ANEXO 3. PRINCIPIOS BASICOS DE OFDM

1. GENERALIDADES.

OFDM utiliza los principios de FDM para permitir que uno o múltiples mensajes sean enviados sobre un único canal de radio. Mientras FDM utiliza una banda de guarda entre canales, OFDM acerca tanto como sean posibles los canales hasta superponerlos haciendo uso de frecuencias ortogonales entre sí. Matemáticamente, dos señales x y y son ortogonales en un intervalo de tiempo (t_1, t_2) si cumplen la condición de la ecuación 1, por tanto si las señales son ortogonales, no es necesario utilizar intervalos de guarda entre cada una de las subportadoras.

$$\int_{t_1}^{t_2} x(t).y(t)dt = 0 \qquad (1).$$

OFDM es una técnica de transmisión multiportadora de gran utilidad para las comunicaciones de banda ancha gracias al uso eficiente del espectro radioeléctrico. La técnica de transmisión multiportadora a diferencia de la de portadora única que transmite los datos de manera serial, transmite un flujo de datos de forma paralela en subportadoras adyacentes. Una comparación gráfica entre FDM y OFDM se puede observar en la figura 1 a) b).

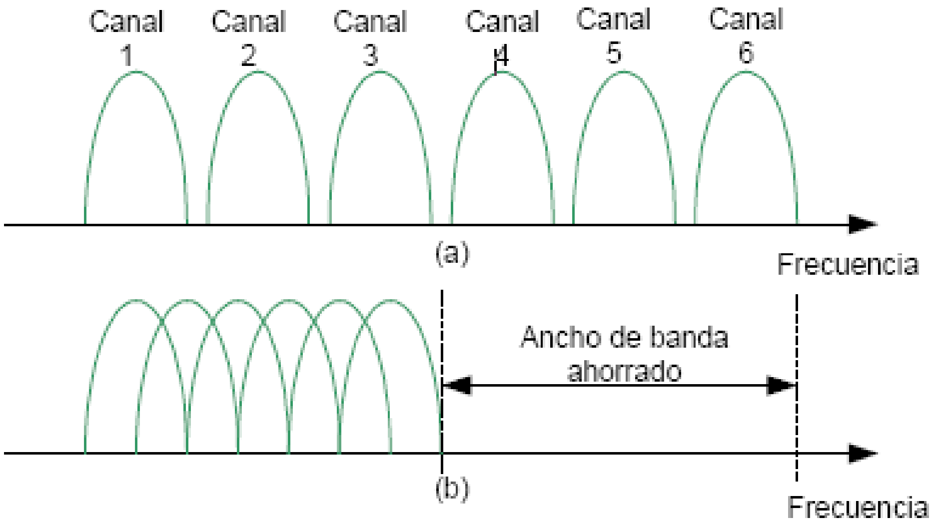

Figura 1. Técnica FDM a). Técnica OFDM b).

En la actualidad, gracias a los avances en la tecnología de procesadores digitales de señal (DSP, *Digital Signal Processors*) y dispositivos hardware reconfigurables o de lógica programable (FPGA, *Field Programmable Gate Array*) que hacen posible la utilización de la transformada rápida de Fourier (FFT, *Fast Fourier Transform*) en dispositivos electrónicos, se ha logrado la transmisión de datos en altas velocidades por medio de subportadoras paralelas reduciendo la interferencia entre ellas. Es por ésta razón que el número de subportadoras está ligado al número de puntos que utiliza la FFT (N_{FFT}). En general, OFDM se refiere a la transmisión de información mediante el uso de subportadoras contiguas y ortogonales las cuales transportan símbolos independientes que son producto de algún tipo de modulación digital como QPSK, 16 QAM o 64 QAM.

2. GENERACION DE SUBPORTADORAS.

Una señal OFDM consiste de una suma de subportadoras que son moduladas por MPSK o MQAM. Si di son los símbolos complejos QAM o PSK, Ns es el número de subportadoras, Tsym la duración del símbolo OFDM y fc la frecuencia de la portadora, entonces, un símbolo OFDM que inicia en t=ts puede ser escrito como se indica en la ecuación 2 [28]:

$$s(t) = \mathrm{Re}\left\{ \sum_{i=-\frac{N_S}{2}}^{\frac{N_S}{2}-1} d_{i+\frac{N_S}{2}} e^{j2\pi\left(f_C - \frac{i+0.5}{T_{SYM}}\right)(t-t_S)} \right\}, \quad t_S \le t \le t_S + T_{SYM}$$

(2).

