ANEXO C. MATRIZ DE DISPERSIÓN

Muchos sistemas que propagan energía e información pueden considerarse como un conjunto de puertos por los que entran y salen señales que transportan la energía e información. Existe un método general de descripción de sistemas lineales de n-puertos, cuando es posible establecer una relación lineal entre las señales de entrada y salida. Este método, llamado de la matriz de dispersión, es aplicable a un gran número de sistemas pasivos y activos y es de mucho uso en la descripción de circuitos de microondas.

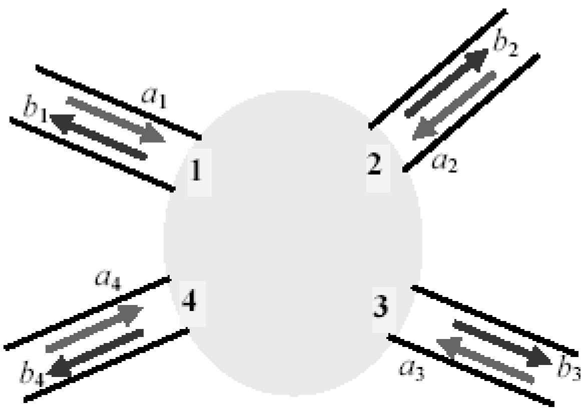

Figura 1. Sistema lineal de 4 puertos

Sea $a = [a_1, a_2, ..., a_n]^T$ el vector de entradas y $a = [b_1, b_2, ..., b_n]^T$ el vector de salidas. Estos vectores están ligados entre sí por la llamada matriz de dispersión: $b = Sa$. Los elementos S_{ij} de la matriz están relacionados con distintos parámetros que definimos a continuación. Decimos que un puerto tiene su salida adaptada cuando está conectado a una impedancia de carga que no produce onda reflejada (que en caso de existir constituiría una onda incidente sobre el puerto). Por ejemplo, si el puerto 2 tiene su salida adaptada, se tiene $a_2 = 0$. Análogamente, el puerto tiene su entrada adaptada cuando no existe onda saliente del puerto. En tal caso, para ese puerto $b_i = 0$.

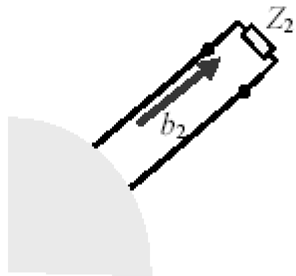

Figura 2. Puerto 2 con salida adaptada

Supongamos un sistema donde todos los puertos, salvo el primero, tienen sus salidas adaptadas. Entonces $a_i = 0$ si $i > 1$. Las ecuaciones en la descripción de la matriz de dispersión se reducen a:

$$b_i = S_{i1} a_1, i = 1,2,..., n \qquad (1)$$

de modo que S_{11} es un coeficiente de reflexión del primer puerto mientras que los S_{i1} ($i > 1$) son coeficientes de transferencia de señal que liga al entrada en el primer puerto con las salidas en los otros puertos. Se los conoce como ganancias (o pérdidas) de inserción, según que sus módulos sean mayores o menores que 1. Resulta así que los coeficientes diagonales de la matriz de dispersión S_{ii} son coeficientes de reflexión del puerto en cuestión y los coeficientes fuera de la diagonal principal S_{ij} son coeficientes de transferencia o inserción entre distintos puertos.

Muchos sistemas satisfacen también la condición de reciprocidad: $S_{ij} = S_{ji}$. Esta condición significa que la transferencia de señales entre los puertos i y j es simétrica o recíproca.

Desde el punto de vista de la potencia o energía que se propaga entre los puertos, podemos decir que, en general, para señales armónicas la potencia media que ingresa en cada puerto (potencia incidente) es proporcional a $a_i a_i^* = |a_i|^2$, mientras que la potencia media que sale de cada puerto (potencia reflejada) es proporcional a $b_i b_i^* = |b_i|^2$. Por lo tanto, la potencia media neta que ingresa a cada puerto es proporcional a $|a_i|^2 - |b_i|^2$.

