ANEXO A. WAVELET HAAR

A.1 FUNCIÓN WAVELET HAAR

La *función wavelet Haar* fue descubierta y estudiada por el matemático húngaro Alfred Haar, quien descubre una "base" de funciones que se reconocen actualmente como las primeras *wavelets*, consisten en un breve impulso positivo seguido de un breve impulso negativo (ver figura A.1). El más simple ejemplo de una familia de funciones apropiadas para el análisis multirresolución [8] en el espacio de funciones cuadráticamente integrables [2] sobre la línea real, están dadas por la familia de funciones *Haar*. Tales funciones constituyen una base ortogonal. Por lo que la transformada *Haar* discreta se beneficia de las propiedades de transformaciones ortogonales.

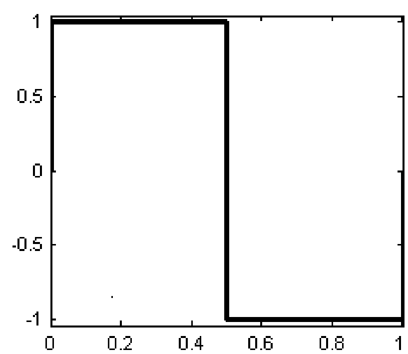

Figura A 1. *Función wavelet Haar*

A continuación se desarrolla la *teoría wavelet* [2, 5, 8] en tiempo continuo para la *wavelet Haar*, esto es, se representa una función continua $f(t) \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$, se calcula sus coeficientes y luego se reconstruye en diferentes grados de resolución. Con este propósito en primer lugar una función en $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ se puede aproximar en términos de la función escala $\phi(t)$ y de la *función wavelet* $\psi(t)$ mediante la siguiente relación [5]:

$$f(t) = \sum_k \sum_j c_{j,k} \ \phi(t) + \sum_k \sum_j d_{j,k} \ \psi(t); \ \ j,k \in \mathbb{Z} \ , \tag{A.1}$$

pues bien, se estudia a continuación lo referente a la *función Haar escala* y a la *función Haar wavelet*.

A.1.1 *Función escala Haar*

La función $\phi(t)$ en $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ definida en la expresión (A.2) es la denominada *función de escalamiento Haar* y se representa en la figura A 2.

$$\phi(t) = \begin{cases} 1 & si\ 0 \le t < 1 \\ 0 & el\ resto \end{cases} \tag{A.2}$$

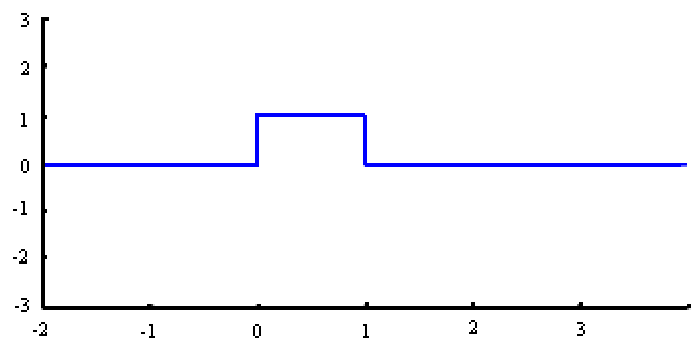

Figura A 2. Función de escalamiento *Haar*

Es conveniente entonces definir el conjunto de funciones que son generadas a partir de traslaciones y escalaciones de esta función básica de escalamiento.

En primer lugar, se define el conjunto de funciones de escalamiento a partir de traslaciones enteras de la función básica $\phi(t)$.

$$\phi_k(t) = \phi(t-k) = \begin{cases} 1 \quad si \quad t_1 = k \le t < k+1 = t_2 \\ 0 \qquad en\,caso\,contrario. \end{cases} \tag{A.3}$$

Ahora bien, el subespacio generado por esta función se define en la relación (A.4), el cual es un subconjunto de $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$.

$$v_0 = \overline{Span_k\{\phi_k(t)\}} \tag{A.4}$$

Por lo tanto cualquier función $f(t)$ que esté en v_0, puede ser representada como una combinación lineal del conjunto de funciones $\phi_k(t)$ si se halla los coeficientes respectivos.