$$s(t) = 0 \qquad \text{si}, t < t_S \text{ ó } t > t_S + T_{SYM}$$

La ecuación 3 representa la notación anterior en banda base compleja, en esta representación las partes real e imaginaria corresponden a las componentes en fase y cuadratura de la señal OFDM [28].

$$s(t) = \sum_{i=-\frac{N_S}{2}}^{\frac{N_S}{2}-1} d_{i+\frac{N_S}{2}} e^{j2\pi\left(\frac{i}{T_{SYM}}\right)(t-t_S)}, \quad t_S \le t \le t_S + T_{SYM}$$

(3).

$$s(t) = 0 \qquad \text{si}, t < t_S \text{ ó } t > t_S + T_{SYM}$$

Teniendo en cuenta la ecuación 2, existen subportadoras en el símbolo OFDM que no son cero en un intervalo de tiempo T, por tanto el espectro de un símbolo OFDM es una convolución de un grupo de pulsos de Dirac localizados en las frecuencias portadoras, con el espectro de un pulso rectangular, que es uno para el periodo T y cero para otro tiempo de acuerdo a la ecuación 4. La forma del espectro del pulso cuadrado es una función $\mathrm{Sinc}\,(fT)$, con cero para todas las frecuencias f múltiplos de 1/T tal como se indica en la figura 2.

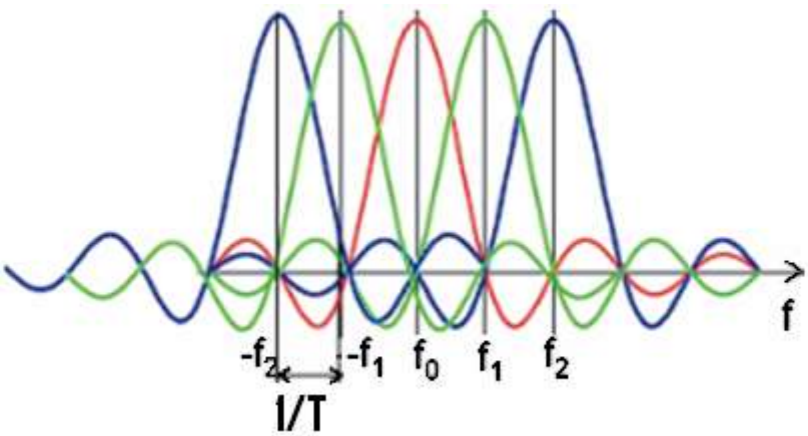

Figura 2. Espectro de las subportadoras individuales.

$$\delta(x-a)=\begin{cases}0 & \text{si } x\neq a\\ \infty & \text{si } x=a\end{cases} \quad (4).$$

Se debe tener en cuenta que $\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x-a)dx=1$.

3. SERIE Y TRANSFORMADA DE FOURIER.

Una serie de Fourier es una serie infinita que converge puntualmente a una función continua y periódica[1]. En matemáticas, una serie de Fourier es una representación de funciones periódicas a través de la descomposición de dicha función en una suma de funciones periódicas (sinusoidales) mucho más simples. Las series de Fourier tienen la forma:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos\left(\frac{2\pi}{T}nx\right)+b_n\sin\left(\frac{2\pi}{T}nx\right)\right] \quad (5).$$

Donde:

- $\omega=\frac{2\pi}{T}$
- a_0, a_n y b_n se denominan coeficientes y están dados por la siguientes ecuaciones:

$$a_0=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(x)dx \quad (6).$$

$$a_n=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(x)\cos(wnx)\,dx \quad (7).$$

$$b_n=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(x)\sin(wnx)\,dx \quad (8).$$

La transformada de Fourier (FT) es una herramienta matemática que convierte una señal continua no periódica x(t) en el dominio del tiempo, en su equivalente en el dominio de la frecuencia como se muestra en la ecuación 9, esta transformada tiene su respectiva inversa (ecuación 10) (transformada inversa de Fourier).

$$\boldsymbol{X(w)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-jwt}dt=\mathcal{F}\{x(t)\}} \quad (9).$$

$$\boldsymbol{x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(w)e^{jwt}dt=\mathcal{F}^{-1}\{X(w)\}} \quad (10).$$

[1] http://es.wikipedia.org/wiki/Serie_de_Fourier.

3.1. TRANSFORMADA DISCRETA DE FOURIER (DFT).

En un sistema digital las señales que este manejan son señales muestreadas las que a su vez son señales discretas, por tanto se contempla la utilización de la transformada discreta de Fourier de una señal muestreada.

