

Modelado y control de posición y de fuerza de una prótesis robótica de mano

Monografía presentada como requisito parcial
para optar el título de Magister en Electrónica

Eliana Aguilar Larrarte

Tutor:

PhD. Andrés Vivas Albán

Universidad del Cauca
Facultad de Ingeniería Electrónica y Telecomunicaciones
Maestría en Electrónica y Telecomunicaciones
Popayán

Marzo 2010

La autora del presente trabajo manifiesta sus más sinceros agradecimientos a su director PhD. Andrés Vivas quién con su paciencia, constancia y conocimiento apoyó éste proyecto y se destacó por sus sobresalientes capacidades como tutor, a todos los profesores de la maestría que de una u otra forma han dejado huella de saber en especial al PhD. Carlos Gaviria por las fascinantes y útiles materias que dirigió, a Diego Aguilar por aquellas respuestas que ayudó a encontrar y ante todo por las tantas preguntas que generó enriqueciendo de manera sustancial este trabajo. A los integrantes del Instituto de posgrados en Ingeniería Electrónica y Telecomunicaciones, a la Facultad de Electrónica y Telecomunicaciones en cabeza de su decano Rafael Rengifo y a la Universidad del Cauca con su planta docente y de funcionarios.

Índice general

Resumen	1
Introducción	2
1. Modelos	6
1.1. Visión general de la mano humana	6
1.2. Modelado de robots manipuladores	7
1.3. Modelo propuesto	10
1.4. Arquitectura de la mano robot	10
1.5. Modelos	11
1.5.1. Modelo geométrico directo	15
1.5.2. Modelo geométrico inverso	22
1.5.3. Modelo dinámico inverso de la mano	26
1.5.4. Modelo dinámico directo de la mano	31
2. Diseño y simulación de controladores	35
2.1. Control de movimientos	35
2.1.1. Control Articular de la mano robótica	38
2.2. Control de fuerza	41
2.2.1. Bases del control explícito de fuerza	44
2.2.2. Estructuras de control con consignas de fuerza: Control fuerza/posición	46

2.2.3. Esquemas de implementación del Control de fuerza . . .	63
3. Análisis de la respuesta de cada controlador	71
3.1. Control de movimiento	71
3.2. Control de fuerza	74
3.2.1. Control explícito de fuerza	74
3.2.2. Control de fuerza sin control de posición	74
3.2.3. Control de fuerza/posición	81
3.2.4. Esquema de control de fuerza/posición con limitaciones de ángulos y módulo supervisor	85
4. Conclusiones y recomendaciones	89

Índice de figuras

1.	Esquema general del proyecto	5
1.1.	Esquema de la mano humana	7
1.2.	Esquema general de la prótesis propuesta en una vista 3D . . .	10
1.3.	Estructura de la mano	11
2.1.	Esquema clásico de un control PID	37
2.2.	Esquema de un control por par calculado	38
2.3.	Control por par calculado en el espacio articular	40
2.4.	Esquema implementado en Matlab/Simulink	41
2.5.	Diagrama de bloques de un control explícito de fuerza	44
2.6.	Esquema general del control fuerza - posición	47
2.7.	Fuerza aplicada a un objeto	48
2.8.	Esquema de fuerzas aplicadas en las falanges de los dedos . .	62
2.9.	Esquema del control de fuerza implementado para el dedo medio	64
2.10.	Esquema general del segundo esquema fuerza	66
2.11.	Esquema general control fuerza/posición	68
2.12.	Esquema general control fuerza/posición con supervisor	70
3.1.	Consignas articulares	72
3.2.	Errores de seguimiento de movimiento.	73
3.3.	Error de fuerza para una consigna de fuerza en el dedo índice en un control explícito de fuerza.	74

3.4. Consigna de fuerza aplicada a los dedos en el control de fuerza con estimación de la fuerza aplicada.	76
3.5. Señal de control para las articulaciones 1, 2 y 3 de cada dedo .	77
3.6. Error de fuerzas cartesianas del dedo medio en el control de fuerza	78
3.7. Error de fuerzas cartesianas del dedo índice en el control de fuerza	79
3.8. Error de fuerzas cartesianas del dedo pulgar en el control de fuerza	80
3.9. Secuencia de control posición/fuerza	82
3.10. Consignas aplicadas a la mano en el control posición/fuerza. .	82
3.11. Esfuerzo de control en el control posición/fuerza.	83
3.12. Error de seguimiento en el control posición/fuerza.	84
3.13. Secuencia de control posición/fuerza/posición	85
3.14. Consignas aplicadas a la mano en el control posición/fuerza con supervisorio.	86
3.15. Esfuerzo de control en el control posición/fuerza con supervisorio.	87
3.16. Error de seguimiento en el control posición/fuerza con supervisorio.	88

Índice de cuadros

1.1. Parametros Geométricos	12
1.2. Parametros Dinámicos de Base	28
2.1. Consignas articulares	41
2.2. Ganancias del controlador	41
2.3. Ganancias del controlador fuerza sin control de posición	65
2.4. Ganancias del controlador fuerza/posición	67

Resumen

Existen múltiples trabajos en el desarrollo de manos robóticas para aplicaciones en robots y en prótesis robóticas, algunas de las cuales se encuentran lejos del alcance de la gran mayoría de los discapacitados, ya sea por su altísimo costo, o por la poca aceptabilidad que suelen presentar para los usuarios, dado la baja manipulación, falta de rapidez, molesto sonido o excesivo peso del mecanismo robótico.

En este trabajo se desarrolló un modelo matemático de mano robótica que permite la realización de algunas tareas de manipulación básicas con el fin de ser implementado en un futuro inmediato en un entorno de simulación y en un prototipo real, todo esto determinando los modelos geométricos, cinemáticos y dinámicos de la mano propuesta. La obtención de los mencionados modelos permiten la simulación de la mano trabajando en el espacio articular, el seguimiento de consignas articulares, además de la implementación de controles de posición y fuerza que permiten la verificación de los alcances del diseño.

La simulación y la implementación de los algoritmos de control de la mano se simularon en Matlab y con la ayuda de esta plataforma se tiene un nivel de evaluación anterior a la implementación.

Introducción

La mano humana cuenta con 27 huesos y posee cerca de 26 grados de libertad lo cual permite hacer movimientos de una complejidad extraordinaria, todo esto basado en la maniobrabilidad y precisión que se consigue con la oposición del pulgar a los demás dedos. Dicha ventaja evolutiva ha permitido al ser humano ir más lejos que cualquier otra especie.

Nuestro cerebro y nuestras manos son de lejos los factores más importantes de nuestra supervivencia y fortaleza frente al dominio de los demás seres vivientes, valiosas posesiones que son la base de nuestro diario éxito como individuos, y como seres sociales. Nuestro cerebro, el sistema de procesamiento más complejo elaborado por el Creador y nuestras manos, la más perfecta y valiosa herramienta de manipulación, es lo que nos ponen sin duda en la cúspide de la evolución.