Analizamos nuevamente el caso donde todos los puertos, salvo el primero, tienen sus salidas adaptadas. En tal caso,

$$b_i = S_{i1}a_1 \Rightarrow |a_i|^2 - |b_i|^2 = \left(1-|S_{11}|^2\right)|a_1|^2 - |S_{i1}|^2|a_i|^2, i > 1 \quad (2)$$

Si el sistema no tiene pérdidas ni ganancia de potencia, toda la potencia que entra debe salir, mientras que si hay pérdidas la potencia que sale debe ser menor que la que entra, de manera que para un sistema pasivo:

$$|a_i|^2 - \sum_{i=1}^{n}|b_i|^2 = |a_1|^2 - \sum_{i=1}^{n}|S_{i1}|^2|a_1|^2 \geq 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n}|S_{i1}|^2 \leq 1 \quad (3)$$

Se ve que cada sumando $|S_{i1}|^2$ representa la fracción de potencia incidente en el sistema que se propaga a cada puerto.

Vamos a ejemplificar sistemas de 1 y 2 puertos para líneas de transmisión.

1. UN PUERTO

Para ejemplificar el caso de un sistema de un único puerto, consideramos un tramo de línea de longitud *d* conectada a una impedancia de carga Z_L. Suponemos que la línea es ideal (sin pérdidas) de impedancia característica Z_0 real. La entrada al tramo de línea es el único puerto.

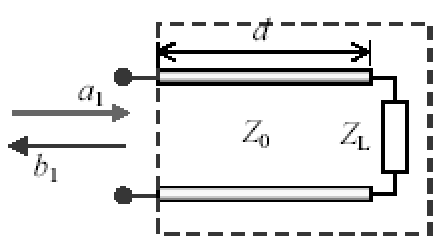

Figura 3. Tramo de línea ideal

Definimos, como es costumbre en la literatura, las señales en el puerto como:

$$a_1 = \frac{v_1 + Z_0 i_1}{2\sqrt{Z_0}} \qquad\qquad b_1 = \frac{v_1 - Z_0 i_1}{2\sqrt{Z_0}} \tag{4}$$

donde v_1 e i_1 son la tensión y la corriente en el puerto. Podemos relacionar estas cantidades con las ondas de tensión y corriente en la línea de la forma:

$$v_1 = v_+(-d) + v_-(-d) = V_+\left[e^{i(\omega t+kd)} + \rho_L e^{i(\omega t-kd)}\right] = V_+ e^{i(\omega t+kd)}\left[1+\rho_L e^{-i2kd}\right] \tag{5}$$

$$i_1 = i_+(-d) + i_-(-d) = \frac{V_+}{Z_0}\left[e^{i(\omega t+kd)} - \rho_L e^{i(\omega t-kd)}\right] = \frac{V_+}{Z_0} e^{i(\omega t+kd)}\left[1-\rho_L e^{-i2kd}\right] \tag{6}$$

de modo que:

$$a_1 = \frac{v_1 + Z_0 i_1}{2\sqrt{Z_0}} = \frac{V_+ e^{i(\omega t+kd)}\left[1+\rho_L e^{-i2kd} + 1 - \rho_L e^{-i2kd}\right]}{2\sqrt{Z_0}} = \frac{V_+ e^{i(\omega t+kd)}}{\sqrt{Z_0}} \tag{7}$$

$$b_1 = \frac{v_1 - Z_0 i_1}{2\sqrt{Z_0}} = \frac{V_+ e^{i(\omega t+kd)}\left[1+\rho_L e^{-i2kd} - 1 + \rho_L e^{-i2kd}\right]}{2\sqrt{Z_0}} = \frac{\rho_L V_+ e^{-i2kd}}{\sqrt{Z_0}} e^{i(\omega t+kd)} \tag{8}$$

Luego la relación de dispersión es: $b_1 = S_{11} a_1 \Rightarrow S_{11} \rho_L e^{-i2kd}$ de donde se puede ver que S_{11} es un coeficiente de reflexión, salvo un factor de fase.

También se ve que $\left|S_{11}\right|^2 = \left|\rho_L\right|^2 \leq 1$. Es 1 cuando hay reflexión total (carga *0 ó* ∞). La impedancia en el puerto único es:

$$Z_1 = \frac{v_1}{i_1} = Z_0 \frac{1+\rho_L e^{-i2kd}}{1-\rho_L e^{-i2kd}} \tag{9}$$

que es la impedancia de entrada de la línea.

2. DOS PUERTOS

Hemos adoptado un modelo de cuadripolo de una línea de transmisión para hallar las ecuaciones del telegrafista y, a partir de ellas, analizar la propagación de ondas en la línea. En general, es posible describir el comportamiento de la línea en términos de la matriz de dispersión modelándola como un conjunto de cuadripolos en cascada.