Muestrear una señal implica tener una separación constante en el tiempo de los impulsos y por lo tanto de las muestras; a dicha separación se la llama período de muestreo (Ts) el cual es la inverso de la frecuencia de muestreo (fs), tal como se indica en la ecuación 11.

$$\mathrm{Ts} = \frac{1}{\mathrm{fs}} \qquad (11).$$

Por lo tanto, siendo la señal continua en el tiempo x(t), n el índice de las muestras de dicha señal, x(nTs) es la amplitud de la muestra n de la señal x(t) [19].

Si se define la siguiente ecuación:

$$\sigma(\mathrm{t}) = \sum_{\mathrm{n}=-\infty}^{\infty} \delta(\mathrm{t} - \mathrm{nTs}) \qquad (12).$$

Entonces, matemáticamente la señal muestreada $\tilde{\mathrm{x}}(\mathrm{t})$ se define por la multiplicación de la señal x(t) por σ(t) y su transformada de Fourier está dada por la ecuación 13 cuyo resultado se logra usando adecuadamente las propiedades lineales y de desplazamiento en el tiempo que tiene la transformada de Fourier.

$$\mathcal{F}\{\tilde{x}(t)\} = \tilde{X}(\omega) = \mathcal{F}\left\{\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_S)\delta(t - nT_S)\right\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_S)e^{-j\omega T_S n} \qquad (13).$$

Donde:

- $\mathcal{F}\{\tilde{\mathrm{x}}(\mathrm{t})\}$ es la transformada de Fourier discreta en el tiempo.

Se debe tener en cuenta que el uso de la DTFT (*Transformada de Fourier Discreta en el Tiempo, Discrete Time Fourier Transform*) como método numérico tiene dos inconvenientes básicos que son los siguientes:

- Su sumatoria infinita no es calculable.
- Según el teorema de Nyquist, la frecuencia de muestreo limita el ancho de banda de las señales [19].

Por tanto se define la DFT (*Transformada Discreta de Fourier, Discrete Fourier Transform*) la cual utiliza un número limitado de muestras en el dominio del tiempo, por tal razón se obtiene la misma cantidad de puntos en el dominio de la frecuencia.

Es así que se define $\hat{x}(\mathrm{n})$ como la versión limitada de $\tilde{\mathrm{x}}(\mathrm{t})$, cuya relación es la siguiente [19]

$$\hat{\mathrm{x}}(\mathrm{n}) = \mathrm{x}(\mathrm{nTs}) \qquad (14).$$

$$\widetilde{\mathrm{X}}(\omega)\big|_{\Omega=\mathrm{T_S}\omega} = \widehat{\mathrm{X}}(\Omega) \qquad (15).$$

Y la DFT para N_S puntos queda definida en la ecuación 16.

$$\hat{X}(k) = \sum_{n=0}^{N_S} \hat{x}\,(n) e^{-j\Omega_k n} = \sum_{n=0}^{N_S} \hat{x}\,(n) e^{-j\frac{2\pi nk}{N_S}} = \sum_{n=0}^{N_S} \hat{x}\,(n) W_N^{kn}$$

(16).

$$k = 0,1,2 \ldots., Ns - 1$$

Donde:

$$W_N = e^{-j\frac{2\pi}{Ns}} \quad (17).$$

A W_N normalmente se le denomina factor de giro (*twiddle factor*) [19]. También queda establecido el índice k para las subportadoras en el dominio de la frecuencia, y n en el del tiempo.

La relación inversa está dada básicamente por la misma relación, con la diferencia de que se cambian los índices y se adiciona un factor de compensación a la sumatoria, por tanto la ecuación 18 describe la IDFT.

$$\hat{x}(n) = \frac{1}{N_S}\sum_{k=0}^{N_S} \hat{X}\,(k) e^{j\Omega_k n} = \frac{1}{N_S}\sum_{k=0}^{N_S} \hat{X}\,(k) e^{j\frac{2\pi nk}{N_S}} = \frac{1}{N_S}\sum_{k=0}^{N_S} \hat{X}\,(k) W_N^{-kn}$$

(18).

$$n = 0,1,2 \ldots., Ns - 1$$

3.2. TRANSFORMADA RÁPIDA DE FOURIER (FFT).

El cálculo de la DFT de acuerdo con las ecuaciones 13 y 15 requiere de un número de sucesivas multiplicaciones y sumas lo cual se traduce en altos requerimientos de procesamiento o de recursos computacionales si la cantidad de las muestras es grande.

