros de potencia están normalizados a 0 dB. Antes de entrar a examinar los gráficos, conviene aclarar algunos términos utilizados comúnmente en el *análisis wavelet*. Uno de ellos es el número de *momentos de desvanecimiento* de una *wavelet*, que se define como el valor máximo N para el cual se cumple la siguiente ecuación:

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^n \psi(t) dt = 0 \quad , \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (3.31)$$

El significado de este parámetro está relacionado con la rapidez de caída del espectro de la *wavelet* hacia la frecuencia cero y hacia el infinito, lo que proporciona una idea del nivel de los *lóbulos laterales* respecto al principal, resultando en una diferencia grande cuando el valor de N es grande y viceversa [10]. Otro término es la *longitud de soporte* de una *wavelet*, que corresponde a su duración temporal efectiva, muchas veces este parámetro se expresa en función del número de *momentos de desvanecimiento*. En la información expuesta a continuación también se mencionan otros valores importantes como el nivel del segundo lóbulo espectral y el porcentaje de energía contenido en el lóbulo principal.

Wavelet de Haar (ver figura 3.3) [11]:

Descripción: Es la *wavelet* más antigua y simple. Es ortogonal y de soporte compacto.

Momentos de desvanecimiento: 1.

Longitud de los filtros: 2.

Ancho de soporte: $2N - 1 = 1$ s.
 Nivel del segundo lóbulo: -10.5 dB.
 Porcentaje de energía en el lóbulo principal: 85.5829%.

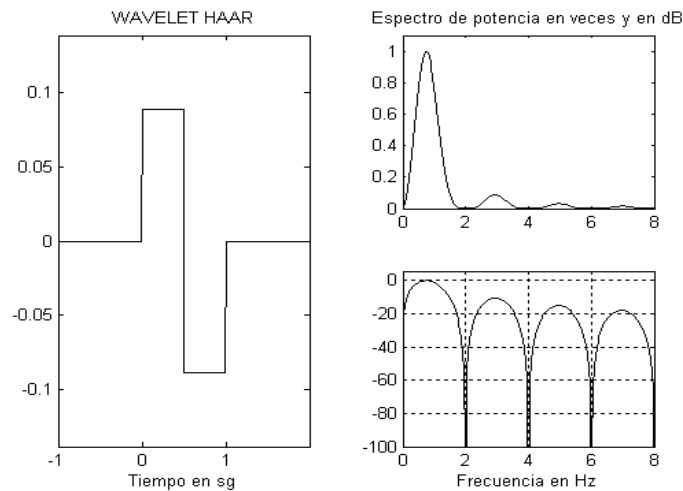


Figura 3.3. *Wavelet* de Haar y su espectro.

***Wavelet* de Daubechies $N = 2$ (ver figura 3.4) [11]:**

Descripción: En general, las *wavelets* de Daubechies de orden N se caracterizan por tener el mayor número de momentos de desvanecimiento para un ancho de soporte dado. Los filtros de escala asociados tienen fase mínima. Son ortogonales y de soporte compacto. La Daubechies de orden uno es equivalente a la *wavelet* de Haar.

Momentos de desvanecimiento: $N = 2$.

Longitud de los filtros: $2N = 4$.

Ancho de soporte: $2N - 1 = 3$ s.

Nivel del segundo lóbulo: -14.6 dB.

Porcentaje de energía en el lóbulo principal: 95.7425%.

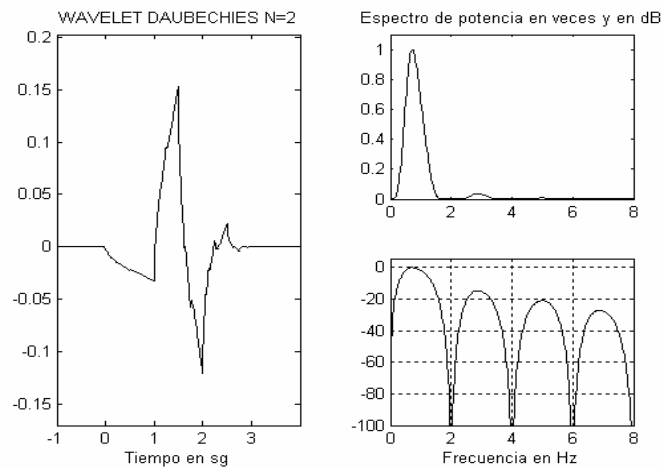


Figura 3.4. *Wavelet* Daubechies $N = 2$ y su espectro.

Wavelet de Daubechies $N = 5$ (ver figura 3.5) [11]:

Descripción: De orden 5, ortogonal y de soporte compacto.

Momentos de desvanecimiento: $N = 5$.

Longitud de los filtros: $2N = 10$.

Ancho de soporte: $2N - 1 = 9$ s.

Nivel del segundo lóbulo: -24 dB.

Porcentaje de energía en el lóbulo principal: 99.6744%.

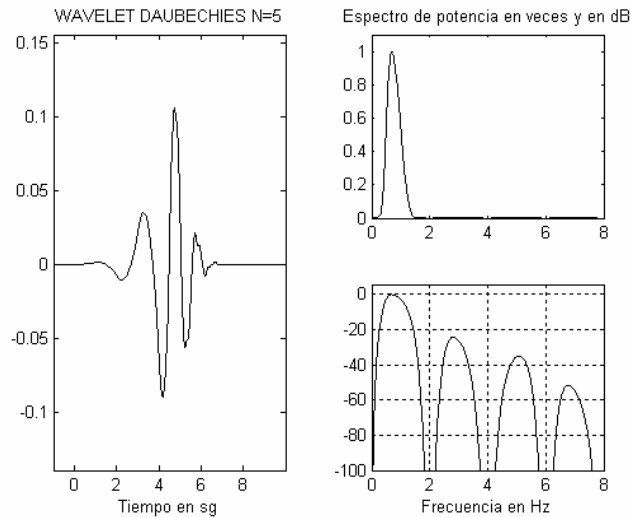


Figura 3.5. Wavelet Daubechies $N = 5$ y su espectro.

Wavelet de Daubechies $N = 8$ (ver figura 3.6) [11]:

Descripción: De orden 8, ortogonal y de soporte compacto.

Momentos de desvanecimiento: $N = 8$.

Longitud de los filtros: $2N = 16$.

Ancho de soporte: $2N - 1 = 15$ s.

Nivel del segundo lóbulo: -32.5 dB.

Porcentaje de energía en el lóbulo principal: 99.9615%.

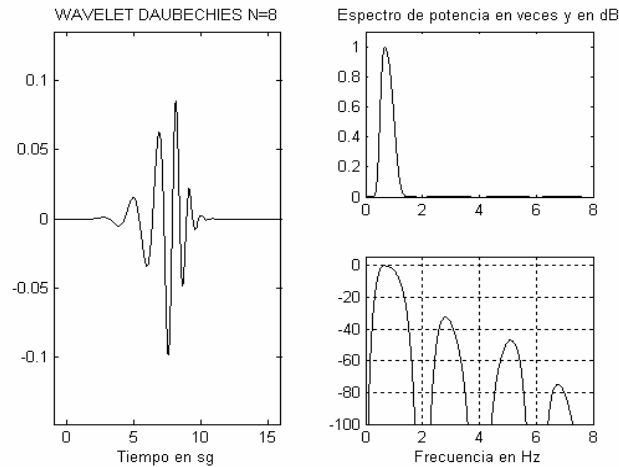


Figura 3.6. *Wavelet* Daubechies $N = 8$ y su espectro.

***Wavelet symlet N = 4* (ver figura 3.7) [11]:**

Descripción: En general, las *symlets* de orden N son *wavelets* con la mínima asimetría y el mayor número de momentos de desvanecimiento para un ancho de soporte dado. Son ortogonales y de soporte compacto. Los filtros de escala son cercanos a los de fase lineal. Las *symlets* y las Daubechies son equivalentes para $N = 1$ y $N = 2$ y sus propiedades son muy parecidas para los demás órdenes.

Momentos de desvanecimiento: $N = 4$.

Longitud de los filtros: $2N = 8$.

Ancho de soporte: $2N - 1 = 7$ s.

Nivel del segundo lóbulo: -21 dB.

Porcentaje de energía en el lóbulo principal: 99.2914%.

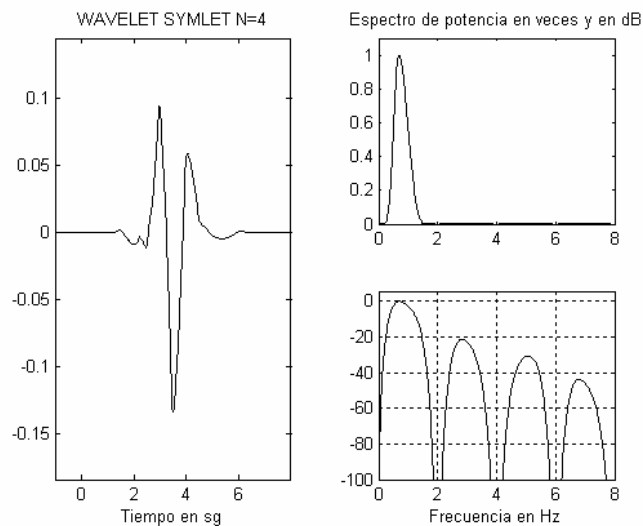


Figura 3.7. *Wavelet symlet* $N = 4$ y su espectro.

Wavelet symlet $N = 8$ (ver figura 3.8) [11]:

Descripción: *symlet* de orden 8, ortogonal y de soporte compacto.

Momentos de desvanecimiento: $N = 8$.

Longitud de los filtros: $2N = 16$.

Ancho de soporte: $2N - 1 = 15$ s.

Nivel del segundo lóbulo: -32.5 dB.

Porcentaje de energía en el lóbulo principal: 99.9615%.

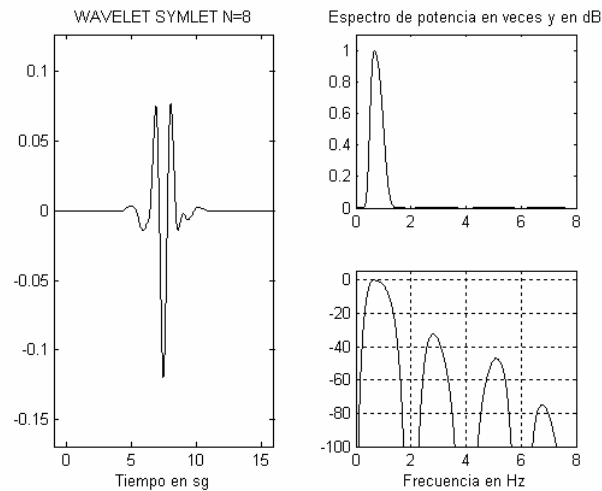


Figura 3.8. Wavelet *symlet* $N = 8$ y su espectro.

Wavelet de Coiffman (*coiflet*) $N = 1$ (ver figura 3.9) [11]:

Descripción: En general, las *wavelets* de Coiffman o *coiflets* de orden N , se caracterizan tener simultáneamente el mayor número de momentos de desvanecimiento tanto en la función *wavelet* como en la función de escala, para un ancho de soporte dado. Son ortogonales y de soporte compacto.

Momentos de desvanecimiento: $2N = 2$.

Longitud de los filtros: $6N = 6$.

Ancho de soporte: $6N - 1 = 5$ s.

Nivel del segundo lóbulo: -14.8 dB.

Porcentaje de energía en el lóbulo principal: 96.0051%.

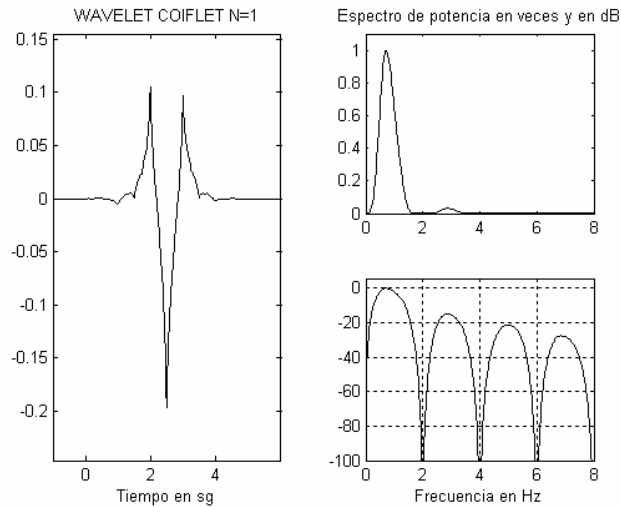


Figura 3.9. *Wavelet coiflet* $N = 1$ y su espectro.

Wavelet de Coiffman (coiflet) $N = 4$ (ver figura 3.10) [11]:

Descripción: *Coiflet* de orden 4, ortogonal y de soporte compacto.

Momentos de desvanecimiento: $2N = 8$.

Longitud de los filtros: $6N = 24$.

Ancho de soporte: $6N - 1 = 23$ s.

Nivel del segundo lóbulo: -34 dB.

Porcentaje de energía en el lóbulo principal: 99.9720%.

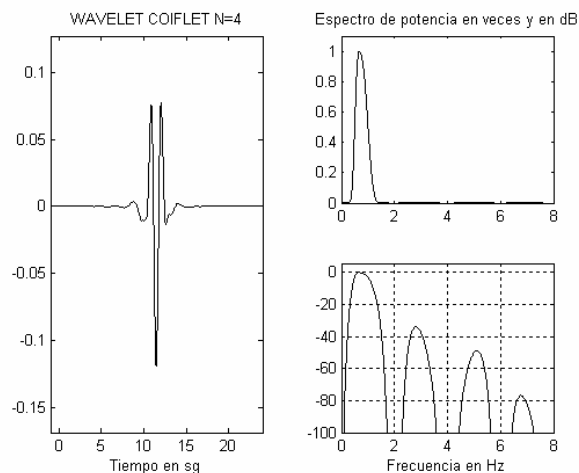


Figura 3.10. *Wavelet coiflet* $N = 4$ y su espectro.

Wavelet discreta de Meyer (ver figura 3.11) [11]:

Descripción: Es la aproximación a través de filtros FIR de la *wavelet* de Meyer original, la cual no es de soporte compacto.

Momentos de desvanecimiento: *infinitos*.

Longitud de los filtros: 62.

Ancho de soporte: 61 s.

Nivel del segundo lóbulo: -60.5 dB.

Porcentaje de energía en el lóbulo principal: 99.9998%.

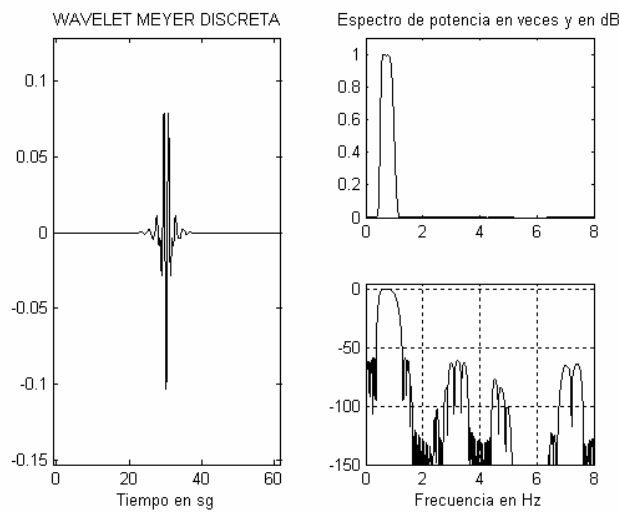


Figura 3.11. *Wavelet* Meyer discreta y su espectro.

En los gráficos espectrales anteriores se observa claramente que el primer lóbulo tiene un ancho espectral de 2 Hz, resultado que concuerda perfectamente con el hecho que el ancho de banda de una *wavelet* es 2^{j+1} Hz, donde j es el nivel de resolución, luego si $j = 0$ (como es el caso de las *wavelets* de las gráficas), el ancho de banda es igual a 2 Hz. Por otro lado, se advierte que el nivel de los lóbulos secundarios se reduce significativamente a medida que aumenta el número de momentos de desvanecimiento. Por último, los datos acerca de cada *wavelet* confirman que la cantidad de energía alojada en el primer lóbulo supera al 90% de la energía total en todos los casos (excepto en la *wavelet* de Haar), ratificando la condición de alta localización espectral de una *wavelet*.

4. TEORÍA DE LA MODULACIÓN WAVELET

4.1. INTRODUCCIÓN

La *modulación wavelet* es una técnica de modulación digital que consiste en representar la información mediante una forma de onda que se genera a partir de funciones *wavelet*. En términos más específicos, la señal a transmitir es una superposición de funciones *wavelet* desplazadas en el tiempo, a uno ó varios niveles de resolución. Cuando la forma de onda está constituida por *wavelets* al mismo nivel de resolución, se tiene la *modulación wavelet a escala única*. Por otro lado, cuando la forma de onda está conformada por *wavelets* a varios niveles de resolución, la técnica de modulación recibe el nombre de *modulación wavelet multi-escala*. Existen también otras subdivisiones según el criterio tenido en cuenta para la clasificación, por ejemplo, la *modulación wavelet* puede ser *binaria* cuando los símbolos utilizados para generar la señal son *0s* y *1s*, por el contrario, si los símbolos son tomados a partir de un alfabeto de M elementos, con $M > 2$, se dice que la modulación es *M-aria*. Otro criterio corresponde a la acción de trasladar o no el espectro de la señal a una frecuencia distinta de cero, cuando no hay traslación se tiene *modulación wavelet en banda base*, en caso contrario, el esquema se denomina *modulación wavelet pasabanda* y la frecuencia en que queda ubicado el espectro se conoce como *frecuencia portadora*. En resumen, existen tres criterios básicos de clasificación para el esquema de *modulación wavelet* y se especifican según el valor de los siguientes parámetros, a saber, número de niveles de resolución (*escala única* ó *multi-escala*), tamaño del alfabeto fuente (*binaria* ó *M-aria*) y frecuencia portadora (*banda base* ó *pasabanda*). A continuación se describe cada una de las modalidades de la *modulación wavelet*, presentando en cada caso el diagrama en bloques correspondiente, la expresión matemática de las señales relacionadas y el valor de algunos parámetros importantes del sistema de comunicación como el *ancho de banda* ocupado y la *eficiencia espectral*.

4.2. MODULACIÓN WAVELET A ESCALA ÚNICA, BINARIA, EN BANDA BASE

Sea $x[k]$ un vector de K datos que corresponde a la versión polar ¹⁶ de un mensaje digital de K bits equiprobables e independientes. Si el mensaje se transmite a una velocidad de $R_b = 2^j$ bits por segundo, entonces la señal modulada en *wavelet*, $s(t)$, estará dada por:

$$s(t) = \sum_{k=0}^{K-1} x[k] \psi_{j,k}(t) \quad , \quad x[k] \in \{-1, 1\} \quad (4.1)$$

La ecuación (4.1) indica que la señal modulada *wavelet* banda base con escala única es equivalente a superponer K funciones *wavelet* del mismo nivel de resolución, donde la

¹⁶ Se dice que un mensaje digital está en forma polar si y sólo si la señal alcanza un valor de $+A$, cuando se envía un 1, y de $-A$, cuando se envía un 0.

amplitud de cada una de ellas corresponde al valor del bit que representa tal función, y el nivel de traslación coincide con la posición que ocupa dicho bit dentro del vector mensaje. Con esto se tiene que cada elemento del mensaje (cada bit) está representado por una función única dentro de la familia *wavelet*. Observando la ecuación (4.1) se advierte que la señal transmitida corresponde a la *transformada inversa wavelet discreta* del mensaje $x[k]$ sobre un solo nivel de resolución (asumiendo que los coeficientes *wavelet* en los demás niveles son todos cero). Esto significa que la señal $s(t)$ se obtiene a mediante un proceso de síntesis a partir de los datos del vector mensaje, en ese sentido, la secuencia $x[k]$ se conoce como *secuencia generadora* de la señal modulada en *wavelet* [1], [3].

Para calcular el ancho de banda ocupado por la señal de la ecuación (4.1), es necesario determinar su *densidad espectral de potencia*, la cual está dada por la siguiente expresión:

$$PSD\{s(t)\} = S_s(f) = R_b |\Psi_j(f)|^2, \quad (4.2)$$

donde $|\Psi_j(f)|$ es la *magnitud del espectro* de todas las funciones *wavelet* al mismo nivel de resolución, j , y $S_s(f)$ es la *densidad espectral de potencia* de la señal $s(t)$.

De la ecuación (4.2) pueden notarse dos aspectos importantes, primero, la densidad espectral de potencia de la señal modulada en *wavelet* es equivalente al espectro de potencia de la función *wavelet* usada para conformar la señal, salvo por un factor de escala constante, por tanto, el ancho de banda ocupado por la señal $s(t)$ es igual al ancho de banda de la función *wavelet* en ese nivel de resolución particular. Segundo, como es de esperarse, $S_s(f)$ depende exclusivamente del tipo de *wavelet* utilizado, sin embargo, en el capítulo 3 se determinó que la energía espectral de una *wavelet* está alojada en más de un 90% sobre la región comprendida entre las frecuencias 0 y 2^{j+1} Hz, con esto, el ancho de banda de canal necesario para el correcto funcionamiento de un sistema de *modulación wavelet a escala única*, en banda base, es por lo menos $2^{j+1} = 2 R_b$, es decir, el ancho de banda es como mínimo el doble de la tasa de bit [12], [13], [14]. De aquí se sigue que la eficiencia espectral del sistema de modulación es igual a 0.5 bit/s/Hz. Estos aspectos se expresan matemáticamente en las siguientes ecuaciones:

$$B_w = 2R_b \quad (4.3)$$

$$\eta = \frac{R_b}{B_w} = 0.5 \text{ bit / s / Hz} \quad (4.4)$$

En las figuras 4.1 y 4.2 se observan algunas de las características de las señales moduladas en *wavelet* banda base. Para este caso se ha generado una señal modulada en *wavelet* de $K = 100$ bits, a una velocidad de 1 bit por segundo y usando la *wavelet* de Daubechies de orden 5 (db5). En la parte superior de la figura 4.1 se ilustra la secuencia mensaje y en la parte inferior, su correspondiente señal modulada junto a un gráfico del tipo de *wavelet* que está siendo utilizado. En la figura 4.2 se muestra el espectro de potencia de la señal modulada, aquí se observa claramente la ocupación del lóbulo principal, $B_w = 2$ Hz dado que la velocidad es $R_b = 1$ bps. Dada la gran cantidad de lóbulos laterales en la señal modulada, podría pensarse en filtrar la señal para que pase únicamente el lóbulo principal, al hacer esto, el comportamiento no se vería gravemente afectado debido a la alta concentración de energía sobre el primer lóbulo y a la rápida

caída del espectro hacia la frecuencia $2R_b$, lo cual hace que el diseño del filtro sea bastante flexible. En lo que sigue del documento no se tendrá en cuenta este filtraje, pues el nivel de los lóbulos laterales ya es por si solo bastante bajo, por lo que la implementación del filtro no aportaría ninguna mejora importante [3].