Dada la importancia de nuestras manos una de las limitaciones físicas más preocupantes es la falta de movilidad y más aun la ausencia total de miembros superiores, lo cual afecta no solo el aspecto físico de los individuos aquejados por tal infortunio, sino también su desempeño motriz en las actividades diarias y su equilibrio psicológico y emocional al sentirse limitados o excluidos laboral o socialmente, y al ser denominados discapacitados. Es por eso que se realizan actualmente trabajos en el mundo científico y tecnológico encaminados a proporcionar algún tipo de solución, ya sea desde el lado de la medicina o de la ingeniería. En este último caso los esfuerzos se centran en el desarrollo

funcional y estético de aquellos elementos físicos llamados prótesis.

Una prótesis de mano es un elemento desarrollado con el fin de reemplazar un órgano ausente, en este caso la mano. Por lo tanto, una prótesis para el amputado colabora con el desarrollo psicológico del mismo, creando una percepción de totalidad al recobrar parte de movilidad y aspecto físico normal.

Existen dos tipos de prótesis, las llamadas pasivas y las activas. Las primeras cumplen básicamente una función cosmética, y las segundas muestran cierto grado de movilidad. En cuanto a las prótesis activas en los últimos años se ha visto una fuerte inclusión de las últimas tecnologías en el área de la robótica de rehabilitación [1], [2], [3], sin embargo, la tarea es compleja e involucra varias áreas del conocimiento. Igualmente, las prótesis activas comerciales no proveen todas las soluciones deseables y su mayor problema estriba en su elevado costo para nuestro medio socio-económico, mientras que las manos antropomórficas desarrolladas como novedosas propuestas de investigación, muchas veces no son realizables desde el punto de vista práctico [4].

El censo llevado a cabo en la República de Colombia en el año 2005 [5], arrojó que el 6.4 % de la población del país sufre algún tipo de discapacidad. Del porcentaje total de personas discapacitadas se tiene que un 14.6 % corresponde a la imposibilidad de usar brazos y manos, y un 29 % a la imposibilidad de moverse o caminar. Para el primer caso esto significa alrededor de 385.000 personas y de 760.000 personas para el segundo caso. El informe del gobierno, por estar aún en fase de revisión, no especifica con más detalle el grado de la discapacidad que sufren los individuos censados.

Es evidente que un alto porcentaje de estos individuos, amputados de miembro superior o inferior, requieren procesos de rehabilitación [3], de los cuales al menos el 25 % podría beneficiarse de algún tipo de prótesis [4], lo cual mejoraría su rendimiento funcional y por ende su inclusión en la sociedad.

En el caso de los discapacitados por ausencia de alguno de los segmentos del miembro superior, es necesario suministrar ayudas protésicas que logren restituir parcialmente los patrones de movimiento funcional de sus miembros, los cuales a su vez garanticen la reinserción del individuo a un contexto laboral como garantía de su productividad y su salud física y psicológica. Las denominadas prótesis activas idealmente deberían permitir recuperar gran parte de los movimientos de la mano (asir, manipular y explorar). Sin embargo, esto que parece simple implica un proceso complejo de transmisión y control de la información desde el cerebro hasta el órgano actuador. Para que el paciente pueda recuperar su movimiento de la manera más natural posible, la mano artificial debe poseer la flexibilidad y maniobrabilidad de una mano natural, lo que implica un diseño exigente de la mano robot y un sistema de control complejo. Con el fin de ofrecer a los amputados de mano una prótesis funcional que presente buena accesibilidad por parte de la población discapacitada tanto en la utilización de la misma como en costos, tres grupos de investigación de la Universidad del Cauca han formulado un proyecto macro para lograr este fin¹. La primera parte de ese proyecto, titulada "Modelado, diseño y simulación de una mano virtual controlada a partir de señales electromiográficas" busca construir una herramienta software en la cual se tenga una mano virtual que sea controlada por los impulsos eléctricos provenientes del antebrazo de un paciente con amputación de mano.

Este ambiente virtual que ya se encuentra en construcción ayudará al entrenamiento de los pacientes con amputación de mano a conservar sus capacidades transmisoras de información a través de sus brazos y será un indicador de su capacidad futura para aceptar una prótesis robótica real, la cual también se encuentra en una fase de determinación estructural del prototipo. Igualmente el éxito de este trabajo permitirá más adelante extender estos resultados a

¹Grupo de Automática Industrial, Grupo de Nuevas Tecnologías en Telecomunicaciones, Grupo Movimiento Corporal Humano

prótesis de brazo o pierna.

El presente proyecto de investigación enmarcado dentro de ese macroproyecto (ver figura 1) mencionado anteriormente, se encargó de definir el tipo de mano a ser implementada en el ambiente virtual a partir de su modelado matemático e implementación de algoritmos de control para acercamiento y agarre.

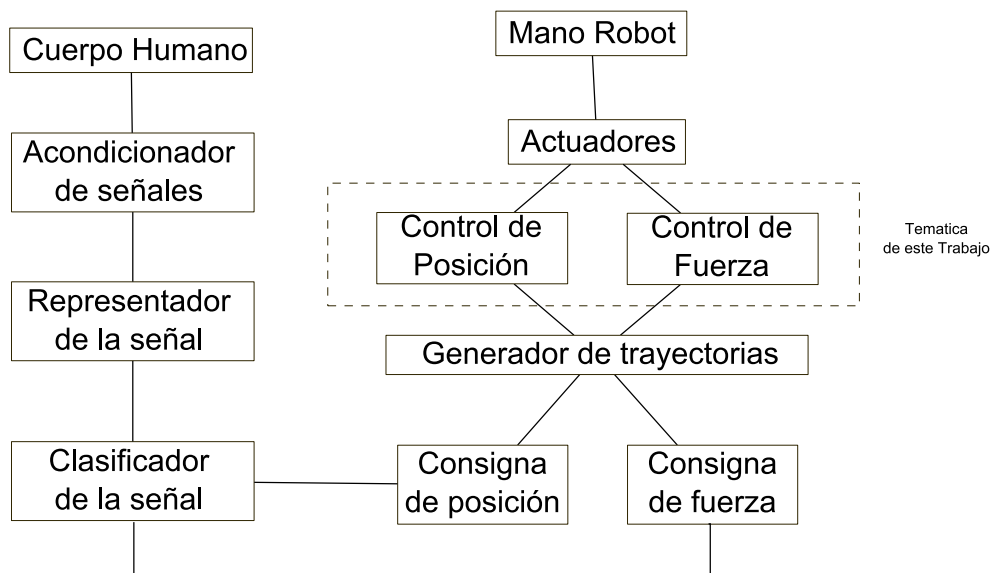


Figura 1: Esquema general del proyecto

Capítulo 1

Modelos

1.1. Visión general de la mano humana

La mano es el órgano del cuerpo humano que mejor adaptado está a la función de manipulación. La disposición de sus 27 pequeños huesos, movidos por 37 músculos esqueléticos conectados por tendones, permite un amplio margen de movimientos. La mano está compuesta de la palma y los dedos y es articulada al antebrazo por la muñeca, Figura 1.1. La palma es una superficie plana que sirve como soporte central al plano creado por cinco huesos largos radiando desde la muñeca. Los huesos de la mano se distribuyen en tres grupos, los del carpo, los del metacarpo y los de los dedos. Los huesos del carpo son ocho, los huesos del metacarpo, que forman la palma de la mano, son cinco y los huesos de los dedos los cuales son tres para cada uno, excepto el pulgar que solo tiene dos, ellos se denominan primera, segunda y tercera falange o proximal, media y distal [6].

