

## ANEXO B. TRANSITORIOS EN LÍNEAS

Es muy común el uso de líneas de transmisión para propagar pulsos que codifican información. Un tren periódico de pulsos se puede representar mediante una serie de Fourier que es una superposición de ondas armónicas (un pulso no periódico requiere una integral de Fourier, que también representa una superposición de ondas armónicas).

Es posible entonces analizar el proceso para cada frecuencia y finalmente superponer los resultados, ya que las ecuaciones diferenciales que describen el comportamiento de las líneas de transmisión son lineales. Este análisis se hace entonces en el dominio de la frecuencia, sin embargo, en muchos casos es más instructivo analizar el comportamiento de la señal completa sin descomponerla por Fourier. Este análisis se hace en el dominio del tiempo.

### 1. DIAGRAMAS DE MALLA DE BEWLEY

Se considera una línea sin pérdidas que conecta una batería de impedancia interna resistiva  $R_s$  a una resistencia de carga  $R_L$ . En el instante  $t=0$  se cierra el interruptor que conecta el generador a la línea como se observa en la siguiente figura:



Figura 1. Línea sin pérdidas conectada a una batería

La onda inicial o de arranque “ve” solamente la serie de  $R_s$  y  $Z_0$ . Entonces la corriente para  $z = -l$  y  $t = 0^+$  es:

$$I(-l, 0^+) = I_0 = V_s / (R_s + Z_0) \quad (1)$$

y la tensión inicial es:

$$V(-l, 0^+) = V_0 = I_0 Z_0 = V_s Z_0 / (R_s + Z_0) \quad (2)$$

Después de cerrar el interruptor las ondas  $i^+ = I_0$  y  $v^+ = V_0$  se propagan hacia la carga con la velocidad  $v_p = 1/\sqrt{LC}$ . Como esta velocidad es finita, el frente de ondas tarda  $t_1 = l/c$  en llegar a la carga e interactuar con ella. En ese momento la tensión y corriente en la carga serán la superposición de las ondas incidente y la reflejada:

$$V(0, t_1) = v_I + v_R = (1 + \rho_L)V_0 \quad (3)$$

$$I(0, t_1) = i_I + i_R = (1 - \rho_L)I_0 \quad (4)$$

Las ondas reflejadas  $i_R = \rho_L I_0$  y  $v_R = \rho_L V_0$  viajan ahora hacia el generador (las ondas incidentes siguen propagándose desde el generador hacia la carga).

En el instante  $t = 2t_1$  las ondas reflejadas llegan al generador, donde la nueva desadaptación de impedancias crea una nueva onda "reflejada" incidente:

$$V(-l, 2t_1) = v_I + v_R + v'_I = (1 + \rho_L)V_0 + \rho_S \rho_L V_0 = (1 + \rho_L + \rho_L \rho_S)V_0$$

$$I(-l, 2t_1) = i_I + i_R + i'_I = (1 - \rho_L)I_0 - \rho_S(-\rho_L I_0) = (1 - \rho_L + \rho_L \rho_S)I_0$$

Donde:

$$\rho_S = \frac{Z_S - Z_0}{Z_S + Z_0} \quad (5)$$

es el coeficiente de reflexión en el generador.

Esta nueva onda progresiva viaja hacia la carga, donde llega para  $t = 3t_1$ , instante en el que se genera una nueva onda regresiva: El proceso de reflexiones múltiples se puede ver más fácilmente mediante los diagramas de rebote o diagramas de malla de Bewley, que se muestran en la figura 2:

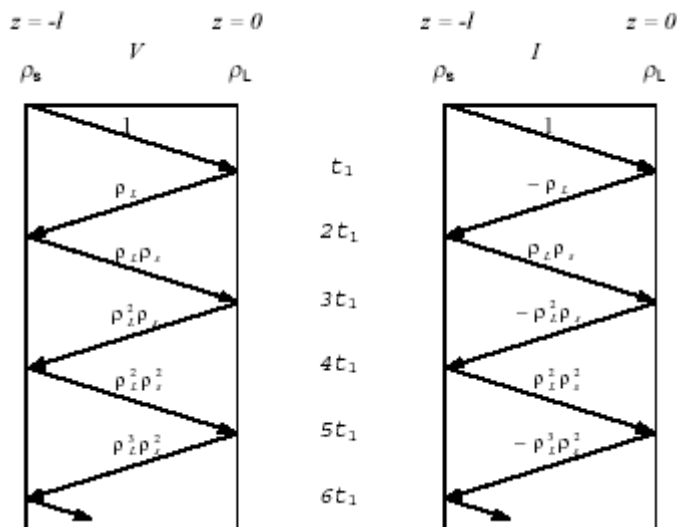


Figura 2. Diagrama de rebote

Se ve claramente cómo se forma cada serie de términos que dará el valor final de la tensión y la corriente sobre la línea después de los múltiples rebotes. Salvo en los casos de generador ideal y carga en cortocircuito o circuito abierto, en que se producen oscilaciones permanentes, como se analizó previamente, como  $|\rho| < 1$  cada término es menor que el precedente y la serie finalmente converge a un valor límite.

Por ejemplo, para una línea de  $Z_0 = 50\Omega$ , conectada a un generador de tensión de 10V con resistencia interna  $R_s = 10\Omega$  y a una carga  $R_L = \infty$  (circuito abierto) las amplitudes de las ondas progresivas que viajan por la línea luego de cerrar el interruptor, de acuerdo con las ecuaciones 1 y 2, son:

$$V_0 = \frac{Z_0 V_s}{R_s + Z_0} \approx 8.33V \quad I_0 = \frac{V_0}{Z_0} \approx 0.167A$$

Los coeficientes de reflexión son:

$$\rho_L = \frac{R_L - Z_0}{R_L + Z_0} = 1 \quad \rho_s = \frac{R_s - Z_0}{R_s + Z_0} = -0.0667$$

Realizando la serie que describe los diagramas de Bewley se pueden obtener los diagramas (tensiones en V y corrientes en A), que se muestran en la figura 3.

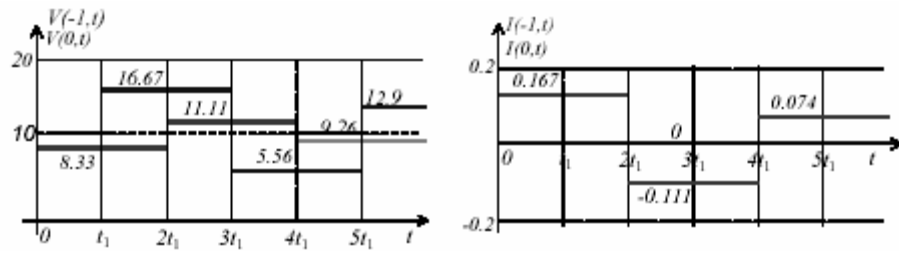


Figura 3. Diagramas de tensiones y corrientes para carga en circuito abierto

Se observa que la tensión y la corriente a la entrada de la línea oscilan tendiendo a su valor final  $V(0, \infty) = V(-l, \infty) = V_S = 10V$  que corresponde al estado estacionario (de corriente continua) donde no hay ondas viajeras en la línea.

La línea es en estas condiciones un cortocircuito y la tensión final sobre la carga es la misma que la tensión de entrada (e igual a la tensión de la fuente porque no circula corriente por estar la carga en circuito abierto). La corriente sobre la carga es siempre cero, como debe ser, y la corriente en la entrada tiende a su valor final cero.

Si se cambia la carga por un corto circuito, los coeficientes de reflexión son:

$$\rho_L = \frac{R_L - Z_0}{R_L + Z_0} = -1 \quad \rho_S = \frac{R_S - Z_0}{R_S + Z_0} = -0.667$$

Los diagramas temporales que resultan se muestran en la figura 4.