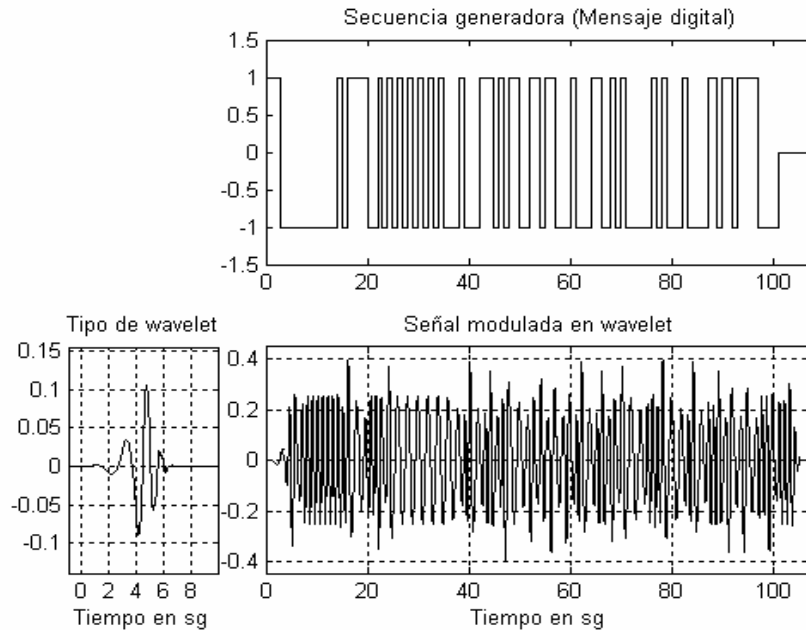


Figura 4.1. Aspecto de una señal modulada en *wavelet* a escala única en banda base, a partir de un mensaje binario arbitrario.

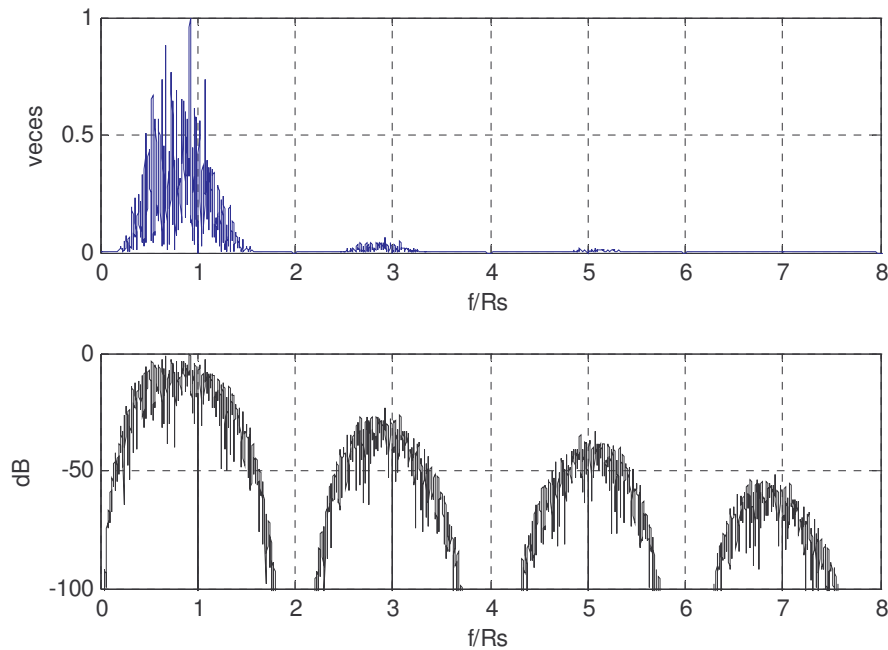


Figura 4.2. Espectro de potencia de la señal modulada.

Si el tipo de *wavelet* usado para la modulación es la *wavelet* de Haar, entonces la señal resultante es exactamente igual a una señal de código de línea Manchester, por tanto puede decirse que el código de línea Manchester es el método más antiguo de *modulación wavelet banda base a escala única*. Las propiedades del código Manchester se acoplan perfectamente a las de la modulación *wavelet*, por ejemplo la ausencia de componente D.C. sin importar el mensaje, el ancho de banda doble respecto a la tasa de bit, etc. En la figura 4.3 se muestra una señal modulada en *wavelet* usando Haar, y se verifica su equivalencia con el código Manchester, la señal tiene $K=20$ bits y se transmite a velocidad de 1 bps.

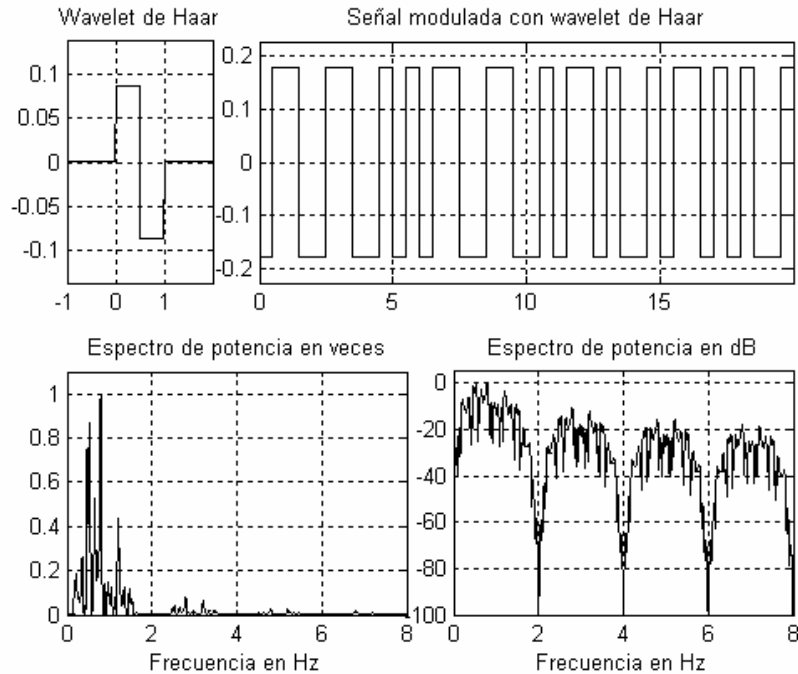


Figura 4.3. Aspecto de una señal modulada en *wavelet* banda base con la *wavelet* de Haar y su equivalencia al código Manchester.

El proceso de detección de la señal modulada en *wavelet* banda base opera de la siguiente manera:

La señal, al pasar por un canal ideal (respuesta de amplitud constante, respuesta de fase lineal) se ve afectada por un proceso de ruido estacionario AWGN, entonces la salida del canal estará dada por:

$$z(t) = s(t) + w(t) = \sum_{k=0}^{K-1} x[k] \psi_{j,k}(t) + w(t), \quad (4.5)$$

donde $w(t)$ es una función muestra del proceso de ruido del canal. Ahora, aplicando *transformada discreta wavelet* a ambos lados de la ecuación (4.5) se tiene:

$$\begin{aligned}
Z_{m,n} &= DWT \left\{ \sum_{k=0}^{K-1} x[k] \psi_{j,k}(t) + w(t) \right\} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \psi_{m,n}(t) \left[\sum_{k=0}^{K-1} x[k] \psi_{j,k}(t) + w(t) \right] dt \\
&= \sum_{k=0}^{K-1} \left[x[k] \int_{-\infty}^{\infty} \psi_{m,n}(t) \psi_{j,k}(t) dt + \int_{-\infty}^{\infty} \psi_{m,n}(t) w(t) dt \right] \\
&= \delta[m-j] \sum_{k=0}^{K-1} x[k] \delta[n-k] + W_{m,n} \quad ,
\end{aligned} \tag{4.6}$$

donde $Z_{m,n}$ son los coeficientes *wavelet* con nivel de resolución m y nivel de traslación n de la señal a la salida del canal, $z(t)$. Los coeficientes $W_{m,n}$, por su parte, son los coeficientes *wavelet* de la señal de ruido del canal. En la suma de la última línea de la ecuación (4.6) se tiene el equivalente a una convolución discreta entre los datos $x[n]$ y la respuesta al impulso de un filtro pasa todo ($\delta[n]$), por tanto, el resultado de dicha operación es el mismo vector de datos $x[n]$, entonces la ecuación (4.6) queda de la forma:

$$\begin{aligned}
Z_{m,n} &= \delta[m-j](x[n] * \delta[n]) + W_{m,n} \\
&= \delta[m-j]x[n] + W_{m,n} \\
&= \begin{cases} x[n] + W_{j,n} \text{ , cuando } m = j \\ W_{m,n} \text{ , cuando } m \neq j \end{cases} \quad , \quad \text{para } n = 0, 1, \dots, K-1
\end{aligned} \tag{4.7}$$

En ausencia de ruido se tiene que los coeficientes $W_{m,n}$ en la ecuación (4.7) son todos cero y por ende los coeficientes *wavelet* de la señal a la salida del canal coinciden con la información enviada (siempre y cuando estos estén calculados en el nivel de resolución adecuado). Por el contrario, cuando el ruido del canal interviene, el mensaje original se ve interferido por los coeficientes *wavelet* del ruido al nivel de resolución con que fue transmitida la señal, lo que causa errores en la detección de los datos.

El mecanismo de decisión consiste entonces en discretizar los coeficientes *wavelet* a la salida de tal forma que se anule en su mayoría el efecto residual de la componente de ruido al nivel de resolución de interés. Ahora teniendo en cuenta que los dígitos binarios que conforman el mensaje pertenecen a un alfabeto de símbolos equiprobables, independientes y con valor medio cero, se tiene la siguiente regla de decisión: *Decidir por un 1 cuando el coeficiente wavelet recibido sea mayor que cero, y decidir por un 0 cuando dicho coeficiente sea menor que cero*. Se considera improbable la opción en la cual el coeficiente recibido es exactamente igual a cero por tratarse de una variable aleatoria continua [9]. Matemáticamente, el esquema de decisión se representa así:

$$\hat{x}[n] = \begin{cases} 1 & \text{cuando } Z_{m,n} > 0 \\ -1 & \text{cuando } Z_{m,n} < 0 \end{cases} \tag{4.8}$$

Donde $\hat{x}[n]$ es el mensaje binario recuperado. La tasa de error del esquema de modulación se obtiene comparando término a término el vector $x[n]$ con el vector $\hat{x}[n]$.

El diagrama en bloques del sistema de comunicación se muestra en la figura 4.4.

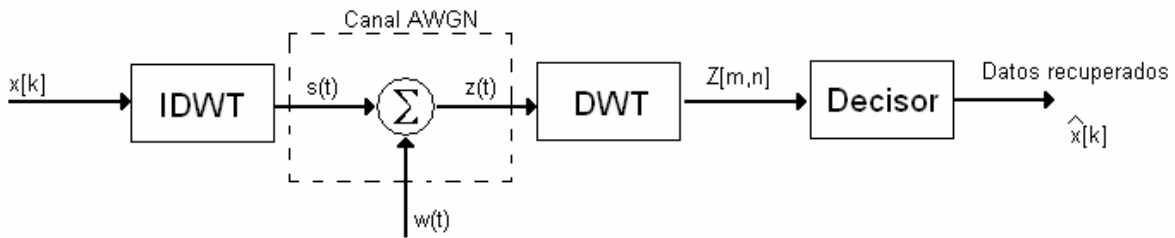


Figura 4.4. Diagrama en bloques del sistema de modulación *wavelet* banda base a escala única.

En cuanto a la eficiencia espectral del esquema en banda base de escala única, puede decirse que es pobre frente a la entrega por un sistema tradicional banda base. Por ejemplo, este último tiene una eficiencia de $\eta = 2 / (1 + \alpha)$, donde α es el factor de *roll-off* del filtro de *caída senoidal*, entonces se tiene una eficiencia de 2 bit/s/Hz cuando el filtro es ideal ($\alpha = 0$), y 1 bit/s/Hz cuando el filtro es de *coseno alzado* ($\alpha = 1$), siendo en ambos casos peor el desempeño de la modulación *wavelet*. Si la comparación se hace respecto al esquema BPSK, se tienen los valores de 1 bit/s/Hz y 0.5 bit/s/Hz para los casos ideal y exceso de banda máximo respectivamente. Aquí puede verse que la modulación *wavelet* banda base apenas iguala al peor de los casos de BPSK, es decir, cuando $\alpha = 1$, sin embargo, debe tenerse en cuenta que BPSK tiene traslación en frecuencia, por lo que la comparación no está en igualdad de condiciones.

4.3. MODULACIÓN WAVELET A ESCALA UNICA, PASABANDA, BINARIA

La *modulación wavelet pasabanda* es el resultado de trasladar el espectro de la señal banda base a una frecuencia portadora distinta de cero. Inicialmente esto se logra agregando al transmisor un modulador balanceado (modulador de producto), con lo que se produce una señal en *doble banda lateral con portadora suprimida* (DSB-SC). En la figura 4.5 se muestra el diagrama en bloques del sistema de comunicación pasabanda DSB-SC.

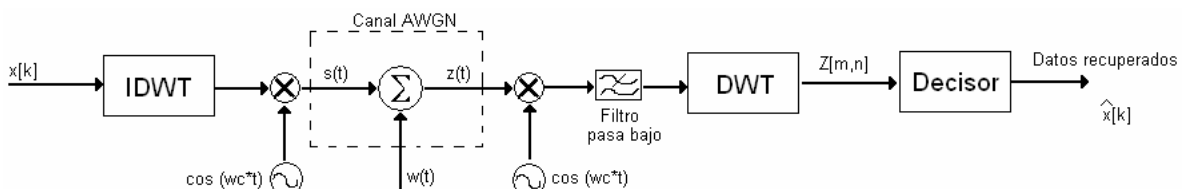


Figura 4.5. Diagrama en bloques del sistema de comunicación con modulación *wavelet* DSB-SC de escala única.

La señal transmitida está dada por:

$$s(t) = \left[\sum_{k=0}^{K-1} x[k] \psi_{j,k}(t) \right] \cos(2\pi f_c t), \quad (4.9)$$

donde f_c es la frecuencia portadora.

Dado que la señal ha sido trasladada en banda, el receptor está implementado con un *detector coherente* (modulador balanceado seguido por un filtro pasa bajo) que requiere sincronización perfecta con el transmisor a nivel de portadora. La manera como actúa esta parte del receptor es exactamente igual a la de un receptor de AM convencional usando detección coherente, como se vio en el capítulo 2.

En la parte superior de la figura 4.6 se muestra la señal modulada en función del tiempo y en la parte inferior, su correspondiente espectro de potencia. Para este caso se ha tomado una señal de 100 bits, a una velocidad de 1 *bps*, a una frecuencia portadora de 8 Hz, modulada con la *wavelet* de Daubechies $N=8$.

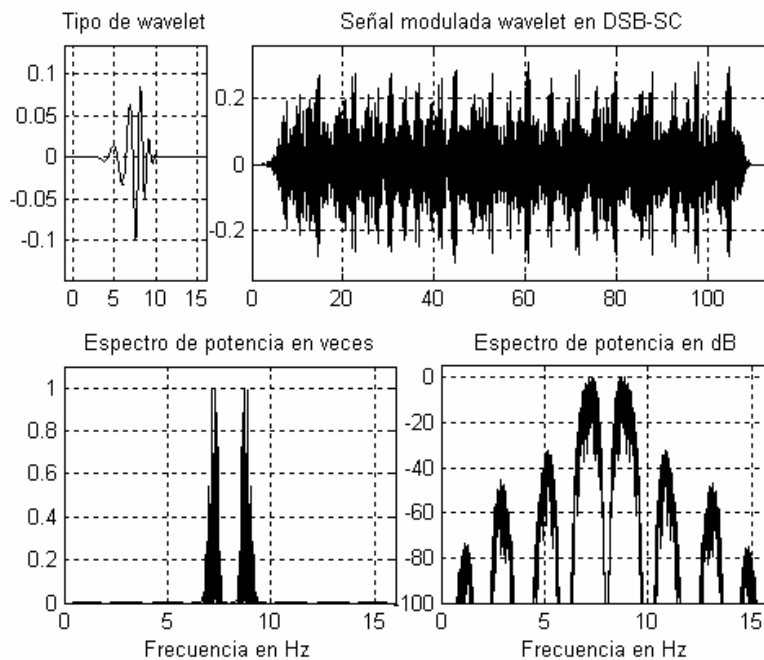


Figura 4.6. Aspecto de una señal modulada *wavelet* en doble banda lateral con portadora suprimida y su espectro de potencia.

El ancho de banda ocupado por la señal es ahora el doble del ancho de banda requerido en banda base (debido a la modulación en doble banda lateral), por tanto, las expresiones correspondientes al ancho de banda y la eficiencia espectral son como se consignan en las ecuaciones (4.10) y (4.11).

$$B_w = 4R_b \quad (4.10)$$

$$\eta = \frac{R_b}{B_w} = 0.25 \text{ bit} / \text{s} / \text{Hz} \quad (4.11)$$

En efecto, la eficiencia espectral es aún peor que en el caso anterior comparada con los esquemas convencionales, por ejemplo, si se compara con la eficiencia del sistema BPSK (que es el referente en este momento), se tiene un comportamiento siempre peor, incluso en el caso extremo (0.5 bit/s/Hz para $\alpha = 1$) [3].

Hasta aquí, la eficiencia espectral es un enorme defecto de la modulación *wavelet*, sin embargo, el espectro de potencia de una señal modulada bajo este esquema presenta una característica importante que no poseen los esquemas tradicionales y que puede aprovecharse en pro de obtener una mejor eficiencia espectral. Dicha característica es que el espectro siempre vale cero en la frecuencia portadora, independientemente de la secuencia mensaje. Es más, el nivel de energía de las componentes cercanas a la frecuencia portadora y al extremo de la banda es bastante bajo respecto al nivel máximo. Tal efecto se hace más evidente a medida que aumenta el número de *momentos de desvanecimiento* del tipo de *wavelet* utilizado. Para verificar intuitivamente la última afirmación, compárense los espectros correspondientes a una señal modulada con Haar (ver figura 4.3) y a una señal modulada con la *wavelet* db8 (ver figura 4.6). En la segunda se puede notar una velocidad de caída del espectro superior a la primera. Esta propiedad del espectro de las *wavelets* se conoce como *gap* o *hueco* de energía [6], y es lo que hace posible la eliminación de una de las bandas laterales sin pérdida de información, con lo que se abre la posibilidad para un esquema de modulación en *banda lateral única* (SSB). La característica distintiva de la modulación SSB es que utiliza la mitad del ancho de banda ocupado por un sistema DSB, aumentando al doble la eficiencia espectral [7]. El modulador SSB se implementa mediante el método de *discriminación en frecuencia*, es decir, el transmisor está formado por un modulador DSB-SC más un filtro pasabanda con las siguientes características [6]:

- La banda lateral deseada debe estar dentro de la banda pasante del filtro.
- La banda lateral no deseada debe estar dentro de la banda de bloqueo del filtro.
- La banda de transición del filtro debe ubicarse alrededor del *gap* de energía.
- El ancho de banda del filtro es igual al doble de la tasa de bit.

En la parte superior de la figura 4.7 se observa el proceso de eliminación de la banda lateral en la señal DSB-SC mediante un filtro pasabanda con las características mencionadas, y en la parte inferior se ilustra el espectro resultante de la señal modulada en SSB. En la figura 4.8, se muestran: la señal mensaje, la señal DSB-SC, y la señal SSB correspondiente, en el dominio del tiempo. Para las figuras 4.7 y 4.8 se ha utilizado un mensaje de 200 bits a 1 bps, con frecuencia portadora de 8 Hz y con la *wavelet symlet* $N = 8$.

La expresión matemática para la señal modulada en *wavelet* binaria SSB está dada por:

$$s(t) = \left[\sum_{k=0}^{K-1} x[k] \psi_{j,k}(t) \cos(2\pi f_c t) \right] * q(t), \quad (4.12)$$

donde $q(t)$ es la respuesta al impulso del *filtro discriminador pasabanda*.

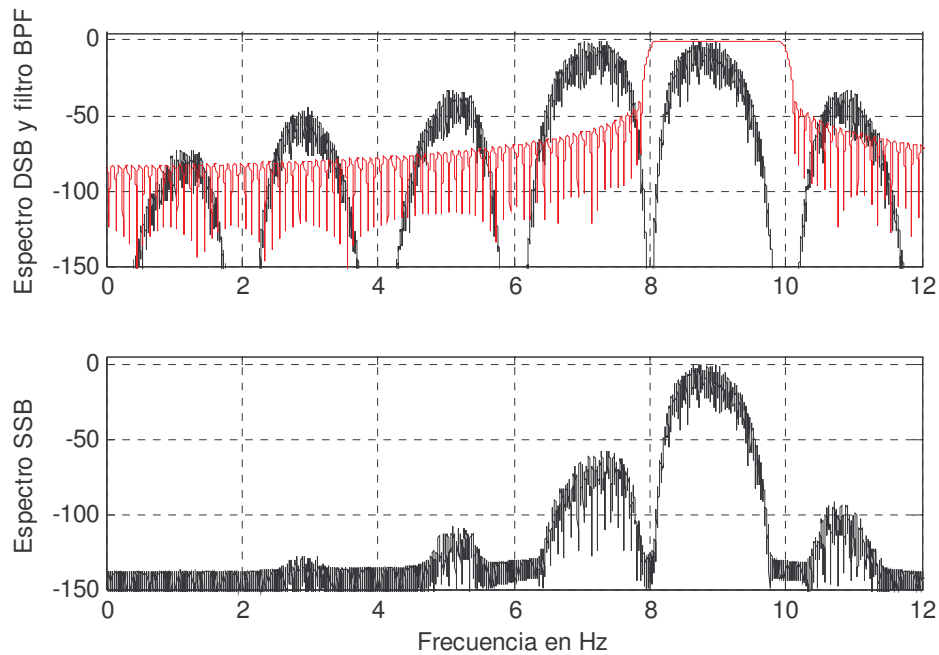


Figura 4.7. Espectro de la señal modulada en *wavelet* SSB a partir de la señal modulada en DSB-SC.