El movimiento se consigue a través de la acción muscular. Los músculos del antebrazo son 20, generalmente de forma alargada, llegando sus tendones hasta los dedos de la mano. Mientras unos músculos son flexores de los dedos, otros son extensores de los mismos [7], [8].

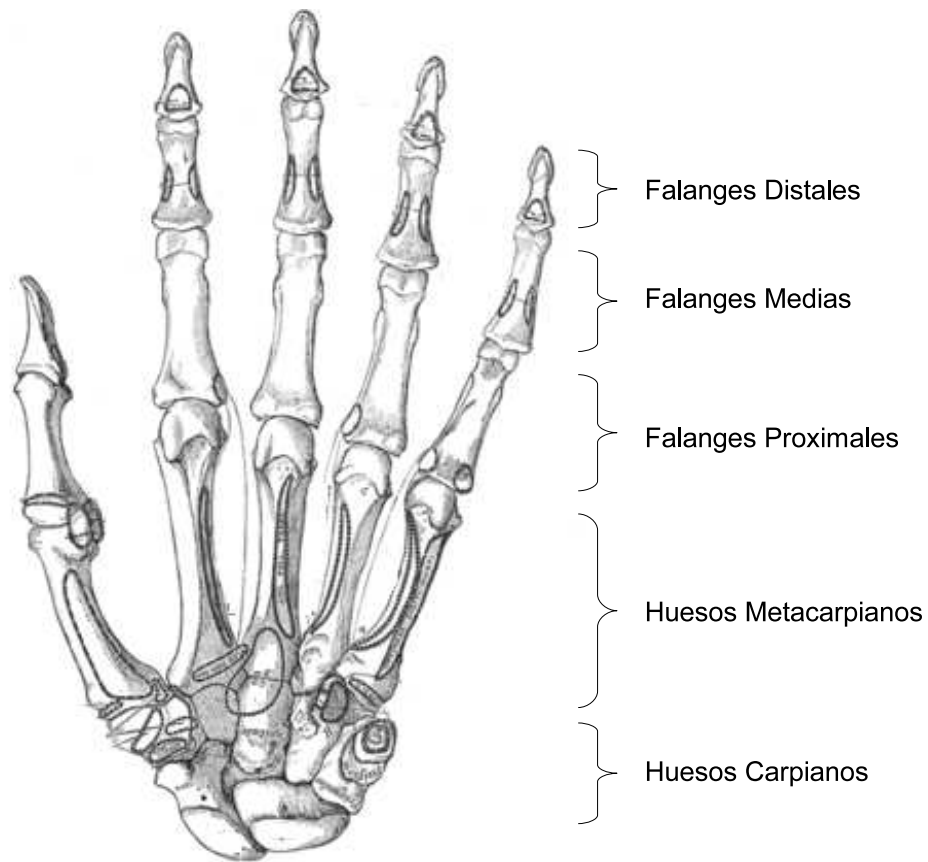


Figura 1.1: Esquema de la mano humana

1.2. Modelado de robots manipuladores

El diseño y el control de robots necesita del cálculo de ciertos modelos matemáticos que permitan determinar la orientación y desplazamiento del órgano terminal del robot en función de la base del mismo. De manera equivalente es necesario determinar el comportamiento del robot ante los pares de fuerza ejercidos por los actuadores a través del modelado de toda la dinámica del robot, teniendo en cuenta las masas, inercias y frotamientos, con el fin de simular y controlar el robot. Los modelos a los cuales es necesario recurrir en el modelado y control del robots son los siguientes [9]:

1. Modelos de transformación:

- a) Modelos geométricos directo e inverso
 - b) Modelos cinemáticos directo e inverso
2. Los modelos dinámicos (que definen las ecuaciones de movimiento del robot)

Modelo Geométrico Directo (MGD), representa la relación entre la posición cartesiana del efector¹ final con respecto a un sistema de coordenadas tomado como referencia con respecto a los valores de las articulaciones y los parámetros geométricos de los elementos del robot.

El problema inverso consiste en calcular las coordenadas articulares correspondientes a una ubicación dada del órgano terminal en el espacio cartesiano o espacio operacional. Este último modelo es llamado: **Modelo Geométrico Inverso (MGI)**.

El **Modelo Cinemático Directo (MCD)** de un robot manipulador describe la velocidad de sus coordenadas operacionales (cartesianas) en función de las velocidades articulares de cada una de las articulaciones del manipulador, esto se puede expresar como:

$$\dot{x} = J(q)\dot{q}, \quad (1.1)$$

donde:

$J(q)$: matriz Jacobiana del mecanismo,

q : posiciones articulares,

\dot{q} : velocidades articulares.

En el control híbrido de posición-fuerza la jacobiana se usa para establecer la relación existente entre las fuerzas ejercidas por el órgano terminal sobre el ambiente y los pares de fuerza de los actuadores [9].

¹mecanismo que pone en obra la acción

El objetivo del **Modelo Cinemático Inverso (MCI)** es el de calcular a partir de una configuración q , las velocidades articulares \dot{q} que aseguran dotar al órgano terminal de una velocidad \dot{x} deseada, esto se puede expresar como:

$$\dot{q} = J^{-1}(q)\dot{x}, \quad (1.2)$$

donde $J^{-1}(q)$ es la inversa de la matriz jacobiana.

El **Modelo Dinámico Inverso (MDI)** describe la relación entre los pares de fuerza aplicados a los accionadores y las posiciones, velocidades y aceleraciones articulares, el modelo dinámico inverso se expresan por una relación de la forma:

$$\Gamma = f(q, \dot{q}, \ddot{q}, f_e), \quad (1.3)$$

donde Γ es el vector de pares de fuerza de las articulaciones, q el vector de posiciones articulares, \dot{q} el vector de velocidades, \ddot{q} el vector de aceleraciones y f_e el vector que representa la fuerza exterior (fuerzas y momentos) que ejerce el robot sobre el ambiente de trabajo.

Finalmente el **Modelo Dinámico Directo (MDD)** es aquel que expresa las aceleraciones articulares en función de las posiciones, velocidades y pares de fuerza de las articulaciones, lo cual se expresa en la siguiente ecuación:

$$\ddot{q} = f(q, \dot{q}, \Gamma, f_e). \quad (1.4)$$

Por medio de las aplicaciones del modelo dinámico se puede realizar las siguientes tareas [9]:

- Simulación (la cual utiliza el modelo dinámico directo).
- Dimensionamiento de los accionadores o actuadores.

- Identificación de los parámetros de inercia y de los parámetros de fricción del robot.
- Control, el cual hace uso del modelo dinámico inverso.