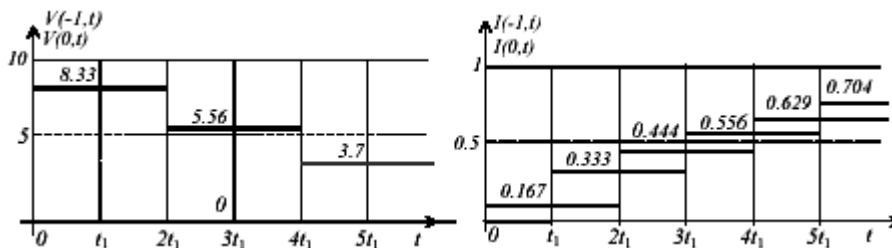


Figura 4. Diagrama de tensiones y corriente para carga en corto circuito

La tensión a la salida es siempre cero, por el cortocircuito, mientras que la entrada tiende a su valor límite nulo de corriente continua. La corriente tiende en ambos extremos de la línea a su valor límite de continua que vale:

$$I(0, \infty) = I(-l, \infty) = V_s / R_s = 1A$$

A tiempo infinito, ya no hay ondas viajeras por la línea y ésta se comporta como un cortocircuito por el que circula corriente estacionaria.

Si la carga es finita, por ejemplo de  $R_L = 20\Omega$ , los coeficientes de reflexión son:

$$\rho_L = -0.429 \quad \rho_S = -0.667$$

$V_0$  y  $I_0$  tienen los mismos valores que en el caso anterior. Los valores de tensión y corriente tienden a sus valores límite de corriente continua. Los diagramas temporales que resultan se muestran en la figura 5.

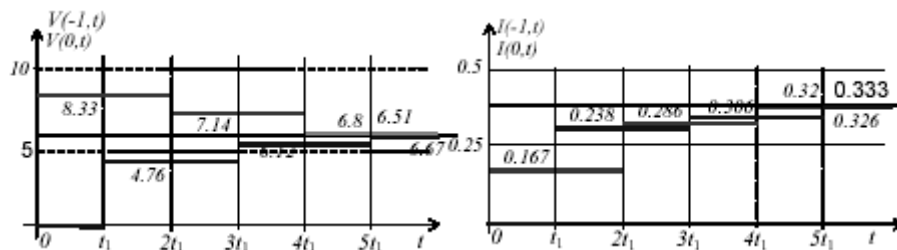


Figura 5. Diagrama de tensiones y corrientes para carga finita  $R_L = 20\Omega$

Y para una carga de  $R_L = 200\Omega$  los coeficientes de reflexión y los diagramas que resultan son los que se muestran en la figura 6.

$$\rho_L = 0.6 \quad \rho_S = -0.667$$

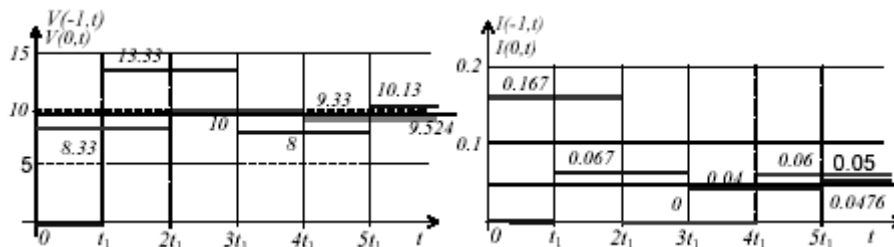


Figura 6. Diagramas de tensiones y corrientes para  $R_L = 200\Omega$

En estos dos últimos ejemplos se observa que si  $Z_L < Z_0$  la tendencia de todas las variables graficadas es monótona (continua) hacia sus valores finales, mientras que si  $Z_L > Z_0$  la tendencia es oscilatoria.

Cuando la carga es una impedancia compleja la dependencia temporal de los frentes de onda se modifica. Se puede obtener la forma de onda, de la onda reflejada, utilizando técnicas de la transformación de Laplace.

Si en lugar de trabajar con las tensiones y corrientes como funciones del tiempo se consideran sus transformadas de Laplace:

$$v_{\pm}(z,t) \leftrightarrow V_{\pm}(z,s) \quad i_{\pm}(z,t) \leftrightarrow I_{\pm}(z,s)$$

entonces se puede escribir para el coeficiente de reflexión:

$$\rho_L = \frac{v_R(0,t)}{v_I(0,t)} = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} \leftrightarrow P_L = \frac{V_R(0,s)}{V_I(0,s)} = \frac{\Xi_L - Z_0}{\Xi_L + Z_0} \quad (6)$$

de donde:

$$V_R(0,s) = \frac{\Xi_L - Z_0}{\Xi_L + Z_0} \frac{V_0}{s} \quad (7)$$

$\Xi_L$  es la transformada de Laplace de la impedancia de carga y  $V_0/s$  la transformada de Laplace de la función escalón que representa la onda incidente.