El objetivo básico de de la transformada rápida de Fourier es reducir el número de operaciones necesarias para el cálculo de la DFT a un número de cálculos dado por:

$$\frac{\boldsymbol{N(\log_2 N)}}{2}$$

Donde N es el número de muestras de la sumatoria.

La FFT tiene en cuenta el factor de giro (W) del que aprovecha su periodicidad y simetría para realizar el cálculo de la DFT de forma más rápida, la idea básica es dividir las N muestras de la sumatoria de la DFT y expresarlas como una combinación de sumatorias de N/2 muestras.

De la ecuación 15 se puede aprovechar la simetría que presenta la sumatoria de la DFT para deducir lo que se conoce como radix-2^2 FFT, donde el factor de giro es:

$$\boldsymbol{W_{\frac{N}{2}} = e^{-j\frac{2\pi}{N/2}} = e^{-j\frac{2\pi 2}{N}} = W_N^2}$$

(19).

[2] Radix-2 es uno de los algoritmos utilizados por la transformada rápida de Fourier para simplificar el cálculo de la DFT.

El recurso computacional que permite realizar éste cálculo se denomina "*butterfly*" que en el caso del algoritmo radix-2 FFT requiere una multiplicación compleja y dos sumas complejas.

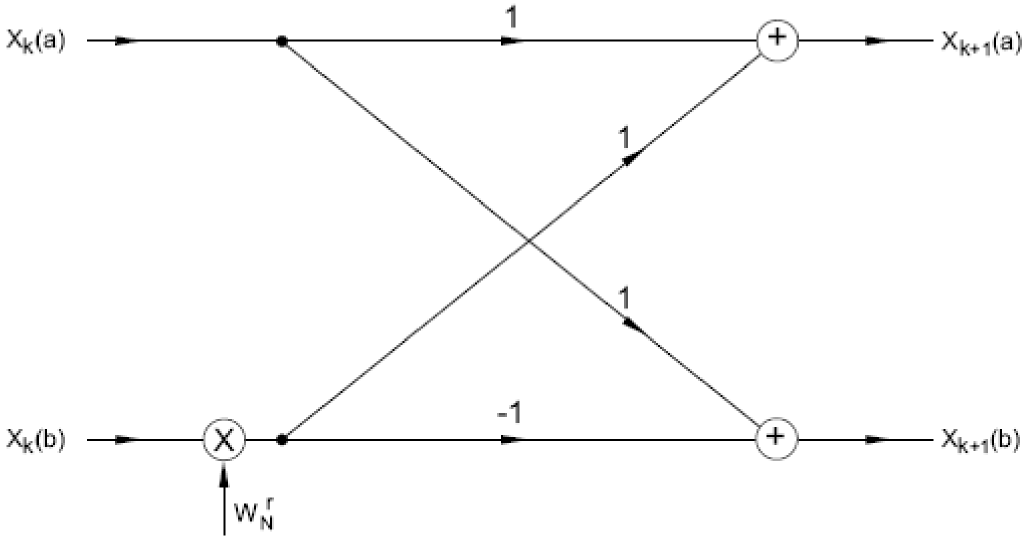

Figura 3. Estructura Radix-2 Butterfly.

4. USO DE FFT EN OFDM.

La transformada rápida de Fourier (FFT) también tiene su inversa, denotada por IFFT, la cual funciona exactamente con el mismo algoritmo. Teniendo en cuenta que esta transformada toma un número definido de muestras en el domino del tiempo y da como resultado el mismo número de puntos en el domino de la frecuencia es posible utilizarla en OFDM.

Antes de aplicar la IFFT al conjunto de puntos, es necesario hacer un mapeo del contenido de cada uno de éstos en algún tipo de modulación como QPSK o QAM; hecho el mapeo se procede a la aplicación de la IFFT para que cada unos de los símbolos sean convertidos al domino del tiempo, además de asegurar que las muestras producidas sean ortogonales entre sí [20]. Como se indicó en la ecuación 9, el trabajo con las señales discretas y sus transformadas, implica el trabajo bajo el régimen de un tiempo de muestreo Ts, que es básicamente el que pone las limitantes básicas, y por ende, principales características del sistema. Es así que el ancho de banda teórico BW es igual fs (ecuación 7), y el espaciamiento entre subportadoras, o lo que es lo mismo, ancho de banda de subportadora, está dado por la ecuación 20.

$$\Delta f = \frac{f_s}{N_{FFT}} = \frac{1}{T_{SYM}} \qquad (20).$$

Donde N_{FFT} es el tamaño de la FFT.

