

SIMULACION DE FILTROS DIGITALES FIR APLICANDO LAS TEORIAS DE FOURIER Y WAVELETS



Trabajo de Grado para optar al título de
Ingeniero Electrónico y de Telecomunicaciones

**GUSTAVO ADOLFO CAMACHO PEÑA
JORGE FERNANDO GOYES DIAZ**

Director: Ing. HAROLD ROMO ROMERO

Universidad del Cauca

Facultad de Ingeniería Electrónica y Telecomunicaciones

Departamento de Telecomunicaciones

Popayán, Diciembre de 2005

SIMULACION DE FILTROS DIGITALES FIR APLICANDO LAS TEORIAS DE FOURIER Y WAVELETS



**GUSTAVO ADOLFO CAMACHO PEÑA
JORGE FERNANDO GOYES DIAZ**

Universidad del Cauca

Facultad de Ingeniería Electrónica y Telecomunicaciones

Departamento de Telecomunicaciones

Popayán, Diciembre de 2005

ANEXOS
SIMULACION DE FILTROS DIGITALES FIR
APLICANDO LAS TEORIAS DE FOURIER Y
WAVELETS



Trabajo de Grado para optar al título de
Ingeniero Electrónico y de Telecomunicaciones

GUSTAVO ADOLFO CAMACHO PEÑA
JORGE FERNANDO GOYES DIAZ

Director: Ing. HAROLD ROMO ROMERO

Universidad del Cauca

Facultad de Ingeniería Electrónica y Telecomunicaciones

Departamento de Telecomunicaciones

Popayán, Diciembre de 2005

NOTA DE ACEPTACIÓN

Presidente del Jurado

Jurado

Popayán, 7 de Diciembre de 2005

A mis padres, Fabiola, y Juan Clímaco y mis hermanos Martha y Carlos quienes confiaron en mí en alcanzar esta meta y a mi esposa Lorena y a mis hijos por permitirme dedicarle su tiempo a este proyecto.

Gustavo Adolfo.

A quienes me han apoyado incondicionalmente y con su esfuerzo me motivan a seguir adelante mi padre Jorge Homero, Fanny mi madre y mi hermano Pedro.

Jorge Fernando.

AGRADECIMIENTOS

Los autores expresan sus agradecimientos a:

Harold Romo Romero, Ingeniero Electrónico y de Telecomunicaciones, y director de este proyecto, por su valiosa orientación.

Pablo Jojoa, Ingeniero Electrónico y de Telecomunicaciones por sus aclaraciones de temas relacionados con el proyecto

Todos y cada uno de las personas que con sus aportes hicieron posible el desarrollo y culminación de este proyecto.

TABLA DE CONTENIDO

		Pág.
	INTRODUCCION	1
1	EVOLUCIÓN DE ESCENARIOS	2
2	FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS	9
2.1	FUNDAMENTOS EN ÁLGEBRA LINEAL	10
2.2	ESPACIOS DE FUNCIONES Y ESPACIOS DE HILBERT	12
2.3	TEORÍA DE FOURIER	13
2.4	TRANSFORMADA WAVELET	18
2.4.1	Transformada Wavelet Continua	18
2.4.2	Transformada Discreta de Wavelet	22
2.4.3	Descomposición de Señales Unidimensionales	23
2.4.4	Reconstrucción de Señales Unidimensionales	25
3	FILTROS DIGITALES Y ANALISIS WAVELETS	29
3.1	CONCEPTOS GENERALES	29
3.1.1	Señales y Sistemas en Tiempo Discreto	30
3.1.2	Causalidad	30
3.1.3	Linealidad e Invarianza Temporal	31
3.1.4	Ecuación de Diferencias	31
3.1.5	Respuesta al Impulso o Secuencia de Ponderación	32
3.1.6	Estabilidad	32
3.1.7	Respuesta en Frecuencia	33
3.1.8	Transformada de Fourier de una Secuencia	35
3.1.9	Transformada Z	36
3.2	VENTAJAS DEL FILTRADO DIGITAL SOBRE EL ANALÓGICO	38
3.3	CONSIDERACIONES ADICIONALES	41

3.3.1	Clasificación de los filtros digitales según la duración de su respuesta	41
3.3.2	Filtros de fase lineal o no dispersivos	42
3.3.3	Causalidad y sus implicaciones	42
3.4	DISEÑO DE FILTROS DE RESPUESTA IMPULSIVA FINITA (FIR)	46
3.4.1	Filtros FIR simétricos y antisimétricos	47
3.4.2	Diseño de filtros FIR de fase lineal usando ventanas	49
3.4.3	Transformaciones sobre los filtros	56
3.4.4	Extensión al caso bidimensional y filtrado de imágenes	58
3.5	IMPLEMENTACION DE LOS FILTROS DIGITALES	60
3.6	APLICACIONES PARTICULARES DE LOS TIPOS DE FILTROS	61
3.7	ANÁLISIS WAVELETS	62
3.7.1	Filtros de espejo en cuadratura (QMF)	62
3.7.2	Umbral Suave y Duro	65
4.	ANÁLISIS Y EVALUACIÓN DE RESULTADOS	72
4.1	RESULTADOS OBTENIDOS	77
4.1.1	Resultados para señales 1D	78
4.1.2	Resultados para imágenes	82
4.2	ANALISIS DE RESULTADOS	92
4.2.1	Análisis de los resultados obtenidos para señales 1D	92
4.2.2	Análisis de los resultados obtenidos para imágenes	94
4.2.3	Análisis de los filtros según sus resultados	96
5.	CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES	98
5.1	CONCLUSIONES	98
5.2	RECOMENDACIONES	100
	BIBLIOGRAFIA	102
	REFERENCIAS INTERNET	106

LISTA DE FIGURAS

		Pág.
Figura 2.1.	Función <i>Wavelet</i> Haar	19
Figura 2.2.	Funciones <i>wavelets</i> más comunes	19
Figura 2.3.	Plano Escala – Tiempo en la CWT	20
Figura 2.4.	Modo de funcionamiento de la CWT	21
Figura 2.5.	Descomposición <i>wavelet</i>	25
Figura 2.6.	Reconstrucción <i>wavelets</i>	27
Figura 2.7.	(a) Proceso de análisis, (b) Vector - DWT	28
Figura 2.8	Proceso de Síntesis	28
Figura 3.1.	Relación fundamental de los sistemas discretos	36
Figura 3.2.	Especificaciones de los filtros digitales	42
Figura 3.3	Respuesta en frecuencia de un filtro paso - bajo	43
Figura 3.4.	Parámetros de un filtro paso - bajo	45
Figura 3.5.	Modulo de la transformada de Fourier de una ventana rectangular	50
Figura 3.6	Convolución entre la respuesta ideal y la ventana rectangular	51
Figura 3.7.	Respuesta de un filtro paso - bajo con diferentes ventanas	53
Figura 3.8.	Cambio de variables ω a ω'	57
Figura 3.9.	Filtro Paso-bajo para imágenes	58
Figura 3.10	Representación de la ecuación de diferencias mediante de un diagrama en bloques	61
Figura 3.11.	Descomposición <i>wavelet</i> unidimensional de orden k	64
Figura 3.12.	Reconstrucción <i>wavelet</i> unidimensional de orden k	65
Figura 3.13.	Umbral Duro y umbral Suave de una señal	67

Figura 4.1.	Imágenes empleadas para la evaluación de los filtros	76
Figura 4.2.	Espectro de los mejores resultados obtenidos para Sanimono.wav (Ruido Blanco Gaussiano)	79
Figura 4.3.	Espectro de los mejores resultados obtenidos para Sanimono.wav (Ruido Multiplicativo)	80
Figura 4.4.	Espectro de los mejores resultados obtenidos para Boulevard.wav (Ruido Blanco Gaussiano)	81
Figura 4.5.	Espectro de los mejores resultados obtenidos para Boulevard.wav (Ruido Multiplicativo)	82
Figura 4.6	Imagen Amarilla.jpg original, sus versiones ruidosas y los mejores resultados del filtrado	84
Figura 4.7	Imagen Amarilla.jpg original, sus versiones ruidosas y los peores resultados del filtrado	85
Figura 4.8	Imagen Roja.jpg original, sus versiones ruidosas y los mejores resultados del filtrado	87
Figura 4.9	Diferencia entre los mejores resultados objetivos y subjetivos para <i>wavelets</i>	88
Figura 4.10	Imagen Casona.jpg original, sus versiones ruidosas y los mejores resultados del filtrado	89
Figura 4.11	Detección de bordes en la imagen Amarilla.jpg	90
Figura 4.12	Restauración de la imagen Labrador.tif difuminada	91

LISTA DE TABLAS

	Pág.
Tabla 3.1 Características frecuenciales más importantes de algunas funciones ventanas	52
Tabla 3.2 Transformaciones de paso-bajo a otros filtros	57
Tabla 4.1 Resultados más representativos para Sanimono.wav con ruido blanco Gaussiano	78
Tabla 4.2 Resultados más representativos para Sanimono.wav con ruido Multiplicativo	79
Tabla 4.3 Resultados más representativos Boulevard.wav con ruido blanco Gaussiano	80
Tabla 4.4 Resultados más representativos Boulevard.wav con ruido Multiplicativo	81
Tabla 4.5 Resultados más representativos para la imagen Amarilla.jpg para diferentes tipos de ruido	83
Tabla 4.6 Resultados más representativos para la imagen Roja.jpg para diferentes tipos de ruido	86
Tabla 4.7 Resultados más representativos para la imagen Casona.jpg para diferentes tipos de ruido	88

LISTA DE ANEXOS

- Anexo A. **MANUAL DE USUARIO**
- Anexo B. **CODIGO EN MATLAB**
- Anexo C. **TABLAS DE RESULTADOS**
- Anexo D. **ESPECIFICACIONES WAVELETS**

RESUMEN

Muchas personas trabajando en DSP y áreas relacionadas han obtenido en la teoría de wavelets una herramienta nueva e interesante que podría ayudarles con sus tareas y problemas diarios. Muchas de estas tareas vienen acompañadas por filtrado digital, así que surge la pregunta de cual herramienta es mejor usar: ¿El análisis clásico de Fourier o la nueva teoría de wavelets? Este trabajo presenta una comparación de los filtros digitales FIR basados en la teoría de Fourier y los filtros digitales basados en la teoría de wavelets aplicados a la eliminación de ruido de señales 1D y 2D. La detección de bordes y restauración también son incluidas en este trabajo. La comparación se hace por medio de criterios objetivos (Error cuadrático medio MSE y Relación señal a ruido SNR) y criterios subjetivos (apreciación visual y auditiva por un grupo de expertos en la materia). Para facilidad y rapidez en las pruebas se ha creado un algoritmo de simulación que permite analizar, aplicar ruido, filtrar y reconstruir una señal.

PALABRAS CLAVE: Filtro digital, convolución, wavelet, Fourier, función ventana, comparación y algoritmo.

ABSTRACT

Many people working in DSP and related fields is getting in wavelets theory a new and interesting tool that may help them with his daily tasks and problems. A lot of these tasks are accomplished by digital filtering, so there is a question about what tool is a better choice to use: The classical Fourier analysis or the new wavelets theory? This work presents a comparison of digital filters FIR based on Fourier's Theory and digital filters based on wavelets theory applied to denoising in both 1D and 2D signals. Edge detection and restoration are too approached in this work. The comparison is made by objective criteria (mean square error MSE and signal noise ratio SNR) and subjective criteria too (visual and auditory appreciations by a group of experts on the matter). For easy and rapid testing it is created a simulation algorithm that let analyze, noise applying, filtering and reconstruct a signal.

KEY WORDS: Digital filter, convolution, wavelet, Fourier, window function, comparison and algorithm.

GLOSARIO

Análisis o descomposición: Proceso de separar una señal en términos de unas funciones base. Para el caso de Fourier, la señal se descompone como una suma de sinusoidales de diferentes frecuencias, mientras que en wavelets es la suma de versiones escaladas y trasladadas de la wavelet madre.

Análisis Multiresolución: Es la capacidad para separar una señal en sus componentes a diferentes escalas (o resoluciones). Se trata de un proceso similar a una descomposición de una señal en múltiples bandas de frecuencia.

Convolución: Proceso matemático que en el caso del filtrado digital permite obtener la respuesta del sistema a una señal de entrada a partir de la respuesta del sistema a una entrada impulso.

Escala: En el contexto wavelet este parámetro es análogo a la escala empleada en mapas. Tal como en este último caso las altas escalas corresponden a una visión global no detallada de la señal y las bajas escalas corresponden a una vista detallada. De igual manera en términos de frecuencia, las bajas frecuencias (altas escalas) corresponden a una información global de la señal que comúnmente abarca toda la señal, mientras que las altas frecuencias (escalas bajas) corresponden a una información detallada de una característica oculta en la señal que comúnmente dura un tiempo relativamente pequeña.

Filtro: Sistema que tiene como función la extracción de alguna característica de la señal que se aplica a su entrada.

Función Ventana: Función empleada para realizar el análisis seccional de una señal.

Respuesta al Impulso: Es aquella que se obtiene a la salida del sistema tras la aplicación de un impulso como secuencia de entrada.

Respuesta en Frecuencia: : Se define como respuesta en frecuencia a la variaciones de amplitud y fase en función de la frecuencia del sistema.

Señal: Una señal es una función definida con respecto a una variable independiente. Regularmente, esta variable es el tiempo pero podría representar un índice para una secuencia, o un índice para cualquier número de cosas, o cualquier número de dimensiones.

Síntesis: También se conoce con el nombre de reconstrucción. Es el proceso inverso al análisis, mediante el cual se regenera la señal a partir la descomposición que se tiene de la misma.

Soporte Compacto: Propiedad de las funciones wavelet, que indica duración finita.

Transformada: Proceso matemático que se aplica a las señales para obtener información adicional contenida en las mismas pero que no se puede visualizar con facilidad en su formato original (normalmente conocido como dominio del tiempo) .

Traslación: Término relacionado con la localización de la de la función ventana a mediad que esta se desplaza a través de la señal. Obviamente, este término corresponde a información del tiempo en el dominio transformado.

Umbral: Es una técnica que permite la eliminación de coeficientes que no aportan demasiada información relevante en la reconstrucción de la señal.

LISTA DE SÍMBOLOS

$f(t)$	Función continua.
$f[n]$	Función discreta.
$C(a,b)$	Coefficientes de la transformada <i>Wavelet</i> continua.
$C[i,j]$	Coefficientes de la transformada <i>Wavelet</i> discreta.
\subset	Símbolo para “inclusión de”.
\in	Símbolo para “pertenece a”.
$\psi_{a,b}(t)$	<i>Wavelet</i> continua.
$\psi_{j,k}[n]$	<i>Wavelet</i> discreta.
$\phi_{a,b}(t)$	Función de escalado continua.
$\phi_{j,k}[t]$	Función de escalado discreta.
$h[n]$	Filtro paso bajo discreto.
$g[n]$	Filtro paso alto discreto.
λ	Umbral para recortar los coeficientes <i>Wavelet</i> .
[GUS04]	Referencia bibliográfica.

LISTA DE ABREVIATURAS

CWT	Transformada <i>Wavelet</i> Continua.
DWT	Transformada <i>Wavelet</i> Discreta.
SWT	Transformada <i>Wavelet</i> Semidiscreta.
FT	Transformada de <i>Fourier</i> .
FFT	Transformada rápida de <i>Fourier</i> .
STFT	Transformada de <i>Fourier</i> de tiempo corto.
WT	Transformada <i>Wavelet</i> .
IWT	Transformada <i>Wavelet</i> Inversa.
ECG	Señal Electrocardiográfica.
FIR	Filtro de respuesta al impulso de duración finita.
IIR	Filtro de respuesta al impulso de duración infinita.
SNR	Relación Señal-Ruido.
MSE	Relación Señal a Ruido.
MRA	Análisis multiresolución.

INTRODUCCIÓN

El análisis de señales exige, a medida que las aplicaciones lo requieren, ciertas herramientas que las transformadas clásicas no cubren, como es el caso para señales no estacionarias. De aquí la necesidad de estudiar instrumentos que se ajusten a las características de cada tipo de señal y así mejorar su análisis. La mayor parte de este documento habla sobre el filtrado, el cual es el proceso mediante el cual se modifica una señal determinada de tal manera que las amplitudes relativas de las componentes en frecuencia cambian o incluso son eliminadas. También sirve para restaurar una señal, cuando haya sido deformada de alguna manera. La separación de señales es necesaria cuando una señal ha sido contaminada con interferencias, ruidos u otras señales.

El presente estudio trata la fundamentación teórica de Fourier y Wavelet, así como la implementación de algoritmos de simulación de filtros en las dos teorías, con el propósito de generar una herramienta para poder compararlas a partir de algunos resultados y conclusiones. Al inicio, de esta monografía se dedica la revisión conceptual de la TF y la DWT, incluyendo: su definición, localización tiempo-frecuencia y análisis multi-resolución como características claves para el análisis de señales. Como segundo paso, se presentan los filtros digitales FIR y el análisis Wavelet. A continuación se muestra el proceso de implementación en el toolbox de *Matlab* de los algoritmos de simulación de dichos Filtros en las dos teorías, según el tipo de señal a utilizar. Por último, se presentan algunos resultados de la puesta en práctica de la herramienta y las conclusiones.

1. EVOLUCIÓN DE ESCENARIOS

Los filtros digitales desempeñan un papel muy importante en el tratamiento digital de señales, siendo extremadamente útiles en muchas áreas del conocimiento. La teoría que los fundamenta tiene sus orígenes en los descubrimientos del Matemático Joseph Fourier [AMA95] quien estableció que una señal o función podía ser representada como la suma, posiblemente infinita, de senos y cosenos o en su forma equivalente como exponenciales complejas. Este postulado siguió evolucionando hasta los días de hoy donde la teoría de Fourier, más conocida como la transformada de Fourier, es utilizada ampliamente en la solución de problemas científicos. Sin embargo, las nuevas exigencias que deben cumplir estas soluciones, han demostrado que esta herramienta todavía puede ser perfeccionada. A través de hallazgos y redescubrimientos independientes por parte de la comunidad matemática surgió por fin una teoría que mejora en muchos casos a la de Fourier. Esta nace en la década de los 80's cuando Jean Morlet intentaba ofrecer a los geólogos una forma mas eficiente de buscar petróleo, mediante la aplicación de ruidos intensos. La idea que origina este hallazgo se basa en que como las ondas sonoras viajan a través de distintos materiales a velocidades distintas, permitiendo a los geólogos deducir el tipo de material que se encuentra bajo la superficie al enviar ondas sísmicas a la tierra y midiendo la rapidez con la que rebotan. Si las ondas se propagan especialmente rápido a través de una capa, puede tratarse de una bóveda salina que puede contener una capa de petróleo bajo ella. Solamente convertir la interpretación geológica en una onda sonora (o viceversa) constituye un problema matemático difícil, que los ingenieros resolvían tradicionalmente mediante el análisis de Fourier. Desgraciadamente, las señales sísmicas contienen gran cantidad de señales transitorias, cambios abruptos en la onda a medida que pasa de una capa de roca a otra. Estas señales transitorias contienen exactamente la información que buscan los geólogos, es decir, la localización de las capas rocosas, pero el análisis de Fourier extiende esa información espacial por todo el lugar, impidiendo una ubicación precisa de lo que buscaban los geólogos.

Por esta razón Morlet, desarrolló su propia forma de analizar las señales sísmicas para crear componentes que estuvieran bien localizadas en el espacio, a las que denominó “*wavelets de forma constante*” que posteriormente, se conocerían como “*wavelets de Morlet*”.

El método de Morlet no estaba en los libros, pero parecía funcionar. En su computadora personal, consiguió separar una onda en las *wavelets* que la componían y, a continuación, volver a unir las para reconstruir la onda original. Pero no estaba satisfecho con esta demostración empírica, por lo que comenzó a preguntar a otros científicos si el método era matemáticamente coherente. Morlet obtuvo la respuesta que deseaba de Alex Grossmann, con quien trabajó durante un año para confirmar que las ondas se podían reconstruir a partir de sus descomposiciones en *wavelets*. De hecho, las transformaciones *wavelets* resultaron funcionar mucho mejor que las de Fourier, porque eran menos susceptibles a pequeños errores de cómputo. Un error o un truncamiento indeseados de los coeficientes de Fourier pueden transformar una señal suave en una saltarina o viceversa; las *wavelets* evitan tales consecuencias desastrosas. [FAU-FUE]

Meyer continuó el trabajo de Morlet para descubrir un nuevo tipo de *wavelet* con una propiedad matemática denominada ortogonalidad que hacía que manipular y trabajar con la *transformación wavelet* resultara tan fácil como con una transformación de Fourier y lograba independencia entre la información que podrían aportar dos *wavelets* diferentes. Y lo que es probablemente más importante, se convirtió en el nexo de unión de la naciente comunidad dedicada a las *wavelets*.

En 1986, Stéphane Mallat, un antiguo alumno de Meyer, vinculó la teoría de *wavelets* a la literatura existente sobre codificación de subbandas y filtros de duplicación de cuadratura, que son las versiones de las *wavelets* de la comunidad de procesamiento de imágenes. La idea del análisis multiresolución (es decir, la observación de señales a distintas escalas de resolución) ya era familiar para los expertos en procesamiento de imágenes. Mallat, en colaboración con Meyer, demostró que las *wavelets* están implícitas en los procesos del análisis multiresolución. [AMA95]

Gracias al trabajo de Mallat, las *wavelets* se convirtieron en algo mucho más sencillo, ya que se podía hacer un análisis *wavelet* sin necesidad de conocer la fórmula de una *wavelet* madre. El proceso se redujo a sencillas operaciones de cálculo de promedio de grupos de píxeles en las que se toman sus diferencias una y otra vez. El lenguaje de las *wavelets* también resultaba más cómodo para los ingenieros eléctricos, que adoptaron términos familiares como "filtros" de "altas" y "bajas" frecuencias referenciados aquí como filtros paso-alto y paso-bajo.

Pero la última gran revolución de las *wavelets* se disparó en 1987, cuando la matemática Ingrid Daubechies, descubrió una clase completamente nueva de *wavelets*, que no sólo eran ortogonales (como las de Meyer) sino que también se podían implementar mediante sencillas ideas de filtrado digital, de hecho, mediante filtros digitales. Las nuevas *wavelets* eran casi tan sencillas de programar y utilizar como las *wavelets* de Haar (que consisten en un breve impulso positivo seguido de un breve impulso negativo), pero eran suaves. Los procesadores de señales disponían ahora de una herramienta de ensueño: una manera de descomponer datos digitales en contribuciones de diversas escalas. Al combinar las ideas de Daubechies y Mallat, se disponía de una transformación ortogonal y sencilla que se podía calcular rápidamente en computadoras digitales. [MAC01]

Las *wavelets* de Daubechies tienen características sorprendentes, como las conexiones estrechas con la teoría de fractales. Si su gráfico se observa aumentado, se pueden apreciar curvas de líneas irregulares con picos, independientemente del grado de aumento. Esta exquisita complejidad de detalle significa que no hay una fórmula simple para estas *wavelets*. Son desgarbadas y asimétricas; los matemáticos del siglo XIX habrían retrocedido ante ellas con horror. Pero al igual que el Ford modelo T, son bellas porque funcionan. Las *wavelets* de Daubechies convierten la teoría en una herramienta práctica que cualquier científico con una formación matemática mínima puede programar y utilizar fácilmente. [MAC01]

La *transformada wavelet* es una herramienta matemática conocida como "el microscopio matemático" el cual tiene como característica principal la multi-resolución, es decir,

permite el cambio de escala, constituyendo un medio adecuado para el análisis de señales no estacionarias, sobre todo aquellas que presentan transiciones abruptas. El análisis de Fourier ha sido ampliamente aplicado en el desarrollo de estándares de imagen y video digital, pero se ha dado un vuelco de la comunidad científica e industrial hacia el análisis *wavelets*.

El campo de aplicaciones de las *wavelets* se presenta actualmente como un boom que gana cada vez mas fuerza y cobra mayor importancia. La creciente cantidad de artículos publicados sobre el tema así lo demuestra. Se busca aprovechar las ventajas inherentes que presentan las *wavelets* y su aplicación en campos tan diversos como la biomedicina, la geografía, la sismología, la industria, el cine, el procesamiento de señales, las telecomunicaciones, etc.

Las *transformaciones wavelet* continuas (CWT) por ejemplo, pueden ajustarse a escalas y orientaciones específicas, por lo que juegan un papel importante en la extracción de características de imágenes, ubicación de contornos, detección de bordes, análisis de texturas, herramientas para clasificación, codificación y compresión de imágenes [MURROM]. El análisis multiresolución permite ajustarse a los requerimientos de distintos entornos: icono, pantalla completa, impresora, etc. Su capacidad para modelar información visual de múltiples canales, las hace adecuadas para aplicaciones de visión de bajo nivel y animación digital con lo que han llegado a emplearse hasta en la industria cinematográfica. [MAC01]

Si se considera el caso de la interpretación de señales unidimensionales no estacionarias empleadas en medicina: electrocardiogramas (ECGs), fonocardiogramas, señal U del corazón, potencial evocado, electroencefalogramas (EEGs), etc. sumado a las imágenes medicas en particular: radiografías, tomografías, mamografías, etc. se abren muchas posibilidades para la detección y análisis de enfermedades como el cáncer de mama, y anomalías cardiacas o cerebrales, que cada año cobran miles de victimas. La misma compresión digital de imágenes en este campo permite incluir información en sistemas de administración radiológica, o sistemas de almacenamiento y comunicación de imágenes

(PACS), lo cual permitiría que muchos especialistas ubicados en lugares distintos puedan dar su opinión en un caso particular. Otras aplicaciones en biomedicina [UNS96] incluyen tecnologías para la evaluación de las condiciones pulmonares y respiratorias, ayudas auditivas, monitoreo en quirófano, estudios farmacológicos, etc [TIM95].

Los problemas de Muestreo irregular multidimensional, y la descontaminación de señales son temas familiares en el procesamiento de señales que pueden ser estudiados en el contexto de las *wavelets* y pueden llegar a permitir la remasterización de grabaciones de audio y video. Se puede tener *wavelets* adecuadas para reconocimiento de voz, radar, control de calidad, y trabajar el ruido en las señales que es quizás el problema más importante en telecomunicaciones, y su solución constituye uno de los principales retos de los ingenieros en este campo [CAB03].

En los sistemas de comunicaciones marítimos, las *wavelets* permiten estimar con facilidad el tiempo de retardo de Arribo y la Frecuencia Instantánea de las Señales en un Arreglo de Fase (SONAR). En los campos de codificación y compresión, los sistemas “multirate” y los bancos de filtros han jugado un rol importante, pues estos resultan de utilidad en la codificación de línea y modulación para algunas clases de canales. Es así como se ha llegado a sistemas multirate de banda ancha altamente dispersivos para comunicación inalámbrica multiusuario en presencia de desvanecimiento debido a la propagación multitrayecto, o a la modulación fractal que consiste en una estrategia de diversidad basada en *wavelets* y es útil para enlaces impredecibles de comunicaciones y aplicaciones de multidifusión donde la calidad de servicio pueda ser escogida por el usuario. También se habla de sistemas de modulación multiportadora basados en filtros multirate y transformaciones de superposición rápida, para uso en canales sujetos a interferencia intersímbolo severa e interferencia por banda estrecha. Sin lugar a dudas estos constituyen grandes paradigmas interrelacionados dentro de una amplia área de desarrollo que actualmente es muy activa [EME-APP].

Los datos geográficos tridimensionales tales como mapas de terreno digital y formaciones nubosas son una gran ayuda en muchos tipos de aplicaciones. El envío de este tipo de

información sobre Internet es un reto a afrontar debido al ancho de banda requerido. Las *wavelets* de segunda generación no solo permiten hacerlo, sino que además, compiten con una calidad comparable con el terreno original lograda a partir de la integración de datos de distintas procedencias y resoluciones. Es decir, que las *wavelets* aplicadas en el campo de la cartografía digital pueden servir mucho más allá de los fines geográficos, permitiendo predecir el clima, analizando fenómenos sísmológicos, y permitiendo soluciones adecuadas en las distintas áreas de ingeniería, entre otras muchas aplicaciones.

Hoy en día, las *wavelets* también son utilizadas por el FBI para codificar su base de datos de 30 millones de huellas dactilares. La firma Verifinger cuenta con un Paquete de Desarrollo Software (SDK) para el manejo de información de huellas digitales que permite el reconocimiento y comprobación de huellas a altas velocidades, con diferentes patrones de reconocimiento. La identificación por el iris también es una alternativa que queda abierta a las aplicaciones *wavelet*. [MAC01]

En la industria, el análisis de radiografías tomadas tras el proceso de soldadura de metales es de gran importancia para detectar posibles fallas en estructuras. Las *wavelets* al permitir resaltar ciertos detalles que de otro modo resultan invisibles, pueden ser de gran utilidad en la prevención de desastres que podrían ser ocasionados al colapsar alguna construcción.

Toda esta serie de aplicaciones, y en general cualquier aplicación *wavelets* requiere del proceso de filtrado, por ejemplo en el caso de la compresión de imágenes se hace necesario el empleo de filtros FIR con las *wavelets* Haar y Daubechies, en el estudio de la señal U del corazón se requiere bancos de filtros para implementar el algoritmo piramidal de Mallat y en el del Potencial Evocado los bancos de filtros descomponen la señal proveniente de un ECG en bandas de frecuencia. En el caso del SONAR, las *wavelets*, al filtrar la señal permiten eliminar efectos indeseables como la reverberación, permitiendo realizar más eficientemente las mediciones de las señales captadas [ROD-VAL]. Actualmente se implementa bancos de filtros multirate para objetivos de telecomunicaciones usando *wavelets*. Es decir, que el filtrado digital en sí es la herramienta primordial requerida

cuando de trabajar señales discretizables se trata, ya sea que se realice desde el análisis de Fourier o *wavelet*.