De otro lado, es obvio que para que estos coeficientes puedan ser hallados en forma rápida, es necesario que $\phi_k(t)$ sea ortonormal, pues bien, para demostrar esta propiedad de la ortonormalidad, se define (A.5), que no es otra cosa que la misma función dada en (A.3) definida en un diferente intervalo:

$$\phi_m(t) = \phi(t-m) = \begin{cases} 1 \quad si \quad t_3 = m \le t < m+1 = t_4 \\ 0 \qquad en\,caso\,contrario. \end{cases} \tag{A.5}$$

Al realizar el producto interno entre (A.3) y (A.5) se tiene:

$$< \phi_k(t), \phi_m(t) > = \int \phi_k(t)\phi_m(t)dt \tag{A.6}$$

y como $\phi_k(t)$ y $\phi_m(t)$ están definidas en diferentes intervalos, ya que $k \ne m$ entonces:

$$\begin{aligned} \int \phi_k(t)\phi_m(t)dt &= \int_{t_1}^{t_2} \phi_k(t)\phi_m(t)dt + \int_{t_3}^{t_4} \phi_k(t)\phi_m(t)dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} 1*0dt + \int_{t_3}^{t_4} 0*1dt = 0 \end{aligned} \tag{A.7}$$

Además, por definición nuevamente de producto interno se tiene:

$$< \phi_k(t), \phi_k(t) > = \int_{t_1}^{t_2} \phi_k(t)\phi_k(t)dt \tag{A.8}$$

luego, por la definición dada en (A.3):

$$\int_{t_1}^{t_2} \phi_k(t)\phi_m(t)dt = [t]_{t_1}^{t_2} = (k+1) - k = 1 \tag{A.9}$$

Finalmente por (A.7) y (A.9) se concluye que el conjunto $\phi_k(t)$ es ortonormal.

Con lo anterior es fácil entonces hallar los coeficientes para representar una señal perteneciente a $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ por medio de traslaciones de la función básica de escalamiento [5].

Ahora bien, para obtener una mejor representación de una señal, es necesario crear una nueva familia de funciones de escalamiento que además de tener la capacidad de trasladarse, puedan también ser escaladas para lograr así una mejor resolución, esta nueva familia se expresa en (A.10):

$$\phi_{j,k}(t) = \phi(2^j t - k) = \begin{cases} 1 & si \quad t_1 = \frac{k}{2^j} \leq t < \frac{k+1}{2^j} = t_2 \\ 0 & en\, caso\, contrario. \end{cases} \qquad \text{(A.10)}$$

donde $\phi_{j,k}(t)$ es la función básica de escalamiento trasladada y escalada.

De igual manera el subespacio generado por esta función es:

$$v_j = \overline{Span_k\{\phi_k(2^j t)\}} = \overline{Span_k\{\phi_{j,k}(t)\}} \qquad \text{(A.11)}$$

Se concluye finalmente que se tiene una mejor resolución de una señal si se la representa por medio de una combinación lineal de $\phi_{j,k}(t)$.

Recordando, de (A.7) y (A.9), se había concluido que $\phi_k(t)$ era ortonormal, la pregunta obvia ahora es si $\phi_{j,k}(t)$ también lo es, pues bien, la respuesta es no, y para demostrarlo solo hay que recurrir a la definición de producto interno de la siguiente manera:

$$< \phi_{j,k}(t), \phi_{j,k}(t) > = \int_{t_1}^{t_2} \phi_{j,k}(t)\phi_{j,k}(t)dt \quad donde \quad t_1 = \frac{k}{2^j},\ t_2 = \frac{k+1}{2^j} \qquad \text{(A.12)}$$

$$< \phi_{j,k}(t)\ ,\ \phi_{j,k}(t) > = [t]_{t_1}^{t_2} = \frac{1}{2^j} \qquad \text{(A.13)}$$

como el producto interno entre dos funciones de escalamiento no es cero, claramente se concluye que $\phi_{j,k}(t)$ no es ortogonal y por ende tampoco ortonormal, por lo tanto se debe encontrar una constante llamada *constante de normalización* que permita ortonormalizar esta familia de funciones, este procedimiento se describe a continuación:

Sea r_j un número cualquiera, en v_j se multiplica las funciones base por r_j y se realiza el producto interno entre este producto por él mismo obteniendo:

$$< r_j\phi_{j,k}(t), r_j\phi_{j,k}(t) > = \int_{t_1}^{t_2} r_j\phi_{j,k}(t) r_j\phi_{j,k}(t)dt = \frac{r_j^2}{2^j} \tag{A.14}$$

si se quiere ortonormalizar se debe igualar (A.14) a uno (1) para hallar el valor de r_j así:

$$\frac{r_j^2}{2^j} = 1 \Rightarrow r_j = 2^{\frac{j}{2}} \tag{A.15}$$

Ahora bien, con esta mejora de $\phi_{j,k}(t)$ y con lo anteriormente expuesto, se define una nueva familia de funciones $\phi_{j,k}(t)$ así:

$$\phi_{j,k}(t) = 2^{\frac{j}{2}}\phi(2^j t - k) = \begin{cases} 2^{\frac{j}{2}} & si \quad t_1 = \frac{k}{2^j} \le t < \frac{k+1}{2^j} = t_2 \\ 0 & en\, caso\, contrario. \end{cases} \tag{A.16}$$

(A.16) representa ahora si una familia de funciones ortonormales y su demostración no es difícil de realizar.

Ahora bien, una propiedad de la función de escalamiento *Haar* es que puede ser representada por una combinación lineal de ella misma escalada y trasladada [5], solo basta con encontrar los coeficientes adecuados para tal fin. Por ejemplo se quiere representar esta función en el intervalo $[0,1)$, es decir se quiere obtener una relación dada por (A.17):

$$\phi_{0,0}(t) = \phi_{1,0}(t) + \phi_{1,1}(t) \tag{A.17}$$

donde $\phi_{1,0}$ está definida en el intervalo $[0,1/2)$ y $\phi_{1,1}$ en el intervalo $[1/2,1)$. Para tal representación se parte de la llamada *ecuación básica de recursión* [5] dada en (A.18).

$$\phi(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \sqrt{2}\ h(k)\ \phi(2t-k) \tag{A.18}$$

Con la anterior relación se obtiene:

$$\phi(t) = h(0)\sqrt{2}\phi(2t) + h(1)\sqrt{2}\phi(2t\text{-}1) \tag{A.19}$$

El objetivo ahora es hallar los llamados coeficientes de escala apropiados $h(0)$ y $h(1)$, para ello se realiza el producto interno entre $\phi(t)$ y $\sqrt{2}\phi(2t-k)$ [5], de la siguiente manera:

$$h(0) = \int_0^{\frac{1}{2}} \phi(t)\sqrt{2}\phi(2t)dt \qquad \Rightarrow \quad h(0) = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \tag{A.20}$$

$$h(1) = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \phi(t)\sqrt{2}\phi(2t-1)dt \quad \Rightarrow \quad h(1) = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,. \tag{A.21}$$

Por lo tanto (A.19) toma la forma

$$\phi(t) = \phi(2t) + \phi(2t-1) \tag{A.22}$$

mostrando que la función escala se puede representar por una versión de ella misma escalada más otra versión de ella misma escalada y trasladada.

A.1.2 *Función wavelet Haar*

De los principios de multirresolución [8], te tiene en forma general que:

$$V_j \oplus W_j = V_{j+1} \tag{A.23}$$

Con la anterior relación, se dice por ejemplo que W_0 es el complemento del espacio V_0 en el espacio V_1.