1.3. Modelo propuesto

A partir del estudio de los resultados arrojados por el trabajo realizado en el grupo de Movimiento Corporal Humano de la Universidad del Cauca [10] y pensando en las funcionalidades básicas de una mano humana, se definió una estructura de tres dedos (medio, índice y pulgar) y nueve grados de libertad, tres por cada dedo, haciendo uso de juntas rotoides para cada una de dichas articulaciones. Partiendo de las anteriores especificaciones se realizó un modelado geométrico de dicha mano con el fin de estructurar una visión general topológica de la mano robot.

1.4. Arquitectura de la mano robot

La Figura 1.2 muestra la arquitectura general de la prótesis propuesta y una visión tridimensional de la misma.

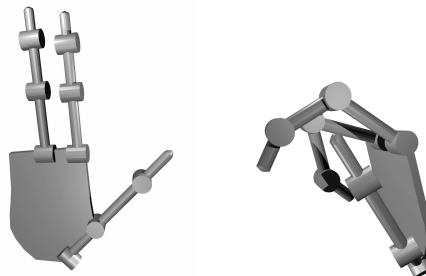


Figura 1.2: Esquema general de la prótesis propuesta en una vista 3D

1.5. Modelos

Los nombres de las falanges son: proximal (MCP), media (PIP) y distal (DIP). Los ejes x_i representan los ejes de movimiento de las articulaciones rotoides.

El modelado fue realizado considerando que la mano es en realidad una estructura tipo arborescente como se observa en la figura 1.3.

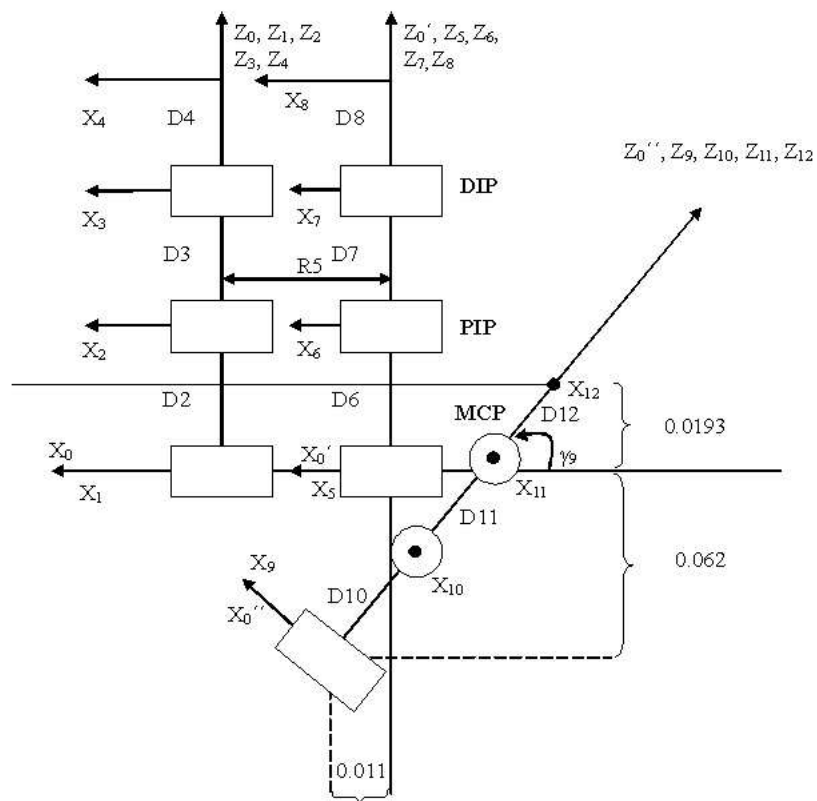


Figura 1.3: Estructura de la mano

La tabla de parámetros geométricos se muestra en el cuadro 1.1, en donde:

- z_j es el eje de la articulación j ,
- x_j es perpendicular a z_j y z_{j+1}

θ_j : variable articular de cada rotoide

d_j : longitud de cada falange

α_j : ángulo entre ejes z_j

b_j : distancia entre los ejes de cada dedo

r_j : distancia entre ejes x_j

σ : tipo de articulación (en este caso rotoide $\sigma=0$)

γ_j : ángulo del dedo pulgar con respecto a los dedos de la mano

j	σ_j	γ_j	b_j	α_j	d_j	θ_j	r_j
1	0	0	0	0	0	θ_1	0
2	0	0	0	0	D_2	θ_2	0
3	0	0	0	0	D_3	θ_3	0
4	0	0	0	0	D_4	0	0
5	0	0	0	0	0	θ_5	R_5
6	0	0	0	0	D_6	θ_6	0
7	0	0	0	0	D_7	θ_7	0
8	0	0	0	0	D_8	0	0
9	0	γ_9	0	0	0	θ_9	0
10	0	0	0	90	D_{10}	θ_{10}	0
11	0	0	0	0	D_{11}	θ_{11}	0
12	0	0	0	0	D_{12}	0	0

Cuadro 1.1: Parametros Geométricos

Con $D_2 = 0,057; D_3 = 0,039; D_4 = 0,027; D_6 = 0,052; D_7 = 0,036;$
 $D_8 = 0,025; D_{10} = 0,032; D_{11} = 0,039; D_{12} = 0,044; R_5 = 0,021;$
 $\gamma_9 = 45^\circ; x_1 = 0,062; x_2 = 0,011.$

Esta fórmula general de las matrices de transformación tiene en cuenta una reorientación de ejes de la base, esto con el fin de que el eje coordenado de la base se encuentre orientado con el eje z vertical y de esta forma estar

acorde al esquema 3D de la mano virtual en un ambiente de simulación CAD.

El modelo de la mano se basa en una estructura arborescente.

La forma general para las matrices de transformación es:

$${}^i T_j = Rot(z, \gamma_j) Trans(z, b_j) Rot(x, a_j) Trans(x, d_j) Rot(z, \theta_j) Trans(z, r_j) \quad (1.5)$$

que de forma matricial se expresa como:

$${}^i T_j = \begin{bmatrix} C\gamma_j C\theta_j - S\gamma_j C\alpha_j S\theta_j & -C\gamma_j S\theta_j - S\gamma_j C\alpha_j C\theta_j & S\gamma_j S\alpha_j & d_j C\gamma_j + r_j S\gamma_j S\alpha \\ S\alpha_j C\theta_j + C\gamma_j C\alpha_j S\theta_j & -S\gamma_j S\theta_j + C\gamma_j C\alpha_j C\theta_j & -C\gamma_j S\alpha_j & d_j S\gamma_j - r_j C\gamma_j S\alpha \\ S\gamma_j S\theta_j & S\gamma_j C\theta_j & C\alpha_j & r_j C\alpha_j + b_j \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.6)$$

Las matrices de transformación teniendo en cuenta la anterior fórmula para los dedos índice, medio y pulgar son:

MEDIO

$${}^0 T_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(q_1) & -\sin(q_1) & 0 \\ 0 & \sin(q_1) & \cos(q_1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.7)$$

$${}^1 T_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(q_2) & -\sin(q_2) & 0 \\ 0 & \sin(q_2) & \cos(q_2) & D_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.8)$$

$${}^2 T_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(q_3) & -\sin(q_3) & 0 \\ 0 & \sin(q_3) & \cos(q_3) & D_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.9)$$

$${}^3T_E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & D_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.10)$$