En este trabajo se presentan los enfoques de cómo utilizar los análisis *wavelet* y Fourier en el diseño e implementación de filtros digitales FIR para comparar su desempeño mediante simulaciones computarizadas utilizando imágenes fijas en escala de grises. En el capítulo 2 se presenta la fundamentación teórica necesaria para el desarrollo de este trabajo en lo concerniente a la parte matemática. En el capítulo 3 aparecen los fundamentos de filtros digitales FIR y análisis *wavelet*. Y finalmente en los capítulos 4 y 5 se analizan y se evalúan los resultados, para luego sacar algunas conclusiones y recomendaciones.

2. FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS

Tras haber visto cómo se gestaron los *análisis de Fourier y wavelet*, y haber considerado algunas de las aplicaciones que de ellos se derivan al tomar como punto de partida el filtrado digital, se procede ahora a realizar la descripción formal de las *Teorías de Fourier y wavelet*, realizando previamente un estudio rápido de los conceptos de algebra lineal que brindan el soporte matemático a las dos teorías.

De ningún modo se pretende restar relevancia a los diferentes elementos del algebra lineal no tratados en este documento, pero que son fundamentos de los que si se consideran aquí. Esta restricción de contenidos, obedece más a la pretensión de llegar a las *teorías de Fourier y wavelets* de una forma amena para el lector, sin extenderse en el rigor matemático y dando prevalencia a la forma en que éstas se aplican al filtrado digital.

La notación matemática empleada de aquí en adelante será la siguiente:

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ es el conjunto de todos los enteros positivos o simplemente naturales.

$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ es el conjunto de números enteros.

\mathbb{R} es el conjunto de números reales y \mathbb{C} el conjunto de números complejos.

Un vector se representa por una letra minúscula negrita e itálica, por ejemplo \mathbf{x} .

Una variable es representada por una letra minúscula itálica, por ejemplo x .

La representación de los escalares se hace con una letra minúscula normal.

Un conjunto es representado por una letra mayúscula itálica y una matriz por una letra mayúscula itálica y negrita.

2.1 FUNDAMENTOS EN ÁLGEBRA LINEAL

Definición 2.1. Un *espacio vectorial* está constituido de los siguientes elementos [FAU-FUE]:

1. Un cuerpo K de escalares;
2. Un conjunto V de objetos llamados vectores;
3. Una operación binaria $+: V \times V \rightarrow V$ tal que $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rightarrow \mathbf{x} + \mathbf{y}$, satisface:
 - (a) $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$
 - (b) $\mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z}) = (\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z}$
 - (c) Existe un único vector $\mathbf{0} \in V$, llamado vector nulo, tal que $\mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{x} = \mathbf{x}$, $\forall \mathbf{x} \in V$
 - (d) Para cada vector $\mathbf{x} \in V$, existe un único vector $-\mathbf{x} \in V$, tal que $\mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = \mathbf{0}$;
4. Una operación externa $\cdot: K \times V \rightarrow V$ tal que $(\alpha, \mathbf{x}) \rightarrow \alpha\mathbf{x}$, llamada multiplicación por escalar, que satisface para $\alpha, \beta \in K$ y $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$:
 - (a) $1 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x}$, $\forall \mathbf{x} \in V$
 - (b) $(\alpha \beta) \mathbf{x} = \alpha (\beta \mathbf{x})$
 - (c) $\alpha (\mathbf{x} + \mathbf{y}) = (\alpha\mathbf{x} + \alpha\mathbf{y})$
 - (d) $(\alpha + \beta) \mathbf{x} = \alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{x}$

Definición 2.2. Sea V un espacio vectorial sobre K . Un *subespacio* de V es un subconjunto $W \subset V$ que con las operaciones de adición vectorial y multiplicación escalar sobre V , es él mismo un espacio vectorial. [FAU-FUE]

Definición 2.3. Sea V un espacio vectorial sobre K . Una *base de V* es un conjunto de vectores linealmente independientes de V , que genera el espacio V . [FAU-FUE]

Definición 2.4. Sean V y W dos espacios vectoriales sobre el cuerpo K notados como $V(K)$ y $W(K)$ respectivamente. Una función $T: V \rightarrow W$ es una *transformación lineal* si cumple que: [FAU-FUE]

$$T(c\mathbf{x} + \mathbf{y}) = c(T\mathbf{x}) + T\mathbf{y}; \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V \text{ y } \forall c \in K.$$

Definición 2.5. Sea $K = \mathbb{R}$ o \mathbb{C} y $V(K)$. [FAU-FUE] Un *producto interno* sobre V es una función que asigna a cada par ordenado de vectores \mathbf{x}, \mathbf{y} de V un escalar $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ de K , de tal modo que $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ y $\forall c \in K$ se tiene:

$$(a) \langle \mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle;$$

$$(b) \langle c\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = c\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle;$$

$$(c) \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle = \overline{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle}, \text{ donde el super-rayado denota conjugación compleja;}$$

$$(d) \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle > 0 \text{ si } \mathbf{x} \neq 0;$$

obsérvese que (a), (b) y (c) implican:

$$(e) \langle \mathbf{x}, c\mathbf{y} + \mathbf{z} \rangle = \bar{c}\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle.$$

Es claro que si $K = \mathbb{R}$ la conjugación compleja no se aplica.

Definición 2.6. La *norma* o longitud de \mathbf{x} respecto al producto interno se define como:

$$\|\mathbf{x}\| = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle^{1/2} \quad (2.1)$$

Definición 2.7. Sea V un espacio con producto interno y sean $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$. Entonces \mathbf{x} es *ortogonal* a \mathbf{y} si $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0$. Ahora bien, si $S \subset V$, se dice que S es un *conjunto ortogonal* siempre que todos los pares de elementos distintos en S sean ortogonales. Además, se dice que S es un *conjunto ortonormal* si es ortogonal y cumple : [FAU-FUE]

$$\|\mathbf{x}\| = 1, \forall \mathbf{x} \in S \quad (2.2)$$

Definición 2.8. Sea H un subespacio de V . El *complemento ortogonal* de H , denotado por H^\perp , esta dado por

$$H^\perp = \{\mathbf{x} \in V : \langle \mathbf{x}, \mathbf{h} \rangle = 0, \forall \mathbf{h} \in H\} \quad (2.3)$$

2.2 ESPACIOS DE FUNCIONES Y ESPACIOS DE HILBERT

Sea S un conjunto arbitrario (\mathbb{Z} , caso discreto o \mathbb{R} , caso continuo) entonces \mathbb{C}^S denota el conjunto de todas las funciones $f: S \rightarrow \mathbb{C}$; en \mathbb{C}^S se cumple:

- a) $(kf)(s) = kf(s)$, $k \in \mathbb{C}$ y $f(s)$ es una función aplicada en s .
- b) $(f + g)(s) = f(s) + g(s)$, entonces \mathbb{C}^S es espacio vectorial complejo.

Se define ahora el producto interno así,

- a) Para el caso discreto donde $S = \mathbb{Z}$

$$\langle f, g \rangle \equiv \sum_{n=-\infty}^{\infty} \overline{f(n)} g(n), \quad (2.4)$$

con $f = g$

$$\|f\|^2 \equiv \langle f, f \rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |f(n)|^2 \quad (2.5)$$

Normalmente son sumas que divergen pero nos interesa el subespacio de funciones de norma finita. Es decir

$$H \equiv \left\{ f \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}, \|f\|^2 < \infty \right\} \quad (2.6)$$

Nombrado como *espacio de secuencias complejas de cuadrado sumable* y es denotado por $\mathcal{L}^2(\mathbb{Z})$.

- b) Para el caso continuo $S = \mathbb{R}$, se tiene

$$\langle f, g \rangle \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(t)} g(t) dt \quad (2.7)$$

Ahora si $f = g$,

$$\|f\|^2 \equiv \langle f, f \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt. \quad (2.8)$$

Pero la definición de Riemann no aplica para muchas funciones $f, g \in \mathbb{C}^{\mathbb{R}}$, lo que se resuelve mediante el concepto de integral de Lebesgue bajo el concepto de medida. Luego si $f, g \in \mathbb{C}^{\mathbb{R}}$ son medibles lo será $\overline{f(t)}g(t)$ y $|f(t)|^2$. Luego el espacio $H = \{f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}\}$ de funciones medibles tal que

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt < \infty \quad (2.9)$$

conformará el espacio básico de señales de variable real. En ingeniería se conocen como funciones de energía finita. Además H será el espacio de *funciones de cuadrado integrable* denotado por $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ llamados *espacios de Hilbert*. [KAI94]

2.3 TEORIA DE FOURIER

La representación de fenómenos físicos puede hacerse en el dominio del tiempo ($f(t)$) o en el dominio de la frecuencia ($F(\omega)$) mediante la Transformada de Fourier, haciendo de esta una herramienta muy utilizada en aplicaciones en el campo de la ingeniería.

La representación de una señal periódica mediante la suma de funciones seno y coseno es lo que se conoce como *Serie Trigonométrica* y está descrita en la ecuación siguiente: [FAU-FUE]

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \{a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \text{sen}(n\omega_0 t)\} \quad (2.10)$$

Cuando es posible calcular todos los coeficientes a_n y b_n mediante integración de la función $f(t)$, la serie toma el nombre de *Serie de Fourier*.

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) dt \\ a_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos(n\omega_0 t) dt \quad (n = 1, 2, \dots) \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \text{sen}(n\omega_0 t) dt \quad (n = 1, 2, \dots) \end{aligned} \quad (2.11)$$

Considerando que cualquier función puede expresarse como la suma de una componente par $E(t)$ y otra impar $O(t)$, esto es,

$$f(t) = E(t) + O(t) \quad (2.12)$$

donde

$$\begin{aligned} E(t) &= \frac{1}{2}[f(t) + f(-t)] \\ O(t) &= \frac{1}{2}[f(t) - f(-t)] \end{aligned} \quad (2.13)$$

se concluye que:

- Si f es par, $f(t) = f(-t)$, y su serie de Fourier sólo contiene términos de cosenos.
- Si f es impar, $f(t) = -f(-t)$, y su serie de Fourier sólo contiene términos de senos.

Su representación bidimensional está dada por: [EFF00]

$$f(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} a_{n,m} \cos[\omega(nx + my)] + b_{n,m} \text{sen}[\omega(nx + my)] \quad (2.14)$$

donde $\omega = 2\pi/L$ y L es el periodo en las dos dimensiones de f .

Ahora, la transformada de Fourier descompone o expande una señal o función en senos y cosenos de diferentes frecuencias cuya suma corresponde a la señal original, es decir que permite distinguir las diferentes componentes de frecuencia de la señal, y sus respectivas amplitudes. La transformada de Fourier de una función del tiempo $f(t)$ se define como [FAU-FUE]

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt \quad (2.15)$$

y la transformada inversa de Fourier, como

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega t} d\omega \quad (2.16)$$

Análogamente se define la transformada de Fourier de una función continua e integrable de dos variables así: [MAT02]

$$F(\omega_1, \omega_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(m, n)e^{-i\omega_1 m} e^{-i\omega_2 n} dmdn \quad (2.17)$$

Y su inversa:

$$f(m, n) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega_1, \omega_2)e^{i\omega_1 m} e^{i\omega_2 n} d\omega_1 d\omega_2 \quad (2.18)$$

Hay que tener en cuenta que la transformada de Fourier maneja propiedades como el escalamiento y translación (en tiempo y en frecuencia), convolución¹, correlación y dos importantes teoremas conocidos como *Teoremas de Parseval y Rayleigh* que establecen que la potencia y energía de la señal son siempre la misma sin importar si se analiza en el dominio del tiempo o de la frecuencia.

$$\text{Potencia Total} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |C_n|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt \quad (2.19)$$

donde $C_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ y,

$$\text{Energía Total} = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega \quad (2.20)$$

Para el caso práctico se requiere implementar la transformada dentro de un ambiente computacional y es necesario trabajar sólo con valores discretos de $f(t)$, ya que los computadores no manejan funciones continuas sino muestras que conforman la señal, es decir, valores de la forma f_k con $k = 0, 1, 2, \dots$. Esto significa que mediante el uso de un computador es posible calcular la transformada $F(\omega)$ sólo para valores discretos de ω .

Si se supone ahora que $f(t)$ es una señal periódica de período T y que sólo se conoce sus valores en N instantes igualmente espaciados. Entonces, si $f(kT_s)$ corresponde a la k -ésima muestra de $f(t)$ y $F(n\omega_s)$, donde $\omega_s = 2\pi f_s$ (f_s es la frecuencia con la que se realiza el muestreo) corresponde a la n -ésima muestra de $F(\omega)$, y además si se define a N como el número de muestras de la señal o longitud de la señal, se obtiene la forma discreta de la *Transformada de Fourier* así, [FAU-FUE]

$$F_n = \sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-\frac{i2\pi kn}{N}} \quad \text{con } n, k = 0, 1, 2, \dots, N-1. \quad (2.21)$$

¹ La convolución (caso unidimensional) de las funciones f y h está definida por $f(t)*h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)h(t-\tau)d\tau$ donde $f(t)*h(t) \Leftrightarrow F(\omega)H(\omega)$.

La convolución puede aplicarse en imágenes si se emplea la versión bidimensional de la misma. Una descripción de esta técnica puede encontrarse en [EFF00] [MAT02].

Como

$$f_k = f\left(k \frac{T}{N}\right) \quad \text{con } T_s = \frac{T}{N} \quad (2.22)$$

entonces

$$F_n = F(n\omega_s) \quad \text{con } \omega_s = \frac{2\pi}{T} \quad (2.23)$$

Siempre que F_n tenga periodo N al igual que f_k , al conjunto de coeficientes (F_n) $n = 0, 1, 2, \dots, N-1$ se le conoce como la *Transformada Discreta de Fourier* o DFT de las muestras (f_k) , $k = 0, 1, 2, \dots, N-1$.

De forma similar la *Inversa de la Transformada Discreta de Fourier* o IDFT, está definida mediante la siguiente expresión:

$$f_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} F_n e^{i \frac{2\pi kn}{N}} \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (2.24)$$

Si se desea ver la Transformada discreta de fourier bidimensional se puede consultar la referencia [EFF00], [MAT02].

La transformada de Fourier permite conocer todas las componentes de frecuencia existentes en la señal y sus respectivos aportes energéticos, es decir, presenta una perfecta resolución en frecuencia que la hace una herramienta muy útil para el análisis de señales estacionarias. Pero tiene el inconveniente de no permitir conocer de manera precisa cuándo o dónde las diferentes componentes de frecuencia se encuentran en la señal como es el caso de señales cuasi-estacionarias o no estacionarias cuyo contenido espectral varía con el tiempo. En otras palabras, la transformada de Fourier posee una muy pobre resolución en tiempo. Denis Gabor en 1946 intenta proporcionar resolución en el tiempo utilizando un procedimiento llamado *ventaneo* que consiste en dividir una señal $x(t)$ en pequeños segmentos a través del tiempo de tal manera que se pueda asumir que la señal es estacionaria en cada segmento y así calcular la transformada de Fourier clásica para cada porción de la señal. [FAU-FUE]

La señal se divide mediante una *función tiempo – ventana* $w(t)$ cuyo ancho o soporte corresponde a la longitud de cada segmentación de la señal. Esta función encuadra la señal alrededor de un instante de tiempo τ y permite calcular su transformada de Fourier, luego se traslada la función ventana para cubrir una nueva porción de la señal sin que se traslapen con la cubierta anteriormente y se vuelve a calcular su transformada de Fourier. Este proceso se repite hasta cubrir la totalidad de la señal.

El resultado anterior se conoce como la *Transformada Corta de Fourier* o STFT y se define en forma matemática de la siguiente manera:

$$STFT(t, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)w^*(\tau - t)e^{-i\omega t} dt \quad (2.25)$$

Ahora si se considera a $w(t)$ como una función ventana de valores solo reales de tal manera que $w(-t) = w^*(t)$ donde * indica el complejo conjugado, entonces,

$$STFT(t, \xi) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)w(\tau - t)e^{-i\xi t} dt \quad (2.26)$$

que calcula el producto interno entre la señal y la función tiempo – ventana trasladada y modulada.

Ahora bien, el soporte de la ventana constituye un parámetro de gran importancia ya que establece un compromiso entre resolución en tiempo y resolución en frecuencia, de tal manera que al establecer una ventana angosta se analiza una pequeña parte de la señal teniéndose una buena resolución en tiempo pero pobre en frecuencia ya que solo se conoce una pequeña fracción del espectro total de la señal. Por el contrario, si la ventana es muy ancha se tiene una buena resolución en frecuencia pero pobre resolución en tiempo. En el caso extremo una ventana de ancho infinito corresponde a la transformada de Fourier clásica. Por lo tanto un defecto de la STFT es que no puede entregar una buena resolución tanto en tiempo como en frecuencia de manera instantánea ya que el soporte de la ventana es fijo. [FAU-FUE]

A partir de este inconveniente surge la inquietud sobre si es posible tener una ventana con rango dinámico que permita realizar un análisis de la señal de manera ideal, es decir, tener una buena resolución en tiempo para frecuencias altas, y una buena resolución en frecuencia para analizar las frecuencias bajas. Precisamente como solución a este problema tiene lugar la herramienta matemática llamada *transformada wavelet*.

2.4. TRANSFORMADA WAVELET

De manera similar como la transformada de Fourier descompone una función o señal a analizar en funciones senoidales, la transformada *wavelet* la descompone en términos de funciones denominadas *wavelets*. Esta transformada comprende básicamente la *transformada continua wavelet* (CWT) y la *transformada discreta wavelet* (DWT), herramientas matemáticas que posibilitan el análisis de señales proporcionando información en el dominio del tiempo y en el dominio de la frecuencia. El análisis mediante la CWT se efectúa sobre señales analógicas de energía finita (definida en el Teorema de Parseval).

2.4.1 Transformada Wavelet Continua (CWT)

Así como lo hace la STFT, esta transformada utiliza una función ventana con la cual se analiza por intervalos una señal, sin embargo, esta ventana es de ancho variable. La CWT intenta expresar una señal $x(t)$ continua en el tiempo, mediante una expansión de términos o coeficientes proporcionales al producto interno entre la señal y diferentes versiones escaladas y trasladadas de una función prototipo $\psi(t)$, conocida como *wavelet madre*. Entre este tipo de *wavelets* una de las más conocidas es la *Haar* representada en la Figura 2.1, siendo ésta la más antigua y simple de todas, no obstante, debido a su forma es muy utilizada para analizar señales que presentan cambios abruptos.

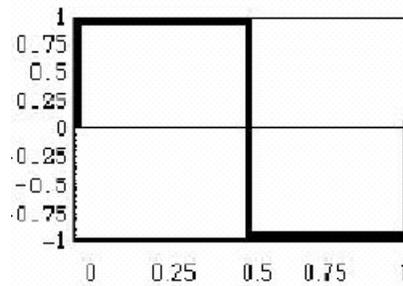


Figura 2.1. Función *Wavelet Haar*

Algunos ejemplos de otras *wavelets madre* se muestran en la Figura 2.2.

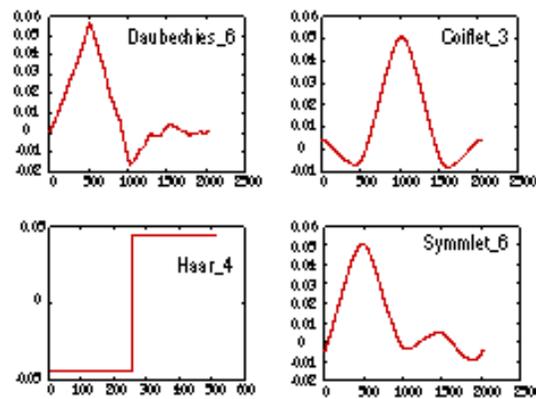


Figura 2.2. Funciones *wavelets* más comunes.

Partiendo de que tanto la señal $x(t)$ como la *función wavelet madre* $\psi(t)$ son de energía finita, entonces se define la CWT de una señal $x(t)$ como:

$$\text{CWT}(a,b) = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) dt, \quad a, b \in \mathbb{R} \text{ y } a \neq 0 \quad (2.27)$$

Donde la variable a determina el ancho o soporte de la función ventana y la variable b determina la ubicación en el dominio del tiempo de la misma. De acuerdo a esto se identifica a la variable a como *variable de escala*, la cual permite comprimir (reducir la escala) o dilatar (subir la escala) la función $\psi(t)$, en otras palabras, establece el grado de resolución con el cual se analiza la señal, mientras que la variable b se llama *variable de traslación*.

De acuerdo a la definición de la CWT puede concluirse que más que una representación tiempo-frecuencia, es una representación tiempo-escala, en tanto que la información global de la señal, es decir, las bajas frecuencias, se analizan con altas escalas y se obtiene buena resolución en frecuencia, mientras que los detalles de la señal, correspondientes a las altas frecuencias, se analizan con bajas escalas, con lo que se obtiene buena resolución en tiempo. En este sentido, se dice que la escala y la frecuencia tienen una relación inversamente proporcional. La representación gráfica de la CWT se realiza en un plano denominado *plano tiempo-escala*, mostrado en la Figura 2.3.

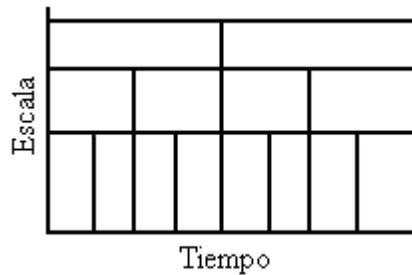


Figura 2.3. Plano Escala-Tiempo en la CWT.

Desde un punto de vista intuitivo, la CWT consiste en calcular un índice de semejanza entre la señal que está siendo analizada, y la *wavelet*, tal como se muestra en la Figura 2.4, en donde el proceso de cálculo de la CWT se puede describir mediante los siguientes pasos: [FAU-FUE], [CUE01]

1. Tomar una *wavelet madre* y compararla con un intervalo al principio de la señal original. Figura 2.4(a)
2. Dados dos valores a y b , calcular un coeficiente $c_{a,b}$ (lo cual se estudiará en la sección 2.4.4) que representa la correlación entre la *wavelet* y la sección de la señal bajo análisis. Entre mayor sea el valor del coeficiente, mayor es la similitud, de ahí que los resultados dependerán de la *wavelet* elegida para hacer dicho análisis.
3. Desplazar la *wavelet* en el sentido positivo del eje temporal, y repetir los pasos anteriores hasta que se haya cubierto la totalidad de la señal. Figura 2.4 (b)
4. Escalar la *wavelet* en el tiempo y repetir los pasos 1 a 3. Figura 2.4 (c)

Un ejemplo de este proceso se representa en la Figura 2.4.

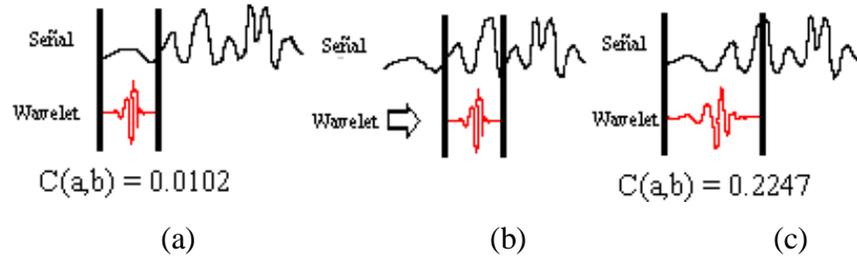


Figura 2.4. Modo de funcionamiento de la CWT.

La definición de la CWT puede expresarse en términos de la transformada de Fourier aplicando el Teorema de Parseval (Sección 2.3), como: [FAU-FUE]

$$\text{CWT}(a,b) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) \Psi(a\omega) e^{2\pi i \omega b} d\omega \quad (2.28)$$

donde $X(\omega)$ y $\Psi(\omega)$ son las transformadas de Fourier de $x(t)$ y $\psi(t)$ respectivamente. Es importante anotar que para que el análisis *wavelet* de una señal sea posible y se logre una perfecta reconstrucción de la misma a partir de la transformada, la función $\psi(t)$ debe cumplir con la condición de admisibilidad [CHU97], desprendiéndose que: [FAU-FUE]

$$\Psi(0) = 0 \quad (2.29)$$

El cumplimiento de esta condición significa que el valor medio de ψ debe ser igual a cero por lo tanto debe tener valores tanto positivos como negativos, en otras palabras, se requiere que sea una onda. Además, teniendo en cuenta que la función *wavelet* analiza la señal por intervalos de tiempo de acuerdo al tamaño de la ventana, se dice que ésta es de *soporte compacto*, es decir, es una onda definida sobre un intervalo de tiempo finito, de ahí su nombre *wavelet*, ondelette o simplemente ondita.

2.4.2 Transformada Discreta Wavelet (DWT)

A nivel teórico se habla de la *transformada wavelet continua*, donde dicha continuidad radica en el hecho que la variable de escala y la variable de traslación varían en forma continua. Sin embargo a nivel práctico se hace necesario discretizar la transformada, y la solución más lógica es asignar valores discretos a las dos variables mencionadas, dando lugar así a la *Transformada Wavelet Discreta* DWT. La forma más común de discretizar los valores de a y b es utilizar una red diádica, es decir, $a = 2^{-j}$ y $b = k 2^{-j}$ con $j, k \in \mathbb{Z}$, de tal manera que el conjunto de *funciones wavelets* determinadas por: [FAU-FUE]

$$\psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right); \quad a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0. \quad (2.30)$$

adquiere la forma:

$$\psi_{j,k}(t) = 2^{\frac{j}{2}} \psi(2^j t - k); \quad j, k \in \mathbb{Z}. \quad (2.31)$$

Este conjunto de funciones se conoce como la *versión diádica discretizada* de la *función wavelet* o como *conjunto de expansión wavelet*, y es el resultado de traslaciones y escalamientos de la *función wavelet madre* $\psi(t)$. El factor $2^{\frac{j}{2}}$ se denomina *constante de normalización* y se hace necesario para cumplir con la condición de ortonormalidad (Ver sección 2.1).

La *función wavelet madre* $\psi(t)$ lleva asociada consigo una función escala $\phi(t)$, de tal manera que con una de estas funciones o con ambas es posible aproximar cualquier función $f(t) \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$, de la siguiente forma:

$$f(t) = \sum_k \sum_j c_{j,k} \phi(t) + \sum_k \sum_j d_{j,k} \psi(t); \quad j, k \in \mathbb{Z} \quad (2.32)$$

donde se ha aproximado f en términos de la función escala $\phi(t)$ y de la *función wavelet* $\psi(t)$. [FAU-FUE], [CUE01]

2.4.3 Descomposición de señales unidimensionales

El desarrollo de bancos de filtros y de los algoritmos diseñados para la DWT, no se relaciona directamente con las funciones *escala* y *wavelet*, sino con los coeficientes relacionados a estas funciones, por lo tanto, el primer paso en la descomposición es poder encontrar los coeficientes $c_{n-1,k}$ y $d_{n-1,k}$ en términos de $c_{n,k}$. [FAU-FUE]

Una señal unidimensional de energía finita se puede representar mediante los coeficientes $c_{n,k}$ como:

$$f(t) = \sum_{k \in \mathbb{I}} c_{n,k} 2^{\frac{n}{2}} \phi(2^n t - k) \quad (2.33)$$

Se sabe también que tanto la función escala $\phi(t)$ como la *wavelet* $\psi(t)$, generan bases ortogonales en \mathcal{L}^2 , así que el cálculo de $c_{n-1,k}$ y $d_{n-1,k}$ se realiza a través del producto interno de la señal con la función *escala* y *wavelet* respectivamente, esto es:

$$c_{n-1,k} = \langle f(t), \phi_{n-1,k}(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) 2^{\frac{n-1}{2}} \phi(2^{n-1} t - k) dt \quad (2.34)$$

$$d_{n-1,k} = \langle f(t), \psi_{n-1,k}(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) 2^{\frac{n-1}{2}} \psi(2^{n-1} t - k) dt \quad (2.35)$$

Es posible obtener una representación tanto para $\phi(2^{n-1} t - k)$ como para $\psi(2^{n-1} t - k)$ así: [FAU-FUE]

$$\phi(2^{n-1} t - k) = \sum_p h(p) \sqrt{2} \phi(2^n t - 2k - p) \quad (2.36)$$

$$\psi(2^{n-1} t - k) = \sum_p g(p) \sqrt{2} \phi(2^n t - 2k - p) \quad (2.37)$$

Ahora bien, reemplazando las dos últimas expresiones en las integrales de (2.34) y (2.35) y haciendo un cambio de variable $p = m - 2k$ se obtiene:

$$c_{n-1,k} = \langle f(t), \phi_{n-1,k}(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sum_m h(m - 2k) 2^{\frac{n}{2}} \phi(2^n t - m) dt \quad (2.38)$$

$$d_{n-1,k} = \langle f(t) , \psi_{n-1,k}(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sum_m g(m-2k) 2^{\frac{n}{2}} \phi(2^n t - m) dt \quad (2.39)$$

o lo que es lo mismo:

$$c_{n-1,k} = \langle f(t) , \phi_{n-1,k}(t) \rangle = \sum_m h(m-2k) \int_{-\infty}^{\infty} f(t) 2^{\frac{n}{2}} \phi(2^n t - m) dt \quad (2.40)$$

$$d_{n-1,k} = \langle f(t) , \psi_{n-1,k}(t) \rangle = \sum_m g(m-2k) \int_{-\infty}^{\infty} f(t) 2^{\frac{n}{2}} \phi(2^n t - m) dt \quad (2.41)$$

Observándose que en (2.40) y (2.41) las integrales son idénticas y corresponden al coeficiente $c_{n,m}$, es decir, se obtuvo una representación de los coeficientes *escala* y *wavelets* en un nivel de resolución más bajo en términos de los coeficientes *escala* en un nivel de resolución más alto. Una descripción matemática de lo anteriormente expuesto se muestra en las relaciones:

$$c_{n-1,k} = \sum_m h(m-2k) c_{n,m} \quad (2.42)$$

$$d_{n-1,k} = \sum_m g(m-2k) c_{n,m} \quad (2.43)$$

Se observa entonces que la secuencia de entrada dada por $c_{n,k}$ se convoluciona con h y g para obtener por un lado una representación más “suave” de la señal original representado por los coeficientes *escala* $c_{n-1,k}$, y por otro lado el detalle de la señal representado por los *coeficientes wavelet* $d_{n-1,k}$. Con ello (2.33) toma la forma:

$$f(t) = \sum_k c_{n-1,k} 2^{\frac{n-1}{2}} \phi(2^{n-1} t - k) + \sum_k d_{n-1,k} 2^{\frac{n-1}{2}} \psi(2^{n-1} t - k) \quad (2.44)$$

Como se ha mencionado en varias ocasiones, los *coeficientes de escala* representan la forma general de la señal original y los *coeficientes wavelets* el detalle de la misma, pues bien, este hecho se debe a que los coeficientes h y g actúan como filtros digitales. Específicamente h actúa como un filtro pasa-bajas y g como un filtro pasa-altas. Sin embargo, al aplicar estas operaciones sobre una señal digital real, resulta a la salida una señal con el doble de datos de entrada. Lo anterior se soluciona aplicando una operación

denominada submuestreo justamente después de efectuar la convolución discreta sobre el conjunto de datos de entrada, esta operación realiza un diezmado de la señal original, es decir, si se tiene una señal x_n el submuestreo produce una salida $y_n = x_{2n}$, o sea descarta todos los valores de índice impar. En la figura 2.5 se representa la situación expuesta, mostrando una *descomposición wavelet*, en donde el 2 con la flecha hacia abajo representa la operación del submuestreo.