Ahora bien, la función que expande a W_0 definida en la expresión (A.24) es la denominada *función wavelet Haar* ψ. En la figura A.3 se representa la *función wavelet Haar* en W_0 como combinación lineal de las funciones de escalamiento que expande V_1 y V_0.

$$\psi(t)\begin{cases}1 & si \quad 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ -1 & si \quad \frac{1}{2} \le t \le 1 \\ 0 & en\,caso\,contrario\end{cases} \tag{A.24}$$

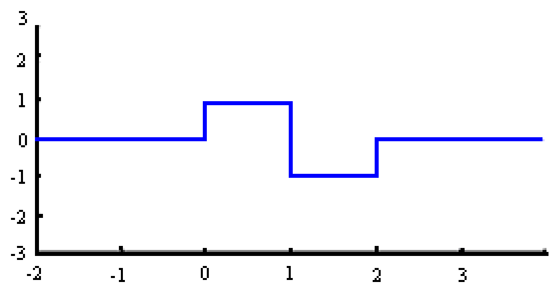

Figura A 3. ***Función wavelet Haar***

Al igual que la función de escalamiento, esta *función wavelet Haar*, puede ser representada en el intervalo [0,1] como una combinación lineal de las funciones de escalamiento que expanden el espacio V_1 así [5]:

$$\psi(t) = h_1(0)\sqrt{2}\phi(2t) + h_1(1)\sqrt{2}\phi(2t-1) \tag{A.25}$$

Para obtener los coeficientes $h_1(0)$ y $h_1(1)$ se realiza el producto interno entre $\psi(t)$ es decir (A.25) con $\sqrt{2}\phi(2t)$ y luego con $\sqrt{2}\phi(2t-1)$, con lo cual se obtiene:

$$h_1(0) = \sqrt{2}\int_0^{\frac{1}{2}} \psi(t)dt = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \tag{A.26}$$

$$h_1(1) = \sqrt{2}\int_{\frac{1}{2}}^{1} \psi(t)dt = -\frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \tag{A.27}$$

Se observa entonces que $h_1(0) = -h_1(1)$, los cuales son coeficientes que permiten mantener la normalidad de $\psi(t)$, para su demostración se procede de manera similar a la forma como se hizo para la función de escalamiento, es decir, definiendo primero en forma general un conjunto de *funciones wavelets* a partir de traslaciones (desplazadas en el tiempo) de la función básica $\psi(t)$.

$$\psi_k(t)\begin{cases} 1 & si \quad k \le t \le k + \tfrac{1}{2} \\ -1 & si \quad k + \tfrac{1}{2} \le t \le k + 1 \\ 0 & en\, caso\, contrario \end{cases} \tag{A.28}$$

Ahora, para demostrar la ortogonalidad, se define (A.29) que no es otra cosa que la misma función dada en (A.28) definida en un diferente intervalo con $m > k$.

$$\psi_m(t) = \begin{cases} 1 & si \quad m \le t \le m + \tfrac{1}{2} \\ -1 & si \quad m + \tfrac{1}{2} \le t \le m + 1 \\ 0 & en\, caso\, contrario \end{cases} \tag{A.29}$$

Por la definición de producto interno entre (A.28) y (A.29) [2] se obtiene:

$$< \psi_k(t)\ ,\ \psi_m(t) > = \int_k^{k+1} \psi_k(t) * 0 dt + \int_m^{m+1} 0 * \psi_m(t) dt = 0 \quad m, k \in \mathbb{Z} \tag{A.30}$$

con lo cual se concluye la ortogonalidad de $\psi_k(t)$.