Recordando que T_U es el tiempo útil del símbolo. Éste valor se puede definir de la misma ecuación 20, reescribiéndola como:

$$T_u = \frac{N_{FFT}}{f_s} \qquad (21).$$

En la figura 4 se puede observar la disposición de las subportadoras dentro del rango de frecuencias. Nótese que la disposición de las subportadoras, tomando como eje d_0 (la correspondiente a la portadora de frecuencia 0 cuando está en banda base, o a la frecuencia de la portadora, en RF), van en el rango $\left[d_{\frac{N_{FFT}}{2}} \ldots \ldots d_{\frac{N_{FFT}}{2}-1}\right]$, donde fk es la frecuencia de la subportadora dk:

$$f_k = \frac{k.f_s}{N_{FFT}} + f_0, \quad k \in \left[-\frac{N_{FFT}}{2}, \frac{N_{FFT}}{2} - 1\right] \qquad (22).$$

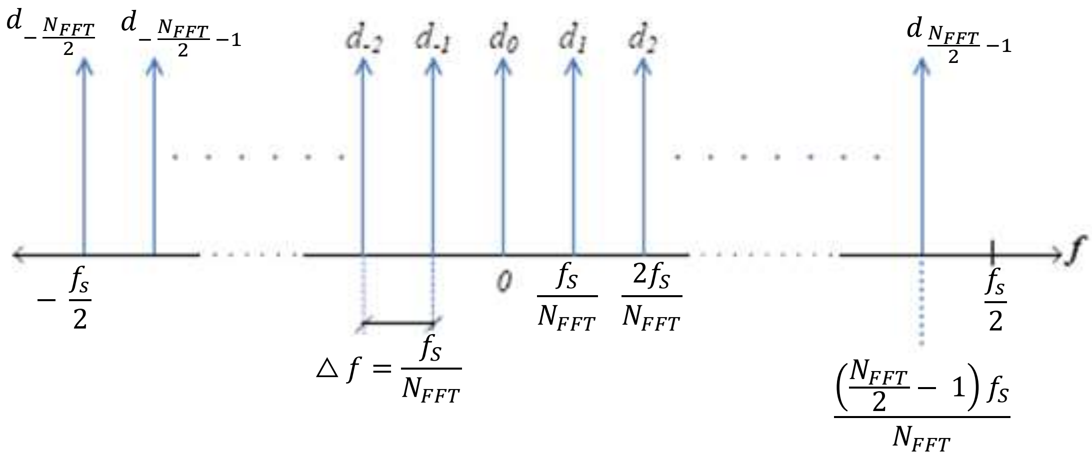

Figura 4. Disposición de los datos en los canales de frecuencia ortogonales contiguos en OFDM.

5. TRANSMISOR/RECEPTOR OFDM.

A continuación se describen las principales características de un transmisor/receptor OFDM, la etapa RF y se explicará en qué consiste el tiempo de guarda y prefijo cíclico.

5.1. TRANSMISOR OFDM.

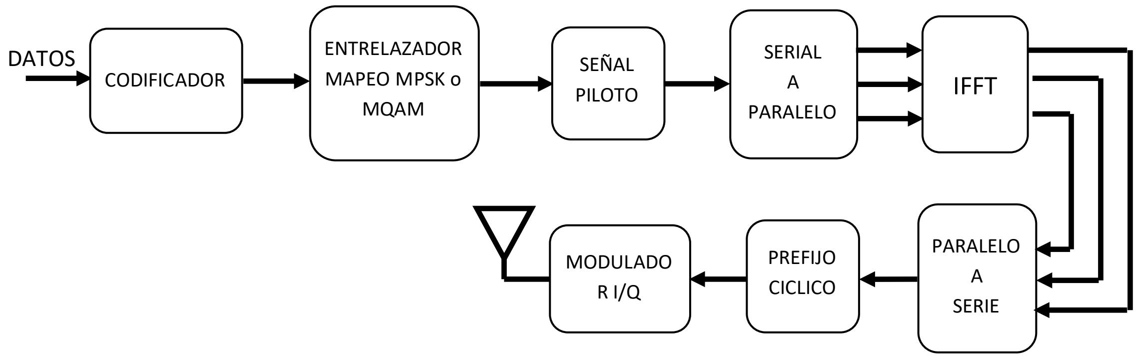

Figura 5. Transmisor OFDM.