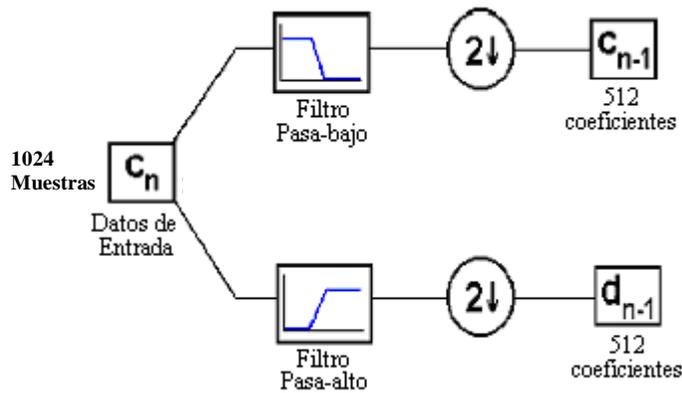


Figura 2.5. Descomposición wavelet.

2.4.4 Reconstrucción de señales unidimensionales

Hasta el momento se ha estudiado la forma cómo opera la DWT para analizar o descomponer una señal, ahora bien, interesa en este momento saber el proceso inverso, es decir, cómo recuperar la señal original sin pérdida de información a partir de las componentes obtenidas durante el análisis, a este proceso de reconstrucción se le denomina *síntesis* y corresponde a la inversa de la *transformada discreta wavelet* (IDWT). El proceso de síntesis busca representar los coeficientes escala en un nivel de resolución más alto mediante una combinación de los coeficientes *escala* y *wavelets* en un nivel de resolución más bajo. [FAU-FUE]

Con el propósito de estudiar más a fondo el proceso de síntesis, observe que si se utiliza la ecuación de recursión [FAU-FUE] para reemplazar $\phi(2^{n-1}t - m)$ y $\psi(2^{n-1}t - m)$ en (2.44) se obtiene una nueva expresión para f así:

$$f(t) = \sum_m c_{n-1,m} \sum_p h(p) 2^{\frac{n}{2}} \phi(2^n t - 2m - p) + \sum_m d_{n-1,m} \sum_p g(p) 2^{\frac{n}{2}} \phi(2^n t - 2m - p) \quad (2.45)$$

luego, si se multiplica ambos lados de la ecuación anterior por $\phi(2^n t - k)$ e integrando con respecto al tiempo se llega a:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \phi(2^n t - k) dt &= \sum_m c_{n-1,m} \sum_p h(p) 2^{\frac{n}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(2^n t - 2m - p) \phi(2^n t - k) dt \\ &+ \sum_m d_{n-1,m} \sum_p g(p) 2^{\frac{n}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(2^n t - 2m - p) \phi(2^n t - k) dt \end{aligned} \quad (2.46)$$

Ahora, como $c_{n,k} = \langle f(t), \phi_{n,k}(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) 2^{\frac{n}{2}} \phi(2^n t - k) dt$ y el conjunto $\{\phi_{n,k}; k \in \mathbb{Z}\}$ es ortonormal, entonces de acuerdo con (2.43) se tiene que:

$$c_{n,k} = \sum_m c_{n-1,m} \sum_p h(p) \delta(k - (2m - p)) + \sum_m d_{n-1,m} \sum_p g(p) \delta(k - (2m + p)) \quad (2.47)$$

si se realiza la sustitución $q = 2m - p$ se llega a:

$$c_{n,k} = \sum_m c_{n-1,m} \sum_p h(p) \delta(k - q) + \sum_m d_{n-1,m} \sum_p g(p) \delta(k - q) \quad (2.48)$$

pero además se tiene que:

$$\delta(k - q) = \begin{cases} 1 & \text{si } k = q \\ 0 & \text{si } k \neq q \end{cases}$$

entonces finalmente se obtiene la expresión para $c_{n,k}$:

$$c_{n,k} = \sum_m c_{n-1,m} h(2m - k) + \sum_m d_{n-1,m} g(2m - k) \quad (2.49)$$

Observe que en el proceso de análisis se hace un filtrado y un submuestreo, de igual manera en el proceso de síntesis se realiza un subremuestreo y posteriormente un filtrado. El subremuestreo es una operación que inserta ceros entre cada par de muestras con el fin de aumentar al doble la longitud de las componentes de entrada (coeficientes *escala* y

wavelet) de tal manera que la señal obtenida después del filtrado tenga la misma longitud que la señal original. En la figura 2.6, se representa lo expuesto anteriormente, mostrando la *reconstrucción wavelet* donde el 2 con la flecha hacia arriba representa la operación del sobremuestreo.

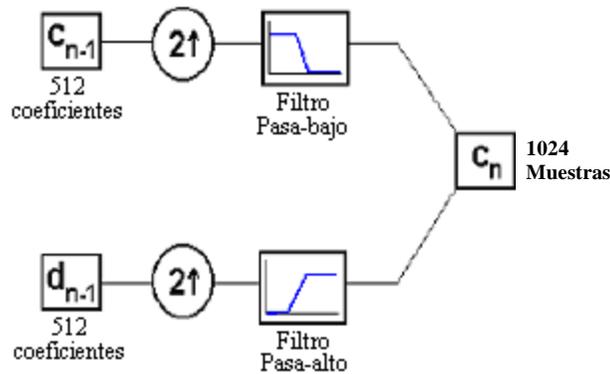


Figura 2.6. Reconstrucción *wavelet*.

Los procesos de análisis y síntesis explicados anteriormente son iterativos y en la práctica el nivel de resolución de la señal original es el que determina el límite de esa iteración. Estos dos procesos constituyen lo que se denomina un sistema de banco de filtros de 2 canales.

Para entender mejor el proceso iterativo del cual se hizo mención, considere una señal con una longitud $N=2^n$, en el análisis se divide la señal original en una aproximación y un detalle correspondientes al primer nivel de descomposición, luego la aproximación de longitud igual a 2^{n-1} se divide nuevamente obteniendo una nueva aproximación y detalle correspondientes a un segundo nivel de descomposición, se continúa este procedimiento hasta que la aproximación y el detalle sean representados por un sólo coeficiente, es decir, hasta que tenga una longitud de $1=2^0$. Con lo anterior fácilmente se deduce que el número de iteraciones posibles de realizar es de $n=\log_2 N$. Finalmente se obtiene un vector de longitud N que contiene en su primera componente un término que representa la forma general de la señal (coeficiente escala) y todos los demás componentes representan la información sobre el detalle obtenido en los diferentes niveles de descomposición

(coeficientes wavelets), a este vector se le denomina *vector DWT*. Una ilustración gráfica de lo anteriormente expuesto se representa en la figura 2.7.

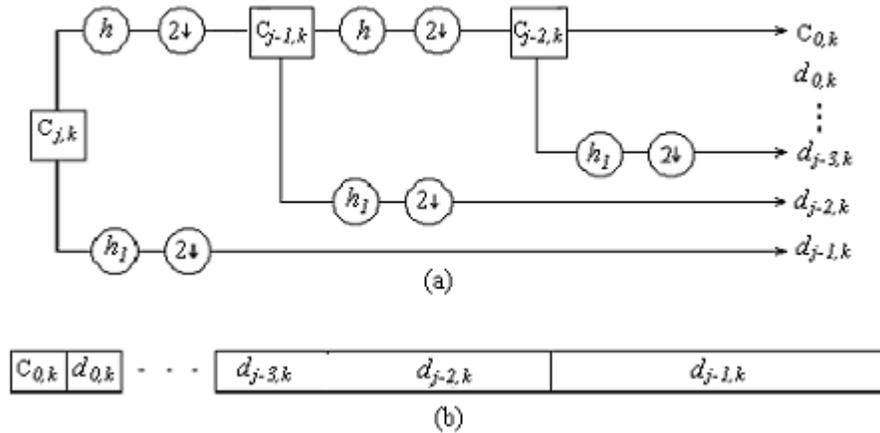


Figura 2.7. (a) Proceso de análisis, (b) Vector - DWT.

Por otro lado, el proceso de síntesis realiza el procedimiento inverso al previamente explicado, es decir, toma la aproximación y el detalle, aumenta la longitud al doble mediante el sobremuestreo y realiza la convolución discreta con los respectivos filtros, obteniéndose como resultado una mejor aproximación a la señal correspondiente al primer nivel de reconstrucción. Lógicamente el número de veces que se realiza este proceso hasta llegar nuevamente a la señal original depende del grado de descomposición al que se llegó en el análisis. En la figura 2.8 se muestra este proceso de síntesis.

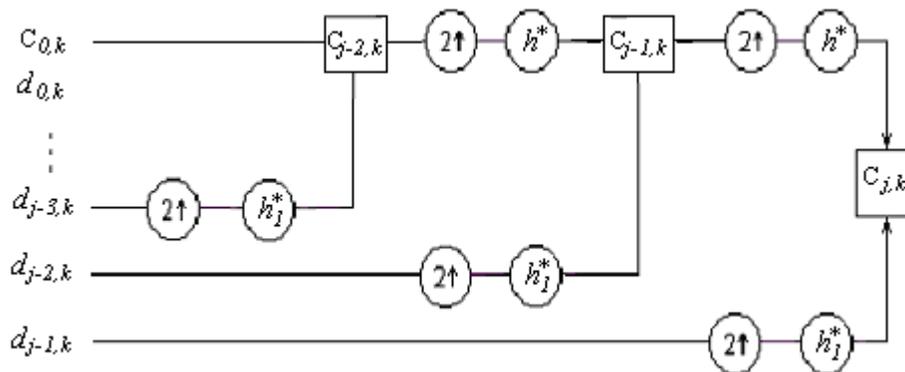


Figura 2.8. Proceso de síntesis.

Hasta aquí se describen lo referente a las *wavelets* unidimensionales. La teoría se extiende al caso bidimensional de acuerdo con lo planteado por [MAL99].

3. FILTROS DIGITALES Y ANALISIS WAVELET

En el tratamiento digital de señales normalmente se abarca una gran cantidad de tópicos en lo que se refiere al filtrado digital, por esta razón y para dar mas precisión al tema que nos concierne en este trabajo, solamente se van a tratar los filtros digitales lineales e invariantes en el tiempo, o LTI (*Linear Time Invariant*) de su traducción al ingles.

Este capitulo presenta el filtrado digital de señales en tiempo discreto a partir de las propiedades de la transformada de Fourier estudiadas en el capitulo anterior, y algunas nociones básicas de los sistemas discretos que se estudian a continuación.

3.1 CONCEPTOS GENERALES

Los filtros digitales se reconocen como sistemas discretos que a partir de una señal muestreada extraen alguna característica frecuencial de interés. Sus aplicaciones se pueden dividir básicamente en dos: separación y restauración de señales. La separación se aplica cuando se trata de señales contaminadas con interferencia, ruido u otras señales. El filtro busca separar las señales de tal forma que puedan ser analizadas independientemente. La restauración se aplica cuando se trata de señales con algún tipo de distorsión, en este caso el filtro busca “restaurar” como su nombre indica la señal original.

Aunque los filtros analógicos pueden emplearse para efectuar las mismas operaciones de los filtros digitales, los resultados en desempeño que se obtienen con estos últimos siempre son muy superiores, además como se verá mas adelante permiten mejorar algunas características existentes e incorporar otras que no tienen contraparte en el filtrado analógico.

3.1.1 Señales y Sistemas en Tiempo Discreto

Una *señal en tiempo discreto* es aquella que se obtiene a partir del muestreo a intervalos regulares de una señal de tiempo continuo $x(t)|_{t=t_k} \rightarrow \{x(t_k)\}$, $k \in \mathbf{Z}$. Una secuencia de la forma x_0, x_T, x_{2T}, \dots , constituye la señal muestreada. T es el periodo de muestreo que se aplica a la señal de tiempo continuo. Esta secuencia de valores muestreados puede representarse mediante $\{x_k\}$.

Cuando el muestreo resulta de un proceso iterativo realizado en un computador digital lo que se obtiene es una secuencia de números x_0, x_1, x_2, \dots . Esta secuencia se puede representar por

$$\left\{ \dots, x_{-2}, x_{-1}, \underset{\uparrow}{x_0}, x_1, x_2, \dots \right\} \Leftrightarrow \{x_k\} \quad (3.1)$$

en donde $k \in \mathbf{Z}$ es el índice asociado con su elemento respectivo. El punto de referencia de la secuencia corresponde al índice 0.

Un *sistema discreto* puede entenderse como un algoritmo que permite transformar una secuencia en otra según muestra la ecuación (3.2). De estos sistemas se distinguen dos tipos, conocidos como estáticos y dinámicos. En un sistema discreto estático cada elemento de la secuencia de salida depende únicamente del elemento de entrada de índice igual al suyo. Por su parte un sistema discreto dinámico, tiene elementos en la salida que pueden depender de elementos de entrada y salida con diferentes índices.

$$\{y_k\} = f\{x_k\} \quad (3.2)$$

3.1.2 Causalidad

La *causalidad* de un sistema discreto se da si la salida en un instante dado es función tanto de la entrada en ese instante como de las entradas y salidas anteriores.

Otra forma de ver la causalidad es que la salida no debe preceder a la excitación, haciendo del sistema discreto un sistema físicamente realizable. Es decir,

$$y_k = f(y_{k-1}, y_{k-2}, \dots, x_k, x_{k-1}, x_{k-2}, \dots) \quad (3.3)$$

3.1.3 Linealidad e Invarianza Temporal

Un sistema discreto es *lineal* cuando la función que relaciona elementos de entrada para producir un elemento de salida es una función lineal.

$$f(ax_1 + bx_2) = af(x_1) + bf(x_2) \quad (3.4)$$

Más específicamente, un sistema causal es lineal cuando la función que lo define, ecuación (3.3) toma la siguiente forma

$$y_k = a_1 y_{k-1} + a_2 y_{k-2} + \dots + a_n y_{k-n} + b_0 x_k + b_1 x_{k-1} + \dots + b_m x_{k-m} \quad (3.5)$$

Cuando en la ecuación (3.5) se tienen a_i y b_i constantes, el sistema se conoce como *lineal e invariante en el tiempo* (LTI). En este trabajo únicamente se consideran los filtros digitales que corresponden a sistemas discretos dinámicos causales lineales e invariantes en el tiempo

3.1.4 Ecuación de Diferencias

En un sistema lineal, la excitación y la respuesta del sistema pueden relacionarse mediante una *ecuación de diferencias*, ecuación (3.6) que funciona de manera análoga a una ecuación diferencial lineal en la descripción de un sistema continuo. [PLA_CAR]

$$a_0(k)y_k + a_1(k)y_{k-1} + \dots + a_N(k)y_{k-N} = b_0(k)x_k + \dots + b_M(k)x_{k-M} \quad (3.6)$$

Es decir,

$$\sum_{n=0}^N a_n(k) y_{k-n} = \sum_{m=0}^M b_m(k) x_{k-m} \quad (3.7)$$

Como en un sistema lineal invariante, los coeficientes son constantes, la ecuación anterior se puede reescribir de tal forma que se exprese la salida en función de las entradas y las salidas anteriores.

$$y(k) = \sum_{m=0}^M \frac{b_m}{a_0} x_{k-m} - \sum_{n=0}^N \frac{a_n}{a_0} y_{k-n} \quad (3.8)$$

3.1.5 Respuesta al Impulso o Secuencia de Ponderación

La *secuencia de ponderación* definida en la ecuación (3.9) es aquella que se obtiene a la salida del sistema tras la aplicación de un impulso¹ como secuencia de entrada. Se hace alusión a ella como *respuesta al impulso*, puesto que es el nombre más difundido. Para un sistema causal esta respuesta debe tomar valores iguales a cero para todo g_k anterior a g_0 .

$$\{g_k\} = \{\dots, g_{-2}, g_{-1}, g_0, g_1, g_2, \dots\} \quad (3.9)$$

En un sistema discreto lineal la salida puede expresarse en función de la respuesta al impulso mediante

$$y_k = f(x_k) = f\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n \delta_{k-n}\right) \quad (3.10)$$

$$y_k = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n f(\delta_{k-n}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n g_{k-n} = x_k * g_k = g_k * x_k = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_n x_{k-n}$$

3.1.6 Estabilidad

Un *sistema discreto estable* es aquel que produce valores acotados en la secuencia de salida para valores acotados en la secuencia de entrada.

¹ El impulso, considerado como secuencia discreta se define por: $\delta_k = \begin{cases} 1, & \text{para } k=0. \\ 0, & \text{para } k \neq 0 \end{cases}$

Existe una condición de suficiencia para determinar si un sistema lineal es estable y consiste en que la respuesta al impulso debe ser absolutamente sumable:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |g_n| < \infty \quad (3.11)$$

3.1.7 Respuesta en Frecuencia

Con el fin de entender adecuadamente lo que significa la respuesta en frecuencia de los sistemas discretos, conviene mirar primero la diferencia en el comportamiento de las funciones exponenciales continuas $e^{j\omega t_0}$ y las discretas $e^{j\omega kT}$.

En el caso de las señales continuas $e^{j\omega t_0}$, se observa que para un incremento en la magnitud de ω corresponde una velocidad de oscilación superior. En las señales exponenciales discretas no se observa tal situación, y lo que se presenta es un comportamiento periódico cada 2π radianes como indica la siguiente ecuación.

$$e^{j(\omega T + 2\pi)k} = e^{j2\pi k} e^{j\omega T k} = e^{j\omega T k}, \quad k \in \mathbf{Z} \quad (3.12)$$

Esto quiere decir que el análisis de una exponencial discreta puede hacerse únicamente para un intervalo de longitud 2π , evitando cálculos innecesarios para valores por fuera del intervalo de periodicidad. Es común tomar el intervalo de longitud 2π definido por

$$-\frac{\pi}{T} \leq \omega \leq \frac{\pi}{T} \quad (3.13)$$

De la ecuación (3.12) se puede apreciar que la periodicidad de la exponencial, introduce incrementos y disminuciones repetitivas en la velocidad de oscilación a medida que se varía ω así: Cuando ω aumenta a partir de cero hasta llegar a π/T la velocidad de oscilación se va incrementando desde cero hasta alcanzar un máximo. A partir de este punto y hasta llegar a $\omega = 2\pi/T$, la velocidad de oscilación disminuye para retornar finalmente a cero.

Ahora vamos a ver lo que sucede cuando un sistema discreto es excitado con una secuencia exponencial periódica. Conviene trabajar con un periodo de muestreo $T = 1$ con el fin de simplificar los cálculos. Sólo se considerará el carácter de la secuencia, independizándolo de T . Suponga un sistema con respuesta al impulso $\{g_k\}$. Considere además que a su entrada se aplica una secuencia exponencial periódica que es función de ω :

$$\{x_k\} = \{e^{jk\omega}\} \quad (3.14)$$

Esta secuencia produce una salida que de acuerdo con la ecuación (3.10) viene dada por:

$$y_k = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_n e^{j\omega(k-n)} = e^{j\omega k} \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_n e^{-j\omega n} \quad (3.15)$$

El índice de la secuencia es k , con lo que la sumatoria es un factor independiente de este índice, por tanto:

$$\{y_k\} = \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} g_n e^{-j\omega n} \right) \{e^{j\omega k}\} \quad (3.16)$$

Que se puede escribir como:

$$\{y_k\} = G(\omega) \{e^{j\omega k}\} \quad (3.17)$$

Donde:

$$G(\omega) = \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} g_n e^{-j\omega n} \right) \quad (3.18)$$

De las expresiones anteriores se puede notar que la secuencia de salida para el caso de una excitación con una secuencia exponencial discreta de frecuencia ω , corresponde a la multiplicación de la secuencia exponencial por $G(\omega)$, siendo este último un operador conocido como la *respuesta en frecuencia del sistema*, y es una función compleja periódica que depende de la variable real ω con periodo 2π .

Cuando $G(\omega)$ tiene las condiciones necesarias (es seccionalmente continua y cuadrado integrable en el intervalo de periodicidad) entonces puede representarse mediante su desarrollo en series de Fourier dado por la ecuación (3.18), donde los elementos de la respuesta al impulso $\{g_k\}$ corresponden a los coeficientes de la serie. De esta forma es posible invertir el proceso que permite el cálculo de los coeficientes para hallar la respuesta al impulso a partir de la respuesta en frecuencia del sistema, es decir:

$$g_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} G(\omega) e^{j\omega k} d\omega \quad (3.19)$$

Se dispone entonces de herramientas para el cálculo de la respuesta en frecuencia a partir de la respuesta al impulso, ecuación (3.18), o para el cálculo de respuesta al impulso a partir de la respuesta en frecuencia del sistema, ecuación (3.19). Estas herramientas permiten el diseño de un filtro digital de manera similar a como se procede con uno analógico, es decir, se define la respuesta en frecuencia que se necesita para el sistema y a partir de esta se calcula la respuesta al impulso mediante la aplicación de la expresión (3.19) para determinar los coeficientes del filtro.

3.1.8 Transformada de Fourier de una Secuencia

La transformada discreta de Fourier (DFT) definida en la ecuación (2.21) puede aplicarse a una secuencia. Esto es posible cuando la secuencia presenta algunas propiedades bien definidas, que permiten asociarla con su respuesta en frecuencia. Dada la secuencia $\{x_k\}$, se define su transformada de Fourier como la función:

$$X(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k e^{-j\omega k} \quad (3.20)$$

Esta es una función compleja que requiere de gráficos de magnitud y fase para ser representada, es periódica con periodo 2π y si satisface las condiciones impuestas para $G(\omega)$ se puede considerar un desarrollo en serie de Fourier y se puede definir su transformada inversa llegando a un resultado similar a la ecuación (3.19), pero obteniendo

x_k a partir de $X(\omega)$. La importancia de la transformada de Fourier en el estudio de los sistemas discretos se debe a que permite relacionar de manera sencilla la entrada y la salida de un sistema lineal invariante en el tiempo con su respuesta en frecuencia

$$Y(\omega) = G(\omega)X(\omega) \quad (3.21)$$

Se puede analizar el sistema discreto mediante la aplicación de la ecuación anterior, partiendo del cálculo de la transformada discreta de Fourier de la señal de entrada y el conocimiento de la respuesta en frecuencia del sistema, para obtener como resultado la transformada de la secuencia de salida. La aplicación de la transformada inversa a este resultado permite conocer la secuencia de salida del sistema. Este procedimiento, es similar al que se maneja con los sistemas continuos y se puede apreciar en la siguiente figura

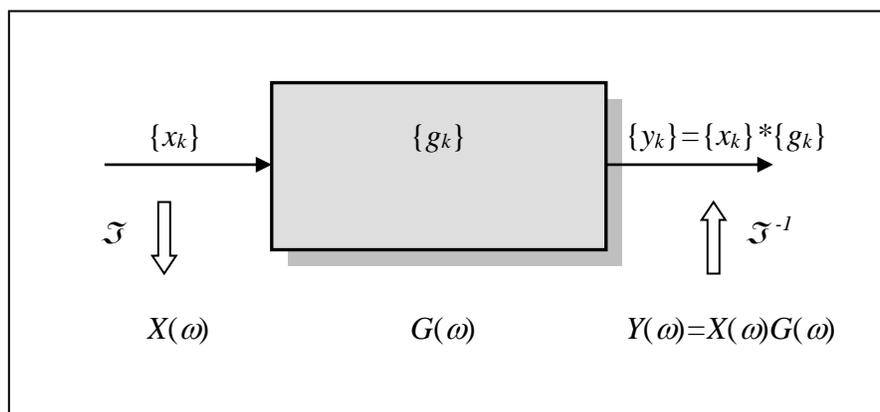


Figura 3.1. Relación fundamental de los sistemas discretos.

3.1.9 Transformada Z

La transformada Z^2 adquiere relevancia en el estudio de los sistemas LTI, ya que aporta un método para solucionar la ecuación de diferencias que los describe.

² Una descripción formal de la transformada Z puede verse en [OPP00]

Considerando los sistemas LTI, más específicamente la relación entre las secuencias de entrada y salida con la función de ponderación del sistema, ver ecuación (3.10) y al tener en cuenta que la transformada Z de la convolución de dos secuencias equivale al producto de sus transformadas, se puede llegar a expresar el sistema de la forma.

$$Y(z) = G(z)X(z) \quad (3.22)$$

donde $G(z)$ corresponde a la transformada Z de la respuesta al impulso.

$G(z)$ es conocida como la *función de transferencia en z del sistema* y puede obtenerse a partir de la ecuación de diferencias como se muestra a continuación. Se parte de la ecuación (3.8) suponiendo por simplicidad que $a_0 = 1$, es decir:

$$y_k + a_1 y_{k-1} + a_2 y_{k-2} + \dots + a_n y_{k-n} = b_0 x_k + b_1 x_{k-1} + \dots + b_m x_{k-m} \quad (3.23)$$

La aplicación de la transformada Z en ambos miembros de la igualdad, y las propiedades de linealidad y desplazamiento producen:

$$Y(z) + a_1 z^{-1} Y(z) + a_2 z^{-2} Y(z) + \dots + a_n z^{-n} Y(z) = b_0 X(z) + b_1 z^{-1} X(z) + \dots + b_m z^{-m} X(z) \quad (3.24)$$

Que se puede reorganizar como una relación entrada - salida

$$Y(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_m z^{-m}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_n z^{-n}} X(z) \quad (3.25)$$

Definiendo la función de transferencia del sistema como $Y(z) / X(z)$ se tiene:

$$G(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_m z^{-m}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_n z^{-n}} \quad (3.26)$$

Una vez logrado este objetivo es necesario calcular la solución de la ecuación de diferencias, es decir, encontrar una secuencia $\{y_k\}$ capaz de satisfacerla. Para esto se emplea el concepto de transformada inversa que se describe a continuación.

Suponga una secuencia $\{x_k\}$ con transformada en z dada por $X(z)$. Cuando $X(z)$ es una función racional, el cálculo de $\{x_k\}$ puede hacerse mediante la aplicación del *teorema de residuos* [PLA-CAR].

Existen otros casos específicos que permiten ciertos tipos de solución particular, por ejemplo para secuencias de términos solamente positivos, o solamente negativos se emplea el *método de división larga*. Está también el método de *fracciones simples*. Cuando $X(z)$ es racional, con polos simples y numerador de grado inferior al denominador, es decir:

$$X(z) = \sum_{i=1}^N \frac{A_i}{1 - a_i z^{-i}} \quad (3.27)$$

Se puede calcular la transformada inversa aplicando linealidad, es decir, expresándola como la suma de las transformadas inversas de cada término, que corresponde a una secuencia exponencial, por lo tanto

$$\begin{aligned} x_k &= \sum_{i=1}^n A_i a_i^k && \text{para } k \geq 0 \\ x_k &= 0 && \text{para } k < 0 \end{aligned} \quad (3.28)$$

3.2 VENTAJAS DEL FILTRADO DIGITAL SOBRE EL ANALOGICO

Debido a la facilidad con que se pueden implementar en sistemas computacionales, y a la velocidad de funcionamiento que han logrado en los equipos modernos, los filtros digitales se han convertido en la opción más utilizada para trabajar con señales de voz e imagen. La disponibilidad de equipos, la fiabilidad de las soluciones, la rapidez en las etapas de diseño

e implementación y la reducción de costos entre muchos otros factores favorecen el empleo de los filtros digitales.

La implementación de un filtro analógico se hace por medio de amplificadores operacionales y componentes pasivos tales como resistores y capacitores. Esto acarrea una serie de implicaciones que deben tenerse en cuenta para poder comparar los dos tipos de filtros. Entre estas implicaciones se destacan:

- La respuesta del filtro depende de los componentes pasivos. Como consecuencia el filtro no es reproducible con total exactitud debido a la tolerancia de los componentes y la respuesta del filtro puede variar con las condiciones ambientales.
- Filtros de orden superior necesitan redes RC más complejas o conectar varios filtros en cascada.
- Cambiar la respuesta del filtro exige la sustitución de los componentes pasivos.
- La frecuencia de operación queda limitada por la respuesta del amplificador operacional.
- La respuesta en fase es no lineal. Introduce un retardo en la señal que es variable con la frecuencia.

Algunas ventajas sobre los filtros analógicos, tales como su mayor selectividad, la adaptabilidad, la ausencia de problemas en componentes y la flexibilidad, sumadas a la creciente demanda de sistemas discretos, han hecho del filtrado digital la herramienta más solicitada en el ámbito del procesamiento digital de señales. Conviene entonces revisar en que consisten estas ventajas, junto con algunas características adicionales que también se mejoran.

- **Adaptabilidad:** Consiste en que un filtro digital no solo se puede implementar en hardware como es el caso para los analógicos. También puede constituirse por software, un ejemplo de ello son los filtros que se desarrollan como aplicación práctica en este trabajo.