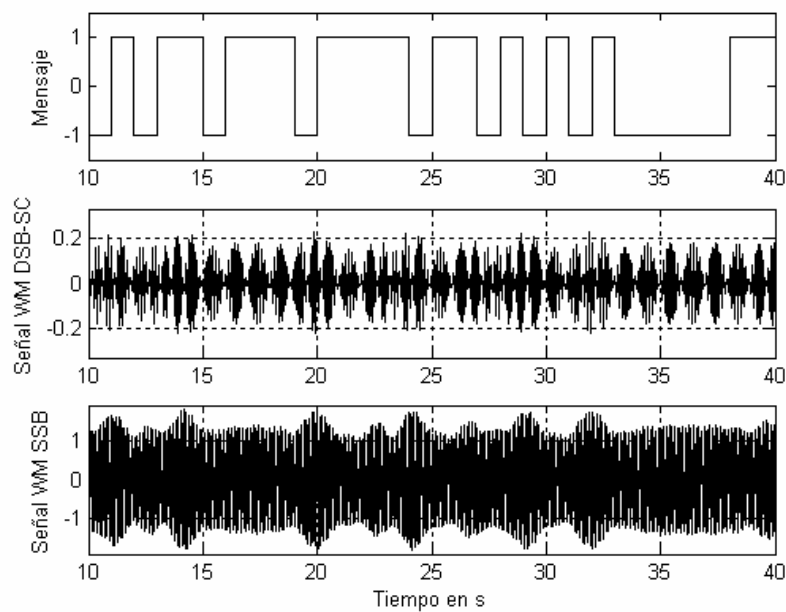


Figura 4.8. Aspecto del mensaje digital, junto con la señal DSB-SC y la señal modulada en SSB.

El método más sencillo para detectar una señal modulada en banda lateral única, es por medio de un *detector coherente*, es decir, una configuración de modulador balanceado y filtro pasa bajo, sin embargo, el ancho de banda equivalente de ruido que introduce este detector es el doble del ancho de banda ocupado por la señal, con lo que se tiene una

cantidad importante de ruido en una porción espectral que no transporta información, esto hace que la relación señal a ruido disminuya en 3 dB respecto al valor registrado en el caso DSB. En esos términos, la utilización de un esquema SSB perjudica la tasa de error. Para solucionar este inconveniente, se agrega un filtro pasabanda a la entrada del receptor con las mismas características del filtro usado en el transmisor para suprimir la banda lateral no deseada, de esa forma, se logra eliminar el ruido adicional presente en la banda no utilizada y la relación señal a ruido se mantiene entonces intacta respecto a la percibida en el esquema DSB-SC. Con la última mejora, se tiene un sistema de modulación con el mismo comportamiento frente al ruido, pero esta vez ocupando la mitad del ancho de banda. En la figura 4.9 se ilustra el efecto del pre filtraje en la potencia de ruido resultante.

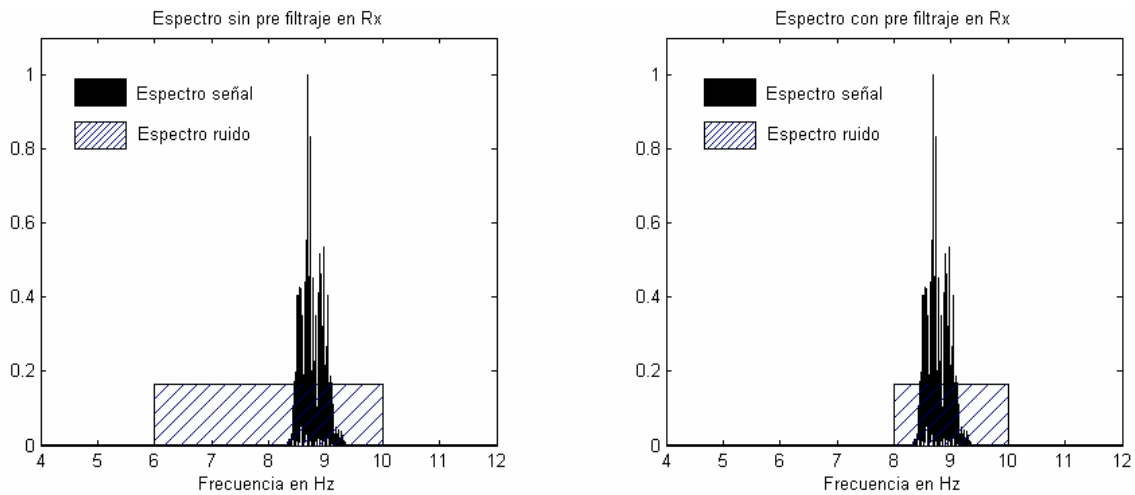


Figura 4.9. Comparación entre la señal sin pre - filtraje (izquierda) y con pre - filtraje pasabanda (derecha).

La figura 4.10 muestra el diagrama en bloques correspondiente al esquema de modulación *wavelet* binario SSB.

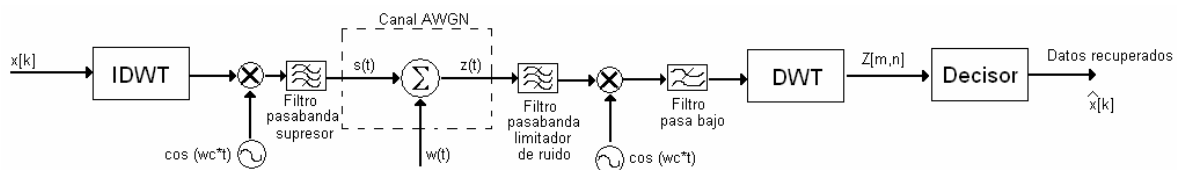


Figura 4.10. Sistema de comunicación con modulación *wavelet* SSB binaria.

El ancho de banda ocupado por el sistema SSB es $B_W = 2R_b$ y la eficiencia espectral es igual a 0.5 bit/s/Hz. Este resultado es el mismo para un sistema BPSK con filtros de coseno alzado ($\alpha=1$).

4.4. MODULACIÓN WAVELET A ESCALA ÚNICA, M-ARIA

Un esquema de modulación binario se caracteriza por generar una forma de onda por cada dígito binario (bit) del mensaje. Por su parte, un esquema *M-ario* se caracteriza por generar una forma de onda por cada grupo de n dígitos binarios del mensaje. A cada posible combinación de los n bits de entrada se la conoce como *símbolo* o *baudio* y existen $M = 2^n$ posibles símbolos. La distribución geométrica que conforman los símbolos se conoce como *constelación*. La principal ventaja de los sistemas *M-arios* por sobre los binarios es que el ancho de banda depende exclusivamente del número de formas de onda generadas por unidad de tiempo (tasa de baudios), por ende, el ancho de banda ocupado se reduce en un factor de n al usarse símbolos de n bits. Visto de otra manera, se puede aprovechar un mismo ancho de banda dado con una velocidad n veces más grande [8]. Independientemente de la manera como se aproveche la ventaja de los esquemas *M-arios*, el resultado más sobresaliente es el incremento en la eficiencia espectral por un factor de $n = \log_2 M$.

El esquema de *modulación wavelet M-ario a escala única*, por su parte, trata de explotar al máximo las ventajas ofrecidas por un sistema *M-ario*. Se usan dos clases de constelaciones, la *lineal*, para transmisión banda base y en banda lateral única; y la constelación en *cuadratura* para transmisión DSB-SC. En el primer tipo de constelación, la estructura del sistema es prácticamente la misma salvo por la inclusión de dos elementos adicionales a la entrada y a la salida, a saber, un *mapeador* de símbolos M-PAM y un *decisor multinivel*. En el segundo tipo de constelación, la complejidad del sistema se incrementa, pero la filosofía de funcionamiento es muy similar. En lo que sigue de la exposición, se aplican la mayoría de los conceptos vistos a lo largo del capítulo, por lo que se mencionarán sólo los aspectos más relevantes de cada variante de la modulación *wavelet*.

La figura 4.11 representa el diagrama en bloques del sistema de modulación *wavelet M-ario* banda base a escala única. En la figura 4.12 se muestra una constelación típica para este esquema de modulación ($M = 8, n = 3$).

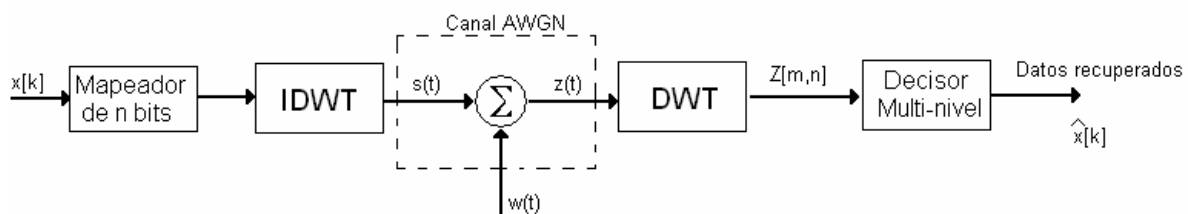


Figura 4.11. Diagrama en bloques de un sistema de comunicación con modulación *wavelet M-aria* banda base, a escala única.



Figura 4.12. Diagrama de constelación lineal con $M = 8$.

La expresión matemática para el esquema está dada por:

$$s(t) = \sum_{k=0}^{K-1} y[k] \psi_{j,k}(t), \quad (4.13)$$

donde los posibles valores la secuencia $y[k]$ se especifican mediante la siguiente expresión:

$$y[k] \in \{\pm 1, \pm 3, \dots, \pm(M-1)\} \quad (4.14)$$

Si el mensaje se transmite a una velocidad R_b bps, el ancho de banda ocupado por la señal modulada y la eficiencia espectral están dados en las ecuaciones (4.15) y (4.16) respectivamente.

$$B_w = \frac{2R_b}{\log_2 M} \quad (4.15)$$

$$\eta = \frac{R_b}{B_w} = \frac{\log_2 M}{2}. \quad (4.16)$$

Al comparar el resultado de la ecuación (4.16) con el esquema M-PAM banda base (ver ecuación 2.31), se observa que la modulación *wavelet* siempre tiene menor eficiencia espectral para un mismo valor de M .

En la figura 4.13 se ilustra el diagrama en bloques del esquema de *modulación wavelet M-ario SSB a escala única*. El sistema DSB-SC no se menciona en esta parte debido a que su comportamiento frente al ruido es teóricamente idéntico al del esquema SSB, pero ocupando el doble de ancho de banda, por tal motivo el sistema SSB reviste mayor interés en este caso.

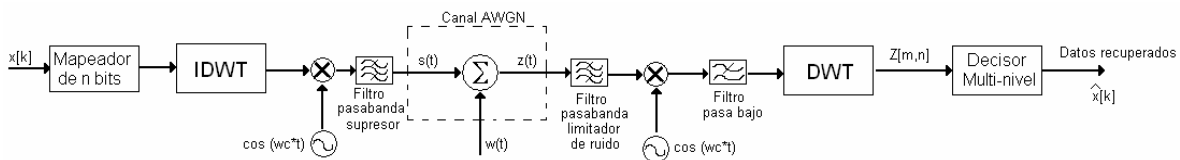


Figura 4.13. Sistema de comunicación usando modulación *wavelet* SSB binaria a escala única.

La expresión para la señal modulada $s(t)$ es idéntica a la ecuación (4.12), excepto por el término $x[k]$, que ahora es remplazado por el vector $y[k]$ de la ecuación (4.14).

El ancho de banda y la eficiencia espectral vienen dados por las ecuaciones (4.15) y (4.16) respectivamente. Al comparar estos resultados con los de un sistema lineal tradicional (M-ASK, M-PSK, M-QAM), en la ecuación (2.67), se nota que la eficiencia espectral de la modulación *wavelet* SSB *M-aria* es igual a la de dichos esquemas cuando

el tipo de filtro utilizado tiene un factor de *roll off* igual a uno (para un mismo valor de M). Por tanto, la eficiencia espectral del esquema de modulación *wavelet* SSB M -ario a escala única es equivalente al peor caso de los esquemas lineales M -arios tradicionales.

Las constelaciones lineales son fáciles de diseñar y logran una gran eficiencia espectral, sin embargo, tienen un inconveniente en su desempeño, esto es, al manejarse un número elevado de niveles M , se debe aumentar considerablemente la potencia promedio de transmisión para alcanzar una tasa de error aceptable [8]. Si la potencia es un factor limitante, se debe restringir considerablemente el valor máximo de M , y con ello la eficiencia espectral, ó, por otro lado, arriesgarse a indisponer permanentemente el sistema de comunicación debido a la alta probabilidad de error. Por esa razón, los esquemas de modulación más utilizados en la actualidad (M-PSK y M-QAM) no utilizan constelaciones lineales, sino constelaciones planas o en cuadratura, es decir, convierten cada grupo de n bits en un *símbolo complejo* cuyas partes real e imaginaria corresponden a los valores de los ejes coordenados en el plano de la constelación. La idea clave es aislar los valores de cada eje mediante un par de funciones mutuamente ortogonales (por ejemplo $\sin(w t)$ y $\cos(w t)$) y luego transmitir una señal compuesta por estos contenidos aislados. El receptor, por su parte, debe separar correctamente las partes real e imaginaria de los símbolos de llegada, y así recuperar la información [8]. Las constelaciones planas tienden a conformarse de tal manera que los símbolos estén lo mas distantes entre si, para un valor dado de potencia promedio (magnitud al cuadrado de los símbolos complejos), logrando el mayor margen posible frente al ruido AWGN [6]. El tipo de constelación plana que registra la mayor distancia relativa entre símbolos es la constelación cuadrada (ver figura 4.14.a), y es la constelación elegida para diseñar el esquema de *modulación wavelet* M -ario en cuadratura (MQ -ario) a escala única. Es importante resaltar en este punto que el único mecanismo de transmisión admisible para una constelación plana es el de doble banda lateral con portadora suprimida (DSB-SC), pues la información se manifiesta de forma diferente en cada banda lateral, contrario a lo que ocurre con una constelación lineal, donde las bandas laterales son idénticas. Por tal motivo, la eliminación de una de las bandas laterales en una constelación cuadrada representa pérdida irreversible de información¹⁷. En ese sentido, debe sacrificarse un poco la eficiencia espectral a cambio de lograr una comunicación más confiable que en el caso de la constelación lineal.

Una señal modulada en *wavelet* MQ -aria a escala única, está dada por:

$$s(t) = \left[\sum_{k=0}^{K/n-1} a[k] \psi_{j,k}(t) \right] \cos(2\pi f_c t) + \left[\sum_{k=0}^{K/n-1} b[k] \psi_{j,k}(t) \right] \sin(2\pi f_c t), \quad (4.17)$$

donde $c[k] = a[k] + j b[k]$ son los símbolos complejos obtenidos a partir de la secuencia mensaje x , los cuales se definen en función de M según las ecuaciones (2.55) y (2.56). El límite superior de las sumas de la ecuación (4.17) es ahora $K/n - 1$, debido a que al enviarse K bits se generan K/n símbolos complejos, con $n = \log_2 M$. En la figura 4.14.b se muestra el espectro de una señal modulada en *wavelet* MQ -aria, aquí se verifica la diferencia entre las dos bandas laterales.

¹⁷ Matemáticamente resulta imposible extraer la información a partir de la señal modulada MQ -aria en SSB, debido a que se plantea un sistema de ecuaciones trivial, es decir, un sistema donde hay más incógnitas que ecuaciones.

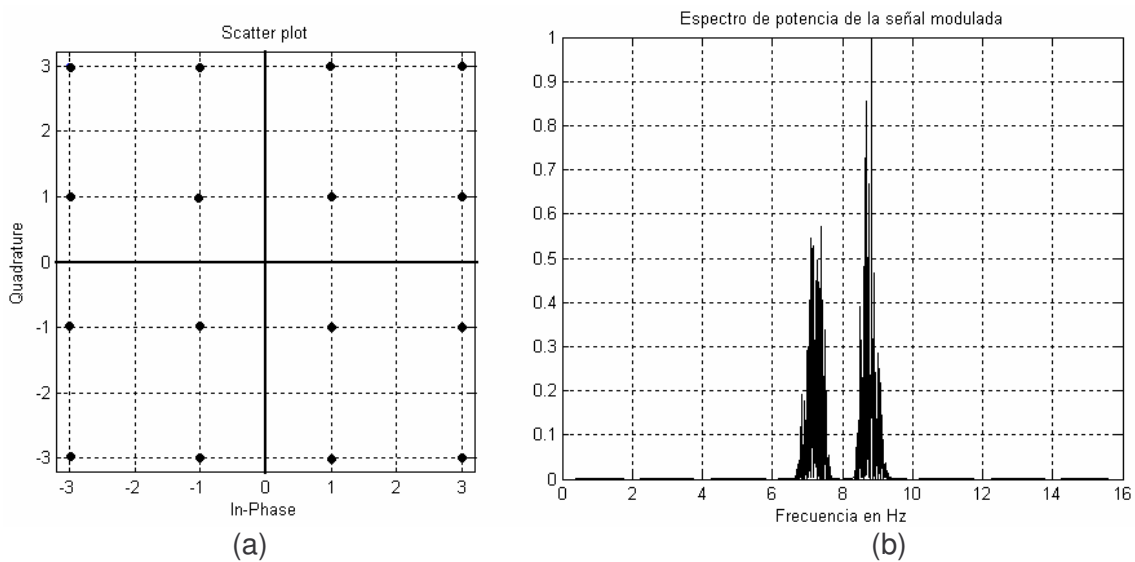


Figura 4.14. a) Constelación cuadrada para $M = 16$ símbolos. b) Espectro de potencia de una señal *WM MQ-aria*, con $M = 16$, $f_c = 8\text{Hz}$ y $R_b = 4$ bps.

El modelo del sistema de comunicación para el esquema de modulación *wavelet MQ-aria* es bastante parecido al de un sistema M-QAM. En la figura 4.15 se muestra el diagrama en bloques representativo.

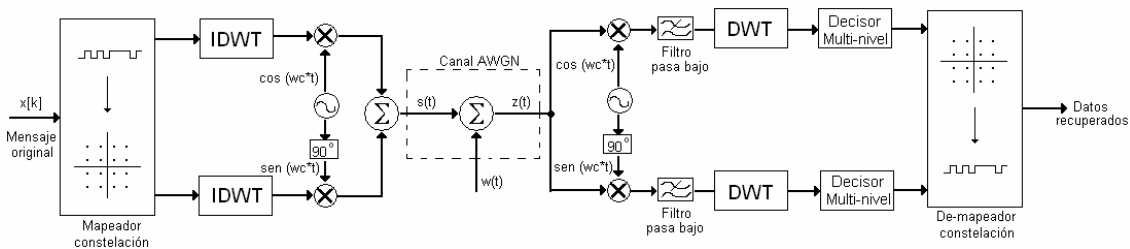


Figura 4.15. Sistema de comunicación para el esquema de modulación *wavelet MQ-ario* a escala única.

El ancho de banda y la eficiencia espectral del esquema *WM MQ-ario* están dados en las siguientes ecuaciones:

$$B_w = \frac{4R_b}{\log_2 M} \quad (4.18)$$

$$\eta = \frac{R_b}{B_w} = \frac{\log_2 M}{4} \quad (4.19)$$

Al comparar el resultado de la ecuación (4.19) con el de la ecuación (2.67) para los esquemas M-PSK y M-QAM, se encuentra que la modulación *WM MQ-aria* tiene una eficiencia espectral siempre inferior para un mismo valor de M , incluso cuando el factor de *roll off* de los filtros es igual a uno. En ese sentido, la eficiencia espectral de la *WM* se reafirma como un defecto frente a los esquemas tradicionales lineales *M-arios*.

4.5. MODULACIÓN WAVELET MULTI-ESCALA BINARIA

La *modulación wavelet multi-escala* (*WM_MS*) se caracteriza por representar la información mediante funciones *wavelet* a varios niveles de resolución. En términos más precisos, la técnica consiste en emplear varios niveles de resolución consecutivos, para lo cual es necesario dividir el vector mensaje original en varias *sub-secuencias paralelas*, cada una modulando una señal independiente de escala única en cada uno de los niveles de resolución utilizados. Finalmente, la señal transmitida corresponde a la suma de dichas *sub-señales*. La condición primordial que rige la partición de la señal es que todas las *sub-señales* deben ocupar el mismo espacio temporal. Ahora, reconociendo que los niveles de resolución implicados son consecutivos, se deduce que la extensión temporal de las *wavelets* disminuye a la mitad al pasar de un nivel dado al siguiente, por tanto, el número de elementos del vector mensaje que se introducen en un nivel de resolución específico es igual al doble del introducido en el nivel anterior y es igual a la mitad del número introducido en el nivel siguiente (recuérdese que cada elemento del mensaje está representado por una función *wavelet* única). Resumiendo lo anterior, si el nivel de resolución más bajo a utilizar es j , entonces se deben introducir L bits mensaje en el nivel j , $2L$ bits en el nivel $j + 1$, $4L$ bits en el nivel $j + 2$, y así sucesivamente hasta llegar al nivel $j + U$ en el cual deben ir $2^U L$ bits mensaje, donde L es una cantidad entera arbitraria.

La principal razón que motiva el uso de la modulación *wavelet multi-escala* es el incremento en la eficiencia espectral respecto al sistema de escala única, pues esta vez se aprovecha la *ortogonalidad* existente entre las *wavelets* con distintos niveles de resolución, lo que permite subdividir la información y enviar cada parte sobre un nivel de resolución diferente, pero siempre teniendo la posibilidad de recuperar cada subdivisión sin ningún tipo de ambigüedad.

Para comprender el porqué de la reducción del ancho de banda ocupado (o el incremento en la eficiencia espectral), es necesario aclarar los siguientes aspectos: Según lo visto en el capítulo 3, una función *wavelet* a escala j , ocupa una porción espectral que va desde 0 hasta 2^{j+1} Hz, una *wavelet* a escala $j + 1$, va desde 0 hasta 2^{j+2} Hz, una *wavelet* a escala $j + 2$, va desde 0 hasta 2^{j+3} , y así sucesivamente. Con esto se tiene que el intervalo de frecuencia ocupado por una *wavelet* a un nivel particular contiene completamente al intervalo correspondiente a las *wavelets* del nivel anterior, por tanto, al enviarse una señal con *wavelets* a varios niveles de resolución, el ancho de banda total siempre es igual al ancho de banda de la *wavelet* del nivel de resolución más alto utilizado, sin importar cuantos niveles de resolución preceden al nivel máximo. En otras palabras, el ancho de banda total ocupado no varía proporcionalmente con el número de niveles de resolución implicados, contrario a lo que ocurre en otros esquemas de modulación, por ejemplo, en la modulación por *multi-tono discreto* (DMT), donde el ancho de banda total ocupado por el sistema es proporcional al número de tonos o portadoras utilizadas. Por otra parte, teniendo en cuenta que la señal mensaje se subdivide en varios flujos paralelos que deben necesariamente ocupar el mismo espacio temporal, se tiene que dichos flujos son siempre de menor velocidad que el mensaje original, provocando que el nivel de resolución más alto esté modulado por una secuencia más lenta que la original, lo que ocasiona que el espectro total ocupado sea más angosto que el producido al usarse una sola escala. Para explicar gráficamente la situación se recomienda ver la figura 4.16. En ella se observa el proceso de división de la información para tres niveles de resolución. El

bloque de datos original está compuesto por 14 bits, obteniéndose 2, 4 y 8 bits en cada nivel respectivamente. Suponiendo que la señal se transmitiera con velocidad de 14 bps ($T = 1s$), se tendrían velocidades de 2 bps, 4 bps y 8 bps en los diferentes niveles, en ese caso, el ancho de banda estaría determinado por la señal de 8 bps, y sería igual a 16 Hz, menor al obtenido al transmitir la señal a escala única (28 Hz).