La función del transmisor OFDM es transformar un grupo de bits en un grupo de números complejos I/Q cuyos valores corresponden generalmente a constelaciones de tipo BPSK, QPSK ó MQAM. Este proceso y los demás que sean necesarios realizar a la señal tales como la adición de códigos convolucionales o redundancia cíclica deben ser previos a la aplicación de la IFFT que es la encargada directa de realizar la modulación OFDM propiamente dicha a la cual llegan únicamente los símbolos I/Q.

Los mapas o constelaciones utilizan codificación gray, es decir, entre símbolos vecinos sólo difieren en un bit, con esto se busca que el error en un símbolo conduzca a error en un solo bit. Un ejemplo de estos mapas se muestra en la figura 6.

Otra etapa que hace parte del transmisor es la de entrelazado la cual se puede realizar antes o después del mapeo I/Q. La trama OFDM se completa con la inserción de señales piloto las cuales se ubican en frecuencias previamente establecidas y se envía sobre estas secuencias de datos conocidas o pseudoaleatorias que son codificadas con tipos de modulación de bajo orden como son BPSK o QPSK. Entre las funciones de las señales piloto están la detección de desplazamientos en fase y frecuencia y la sincronización y estimación del canal entre otras. Además de los pilotos, la utilización de bandas de guarda en frecuencia se utilizan con la finalidad de evitar ICI (*Interferencia Inter – Portadora, Inter – Carrier Interference*), que se da por el traslape con los canales adyacentes. Estas bandas de guarda en frecuencia, así como la portadora correspondiente al nivel DC, simplemente se dejan en su valor de cero, y reducen la cantidad de energía utilizada en la transmisión.

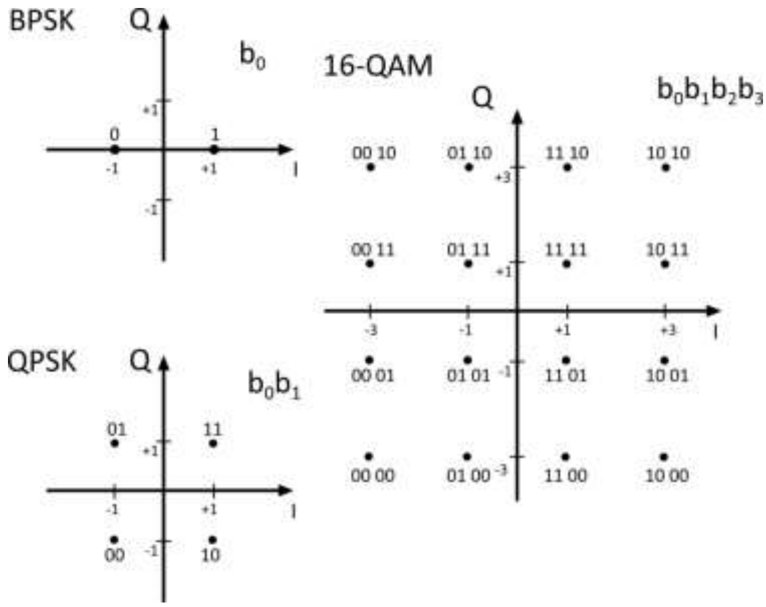

Figura 6. Constelaciones para BPSK, QPSK y 16-QAM.

Luego de realizar la IFFT se tiene la trama con todas las muestras en el domino del tiempo, por tanto es aquí donde se adiciona el prefijo cíclico (CP) o también conocido como intervalo de guarda (IG). En el transmisor también tiene lugar la generación del preámbulo o tramas de entrenamiento (training), que consiste en un grupo de símbolos OFDM con datos conocidos para el receptor, generados especialmente al inicio de la transmisión, y luego de cada bloque, de acuerdo a lo que se encuentre configurado. Su principal objetivo es el realizar la sincronización, pero también puede servir para control automático de ganancia (AGC) y estimación del canal. Después de insertar el prefijo cíclico, la señal proveniente del modulador OFDM la cual está en banda base, es mezclada con la frecuencia necesaria para la transmisión. Esta implementación puede ser realizada con técnicas analógicas o digitales, realizando ambas la misma operación, sin embargo el desempeño de la modulación digital tiende a ser más precisa.

5.2. RECEPTOR OFDM.

El receptor se encarga de recibir la señal en forma compleja por medio de los canales I y Q (en fase y en cuadratura) para realizar el trabajo de demodulación. La complejidad en su conjunto dependerá mucho de todas las etapas adicionales que hayan sido contempladas en la parte del transmisor. A la señal recibida normalmente se le extrae el (CP) o intervalo de guarda, luego de esto realiza la conversión de las muestras de serie a paralelo para posteriormente convertirlas del dominio del tiempo al domino de la frecuencia con la aplicación de la FFT. Ya en el domino de la frecuencia estas señales son transformadas nuevamente a un flujo serial para luego realizar la demodulación I/Q de acuerdo al tipo de modulación utilizado en el transmisor (B-PSK, Q-PSK o M-QAM), el desentrelazado y la detección y corrección de errores que por lo general utiliza un decodificador de Viterbi.