-
- **Flexibilidad:** La función del filtro digital no tiene que ser la misma todo el tiempo, es decir se puede actualizar o modificar adaptándose a nuevas necesidades del sistema. Esto prácticamente es imposible de lograr para filtros analógicos, ya que la función del filtro está íntimamente ligada con la construcción del filtro.
 - **Conmutabilidad:** Un filtro digital puede emplearse para procesar datos de entrada correspondientes a diferentes señales. Esto se debe a que la información se guarda en registros que pueden programarse para manejar señales diferentes en diferentes intervalos de tiempo, logrando una multiplexación que asegura un mayor aprovechamiento del filtro.
 - **Reproducibilidad:** A diferencia de los filtros analógicos, el funcionamiento de dos filtros digitales que implementan el mismo algoritmo es exactamente igual.
 - **Manejo de Complejidad:** Con filtros digitales es posible realizar tareas más complicadas con relativamente menos esfuerzo, se puede por ejemplo generar respuestas en frecuencia personalizadas muy difíciles de implementar con filtros analógicos. Se puede generar también funciones que no son posibles dentro del filtrado analógico como son los códigos correctores de error y la capacidad de almacenamiento en memoria.
 - **Ausencia de problemas en componentes:** Como se dijo anteriormente, la respuesta de un filtro analógico depende de los componentes pasivos, es decir, que cualquier cambio en alguno de sus elementos modifica la respuesta del mismo. Como los parámetros de los elementos circuitales no son los mismos a lo largo de su vida útil, estas variaciones se reflejan en la respuesta del filtro. Se presentan también requisitos de adaptación de impedancias que si no se cumplen producen efectos que deterioran la calidad del filtro. Los filtros digitales al depender de unos coeficientes numéricos y un conjunto de operaciones, más no directamente de los componentes que constituyen el hardware que los soporta, no presentan este tipo de inconvenientes.
 - **Respuesta Dinámica:** La limitación en el ancho de banda de un filtro digital queda determinada por la frecuencia de muestreo. Esto no es un gran inconveniente si se tiene en

cuenta que la frecuencia de operación de los microprocesadores ha venido en aumento. Los filtros analógicos, dependen de restricciones inherentes a los amplificadores operacionales.

- **Intervalo Dinámico:** En filtros analógicos se determina por la tolerancia de los componentes y la alimentación que los lleve a saturación, mientras que en los digitales depende del número de bits empleado en la representación de las muestras, el ruido de cuantificación y los errores de redondeo

3.3 CONSIDERACIONES ADICIONALES

3.3.1 Clasificación de los filtros digitales según la duración de su respuesta

Se habla de dos tipos de respuestas: La respuesta finita al impulso (FIR) y la respuesta infinita al impulso (IIR). Estas dos respuestas definen lo que se conocen como filtros FIR o no recursivos y filtros IIR o recursivos. A continuación se describen únicamente los filtros FIR que son los de interés para este trabajo.

Un filtro FIR se obtiene cuando los coeficientes a_i de la ecuación de diferencias (considerando la ecuación 3.23 por facilidad) se hacen cero, obteniendo:

$$y_k = b_0 x_k + b_1 x_{k-1} + \dots + b_m x_{k-m} \quad (3.29)$$

Donde m es el orden del filtro. La función de transferencia en z entonces queda determinada por:

$$G(z) = b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_m z^{-m} \quad (3.30)$$

Se destaca la carencia de polos en la función de transferencia del filtro FIR, que garantiza la estabilidad del mismo y que cada valor de la secuencia de salida es acotado puesto que depende de un número finito de valores de la secuencia de entrada, además su respuesta impulsiva es siempre finita.

3.3.2 Filtros de fase lineal o no dispersivos

Hay cierto tipo de filtros conocido como filtros de fase lineal o no dispersivos y que presentan como su nombre lo indica una característica de fase lineal. Esto se refiere a que el argumento de la respuesta en frecuencia del filtro presenta variaciones proporcionales a la frecuencia y resulta de utilidad cuando se trata de aplicaciones para las cuales las relaciones de fase son importantes y no se deben perturbar por el filtro.

3.3.3 Causalidad y sus implicaciones

Según la banda del espectro que permiten pasar, los filtros digitales se pueden agrupar, a grandes rasgos, en cuatro grupos como muestra la figura 3.2. Al tratarse de sistemas discretos, la respuesta en frecuencia es periódica, y el intervalo de periodicidad lo define la frecuencia de Nyquist, ω_N , resultando de interés el intervalo $[-\omega_N, \omega_N]$.

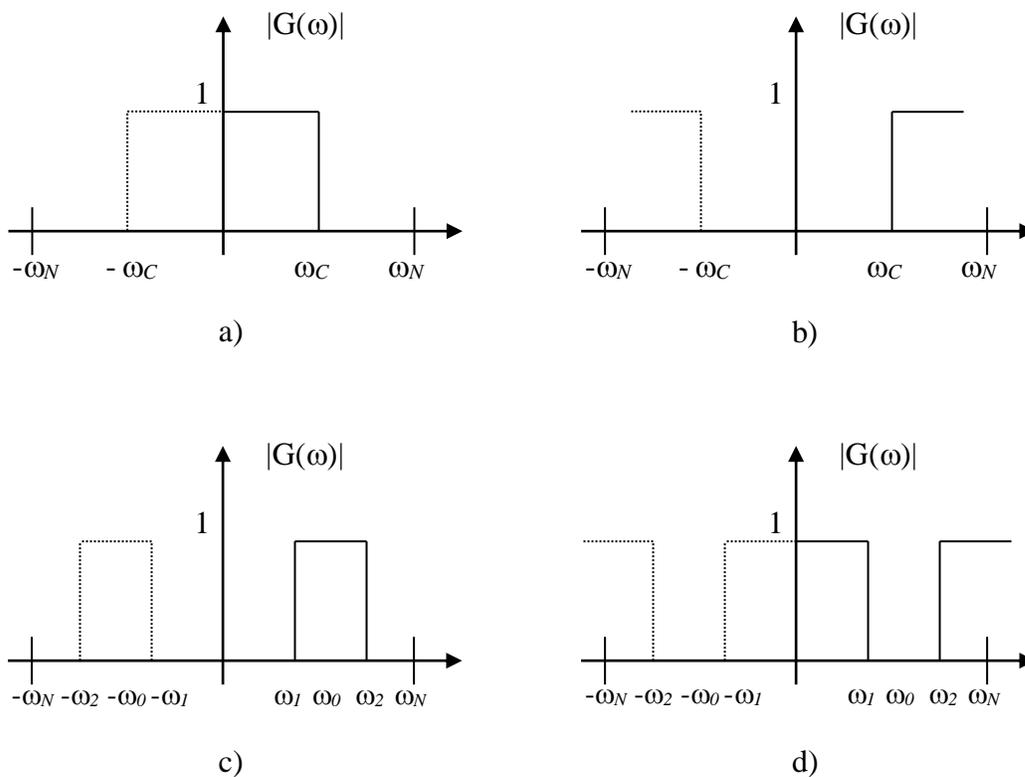


Figura 3.2. Especificaciones de los filtros digitales. a) Paso-bajo b) Paso-alto
c) Paso-banda d) Rechazo de banda

La figura anterior solamente presenta el comportamiento de la magnitud de $G(\omega)$, pero además debe entenderse que lo ideal sería que la fase no cambie con variaciones en la frecuencia, o en caso de hacerlo, se presente una variación de fase lineal. Esto indica que debe introducirse un desfase del tipo $\varphi = -\lambda\omega T$, donde λ es una constante que valdrá cero en caso de no haber desfase o algún valor diferente en caso de haberlo.

Una señal de entrada periódica que satisface las condiciones de Fourier, podría descomponerse en sus componentes sinusoidales $\sin(\omega kT)$, y cada una de estas componentes va a producir una respuesta de la forma

$$|G(\omega)|\sin[\omega(kT - \lambda)] \quad (3.31)$$

Los armónicos de la señal de entrada van a estar desfasados $-\lambda\omega$ veces, y se obtiene a la salida una versión de la señal de entrada sin distorsión en la banda de paso, que se observa en cada caso de la figura 3.2 como la banda de frecuencias que tiene $|G(\omega)|=1$. Según esto, el diseño del filtro debe garantizar que la magnitud sea constante en la banda de paso, y que el argumento sea proporcional a la frecuencia. Estas dos características se indican en la figura 3.3.

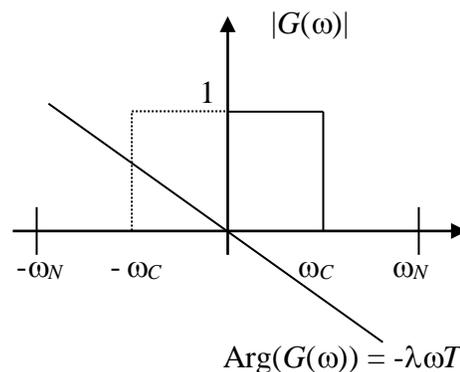


Figura 3.3. Respuesta en frecuencia de un filtro pasa bajo.

La búsqueda de un modelo matemático que caracterice este tipo de respuesta ha proporcionado la siguiente relación:

$$G(\omega) = \begin{cases} e^{-j\lambda\omega T} & |\omega| \leq \omega_c \\ 0 & \text{En otro caso} \end{cases} \quad (3.32)$$

Y la aplicación de la transformada inversa de Fourier, para el cálculo de la respuesta al impulso del filtro entrega:

$$\begin{aligned} g_k &= \frac{1}{2\pi/T} \int_{-\omega_N}^{\omega_N} G(\omega) e^{jk\omega T} d\omega = \frac{1}{2\pi/T} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{j(k-\lambda)\omega T} d\omega \\ &= \frac{T \sin[(k-\lambda)\omega_c T]}{\pi (k-\lambda)T} = \frac{\omega_c}{\omega_N} \frac{\sin[(k-\lambda)\omega_c T]}{(k-\lambda)\omega_c T} \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{aligned} \quad (3.33)$$

Que corresponde a un sistema no causal, y permite concluir que el filtro ideal no es físicamente realizable.

Se puede obtener un filtro causal truncando g_k y modificando el orden del filtro, pero el comportamiento deja de ser ideal y aparece un rizado en las bandas pasante y supresora. Esto se conoce como *fenómeno de Gibbs*.

Estudios han demostrado que, en general, el comportamiento no causal se presenta para los cuatro tipos de “filtros ideales” mostrados en la figura 3.2, constituyéndose en sistemas físicamente irrealizables.

El teorema de Paley-Wiener establece las condiciones suficientes y necesarias que debe satisfacer la respuesta en frecuencia para que un filtro sea causal. A continuación se presentan algunas de las conclusiones de este teorema.

- El modulo de los filtros causales $|G(\omega)|$ puede ser cero para algunas frecuencias, pero no para cualquier banda finita de frecuencias.
- La banda pasante no puede ser de amplitud constante en un rango finito de frecuencias y la transición entre las bandas pasante y rechazada no puede ser infinitamente abrupta (como consecuencia del fenómeno de Gibbs).

- Existe una relación entre la magnitud y la fase de $G(\omega)$ que no permite una escogencia arbitraria de las mismas y viene dada por la transformada de Hilbert discreta.

Hay muchas aplicaciones prácticas donde no es necesario que la respuesta en frecuencia presente el comportamiento de un filtro ideal. Bajo unas condiciones no muy estrictas se puede realizar filtros causales que se aproximan a los ideales con la precisión requerida. No es absolutamente necesario que la ganancia en la banda de paso sea constante, ni que la atenuación en la banda de rechazo sea cero. En ambas se pueden tolerar pequeñas variaciones que se manifiestan como rizado. Aparece entonces una *banda de transición* entre las bandas de paso y de rechazo. Esto puede apreciarse en la figura 3.4

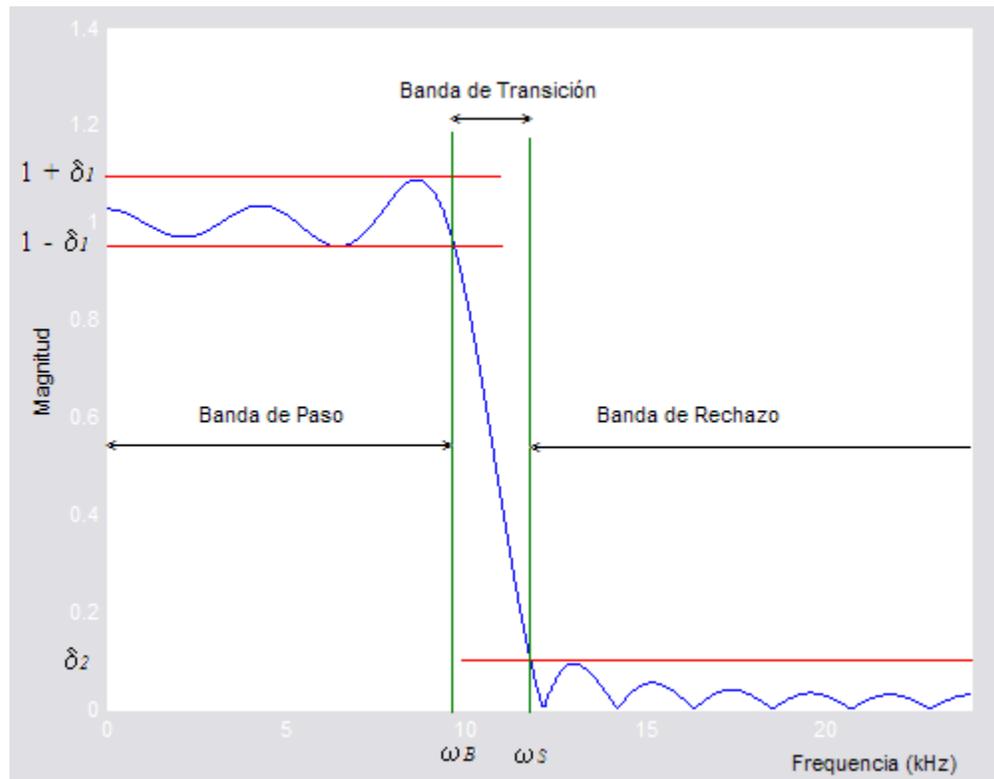


Figura 3.4. Parámetros de un Filtro Paso-bajo.

Para el diseño de un filtro selectivo en frecuencia entonces se deben especificar los siguientes parámetros:

- El rizado en la banda pasante, δ_1 .
- El rizado tolerable en la banda de rechazo, δ_2 .
- La frecuencia de la banda de paso, ω_B , y
- La frecuencia de la banda supresora, ω_S .

Estas especificaciones definen la selección de los coeficientes a_k y b_k de la ecuación en diferencias del sistema LTI, que permitan la mejor aproximación a la respuesta en frecuencia deseada. La precisión con que $G(\omega)$ se aproxima al comportamiento deseado depende del criterio usado para determinar los coeficientes y del orden del polinomio de la FDT del sistema.

3.4 DISEÑO DE FILTROS DE RESPUESTA IMPULSIVA FINITA (FIR)

Hay unos pasos a seguir para diseñar filtros digitales. La especificación de las propiedades que debe tener el sistema es el primero de ellos. A continuación se debe aproximar dichas especificaciones con un sistema causal discreto en el tiempo, para finalmente proceder a la realización del sistema.

Los filtros FIR normalmente se emplean donde hay requisitos de fase lineal para la banda pasante de la respuesta en frecuencia. Su diseño a pesar de requerir muchas operaciones (sumas y multiplicaciones), proporciona facilidad y escalabilidad en cuanto a estructura de programación, e implementación se refiere.

Aunque existen dos técnicas para el diseño de filtros FIR, aquí solamente se describe una de ellas. La primera aproxima el filtro a la respuesta en frecuencia deseada mediante métodos de optimización que modifican los coeficientes. La segunda, que define la respuesta en frecuencia, y mediante la transformada inversa de Fourier calcula los coeficientes del filtro es la que aquí se describe.

3.4.1 Filtros FIR simétricos y antisimétricos

La linealidad en la fase para un filtro FIR puede obtenerse haciendo que los coeficientes de su respuesta al impulso sean simétricos o antisimétricos. Esto se verifica partiendo de la respuesta en frecuencia de un filtro no recursivo de orden m . Por facilidad se supone que el filtro es de orden par, definiéndose $m = 2N$, lo cual da lugar a una respuesta en frecuencia de la forma:

$$G(\omega) = \sum_{k=0}^{2N} g_k e^{-jk\omega T} = e^{-jN\omega T} \left\{ g_0 e^{jN\omega T} + g_1 e^{j(N-1)\omega T} + \dots + g_N + \dots + g_{2N} e^{-jN\omega T} \right\} \quad (3.34)$$

La ecuación (3.35) define las condiciones de simetría o antisimetría, teniendo en cuenta el signo + para indicar simetría en los coeficientes y el – para la antisimetría.

$$\begin{aligned} g_0 &= \pm g_{2N} \\ g_1 &= \pm g_{2N-1} \\ &\vdots \\ g_{N-1} &= \pm g_{N+1} \end{aligned} \quad (3.35)$$

Considerando que existe simetría, se puede agrupar la expresión (3.34) alrededor de los coeficientes $e^{\pm j(N-i)\omega T}$, para obtener:

$$G(\omega) = e^{-jN\omega T} \left\{ g_N + 2 \sum_{i=0}^{N-1} g_i \cos[(N-i)\omega T] \right\} \quad (3.36)$$

Esta expresión separa entre llaves la parte real e indica que el desfase introducido por el filtro es $-N\omega T$, que corresponde a una variación de fase lineal con la frecuencia.

Para el caso de una respuesta al impulso con coeficientes antisimétricos se procede de igual forma, sin embargo, es importante resaltar que si el filtro es de orden par el punto central de la antisimetría es nulo. La respuesta en frecuencia para este caso se puede expresar como:

$$G(\omega) = e^{-jN\omega T + \frac{\pi}{2}} \left\{ 2 \sum_{i=0}^{N-1} g_i \sin[(N-i)\omega T] \right\} \quad (3.37)$$

Que determina la fase del filtro $\frac{\pi}{2} - (N-1)\omega T$.

El calculo puede hacerse también para filtros de orden impar con condiciones de simetría o antisimetría en su respuesta al impulso, llegando a

$$\begin{aligned} G(\omega) &= e^{-j\frac{m}{2}\omega T} \left\{ 2 \sum_{i=0}^{((m+1)/2)-1} g_i \cos\left[\left(\frac{m}{2}-i\right)\omega T\right] \right\} \text{ simetria de orden impar} \\ G(\omega) &= e^{-j\frac{m}{2}\omega T + \frac{\pi}{2}} \left\{ 2 \sum_{i=0}^{((m+1)/2)-1} g_i \sin\left[\left(\frac{m}{2}-i\right)\omega T\right] \right\} \text{ antisimetria de orden impar} \end{aligned} \quad (3.38)$$

Las formulas (3.36) a (3.38) permiten diseñar filtros FIR de fase lineal con respuestas impulsivas simétricas y antisimétricas. Nótese que para un filtro simétrico, el número de coeficientes del filtro que especifican la respuesta es $m/2$ cuando m es par o $((m+1)/2)-1$ si m es impar. Por otro lado, si la respuesta al impulso es antisimétrica y el orden es par, el punto central de la antisimetría será nulo y habrá $m/2$ coeficientes que lo definan, en caso de ser orden impar, cada coeficiente tiene un término emparejado de signo opuesto y estará definido por $((m+1)/2)-1$ [PLA-CAR].

La pregunta que surge ahora es ¿Cual respuesta al impulso se debe elegir, una simétrica o una antisimétrica? La respuesta depende de la aplicación que va a tener el filtro. Por ejemplo, si se requiere un filtro paso-alto o uno paso-bajo no se puede emplear la condición de antisimetría, ya que $G(\omega)$ para frecuencias bajas y cercanas a la frecuencia de Nyquist presenta valores cercanos a cero. La condición simétrica produce un filtro FIR de fase lineal con una respuesta distinta de cero para bajas frecuencias. [PLA_CAR]

Se verifica entonces que el problema de diseño de filtros FIR consiste en determinar $m+1$ coeficientes, a partir de las especificaciones en frecuencia deseadas.

3.4.2 Diseño de filtros FIR de fase lineal usando ventanas

A pesar de que al incrementar el orden en un filtro FIR se disminuye la banda de transición que se representa por una caída más abrupta en la respuesta en frecuencia, va a seguir existiendo el fenómeno de Gibbs, presentándose un rizado sobre las bandas de paso y de rechazo que se incrementa en las cercanías de la banda de transición.

Se debe mantener finito el orden del filtro para que sea causal. Una forma de representar esto es multiplicar la respuesta al impulso del filtro ideal por una “ventana” de longitud finita, es decir:

$$g'_k = g_k w_k \quad (3.39)$$

Donde g_k se define igual que en (3.33) y w_k es una función ventana, para la cual el truncamiento más simple lo da la ecuación (3.40) para la cual m define tanto el orden del filtro como en cual elemento de la secuencia inicia el truncamiento.

$$w_k = \begin{cases} 1 & k \leq m \\ 0 & k > m \end{cases} \quad (3.40)$$

La ventana anterior, al igual que otras que se presentan más adelante deben mantener la linealidad en la fase del filtro. Esto es posible haciendo que las ventanas sean simétricas.

Para hallar la *respuesta en frecuencia del filtro FIR con coeficientes truncados* se puede considerar la equivalencia de la multiplicación de $\{g_k\}$ por w_k con la convolucion entre $G(\omega)$ y $W(\omega)$, donde $W(\omega)$ es la transformada de Fourier de la función ventana. Esta nueva respuesta en frecuencia viene dada por

$$G'(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}} G(v)W(\omega - v)dv \quad (3.41)$$

La transformada de Fourier de una ventana rectangular es:

$$W(\omega) = \sum_{k=0}^m e^{-j\omega kT} = \frac{1 - e^{-j\omega T(m+1)}}{1 - e^{-j\omega T}} = e^{-j\omega Tm/2} \frac{\sin(\omega T(m+1)/2)}{\sin(\omega T/2)} \quad (3.42)$$

La magnitud de la respuesta en frecuencia para una ventana rectangular con $m=7$ se ilustra en la figura 3.5. La simetría de los coeficientes de $W(\omega)$ garantiza la fase lineal de la ventana.

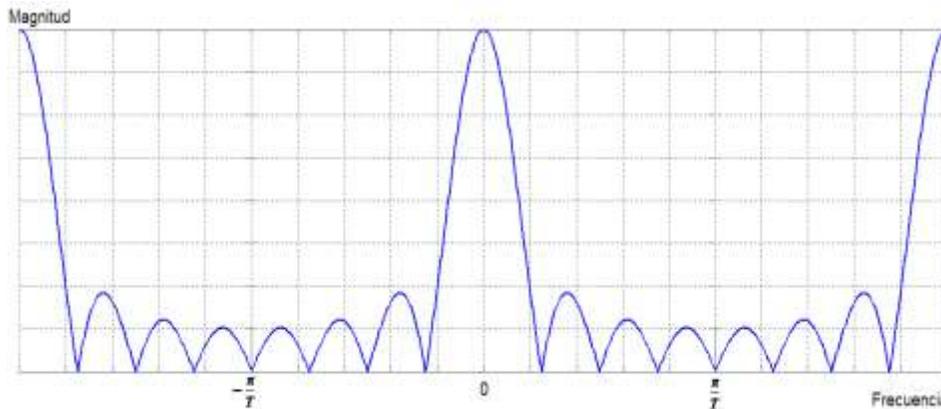


Figura 3.5. Modulo de la transformada de Fourier de una ventana rectangular.

Al incrementar el orden del filtro se presenta una disminución del ancho del lóbulo principal que indica la existencia de un corte más abrupto entre las bandas pasante y supresora. Las ventanas rectangulares presentan lóbulos laterales de alturas considerables cuando son comparados con el lóbulo principal. Se verifica un incremento en la magnitud de todos los lóbulos a medida que crece el orden del filtro pero debe mantenerse constante el área encerrada por cada lóbulo. Lo anterior sugiere una disminución en el ancho de los lóbulos, que produce un incremento en el número de oscilaciones.

La figura 3.6 presenta los elementos que intervienen en el cálculo de la respuesta en frecuencia del filtro FIR truncado, $G(\omega)$, calculada como la convolución de la respuesta deseada, $G_d(\omega)$, y la transformada de Fourier de la ventana rectangular, para el diseño de un filtro paso bajo con una frecuencia de corte ω_c . Se puede apreciar tanto la existencia de

rizado en las bandas pasante y supresora como la existencia de una banda de transición entre las mismas, fenómenos que sería deseable minimizar en la medida de lo posible.

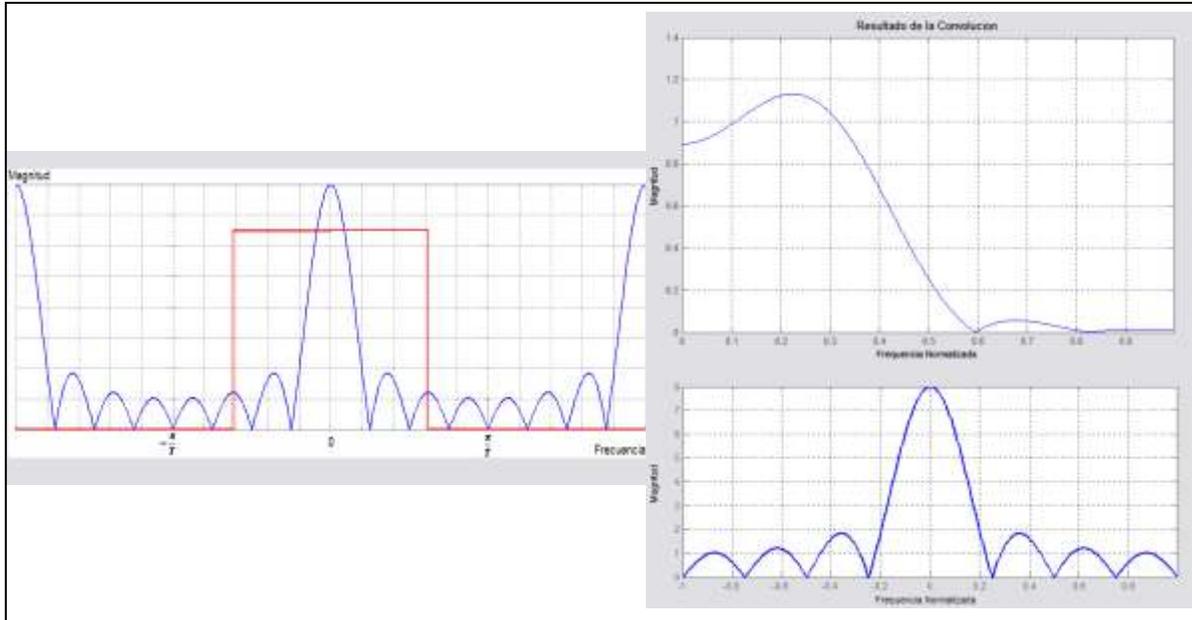


Figura 3.6. Convolución entre la respuesta ideal y la ventana rectangular.

Con el fin de minimizar estos inconvenientes indeseados, se han diseñado una serie de ventanas que permiten suavizarlos. Un ejemplo es la ventana de *Von Hann* que se define según la ecuación (3.43) haciendo $\alpha=0.5$

$$w_k = \begin{cases} \alpha - (1 - \alpha) \cos(2\pi k / m) & k \leq m \\ 0 & k > m \end{cases} \quad (3.43)$$

La ecuación anterior define otra ventana cuando $\alpha=0.54$ conocida como ventana de *Hamming*.

La ventana de *Blackman* se define mediante la relación:

$$w_n = \begin{cases} 0.42 - 0.5 \cos(\pi k / m) + 0.08 \cos(2\pi k / N) & k \leq m \\ 0 & k > m \end{cases} \quad (3.44)$$

La aplicación de cada una de estas ventanas a un filtro FIR paso-bajo produce las respuestas en frecuencia ilustradas en la figura 3.7. Se proporciona también la respuesta obtenida para una ventana rectangular, que sirve como modelo para comparación, y la respuesta para dos ventanas Kaiser que se explican mas adelante. El filtro es de orden 21 y la frecuencia de corte corresponde a un cuarto de la frecuencia de Nyquist.

Al calcular la transformada de Fourier de las ventanas descritas se observa una reducción en la amplitud de los lóbulos laterales, importante al ser comparada con la ventana rectangular. También se aprecia un incremento en el ancho del lóbulo principal para un mismo valor en el orden del filtro³. Lo anterior quiere decir que, la aplicación de estas funciones ventana proporciona un mayor suavizado que se evidencia en la figura 3.7 como una región de transición mas amplia. El ancho de esta región se puede reducir incrementando el orden del filtro, lo cual implica el cálculo de muchas más operaciones. Por esta razón se debe evaluar la relación entre la calidad del filtro que se desea y la capacidad de procesamiento necesaria para su implementación. La tabla 3.1 muestra estas características de forma cuantitativa para las funciones ventana descritas.