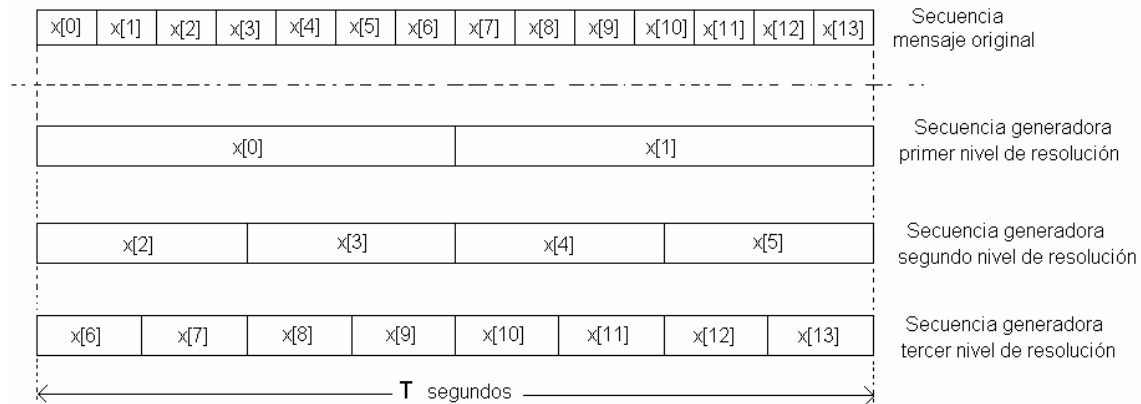


Figura 4.16. Gráfico ilustrativo del proceso de división y asignación de datos a cada nivel de resolución.

En el ejemplo anterior se notó de manera muy sencilla el efecto de reducción del ancho de banda, ahora se llegará a una expresión formal para este fenómeno teniendo en cuenta el número de niveles de resolución a usar y la velocidad de la secuencia mensaje original.

Sea x una secuencia mensaje binaria con velocidad R_b bps, y sea U el número de niveles de resolución a utilizar, entonces el mensaje original se dividirá en U *sub-flujos* más lentos cuyas velocidades serán: aR_b en el primer nivel, $2aR_b$ en el segundo nivel, $4aR_b$ en el tercer nivel, ..., $2^{U-1}aR_b$ en el U -ésimo nivel, donde a es una constante por determinar. Entonces, sabiendo que los *sub-flujos* ocupan el mismo espacio temporal y que la cantidad de información que aportan todos juntos es la misma de la secuencia original, se tiene que la suma de sus velocidades debe ser igual a la velocidad de la secuencia mensaje original. Esta situación se expresa en la ecuación (4.20).

$$\begin{aligned}
 R_b &= aR_b + 2aR_b + 4aR_b + \dots + 2^{U-1}aR_b \\
 &= aR_b(1 + 2 + 4 + \dots + 2^{U-1}) \\
 &= aR_b \left(\sum_{i=0}^{U-1} 2^i \right) \\
 &= aR_b \frac{2^U - 1}{2 - 1} \\
 &= (2^U - 1)aR_b
 \end{aligned} \tag{4.20}$$

Simplificando términos y despejando a se tiene:

$$a = \frac{1}{2^U - 1} \quad (4.21)$$

Con el resultado de la ecuación (4.21) se llega a que el *sub-flujo* de mayor velocidad tiene una velocidad de:

$$R_{b,U} = \frac{2^{U-1} R_b}{2^U - 1}, \quad (4.22)$$

donde $R_{b,U}$ es la tasa de bit de la U -ésima secuencia generadora, entonces el ancho de banda ocupado por el sistema (en banda base) será igual al doble de esta cantidad, es decir:

$$B_W = 2R_{b,U} = \frac{2^U R_b}{2^U - 1} \quad (4.23)$$

Con el resultado de la ecuación (4.23), se tiene que para $U = 1$ (modulación a escala única), el ancho de banda es $B_W = 2R_b$, tal como se espera. Para $U = 2$, el ancho de banda es $B_W = 4R_b / 3$, o sea, una reducción del 33,33% respecto al ancho de banda a escala única. Para $U = 3$, $B_W = 8R_b / 7$, que representa una reducción del 42,86% en referencia al ancho de banda a escala única. Cuando el número de niveles de resolución, U , crece indefinidamente, el ancho de banda estará dado por:

$$B_{W\infty} = \lim_{U \rightarrow \infty} \frac{2^U R_b}{2^U - 1} = R_b \quad (4.24)$$

El resultado de la ecuación (4.24) indica que el ancho de banda mínimo obtenible al modular en *multi-escala* es $B_{W\min} = R_b$, es decir, la reducción máxima de ancho de banda es del 50% respecto a la modulación a escala única.

La eficiencia espectral del esquema de modulación *wavelet multi-escala* está dada por:

$$\eta = \frac{R_b}{B_W} = \frac{2^U - 1}{2^U} \quad (4.25)$$

Para un número infinito de niveles de resolución, se tiene una eficiencia del 100%, esto es:

$$\eta_\infty = \lim_{U \rightarrow \infty} \frac{2^U - 1}{2^U} = 1 \text{ bit / s / Hz} \quad (4.26)$$

En la figura 4.17 se muestra una gráfica de la eficiencia espectral en función del número de niveles de resolución. En ella se observa que a medida que aumenta U , la función tiende rápidamente a uno (asíntota horizontal), lo que significa que usar un número muy grande de niveles de resolución no marca mayor diferencia respecto a lo obtenido con un número menor (por ejemplo, véase la diferencia entre $U = 10$ y $U = 4$), mientras que la complejidad aumenta considerablemente al incrementar el número de niveles. Por esa

razón, en el desarrollo del presente trabajo se ha optado por elegir un valor de $U = 3$ niveles de resolución, debido a que esta cantidad alcanza un 87,5% de la eficiencia espectral máxima alcanzable y su implementación es relativamente simple.

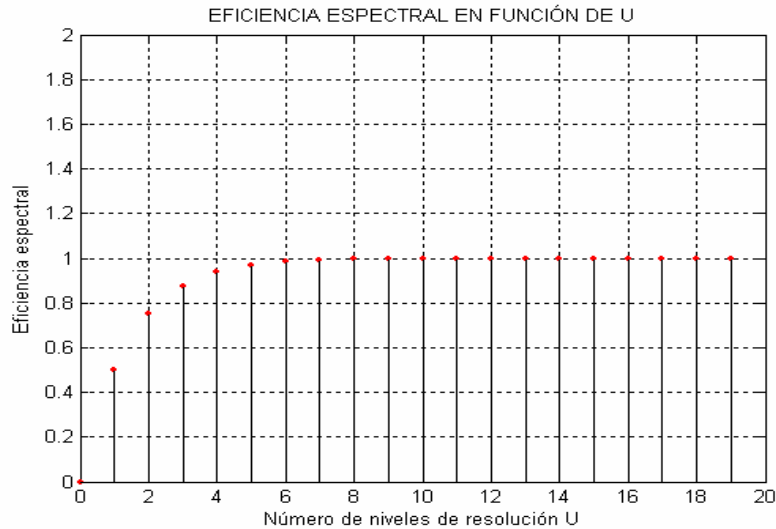


Figura 4.17. Gráfico de la eficiencia espectral en función del número de niveles de resolución.

En la figura 4.18 se muestra el mecanismo de conformación de la señal a transmitir, aquí se ilustra la *sub-señal* correspondiente a cada nivel, la función *wavelet* asociada y su respectivo espectro de potencia. En la parte de abajo se indica la señal modulada resultante y su espectro. Como puede observarse, el ancho de banda total es igual al ancho de banda de la *sub-señal* de mayor nivel de resolución, y el *gap* de energía alrededor del origen es igual al *gap* de la *sub-señal* de menor nivel de resolución [4]. La señal dibujada corresponde a un mensaje de velocidad 1 bps, con lo que se hace evidente la reducción en el ancho de banda ocupado, siendo esta vez 1 Hz aproximadamente, en lugar de 2 Hz, como ocurría con la señal modulada a escala única.

La expresión matemática para una señal modulada *wavelet multi-escala*, cuya secuencia generadora es $x[n]$, de K bits de longitud, está dada por:

$$s(t) = \sum_{m=1}^U \sum_{k=0}^{\left(\frac{2^{m-1}K}{2^U-1}\right)-1} y_m[k] \psi_{j+m-1,k}(t), \quad (4.27)$$

onde U es el número de niveles de resolución utilizados y las *sub-secuencias* y_m , están relacionadas con la secuencia original por:

$$x[n] = [y_1 \dot{:} y_2 \dot{:} y_3 \dot{:} \dots \dot{:} y_U] \quad (4.28)$$

En la ecuación (4.28), el símbolo $\dot{:}$ denota la operación de *concatenación* entre las *sub-secuencias* y_m , con $m = 1, 2, \dots, U$.

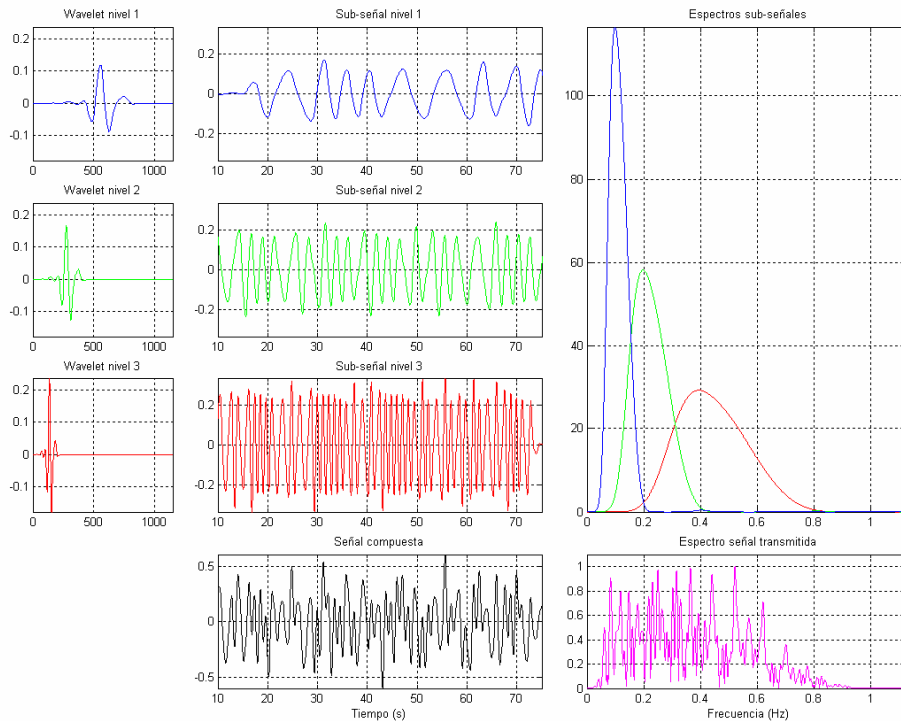


Figura 4.18. Proceso de formación de la señal modulada *wavelet multi-escala*, con tres niveles de resolución, usando la *wavelet symlet* de orden 5.

En la figura 4.19. se muestra el diagrama del sistema de comunicación usando modulación *wavelet multi-escala* binaria en banda base. Los módulos *S/P* y *P/S* son *convertidores serie-paralelo* y *paralelo-serie* respectivamente.

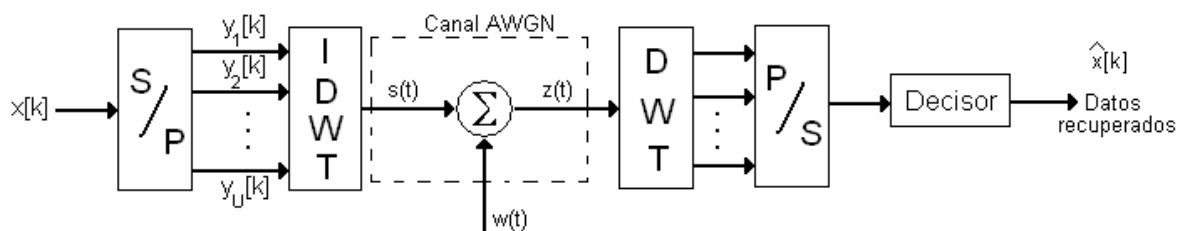


Figura 4.19. Diagrama en bloques del sistema de comunicación *WM_MS banda base*.

Como se vio en la ecuación (4.26), la eficiencia espectral del esquema tiende a uno a medida que aumenta el valor de U , en ese sentido, la eficiencia espectral del sistema *WM_MS* se aproxima a la de un esquema banda base tradicional con factor de *roll off* igual a uno.

Dadas las propiedades espectrales de la señal modulada en *wavelet multi-escala*, puede trasladarse fácilmente el espectro a una frecuencia pasabanda y modular con banda

lateral única (SSB). Con ello se tiene el esquema de *modulación wavelet multi-escala binario SSB*. En la figura 4.20 se presenta el diagrama en bloques de este sistema.

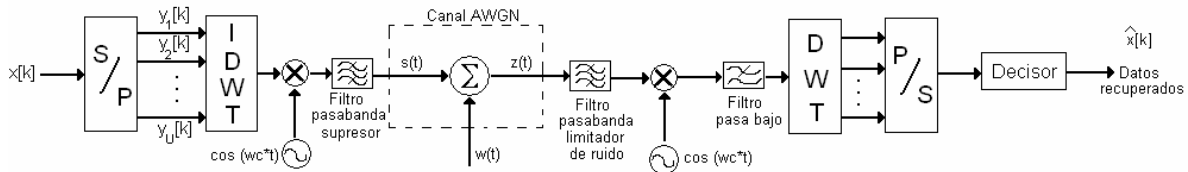


Figura 4.20. Sistema de comunicación usando *WM_MS SSB*.

El ancho de banda y la eficiencia espectral del esquema son como en las ecuaciones (4.23) y (4.25) respectivamente. En esta ocasión, al comparar la eficiencia del sistema *WM_MS SSB* con la del sistema BPSK (ecuación 2.67), se observa que son equivalentes cuando el factor de *roll off* cumple la siguiente condición:

$$\alpha = \frac{2^U}{2^U - 1} - 1 \quad (4.29)$$

Esto es, el sistema a escala única ($U = 1$) es equivalente a un factor *roll off* de uno, el sistema *multi-escala* a dos niveles de resolución equivale a un factor *roll off* de 0.333, el sistema *multi-escala* con $U = 3$ equivale a un factor *roll off* de 0.142, y así sucesivamente hasta concluir que un valor muy grande de U se aproxima a un sistema BPSK ideal (*roll off* igual a cero). Conociendo el hecho que la mayoría de los sistemas existentes eligen un factor de *roll off* dentro del intervalo 0.25 a 0.8, puede afirmarse que el esquema de modulación *WM_MS SSB* iguala e incluso supera por estrecho margen al sistema BPSK, usando pocos niveles de resolución.

4.6. MODULACIÓN WAVELET MULTI-ESCALA M-ARIA

La *modulación wavelet multi-escala M-aria* funciona con el mismo principio de la modulación binaria *multi-escala*, salvo que ahora la secuencia de bits se convierte en una secuencia de símbolos previo a la división en *sub-flujos paralelos*. Fácilmente puede notarse que la eficiencia espectral se incrementa en este caso por un factor de $n = \log_2 M$, donde n es el número de bits transportados en cada símbolo. En lo que sigue se expondrán tres tipos de modulación *multi-escala M-aria*, a saber, *modulación wavelet multi-escala M-aria banda base (M-WM_MS BB)*, *modulación wavelet multi-escala M-aria en banda lateral única (M-WM_MS SSB)*, y *modulación wavelet multi-escala M-aria en cuadratura (MQ-WM_MS)*.

En la figura 4.21 se ilustra un sistema de comunicación usando *modulación wavelet multi-escala M-aria en banda base*. El mapeador de bits genera símbolos pertenecientes a una constelación lineal.

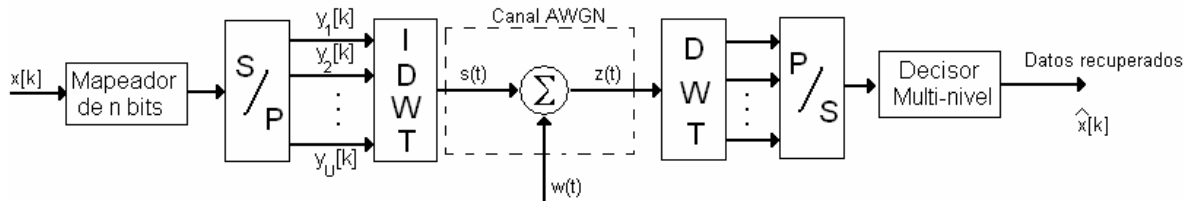


Figura 4.21. Diagrama en bloques de un sistema con modulación M - WM _MS BB .

La expresión matemática para la señal transmitida es muy similar a la ecuación (4.27), aunque los límites de la segunda suma cambian por el hecho de transmitirse menos símbolos que bits (1 símbolo cada n bits), y los posibles valores de las *sub-secuencias* y_m son como en la ecuación (4.14).

El ancho de banda y la eficiencia espectral están dados por el siguiente par de ecuaciones:

$$B_w = \frac{2^U R_b}{(2^U - 1) \log_2 M} \quad (4.30)$$

$$\eta = \frac{(2^U - 1) \log_2 M}{2^U} \quad (4.31)$$

La ecuación (4.31) indica que la eficiencia espectral del esquema M - WM _MS BB tiende a igualar al peor caso (en cuanto a eficiencia espectral) de la transmisión banda base M -*aria* tradicional (*roll off* igual a uno), esto cuando el número de niveles de resolución es grande.

Al trasladar el espectro en banda base de la señal M - WM _MS BB a una frecuencia portadora distinta de cero y luego eliminando una de las bandas laterales, se obtiene el esquema M - WM _MS SSB . En la figura 4.22 se muestra el diagrama en bloques correspondiente a este sistema.

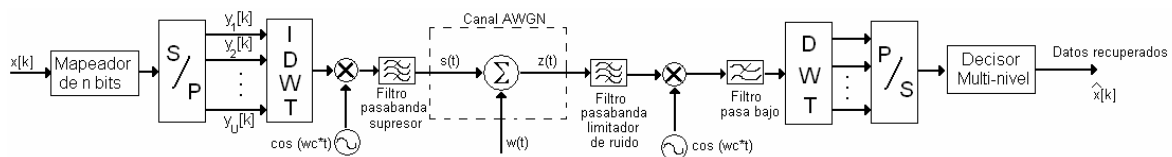


Figura 4.22. Sistema de comunicación con M - WM _MS SSB .

El ancho de banda y la eficiencia espectral del esquema *multi-escala* SSB M -*ario* son como se indica en las ecuaciones (4.30) y (4.31). La comparación pertinente en este caso es con el esquema M -ASK (debido a la conformación de la constelación y al carácter pasabanda), en donde se verifica igual eficiencia espectral cuando el factor de *roll off* cumple la condición de la ecuación (4.29). Con este resultado se puede decir que la *modulación wavelet multi-escala M-aria SSB* iguala e incluso supera la eficiencia espectral

de los esquemas tradicionales M-ASK, M-PSK y M-QAM para un mismo valor de M , utilizando pocos niveles de resolución.

Como se dijo antes, las constelaciones lineales presentan un pobre desempeño frente al ruido del canal en comparación a una constelación cuadrada, para un valor grande de M y una potencia promedio similar [8], [9]. En ese sentido, surge la *modulación wavelet multi-escala M-aria en cuadratura*, la cual utiliza una constelación cuadrada similar a la del esquema M-QAM, y transmite la información a través del mecanismo de doble banda lateral con portadora suprimida (DSB-SC). Aquí, la eficiencia espectral decae a la mitad respecto al esquema M -WM-MS SSB, debido a la imposibilidad de transmitir símbolos complejos con banda lateral única, sin embargo, el comportamiento frente al error mejora notablemente en comparación al anterior esquema. En la figura 4.23 se observa el diagrama en bloques de un sistema de comunicación usando *modulación wavelet multi-escala M-aria en cuadratura*.

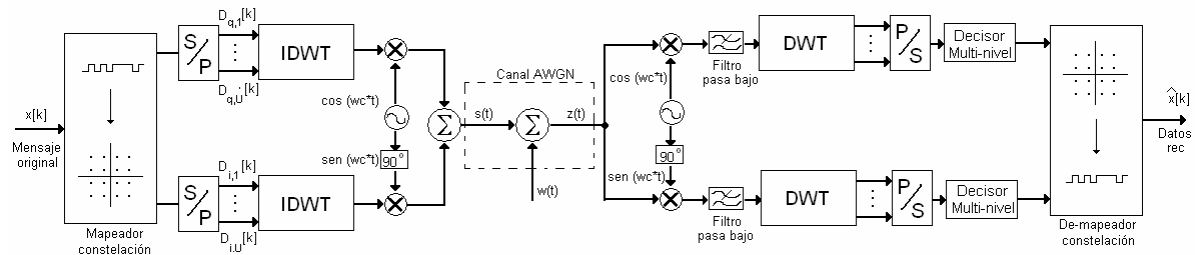


Figura 4.23. Diagrama en bloques del sistema de comunicación usando modulación M Q- WM - MS .

La expresión matemática para la señal transmitida $s(t)$ está dada por:

$$s(t) = \left[\sum_{m=1}^U \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{2^{m-1}K}{(2^U-1)n} \rfloor - 1} D_{i_m}[k] \psi_{j+m-1,k}(t) \right] \cos(2\pi f_c t) + \left[\sum_{m=1}^U \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{2^{m-1}K}{(2^U-1)n} \rfloor - 1} D_{q_m}[k] \psi_{j+m-1,k}(t) \right] \sin(2\pi f_c t) \quad (4.32)$$

donde $D_{i_m}[k]$ y $D_{q_m}[k]$ son los *sub-flujos* correspondientes a las partes real e imaginaria de los símbolos complejos a transmitir, esto es:

$$c[k] = a[k] + jb[k] \quad , \quad k = 0, 1, \dots, K/n - 1 \quad (4.33)$$

$$\begin{aligned} a[k] &= [D_{i_1} : D_{i_2} : \dots : D_{i_U}] \\ b[k] &= [D_{q_1} : D_{q_2} : \dots : D_{q_U}] \end{aligned} \quad (4.34)$$

Los posibles valores de $a[k]$ y $b[k]$ son como en las ecuaciones (2.55) y (2.56) respectivamente. El ancho de banda y la eficiencia espectral de este esquema de modulación están dados en las siguientes ecuaciones:

$$B_w = \frac{2^{U+1} R_b}{(2^U - 1) \log_2 M} \quad (4.35)$$

$$\eta = \frac{(2^U - 1) \log_2 M}{2^{U+1}} \quad (4.36)$$

Al comparar la ecuación (4.36) con la ecuación (2.67) se observa que el esquema *MQ-WM_MS* se aproxima a los sistemas M-PSK y M-QAM con factor de *roll off* igual a uno, siempre y cuando el número de niveles de resolución utilizados sea suficientemente grande (U mayor o igual a 3). Con esto se tiene un esquema de modulación robusto en la distribución de los símbolos y con una eficiencia espectral que tiende a igualar el caso límite de los esquemas tradicionales más utilizados en el momento (M-PSK y M-QAM).