Para demostrar la normalidad, simplemente se realiza el producto interno de ψ_k con ella misma, así:

$$< \psi_k(t), \psi_k(t) > = \int_k^{k+1} \psi_k(t) \psi_k(t) dt \tag{A.31}$$

$$\begin{aligned} < \psi_k(t), \psi_k(t) > &= \int_k^{k+\frac{1}{2}} \psi_k(t) \psi_k(t) dt + \int_{k+\frac{1}{2}}^{k+1} \psi_k(t) \psi_k(t) dt \\ &= \left(k + \frac{1}{2}\right) - k + k + 1 - \left(k + \frac{1}{2}\right) = 1 \end{aligned} \tag{A.32}$$

Por lo tanto se concluye que $\psi_k(t)$ es ortonormal.

Continuando ahora con un procedimiento secuencial como el desarrollado para la función de escalamiento, es imperativo mencionar que para obtener una mejor representación de una señal, se debe crear una nueva familia de *funciones wavelets* que además de tener la capacidad de trasladarse, puedan también ser escaladas para lograr así una mejor resolución, esta nueva familia se expresa en (A.33):

$$\psi_{j,k}(t) = \begin{cases} 1 & si \quad \frac{k}{2^j} \le t \le \frac{k}{2^j} + \frac{1}{2^{j+1}} \\ -1 & si \quad \frac{k}{2^j} + \frac{1}{2^{j+1}} \le t \le \frac{k+1}{2^j} \\ 0 & en\, caso\, contrario \end{cases} \tag{A.33}$$

donde $\psi_{j,k}(t)$ es la función básica *wavelet* trasladada y escalada.

Igualmente, se había concluido que $\psi_k(t)$ era ortonormal, y debido a lo expuesto con la función de escalamiento, es de esperarse que $\psi_{j,k}(t)$ no sea ortonormal al igual que $\phi_{j,k}(t)$; en efecto, esta *función wavelet* no lo es, para observar este comportamiento simplemente se realiza un procedimiento similar al hecho para obtener la relación (A.13), con la salvedad de que esta vez se trabaja con la *función wavelet* y no con la función de escalamiento, de esta manera se puede comprobar que efectivamente $\psi_{j,k}(t)$ tampoco es ortonormal.

Ahora bien, lo que se hizo en el caso de la función de escalamiento fue encontrar una *constante de normalización* que permitiera ortonormalizar esa familia de funciones, este procedimiento es similar para el caso de la *función wavelet*, llegando a la conclusión que esa constante es la misma que la descrita en la ecuación (A.15), por lo tanto se tiene nuevamente que $r_j = 2^{\frac{j}{2}}$ (es fácil demostrar que efectivamente ese es el valor de la constante de normalización para la familia de *funciones wavelet* [5]).

Finalmente, con esta mejora de $\psi_{j,k}(t)$ y con lo anteriormente expuesto, se define una nueva familia $\psi_{j,k}(t)$ así:

$$\psi_{j,k}(t) = 2^{\frac{j}{2}}\psi(2^j t - k) = \begin{cases} 2^{\frac{j}{2}} & si \quad \frac{k}{2^j} \le t \le \frac{k}{2^j} + \frac{1}{2^{j+1}} \\ -2^{\frac{j}{2}} & si \quad \frac{k}{2^j} + \frac{1}{2^{j+1}} \le t \le \frac{k+1}{2^j} \\ 0 & en\, caso\, contrario \end{cases} \tag{A.34}$$

(A.34) representa ahora si una familia de funciones ortonormales, donde $\psi_{j,k}(t)$ es la *función wavelet* base trasladada y escalada, la demostración de que en efecto esta familia es ortonormal es sencilla si se tiene en cuenta el procedimiento para llegar a ella.

De igual manera el subespacio generado por esta función es:

$$W_j = \overline{Span_k\{\psi_k(2^j t)\}} = \overline{Span_k\{\psi_{j,k}(t)\}} \qquad (A.35)$$

donde W_j es un subespacio de $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$.

Se concluye finalmente que se tiene una mejor resolución de una señal si se la representa por medio de una combinación lineal de $\psi_{j,k}(t)$.