Tabla 3.1. Características frecuenciales mas importantes de algunas funciones ventana

Tipo de Ventana	Ancho de Transición del lóbulo principal	Pico de lóbulos laterales
Rectangular	$4\pi/(m+1)$	-13 dB
Von Hann	$8\pi/(m+1)$	-32 dB
Hamming	$8\pi/(m+1)$	-43 dB
Blackman	$12\pi/(m+1)$	-58 dB

³ Matlab proporciona una herramienta llamada "wintool" que permite entre otras cosas observar el comportamiento de las diferentes ventanas

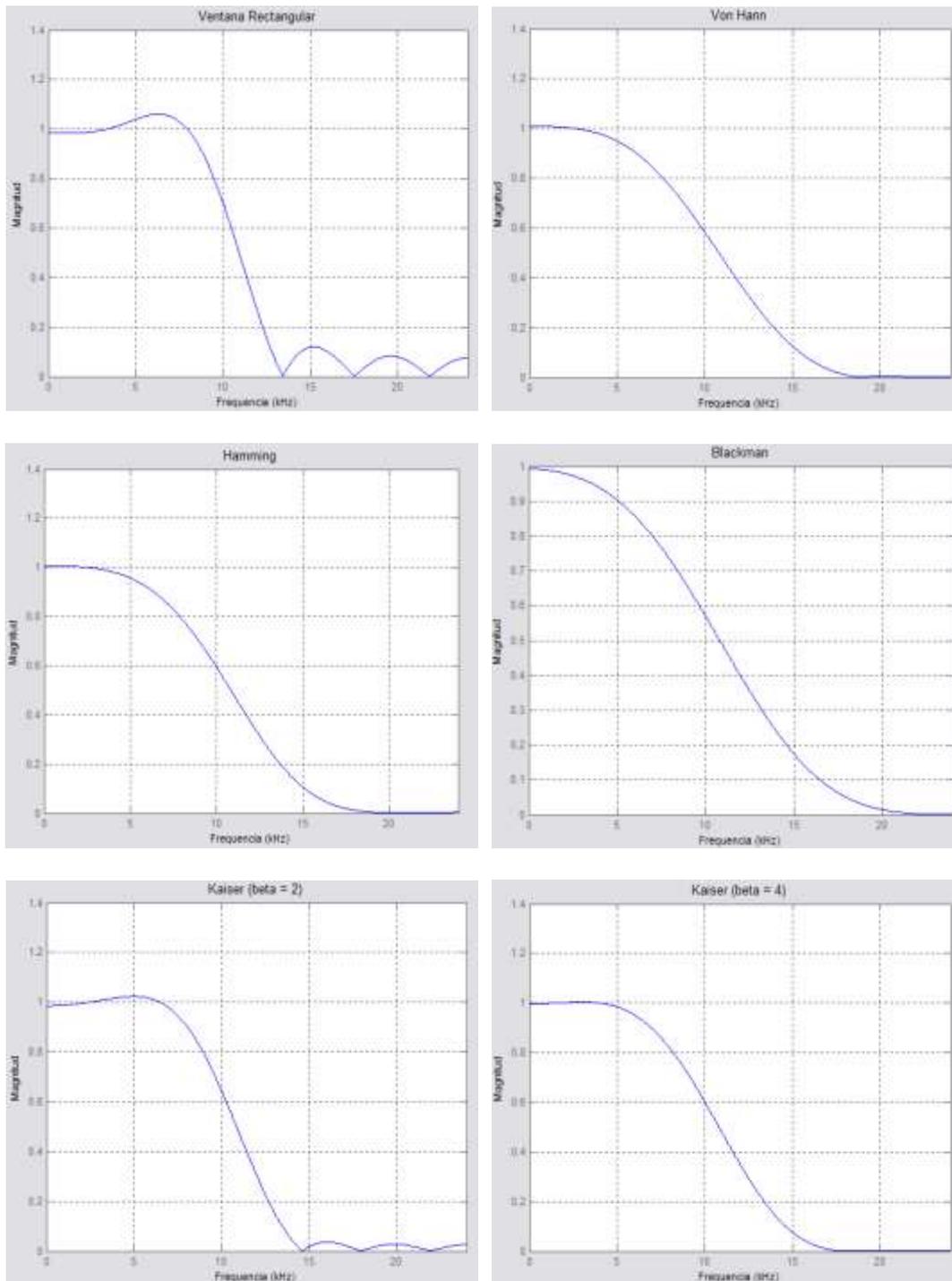


Figura 3.7. Respuesta de Filtro Paso-bajo con ventanas rectangular, Von Hann, Hamming, Blackman, Kaiser con $\beta = 2$ y Kaiser con $\beta = 4$.

3.4.2.1 El método de diseño de filtros mediante la ventana de Kaiser. Existe un compromiso entre el ancho del lóbulo principal y el área de los lóbulos laterales que se puede cuantificar buscando una función ventana concentrada alrededor de $\omega=0$ en el dominio de la frecuencia. Kaiser entre 1966 a 1974 descubrió una ventana cuasi-óptima formada a partir de la función de Bessel modificada de primera especie. Este hallazgo define la ventana de Kaiser como:

$$w_k = \begin{cases} I_0 \left(\beta \left(1 - \left(\frac{n-\alpha}{\alpha} \right)^2 \right)^{1/2} \right) / I_0(\beta) & k \leq m \\ 0 & k > m \end{cases} \quad (3.45)$$

donde $\alpha = (m+1) / 2$ e I_0 corresponde a la función de Bessel de primera especie, definida por la serie:

$$I_0(x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k!} \left(\frac{x}{2} \right)^k \right)^2 \quad (3.46)$$

Al mismo tiempo que se puede modificar el orden del filtro, la ventana de Kaiser emplea variaciones en el *parámetro de forma* β para ajustar la amplitud de los lóbulos laterales y el ancho del lóbulo principal. Se verifica una reducción en la banda de paso al incrementar el orden del filtro manteniendo β constante, y además se conserva la amplitud de los lóbulos laterales.

Tras mucha experimentación numérica, Kaiser obtuvo una pareja de fórmulas útiles para establecer el orden del filtro y el factor de forma necesarios para cumplir con las especificaciones en frecuencia requeridas. También demostró que, sobre un intervalo suficientemente amplio de condiciones, el nivel de rizado δ , está determinado por la selección de β . Al tener un nivel de rizado fijo, se pueden definir la frecuencia de la banda del filtro paso-bajo, ω_B , como la frecuencia máxima para la cual $|G'(\omega_B)| = 1 - \delta_1$, y la frecuencia de la banda supresora ω_S , como la frecuencia mínima para la que $|G'(\omega_S)| \leq \delta_2$.

Como los coeficientes deben tener un carácter simétrico entonces $\delta_1 = \delta_2$ y el ancho normalizado de la región de transición para la aproximación del filtro paso bajo será

$$\Delta\omega_n = \frac{\omega_S - \omega_B}{2\omega_N} \quad (3.47)$$

Kaiser hizo la definición de

$$A_{\min} = -20 \log_{10} \delta_2 \quad (3.48)$$

Y determino de forma empírica el valor de β necesario para cumplir un valor específico de A_{\min} . Este valor corresponde a:

$$\beta = \begin{cases} 0.1102(A_{\min} - 8.7) & A_{\min} > 50 \\ 0.5842(A_{\min} - 21)^{0.4} + 0.07886(A_{\min} - 21) & 21 \leq A_{\min} \leq 50 \\ 0 & A_{\min} < 21 \end{cases} \quad (3.49)$$

La ventana rectangular corresponde al caso en que $\beta=0$. Además, Kaiser descubrió una relación ente $\Delta\omega_n$ y m para cumplir con unos valores específicos de A_{\min} . Esta expresión permite determinar el orden del filtro con una precisión de ± 2 para un amplio conjunto de valores de A_{\min} y $\Delta\omega_n$.

$$m = \frac{A_{\min} - 8}{2.285\Delta\omega_n} \quad (3.50)$$

Cuando se emplea el método de ventanas, ya sea de Kaiser o algún otro tipo, para diseñar un filtro FIR paso-bajo que cumpla unas especificaciones dadas se puede seguir este procedimiento:

- Establecer la respuesta en frecuencia, es decir seleccionar los valores deseados de ω_B , ω_S y el rizado tolerable.
- Determinar la frecuencia de corte del filtro paso-bajo ideal, es decir, la frecuencia para la cual la ganancia cae a la mitad de la que tiene la banda de paso. Se puede aprovechar la simetría de la aproximación en la discontinuidad de $G(\omega)$, con lo cual:

$$\omega_c = \frac{\omega_B + \omega_S}{2} \quad (3.51)$$

- Cuando se decide emplear una ventana de Kaiser, el cálculo del orden del filtro y el factor de forma β , se hace obteniendo los valores de A_{min} y $\Delta\omega_n$ para aplicar las expresiones (3.49) y (3.50). Cuando la ventana usada es de Von Hann, Hamming, Blackman o rectangular es necesario probar diferentes valores en el orden del filtro ya que no hay una expresión empírica que permita saber de antemano la longitud del filtro. Hay quienes sugieren iniciar el análisis para un valor de m obtenido al aplicar la ecuación (3.50) y seguir este proceso:
- Determinar la respuesta al impulso del filtro ideal por medio de la transformada inversa de Fourier, esto es aplicando el resultado final de (3.33).
- Calcular la respuesta al impulso del filtro real multiplicando la secuencia del filtro ideal por la secuencia de la función ventana como indica (3.39).

3.4.3 Transformaciones sobre los filtros

Hasta este punto solo se ha hecho el estudio de los filtros paso-bajo, pero ahora la inquietud es ¿Que ocurre con los demás tipos de filtros selectivos (paso-alto, paso-banda y rechazo de banda), como se diseñan? Una posibilidad es hacer un estudio de cada uno de ellos siguiendo el procedimiento empleado en los filtros paso-bajo, pero hay una opción más adecuada que consiste en realizar transformaciones para convertir una respuesta paso-bajo en el filtro deseado.

Por ejemplo, a partir de los coeficientes de la respuesta al impulso de un filtro paso-bajo $g_{k(PB)}$ con una frecuencia de corte $(\omega_c)_{PB}$ y una frecuencia de Nyquist ω_N , se puede obtener un filtro paso-alto [PLA-CAR] con coeficientes de respuesta al impulso dados por:

$$g_{k(PA)} = (-1)^k g_{k(PB)} \quad (3.52)$$

La frecuencia de corte del filtro paso-alto valdrá:

$$(\omega_c)_{PA} = (\omega_N) - (\omega_c)_{PB} \quad (3.53)$$

Por lo tanto, para diseñar un filtro paso-alto con frecuencia de corte $(\omega_c)_{PA}$ se hace un diseño inicial donde se obtiene g_k para un filtro paso-bajo con frecuencia de corte $(\omega_N) - (\omega_c)_{PA}$ y el resultado obtenido se multiplica por $(-1)^n$. La figura 3.8 ilustra el procedimiento que se plantea.

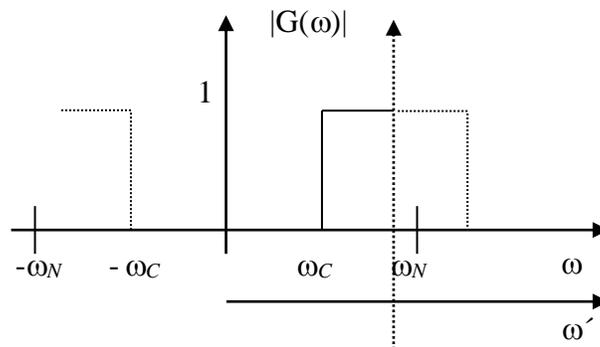


Figura 3.8. Cambio de variables ω a ω'

Las relaciones de conversión a los diferentes tipos de filtro se muestran en la tabla 3.2. Estas relaciones se emplean para el diseño de otros filtros (paso-altos, paso-banda o rechazo de banda) a partir del diseño inicial de un paso-bajo (siguiendo el proceso indicado en la sección anterior) mediante las transformaciones indicadas en la tabla.

Tabla 3.2. Transformaciones de paso-bajo a otros filtros

Conversión	Transformación	Parámetros
A paso-alto	$g_{k(PA)} = (-1)^n g_{k(PB)}$	$(\omega_c)_{PA} = (\omega_N) - (\omega_c)_{PB}$
A paso-banda	$g_{k(PBANDA)} = (2\cos(k\omega_0 T))g_{k(PB)}$	$\omega_0 = \text{frecuencia central}$ $\omega_1 = \omega_0 - (\omega_c)_{PB}$ $\omega_2 = \omega_0 + (\omega_c)_{PB}$
A rechazo de banda	$g_{k(RB)} = 1 - g_{k(PBANDA)}$ $g_{k(RB)} = -g_{k(PBANDA)} \quad n=+1,+2,\dots$	

3.4.4 Extensión al caso bidimensional y filtrado de imágenes.

Los filtros ya estudiados (unidimensionales) se pueden extender al filtrado de imágenes (caso bidimensional) aplicando el método de Parks McClellan también conocido como *transformación en frecuencia*. El toolbox de procesamiento de imágenes incluye funciones que permiten dicha conversión.

Este método constituye una técnica eficiente y casi óptima para la creación de filtros bidimensionales. La idea es transformar un filtro prototipo unidimensional con respuesta en frecuencia $G(\omega)$ en un filtro bidimensional con respuesta en frecuencia $G(\omega_1, \omega_2)$ mediante un cambio de variables haciendo uso de una función de transformación $F(\omega_1, \omega_2)$ la cual mapea el filtro prototipo en el filtro bidimensional deseado. Esta técnica permite controlar la magnitud del error y preservar las propiedades de simetría del filtro deseado.

A manera ilustrativa se presenta una gráfica de los filtros paso-bajo para el caso de imágenes que puede apreciarse en la figura 3.9, y que corresponde a una ventana de Kaiser, con $\beta=4$, la frecuencia de muestreo $F_s=3$ y la frecuencia de corte $F_c=0.5$.

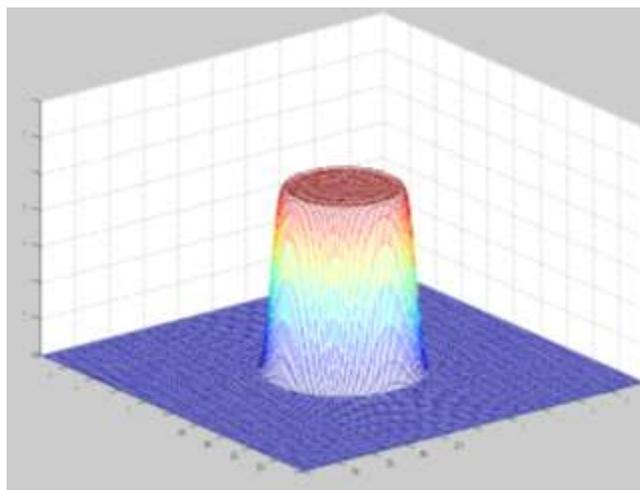


Figura 3.9. Filtro paso-bajo para imágenes

Ahora que se conoce como desarrollar un filtro bidimensional se pasa a la explicación de lo que es una imagen y como se realiza su filtrado. Una imagen representa variaciones de brillo o color en el espacio. Estas variaciones espaciales pueden ser manipuladas mediante la operación de convolución bidimensional que resulta útil para el filtrado de las mismas, sin embargo, no es estrictamente necesario trabajar una imagen en el dominio espacial. Se puede también manipular una imagen en el dominio de la frecuencia, mediante la manipulación de su espectro.

Cuando se habla de frecuencia en una onda o una señal de audio, se hace referencia a la tasa a la cual cambia la señal con el tiempo. Cuando se habla de las frecuencias presentes en una imagen (*frecuencia espacial*), se hace referencia a los cambios que ocurren en el espacio. La *frecuencia espacial* es una medida de que tan rápido varía el brillo o el color cuando recorremos una imagen [EFF00].

Las imágenes en las cuales los niveles de gris cambian suavemente se caracterizan por presentar frecuencias espaciales bajas. Por el contrario, las imágenes con variaciones significativas o cambios abruptos en el nivel de gris (como imágenes con muchos detalles o texturas) presentan simultáneamente un contenido significativo de altas frecuencias [EFF00].

Debido a que una imagen puede ser descrita en términos de frecuencias espaciales [EFF00] es posible realizar sobre ella, las mismas operaciones de filtrado definidas para señales unidimensionales, es decir filtrado paso-bajo, filtrado paso-alto, etc. El funcionamiento de cada tipo de filtro sobre una imagen es análogo al de su equivalente unidimensional operando sobre una señal, por ejemplo, al aplicar un filtro paso-bajo a una imagen se eliminan sus componentes de alta frecuencia, dando como resultado una difuminación en los puntos de la imagen que presentan grandes variaciones en el nivel de gris. El resultado de este proceso es una versión suavizada de la imagen original.

Ya sea que se trabaje en el dominio espacial o de frecuencia espacial el filtrado puede realizarse según se explicó para señales unidimensionales pero considerando ahora las operaciones de convolución y transformada de Fourier bidimensionales.

3.5 IMPLEMENTACIÓN DE LOS FILTROS DIGITALES

La construcción del filtro puede hacerse una vez calculada su transformada discreta de Fourier. Según la ecuación de diferencias se debe tener disponibles los valores de las salidas previas, las entradas y las secuencias intermedias, que se multiplican con los coeficientes del filtro para luego ser sumados. Esto quiere decir que se deben almacenar todos estos valores de alguna forma y además es necesario dotar al sistema con la posibilidad de realizar productos y sumar estos resultados.

Los filtros digitales pueden implementarse en hardware o en software. Cuando la implementación es software se tiene un conjunto de instrucciones que permiten a un computador realizar la operación de filtrado y es este tipo de construcción la que resulta de interés para los fines de este trabajo constituyéndose en el objeto de discusión. Se debe elaborar un algoritmo que luego se implementa en algún lenguaje de alto nivel, empleando aritmética de punto flotante, para disminuir los posibles efectos de la cuantificación sobre la estabilidad y minimizar los cambios en la función de transferencia. Es posible llevar estos resultados para su implementación en sistemas de punto fijo, pero se debe hacer el estudio de los efectos de la cuantificación sobre la estabilidad y hacer correcciones si es del caso.

Representar el filtro mediante un diagrama de bloques ayuda bastante para la definición del algoritmo. En general la ecuación de diferencias se puede representar mediante sumadores (normalmente de dos entradas), bloques de ganancia que representan el producto de una señal por una constante y registros capaces de proporcionar los retardos adecuados que operan sobre las diferentes señales.

Considere por ejemplo el diagrama en bloques de la figura 3.10. Este indica que deben calcularse los productos $a_n y_{k-n}$ y $a_{n-1} y_{k-(n-1)}$, sumarlos posteriormente y la suma resultante añadirse a $a_{n-2} y_{k-(n-2)}$, y así sucesivamente. Tras calcular y_k , las variables de retardo se deben actualizar introduciendo $y_{k-(n+1)}$ en el registro que tiene y_{k-n} , y así sucesivamente.

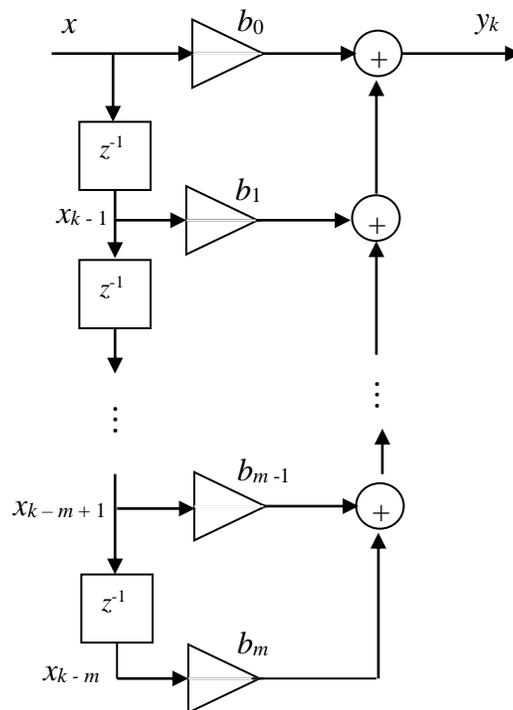


Figura 3.10. Representación de la ecuación de diferencias mediante un diagrama en bloques

3.6 APLICACIONES PARTICULARES DE LOS TIPOS DE FILTROS

Considere en principio los filtros paso-bajo. Este tipo de filtros se emplean comúnmente para desenfocar, suavizar y eliminar ruido. Se habla de que el suavizado direccional es de utilidad cuando se quieren preservar los bordes de una imagen, ya que el suavizado estándar tiende a distorsionarlos [ALB_CAS].

Los filtros paso-alto tienen entre sus aplicaciones la detección de piezas y objetivos, permiten resaltar bordes y enfocar, pero tienen el inconveniente de reducir el contraste.

Los filtros paso-banda por su parte se emplean en el realce de bordes, y mas frecuentemente en la restauración de imágenes [GON02]

3.7 ANALISIS WAVELETS

En el capítulo anterior se describieron las transformadas CWT y DWT. Conviene ahora aclarar que existe además una versión discretizada de la CWT, la cual permite el cálculo de la *transformada wavelet continua* mediante computador, pero no se trata en realidad de una transformada discreta. Las *series wavelet* son simplemente una versión muestreada de la CWT, y la información que aporta es muy redundante desde el punto de vista de la reconstrucción de la señal. Esta redundancia, además, requiere una cantidad importante de tiempo y recursos de computación. Por su parte la *transformada wavelet discreta* (DWT), proporciona suficiente información tanto para el análisis como para la síntesis de la señal original, con una reducción significativa del tiempo de computación [ALA05].

Al igual que en la CWT, en la DWT se realiza una representación tiempo-escala de la señal discreta, mediante técnicas de filtrado digital. Recordemos que la CWT es la correlación entre una función *wavelet* a diferentes escalas y la señal. Para calcular la *transformada wavelet continua* se cambia la escala de la función ventana, se desplaza en el tiempo, se multiplica por la señal bajo análisis y se realiza la integral. En el caso discreto, se usan filtros con diferentes frecuencias de corte para analizar la señal a distintas escalas. La señal se pasa a través de una serie de filtros paso-alto para analizar las altas frecuencias y a través de una serie de filtros paso-bajo para analizar las bajas frecuencias.

3.7.1 Filtros de Espejo en Cuadratura (QMF)

La resolución de la señal, la cual es una medida de la cantidad de información de detalle en la señal, se cambia mediante el filtrado, y la escala se cambia mediante el cambio de la

frecuencia de muestreo. Si se recuerda el procedimiento, este comienza haciendo pasar la señal a través de un filtro paso-bajo digital de media banda con respuesta al impulso $h[n]$.

Un filtro digital paso-bajo de media banda elimina todas las frecuencias que están por encima de la mitad de la frecuencia máxima de la señal. A la señal filtrada (componente de baja frecuencia) se le puede eliminar información redundante correspondiente a la mitad de las muestras, ya que ahora la frecuencia máxima de la señal es $\pi/2$ en lugar de π radianes. Con este procedimiento llamado submuestreo se modifica la escala de la señal haciéndola el doble pero no se afecta su resolución. El filtrado paso-bajo elimina la información de altas frecuencias contenida en la señal, modificando la resolución que se ve reducida a la mitad. El submuestreo de la señal, se define así:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[2n-k] \quad (3.54)$$

La transformada DWT analiza la señal a diferentes bandas frecuenciales con diferentes resoluciones mediante la descomposición de la señal en una aproximación *gruesa* e información de *detalle*. La descomposición de la señal $x[n]$ en diferentes bandas frecuenciales se realiza a través de filtros paso-bajo $h[n]$ y paso-alto $g[n]$ de media banda. Después del filtrado, la mitad de las muestras se pueden eliminar de acuerdo con el teorema de Nyquist [DE_CAS02]. La señal se puede submuestrear por un factor 2 simplemente eliminando una de cada dos muestras. Esto constituye el primer nivel de descomposición .

Esta descomposición reduce a la mitad la resolución temporal, puesto que solo la mitad de muestras caracterizan a la señal completa. Además, esta operación dobla la resolución frecuencial, ya que ahora el ancho de banda de la señal es la mitad del ancho de banda original, reduciendo de esta forma la incertidumbre en la frecuencia [DE_CAS02] . Este procedimiento, conocido como *codificación subbanda*⁴, se puede repetir para conseguir una descomposición mayor. Tras cada nivel de descomposición, el filtrado y submuestreo dará

⁴ La codificación subbanda es una técnica de codificación donde la señal de entrada es filtrada y separada en bandas de frecuencia, que aquí se llama análisis *wavelets*.

lugar a la mitad de muestras (y por tanto la mitad de resolución temporal) y a la mitad del ancho de banda. En la figura 3.11 se muestra el esquema de descomposición *wavelet* unidimensional de orden k .

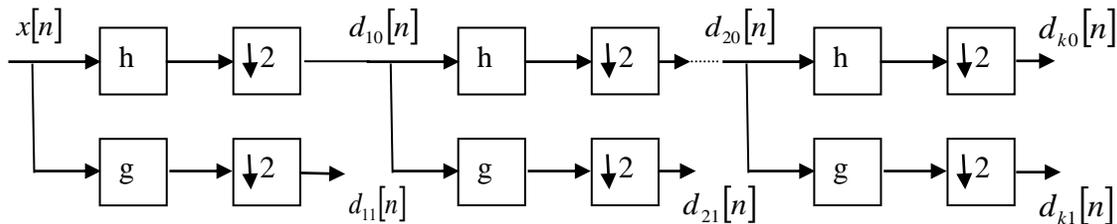


Figura 3.11. Descomposición *wavelet* unidimensional de orden k .

Los filtros paso-bajo y paso-alto están relacionados entre sí según la siguiente expresión:

$$g[L-1-n] = (-1)^n \cdot h[n] \quad (3.55)$$

donde $g[n]$ es el filtro paso-alto, $h[n]$ es el filtro paso-bajo y L es la longitud del filtro. A este tipo de filtros se les conoce como *filtros de espejo en cuadratura (QMF)*.

Las operaciones de filtrado y submuestreo se pueden expresar como [RIO91]:

$$y_{high}[k] = \sum_n x[n] g[-n+2k] \quad (3.56)$$

$$y_{low}[k] = \sum_n x[n] h[-n+2k] \quad (3.57)$$

donde $y_{high}[k]$ y $y_{low}[k]$ son las salidas de los filtros paso-alto y paso-bajo.

La reconstrucción es muy fácil en este caso, ya que los filtros de media banda forman bases ortogonales. En la reconstrucción, se realiza el proceso anterior en sentido inverso: se aumenta al doble la frecuencia de muestreo de las señales en cada nivel de reconstrucción,

se pasan a través de los filtros de síntesis $g'[n]$ y $h'[n]$ (paso-alto y paso-bajo respectivamente), y después se suman.

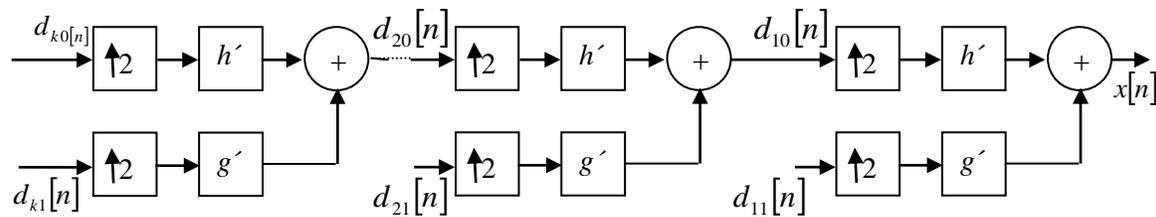


Figura 3.12. Reconstrucción *wavelet* unidimensional de orden k .

Dado que los filtros de análisis y de síntesis son idénticos, excepto por la inversión en el tiempo, la fórmula de reconstrucción viene dada por la siguiente expresión:

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} [y_{high}[k]g[-n+2k] + y_{low}[k]h[-n+2k]] \quad (3.58)$$

Si los filtros no son filtros de media banda ideales, no se podrá conseguir la reconstrucción sin pérdidas de la señal original. Bajo ciertas circunstancias, se pueden encontrar filtros que aun no siendo idénticos, proporcionan reconstrucción sin pérdidas. Los más famosos son los desarrollados a partir de las *wavelets de Daubechies* [DAU92] que se emplean en desarrollo de este trabajo.

3.7.2 Umbral Suave y Duro

Para reducir el ruido se usa dos métodos, uno lineal y otro no lineal. El método lineal es independiente del tamaño empírico de los coeficientes de la señal, y basa su construcción en que el ruido se encuentra principalmente en los coeficientes finos de escala o de primer nivel, eliminando todos los coeficientes con una escala mas fina que cierto umbral de escala λ , donde $\lambda > 0$. Si los coeficientes *wavelet* son $\{d_{j,k}\}$ entonces la relación es: [MAT00]

$$d_{j,k} = \begin{cases} 0 & , j \geq \lambda \\ d_{j,k} & , j < \lambda \end{cases} \quad (3.59)$$

El método no lineal se basa en la idea de que el ruido se encuentra en cada coeficiente y está distribuido sobre todas las escalas. Se pueden aplicar en dos versiones, la del umbral suave (*soft threshold*) [DON95] y la del umbral duro, (*hard threshold*). El umbral duro elimina los coeficientes que se encuentran debajo de cierto umbral elegido λ tal que $\lambda > 0$. Esto es:

$$s(x) = \begin{cases} s(x), & |x| > \lambda \\ 0, & |x| \leq \lambda \end{cases} \quad (3.60)$$

donde $s(x)$ es la señal que está siendo analizada y λ es el umbral que se ha elegido previamente. El umbral suave, también es conocido como *shrinkage denoising*, y es una extensión del umbral duro, que elimina los elementos de valor inferior al umbral y envía a un valor determinado el resto de ellos. Este proceso se realiza de la siguiente manera: [QIA00]

$$s(x) = \begin{cases} \text{Sign}(x)(|x| - \lambda), & |x| > \lambda \\ 0, & |x| \leq \lambda \end{cases} \quad (3.61)$$

donde *Sign* es la función signo⁵.

En la figura 3.13 se presenta un ejemplo en el que una función es tratada con ambos métodos. Se aprecia como el umbral duro crea discontinuidades en $s(x) = \pm\lambda$, mientras que el umbral suave no lo hace. El valor tomado para λ es de 0.6.

⁵ La función signo se define como: $\text{Sign}(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x > 0 \\ 0, & \text{si } x = 0 \\ -1, & \text{si } x < 0 \end{cases}$

Los tipos de umbrales empleados para eliminación de ruido fueron desarrollados por *Donoho y Johnstone* [TAS00], [TRE00] e incluyen: Umbral Fijo, Umbral SURE Riguroso y Umbral Minimax entre otros, y se describen mas adelante.