5. SIMULACIÓN Y RESULTADOS DE LA MODULACIÓN WAVELET

5.1. ASPECTOS RELACIONADOS CON LA IMPLEMENTACIÓN DE LOS ALGORITMOS EN TIEMPO DISCRETO.

Como se mencionó en el capítulo 3, las operaciones de síntesis y análisis de una señal se realizan computacionalmente a través de los algoritmos de Mallat, esto es, el algoritmo *IFWT* sustituye al bloque *IDWT* en el transmisor y el algoritmo *FWT* hace lo propio con el bloque *DWT* en el receptor [3]. A pesar de existir muchas variantes del esquema de modulación *wavelet*, solo se distinguen dos casos especiales en la implementación de estos algoritmos, a saber, el caso de la *modulación a escala única* y el caso de la *modulación multi-escala*.

La modulación *wavelet* a escala única consiste en asumir que la secuencia mensaje de símbolos discretos corresponde al conjunto de coeficientes *wavelet* en algún nivel de resolución j , tal que la tasa de bit $R_b = 2^j$. Los coeficientes de escala en el nivel de resolución j y los coeficientes *wavelet* en los demás niveles de resolución se consideran todos iguales a cero [3], por tanto, de la ecuación (3.26), la primera etapa del algoritmo *IFWT* está dada por la ecuación:

$$A_{j+1,k} = \sum_n g[k - 2n]x[n] \quad (5.1)$$

En las siguientes etapas, la expresión que rige el proceso de formación de la señal está dada por:

$$A_{m,k} = \sum_n h[k - 2n]A_{m-1,n} \quad , \quad \text{con } m = j+2, j+3, \dots \quad (5.2)$$

El número de iteraciones siguientes a la primera es infinito, por lo menos teóricamente, lo cual es necesario para lograr una forma de onda continua en el tiempo, sin embargo, para realizar una simulación en tiempo discreto, se evalúa el efecto de un número finito de iteraciones. Dada la secuencia mensaje $x[n]$ consistente de K símbolos, la cual tiene una duración de T segundos, la primera iteración (ecuación (5.1)) genera $2K$ muestras, la segunda $4K$ muestras, la N -ésima origina $2^N K$ muestras que ocupan el mismo espacio temporal de T segundos, por tanto, la tasa de muestreo tras N iteraciones es igual a $2^N K / T$ muestras por segundo, pero K / T es la tasa de símbolo de la señal original, en consecuencia, la frecuencia de muestreo está dada por $f_s = 2^N R_s$, donde R_s es la tasa de símbolo del mensaje. Con lo anterior se tiene, según el teorema de muestreo, que la componente de frecuencia máxima lograda al realizar N iteraciones es $f_s / 2 = 2^{N-1} R_s$. Ahora, reconociendo que cada lóbulo de una *wavelet* ocupa un ancho de $2R_s$ Hz, el número de lóbulos formados con N iteraciones es 2^{N-2} lóbulos. Por otro lado, se sabe que la energía espectral de cualquier tipo de *wavelet* es prácticamente despreciable a partir del cuarto lóbulo (porcentaje de energía menor al 1% para las frecuencias ubicadas

más allá del cuarto lóbulo). En ese sentido, cuatro iteraciones ($N = 4$) es suficiente para generar una señal discreta libre de aliasing¹⁸.

Con todo lo anterior se obtiene una secuencia de muestras que representa fielmente a la señal continua a transmitir y los efectos del canal sobre dicha versión discreta son equivalentes a los experimentados por la señal continua. En consecuencia, los valores de m en la ecuación (5.2) se reducen al conjunto $\{j + 2, j + 3, j + 4\}$. Si bien, cuatro iteraciones son suficientes en las modulaciones a escala única en banda base, la situación cambia un poco cuando hay traslación espectral, tal como ocurre con las modulaciones pasabanda. En este último caso, se ha elegido una frecuencia portadora f_c igual a $8R_s$ y $N = 5$ iteraciones para llegar hasta el cuarto lóbulo del espectro desplazado. En la figura 5.1. se observa la manera como se introducen los datos en el algoritmo de Mallat para conformar la señal en banda base en un esquema de modulación *wavelet* a escala única. La secuencia $A[j + 4, n]$ al final del algoritmo es la versión discreta de la señal modulada en *wavelet* a escala única. En la figura 5.2. se muestra el espectro de la señal discreta generado al realizar cuatro iteraciones. Aquí se nota claramente como la energía de la señal es prácticamente nula más allá del cuarto lóbulo, por lo que no se interfiere con las réplicas periódicas y en consecuencia no hay aliasing.

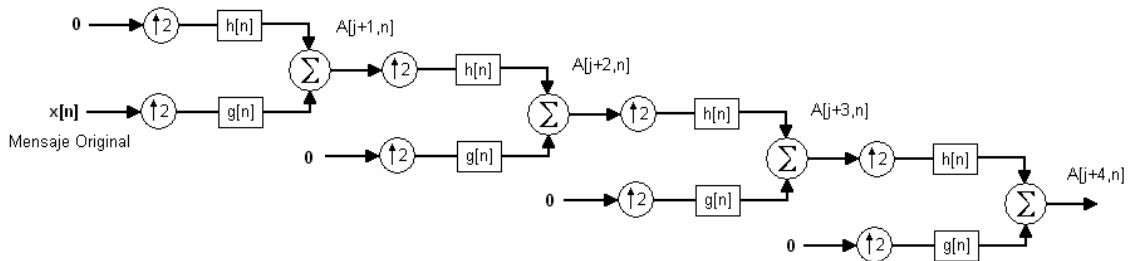


Figura 5.1. Ilustración del proceso de introducción de los datos para la modulación wavelet a escala única.

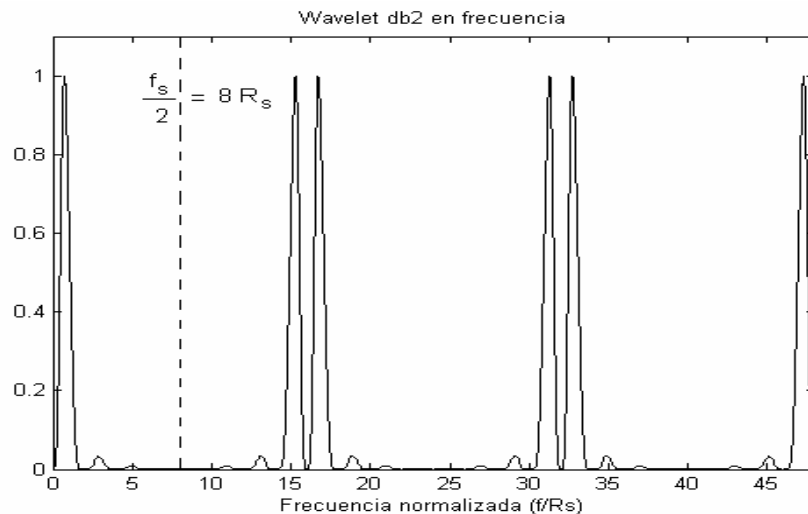


Figura 5.2. Espectro periódico de la señal discreta, con $f_s = 16 R_s$.

¹⁸ Aliasing: Interferencia de colas espectrales. Este fenómeno se presenta al muestrear una señal con una tasa de muestreo inferior a la velocidad de Nyquist, con lo que se presenta una superposición indeseada entre las frecuencias altas que ocasiona distorsión en la señal reconstruida.

En el receptor, el algoritmo *FWT* se implementa con el mismo número de etapas que su contraparte en el transmisor, pero sin tener en cuenta los coeficientes *wavelet* generados en las primeras $N - 1$ etapas, solo los producidos en la última, pues son los que corresponden al mensaje. En la figura 5.3 se observa el diagrama del algoritmo *FWT* en el receptor.

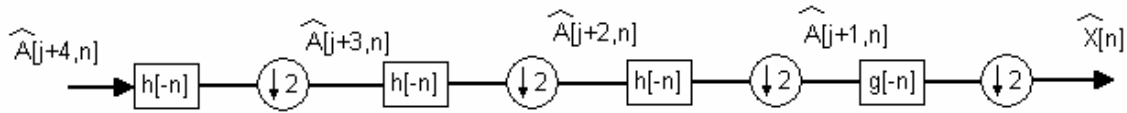


Figura 5.3. Implementación de la *FWT* en el receptor para modulación a escala única.

La modulación *wavelet* multi-escala, por su parte, consiste en asumir que la secuencia mensaje discreta corresponde a los coeficientes *wavelet* de varios niveles de resolución consecutivos, para lo que es necesario dividir el bloque inicial de datos en varias *sub-secuencias* cuya longitud coincide con el número de coeficientes *wavelet* necesarios en cada nivel de resolución implicado. Los coeficientes de escala en el primer nivel de resolución utilizado y los coeficientes *wavelet* en los niveles de resolución distintos a los implicados en la distribución del mensaje se igualan todos a cero. En esos términos, si se utilizan U niveles de resolución para distribuir la información, la primera etapa del algoritmo de Mallat está dada por la ecuación:

$$A_{j+1,k} = \sum_n g[k - 2n]x_1[n], \quad (5.3)$$

donde $x = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ \dots \ x_U]$ es la secuencia mensaje original y x_1, x_2, \dots, x_U son los *sub-flujos* asignados a cada uno de los U niveles de resolución utilizados. Las siguientes $U - 1$ etapas están dadas por la ecuación:

$$A_{m,k} = \sum_n h[k - 2n]A_{m-1,n} + \sum_n g[k - 2n]x_{m-j}[n] \quad , \quad \text{con } m = j + 2, \dots, j + U \quad (5.4)$$

En las etapas siguientes se procede de la misma forma que en el caso de escala única, esto es:

$$A_{m,k} = \sum_n h[k - 2n]A_{m-1,n} \quad , \quad \text{con } m = j + U + 1, j + U + 2, j + U + 3, \quad (5.5)$$

donde al igual que en caso anterior, se han tomado tres iteraciones adicionales para formar una señal discreta sin aliasing. La frecuencia de muestreo esta vez es 16 veces la velocidad en el nivel de resolución máximo utilizado para transportar información, con esto se asegura que el espectro de la señal resultante se forme hasta el cuarto lóbulo. Si el esquema a simular es pasabanda, simplemente se agrega otra iteración con la forma descrita en la ecuación (5.5) y se elige la frecuencia portadora de tal forma que el espectro desplazado quede formado hasta el cuarto lóbulo y que dicha frecuencia portadora sea un múltiplo entero del ancho de banda. Para los propósitos de este documento, se ha asumido un valor de $U = 3$ niveles de resolución para la modulación multi-escala, con lo que se tienen $N = 6$ iteraciones en total. Para los esquemas multi-

escala pasabanda, el número de iteraciones se eleva a 7, y la frecuencia portadora se toma como $f_s / 4$.

En la figura 5.4. se ilustra la manera como se introducen los datos para formar la señal. Aquí la secuencia $A[j + 6, n]$ representa la aproximación discreta de la señal continua a transmitir.

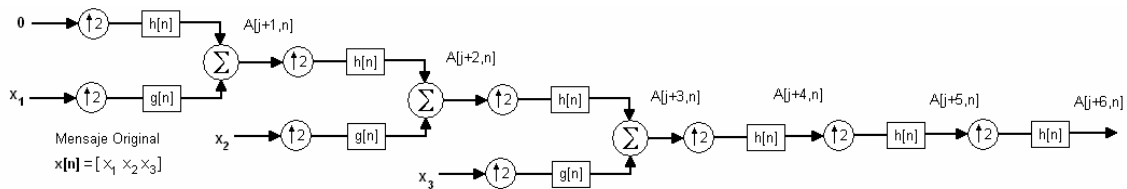


Figura 5.4. Proceso de distribución de la información para obtener la señal modulada wavelet multi-escala.

En el receptor, la *FWT* se implementa con el mismo número de iteraciones de la *IFWT* en el transmisor, pero solo se tienen en cuenta los coeficientes *wavelet* generados en las últimas U etapas. En la figura 5.5. se muestra la implementación de este algoritmo para $U = 3$ y $N = 6$.

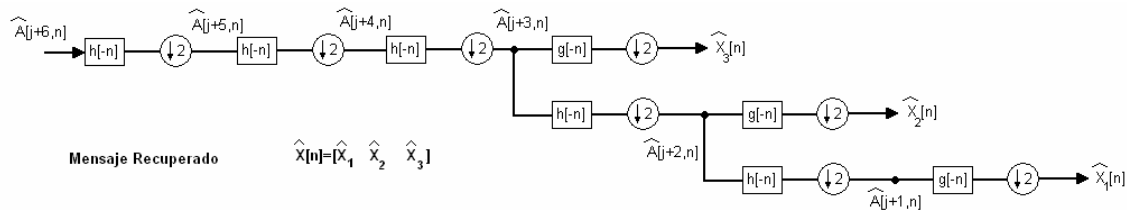


Figura 5.5. Implementación de la *FWT* en el receptor del esquema de modulación multi-escala.

5.2. DESCRIPCIÓN DEL SISTEMA.

El algoritmo de simulación de la modulación *wavelet* consiste en generar una secuencia aleatoria de símbolos discretos, obtener a partir de ésta una señal modulada capaz de atravesar un canal ruidoso y finalmente recuperar los datos generados por la fuente, empleando la señal modulada contaminada por ruido. El sistema se divide en tres grandes módulos bien diferenciados, a saber, el transmisor, el canal y el receptor.

En el transmisor se dispone de un generador de símbolos aleatorios discretos que cumple el papel de la fuente de información. Luego se tiene el modulador, el cual convierte el flujo discreto de datos en una señal continua en amplitud y discreta en tiempo, pero con una tasa de muestreo considerablemente mayor a la del mensaje original. Las muestras de la señal de salida del modulador deben ser una representación fiel de la señal analógica que se generaría en un sistema real, es decir, deben cumplir con el teorema de muestreo (la

frecuencia de muestreo debe ser mayor o igual a la frecuencia Nyquist, o sea el doble de la componente en frecuencia máxima de la señal analógica).

El canal, por su parte, tiene la función de generar un proceso estacionario de ruido blanco aditivo Gaussiano (AWGN) y superponerlo con la señal modulada. La potencia de la señal de ruido está definida en términos de una relación señal a ruido previamente establecida.

La función del receptor es recuperar los datos enviados por la fuente con la menor cantidad de errores posible. Este módulo está compuesto básicamente por un demodulador seguido de un decisor, el primero se encarga de decodificar los símbolos inmersos en la forma de onda de llegada, el segundo, rectifica los datos que entrega el demodulador al valor discreto más probable.

El objetivo principal del algoritmo de modulación *wavelet* es evaluar el desempeño del esquema de modulación ante la presencia de ruido, esto es, determinar la tasa de error de bit (*BER*) para una relación energía de bit a densidad de ruido (E_b / N_0) dada a la entrada del receptor. La evaluación de dicho comportamiento está limitada a los siguientes supuestos de validez acerca de la simulación.

Supuestos o condiciones iniciales de la simulación:

- El tipo de canal es AWGN ideal, es decir, se supone que su comportamiento es equivalente al de un sistema lineal invariante en el tiempo cuya respuesta en frecuencia se asemeja a la de un filtro pasa-bajo ideal con un ancho de banda mucho mayor al de la señal de entrada (señal modulada). La única perturbación que introduce el canal es el ruido blanco Gaussiano [6]. No se consideran otros efectos tales como desvanecimiento, dispersión temporal, efecto Doppler, no linealidad, etc.
- La fuente de información genera símbolos con entropía máxima, es decir, con el mayor grado de incertidumbre posible, ocasionando que la velocidad de información sea exactamente igual a la tasa de símbolo.
- Dado que el ruido es blanco, se sabe que tiene igual presencia en todas las bandas de frecuencia, por tanto, la potencia de ruido en una porción de frecuencia específica es proporcional al ancho de banda [7].
- El decisor funciona con un criterio de máxima verosimilitud, es decir, su regla de decisión consiste en medir la distancia entre la muestra recibida y todos los símbolos del alfabeto, y luego elegir el más cercano [6].
- Para el caso de modulación pasabanda (DSB-SC y SSB), se asume sincronización perfecta a nivel de portadora entre el transmisor y el receptor, es decir, la portadora local utilizada en el receptor para demodular la señal tiene la misma frecuencia y fase que la usada en el transmisor.
- Hay sincronización perfecta a nivel de símbolo entre la señal discreta que sale del transmisor y la señal discreta que llega al receptor, esto es, las muestras de la señal recibida corresponden a las mismas muestras de la señal transmitida mas el ruido introducido por el canal.

- Todos los factores de atenuación introducidos por el canal y todos los factores de amplificación introducidos por los filtros a lo largo del sistema son conocidos, por tanto, los niveles umbral del decisor corresponden a los niveles óptimos (aquellos que producen el mejor comportamiento).
- Las frecuencias portadoras en los sistemas pasabanda son múltiplos enteros del ancho de banda nominal de la señal modulada, esto para mantener la ortogonalidad [6].
- El efecto del ruido en un sistema pasabanda es independiente de la ubicación de la frecuencia portadora debido a que se trata de ruido blanco, por tal motivo, cualquier frecuencia portadora distinta de cero es representativa para evaluar el comportamiento de un sistema pasabanda.
- La relación señal a ruido del canal se define en función de la relación señal a ruido presente en la banda de interés de la señal modulada (ancho de banda nominal) independientemente del tipo de *wavelet* utilizado. Por tanto, se asume la presencia de un filtro pasa-bajo ideal a la entrada del receptor para limitar la potencia de ruido.
- En los sistemas de modulación *M*-arios (*M-WM* y *MQ-WM*) se asume codificación Gray en la constelación, por tanto, la *tasa de error de bit* es aproximadamente igual a la *tasa de error de símbolo* dividida entre el número de bits por símbolo. Esto es: $BER = SER / \log_2 M$.
- En los sistemas *M*-arios se supone que la energía por símbolo es igual a la energía por bit multiplicada por el número de bits que transporta cada símbolo ($E_s = (\log_2 M) E_b$).
- Cada simulación se ejecuta con una secuencia mensaje y una señal de ruido diferentes.
- El flujo total de información se modula directamente sin realizar una previa subdivisión de la información.

5.3. IDENTIFICACIÓN DE VARIABLES

Variables de Entrada:

- Tipo de *wavelet*: Es la función *wavelet* madre a utilizar. Dentro de un proceso de simulación solo se usa una función *wavelet* a la vez.
- Alfabeto fuente: Define el conjunto de posibles símbolos mensaje junto con sus respectivas probabilidades de ocurrencia.
- Mensaje original: Es la secuencia discreta a enviar a través del canal.

- Relación energía de bit a densidad espectral de ruido (E_b / N_o): Es la relación E_b / N_o medida a la entrada del receptor. Determina la potencia de ruido que introduce el canal a la señal modulada.
- Señal de ruido: Es una función muestra de un proceso estacionario AWGN.

Variables de Salida:

- Tasa de error de bit: Es la cantidad de errores en el mensaje recibido dividido por el número de bits enviados en total. Se obtiene comparando posición por posición los datos del mensaje original con los datos del mensaje recibido, contando el número de posiciones erradas y dividiendo esta cifra entre el número total de datos enviados.
- Gráficos ilustrativos: Entre los más importantes están: el espectro de la señal transmitida para verificar el ancho de banda ocupado, y el diagrama de constelación de símbolos recibidos previo al decisor, para observar la distribución y la dispersión relativa entre las muestras detectadas y el alfabeto fuente.
- Porcentaje de energía en el lóbulo principal: Mide el cociente entre la cantidad de energía alojada en el primer lóbulo espectral y la energía total de la señal, esto para ver el grado de confinamiento de energía de una determinada wavelet.

Comportamiento estadístico de las variables de entrada al sistema:

- Tipo de *wavelet*: Variable determinística de tipo cadena de caracteres.
- Relación energía de bit a densidad de ruido: Variable escalar determinística.
- Alfabeto fuente: Matriz determinística.
- Mensaje original: Vector aleatorio discreto con distribución uniforme e independencia estadística entre sus componentes. El valor medio de la distribución de probabilidad es cero y la varianza es igual a la energía media por símbolo.
- Señal de ruido: Vector aleatorio continuo con distribución Gaussiana de valor medio cero y varianza igual a la potencia de ruido.

5.4. MODELO DEL SISTEMA

Modulación *wavelet* a escala única, banda base, *M*-aria:

En la figura 5.6 se muestra el diagrama en bloques del algoritmo de simulación correspondiente al esquema *M-WM1EBB*, en él se observa la manera como se distribuyen los diferentes módulos y entradas al sistema. A continuación se dará una breve descripción matemática de la función que desempeñan los bloques más representativos en el desarrollo de la simulación.

Sea \mathfrak{S} un alfabeto fuente de M símbolos equiprobables con valor medio cero, el cual está dado por:

$$\mathfrak{S} = \{s_0, s_1, \dots, s_{M-1}\}, \quad \text{con } P(s_i) = p_i = \frac{1}{M}, \quad i = 0, 1, \dots, M-1 \quad (5.6)$$

Para el caso de transmisión binaria, el conjunto \mathfrak{S} se reduce a los símbolos -1 y 1 , mientras para transmisión M -aria, el conjunto toma los valores $\pm 1, \pm 3, \dots, \pm(M-1)$.

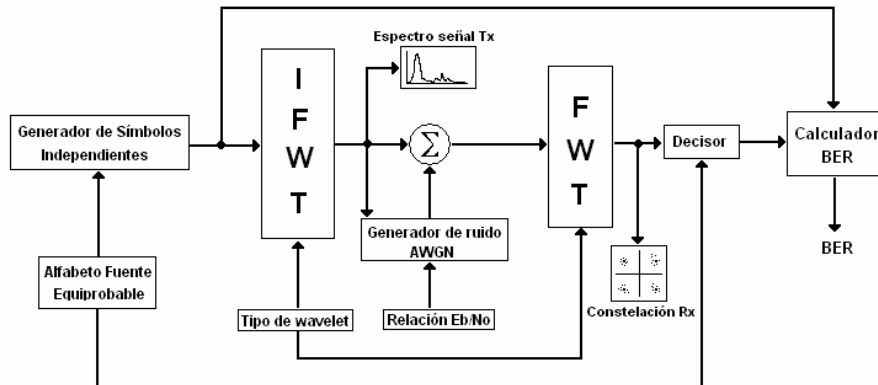


Figura 5.6. Modelo del sistema M-WM1EBB.