INDICE

$${}^{0'}T_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & R_5 \\ 0 & \cos(q_5) & -\sin(q_5) & 0 \\ 0 & \sin(q_5) & \cos(q_5) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.11)$$

$${}^5T_6 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(q_6) & -\sin(q_6) & 0 \\ 0 & \sin(q_6) & \cos(q_6) & D_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.12)$$

$${}^6T_7 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(q_7) & -\sin(q_7) & 0 \\ 0 & \sin(q_7) & \cos(q_7) & D_7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.13)$$

$${}^7T_{E'} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & D_8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.14)$$

PULGAR

$${}^{0''}T_9 = \begin{bmatrix} 1/2 \sqrt{2} & 1/2 \sqrt{2} \sin(q_9) & 1/2 \sqrt{2} \cos(q_9) & 0 \\ 0 & \cos(q_9) & -\sin(q_9) & 0 \\ 1/2 \sqrt{2} & 1/2 \sqrt{2} \sin(q_9) & 1/2 \sqrt{2} \cos(q_9) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.15)$$

$${}^9T_{10} = \begin{bmatrix} 0 & \cos(q_{10}) & \sin(q_{10}) & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sin(q_{10}) & \cos(q_{10}) & D_{10} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.16)$$

$${}^{10}T_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(q_{11}) & -\sin(q_{11}) & 0 \\ 0 & \sin(q_{11}) & \cos(q_{11}) & D_{11} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.17)$$

$${}^{11}T_{E''} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & D_{12} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.18)$$

1.5.1. Modelo geométrico directo

Dado que el modelo geométrico directo representa la relación entre la posición cartesiana del efector final con base a un sistema de coordenadas tomado como referencia con respecto a los valores de las articulaciones y los parámetros geométricos de los elementos del robot, se procedió a obtener la matriz

de transformación entre bases de referencia basándose en los parámetros vistos en la tabla 1.1, teniendo en cuenta que la mano se compone de cadenas cinemáticas independientes de estructura arborescente.

Las matrices de transformación entre la punta de los dedos (P) y la base de referencia, para los dedos medio (${}^0T_{3E}$), índice (${}^{0'}T_{6E'}$) y pulgar (${}^{0''}T_{11E''}$) respectivamente son:

$$\begin{aligned}
{}^0T_{3E}(1, 1) &= 1 \\
{}^0T_{3E}(2, 1) &= 0 \\
{}^0T_{3E}(3, 1) &= 0 \\
{}^0T_{3E}(4, 1) &= 0 \\
{}^0T_{3E}(1, 2) &= 0 \\
{}^0T_{3E}(2, 2) &= \cos(q_1 + q_2 + q_3) \\
{}^0T_{3E}(3, 2) &= \sin(q_1 + q_2 + q_3) \\
{}^0T_{3E}(4, 2) &= 0 \\
{}^0T_{3E}(1, 3) &= 0 \\
{}^0T_{3E}(2, 3) &= -\sin(q_1 + q_2 + q_3) \\
{}^0T_{3E}(3, 3) &= \cos(q_1 + q_2 + q_3) \\
{}^0T_{3E}(4, 3) &= 0 \\
{}^0T_{3E}(1, 4) &= 0 \\
{}^0T_{3E}(2, 4) &= -\sin(q_1 + q_2 + q_3)D_4 - \sin(q_1 + q_2)D_3 - \sin(q_1)D_2 \\
{}^0T_{3E}(3, 4) &= \cos(q_1 + q_2 + q_3)D_4 + \cos(q_1 + q_2)D_3 + \cos(q_1)D_2 \\
{}^0T_{3E}(4, 4) &= 1
\end{aligned}$$

(1.19)

$$\begin{aligned}
{}^0T_{6E'}(1, 1) &= 1 \\
{}^0T_{6E'}(2, 1) &= 0 \\
{}^0T_{6E'}(3, 1) &= 0 \\
{}^0T_{6E'}(4, 1) &= 0 \\
{}^0T_{6E'}(1, 2) &= 0 \\
{}^0T_{6E'}(2, 2) &= \cos(q_5 + q_6 + q_7) \\
{}^0T_{6E'}(3, 2) &= \sin(q_5 + q_6 + q_7) \\
{}^0T_{6E'}(4, 2) &= 0 \\
{}^0T_{6E'}(1, 3) &= 0 \\
{}^0T_{6E'}(2, 3) &= -\sin(q_5 + q_6 + q_7) \\
{}^0T_{6E'}(3, 3) &= \cos(q_5 + q_6 + q_7) \\
{}^0T_{6E'}(4, 3) &= 0 \\
{}^0T_{6E'}(1, 4) &= R_5 \\
{}^0T_{6E'}(2, 4) &= -\sin(q_5 + q_6 + q_7)D_8 - \sin(q_5 + q_6)D_7 - \sin(q_5)D_6 \\
{}^0T_{6E'}(3, 4) &= \cos(q_5 + q_6 + q_7)D_8 + \cos(q_5 + q_6)D_7 + \cos(q_5)D_6 \\
{}^0T_{6E'}(4, 4) &= 1
\end{aligned}$$

(1.20)

$$\begin{aligned}
{}^0T_{11E''}(1, 1) &= 1/2 \sqrt{2} \sin(q_9) \\
{}^0T_{11E''}(2, 1) &= \cos(q_9) \\
{}^0T_{11E''}(3, 1) &= 1/2 \sqrt{2} \sin(q_9) \\
{}^0T_{11E''}(4, 1) &= 0 \\
{}^0T_{11E''}(1, 2) &= 1/2 \sqrt{2} \cos(-q_{11} + q_{10}) \\
&\quad + 1/4 \sqrt{2} \sin(q_{11} + q_9 + q_{10}) \\
&\quad - 1/4 \sqrt{2} \sin(-q_{11} + q_9 - q_{10}) \\
{}^0T_{11E''}(2, 2) &= -1/2 \cos(-q_{11} + q_9 - q_{10}) \\
&\quad + 1/2 \cos(q_{11} + q_9 + q_{10}) \\
{}^0T_{11E''}(3, 2) &= 1/2 \sqrt{2} \cos(-q_{11} + q_{10}) \\
&\quad + 1/4 \sqrt{2} \sin(q_{11} + q_9 + q_{10}) \\
&\quad - 1/4 \sqrt{2} \sin(-q_{11} + q_9 - q_{10}) \\
{}^0T_{11E''}(4, 2) &= 0 \\
{}^0T_{11E''}(1, 3) &= 1/2 \sqrt{2} \sin(-q_{11} + q_{10}) \\
&\quad + 1/4 \sqrt{2} \cos(q_{11} + q_9 + q_{10}) \\
&\quad + 1/4 \sqrt{2} \cos(-q_{11} + q_9 - q_{10}) \\
{}^0T_{11E''}(2, 3) &= -1/2 \sin(-q_{11} + q_9 - q_{10}) \\
&\quad - 1/2 \sin(q_{11} + q_9 + q_{10}) \\
{}^0T_{11E''}(3, 3) &= 1/2 \sqrt{2} \sin(-q_{11} + q_{10}) \\
&\quad + 1/4 \sqrt{2} \cos(q_{11} + q_9 + q_{10}) \\
&\quad + 1/4 \sqrt{2} \cos(-q_{11} + q_9 - q_{10}) \\
{}^0T_{11E''}(4, 3) &= 0
\end{aligned} \tag{1.21}$$