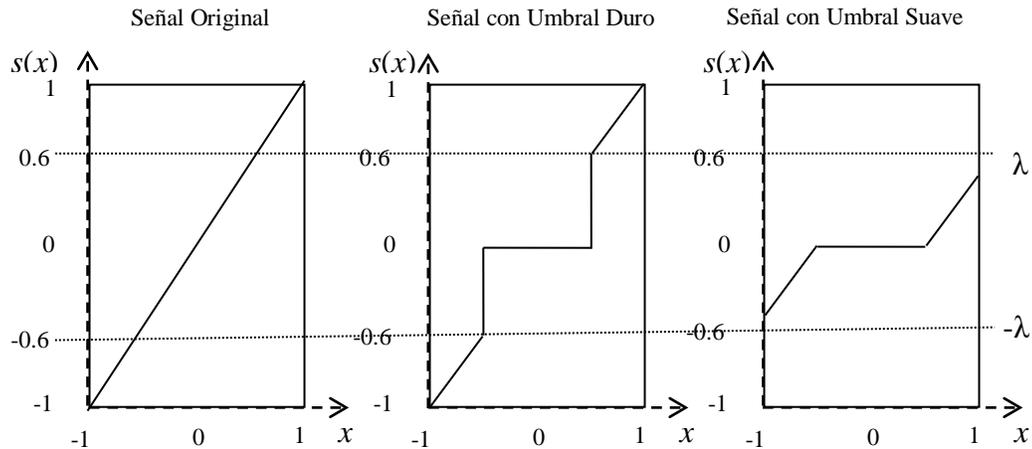


Figura 3.13. Umbral duro y Umbral suave de una señal.

Para los métodos de umbral se definen las siguientes etapas:

- **Descomposición:** Se elige la *wavelet* con la cual se va a trabajar, además de elegir un número J de niveles de descomposición a calcular. Posteriormente se calcula la DWT de la Señal. En una señal unidimensional quedaría de la siguiente manera:

$$S(a,b) = DWT \{s(n), h_{a,b}, J\} \quad (3.62)$$

- **Aplicación de Umbral:** Se define el umbral para cada coeficiente de 1 a J , seleccionando un valor λ y aplicando umbral duro o suave según se haya elegido. Con esto se eliminarán los coeficientes de más baja energía. Este proceso permite obtener los coeficientes limpios de ruido, es decir:

$$\lambda = u \{S(a,b)\} \quad (3.63)$$

$$Z(a,b) = D \{S(a,b), \lambda\} \quad (3.64)$$

- **Reconstrucción:** Finalmente se calcula la *transformada inversa wavelet discreta* utilizando los coeficientes modificados.

$$z(n) = IDWT \{Z(a,b)\} \quad (3.65)$$

Ya conociendo la forma general de trabajo de los algoritmos de reducción de ruido en señales unidimensionales es necesario señalar la importancia que tiene la elección del tipo umbral y la forma en que se calcula dicho umbral λ . Existe una gran variedad de métodos para escoger el valor de λ y pueden ser agrupados en dos categorías que son los *umbrales globales* y los *umbrales dependientes del nivel*. Los primeros eligen un valor fijo de λ para ser aplicado globalmente a todos los coeficientes *wavelet* $S(a,b)$ y los segundos son aquellos que tienen la posibilidad de entregar un valor diferente λ_a para cada nivel de resolución dado.

Para iniciar con la descripción de los métodos se debe saber que todos los umbrales requieren de una estimación de los niveles de ruido, que esta basado en la desviación media absoluta y toma en cuenta sólo los coeficientes empíricos *wavelets* de primer nivel que son los que concentran la mayor cantidad de ruido. Este estimador de los niveles de ruido que fue propuesto por Donoho y Johnstone en 1994 [FAU-FUE] se aplica en los diferentes métodos para reducir ruido y esta dado por:

$$\sigma = \sum_{b=0}^{2^{J-1}-1} \frac{|S(J-1,b)|}{n} / 0.6745 \quad (3.66)$$

donde J representa el número de niveles de descomposición.

3.7.2.1 Método Mínimax. Se le denomina así por que utiliza el principio de mínimax el cual es utilizado en estadística para diseñar estimadores [ANT01] [JAN99]. Ya que la reducción de ruido de la señal puede ser vista como el estimador de una regresión en una función desconocida, el umbral mínimax λ_M es la opción que obtiene el mínimo, de un

conjunto de valores dados, del máximo error cuadrático medio. El umbral *Mínimax* propuesto, depende del tamaño n de las muestras, es decir,

$$\lambda_M = \sigma \lambda_n^* \quad (3.67)$$

donde λ_n^* es definido como el valor de λ para el cual:

$$\lambda_n^* = \inf_{\lambda} \sup_d \left\{ \frac{R_{\lambda}(d)}{n^{-1} + R_{ra}(d)} \right\} \quad (3.68)$$

donde $R_{\lambda}(d) = E(\delta_{\lambda}(d) - d)^2$ representa la variancia y $R_{ra}(d)$ es el riesgo ideal calculado con ayuda de una de las respuestas calculadas. Una de estas respuestas es la *proyección lineal diagonal* (DLP), la cual nos dice cuando “mantener” o “aniquilar” cada coeficiente *wavelet*. Y la otra es el *encogimiento lineal diagonal* (DLS), que nos indica cuanto encoger cada coeficiente *wavelet*. El riesgo ideal de las respuestas está dado por:

$$R_{ra}^{DLP}(d) = \min(d^2, 1) \quad (3.69)$$

$$R_{ra}^{DLS}(d) = \frac{d^2}{d^2 + 1} \quad (3.70)$$

Matlab implementa el método minimax de la siguiente manera:

$$\lambda_M = \begin{cases} 0 & , n \leq 32 \\ 0.3936 + 0.1829 \left(\frac{\log(n)}{\log 2} \right) & , n > 32 \end{cases} \quad (3.71)$$

Lo que se hace es considerar la longitud de la señal con ruido y en caso de que esta sea menor a 32 muestras el umbral es cero, en caso contrario se aplica la ecuación correspondiente para calcular el umbral indicado. De acuerdo con la clasificación explicada previamente este algoritmo corresponde a un umbral global, ya que el valor λ_M es el mismo para todas las muestras analizadas.

3.7.2.2 Método de Forma Fija. Aquí sus creadores utilizan una forma fija de umbral, la cual esta determinada por:

$$\lambda_{FF} = \sigma \sqrt{2 \log(n)} \quad (3.72)$$

donde el umbral λ_{FF} es función de n que corresponde a la longitud de la señal a limpiar y σ es el estimador de los niveles descritos en la ecuación (3.66). Es decir, que el umbral varía de acuerdo con la longitud de la señal. Este umbral es sustancialmente más grande que el umbral *Minimax* para cualquier valor de n descrito anteriormente. Como resultado la reconstrucción incluirá menos coeficientes lo cual implica una estimación con mejor balance para el proceso de limpieza, ya que se distribuye mejor la estandarización de los coeficientes que en la estimación *Minimax* [ANT01]. Este método también está catalogado dentro de los métodos de umbral global.

3.7.2.3 Método Rigorous SURE. Este método es dependiente del nivel ya que introduce un esquema que utiliza los coeficientes de las *wavelets* de tal forma que para cada nivel a de escala tenga un umbral λ_a . Este método aplica el *Stein's Unbiased Risk Estimate (SURE)*, que es un estimador de umbral suave. También se conoce como función de pérdida cuadrática. El valor final del umbral, después del procedimiento matemático es: [SAR03]

$$\lambda_{SURE} = \arg \min_{0 < \lambda < \lambda_{FF}} SURE \left(\lambda, \frac{S(a,b)}{\sigma} \right) \quad (3.73)$$

en el cual $a = a_0, \dots, J-1$, $b = 0, 1, \dots, 2^J - 1$, λ_{FF} fue definido en la ecuación (3.72), $S(a,b)$ son los coeficientes de la DWT y σ esta definido en la ecuación (3.66). El operador $\arg \min$ denota que se utilizarán los elementos menores del estimador *SURE* [ANT01].

Este tipo de umbral tiene una desventaja cuando se presentan esparcimientos extremos de los coeficientes *wavelets*, porque se oculta información contribuida en el caso *SURE* diferente de cero cuando el ruido es adicionado en las coordenadas para las que la señal es cero. Cosa que resolvieron sus propios autores uniendo los trabajos realizados previamente

en aquellas características que compartieran ambos métodos. De esta mezcla salió el método *Heuristic SURE*.

No olvidar que *Donoho* y *Johnstone* son considerados como los pioneros en la utilización de las *wavelets* como herramientas para la eliminación o reducción de ruido y por eso es que estos tres métodos son los más importantes en este campo. Se destaca la gran cantidad de trabajos derivados de estos procedimientos que tienen aplicación en su mismo campo.

4. ANÁLISIS Y EVALUACIÓN DE RESULTADOS

En este punto se inicia la descripción del trabajo realizado para comparar los filtros que se implementan con base en las teorías de Fourier y *wavelets*. Se hace la elección de una herramienta de soporte y se diseña una aplicación software que permita facilitar el proceso de filtrado de señales y minimizar los errores por manipulación de datos. Finalmente se aplica la herramienta en la eliminación de ruido, se captura información de relevancia comparativa y se evalúan y analizan los resultados obtenidos.

La herramienta de soporte elegida fue Matlab® Version 6.5.0.180913a Release13, esto obedece a la facilidad que tiene para la manipulación de señales unidimensionales y bidimensionales¹, a la robustez con que maneja los datos, a la disponibilidad de múltiples herramientas (toolbox) especializadas, y la facilidad de simulación de algoritmos.

Para el desarrollo de la aplicación en Matlab se hace uso de los toolbox de procesamiento de imágenes, procesamiento de señales y de *wavelets*, además se emplean las herramientas de creación de interfaces gráficas de usuario.

La aplicación consta de un menú inicial desde el cual se puede acceder a los métodos de análisis tanto para Fourier como para *wavelets* para el caso de señales 1D (archivos .wav de un solo canal) e imágenes (monocromáticas en archivos .jpg y .tiff a 256 niveles de gris). Las interfaces que aparecen tras la selección de alguno de los métodos de análisis, permiten cargar la señal que se desea, y seleccionar los parámetros del análisis, una vez realizado este paso se puede proceder a aplicar ruido, para finalmente evaluar el desempeño de los

¹De aquí en adelante las señales unidimensionales y bidimensionales serán referidas como señales 1D e imágenes respectivamente, reservando el término señales para referirse indistintamente a los dos tipos.

filtros, que pueden ser prediseñados, o diseñarse de acuerdo con algunas especificaciones deseadas. La aplicación entrega información sobre la señal filtrada y la diferencia que se obtiene con la señal original. El anexo A que corresponde al manual de usuario explica más detalladamente como funciona y cuales son las características de la aplicación desarrollada.

Para realizar el estudio comparativo entre los filtros digitales FIR implementados con las dos teorías se realizan pruebas que permiten evaluar el desempeño que se obtiene al filtrar las señales tras la aplicación de diferentes tipos de ruido a las versiones originales, y probar distintos métodos de eliminación de ruido basados en umbrales (caso *wavelets*) y en filtros paso-bajo (caso Fourier).

Las pruebas se basan en la evaluación de *criterios de fidelidad* que pueden ser *objetivos* y *subjetivos* [RUI-SOL]. Los criterios objetivos se emplean cuando es posible expresar el nivel de pérdida de información como una función de la señal de entrada y de la señal de salida, empleándose el *error cuadrático medio (MSE)* y la *relación señal a ruido (SNR)*. El criterio subjetivo que se emplea busca evaluar el desempeño y corresponde a presentar la señal filtrada a un grupo adecuado de personas para después promediar las evaluaciones y concluir subjetivamente sobre la calidad de la misma. Dicha calidad se mide bajo una escala de criterios preestablecidos que son: buena, regular, mala y pésima.

El error cuadrático medio tiene en cuenta las diferencias $e(x, y)$ entre la señal original $f(x, y)$ y la filtrada $f'(x, y)$ es decir, $e(x, y) = f'(x, y) - f(x, y)$ para el caso de imágenes se define como: [RUI-SOL]

$$MSE = \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} [f'(x, y) - f(x, y)]^2 \quad (4.1)$$

Por su parte la relación señal a ruido está definida según la expresión: [RUI-SOL]

$$SNR = \frac{\sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f'(x, y)^2}{\sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} [f'(x, y) - f(x, y)]^2} \quad (4.2)$$

Las definiciones anteriores son validas para señales 1D considerando a f y f' como funciones de una sola variable.

Los resultados de varias pruebas con diferentes filtros realizadas sobre algunas señales que permiten evaluar el mejor filtrado se presentan en una serie de tablas que hacen referencia a una señal particular con un tipo de ruido específico, y muestran los valores obtenidos tanto para el MSE como la SNR logradas tras la aplicación de algunos de los filtros implementados en la aplicación. Las tablas también incluyen el resultado del desempeño evaluado como criterio subjetivo al comparar la señal filtrada con la señal original.

Se ha decidido emplear en todos los casos de análisis con *wavelets*, la versión de umbral suave, ya que como se mostró en la sección 3.7.2 es una mejor aproximación puesto que no crea las discontinuidades propias del umbral duro. Además se trabaja con los valores de umbral por defecto, es decir los que calcula la aplicación basándose en las características de la señal de entrada. Para los casos de análisis con Fourier se implementan filtros del tipo paso-bajo y paso-alto puesto que son los indicados para eliminación de ruido y resaltar bordes, como se indicó en la sección 3.6.

En el desarrollo de la aplicación software se emplearon únicamente *wavelets* de las familia Daubechies porque sus características las hacen idóneas para desarrollar la parte de filtrado [MAT00], además han sido ampliamente usadas para el trabajo con imágenes. Cabe aclarar que si aparece la *wavelet* Haar es porque equivale a una Daubechies de orden igual a uno.

La elección de un número restringido de casos en las demostraciones de análisis que pueden hacerse, obedece a que las combinaciones disponibles son muchas, pues son varios los parámetros que se pueden modificar y muchas las opciones que se pueden elegir, resultando poco practico el traerlas todas para este trabajo.

De todas formas, se aclara que se han realizado algunas pruebas preliminares de filtrado cuyos resultados han sido determinantes para la elección de los casos de análisis que aquí se emplean, y adicionalmente queda la herramienta desarrollada como medio para experimentar y sacar conclusiones propias dependiendo de los resultados particulares que se desea alcanzar.

Las señales 1D empleadas corresponden a los archivos de onda Sanimono.wav y Boulevard.wav que son fragmentos de canciones convertidas a sonido monofónico, muestreadas a 16 bits por muestra con una frecuencia de muestreo de 44100Hz, y las imágenes con que se trabaja que aparecen en la figura 4.1 son imágenes en archivos con formato JPG de 256 por 256 pixels con 256 niveles en escala de gris, obtenidas tras el recorte y la conversión a escala de grises de fotografías tomadas con una cámara digital. Todas estas señales se incluyen junto con la aplicación en sus respectivos archivos.

Las señales audibles seleccionadas tienen características frecuenciales bien definidas, por ejemplo, en Sanimono se nota una fuerte presencia de brillos, los cuales corresponden a información de altas frecuencias que contrastan al compararse con la señal Boulevard que presenta un contenido principalmente de bajas frecuencias evidentes por sus sonidos graves. El espectro de las señales confirma estas apreciaciones.

Se ha hecho la elección de las imágenes mencionadas porque permiten trabajar diferentes características deseables para el filtrado. De esta forma, la imagen Casona.jpg presenta una buena cantidad de detalles que dificultan la eliminación de ruido en la misma. La imagen Amarilla.jpg presenta en su mayoría cambios suaves en las intensidades de gris que deben permitir una relativamente más fácil eliminación de ruido y una característica de bordes bien definidos que la hacen valiosa en procesos que realicen la detección de los mismos. La imagen Roja.jpg presenta una combinación de las características anteriores que hace interesante su estudio.

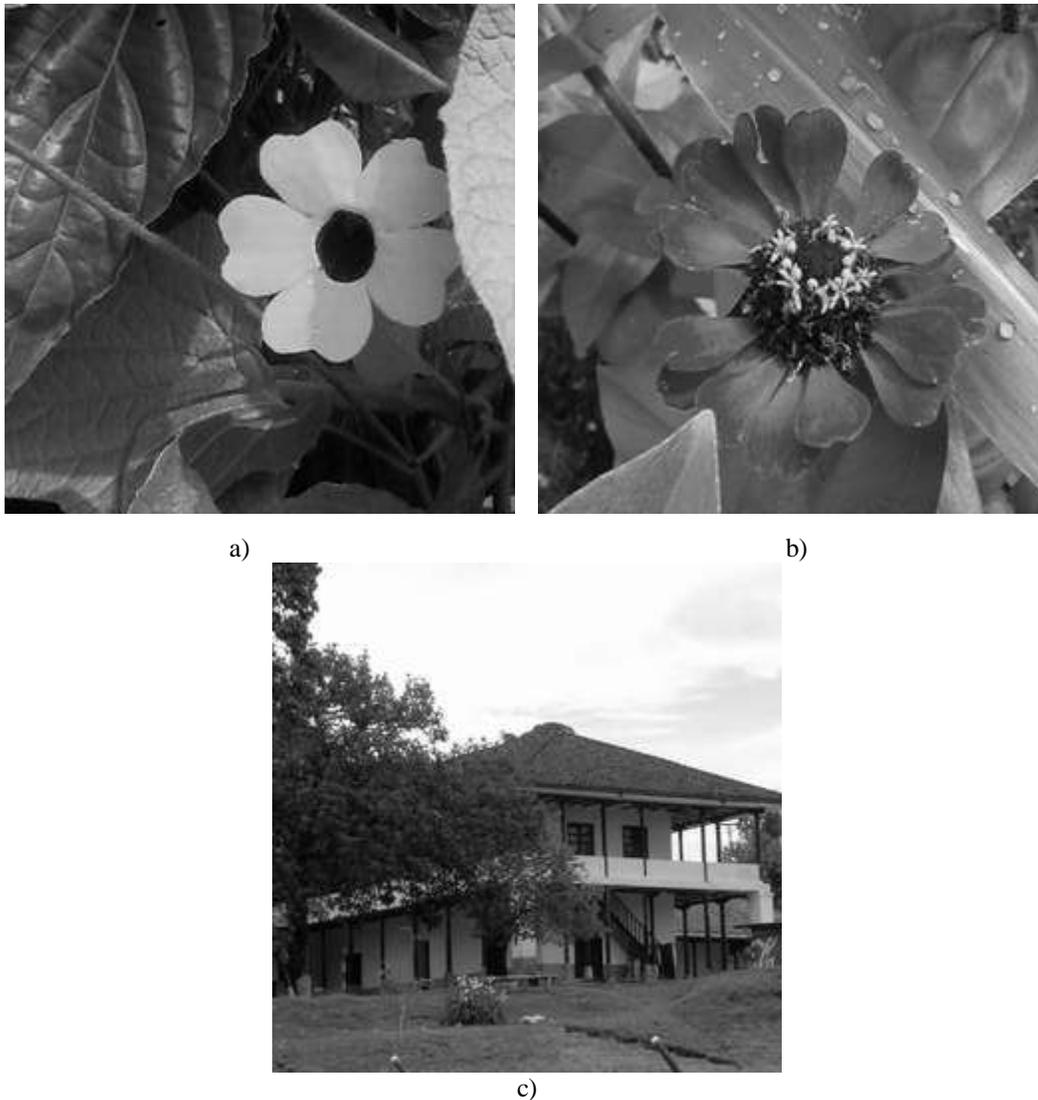


Figura 4.1. Imágenes empleadas para la evaluación de los filtros. a) Amarilla.jpg b) Roja.jpg c) Casona.jpg

Debido a que las imágenes en tonalidades de gris no permiten una visualización óptima porque se dificulta la observación de algunos detalles en la imagen, y teniendo en cuenta que el ojo humano distingue más colores que niveles de gris [ALB-CAS], se ha optado por emplear en la aplicación una técnica conocida como *seudocolor* que consiste en mostrar las imágenes con un mapa de colores en vez de uno de intensidades de gris.

El mapa de colores empleado que se conoce con el nombre *pink*² viene predefinido en Matlab y permite una mejor apreciación de los detalles de la imagen que la observada para intensidades de gris.

4.1 RESULTADOS OBTENIDOS

En la aplicación se ha tomado cada una de las señales originales y se ha contaminado con cada uno de los tipos de ruido siguientes: Para el caso de señales 1D, ruido *blanco Gaussiano* y ruido *multiplicativo*, además de estos tipos para las imágenes se tiene ruido *Poisson*, y ruido *sal y pimienta* [MAT02]. Se ha buscado eliminar el ruido aplicado mediante la operación de filtrado y se han establecido medidas cuantitativas y cualitativas de los resultados de este proceso para determinar los mejores y los peores comportamientos de los filtros empleados.

Las medidas cualitativas y cuantitativas se han realizado de manera independiente, y se puede emplear cualquiera de las dos para determinar el mejor o el peor filtrado al comparar el resultado obtenido con la señal original. Cual de ellas utilizar es una cuestión cuya respuesta depende de para que se necesita, por ejemplo, si se desea una elevada potencia de la señal se puede utilizar el mejor resultado según la relación señal a ruido, mientras que el mejor resultado de la apreciación subjetiva resulta mas adecuado cuando se desea exponer la señal a los sentidos de alguna persona. De esta forma se hace la comparación teniendo en cuenta ambos criterios de fidelidad, que en caso de coincidir se presentan en este capítulo como un solo resultado y en caso de ser diferentes se presentan como resultados diferentes. Los resultados completos del proceso de evaluación del filtrado obtenido se presentan en las tablas correspondientes en el anexo C e incluyen los criterios de fidelidad objetivos (MSE y SNR) junto a la apreciación subjetiva.

Vale la pena aclarar que los resultados de la evaluación subjetiva de los criterios de fidelidad llegan a tomar sus valores (buenos, malos, etc) pero dentro de las condiciones de

² El mapa de color *pink* contiene tonalidades pasteles del color rosado. Este mapa de colores proporciona coloración en tonos sepia a fotografías en escala de grises.

evaluación presupuestadas, es decir, que tener una calificación de bueno para un resultado no necesariamente significa que el filtro calificado recupera muy bien la señal original, sino, que ese resultado es entre todos los obtenidos uno de los que mas se acerca a lo que se esperaba.

Para el desarrollo de los filtros con Fourier, se ha decidido no tener muy en cuenta los criterios de optimización para la ventana de Kaiser, puesto que lo que se busca en este caso no es obtener los filtros menos complejos sino, mas bien, los que mejor filtrado proporcionen, de modo que se ha probado con diferentes valores en el parámetro de forma y se ha elevado el orden de los filtros mas allá del orden mínimo sugerido.

A manera de experimentación adicional se ha filtrado una imagen para ver el desempeño de las *wavelets* y de Fourier en la detección de bordes.

4.1.1 Resultados Para Señales 1D

A continuación se presentan los mejores y peores resultados del filtrado en comparación con la señal original obtenidos dentro de las pruebas realizadas tras experimentar con las *wavelets* Haar, db2, db3 para eliminación de ruido en señales 1D.

4.1.1.1 *Resultados obtenidos para la señal 1D sanimono.wav*: Los mejores y peores resultados del filtrado realizado sobre esta señal en comparación con la señal original se pueden ver en la tabla 4.1 para contaminación con ruido blanco Gaussiano.

Tabla 4.1 Resultados más representativos para Sanimono.wav con ruido Gaussiano

<i>FOURIER</i>				<i>WAVELET</i>				
Ventana	MSE	SNR (veces)	Desempeño	Wavelet	M. Umbral	MSE	SNR (veces)	Desempeño
Bartlett	0.0947	0.5556	Peor	Haar, $n = 3$	Elimina. Altos	0.0337	2.1199	Peor
Kaiser	0.0970	0.5694	Mejor	db3, $n = 1$	Mínimax	0.0295	2.7876	Mejor

Las imágenes correspondientes a los espectros de las señales original, contaminada con ruido, y mejores resultados del filtrado con Fourier y *wavelets* comparados con la señal original aparecen en la figura 4.2.

Para contaminación con ruido Multiplicativo los resultados más representativos se indican en la tabla 4.2. y los espectros que corresponden a los mejores resultados al comparar con la señal original aparecen en la figura 4.3.

Tabla 4.2 Resultados mas representativos para Sanimono.wav con ruido Multiplicativo
(El resultado del desempeño se obtuvo de comparar cada caso con la señal original)

<i>FOURIER</i>				<i>WAVELET</i>				
Ventana	MSE	SNR (veces)	Desempeño	Wavelet	M. Umbral	MSE	SNR (veces)	Desempeño
Bartlett	0.0926	0.5456	Peor	Haar, $n = 3$	Elimina. Altos	0.0062	7.4824	Peor
Rectangular	0.0948	0.5596	Mejor	db3, $n = 2$	SURE Heurist.	0.0012	43.6416	Mejor

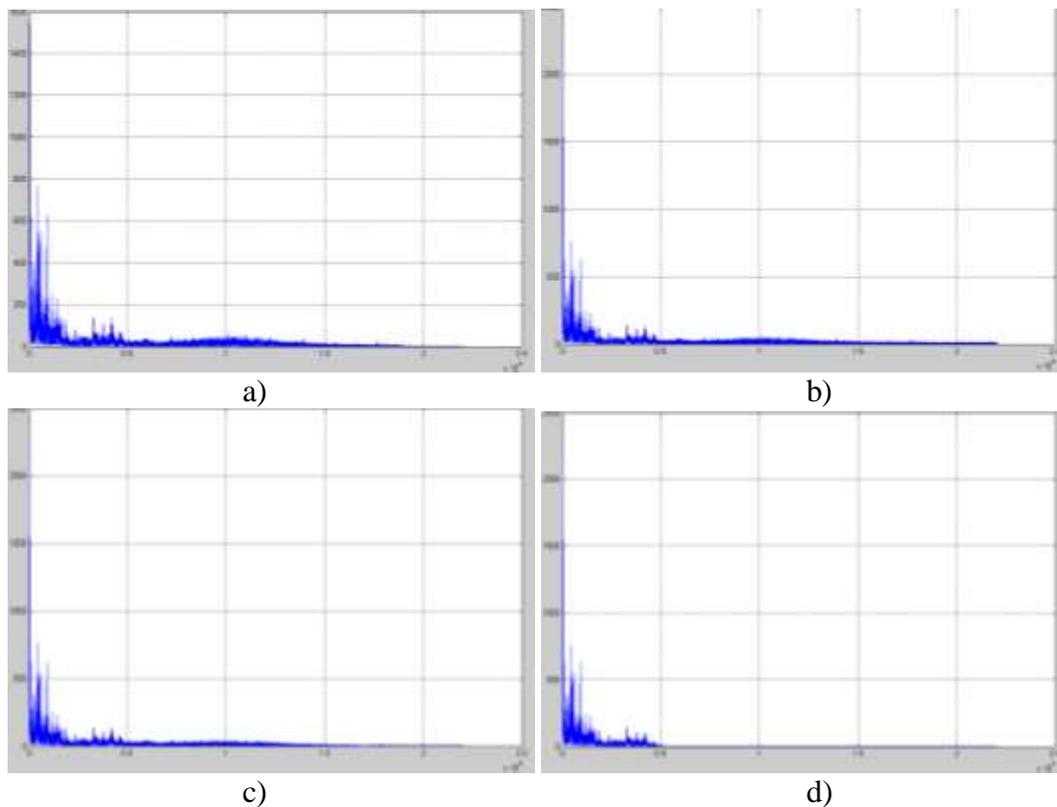


Figura 4.2. Espectro de los mejores resultados obtenidos para Sanimono.wav al comparar con la señal original para contaminación con ruido blanco Gaussiano a) Señal original. b) señal ruidosa. c) Señal filtrada con *wavelet* dB3 $n=1$. d) Señal filtrada con Fourier ventana de Kaiser.

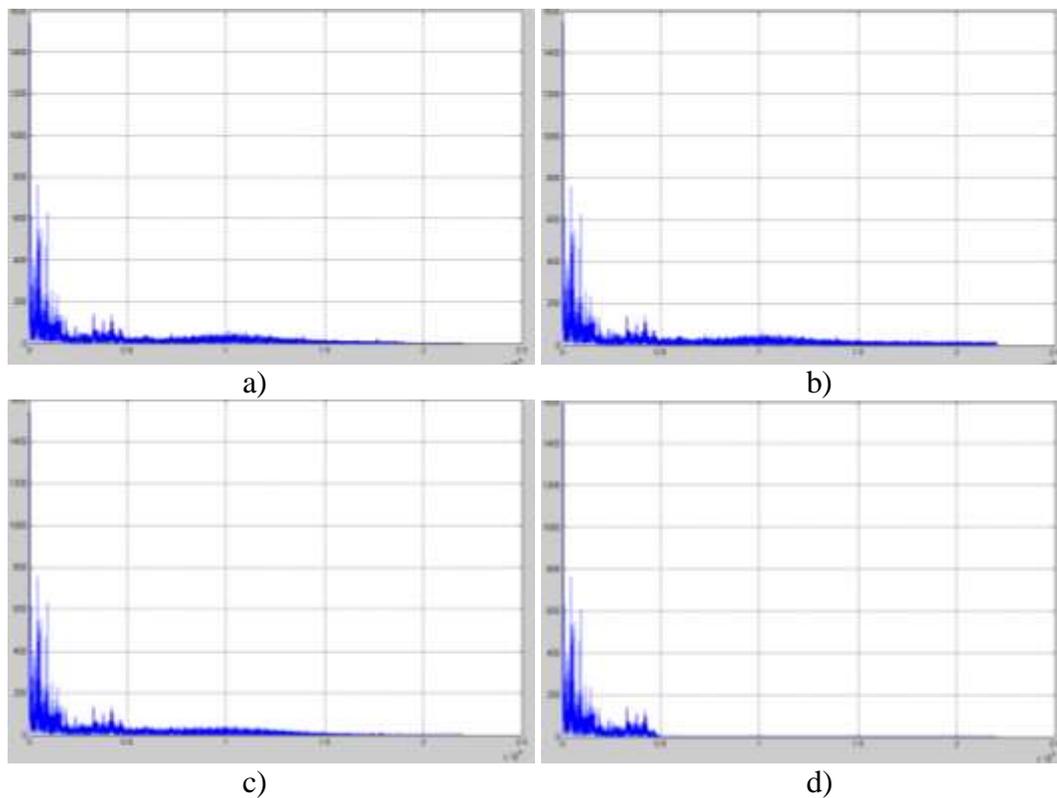


Figura 4.3. Espectro de los mejores resultados obtenidos para Sanimono.wav al comparar con la señal original para contaminación con ruido Multiplicativo a) Señal original. b) señal ruidosa. c) Señal filtrada con wavelet dB3 $n=2$. d) Señal filtrada con Fourier ventana rectangular.