Esta expresión se invierte nuevamente por Laplace para hallar la expresión en el tiempo de la onda de tensión reflejada. Por ejemplo, en el caso de tener como impedancia de carga un circuito serie RL, en este caso  $\Xi = R + sL$ , y:

$$V_R(0,s) = \frac{\Xi_L - Z_0}{\Xi_L + Z_0} \frac{V_0}{s} = \frac{R - Z_0 + L_s}{R + Z_0 + L_s} \frac{V_0}{s} = \left[ \frac{R - Z_0}{R + Z_0} \frac{1}{s} + \frac{2Z_0}{R + Z_0} \frac{1}{s + 1/\tau} \right] V_0$$

Donde  $\tau = L/(R + Z_0)$ .

La transformada inversa de esta expresión es:

$$v_R(0,t) = V_0 \left[ \frac{R - Z_0}{R + Z_0} + \frac{2Z_0}{R + Z_0} e^{-t'/\tau} \right] \mu(t') \quad \text{con } t' = t - t_1 \quad (8)$$

Se ve que para  $t' = 0 \Rightarrow v_-(0,t_1) = V_0$  y la tensión sobre la carga en el instante del rebote duplica a la de la onda incidente, porque la inductancia serie impide el súbito incremento de la corriente, que entonces es inicialmente cero (condición de circuito abierto).

De manera similar para un circuito serie RC:

$$v_R(0,t) = V_0 \left[ 1 + \frac{2Z_0}{R + Z_0} e^{-t'/\tau} \right] \mu(t') \quad \text{con } t' = t - t_1 \quad (9)$$

Se ve que para  $t' = 0 \Rightarrow v_-(0,t_1) = \frac{R - Z_0}{R + Z_0} V_0$ , debido a que el capacitor es inicialmente

un cortocircuito y la tensión sobre la carga depende solamente de la relación  $\frac{R}{Z_0}$

Las formas de onda, de la onda reflejada, en cada uno de estos casos se representa en la figura 7, donde  $r = R/Z_0 = 0.5, 1, 2$ .

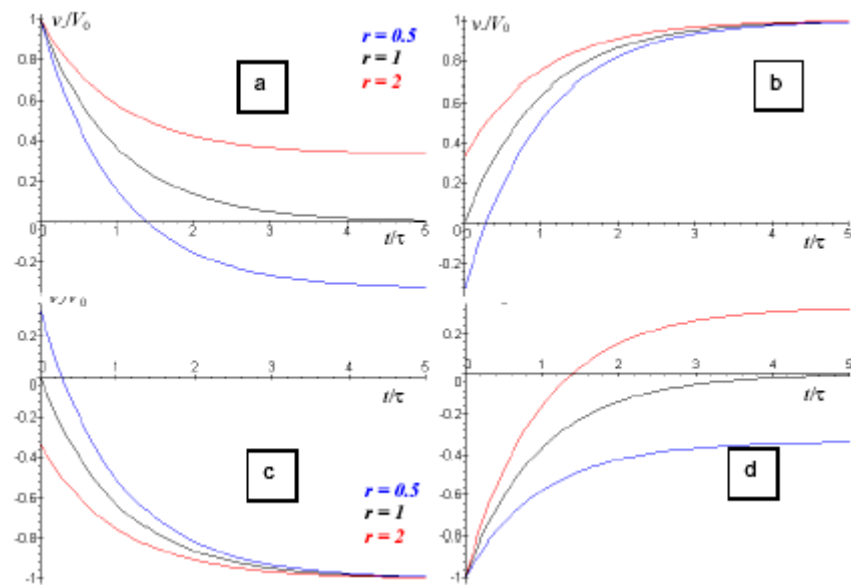


Figura 7. Onda reflejada

La gráfica a) corresponde al circuito serie RL, b) al circuito RC serie. Mediante un proceso similar se obtienen las gráficas c) y d) que corresponden a circuitos paralelos RL y RC, respectivamente.

Estas ondas viajan hacia la entrada desde el mismo instante  $t_1$  en que se generan. Las diversas formas de onda que se obtienen cuando la impedancia de carga no es resistiva pura permiten sacar conclusiones del tipo de impedancia de carga y da origen a aplicaciones técnicas.