$$\begin{aligned}
{}^0T_{11E''}(1, 4) &= 1/2 \sqrt{2} D_{12} \sin(-q_{11} + q_{10}) \\
&\quad + 1/4 \sqrt{2} D_{12} \cos(q_{11} + q_9 + q_{10}) \\
&\quad + 1/4 \sqrt{2} D_{12} \cos(-q_{11} + q_9 - q_{10}) \\
&\quad + 1/2 D_{11} \sqrt{2} \sin(q_{10}) + 1/4 \sqrt{2} D_{11} \cos(q_9 - q_{10}) \\
&\quad + 1/4 \sqrt{2} D_{11} \cos(q_9 + q_{10}) \\
&\quad + 1/2 \sqrt{2} \cos(q_9) D_{10} \\
{}^0T_{11E''}(2, 4) &= -1/2 D_{12} \sin(-q_{11} + q_9 - q_{10}) \\
&\quad - 1/2 D_{12} \sin(q_{11} + q_9 + q_{10}) \\
&\quad - 1/2 D_{11} \sin(q_9 + q_{10}) \\
&\quad - 1/2 D_{11} \sin(q_9 - q_{10}) - \sin(q_9) D_{10} \\
{}^0T_{11E''}(3, 4) &= 1/2 \sqrt{2} D_{12} \sin(-q_{11} + q_{10}) \\
&\quad + 1/4 \sqrt{2} D_{12} \cos(q_{11} + q_9 + q_{10}) \\
&\quad + 1/4 \sqrt{2} D_{12} \cos(-q_{11} + q_9 - q_{10}) \\
&\quad + 1/2 D_{11} \sqrt{2} \sin(q_{10}) \\
&\quad + 1/4 \sqrt{2} D_{11} \cos(q_9 - q_{10}) \\
&\quad + 1/4 \sqrt{2} D_{11} \cos(q_9 + q_{10}) \\
&\quad + 1/2 \sqrt{2} \cos(q_9) D_{10} \\
{}^0T_{11E''}(4, 4) &= 1
\end{aligned}$$

(1.22)

Los primeros tres términos de la cuarta columna de las matrices de transformación ${}^0T_{3E}$, ${}^0T_{6E'}$ y ${}^0T_{9E''}$ corresponden a las coordenadas cartesianas P_x, P_y y P_z de las punta de los dedos con respecto al eje de coordenadas de la base ubicado en el dedo medio, de esta forma el modelo geométrico directo que permite obtener las posiciones cartesianas a partir de las variables articulares para cada dedo es:

Dedo medio:

$$\varphi_{midd}(q) = \begin{pmatrix} P_{xmidd} \\ P_{ymidd} \\ P_{zmidd} \end{pmatrix} \quad (1.23)$$

donde:

$$\begin{aligned} P_{xmidd} &= 0 \\ P_{ymidd} &= -\sin(q_1 + q_2 + q_3)D_4 - \sin(q_1 + q_2)D_3 - \sin(q_1)D_2 \\ P_{zmidd} &= \cos(q_1 + q_2 + q_3)D_4 + \cos(q_1 + q_2)D_3 + \cos(q_1)D_2 \end{aligned} \quad (1.24)$$

Dedo Indice:

$$\varphi_{ind}(q) = \begin{pmatrix} P_{xind} \\ P_{yind} \\ P_{zind} \end{pmatrix} \quad (1.25)$$

donde:

$$\begin{aligned} P_{xind} &= R_5 \\ P_{yind} &= -\sin(q_5 + q_6 + q_7)D_8 - \sin(q_5 + q_6)D_7 - \sin(q_5)D_6 \\ P_{zind} &= \cos(q_5 + q_6 + q_7)D_8 + \cos(q_5 + q_6)D_7 + \cos(q_5)D_6 \end{aligned} \quad (1.26)$$

Dedo Pulgar:

$$\varphi_{pul}(q) = \begin{pmatrix} P_{xpul} \\ P_{ypul} \\ P_{zpul} \end{pmatrix} \quad (1.27)$$

$$\begin{aligned}
P_{xpul} &= 1/2 \sqrt{2} D_{12} \sin(-q_{11} + q_{10}) \\
&\quad + 1/4 \sqrt{2} D_{12} \cos(q_{11} + q_9 + q_{10}) \\
&\quad + 1/4 \sqrt{2} D_{12} \cos(-q_{11} + q_9 - q_{10}) \\
&\quad + 1/2 D_{11} \sqrt{2} \sin(q_{10}) + 1/4 \sqrt{2} D_{11} \cos(q_9 - q_{10}) \\
&\quad + 1/4 \sqrt{2} D_{11} \cos(q_9 + q_{10}) \\
&\quad + 1/2 \sqrt{2} \cos(q_9) D_{10} \\
P_{ypul} &= -1/2 D_{12} \sin(-q_{11} + q_9 - q_{10}) \\
&\quad - 1/2 D_{12} \sin(q_{11} + q_9 + q_{10}) \\
&\quad - 1/2 D_{11} \sin(q_9 + q_{10}) \\
&\quad - 1/2 D_{11} \sin(q_9 - q_{10}) - \sin(q_9) D_{10} \\
P_{zpul} &= 1/2 \sqrt{2} D_{12} \sin(-q_{11} + q_{10}) \\
&\quad + 1/4 \sqrt{2} D_{12} \cos(q_{11} + q_9 + q_{10}) \\
&\quad + 1/4 \sqrt{2} D_{12} \cos(-q_{11} + q_9 - q_{10}) \\
&\quad + 1/2 D_{11} \sqrt{2} \sin(q_{10}) \\
&\quad + 1/4 \sqrt{2} D_{11} \cos(q_9 - q_{10}) \\
&\quad + 1/4 \sqrt{2} D_{11} \cos(q_9 + q_{10}) \\
&\quad + 1/2 \sqrt{2} \cos(q_9) D_{10}
\end{aligned} \tag{1.28}$$

Donde las constantes son:

$$\begin{aligned}
D_2 &= 0,057 \\
D_3 &= 0,039 \\
D_4 &= 0,027 \\
R_5 &= 0,021 \\
D_6 &= 0,052 \\
D_7 &= 0,036 \\
D_8 &= 0,025 \\
D_{10} &= 0,032 \\
D_{11} &= 0,039 \\
D_{12} &= 0,044
\end{aligned}
\tag{1.29}$$

1.5.2. Modelo geométrico inverso

Posiciones articulares

Dedo medio $\theta_1, \theta_2, \theta_3$; Dedo índice $\theta_4, \theta_5, \theta_6$; Dedo pulgar $\theta_9, \theta_{10}, \theta_{11}$.