Generador de símbolos independientes:

- Argumentos: Alfabeto fuente equiprobable.
- Salida: Mensaje discreto a enviar.

La secuencia que sale del generador de símbolos independientes tiene la forma:

$$x = \{(x_0, x_1, \dots, x_{K-1}) : x_k \in \mathfrak{S}, k = 0, 1, \dots, K-1; \quad P(x_i \cap x_j) = P(x_i)P(x_j), i \neq j\}, \quad (5.7)$$

donde se señala claramente el carácter de independencia estadística entre cada par de símbolos del vector mensaje x .

Bloque IFWT:

- Argumentos: Mensaje a enviar, tipo de *wavelet*.
- Salida: Señal modulada en *wavelet* banda base.

La señal que sale de este bloque es la versión muestreada de la señal continua transmitida en un sistema real a una tasa de muestreo f_s . Matemáticamente dicha señal se expresa en el dominio del tiempo de la siguiente manera:

$$s_{\delta}(t) = \sqrt{R_s} \sum_{m=0}^{Kf_s-1} \left[\sum_{k=0}^{K-1} x[k] \psi \left(\frac{mR_s}{f_s} - k \right) \right] \delta \left(t - \frac{m}{f_s} \right), \quad (5.8)$$

donde R_s es la tasa de símbolo y f_s es la frecuencia de muestreo.

Generador de ruido AWGN:

- Argumentos: Relación E_b / N_0 , señal modulada *wavelet*.
- Salida: Señal de ruido blanco Gaussiano.

La señal que sale del generador de ruido es una función muestra, discreta en tiempo de un proceso estocástico de ruido blanco Gaussiano estacionario, con media cero y potencia dada en términos de la relación E_b / N_0 a la entrada del receptor y también de la potencia de la señal modulada en *wavelet*. Matemáticamente, la potencia de ruido se obtiene a través de la siguiente expresión:

$$P_N = P_n \left(\frac{f_s / 2}{B_W} \right), \quad (5.9)$$

donde P_n es la potencia de ruido presente en la banda de interés, B_W es el ancho de dicha banda y f_s es la frecuencia de muestreo de la señal modulada. Ahora, reconociendo que $P_n = P_s / SNR$, y que $SNR = E_s R_s / N_0 B_W$, se tiene que:

$$P_N = \frac{P_s B_W}{R_s (E_s / N_0)} \left(\frac{f_s / 2}{B_W} \right) = \frac{P_s f_s}{2 R_s \log_2 M (E_b / N_0)}. \quad (5.10)$$

Bloque FWT:

- Argumentos: Señal modulada *wavelet* ruidosa, tipo de *wavelet*.
- Salida: Mensaje demodulado ruidoso.

La salida de este bloque es una secuencia aleatoria continua del mismo tamaño del mensaje original, cuyas componentes corresponden al mensaje discreto original mas el aporte del ruido aleatorio del canal. Dicha secuencia se obtiene mediante la siguiente operación:

$$d[k] = \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{R_s} z(t) \psi(R_s t - k) dt, \quad \text{para } k = 0, 1, \dots, K-1, \quad (5.11)$$

donde $d[k]$ es la versión ruidosa del mensaje original y $z(t)$ es la señal modulada afectada por el canal.

Decisor:

- Argumentos: Mensaje demodulado ruidoso, alfabeto fuente.
- Salida: Mensaje recuperado.

La secuencia que sale del decisor corresponde a la versión reconstruida del mensaje original, esto es, el mismo mensaje original pero con algunos errores producidos por la acción del ruido. Matemáticamente, el mensaje recuperado se obtiene mediante la siguiente operación:

$$\hat{x}[k] = \sum_{n=-\left(\frac{M}{2}-1\right)}^{\frac{M}{2}-1} \text{sgn}(d[k]-2n), \quad \text{para } k = 0, 1, \dots, K-1, \quad (5.12)$$

donde $\hat{x}[k]$ es el mensaje recuperado y el símbolo $\text{sgn}()$ denota a la función signo. Aquí se observa que el decisor es un dispositivo *no lineal* cuya característica entrada – salida se muestra en la figura 5.7, para el caso de $M = 8$.

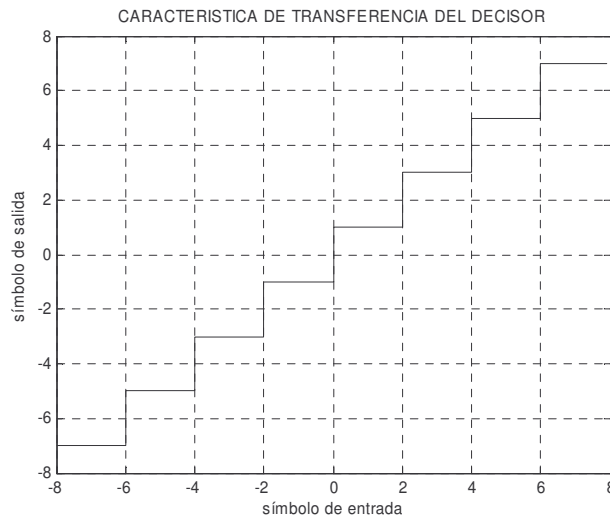


Figura 5.7. Característica entrada – salida del decisor para un alfabeto lineal de 8 símbolos.

Calculador de BER:

- Argumentos: Mensaje original, mensaje reconstruido.
- Salida: Tasa de error de bit.

La función de este bloque consiste en comparar posición a posición el vector mensaje enviado desde el transmisor y el vector mensaje recuperado en el receptor, para luego contabilizar el número de errores y en efecto calcular la tasa de error de símbolo.

Modulación *wavelet*, *M*-aria, a escala única, SSB:

En la figura 5.8 se muestra el modelo del algoritmo de simulación para el esquema de modulación *wavelet* *M*-ario SSB. Como puede advertirse, los bloques son básicamente los mismos que en esquema anterior, salvo algunas etapas adicionales que serán descritas a continuación.

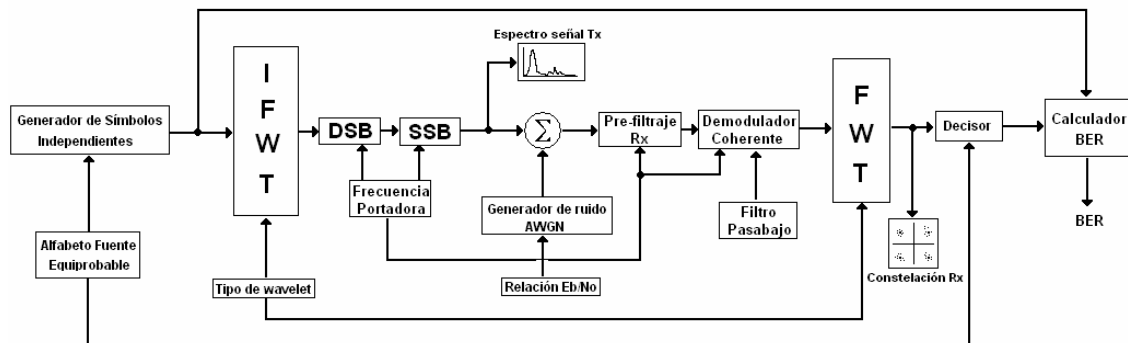


Figura 5.8. Modelo del sistema para el esquema *M*-*WM1ESSB*.

Bloque DSB:

- Argumentos: Señal modulada en banda base, frecuencia portadora.
- Salida: Señal modulada en doble banda lateral con portadora suprimida.

La función principal de este bloque es trasladar el espectro de la señal en banda base a una frecuencia portadora diferente de cero. La operación que hace posible dicha traslación es la multiplicación de la señal en banda base por una onda sinusoidal pura, cuya frecuencia es igual a la frecuencia portadora, por tanto, la señal discreta en tiempo que sale del bloque DSB está dada por:

$$s_{DSB}(t) = s_{\delta}(t) \cos(2\pi f_c t), \quad (5.13)$$

donde f_c es la frecuencia portadora.

Bloque SSB:

- Argumentos: Señal modulada en doble banda lateral, frecuencia portadora.
- Salida: Señal modulada en banda lateral única (SSB).

En este bloque se aplica sobre la señal DSB un filtro pasabanda cuyas frecuencias de corte bajo y corte alto son respectivamente f_c y $f_c + B_W$ para transmitir la banda lateral superior únicamente, ó f_c y $f_c - B_W$ para hacer lo propio con la banda lateral inferior. La señal que se envía al canal está dada matemáticamente por:

$$s_{SSB}(t) = s_{DSB}(t) * h(t), \quad (5.14)$$

donde $h(t)$ es la respuesta al impulso del filtro discriminador pasabanda y el símbolo $*$ denota al operador de convolución.

Bloque Pre-filtraje Rx:

- Argumentos: Señal modulada SSB ruidosa, frecuencia portadora.
- Salida: Señal SSB con ruido limitado.

El objetivo de este bloque es eliminar la mayor cantidad posible de ruido presente en las bandas adyacentes a la porción espectral ocupada por la señal, esto para mejorar la relación señal a ruido y por ende aumentar la calidad en la detección. La operación realizada aquí es una nueva convolución con el filtro $h(t)$, como se describe en (5.14), pero esta vez, sobre la versión ruidosa de la señal modulada SSB.

Demodulador coherente:

- Argumentos: Señal SSB con ruido limitado, frecuencia portadora, filtro pasa-bajo.
- Salida: Señal demodulada banda base.

La función de este bloque es trasladar el espectro de la señal pasabanda nuevamente a banda base. Para lograr dicho cometido es necesario, primero, multiplicar la señal SSB entrante por una onda sinusoidal pura sintonizada a la misma frecuencia y fase de la portadora usada en el transmisor, y luego, filtrar a pasabajo la onda resultante para eliminar los componentes armónicos producidos por la multiplicación, ya que se trata de una operación no lineal.

Modulación *wavelet* , MQ-aria, a escala única, DSB:

Para este caso, el alfabeto fuente consiste de símbolos complejos cuyas partes real e imaginaria toman valores del conjunto: $\pm 1, \pm 3, \dots, \pm(\sqrt{M} - 1)$, donde M , el tamaño del alfabeto, debe ser un cuadrado perfecto. En la figura 5.9 se muestra el modelo del esquema en cuestión. En lo que sigue solo se explicarán los módulos que no hayan aparecido antes.

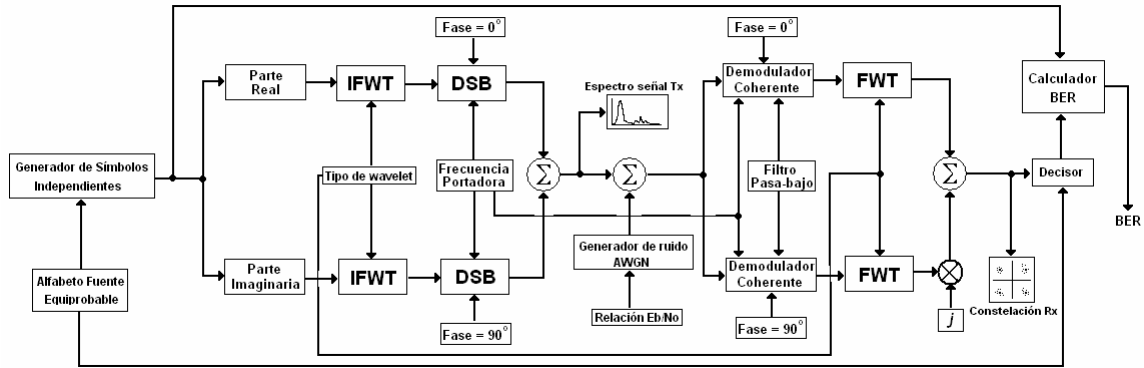


Figura 5.9. Modelo del sistema para el esquema *MQ-WM1EDSB*.

Bloque Parte Real:

- Argumentos: Mensaje complejo a enviar.
- Salida: Parte real de los símbolos a enviar.

Este bloque se encarga de extraer la componente en fase del mensaje. Matemáticamente, su función se expresa de la siguiente manera:

$$a[k] = \text{Re}\{x[k]\}, \quad \text{para } k = 0, 1, \dots, K - 1. \quad (5.15)$$

Bloque Parte Imaginaria:

- Argumentos: Mensaje complejo a enviar.
- Salida: Parte imaginaria de los símbolos a enviar.

Este bloque extrae la componente en cuadratura del mensaje. Su función está dada por la expresión:

$$b[k] = \text{Im}\{x[k]\}, \quad \text{para } k = 0, 1, \dots, K - 1. \quad (5.16)$$

Esta vez, los bloques *DSB* y *Demodulador coherente* están acompañados por un elemento adicional, a saber, la *fase*. Una fase de 0 grados indica el uso de una función coseno para realizar las correspondientes traslaciones espectrales, mientras que una fase de 90 grados hace lo propio, pero usando una función seno.

Modulación *wavelet*, *M*-aria, multi-escala, banda base:

El rasgo distintivo de la modulación *wavelet* multi-escala, en cualquiera de sus versiones, es la distribución del mensaje sobre varios niveles de resolución consecutivos, para lo

cual es necesario el uso de un elemento adicional conocido como convertor serie – paralelo. En la figura 5.10 se muestra el modelo para este esquema, usando $U = 3$ niveles de resolución.

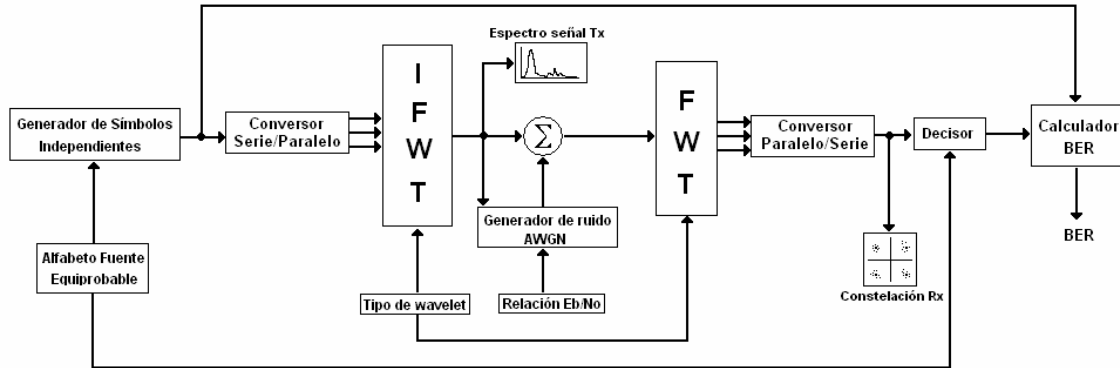


Figura 5.10. Modelo del sistema para el esquema M -WMMSBB.

Convertor Serie / Paralelo:

- Argumentos: Mensaje a enviar.
- Salida: Mensaje fraccionado en tres *sub-flujos*.

El objetivo de este bloque es dividir el vector mensaje original en tres flujos paralelos, donde la extensión del segundo es el doble de la del primero, y la extensión del tercero es cuatro veces la del primero; por lo que la longitud del bloque original de datos debe ser un múltiplo entero de 7. Matemáticamente, la regla de formación de los *sub-flujos* está dada por:

$$\begin{aligned}
 y_1[n] &= \left(x[0], x[1], \dots, x\left[\frac{K}{7}-1\right] \right) \\
 y_2[n] &= \left(x\left[\frac{K}{7}\right], x\left[\frac{K}{7}+1\right], \dots, x\left[\frac{3K}{7}-1\right] \right) \\
 y_3[n] &= \left(x\left[\frac{3K}{7}\right], x\left[\frac{3K}{7}+1\right], \dots, x[K-1] \right)
 \end{aligned} \tag{5.17}$$

Bloque IFWT:

- Argumentos: Tipo de *wavelet*, mensaje fraccionado.
- Salida: Señal modulada *wavelet* multi-escala banda base.

La señal de salida de este bloque está dada por:

$$s_{\delta}(t) = \sum_{m=0}^{\frac{Kf_s}{R_s}-1} \left[\sum_{n=1}^3 \sum_{k=0}^{\frac{2^{n-1}K}{7}-1} 2^{\frac{j+n-1}{2}} y_n[k] \psi \left(\frac{2^{j+n-1}m}{f_s} - k \right) \right] \delta \left(t - \frac{m}{f_s} \right) \quad (5.18)$$

Bloque FWT:

- Argumentos: Señal ruidosa proveniente del canal, tipo de *wavelet*.
- Salida: Versión ruidosa y fraccionada del mensaje.

La operación que realiza este bloque es extraer los *sub-flujos* que conforman el mensaje, los cuales están contaminados por ruido. Lo anterior se describe matemáticamente de la siguiente manera:

$$d_n[k] = \int_{-\infty}^{\infty} 2^{\frac{j+n-1}{2}} z(t) \psi \left(\frac{2^{j+n-1}m}{f_s} - k \right) dt, \quad k = 0, 1, \dots, \frac{2^{n-1}K}{7} - 1, \quad n = 1, 2, 3, \quad (5.19)$$

donde $z(t)$ es la señal a la salida del canal.

Convertor Paralelo / Serie:

Argumentos: Mensaje ruidoso fraccionado.

Salida: Mensaje ruidoso en serie.

El objetivo de este bloque es concatenar los tres *sub-flujos* ruidosos en uno solo. La expresión matemática que rige la función de este bloque es la siguiente:

$$d[k] = \left[d_1[k] \quad \vdots \quad d_2 \left[k - \frac{K}{7} \right] \quad \vdots \quad d_3 \left[k - \frac{3K}{7} \right] \right], \quad (5.20)$$

donde el símbolo \vdots denota al operador de concatenación.

Los modelos correspondientes a los esquemas *M-WMMESSB* y *MQ-WMMEDSB* son similares a los modelos de los esquemas *M-WM1ESSB* y *MQ-WM1EDSB* respectivamente, salvo por la inserción de los bloques de conversión serie / paralelo y paralelo / serie, cuyas funciones no varían respecto a las descritas antes. Por tanto se considera irrelevante la inclusión de estos diagramas en lo que sigue del documento.

5.5. IMPLEMENTACIÓN Y PRUEBAS DE VALIDACIÓN

Selección de la herramienta:

La herramienta elegida para implementar la simulación de la modulación *wavelet* es Matlab en su versión 6.5, con la inclusión de los paquetes de funciones: *Wavelet toolbox*, *Signal processing toolbox* y *Communications toolbox*. La razón principal que justifica la elección de esta herramienta, además de la familiaridad y la facilidad de manejo, es el hecho de reunir en un solo programa las tres áreas del conocimiento usadas para desarrollar el presente trabajo de investigación, a saber, las telecomunicaciones, el análisis *wavelet* y el procesamiento de señales.

Implementación de la simulación:

Resultado buscado: Curva de desempeño de la tasa de error de bit en función de la relación energía de bit a densidad espectral de ruido (*BER* vs E_b / N_0).

Parámetros de entrada que influyen en el resultado buscado: Relación energía de bit a densidad espectral de ruido, tipo de *wavelet*, alfabeto fuente.

En los apéndices del A1 al A8 se muestran los algoritmos de simulación desarrollados por los autores en el presente trabajo de investigación. A continuación se mencionarán algunas funciones especiales que fueron utilizadas para implementar dichos algoritmos y se describirá brevemente su funcionamiento.

Función randsrc:

- Argumentos: Número de filas, número de columnas, alfabeto fuente.
- Salida: Matriz de tamaño especificado por el número de filas y el número de columnas, de símbolos aleatorios equiprobables e independientes tomados del alfabeto fuente.
- Uso: Generador de símbolos independientes.

Función wfilters:

- Argumentos: Tipo de *wavelet*.
- Salida: Conjunto de 4 vectores fila cuyas componentes corresponden a los coeficientes de los 4 filtros digitales especificados por el tipo de *wavelet* que ingresa como argumento. Los filtros digitales son en su respectivo orden: filtro pasa-bajo de análisis, filtro pasa-alto de análisis, filtro pasa-bajo de síntesis, filtro pasa-alto de síntesis.
- Uso: Bloques *IFWT* y *FWT*.

Función filter:

- Argumentos: Filtro digital, señal a filtrar.
- Salida: Señal filtrada que corresponde a la convolución entre los argumentos, pero cuyo tamaño es igual al de la señal a filtrar.
- Uso: Bloques *IFWT*, *FWT*, *SSB*, *Pre-filtraje Rx*, *Demodulador coherente*.

Función *upsample*:

- Argumentos: Señal a sobremuestrear, factor de sobremuestreo.
- Salida: Señal sobremuestreada con un factor de sobremuestreo igual al de la entrada.
- Uso: Bloque *IFWT*.

Función *downsample*:

- Argumentos: Señal a submuestrear, factor de submuestreo.
- Salida: Señal submuestreada con un factor de submuestreo igual al de la entrada.
- Uso: Bloque *FWT*.

Función *length*:

- Argumentos: Vector fila.
- Salida: Longitud (en número de posiciones) del vector introducido como argumento.
- Uso: Bloques *IFWT*, *FWT*, *SSB*, *Pre-filtraje Rx*, *Demodulador coherente*, *Decisor*.

Función *rcosfir*:

- Argumentos: Factor de *roll-off*, número de lóbulos, factor de interpolación, periodo de símbolo.
- Salida: Filtro digital de caída senoidal con factor de *roll-off* y ancho de banda dados en términos de sus argumentos.
- Uso: Bloques *SSB*, *Pre-filtraje Rx*, *Demodulador coherente*.

Función *awgn*:

- Argumentos: Señal a contaminar con ruido, relación señal a ruido.

- Salida: Señal contaminada con ruido blanco Gaussiano de media cero, y potencia igual al cociente entre la potencia de la señal que entra como argumento y la relación señal a ruido introducida.

- Uso: Bloque Generador de ruido AWGN.

Pruebas de Validación:

Las pruebas de validación son aquellas que se realizan sobre una simulación para determinar si ésta modela adecuadamente la realidad, en otras palabras, son pruebas de las cuales se esperan respuestas específicas bajo ciertas condiciones. A continuación se mencionarán algunas de las pruebas más relevantes que se realizaron sobre los diferentes algoritmos del esquema de modulación *wavelet*.

Prueba 1:

Condición inducida: Diseño del sistema de comunicación completo pero sin la presencia de ruido.