En los ejemplos precedentes se conectó una batería a la línea. Desde el punto de vista matemático se usó una función escalón para describir la propagación de las ondas en la línea. Habitualmente en lugar de enviar un escalón se envía un pulso por la línea. Se pueden usar los resultados obtenidos ya que el pulso es equivalente a dos escalones separados en el ancho temporal del pulso, de amplitudes iguales y de signo opuesto, como se muestra en la figura:



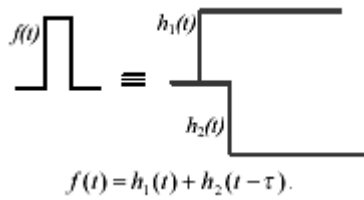


Figura 8. Equivalente de un pulso

Para analizar el comportamiento de la propagación de pulsos en una línea de transmisión, se debe comparar el tiempo de viaje a lo largo de la línea con el ancho del pulso. Si el ancho del pulso es mucho menor que el tiempo de viaje el pulso mantiene su entidad en la propagación y las formas de onda obtenidas en el ejemplo previo son aplicables. Si el ancho de pulso es comparable con el tiempo de tránsito el problema se complica, especialmente cuando hay múltiples rebotes, y es necesario un cálculo por computadora.

## 2. REFLECTOMETRÍA EN EL DOMINIO DEL TIEMPO

El comportamiento de la propagación de pulsos por una línea da la base de un método de análisis de cargas en líneas de transmisión, la reflectometría en el dominio del tiempo (TDR). Esta técnica se basa en enviar un escalón o un pulso desde el extremo del generador (adaptado a la línea, no hay rebotes a la entrada) y observar la forma de onda. Las gráficas que se muestran en la figura 9, corresponden a la pantalla de un osciloscopio que representa un caso de circuito abierto y otro de cortocircuito en el extremo de carga, con un generador prácticamente ideal ( $R_s \rightarrow 0$ ):



Figura 9. Propagación con carga en circuito abierto y corto circuito

La técnica permite hallar la longitud de línea entre el punto de observación y el sitio donde se produce la reflexión por desadaptación de impedancias (midiendo el intervalo  $\Delta t = 2L/v$  que tarda en cambiar la lectura) y la impedancia del punto de desadaptación midiendo la altura del salto  $\Delta V = V_0[1 + \rho_L(1 + \rho_S)]$  de donde se puede calcular  $\rho_L$  y por lo tanto  $Z_L$  conociendo  $\rho_S$ .

Esta técnica se puede usar para:

- Conociendo el tipo de línea, calcular su longitud. Se deja el extremo de carga en circuito abierto y se mide a la entrada el tiempo  $\Delta t$  que tarda el pulso reflejado.

Luego:  $L = v\Delta t / 2$

- Conociendo la longitud, calcular los parámetros de la línea. Se termina la línea con una impedancia resistiva conocida  $R_L$ . La velocidad de propagación se calcula a partir del tiempo de rebote:  $v = 2L/\Delta t$ . La línea se considera de pérdidas despreciables ( $Z_0$  real).

Como no hay rebotes a la entrada, la tensión en ella es:

$$v_{in} = V_0(1 + \rho_L) \Rightarrow \Delta v = v_{in} - V_0 = \rho_L V_0 \Rightarrow$$

$$\rho_L = \frac{R_L - Z_0}{R_L + Z_0} = \frac{\Delta v}{V_0} \Rightarrow Z_0 = \frac{V_0 - \Delta v}{V_0 + \Delta v} R_L \quad (10)$$

Entre otras aplicaciones, esta técnica permite detectar fallas en líneas de transmisión muy largas midiendo desde un extremo (o un punto conveniente). Se envía un pulso y se observa la forma de onda. Si se registran rebotes es señal de que hay una desadaptación de impedancias. El tiempo de rebote da la posición de (la primera) discontinuidad. La forma de onda da el tipo de desadaptación y permite inferir el tipo de fallas. El análisis de los ejemplos precedentes se puede extender a múltiples puntos de desadaptación. Hay procedimientos semi-automáticos de detección de

fallas en líneas muy largas que usan además sistemas de GPS (Global Position System) para la localización geográfica.