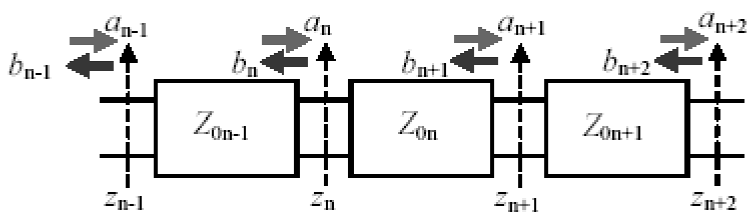

Figura 4. Modelo cuadripolos en cascada para línea de transmisión

Para el n-ésimo elemento del conjunto definimos una onda incidente a_n y una onda reflejada b_n y le adjudicamos una impedancia característica Z_{0n}. Considerar que la impedancia característica sea variable elemento a elemento de la cascada nos permite analizar sistemas no uniformes e incorporar dispositivos intermedios como acopladores, filtros, etc.

Consideramos uno de los cuadripolos como un tramo de línea ideal de impedancia característica Z_0 y longitud d. El puerto más cercano a la carga Z_L se halla en la posición z_0. Definimos las variables de puerto como en el caso previo:

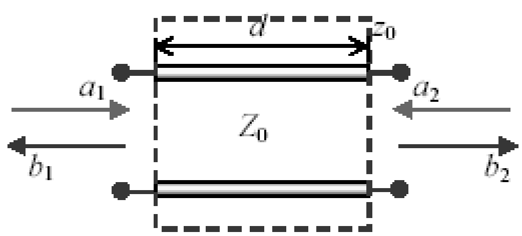

Figura 5. Cuadripolo como tramo de línea

$$a_1 = \frac{v_1 + Z_0 i_1}{2\sqrt{Z_0}} \qquad b_1 = \frac{v_1 - Z_0 i_1}{2\sqrt{Z_0}} \tag{10}$$

$$a_2 = \frac{v_2 + Z_0 i_2}{2\sqrt{Z_0}} \qquad b_2 = \frac{v_2 + Z_0 i_2}{2\sqrt{Z_0}} \tag{11}$$

Desde el punto de vista de la línea de transmisión, las ondas que inciden y se reflejan sobre los puertos son:

Ondas incidentes $\begin{cases} v_{1+} = V_+ e^{i[\omega t + k(Z_0 + d)]} \\ v_{2+} = \rho_L V_+ e^{i(\omega t - kz_0)} \end{cases}$ $\qquad \begin{cases} i_{1+} = V_+ / Z_0 \, e^{i[\omega t + k(Z_0 + d)]} \\ i_{2+} = -\rho_L V_+ / Z_0 \, e^{i(\omega t - kz_0)} \end{cases}$

Ondas reflejadas $\begin{cases} v_{1-} = \rho_L V_+ e^{i[\omega t - k(Z_0 + d)]} \\ v_{2-} = V_+ e^{i(\omega t + kz_0)} \end{cases}$ $\qquad \begin{cases} i_{2-} = -\rho_L V_+ / Z_0 \, e^{i[\omega t - k(z_0 + d)]} \\ i_{1+} = V_+ / Z_0 \, e^{i(\omega t + kz_0)} \end{cases}$

Entonces las variables del puerto son:

$$a_1 = \frac{v_1 + Z_0 i_1}{2\sqrt{Z_0}} = \frac{(v_{1+} + v_{1-}) + Z_0 (i_{1+} + i_{1-})}{2\sqrt{Z_0}} = \frac{V_+ e^{i[\omega t + k(z_0 + d)]}}{\sqrt{Z_0}} \tag{12}$$

$$b_1 = \frac{v_1 - Z_0 i_1}{2\sqrt{Z_0}} = \frac{\rho_L V_+ e^{i[\omega t - k(z_0 + d)]}}{\sqrt{Z_0}} \tag{13}$$

$$a_2 = \frac{v_2 - Z_0 i_2}{2\sqrt{Z_0}} = \frac{\rho_L V_+ e^{i(\omega t - kz_0)}}{\sqrt{Z_0}} \tag{14}$$

$$b_2 = \frac{v_2 + Z_0 i_2}{2\sqrt{Z_0}} = \frac{V_+ e^{i(\omega t + kz_0)}}{\sqrt{Z_0}} \tag{15}$$

y se observa entonces que:

$$v_{1+} = \sqrt{Z_0}\, a_1 \qquad v_{1-} = \sqrt{Z_0}\, b_1 \qquad i_{1+} = a_1 / \sqrt{Z_0} \qquad i_{1-} = -b_1 / \sqrt{Z_0}$$

$$v_{2+} = \sqrt{Z_0}\, b_2 \qquad v_{2-} = \sqrt{Z_0}\, a_2 \qquad i_{2+} = b_2 / \sqrt{Z_0} \qquad i_{2-} = -a_2 / \sqrt{Z_0}$$