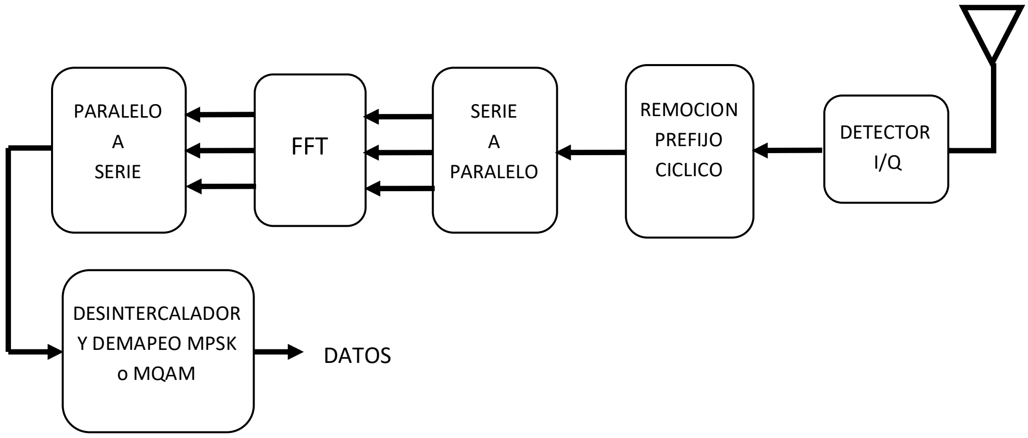

Figura 7. Receptor OFDM.

6. TIEMPO DE GUARDA Y PREFIJO CICLICO.

El tiempo de guarda o intervalo de guarda (GI) se refiere a aquel período que se deja entre símbolos OFDM consecutivos y consiste en una copia de la parte final del símbolo, este proceso también es conocido como prefijo cíclico. Esta técnica tiene la finalidad de evitar la interferencia intersímbolo (ISI) e interportadoras (ICI) en canales multitrayectoria. De acuerdo a la teoría, para cumplir con estos objetivos, su longitud debe ser mayor al máximo retardo introducido por el canal.

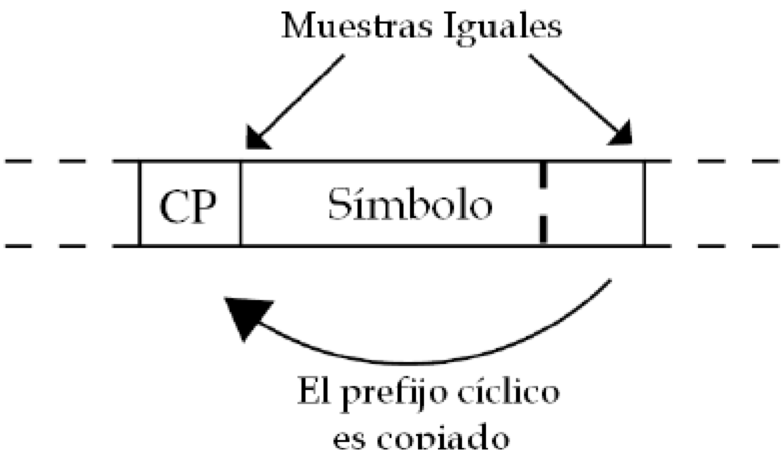

Figura 8. Prefijo cíclico o intervalo de guarda del símbolo OFDM.

7. VENTANAS.

En un sistema OFDM, el uso del pulsos rectangulares hace que entre cada par de símbolos haya una transición abrupta, lo que produce un aumento en el nivel de los lóbulos laterales localizados fuera del espectro principal, aumentando con esto la interferencia hacia canales adyacentes, para evitar este problema se emplean ventanas temporales al comienzo y al final de cada símbolo, las mismas permiten aumentar o disminuir en forma gradual la potencia de la señal fuera de la banda de interés.