Ecuaciones del modelo geométrico inverso

Para el modelo geométrico inverso se hizo uso del método de Paul [11]. De esta manera se retoman las matrices de transformaciones que para el dedo medio, índice y pulgar tienen las siguientes expresiones:

$${}^0T_{3E} = {}^0T_1 {}^1T_2 {}^2T_3 {}^3T_E$$

$${}^{0'}T_{6E} = {}^{0'}T_4 {}^4T_5 {}^5T_6 {}^6T_E$$

$${}^{0''}T_{9E} = {}^{0''}T_7 {}^7T_8 {}^8T_9 {}^9T_E$$

Las matrices de transformación deben corresponder a la ubicación deseada para cierto dedo, de esta manera se define la matriz de posiciones cartesianas y orientación U_0 como:

$$U_{dedo} = \begin{pmatrix} s_x \text{ dedo} & n_x \text{ dedo} & a_x \text{ dedo} & P_x \text{ dedo} \\ s_y \text{ dedo} & n_y \text{ dedo} & a_y \text{ dedo} & P_y \text{ dedo} \\ s_z \text{ dedo} & n_z \text{ dedo} & a_z \text{ dedo} & P_z \text{ dedo} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

el modelo geométrico inverso se obtiene resolviendo las siguientes ecuaciones:

$${}^0T_1 {}^1T_2 {}^2T_3 {}^3T_E = U_{med} \quad (1.30)$$

$${}^{0'}T_4 {}^4T_5 {}^5T_6 {}^6T_E = U_{ind} \quad (1.31)$$

$${}^{0''}T_9 {}^9T_{10} {}^{10}T_{11} {}^{11}T_E = U_{pul} \quad (1.32)$$

$${}^1T_2 {}^2T_3 {}^3T_E = {}^1T_0 U_{med} \quad (1.33)$$

$${}^4T_5 {}^5T_6 {}^6T_E = {}^2T_{0'} U_{ind} \quad (1.34)$$

$${}^9T_{10} {}^{10}T_{11} {}^{11}T_E = {}^9T_{0''} U_{pul} \quad (1.35)$$

Usando las ecuaciones 1.33, 1.34, 1.35 y las matrices de transformación de la sección 1.4 se tiene el siguiente grupo de ecuaciones,

Dedo Medio

$$-S_1 P_x \text{ med} + C_1 P_z \text{ med} = C_{23} D_4 + C_2 D_3 + D_2,$$

$$-C_1 P_x \text{ med} - S_1 P_z \text{ med} = S_{23} D_4 + S_2 D_3,$$

$$-S_1 a_x \text{ med} + C_1 a_z \text{ med} = 0,$$

Dedo índice

$$-S_4 P_x \text{ ind} + C_4 P_z \text{ ind} = C_{56} D_7 + C_5 D_6 + D_5,$$

$$-C_4 P_x \text{ ind} - S_4 P_z \text{ ind} = S_{56} D_7 + S_5 D_6,$$

$$-S_4 a_x \text{ ind} + C_4 a_z \text{ ind} = 0,$$

Soluciones del modelo geométrico inverso

$$\theta_1 = \text{atan2}(a_{z \text{ med}}, a_{x \text{ med}}),$$

$$X_{\text{med}} = D_3$$

$$Y_{\text{med}} = D_4$$

$$Z_{1 \text{ med}} = -S_1 P_{x \text{ med}} + C_1 P_{z \text{ med}} - D_2$$

$$Z_{2 \text{ med}} = -C_1 P_{x \text{ med}} - S_1 P_{z \text{ med}}$$

$$C_3 = \frac{Z_{1 \text{ med}}^2 + Z_{2 \text{ med}}^2 - X_{\text{med}}^2 - Y_{\text{med}}^2}{2XY}$$

$$\theta_3 = \text{atan2}\left(\pm\sqrt{1 - C_3^2}, C_3^2\right)$$

$$B_{1 \text{ med}} = X + Y C_3$$

$$B_{2 \text{ med}} = Y S_3$$

$$S_2 = \frac{B_{1 \text{ med}} Z_{2 \text{ med}} - B_{2 \text{ med}} Z_{1 \text{ med}}}{B_{1 \text{ med}}^2 + B_{2 \text{ med}}^2}$$

$$C_2 = \frac{B_{1 \text{ med}} Z_{1 \text{ med}} + B_{2 \text{ med}} Z_{2 \text{ med}}}{B_{1 \text{ med}}^2 + B_{2 \text{ med}}^2}$$

$$\theta_2 = \text{atan2}(S_2, C_2)$$

$$\theta_4 = \text{atan2}(a_{z \text{ ind}}, a_{x \text{ ind}}),$$

$$X_{\text{ind}} = D_6$$

$$Y_{\text{ind}} = D_4$$

$$Z_{4 \text{ ind}} = -S_4 P_{x \text{ ind}} + C_4 P_{z \text{ ind}} - D_5$$

$$Z_5 \text{ ind} = -C_4 P_x \text{ ind} - S_4 P_z \text{ ind}$$

$$C_6 = \frac{Z_4 \text{ ind}^2 + Z_5 \text{ ind}^2 - X \text{ ind}^2 - Y \text{ ind}^2}{2XY}$$

$$\theta_6 = \text{atan2} \left(\pm \sqrt{4 - C_6^2}, C_6^2 \right)$$

$$B_4 \text{ ind} = X + Y C_6$$

$$B_5 \text{ ind} = Y S_6$$

$$S_5 = \frac{B_4 \text{ ind} Z_5 \text{ ind} - B_5 \text{ ind} Z_4 \text{ ind}}{B_4 \text{ ind}^2 + B_5 \text{ ind}^2}$$

$$C_5 = \frac{B_4 \text{ ind} Z_4 \text{ ind} + B_5 \text{ ind} Z_5 \text{ ind}}{B_4 \text{ ind}^2 + B_5 \text{ ind}^2}$$

$$\theta_5 = \text{atan2} (S_5, C_5)$$

Dedo Pulgar

$$\theta_7 = \text{atan2}(-P_y - P_z, P_z - P_y),$$

$$\theta_8 = \text{atan2}(c, d),$$

$$c = (2/\sqrt{2})s_x,$$

$$d = C_7 s_z - S_7 s_z - S_7 s_y - C_7 s_y,$$

$$\theta_9 = \text{atan2}(S_9, C_9),$$

$$S_9 = S_8 n_x - (\sqrt{2}/2)(S_7 + C_7)C_8 n_y + (\sqrt{2}/2)(C_7 - S_7)C_8 n_z,$$

$$C_9 = -C_8 n_x - (\sqrt{2}/2)(S_7 + C_7)S_8 n_y + (\sqrt{2}/2)(C_7 - S_7)S_8 n_y.$$

Para todas las ecuaciones:

$[P_x, P_y, P_z]$ son las posiciones cartesianas,

$[s_x, s_y, s_z], [n_x, n_y, n_z], [a_x, a_y, a_z]$ son las orientaciones.