Las variables de puerto están relacionadas entre sí por el sistema lineal:

$$\begin{aligned} b_1 &= S_{11}a_1 + S_{12}a_2 \\ b_2 &= S_{21}a_1 + S_{22}a_2 \end{aligned} \tag{16}$$

Para calcular los coeficientes de la matriz de dispersión usamos la técnica de adaptar la salida (o entrada) de los puertos sucesivamente para simplificar las ecuaciones. Supongamos primero que el puerto de salida está adaptado (no hay onda incidente sobre la salida): $a_2 = 0 \Rightarrow b_1 = S_{11}a_1, b_2 = S_{21}a_1$

Entonces:

$$S_{11} = \frac{b_1}{a_1} = \frac{\rho_L V_+ e^{i[(\omega t - k(z_0+d)]}}{V_+ e^{i[(\omega t + k(z_0+d)]}} = \rho_L e^{-i2k(z_0+d)} \qquad S_{21} = \frac{b_2}{a_1} = \frac{V_+ e^{i(\omega t + kz_0)}}{V_+ e^{i[(\omega t + k(z_0+d)]}} = e^{-ikd} \tag{17}$$

Se ve que S_{11} es el coeficiente de reflexión de las ondas a la entrada y S_{21} es un factor de desfasaje introducido en la propagación de la onda progresiva en el puerto cuando la salida está adaptada. Para líneas sin pérdidas $|S_{21}| = 1$, mientras que en líneas con pérdidas $|S_{21}|$<1, ya que el número de onda *k* es entonces complejo, indicando una atenuación de la onda en su propagación a lo largo del puerto. En general, el puerto puede incorporar un circuito activo que amplifique la onda incidente, en cuyo caso tendremos $|S_{21}|$> 1. Por lo tanto, S_{21} se conoce como ganancia (o pérdida) de inserción del puerto, e indica el factor que el puerto introduce para la onda progresiva en la propagación.

Análogamente, si ahora suponemos que la entrada del puerto está adaptada (no hay onda incidente sobre la entrada): $v_{1+} = 0 \Rightarrow a_1 = 0$ y las ecuaciones de dispersión quedan: $b_1 = S_{12}a_2, b_2 = S_{22}a_2$ de donde:

$$S_{22} = \frac{b_2}{a_2} = \frac{V_+ e^{i(\omega t + kz_0)}}{\rho_L V_+ e^{i(\omega t - kz_0)}} = \frac{1}{\rho_L} e^{i2kz_0} \qquad S_{12} = \frac{b_1}{a_2} = \frac{\rho_L V_+ e^{i[(\omega t - k(z_0+d)]}}{\rho_L V_+ e^{i(\omega t - kz_0)}} = e^{-ikd} \tag{18}$$

Se ve que S_{22} es el coeficiente de reflexión de las ondas a la salida (aquí escrito en términos del coeficiente de reflexión en la carga de la línea) y S_{12} es el factor de desfasaje introducido en la propagación de la onda regresiva en el puerto cuando la entrada está adaptada.

Se observa además que: $S_{12} = S_{21}$. Esta es una condición general de los puertos que cumplen la llamada relación de reciprocidad, que conceptualmente puede definirse como la situación donde el puerto de comporta de la misma manera para la propagación en ambos sentidos.