4.1.1.2 Resultados obtenidos para la señal Boulevard.wav: Los mejores y peores resultados del filtrado realizado en comparación con la señal original se pueden ver en la tabla 4.3 para contaminación de la señal con ruido Gaussiano.

Tabla 4.3 Resultados mas representativos para Boulevard.wav con ruido Blanco Gaussiano
(El resultado del desempeño se obtuvo de comparar cada caso con la señal original)

<i>FOURIER</i>				<i>WAVELET</i>				
Ventana	MSE	SNR (veces)	Desempeño	Wavelet	M. Umbral	MSE	SNR (veces)	Desempeño
Bartlett	0.1023	0.5455	Peor	Haar, $n = 3$	Elimina. Altos	0.0057	9.0682	Peor
Kaiser	0.1023	0.5456	Mejor	db3, $n = 1$	Mínimax	0.0030	18.8848	Mejor

Las imágenes correspondientes a los espectros de las señales original, contaminada con ruido, y mejores resultados tras ser filtrada con Fourier y *wavelets* aparecen en la figura 4.4.

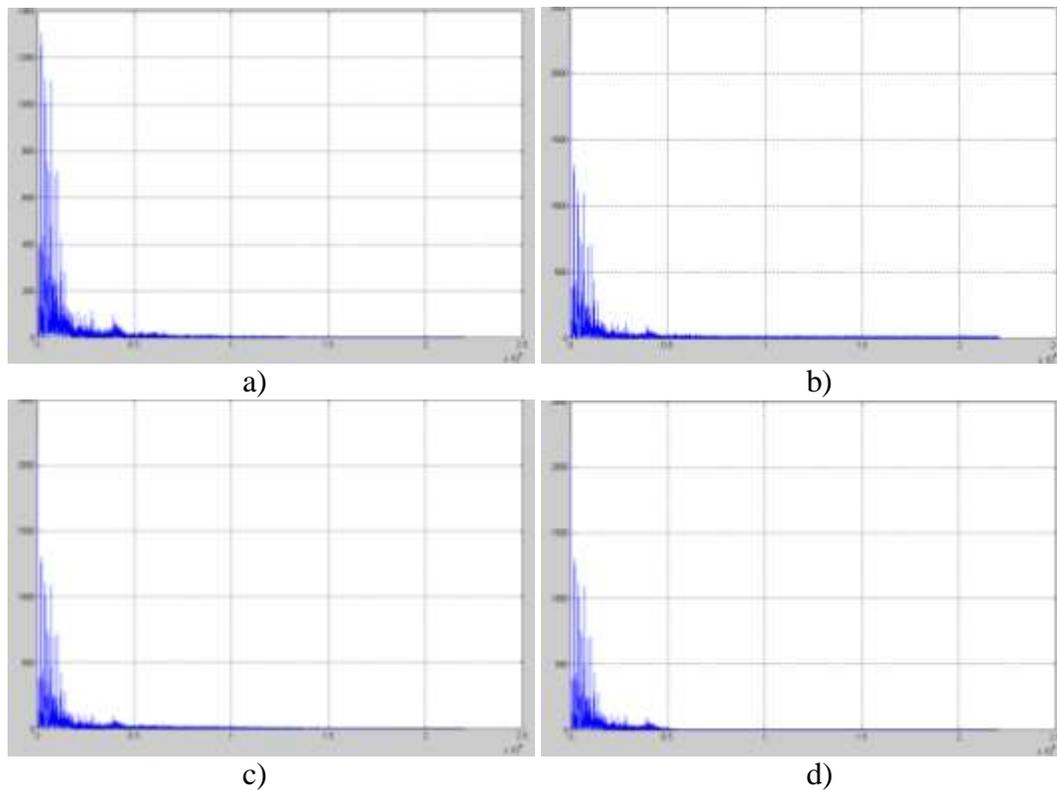


Figura 4.4. Espectro de los mejores resultados obtenidos para Boulevard.wav al comparar con la señal original para contaminación con ruido blanco Gaussiano. a) Señal original. b) señal ruidosa. c) Señal filtrada con *wavelet* dB3 $n=1$. d) Señal filtrada con Fourier ventana de Kaiser.

Para contaminación con ruido Multiplicativo los resultados más representativos se indican en la tabla 4.4 y los espectros que corresponden a los mejores resultados en la figura 4.5.

Tabla 4.4 Resultados mas representativos para Boulevard.wav con ruido Multiplicativo

(El resultado del desempeño se obtuvo de comparar cada caso con la señal original)

<i>FOURIER</i>				<i>WAVELET</i>				
Ventana	MSE	SNR (veces)	Desempeño	Wavelet	M. Umbral	MSE	SNR (veces)	Desempeño
Bartlett	0.0998	0.5361	Peor	Haar, $n = 3$	Elimina. Altos	0.0031	16.0811	Peor
Rectangular	0.1000	0.5362	Mejor	db3, $n = 2$	SURE Heurist.	0.0011	49.2767	Mejor

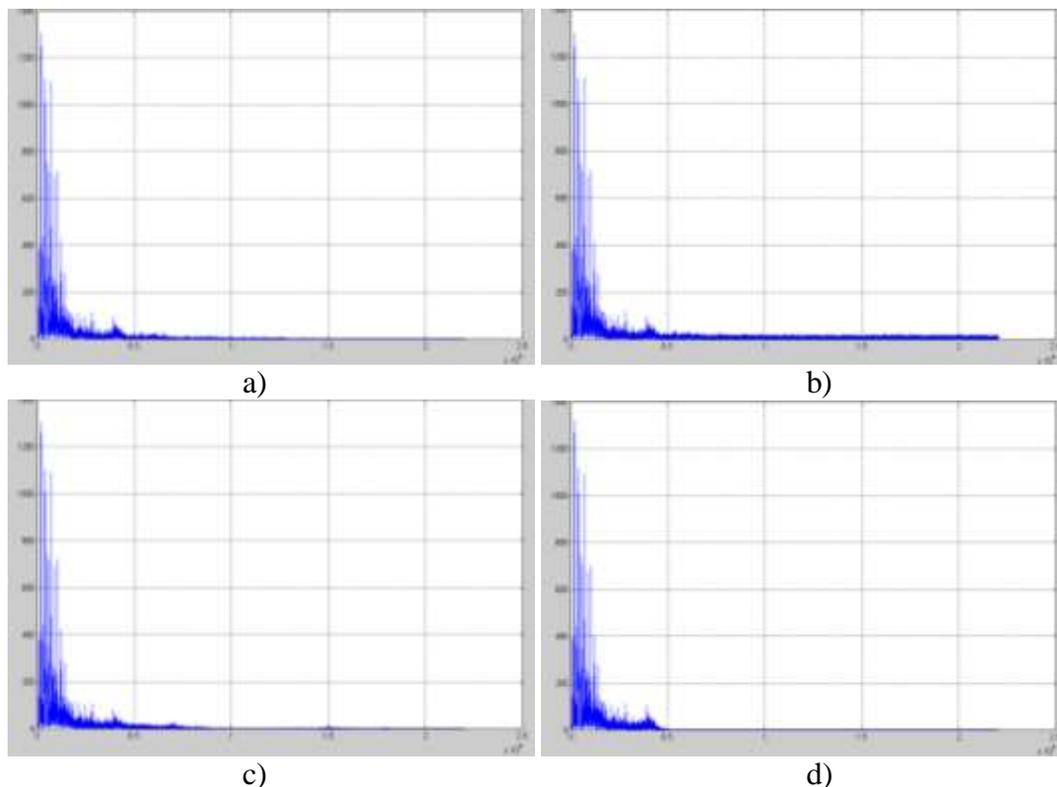


Figura 4.5. Espectro de los mejores resultados obtenidos para Boulevard.wav al comparar con la señal original para contaminación con ruido multiplicativo. a) Señal original. b) Señal ruidosa. c) Señal filtrada con *wavelet* db3 n=2. d) Señal filtrada con Fourier ventana Rectangular.

Se aclara que en todos estos resultados lo que se pretendía era eliminar al máximo el ruido aplicado, pero tratando de conservar la señal con la mínima distorsión posible.

4.1.2 Resultados Para Imágenes

Para el caso de las imágenes se realizaron algunas pruebas adicionales a la eliminación de ruido. Se presentan primero los resultados para eliminación de ruido y al final las pruebas adicionales y sus resultados. Tras la aplicación de ruido Gaussiano, Poisson, Sal y Pimienta y Multiplicativo a cada una de las imágenes se procedió a filtrarlas, y a medir los criterios de calidad cuantitativos y cualitativos de las imágenes resultantes. Los mejores resultados en comparación con la imagen original aparecen calificados en las tablas siguientes con el mejor desempeño en la prueba, y los mas deficientes con el peor desempeño en función de la SNR y el MSE obtenido.

4.1.2.1 *Resultados obtenidos para la imagen Amarilla.jpg*: Los resultados de la eliminación de ruido se pueden ver en la tabla 4.5 y en las tablas 5 a 8 del anexo C. Se puede apreciar a continuación los resultados más significativos que se obtuvo con Fourier para filtros FIR con las ventanas indicadas en la tabla, y con *wavelets* para la *wavelet madre* y el método de umbral señalados.

Tabla 4.5 Resultados más representativos para la Imagen Amarilla.jpg para diferentes tipo de ruido

Ruido Aplicado	FOURIER		WAVELET			Desempeño en la prueba ³
	Ventana	SNR (veces)	Wavelet	Método de Umbral	SNR (veces)	
Blanco Gaussiano	Bartlett	84.3223	Haar, $n = 3$	Eliminación de Altos	18.5823	Peor
	Bohman	90.9913	Haar, $n = 3$	Normal	129.1370	Mejor
Poisson	Bartlett	100.696	Haar, $n = 3$	Eliminación de Altos	43.7700	Peor
	Bohman	110.043	db3, $n = 1$	Normal	189.8900	Mejor
Sal y Pimienta	Rectangular	52.7669	db3, $n = 3$	Eliminación de Altos	14.2858	Peor
	Bohman	56.5040	Haar, $n = 1$	Eliminación de Bajos	829.4610	Mejor
Multiplicativo	Bartlett	68.6962	Haar, $n = 3$	Eliminación de Altos	17.1874	Peor
	Bohman	73.3793	Haar, $n = 3$	Normal	212.2161	Mejor

La comparación visual de los resultados del filtrado permitió evaluar subjetivamente las apreciaciones de las imágenes resultantes para todos los tipos de filtros. Las figura 4.6 y 4.7 presentan las comparaciones resultantes para los mejores y peores resultados obtenidos del filtrado en comparación con la imagen original. Los peores resultados se muestran solo para efectos comparativos y únicamente para esta imagen, puesto que son los mejores resultados los que resultan de interés para cualquier aplicación.

³ Comparando el resultado de cada filtro con la imagen original

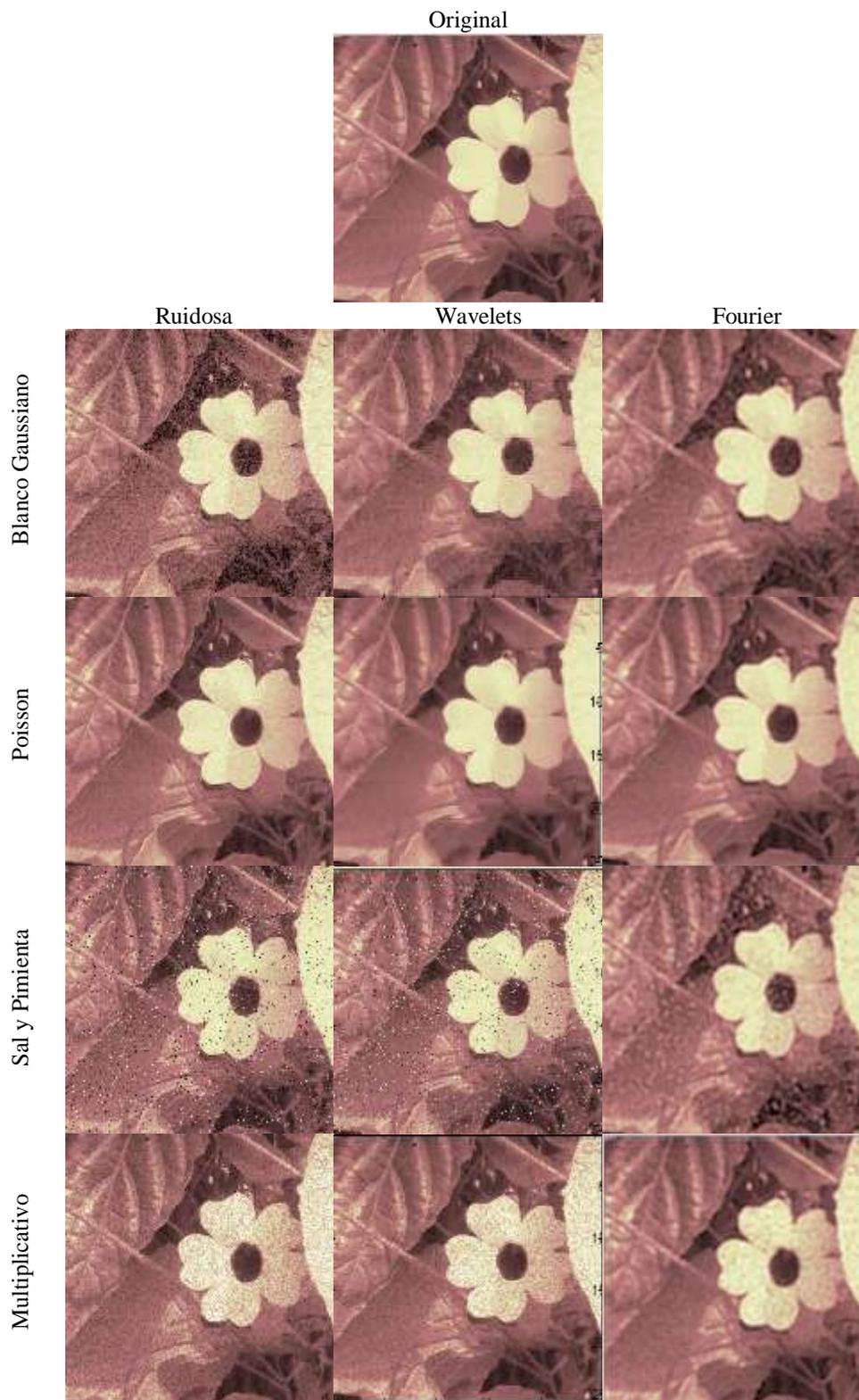


Figura 4.6. Imagen Amarilla.jpg original, sus versiones ruidosas y los mejores resultados del filtrado al comparar con la imagen original.

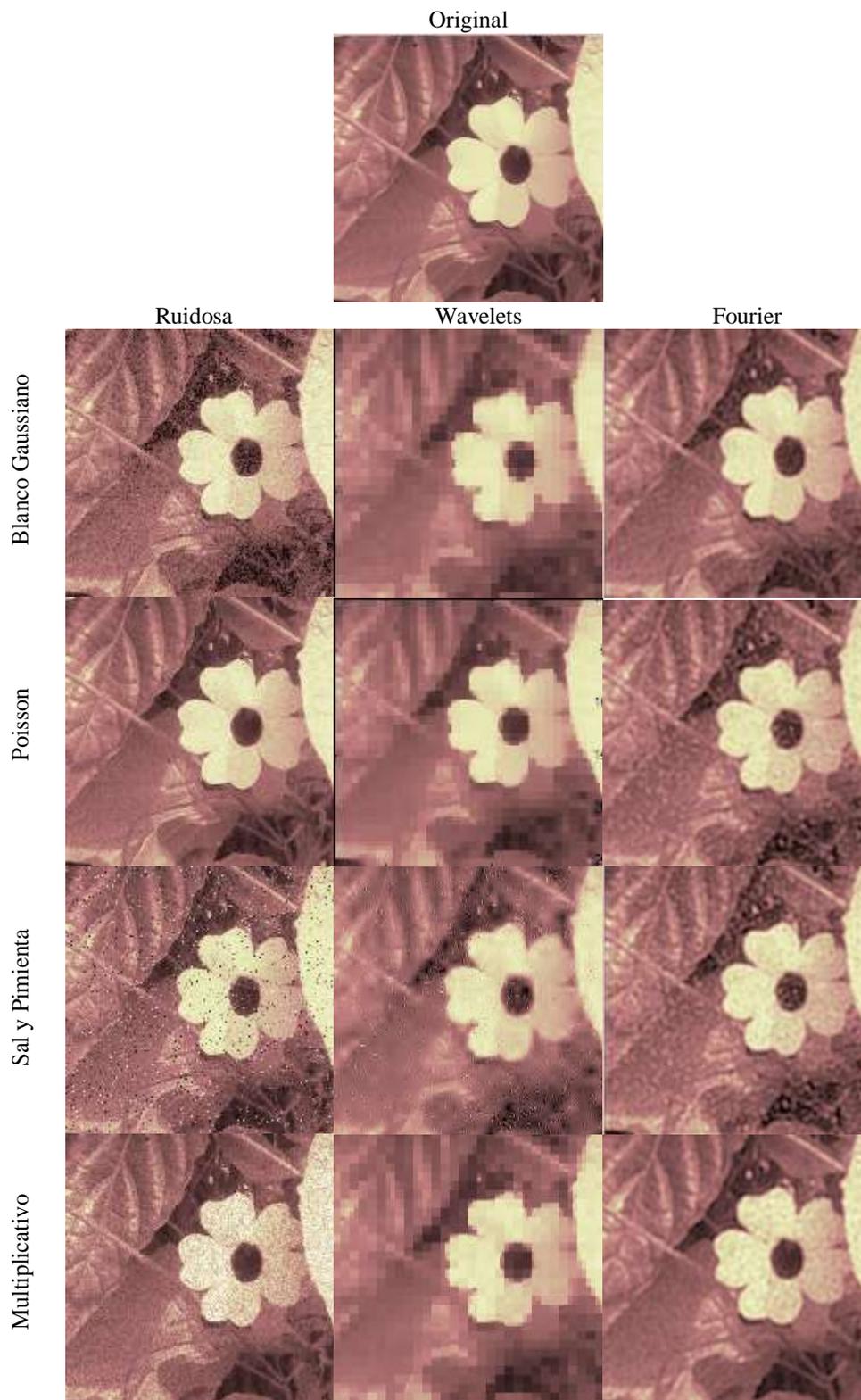


Figura 4.7. Imagen Amarilla.jpg original, sus versiones ruidosas y los peores resultados del filtrado al comparar con la imagen original.

4.1.2.2 *Resultados obtenidos para la imagen Roja.jpg*: Los resultados de la eliminación de ruido se pueden ver en la tabla 4.6 y en las tablas 9 a12 del anexo C. Aquí aparecen los resultados mas representativos obtenidos con Fourier para filtros con las ventanas indicadas en la tabla, y con *wavelets* para la *wavelet madre* y el método de umbral señalados.

Tabla 4.6 Resultados más representativos para la Imagen Roja.jpg para diferentes tipos de ruido

Ruido Aplicado	FOURIER		WAVELET			Desempeño ⁴ en la prueba
	Ventana	SNR (veces)	Wavelet	Método de Umbral	SNR (veces)	
Blanco Gaussiano	Bartlett	68.6962	Haar, $n = 3$	Eliminación de Altos	17.1874	Peor
	Bohman	73.3793	Haar, $n = 3$	Normal	212.2161	Mejor
Poisson	Bartlett	77.1122	Haar, $n = 3$	Eliminación de Altos	17.0946	Peor
	Bohman	83.2015	Haar, $n = 3$	Normal	212.4801	Mejor
Sal y Pimienta	Rectangular	51.6998	db3, $n = 3$	Eliminación de Altos	12.9407	Peor
	Bohman	54.9886	Haar, $n = 1$	Eliminación de Bajos	428.4336	Mejor
Multiplicativo	Bartlett	79.4211	Haar, $n = 3$	Eliminación de Altos	40.8855	Peor
	Bohman	91.9750	db3, $n = 1$	Normal	308.1617	Mejor

En la figura 4.8 aparece la comparación grafica de los mejores resultados según la SNR y el MSE obtenidos para las opciones de filtrado dentro de los parámetros elegidos cuando se comparan con la imagen original. Estos resultados no siempre son los mejores visualmente, por ejemplo para el caso del ruido Poisson la *wavelet* Haar de nivel 1 para umbral normal entregó mejores resultados subjetivos pero con valores de SNR=127.1184 y MSE=83.4374 que son menos adecuados que los de la tabla 4.6 para este tipo de ruido. Esto se puede ver en la figura 4.9.

⁴ Comparando el resultado de cada filtro con la imagen original

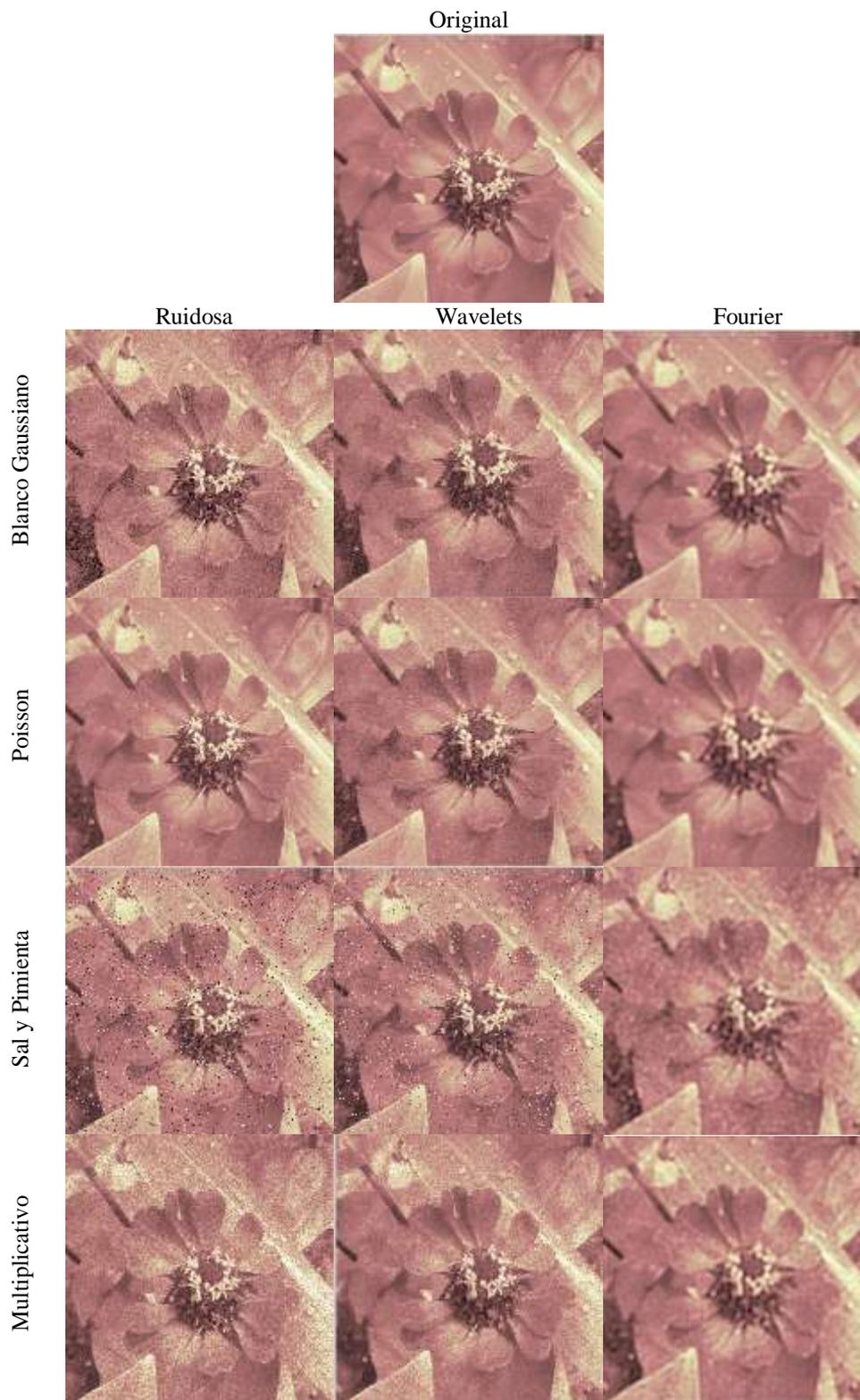


Figura 4.8. Imagen Roja.jpg original, sus versiones ruidosas y los mejores resultados del filtrado al comparar con la imagen original.

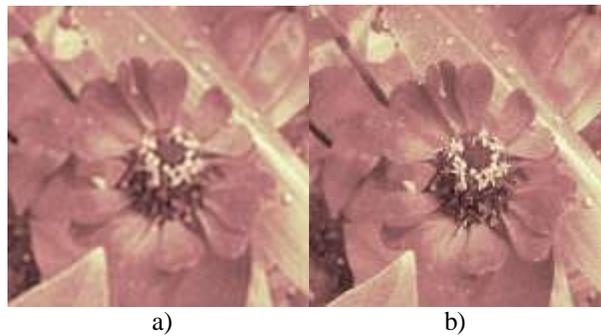


Figura 4.9. Diferencia entre los mejores resultados objetivos y subjetivos para *wavelets*.
a) mejor según SNR y MSE b) mejor apreciación subjetiva.

4.1.2.3 *Resultados obtenidos para la imagen Casona.jpg*: Los resultados de la eliminación de ruido tipo Blanco Gaussiano, Poisson, Sal y Pimienta y Multiplicativo se pueden ver en la tabla 4.7 y en las tablas 13 a 16 del anexo C. Se puede apreciar los resultados más significativos que se obtuvo con Fourier para filtros FIR implementados con las ventanas indicadas en la tabla, y con *wavelets* para la *wavelet madre* y el método de umbral señalados.

Tabla 4.7 Resultados más representativos para la Imagen Casona.jpg para diferentes tipo de ruido

Ruido Aplicado	FOURIER		WAVELET			Desempeño en la prueba ⁵
	Ventana	SNR (veces)	Wavelet	Método de Umbral	SNR (veces)	
Blanco Gaussiano	Bartlett	79.4211	Haar, $n = 3$	Eliminación de Altos	40.8855	Peor
	Bohman	91.9750	db3, $n = 1$	Normal	308.1617	Mejor
Poisson	Bartlett	85.9072	Haar, $n = 3$	Eliminación de Altos	75.1543	Peor
	Bohman	99.7819	db2, $n = 1$	Normal	431.1931	Mejor
Sal y Pimienta	Bartlett	62.2178	db3, $n = 3$	Eliminación de Altos	27.1916	Peor
	Bohman	69.6559	Haar, $n = 1$	Eliminación de Bajos	1231.224	Mejor
Multiplicativo	Bartlett	40.3777	Haar, $n = 3$	Eliminación de Altos	23.1406	Peor
	Blackman	49.9179	Haar, $n = 3$	Normal	316.0438	Mejor

La comparación visual de los resultados del filtrado permitió evaluar subjetivamente las apreciaciones de las imágenes resultantes para todos los tipos de filtros. La figura 4.10 presenta la comparación resultante para los mejores resultados obtenidos.

⁵ Comparando el resultado de cada filtro con la imagen original

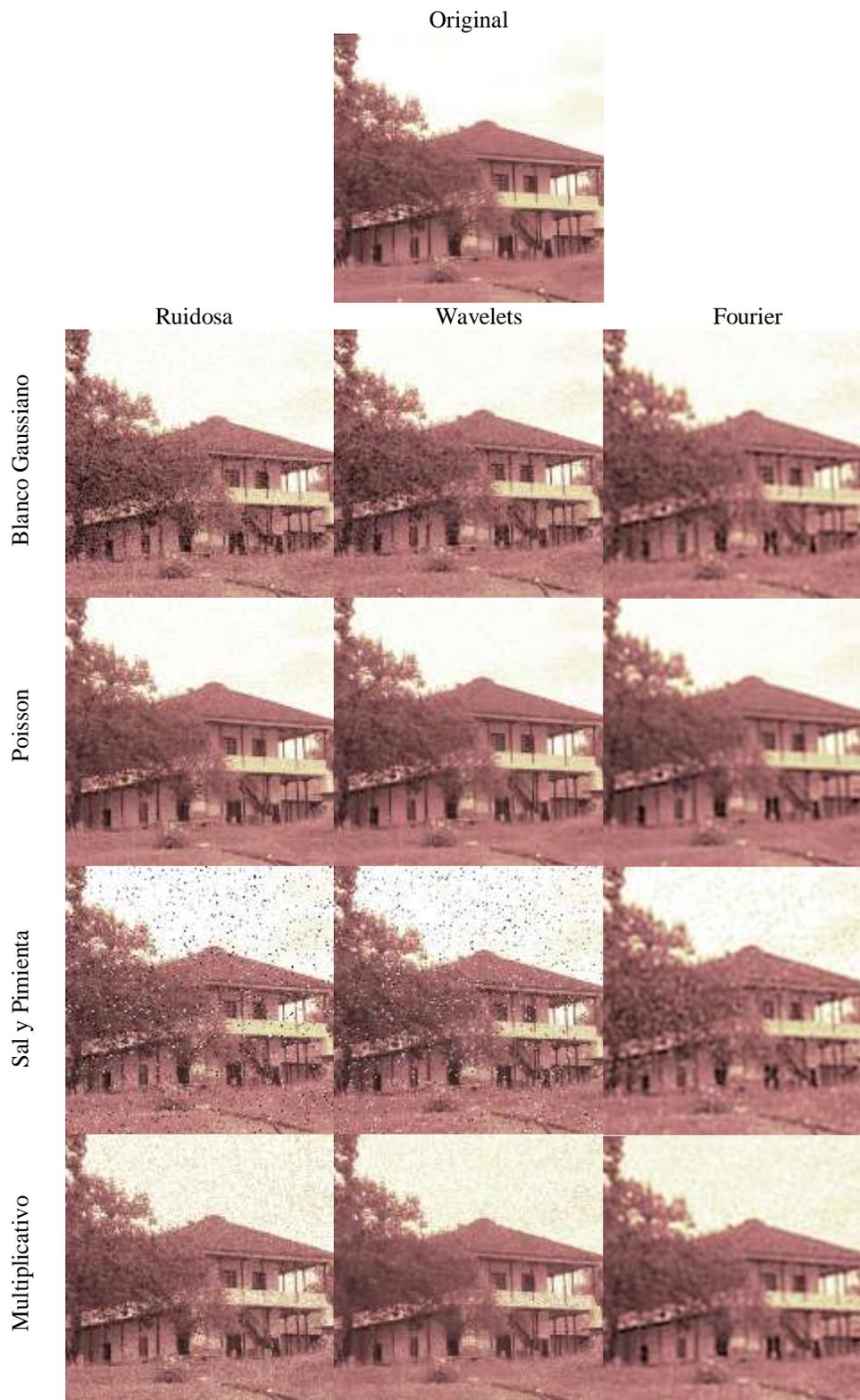


Figura 4.10. Imagen Casona.jpg original, sus versiones ruidosas y los mejores resultados del filtrado al comparar con la imagen original.