Respuesta esperada: Mensaje recuperado absolutamente libre de errores. Las muestras de la secuencia mensaje recibida previas al decisor deben ser una réplica exacta de la secuencia mensaje original, salvo por un factor de amplificación debido a las diversas etapas de filtraje, con esto se tiene que el diagrama de constelación recibida debe contener únicamente los elementos del alfabeto fuente.

Prueba 2:

Condición inducida: Ninguna en particular.

Respuesta esperada: La relación entre la potencia de la señal a la entrada del receptor y la potencia de la señal a la salida del transmisor debe ser aproximadamente igual a la relación señal a ruido total establecida para el canal.

Prueba 3:

Condición inducida: Secuencia mensaje repetitiva de un solo símbolo del alfabeto.

Respuesta esperada: La varianza de la secuencia mensaje recibida previa al decisor debe ser aproximadamente igual a la potencia de ruido filtrado sobre la banda de interés. Por otra parte, el espectro de la señal transmitida debe ser de carácter impulsivo, y las líneas espectrales deben aparecer únicamente en los múltiplos enteros impares de la tasa de símbolo.

Prueba 4:

Condición inducida: Ninguna en particular.

Respuesta esperada: El porcentaje de energía alojado en el lóbulo principal de la señal transmitida debe ser aproximadamente igual al porcentaje de confinamiento nominal del tipo de *wavelet* utilizado.

Prueba 5:

Condición inducida: Ninguna en particular.

Respuesta esperada: El espectro de la señal transmitida debe ser nulo en las frecuencias que son múltiplos enteros pares de la tasa de símbolo.

Prueba 6:

Condición inducida: Ninguna en particular.

Respuesta esperada: Los resultados de la tasa de error de bit una vez realizada la simulación deben tener un estrecho margen de diferencia con los resultados teóricos establecidos para los esquemas tradicionales correspondientes.

5.6. RESULTADOS DE LA SIMULACIÓN

A continuación se exponen los gráficos de desempeño obtenidos para cada variante del esquema de modulación propuesto. Las curvas dibujadas representan el comportamiento de la tasa de error de bit (BER) vs la relación energía de bit a densidad espectral de ruido (E_b / N_0), presentado por cada uno de los tipos de *wavelet* evaluados. La línea continua de color negro de cada dibujo indica el comportamiento teórico del esquema de modulación tradicional que está siendo comparado. Los tipos de *wavelet* evaluados son: Haar, Daubechies $N = 2$ (db2), Daubechies $N = 5$ (db5), Daubechies $N = 8$ (db8), Meyer discreta (dmey), Coiflet $N = 5$ (coif5) y Symlet $N = 8$ (sym8). Cada curva se ha tomado a partir de diez puntos representativos de E_b / N_0 y cada punto corresponde al promedio de 10 simulaciones independientes, esto en virtud del teorema del límite central, que establece que la media muestral de los promedios tiene una distribución Gaussiana cuando el número de repeticiones de un experimento es mayor o igual a cinco, aun si la población original no posee una distribución Gaussiana.

Modulación wavelet a escala única, banda base, binaria (apéndice A1): Figura 5.11.

En la figura 5.11. no se advierte una diferencia apreciable en el comportamiento de los diferentes tipos de *wavelet*, además, dicho comportamiento es igual al de un sistema tradicional banda base con pulsos *roll off*. Por tanto la única diferencia entre estos dos esquemas es la eficiencia espectral, la cual, como se vio en el capítulo 4, es superior en el esquema tradicional.

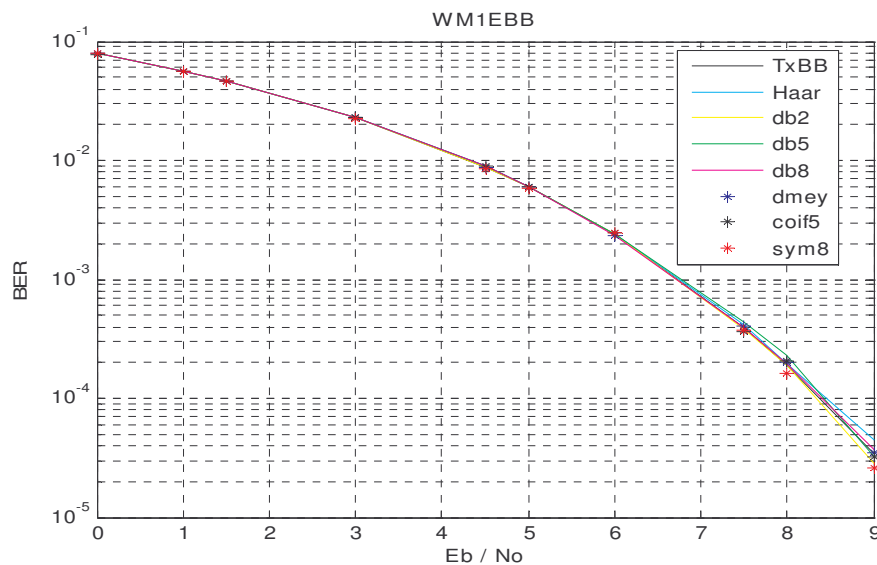


Figura 5.11. Desempeño del esquema WM1EBB para varios tipos de *wavelet*.

Dada la similitud en el comportamiento de los diferentes tipos de *wavelet* utilizados, de ahora en adelante sólo se mostrarán los más representativos (Haar, db8, coif5), con el fin de no saturar los gráficos y hacerlos más informativos. El criterio de elección de estos tipos de wavelets es el número de momentos de desvanecimiento, ya que éste se considera como el parámetro principal que determina el desempeño de una clase de wavelet específica.

Modulación wavelet a escala única, banda lateral única, binaria (apéndice A2): Figura 5.12.

En la figura 5.12. se observa un comportamiento similar entre todos los tipos de *wavelet* y el esquema BPSK. Por tanto, estos dos esquemas son completamente equivalentes cuando el factor *roll off* de BPSK es uno, pues de esta forma tienen la misma eficiencia espectral.

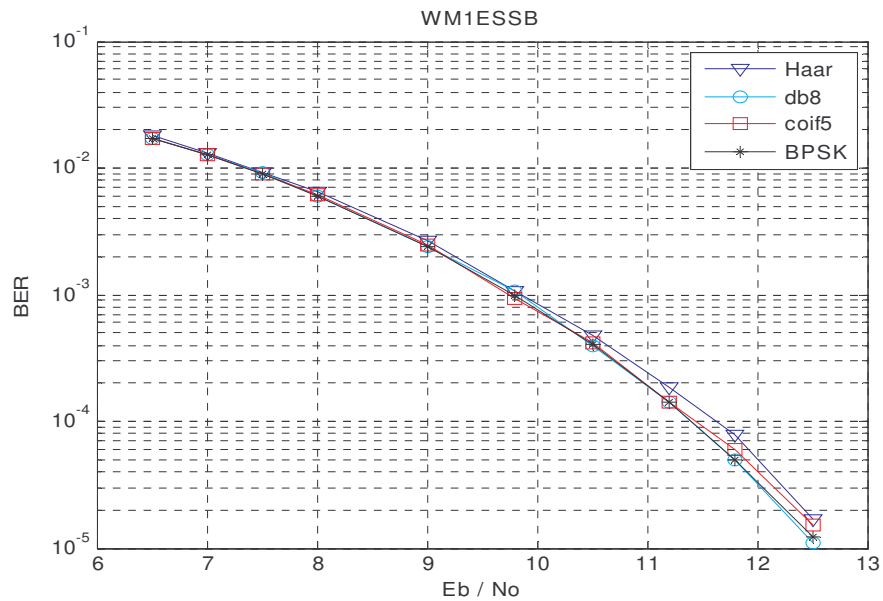


Figura 5.12. Desempeño del esquema *WM1ESSB* para varios tipos de *wavelet*.

Modulación wavelet a escala única, banda lateral única, de 4 estados lineales (apéndice A3): Figura 5.13.

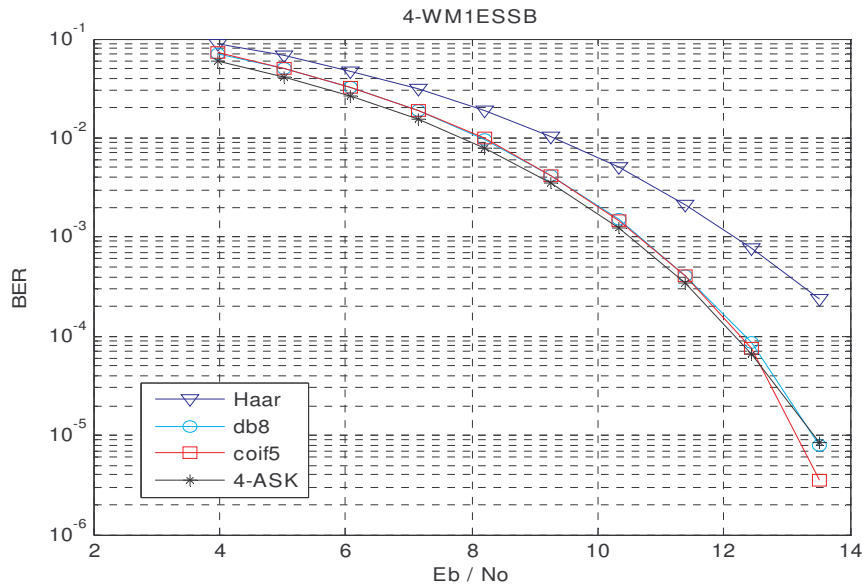


Figura 5.13. Desempeño del esquema 4-*WM1ESSB* para varios tipos de *wavelet*.

En la figura 5.13. se observa una baja en el desempeño de la *wavelet* de Haar respecto al esquema de referencia, 4-ASK, de aproximadamente 1.5 dB. Mientras que las demás *wavelets* con mayor número de momentos de desvanecimiento presentan el mismo comportamiento que el sistema 4-ASK. Por tanto, se tiene que estas dos técnicas son equivalentes cuando el factor de *roll off* de 4-ASK es igual a la unidad, siempre y cuando la *wavelet* tenga más de cuatro momentos de desvanecimiento.

Modulación wavelet a escala única, banda lateral única, de 8 estados lineales (apéndice A3): Figura 5.14.

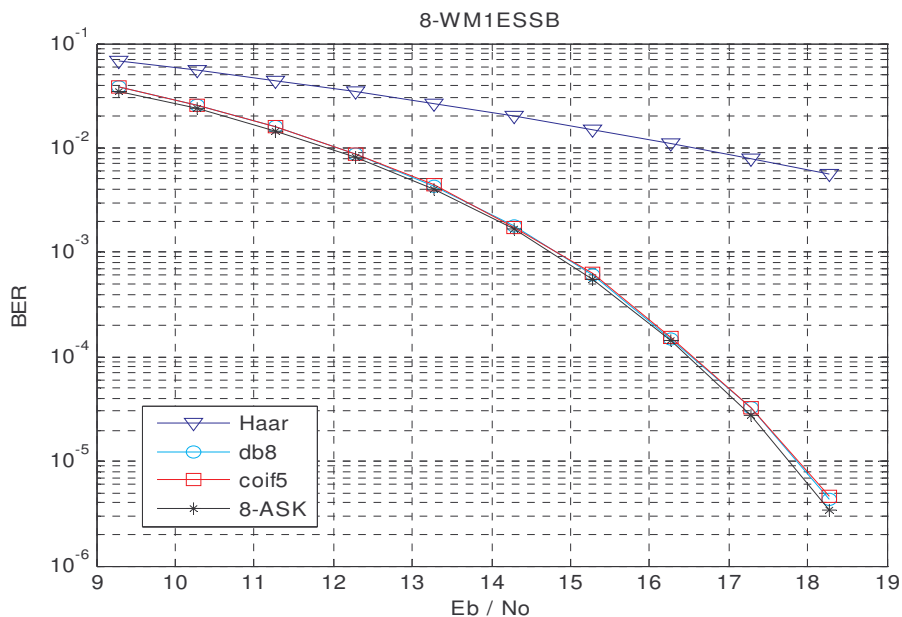


Figura 5.14. Desempeño del esquema 8-*WM1ESSB* para varios tipos de *wavelet*.

En la figura 5.14. se observa una sensible baja en el desempeño de la *wavelet* de Haar que la hace prácticamente inutilizable, mientras que la *wavelet* db2 experimenta una baja de aproximadamente 1 dB respecto al resto del grupo. Las demás *wavelets* presentan un comportamiento similar al del esquema 8-ASK en cuanto a tasa de error y eficiencia espectral (con un factor *roll off* de uno en el sistema 8-ASK).

Modulación wavelet a escala única, doble banda lateral, de 4 estados en cuadratura (apéndice A4): Figura 5.15.

En la figura 5.15. se observa una ligera baja en el desempeño de la *wavelet* de Haar (alrededor de 0.75 dB) respecto al resto del grupo, cuyo comportamiento es similar al esquema QPSK. La diferencia fundamental entre estos dos esquemas de modulación es la eficiencia espectral, la cual es superior en QPSK por lo menos dos veces al esquema 4Q-WM1EDSB.

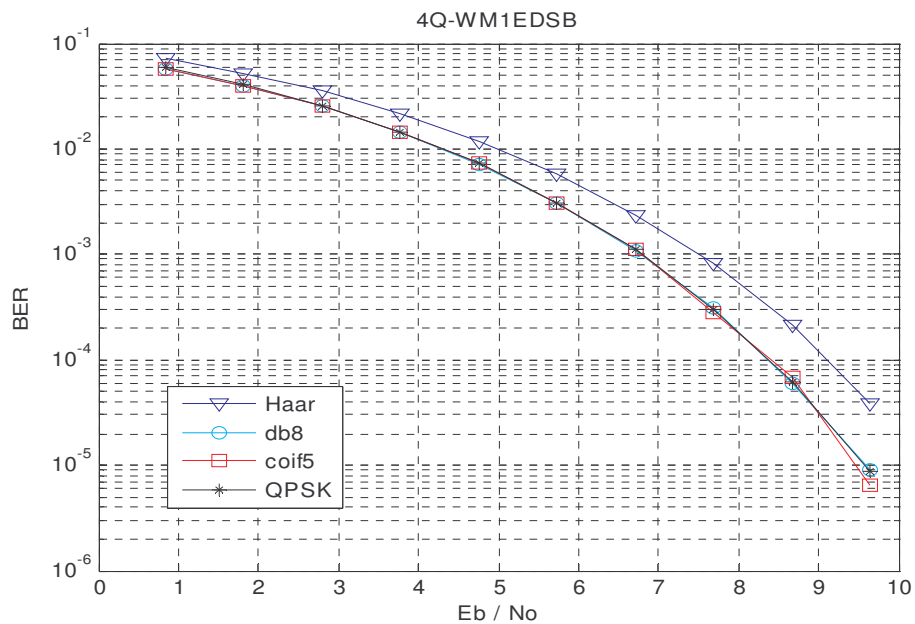


Figura 5.15. Desempeño del esquema 4Q-WM1EDSB para varios tipos de *wavelet*.

Modulación wavelet a escala única, doble banda lateral, de 16 estados en cuadratura (apéndice A4): Figura 5.16.

En la figura 5.16. se observa una baja algo más fuerte en el desempeño de la *wavelet* de Haar que en el caso anterior (alrededor de 1 dB) respecto al resto del grupo. Las demás *wavelets* presentan un desempeño igual al esquema 16-QAM. La diferencia fundamental entre estos dos esquemas de modulación es nuevamente la eficiencia espectral, cuyo valor favorece claramente al esquema tradicional.

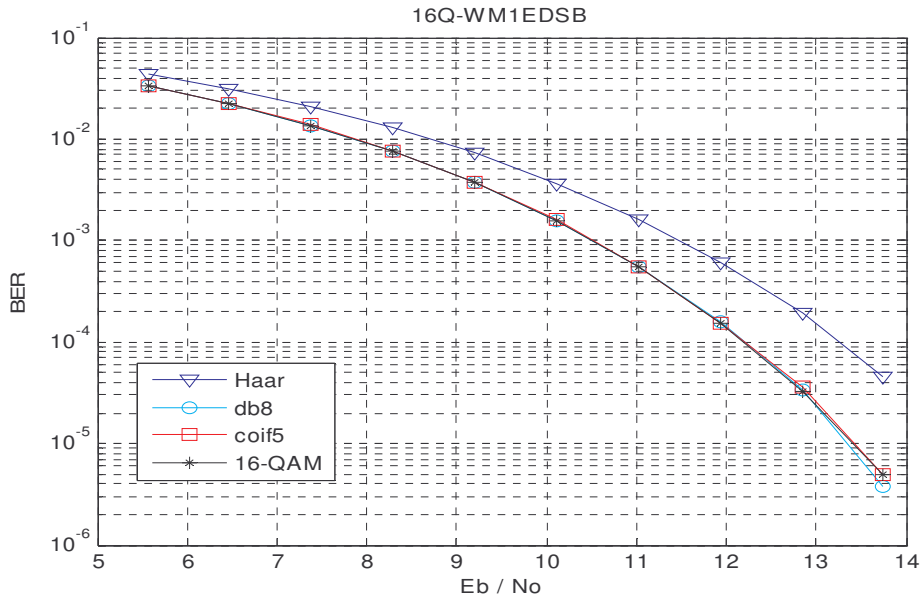


Figura 5.16. Desempeño del esquema 16Q-WM1EDSB para varios tipos de *wavelet*.

Modulación *wavelet* a escala única, doble banda lateral, de 64 estados en cuadratura (apéndice A4): Figura 5.17.

En la figura 5.17. se advierte una baja notoria en el desempeño de la *wavelet* de Haar respecto al esquema 64-QAM (aproximadamente 2.2 dB) y una baja de 0.5 dB de la *wavelet* db2 respecto al mismo esquema. El resto del grupo experimenta un comportamiento similar al de la técnica tradicional en cuanto a la *BER*, pero un comportamiento inferior en cuanto a la eficiencia espectral.

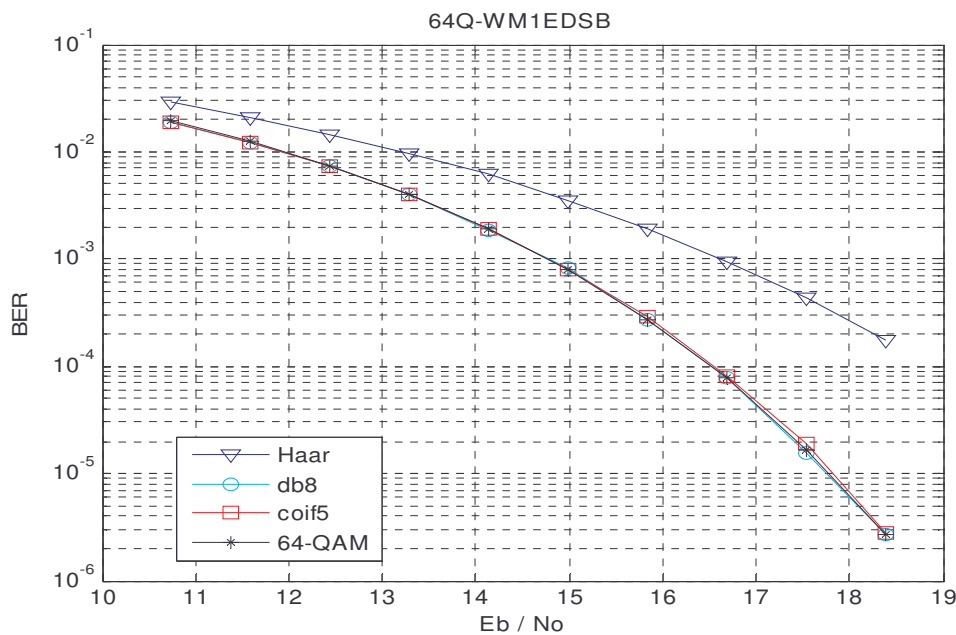


Figura 5.17. Desempeño del esquema 64Q-WM1EDSB para varios tipos de *wavelet*.

Modulación wavelet multi-escala, banda base, binaria (apéndice A5): Figura 5.18.

En la figura 5.18. se observa un comportamiento idéntico entre todos los tipos de *wavelet* y una similitud total con el esquema de transmisión banda base tradicional. La eficiencia espectral del sistema tradicional es siempre superior a la de *WMMSBB*, aunque son parecidas cuando el factor de *roll off* es igual a uno.

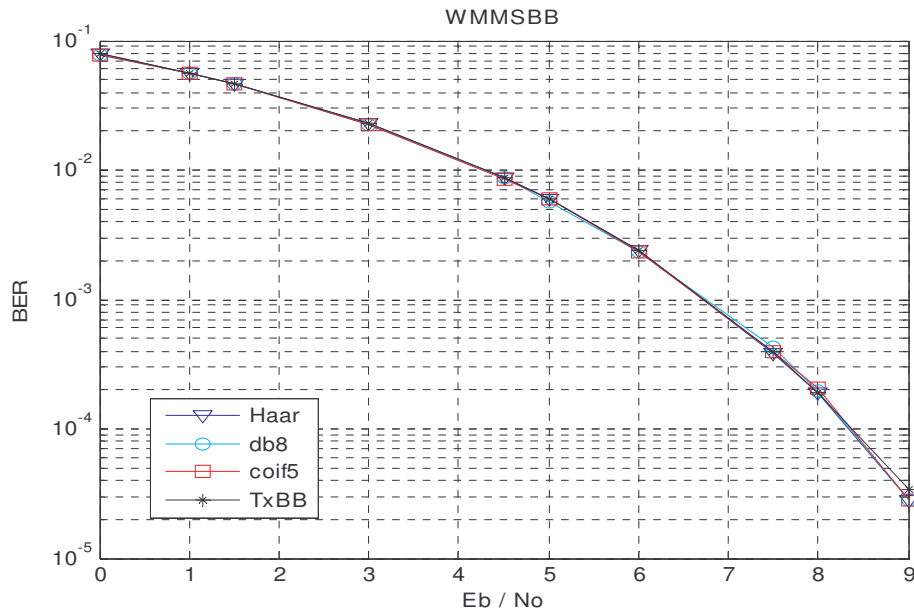


Figura 5.18. Desempeño del esquema *WMMSBB* para varios tipos de *wavelet*.

Modulación wavelet multi-escala, banda lateral única, binaria (apéndice A6): Figura 5.19.