Para hacer que el espectro decrezca rápidamente, se aplican las ventanas a la señal OFDM. El estándar no especifica el tipo de ventana pero se incluye un ejemplo utilizando la siguiente función:

$$w_T(t) = \begin{cases} sin^2\left(\frac{\pi}{2}\left(0.5 + \frac{t}{T_{TR}}\right)\right) & para\ \left(-\frac{T_{TR}}{2} < t < \frac{T_{TR}}{2}\right) \\ 1 & para\ \left(\frac{T_{TR}}{2} \leq t < T - \frac{T_{TR}}{2}\right) \\ sin^2\left(\frac{\pi}{2}\left(0.5 + \frac{t-T}{T_{TR}}\right)\right) & para\ \left(T - \frac{T_{TR}}{2} < t < T + \frac{T_{TR}}{2}\right) \end{cases} \quad (23).$$

La figura 9 muestra la posibilidad de extender la función de ventanas a más de un periodo FFT (T_{FFT}), además de mostrar las transiciones suavizadas gracias a la aplicación de dicha función, tal como se ejemplifica en la ecuación 23.

Donde T_{TR} es el periodo de caída de la ventana.

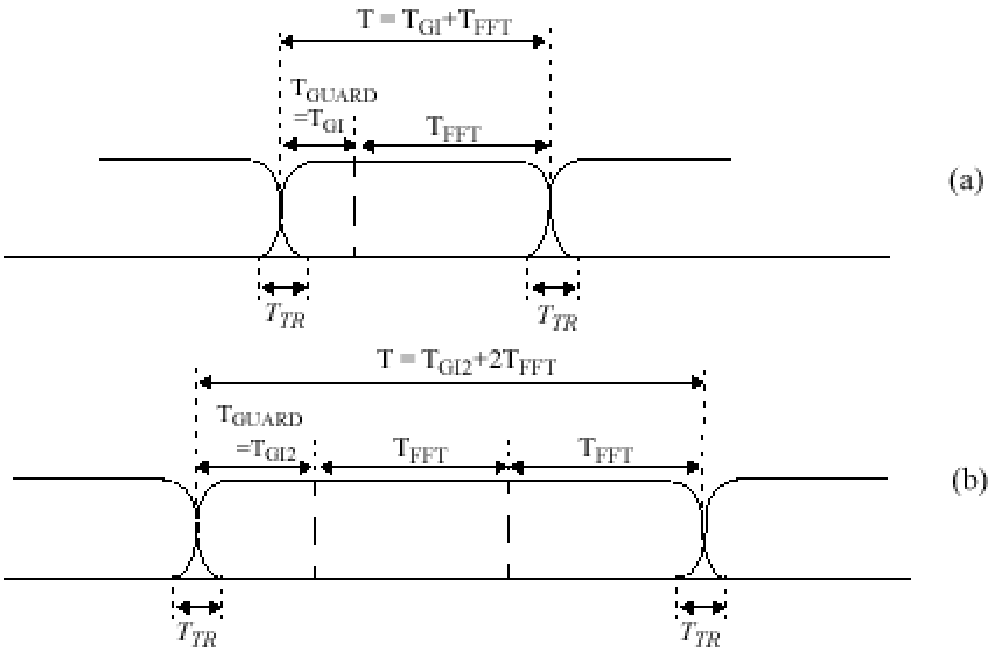

Figura 9. Trama OFDM con intervalo de guarda y ventanas a) para una recepción b) para dos recepciones de periodo FFT.

8. VENTAJAS Y DESVENTAJAS DE OFDM.

8.1. VENTAJAS.

- Protección contra desvanecimiento selectivo de las portadoras debido a la utilización de un código convolucional y del entrelazador.
- Mayor robustez frente al desvanecimiento por multitrayecto respecto a los sistemas de portadora única.
- Es menos susceptible a la interferencia entre símbolos (ISI) debido a la utilización del intervalo de guarda lo que hace que la señal sea más resistente.
- Puede utilizar diferentes tipos de modulación y tasas de codificación dependiendo de la cantidad de ruido existente en el canal.

- Permite la implementación digital gracias a la utilización de la FFT/IFFT.
- Debido al traslape de las subportadoras logra incrementar notablemente la eficiencia espectral.
- Debido a las portadoras piloto se facilita la sincronización y ecualización en el lado del receptor.

8.2. DESVENTAJAS.

- El corrimiento en frecuencia de las subportadoras trae consigo la pérdida de ortogonalidad lo cual conlleva a una degradación de la calidad del enlace y a que las subportadoras interfieran entre sí causando el fenómeno conocido como interferencia entre portadoras (ICI).
- OFDM necesita varios símbolos para lograr sincronizarse tanto en tiempo como en frecuencia.