A continuación se describen las pruebas adicionales realizadas con imágenes. Estas pruebas consistieron en la detección de bordes para la imagen Amarilla.jpg y en la restauración de una nueva imagen, llamada Labrador.tif que presenta las mismas características de tamaño y número de intensidades de gris que las demás imágenes y corresponde a una versión difuminada del hocico de un labrador.

Se inicia con la detección de bordes. Una primera aproximación a este objetivo se hizo mediante la aplicación de un filtro paso-alto para evaluar la parte correspondiente a Fourier. Para la parte de *wavelets* se probaron dos formas: La primera trabaja con multiresolución descartando los coeficientes de aproximación y detalles de niveles superiores y aplicando umbrales bajos a los dos primeros niveles, mientras que la segunda emplea el mismo análisis realizado para la eliminación de ruido, pero considera la señal sin contaminar en vez de la ruidosa y hace la detección de bordes tomando la diferencia de la imagen resultante con la imagen original. La figura 4.11 presenta los resultados que se alcanzaron con estas pruebas.

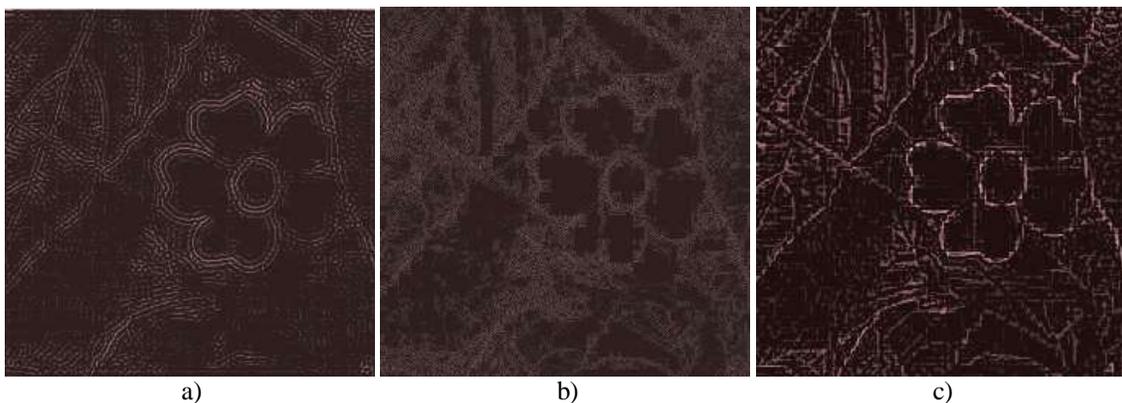


Figura 4.11. Detección de bordes en la imagen Amarilla.jpg a) Análisis con Fourier por filtrado paso-alto b) Análisis wavelet tomando la diferencia c) Análisis wavelet por eliminación y umbralamiento de coeficientes.

Para la restauración de la imagen Labrador.tif se emplearon los siguientes métodos: Con Fourier se aplica un filtro para énfasis de altas frecuencias prediseñado [EFF00] que consiste en un filtro paso-alto que toma un coeficiente central $c = 9$ y deja los demás coeficientes en -1 .

El proceso con wavelets hace una descomposición multinivel de la imagen difuminada y luego una reconstrucción a partir de los coeficientes de primeros niveles. La imagen resultante se suma con la imagen original logrando de este modo la restauración de la imagen difuminada.

Se realizaron varias pruebas empleando diferentes *wavelets* y trabajado con múltiples niveles. Se obtuvo buenos resultados para la *wavelet* haar con una descomposición de 5 niveles y reconstruyendo con el primer nivel, pero el mejor entre lo evaluado lo entregó la *wavelet* db8 con cinco niveles de descomposición y reconstrucción a partir de los detalles de niveles 1 y 2. Los resultados de este proceso se presentan en la figura 4.12

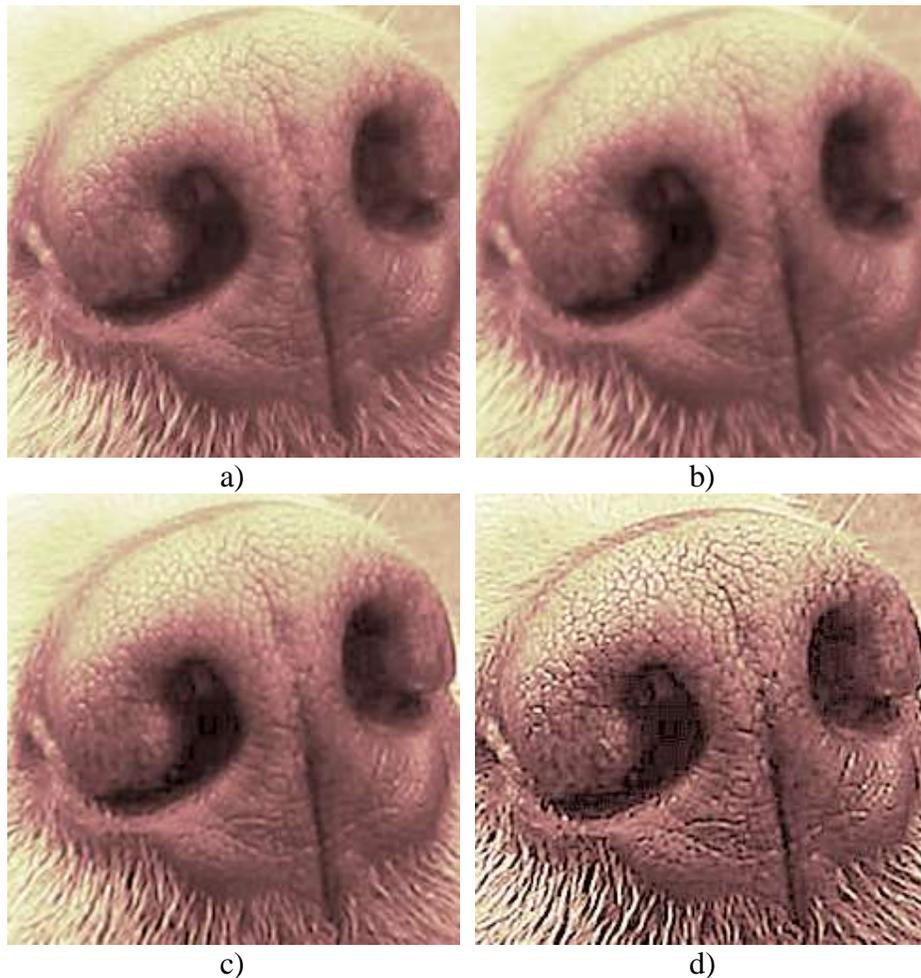


Figura 4.12. Restauración de la imagen Labrador.tif difuminada a) Imagen original b) Imagen difuminada c) Imagen restaurada con los coeficientes de detalles de nivel 1 y 2 de la wavelet db8 d) Imagen restaurada con Fourier aplicando un filtro de énfasis de altas frecuencias

4.2 ANALISIS DE RESULTADOS

Después de haber evaluado el filtrado en diferentes escenarios, se procede a detallar que tipos de comportamientos se hacen evidentes tanto para señales 1D como para imágenes. Esto busca detectar patrones de comportamiento en el filtrado y llegar a establecer conclusiones que sirvan para reducir el tiempo empleado en hallar el filtro adecuado en los procesos que requieran de él.

4.2.1 Análisis de los resultados obtenidos para señales 1D

La determinación de la apreciación subjetiva para señales audibles es un proceso bastante complicado, puesto que no se dispone de la capacidad de comparar dos señales sonoras al mismo tiempo, ya que es necesario escuchar primero la señal original, para asimilar sus características, luego la señal con aplicación de ruido para determinar los cambios producidos y finalmente las filtradas para así evaluar su parentesco con la original.

Tampoco se puede tomar el espectro como un criterio adecuado de decisión para este tipo de señales porque además de ser demasiado extenso, por manejar una gran cantidad de frecuencias, únicamente indica la presencia o ausencia notoria de algunas bandas de frecuencia que resultan complicadas de relacionar con el sonido que aparentemente presentaría la señal, quedando la decisión sobre el resultado del filtrado a juicio de la retentiva que pueda tener cada evaluador. Se resalta que otro tipo de señales unidimensionales si pueden ser evaluadas con ayuda de alguna representación gráfica como es el caso de una señal electrocardiográfica ECG, la contaminación de señales conocidas con tonos puros o la contaminación con ruido de tonos puros. Esto fue comprobado mediante algunas pruebas realizadas para una señal estacionaria compuesta por diferentes frecuencias, pero por lo poco práctico del resultado no se incluye como un resultado significativo.

4.2.1.1 *Análisis para la señal sanimono.wav.* Como resultado de la apreciación subjetiva se verifica una eliminación de los matices altos de la voz con Fourier. De la misma manera ocurre en *wavelets* pero la eliminación se hace menos notoria auditivamente. Esto se debe

a que Fourier elimina una banda completa de frecuencias mientras que en *wavelets* se aplica umbrales en las bandas que se quiere filtrar.

El análisis con la *wavelet* daubechies 3 presenta la mejor opción tanto para ruido blanco Gaussiano como para multiplicativo.

Aunque se presentan unas relaciones señal a ruido mucho más pequeñas que para el caso de imágenes se observa que la redundancia de la voz logra mantener la claridad del mensaje transmitido.

En la mayoría de los casos se obtiene buenos resultados de filtrado con la *wavelet* de nivel más bajo es decir de primer nivel.

4.2.1.2 *Análisis para la señal Boulevard.wav*. En la eliminación de ruido de esta señal se han encontrado los mejores resultados con los mismos tipos de *wavelet*, ordenes, funciones ventana y tipos de umbral que para la señal anterior según sea el caso.

Esta señal permite una apreciación más clara de los efectos del ruido multiplicativo y la dificultad que existe para eliminarlo al aplicar tanto la teoría de Fourier como la de *wavelets*.

Los mejores resultados para esta señal como en la anterior se han obtenido mediante la aplicación de una ventana tipo Kaiser a diferencia de los mejores resultados con ventanas Bohman que se obtienen en imágenes.

Se puede apreciar como la redundancia de las señales de voz puede constituirse en una ventaja cuando se requieren en telecomunicaciones, ya que a pesar de las diferentes contaminaciones y los diferentes resultados del filtrado se mantiene la inteligibilidad del mensaje que las acompaña.

4.2.2 Análisis de los resultados obtenidos para imágenes

De los resultados obtenidos para las diferentes pruebas con imágenes se puede extraer una serie de comportamientos interesantes. Además se destaca la dificultad para la evaluación subjetiva de los resultados del filtrado cuando se aplica ruido sal y pimienta a las imágenes, puesto que es muy similar el comportamiento ruidoso que se mantiene en las imágenes tras ser filtradas.

4.2.2.1 *Análisis para la imagen Amarilla.jpg*. Los resultados obtenidos en las pruebas realizadas con esta imagen han permitido establecer lo siguiente:

Para ruido Poisson el resultado de la apreciación subjetiva con Fourier fue regular, puesto que si bien se elimina el ruido se presenta la aparición de cierta duplicación en los bordes de la imagen.

La observación de las tablas 5 a 8 del anexo C permite establecer que la SNR y el MSE para el caso de las *wavelets* se distribuyen en un rango mas amplio de posibles valores que para Fourier, lo cual indica que en este caso, el filtrado con *wavelets* produce tanto mejores como peores resultados a los obtenidos con Fourier.

El mejor filtrado con Fourier se presenta para la misma ventana (Bohman) sin importar el tipo de ruido aplicado. Esto contrasta con las *wavelets*, para las que diferentes niveles y funciones *wavelet* pueden producir el mejor resultado. Esto se evidencia en la tabla 4.5.

Los métodos de umbral que se basan en la eliminación de coeficientes altos producen malos resultados en eliminación de ruido, mientras que los que emplean umbral normal obtienen buenos resultados para casi todos los tipos de ruido.

De las apreciaciones subjetivas realizadas se resalta el hecho de que Fourier tiende a difuminar los detalles de la imagen cosa que no sucede en wavelet ya que se trata de mantener el aspecto original de la imagen.

4.2.2.2 *Análisis para la imagen Roja.jpg*. Se tiene en cuenta los datos consignados en el anexo C, las apreciaciones subjetivas y el comportamiento de los mejores y peores resultados obtenidos.

La observación de las tablas 9 a 12 del anexo C permite establecer que al igual que para la imagen anterior, la SNR y el MSE obtenidas al filtrar con *wavelets* se distribuyen en un rango más amplio de valores que para el caso de Fourier.

El mejor filtrado con Fourier se presenta para la misma ventana (Bohman) sin importar el tipo de ruido aplicado. Esto no sucede con las *wavelets*, puesto que diferentes niveles y funciones *wavelet* pueden producir el mejor resultado. Esto se puede apreciar en la tabla 4.6 y contrasta con los métodos de umbral que se aplican para el caso de las *wavelets*, puesto que la eliminación de coeficientes altos siempre produjo malos resultados en la eliminación de ruido.

Al igual que con la imagen anterior las apreciaciones subjetivas realizadas presentan al filtrado con Fourier difuminando los detalles de la imagen y al filtrado wavelet manteniéndolos mas visibles en los mejores casos.

4.2.2.3 *Análisis para la imagen Casona.jpg*. La observación de las tablas 13 a 16 del anexo C muestra que la SNR y el MSE se comportan de manera similar que con las imágenes anteriores en cuanto a la distribución de valores en un rango más amplio.

En la obtención del mejor filtrado con Fourier aparece además de la ventana Bohman la ventana Blackman. Para el peor filtrado se sigue cumpliendo que resulta de aplicar la ventana de Barlett. La observación de la tabla 4.7 evidencia estas premisas.

Los métodos de umbral que se basan en la eliminación de coeficientes altos producen malos resultados en eliminación de ruido en niveles de la wavelet diferentes al primero, mientras que los que emplean umbral normal obtienen buenos resultados para casi todos los tipos de ruido.

4.2.3 Análisis de los filtros según sus resultados

Tanto para el caso de evaluación objetiva como para apreciación subjetiva en los criterios de calidad o fidelidad de la imagen, se observa un mejor desempeño de las *wavelets* para la eliminación de ruido.

La aplicación del método de umbral normal, al presentar variaciones pequeñas en la eliminación de coeficientes puede constituirse en una buena alternativa para filtrado puesto que no elimina los detalles a diferencia del umbral por eliminación de altos, donde se pierde bastante información relevante haciéndolo poco recomendable para aplicaciones del tipo aquí considerado.

Las pequeñas diferencias en los valores de la relación señal a ruido y el error cuadrático medio para el caso de Fourier hacen que el comportamiento de las diferentes ventanas no presente variaciones demasiado significativas, a diferencia de las *wavelets*, que presentan variaciones muy grandes en el rango de valores que pueden tomar al evaluar estos parámetros, y por consiguiente, pueden generar diferencias radicales entre los resultados de aplicar diferentes *wavelet* de uno u otro nivel.

Los mejores resultados para el proceso de filtrado buscan un compromiso entre la cantidad de detalles que se quieren preservar y la difuminación máxima que se puede llegar a tolerar. Por lo tanto no siempre una versión mas suavizada de la señal es lo mejor que se puede obtener con el filtrado. En algunos casos es preferible tener unos valores de ruido tolerables, con el fin de no perder detalles significativos de la señal.

El desempeño obtenido con *wavelets* en la detección de bordes es indudablemente superior cuando se considera un análisis multi-resolución sumado a una reconstrucción a partir de los niveles que conservan la información de alta frecuencia, es decir los primeros.

Los resultados obtenidos demuestran que en general no se requiere emplear funciones *wavelet* muy sofisticadas para obtener los mejores resultados, por ejemplo, las Haar a pesar de su simplicidad demuestran un buen comportamiento para eliminar la mayoría de los tipos de ruido con todas las imágenes y señales 1D. Otra prueba de esto se da en la calidad de los resultados mencionados en la parte de restauración para esta misma función *wavelet*.

La eliminación de ruido en señales unidimensionales resulta más complicada porque este se distribuye para la totalidad de las frecuencias, resultando en un serio problema el determinar que componentes se debe eliminar para obtener la mejor señal recuperada, por lo que no hay mucha claridad para definir la respuesta en frecuencia que debe tener el filtro. En el caso de imágenes la elección es más fácil ya que se presenta una distribución del ruido sobre las frecuencias espaciales altas, que se puede eliminar mediante el simple filtrado paso-bajo.

5 CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

A continuación se describen las consideraciones finales del proyecto donde se evalúa el desempeño general de las *wavelets* y el análisis de Fourier dentro del campo de filtrado digital de señales. Se presentan también los complementos que sería bueno desarrollar para la aplicación software implementada y las líneas futuras de investigación que podrían generarse a partir de este trabajo, así como los posibles escenarios de aplicación al interior de la Universidad del Cauca.

5.1 CONCLUSIONES

El desarrollo de este proyecto ha permitido realizar un estudio comparativo basado en una simulación entre los filtros digitales FIR que se implementan con base en la teoría de Fourier y los que emplean la teoría de *wavelets* para ser aplicados a señales unidimensionales (por ejemplo archivos de audio de un solo canal) y bidimensionales constituidas por imágenes fijas en escala de grises.

Se ha desarrollado una aplicación software soportada en Matlab® que permite experimentar el filtrado de señales unidimensionales y bidimensionales aplicando *wavelets* y filtros FIR.

La utilización de un modelo incremental de desarrollo permite obtener buenos resultados en la mayoría de los casos, ya que la validación de los resultados se hace para cada etapa de avance en los objetivos propuestos.

El trabajo desarrollado permite corroborar las conclusiones de muchos autores [FAU-FUE], [CAS02], y es que las *wavelet* no aparecieron como herramientas de sustitución de la Transformada de Fourier, sino más bien como una herramienta complementaria de esta.

Por esta razón no es conveniente entrar a discutir todo lo que se conoce sobre esta teoría, si no más bien, mostrar otra forma de trabajar proporcionada por las *wavelets* y la posibilidad de incrementar sus aplicaciones permitiendo que trabajen en conjunto.

La evaluación de los resultados obtenidos mediante criterios de calidad objetivos y subjetivos permite, por un lado cuantificar la calidad de las señales filtradas lo cual es adecuado en procesos computacionales y por el otro, entregar los mejores resultados a los sentidos de una persona, que finalmente resultan preferibles a cualquier medida de tipo numérico pero que en la mayoría de los casos ambos coinciden.

De las propiedades matemáticas mencionadas tanto para el análisis de Fourier como en el análisis *wavelet*, hay una propiedad cuya importancia merece ser resaltada. Se trata de la ortonormalidad de las funciones base empleadas para la representación de cualquier señal, que permite hacer del cálculo de coeficientes una tarea más rápida y sencilla.

El proceso de comparación de resultados también evidencia que no existe un método que sea el mejor de todos para trabajar con umbrales aplicados a todo tipo de señales. La calidad de resultados obtenidos por cada método está íntimamente relacionada con el tipo de señal de entrada, de la *wavelet* utilizada, del número de niveles de descomposición y del número de muestras de la señal.

Un comentario aparte y merecido es para los *Toolbox* de *Wavelets*, Procesamiento de señales y procesamiento de imágenes de Matlab® los cuales fueron una herramienta imprescindible e indispensable para este trabajo, ya que proporcionan mucha flexibilidad a la hora de hacer la simulación, facilitando el estudio y entendimiento de la Teoría de Fourier, *wavelet* y filtros digitales.

La exploración de un tema nuevo al interior de la Universidad ha demandado bastante tiempo de consulta, organización y asimilación pero deja la satisfacción de poder entregar un material a próximas generaciones que facilitará el trabajo en nuevos proyectos de

investigación que requieran de la fundamentación teórica y experimental que aquí se entrega.

5.2 RECOMENDACIONES

La aplicación software implementada, puede mejorarse si se logra que una señal sea analizada simultáneamente mediante los conceptos de Fourier y *wavelets*, es decir se debe hacer posible que para los casos donde una teoría tiene falencias, entre la otra en su ayuda para dar nuevas posibilidades de acción.

Las limitaciones presentes en la descomposición *wavelet* empleada radican en que siempre se hace el análisis con filtros paso-bajo de media banda, que normalmente resulta optima para el estudio de bajas frecuencias. Se aprecia entonces cierta limitación de la aplicación desarrollada para el trabajo con señales de alta frecuencia. El análisis por paquetes *wavelet* es una técnica que además de la descomposición tradicional considera la descomposición de las altas frecuencias y constituiría un gran avance su adición a este trabajo.

Entre las líneas de aplicación que se pueden desarrollar a partir de este trabajo se destacan el desarrollo de aplicaciones para telecomunicaciones que permitan eliminar en la medida de lo posible la contaminación por ruido y la interferencia en transmisiones digitales alambradas e inalámbricas, el empleo del filtrado digital para desarrollar métodos de compresión tanto de imágenes como de señales unidimensionales, el desarrollo de técnicas basadas en *wavelets* que permitan mejorar la exploración del subsuelo, el estudio de las aplicaciones en el área de procesamiento digital de señales susceptibles a tratamiento con *wavelets*, por ejemplo la biomedicina, etc.

Al interior de la Universidad del Cauca se podría aplicar estos resultados para el complemento de trabajos que se vienen desarrollando y que involucran el procesamiento de imágenes, tales como la compresión de imágenes digitales empleando *wavelets*, la

detección de células cancerosas mediante procesamiento digital de imágenes, la transmisión de imágenes medicas como complemento al proyecto Ehas.

BIBLIOGRAFIA

- [AMA95] **AMARA Graps**, *An introduction to wavelets, IEEE Computational Sciences and Engineering, Volume 2, Number 2, Summer 1995*, [http://www.amara.com/IEEEwave/IW_history.html].
- [ALA05] **ALARCON José Manuel**. *Compresión de imágenes y vídeo mediante la transformada wavelet*. Málaga, 2005.
- [ALB-CAS] **ALBA CASTRO, Jose L.** *Apuntes de Procesado de Imágenes*. Universidad de Vigo
- [ANT01] **ANTONIADIS, BIGOT and SAPATINAS**. *Wavelet Estimators in Nonparametric Regression: A Comparative Simulation Study*. Laboratoire IMAG – LMC, University Joseph Fourier, France. Department of Mathematic and Statistic, University of Cyprus, Cyprus. 2001.
- [CAB03] **MOLTER, Ursula**. *Un fractal bien merece un Guggenheim*. *Revista Cable Semanal*, Año 14 , 30 de Junio de 2003, No 498. Pag 4.
- [CAS02] **DE CASTRO FERNANDEZ , Rosa Maria** *Análisis de la teoría de ondículas orientada a las aplicaciones en ingeniería eléctrica*. Madrid, Julio de 2002
- [CUE01] **CUESTA FRAU, David**. *Estudio de métodos para procesamiento y agrupación de señales electrocardiográficas*. Tesis Doctoral. Departamento de Informática de Sistemas y Computadoras. Universidad Politécnica de Valencia. Septiembre de 2001.

- [DAU92] **DAUBECHIES, Ingrid.** *Ten Lectures on wavelets.* Society off Industrial and Applied Mathematics – SIAM, Philadelphia, Pennsylvania, 1992.
- [DON93] **DONOHO, D., JHONSTONE I, M.** *Ideal spatial Adaptation by Wavelets Shrinkage.*Dpto of Statistic, Standford University. Standford USA, April 1993
- [DON95] **DONOHO D.** “De-noising by soft-thresholding”, IEEE Transactions on Information Theory, Vol. 41, Núm. 3, pp.612-627, 1995.
- [EFF00] **EFFORD, Nick.** *Digital Image Processing* a practical introduction using Java™. School of Computer Studies. University of Leeds. Addison Wesley 2000.
- [EME-APP] **WORNELL, G. W.** Paper *Emerging Applications of Multirate, Signal Processing and Wavelets in Digital Communications.* Proceedings IEEE. Vol 84. Ejemplar 4. 1996
- [FAU-FUE] **FAUNDEZ Pablo y FUENTES Álvaro.** Tesis “*Procesamiento Digital de Señales Acústicas Utilizando Wavelets*”. Capítulo 4
- [GON02] **GONZALEZ, R.C. Y WOODS, R.E.** *Digital Image Processing* Prentice Hall, 2002 Cap3
- [JAN99] **JANSEN, M., BULTHEEL, A.** *Asymptotic behavior of the minimun mean squared error threshold for noisy wavelet coefficients of piecewise smooth signals.* Katholieke Universiteit Leuven. Departament of computer science. Belgium. October 4, 1999.
- [KAI 94] **KAISER Gerald.** “*A Friendly Guide To Wavelets*”. Editorial Birkhäuser. Departament of Mathematics. University of Massachusetts at Lowell. 1994.

- [MAC01] **MACKENZIE, Dana.** Artículo "*Wavelets: ver el bosque y los árboles*" .
National Academy of Sciences, diciembre de 2001
- [MAL99] **MALLAT, Stéphane.** "*A Wavelet tour of signal processing*". Ecole Polytechnique, Paris Courant Institute, New York University Segunda Edición. Editorial Academia Press. 1999.
- [MAT00] **The MathWorks, Inc.** *Wavelet Toolbox*. Matlab: The language of the technical computing. Version 6.0.0.88 Release 12. September 22, 2000.
- [MAT02] **THE MATHWORKS,** *Image Processing Toolbox - User's guide*. Version 3. July 2002.
- [MUR-ROM]**MURENZI Romain.** *Image Feature Representation and Analysis using continuous Wavelets Transforms*.
- [OPP00] **OPPENHEIM, Alan,** *Tratamiento de Señales en tiempo discreto*. Editorial Prentice Hall. Segunda Edición. Noviembre de 2000.
- [OPP96] **OPPENHEIM, Alan, WILLSKY, Alan.** *Señales y Sistemas*. Editorial Prentice Hall. Segunda Edición. Agosto 6 de 1996.
- [PLA-CAR] **PLATERO, Carlos.** *ELECTRONICA INDUSTRIAL*. Universidad Politécnica de Madrid
- [POL96] **POLIKAR, Robi.,** *The Wavelet tutorial*, Dpto. Of Electrical and Computer Engineering, Rowan University. 1996.
- [QIA00] **QUIAN, Junhui.** *Denoising by Wavelet Transform*. Rice University. Departament of Electrical Engineering. 2000.

- [RIO91] **RIOUL Oliver, VETTERLI Martin.** *Wavelets and Signal Processing*, IEEE Signal Processing Magazine, October 1991.
- [ROD-VAL] **RODRÍGUEZ VALDERRAMA Paul Antonio.** *Estimación del Tiempo de Retardo de Arribo y de la Frecuencia Instantánea de Señales en un Arreglo de Fase (Sonar) Pasivo utilizando Técnicas de Prefiltrado de Ruido Definidas en el Dominio de los Wavelets.* Grupo de Procesamiento Digital de Señales - Sección de Ingeniería Electrónica, Pontificia Universidad Católica del Perú.
- [RUI-SOL] **RUIZ DEL SOLAR, Javier.** *Curso sobre Procesamiento avanzado de imágenes* Cap 6 sección 6.1.3
<http://gavilan.die.uchile.cl/~aula21/HTML/Clases/cap6/capitulo06.htm>
- [SAR03] **SARDY, Sylvain., ANTONIADIS, A., TSENG, P.** *Automatic smoothing with wavelets for a wide class of distributions.* Journal of Computational and Graphical Statistics. January 28, 2003.
- [TAS00] **TASWELL, C.** *The What, How an Why of Wavelet Shrinkage Denoising.* Computing in Science & Engineering. June 2000.
- [TRE00] **TRENAS CASTRO, M.** *Arquitecturas y aplicaciones de la transformada wavelet.* Tesis de maestría. Departamento de arquitectura de computadoras. Universidad de Malaga. Noviembre de 2000.
- [UNS96] **UNSER A., ALDROUBI A.,** *A review of wavelets in biomedical applications*, Proceedings of the IEEE, 48 (4), 1996.
- [TIM95] **METIN, Akay.** *Time frequency and wavelets in biomedical signal processing*, IEEE Press Series in Biomedical Engineering, Editorial Dartmouth Collage. 1995.

REFERENCIAS INTERNET

www.wavelet.org

<http://users.edu/~polikar/WAVELETS/WTtutorial.html>.

<http://nationalacademies.org/spanishbeyonddiscovery/index.html>.

www.opv.es/frechel/wavelets/index.html.

<http://www.prosoniq.com>.

<http://stat.stanford.edu/~Donoho/>

http://sepwww.stanford.edu./public/docs/pvi/toc_html/index.html.

<http://voltio.ujaen.es/jaguilar/tts/portal.htm>.

<http://www.dsp.rice.edu/>