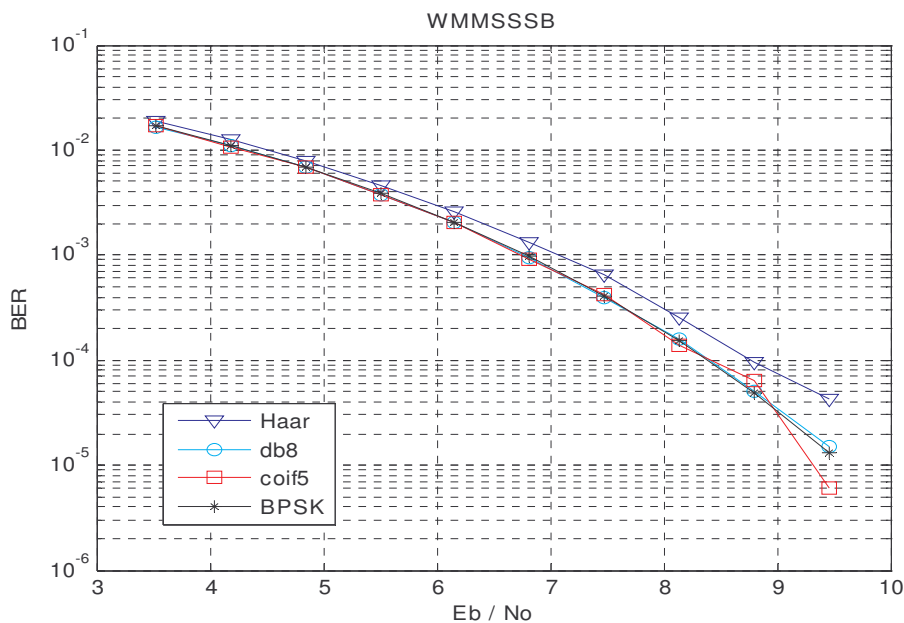


Figura 5.19. Desempeño del esquema *WMSSSB* para varios tipos de *wavelet*.

En la figura 5.19. se observa una ligera merma en el desempeño de la *wavelet* de Haar en relación al resto de *wavelets* (0.3 dB). El rendimiento de este esquema de modulación es idéntico al de un sistema BPSK. En cuanto a la eficiencia espectral, los esquemas son equivalentes cuando el factor *roll off* de BPSK es 0.142, lo cual indica un comportamiento superior de la modulación *wavelet* si se tiene en cuenta que los factores de *roll off* típicos oscilan alrededor de 0.5.

Modulación wavelet multi-escala, banda lateral única, de 4 estados lineales (apéndice A7):
Figura 5.20.

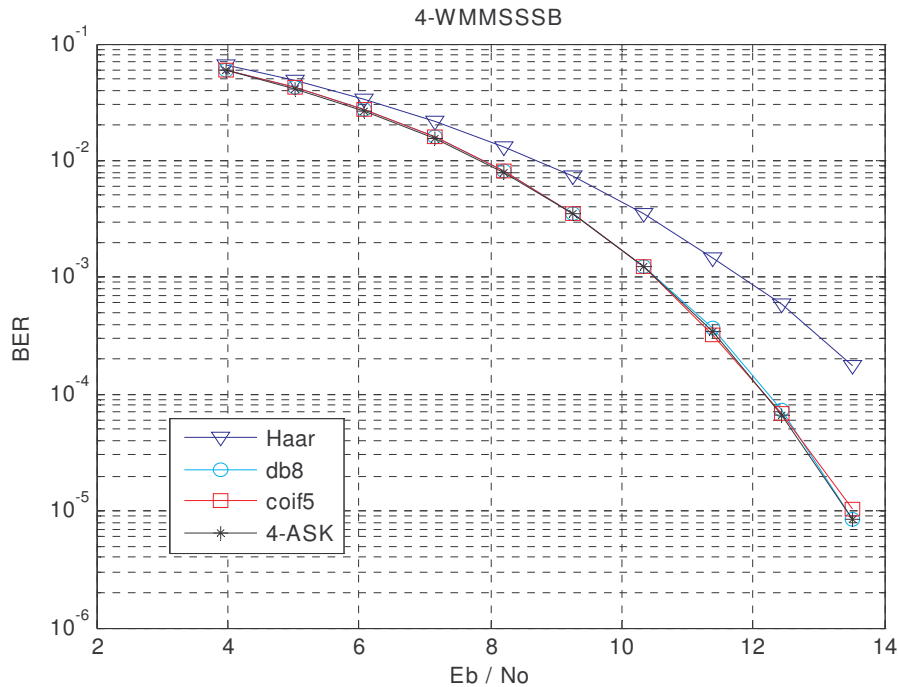


Figura 5.20. Desempeño del esquema 4-WMMSSB para varios tipos de *wavelet*.

En la figura 5.20 se verifica un notorio alejamiento de la *wavelet* de Haar respecto al grupo, el cual, por su parte, evidencia un comportamiento idéntico al esquema 4-ASK, pero esta vez, con un mejor desempeño de la eficiencia espectral (asumiendo valores estándar para el factor de *roll off*).

Modulación wavelet multi-escala, banda lateral única, de 8 estados lineales (apéndice A7):
Figura 5.21.

En la figura 5.21. se observa que la *wavelet* de Haar se hace inutilizable en este esquema, mientras que la *wavelet* db2 entrega un menor desempeño que las demás *wavelets*. El comportamiento del esquema con las otras *wavelets* es equivalente al de un sistema 8-ASK, pero con una eficiencia espectral superior.

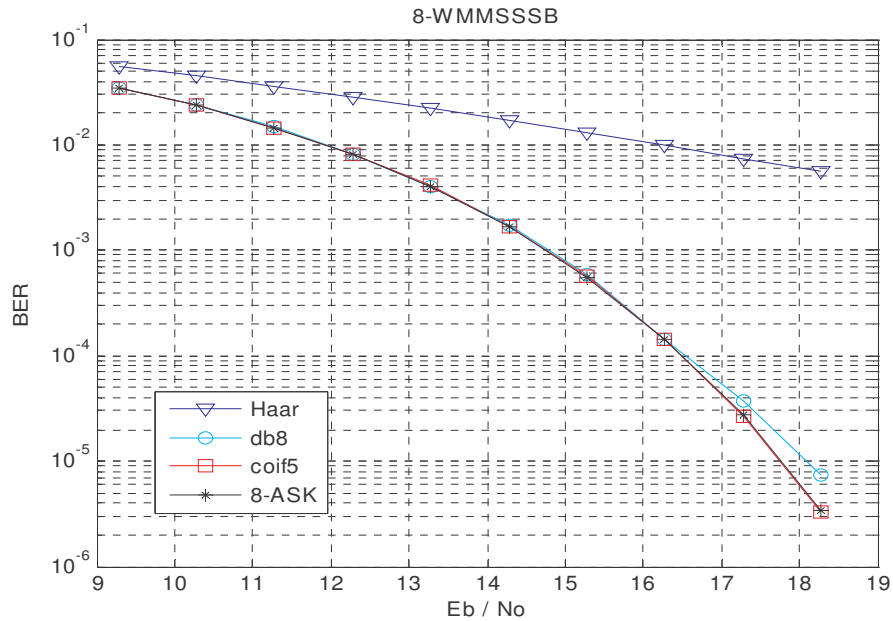


Figura 5.21. Desempeño del esquema 8-WMMSSSB para varios tipos de *wavelet*.

Modulación wavelet multi-escala, doble banda lateral, de 4 estados en cuadratura (apéndice A8): Figura 5.22.

En la figura 5.22. se observa una desviación de alrededor de 1 dB de la *wavelet* de Haar respecto al resto, cuyo comportamiento es idéntico a QPSK. La eficiencia espectral de los dos esquemas es aproximadamente la misma cuando el factor de *roll off* de QPSK es uno, de lo contrario, el esquema tradicional es siempre superior en este aspecto.

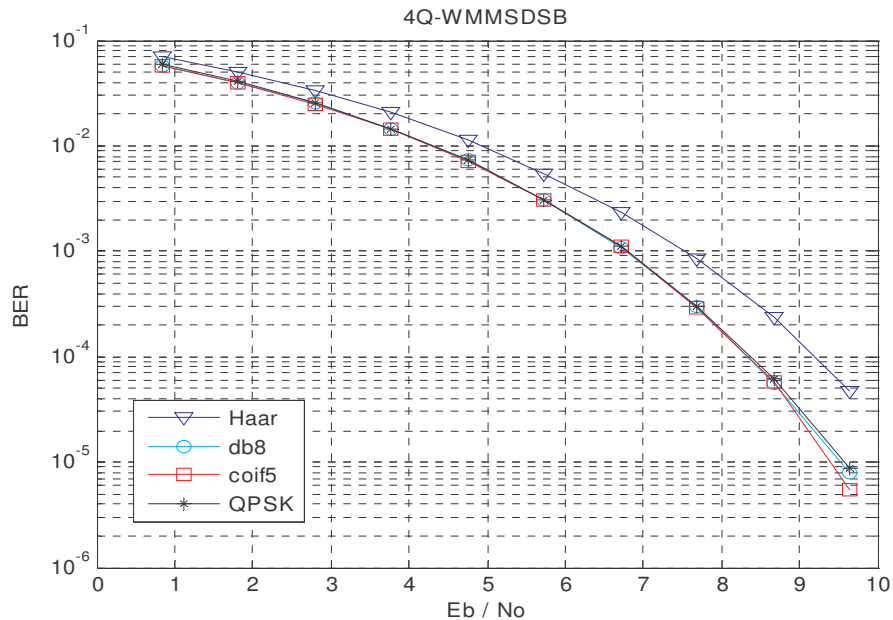


Figura 5.22. Desempeño del esquema 4Q-WMMSSSB para varios tipos de *wavelet*.

Modulación wavelet multi-escala, doble banda lateral, de 16 estados en cuadratura (apéndice A8): Figura 5.23.

En la figura 5.23 se ve claramente la baja de rendimiento de la *wavelet* de Haar con relación al grupo restante (alrededor de 2 dB). Para las demás *wavelets*, el comportamiento es equivalente al esquema 16-QAM, con una ligera superioridad del último en cuanto a eficiencia espectral.

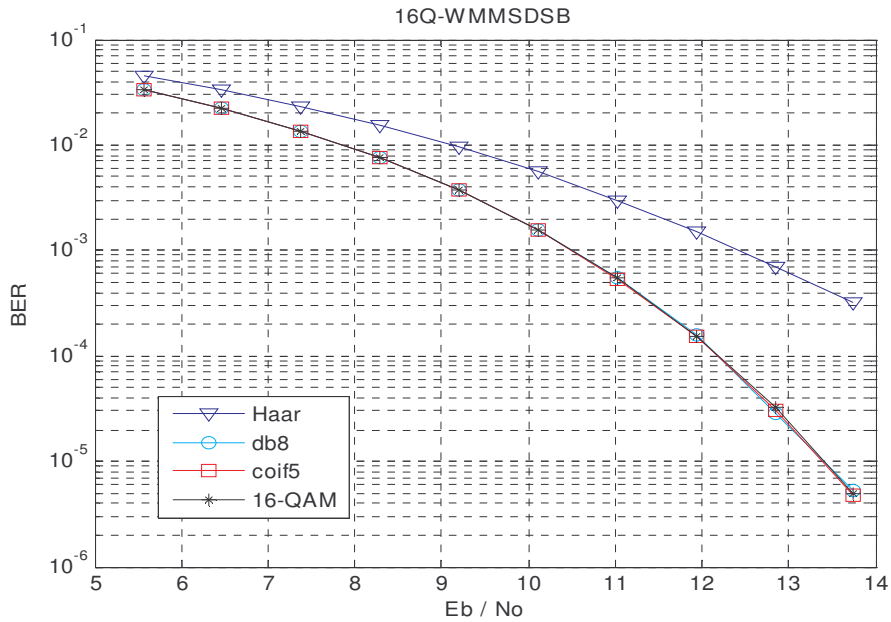


Figura 5.23. Desempeño del esquema 16Q-WMMSDSB para varios tipos de *wavelet*.

Modulación wavelet multi-escala, doble banda lateral, de 64 estados en cuadratura (apéndice A8): Figura 5.24.

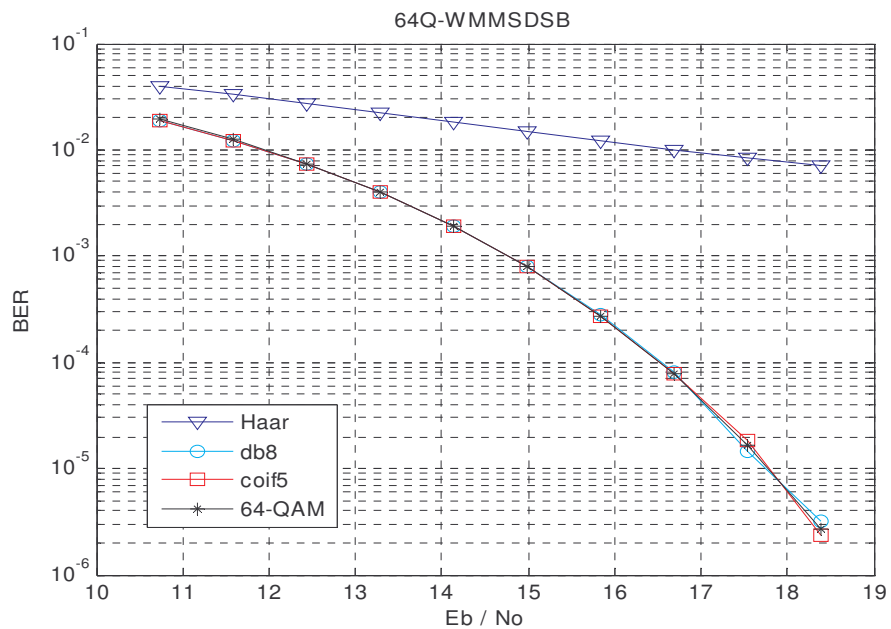


Figura 5.24. Desempeño del esquema 64Q-WMMSDSB para varios tipos de *wavelet*.

En la figura 5.24 se observa que la *wavelet* de Haar se vuelve inutilizable y la *wavelet* db2 presenta una baja apreciable de comportamiento respecto a las *wavelets* de mayor orden. El desempeño del sistema con estas últimas es idéntico al esquema 64-QAM, pero con una eficiencia espectral ligeramente inferior.

6. CONCLUSIONES

Las conclusiones más importantes del presente trabajo se enuncian a continuación.

1. La modulación *wavelet* presenta un buen desempeño en aquellos escenarios de comunicación donde la componente D.C. del mensaje es un aspecto problemático (por ejemplo en las redes de área local), ya que la señal modulada siempre anula dicha componente con total independencia de la secuencia mensaje a enviar. En otras palabras, las secuencias repetitivas y demás secuencias que causan problemas en otras técnicas de modulación en banda base, no generan inconvenientes al usar modulación *wavelet*, con lo que se elimina la necesidad de implementar dentro del diseño dispositivos para transformar las secuencias problemáticas en otras menos problemáticas (Scramblers).
2. En los esquemas de modulación *wavelet* binarios no hay una diferencia apreciable en el desempeño entre las distintas familias de *wavelet* utilizadas, pues todas entregan prácticamente los mismos resultados.
3. En los esquemas de modulación *wavelet* M-arios con constelación lineal, el tipo de *wavelet* es un factor determinante en el desempeño del sistema de comunicación, pues las *wavelets* con suficientes momentos de desvanecimiento (5 ó más) presentan un buen comportamiento, muy parecido al teórico, mientras que las *wavelets* con pocos momentos de desvanecimiento (Haar y db2) tienen un comportamiento bastante alejado del teórico, que empeora conforme aumenta la cantidad de símbolos en la constelación (M). Por otro lado, cuando la constelación es M -aria en cuadratura, la disminución de rendimiento en estos dos tipos de *wavelet* es mucho menos notoria, incluso para un valor mayor de M . Con esto puede decirse que el desempeño de las *wavelets* Haar y db2 es pobre cuando la distancia relativa entre los símbolos de la constelación es pequeña.
4. La modulación *wavelet* permite el uso de la técnica de transmisión en banda lateral única (SSB) debido a la distribución del espectro de la señal en banda base, el cual es prácticamente nulo en la frecuencia cero y sus alrededores. Con esto, al trasladar dicho espectro puede eliminarse fácilmente una de las bandas laterales a través de un filtro pasabanda común sin que ello represente pérdida de información.
5. No es posible transmitir en banda lateral única (SSB) una señal modulada *wavelet* M -aria con constelación en cuadratura, puesto que cada banda lateral transporta un contenido diferente de información. Con esto, la eliminación de una banda lateral representa pérdida irreversible de información.
6. Cuando se transmite una señal modulada en *wavelet* en SSB, el receptor debe estar equipado con un filtro pasabanda limitador a la entrada, seguido de un detector coherente común. Con esta configuración, el desempeño del sistema se mantiene igual al obtenido en transmisión banda base, para un mismo valor de M .

Si el receptor no tuviese incorporado dicho filtro pasabanda a la entrada, el rendimiento del sistema decaería en 3 dB respecto al sistema banda base, ya que la potencia del ruido que contamina la información sería el doble que en el caso anterior.

7. Cuando el esquema de modulación tiene incorporadas muchas etapas de filtraje, tal como ocurre con los sistemas de banda lateral única, las *wavelets* de Haar y db2 sufren un descenso en su desempeño respecto a las demás, aun cuando la constelación es binaria. Esto se debe a su menor capacidad de confinamiento de energía sobre el lóbulo principal.
8. Una desventaja de la modulación *wavelet* a escala única es el ancho de banda ocupado, el cual es por lo menos dos veces el ancho de banda del sistema tradicional en banda base (exactamente el doble cuando el factor de *roll off* del sistema tradicional es igual a uno). Por tanto, la eficiencia espectral que puede lograr dicho esquema, en el mejor de los casos, es tan solo la mitad de la eficiencia de un sistema banda base tradicional, y exactamente igual a la de un sistema M-ASK, cuando la WM utiliza la técnica SSB.
9. La modulación *wavelet* multi-escala es una versión mejorada de la modulación *wavelet* a escala única, ya que reúne todas las bondades de dicho esquema (mantiene el mismo comportamiento frente al ruido y conserva la nulidad espectral alrededor de la frecuencia cero), pero ocupando un ancho de banda considerablemente menor; todo esto a cambio de una mayor complejidad en el diseño del sistema.

Trabajos futuros:

- Definir un método eficiente para recuperación de sincronismo a nivel de símbolo en una señal modulada en *wavelet*. Esto es, definir un mecanismo que permita recuperar con exactitud temporal las muestras de la señal modulada a partir de la señal continua que llega al receptor. Una característica que puede ayudar a lograr este cometido es el hecho que el espectro de la señal modulada en *wavelet* siempre presenta una fuerte componente en la tasa de símbolo, independientemente del mensaje enviado.
- Evaluar el comportamiento de la modulación *wavelet* multi-escala en diversos tipos de canal distintos al canal AWGN puro. Con esto se tendría una visión más amplia del desempeño del esquema de modulación propuesto en ambientes de comunicación hostiles y variables en el tiempo.
- Evaluar un esquema de modulación multi-escala con información redundante, tal como el planteado por Manglani y Bell en [3], y comparar su desempeño con el de los esquemas de modulación tradicionales con codificación de canal incorporada.
- Diseñar un esquema de modulación *wavelet* usando un tipo de constelación avanzado (por ejemplo, una constelación con codificación trellis), para lograr un mejor comportamiento con el menor consumo de potencia posible.

- Considerar el uso de alguno de los esquemas de modulación *wavelet* presentados aquí para implementar un servicio específico de comunicación en tiempo real, definiendo criterios para establecer el tamaño de las tramas en función del retardo máximo permisible para el servicio en cuestión, el tipo de *wavelet* utilizado y el ancho de banda de canal asignado.

REFERENCIAS

- [1] WORNELL G., OPPENHEIM A. WAVELET BASED REPRESENTATIONS FOR A CLASS OF SELF – SIMILAR SIGNALS WITH APPLICATION TO FRACTAL MODULATION. IEEE Transactions on Information Theory. Vol. 38, no. 2, pp. 785-800, 1992.
- [2] PTASINSKI H., FELLMAN R. PERFORMANCE ANALYSIS OF A FRACTAL MODULATION COMMUNICATION SYSTEM. Proceedings of the SPIE Wavelet Applications Conference. Vol. 2242, pp. 78-86, 1994.
- [3] MANGLANI M., BELL A. WAVELET MODULATION PERFORMANCE IN GAUSSIAN AND RAYLEIGH FADING CHANNELS. IEEE Transactions on Communications. Vol. 47, no. 7, pp. 1422-1426, 2001.
- [4] KAVEHRAD M., HAMZEH B. BEAMING BANDWIDTH VIA LASER COMMUNICATIONS. 5th Integrated Communications, Navigation and Surveillance Technologies Conference. Pennsylvania – USA. Mayo de 2005.
- [5] JAMIN A., MAHONEN P. WAVELET PACKET MODULATION FOR WIRELESS COMMUNICATIONS. Wireless Communications and Mobile Computing Journal. Vol. 5, tema 2, pp. 1-18, Marzo de 2005.
- [6] HAYKIN S. COMMUNICATIONS SYSTEMS. Editorial John Wiley and Sons, Inc. Cuarta Edición. Ancaster – Ontario. 2000.
- [7] CARLSON B., CRILLY P., RUTLEDGE J. COMMUNICATION SYSTEMS, AN INTRODUCTION TO SIGNALS AND NOISE IN ELECTRICAL COMMUNICATION. Editorial Mc Graw Hill. Cuarta Edición. New York – USA. 2002.
- [8] NOGUCHI T., DAIDO Y., NOSSEK J. MODULATION TECHNIQUES FOR MICROWAVE DIGITAL RADIO. IEEE Communications Magazine. Vol. 24, no. 10, pp. 21-30, 1986.
- [9] BENVENUTO N., CHERUBINI G., ALGORITHMS FOR COMMUNICATIONS SYSTEMS AND THEIR APPLICATIONS. Editorial John Wiley. Primera Edición. Inglaterra 2002.
- [10] STARK H. WAVELETS AND SIGNAL PROCESSING, AN APPLICATION BASED INTRODUCTION. Editorial Springer. Aschaffenburg – Alemania. 2005.
- [11] RILLO PASTOR N. INTRODUCCION A LA TEORIA DE WAVELETS. Tesis Doctoral. Universitat de Barcelona. Departamento de Matemática Aplicada y Análisis. Barcelona – España. 2005.
- [12] NIKOLOV N., NIKOLOV Z. A COMMUNICATION SYSTEM WITH WAVELET PACKET DIVISION MULTIPLEXING IN AN ENVIRONMENT OF WHITE GAUSSIAN

NOISE AND NARROW BAND INTERFERENCES. Bulgarian Academy of Sciences. Cybernetics and Information Technologies. Vol. 5, no 1, pp. 100-114. 2005.

[13] CHIN MING F., WEN LIANG H., CHUNG LIN H. TIMING ACQUISITION FOR FRACTAL MODULATION IN GAUSSIAN WHITE AND 1/F CHANNELS. IEEE Transactions on Communications. Vol. 50, no. 4, pp. 841-844, 2004.

[14] NEWLIN H. DEVELOPMENTS IN THE USE OF WAVELETS IN COMMUNICATIONS SYSTEMS. IEEE Transactions on Communications. Vol 44, no. 4, pp. 513-519, 1998.