La impedancia en el puerto de entrada es:

$$Z_{in} = \frac{v_1}{i_1} = \frac{v_{1+} + v_{1-}}{i_{1+} + i_{1-}} = Z_0 \frac{a_1 + b_1}{a_1 - b_1} = Z_0 \frac{(1+S_{11})a_1 + S_{12}a_2}{(1-S_{11})a_1 - S_{12}a_2} \tag{19}$$

En el caso de salida adaptada ($a_2 = 0$):

$$Z_{in}\big|_{a_2=0} = Z_0 \frac{1+S_{11}}{1-S_{11}} \Rightarrow S_{11} = \frac{Z_{in}\big|_{a_2=0} - Z_0}{Z_{in}\big|_{a_2=0} + Z_0} \tag{20}$$

Análogamente:

$$Z_{out} = \frac{v_2}{i_2} = \frac{v_{2+} + v_{2-}}{i_{2+} + i_{2-}} = Z_0 \frac{b_2 + a_2}{b_2 - a_2} = Z_0 \frac{S_{21}a_1 + (1+S_{22})a_2}{S_{21}a_1 - (1-S_{22})a_2} \tag{21}$$

Y para entrada adaptada ($a_1 = 0$):

$$Z_{out}\big|_{a_1=0} = -Z_0 \frac{1+S_{22}}{1-S_{22}} \Rightarrow S_{22} = \frac{Z_{out}\big|_{a_1=0} + Z_0}{Z_{out}\big|_{a_1=0} - Z_0} \tag{22}$$

Analicemos el comportamiento de transmisión de potencia. Las potencias medias netas (incidente – reflejada) en cada puerto son:

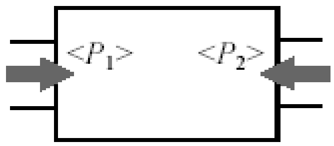

Figura 6. Potencia en los puertos

$$\langle P_1\rangle = \langle v_{1+}i_{1+} + v_{1-}i_{1-}\rangle = \frac{1}{2}\mathrm{Re}(v_{1+}i_{1-}^* + v_{1-}i_{1-}^*) = \frac{1}{2}\mathrm{Re}(a_1a_1^* - b_1b_1^*) = \frac{1}{2}(|a_1|^2 - |S_{11}a_1 + S_{12}a_2|^2)$$
$$= \frac{1}{2}\left[|a_1|^2\left(1-|S_{11}|^2\right) - |S_{12}|^2|a_2|^2 - 2\,\mathrm{Re}\left(S_{11}S_{12}^*a_1a_2^*\right)\right] \tag{23}$$

$$\langle P_2\rangle = \langle -v_{2-}i_{2-} - v_{2+}i_{2+}\rangle = \frac{1}{2}\mathrm{Re}(-v_{2-}i_{2-}^* - v_{2+}i_{2+}^*) = \frac{1}{2}\mathrm{Re}(a_2a_2^* - b_2b_2^*) = \frac{1}{2}(|a_2|^2 - |S_{21}a_1 + S_{22}a_2|^2)$$
$$= \frac{1}{2}\left[|a_2|^2\left(1-|S_{22}|^2\right) - |S_{21}|^2|a_1|^2 - 2\,\mathrm{Re}\left(S_{21}S_{22}^*a_2a_1^*\right)\right] \tag{24}$$

Obsérvese que las potencias reflejadas a la entrada y la salida son de por sí negativas, lo que indica que son potencias que fluyen hacia fuera del cuadripolo.

La potencia neta que fluye hacia la derecha del cuadripolo es:

$$\langle P\rangle = \langle P_1\rangle - \langle P_2\rangle = \frac{1}{2}\left[|a_1|^2\left(1-|S_{11}|^2\right) - |S_{12}|^2|a_2|^2 - 2\,\mathrm{Re}\left(S_{11}S_{12}^*a_1a_2^*\right)\right]$$
$$-\frac{1}{2}\left[|a_2|^2\left(1-|S_{22}|^2\right) - |S_{21}|^2|a_1|^2 - 2\,\mathrm{Re}\left(S_{21}S_{22}^*a_2a_1^*\right)\right] \tag{25}$$

Consideremos el caso de salida adaptada, donde $v_{2-} = 0 \Rightarrow a_2 = 0$:

$$\langle P\rangle = \langle P_1\rangle - \langle P_2\rangle = \frac{1}{2}\left[|a_1|^2\left(1-|S_{11}|^2\right)\right] - \frac{1}{2}\left[-|S_{21}|^2|a_1|^2\right] = \frac{1}{2}\left[|a_1|^2\left(1-|S_{11}|^2 + |S_{21}|^2\right)\right] \tag{26}$$

Si la salida está adaptada, esta cantidad será nula si no hay pérdidas, ya que representa la potencia neta que ingresa al puerto de entrada menos la que sale del puerto de salida. Si hay pérdidas, la potencia neta que entra es mayor que la que sale y la cantidad es positiva. Entonces:

$$1-|S_{11}|^2 + |S_{21}|^2 \geq 0 \Rightarrow |S_{21}|^2 \leq 1-|S_{11}|^2$$

El coeficiente de reflexión de potencia a la entrada es:

$$R = \frac{\langle -v_{1-} i_{1-} \rangle}{\langle v_{1+} i_{1+} \rangle} = \frac{\frac{1}{2}\mathrm{Re}(b_1 b_1^*)}{\frac{1}{2}\mathrm{Re}(a_1 a_1^*)} = \frac{\left|S_{11}a_1 + S_{12}a_2\right|^2}{\left|a_1\right|^2} = \frac{\left|a_1\right|^2 \left|S_{11}\right|^2 + \left|S_{12}\right|^2 \left|a_2\right|^2 - 2\,\mathrm{Re}\left(S_{11}S_{12}^* a_1 a_2^*\right)}{\left|a_1\right|^2} \quad (27)$$

En el caso de la salida adaptada queda: $R = \left|S_{11}\right|^2$ como para el sistema de 1 puerto.

3. RELACIÓN CON OTRAS DESCRIPCIONES MATRICIALES

La descripción de la propagación por medio de cuadripolos y la matriz de dispersión están asociadas a otras descripciones. La matriz de transmisión *T* permite relacionar las ondas a la salida del cuadripolo en función de las ondas en su entrada. En nuestra notación:

$$\begin{aligned} b_2 &= T_{11}a_1 + T_{12}b_1 \\ a_2 &= T_{21}a_1 + T_{22}b_1 \end{aligned} \quad (28)$$

Los coeficientes de la matriz de transmisión están relacionados con los de la matriz de dispersión por las relaciones:

$$T_{11} = \frac{S_{21}S_{12} - S_{11}S_{22}}{S_{12}} \qquad T_{12} = \frac{S_{22}}{S_{12}} \qquad T_{21} = -\frac{S_{11}}{S_{12}} \qquad T_{22} = \frac{1}{S_{12}}$$

La matriz de transmisión es más cómoda que la de dispersión para tratar una cascada de cuadripolos.

La matriz de impedancias *Z* relaciona las tensiones en los puertos con las corrientes:

$$\begin{aligned} V_1 &= Z_{11}I_1 + Z_{12}I_2 \\ V_2 &= Z_{21}I_1 + Z_{22}I_2 \end{aligned} \quad (29)$$

La matriz de admitancias *Y* es la inversa de *Z*:

$$\begin{cases} V_1 = Z_{11}I_1 + Z_{12}I_2 \\ V_2 = Z_{21}I_1 + Z_{22}I_2 \end{cases} \Rightarrow Y_{11} = \frac{Z_{22}}{\Delta}, Y_{12} = -\frac{Z_{12}}{\Delta}, Y_{21} = -\frac{Z_{21}}{\Delta}, Y_{22} = \frac{Z_{11}}{\Delta}$$

con $\Delta = Z_{11}Z_{22} - Z_{12}Z_{21}$

Podemos relacionar la matriz de dispersión con la matriz de impedancias mediante las siguientes ecuaciones:

$$S_{11} = \frac{(z_{11}-1)(z_{22}-1) - z_{12}z_{21}}{(z_{11}+1)(z_{22}+1) - z_{12}z_{21}} \tag{30}$$

$$S_{22} = \frac{(z_{11}+1)(z_{22}-1) - z_{12}z_{21}}{(z_{11}+1)(z_{22}+1) - z_{12}z_{21}} \tag{31}$$

$$S_{12} = \frac{2z_{12}}{(z_{11}+1)(z_{22}+1) - z_{12}z_{21}} \tag{32}$$

$$S_{21} = \frac{2z_{21}}{(z_{11}+1)(z_{22}+1) - z_{12}z_{21}} \tag{33}$$

donde $Z_{ij} = Z_{ij} \big/ Z_0$ son las impedancias normalizadas a la impedancia característica del tramo.

Estas descripciones matriciales de dispositivos y líneas de transmisión son de importancia porque proveen de una forma sencilla de conectar sucesivos dispositivos sin resolver en detalle las ecuaciones del circuito completo, y permiten utilizar programas como el Spice para analizar el comportamiento del circuito a partir de la descripción matricial de cada bloque.