1.5.3. Modelo dinámico inverso de la mano

La forma general de la ecuación dinámica de un robot fue presentada en la expresión (2.1), de la cual la forma general es:

$$\Gamma = A(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) + F_v \dot{q} + F_s \text{sing}(\dot{q}), \quad (1.36)$$

donde,

Γ es el vector $n \times 1$ del par

A matriz $n \times n$ de inercia de la mano del robot

C vector $n \times 1$ de fuerzas centrífugas y de Coriolis

g vector de gravedad

F_v matriz de fricción viscosa

F_s matriz de fricciones de Coulomb

las posiciones articulares están dadas por q , la velocidad por \dot{q} y las aceleraciones por \ddot{q} . La ecuación dinámica (1.36) puede ser escrita en forma compacta como:

$$\Gamma = A(q)\ddot{q} + H(q, \dot{q}) \quad (1.37)$$

en donde:

A es la matriz de inercia

H es la matriz de gravedad, fuerza de coriolis y fricción viscosa y de coulomb.

El modelo *dinámico directo* permite realizar la simulación del comportamiento real de la mano robot y el modelo *dinámico inverso* la implementación de un tipo de control basado en el esquema de control por par calculado, el cual usa una técnica de desacoplo de no linealidades.

Debido a la complejidad de los cálculos en el modelo de un robot cualquiera, un paso casi necesario es la simplificación de operaciones con el uso de los llamados *parámetros dinámicos de base* del robot [9]. Los parámetros dinámicos de un robot son once, seis elementos del tensor de inercia ($XX_j, XY_j, XZ_j, YY_j, YZ_j, ZZ_j$), tres del primer momento de inercia (MX_j, MY_j, MZ_j), uno de la masa (M_j) y uno de la inercia del accionador (Ia_j).

Con el uso de los parámetros dinámicos de base en vez de tenerse 99 parámetros dinámicos, se obtienen tan solo 30, esta simplificación se puede hacer ya que las articulaciones no estarán sometidas a velocidades altas.

El cuadro 1.2 presenta los *parámetros dinámicos de base* para cada uno de los dedos de la mano robot y para cada una de sus articulaciones.

Con el fin de simplificar el modelo, no se consideran los frotamientos ni la matriz de fuerzas de Coriolis y centrífugas. El modelo reducido solo tendría en cuenta la matriz de inercia **A** y el vector de gravedad **Q**:

$$\Gamma = A\ddot{q} + Q. \quad (1.38)$$

Parametro	Dedo Medio			Dedo Índice			Dedo Pulgar		
	Articulación								
	1	2	3	1	2	3	1	2	3
XX_j	0	XX_{R2}	XX_{R3}	0	XX_{R2}	XX_{R3}	0	XX_{R2}	XX_{R3}
XY_j	0	0	0	0	0	0	0	0	0
XZ_j	0	0	0	0	0	0	0	0	0
YY_j	0	0	0	0	0	0	0	0	0
YZ_j	0	0	0	0	0	0	0	0	0
ZZ_j	ZZ_{R1}	ZZ_{R2}	ZZ_3	ZZ_{R1}	ZZ_{R2}	ZZ_3	ZZ_{R1}	ZZ_{R2}	ZZ_3
MX_j	0	0	0	0	0	0	0	0	0
MY_j	MY_1	MY_2	MY_3	MY_1	MY_2	MY_3	MY_{R1}	MY_2	MY_3
MZ_j	0	0	0	0	0	0	0	0	0
M_j	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Ia_j	0	IA_2	IA_3	0	IA_2	IA_3	0	IA_2	IA_3

Cuadro 1.2: Parametros Dinámicos de Base

La expresión del modelo dinámico para cada dedo es:

Dedo Medio

$$\begin{pmatrix} \Gamma_1 \\ \Gamma_2 \\ \Gamma_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \\ \ddot{q}_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{pmatrix}.$$

Dedo Inice

$$\begin{pmatrix} \Gamma_4 \\ \Gamma_5 \\ \Gamma_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{44} & A_{45} & A_{46} \\ A_{54} & A_{55} & A_{56} \\ A_{64} & A_{65} & A_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{q}_4 \\ \ddot{q}_5 \\ \ddot{q}_6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Q_4 \\ Q_5 \\ Q_6 \end{pmatrix}.$$

Dedo Pulgar

$$\begin{pmatrix} \Gamma_9 \\ \Gamma_{10} \\ \Gamma_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{99} & A_{910} & A_{911} \\ A_{109} & A_{1010} & A_{1011} \\ A_{119} & A_{1110} & A_{1111} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{q}_9 \\ \ddot{q}_{10} \\ \ddot{q}_{11} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Q_9 \\ Q_{10} \\ Q_{11} \end{pmatrix}.$$

Donde:

$$\begin{aligned} A_{11} &= XXR2 + 2MY2D2S2 + XXR3 \\ &\quad + 2MY3D2C2S3 + 2MY3D3S3 + 2MY3D2S2C3 \\ A_{22} &= XXR2 + XXR3 + 2MY3D3S3 + IA2 \\ A_{33} &= XXR3 + IA3 \\ A_{12} &= XXR2 + MY2D2S2 + XXR3 + MY3D2C2S3 \\ &\quad + 2MY3D3S3 + MY3D2S2C3 \\ A_{13} &= XXR3 + MY3D2C2S3 + MY3D3S3 + MY3D2S2C3 \\ A_{23} &= XXR3 + MY3D3S3 \end{aligned} \tag{1.39}$$

$$\begin{aligned} A_{44} &= XXR5 + 2MY5D5S5 + XXR6 \\ &\quad + 2MY6D5C5S6 + 2MY6D6S6 + 2MY6D5S5C6 \\ A_{55} &= XXR5 + XXR6 + 2MY6D6S6 + IA5 \\ A_{66} &= XXR6 + IA6 \\ A_{45} &= XXR5 + MY5D5S5 + XXR6 \\ &\quad + MY6D5C5S6 + 2MY6D6S6 + MY6D5S5C6 \\ A_{46} &= XXR6 + MY6D5C5S6 \\ &\quad + MY6D6S6 + MY6D5S5C6 \\ A_{56} &= XXR6 + MY6D6S6 \end{aligned} \tag{1.40}$$

$$\begin{aligned}
A_{99} &= ZZR10S1011 + 2MY10D10S10 \\
&\quad + 2MY11D10S1011 + 2MY11D11C10S1011 \\
A_{1010} &= XXR10 + XXR11 + 2MY11D11S11 \\
A_{1111} &= XXR_11 && (1.41) \\
A_{911} &= 0 \\
A_{910} &= 0 \\
A_{1011} &= XXR11 + MY11D11S11
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q_1 &= -G3MY1C1 - G3MY2C12 - G3MY3C3C12 + G3MY3S3S12 \\
Q_2 &= -G3MY2C12 - G3MY3C3C12 + G3MY3S3S12 \\
Q_3 &= G3MY3S12S3 - G3MY3C12C3 && (1.42)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q_4 &= -G3MY4C4 - G3MY5C45 - G3MY6C6C45 + G3MY6S6S45 \\
Q_5 &= -G3MY5C45 - G3MY6C6C45 + G3MY6S6S45 \\
Q_3 &= G3MY6S45S6 - G3MY6C45C6 && (1.43)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q_9 &= -\frac{\sqrt{2}}{2}G3MY9C9 + \frac{\sqrt{2}}{2}G3MY10S9S10 \\
&\quad + \frac{\sqrt{2}}{2}G3MY11S9S10C11 \\
&\quad + \frac{\sqrt{2}}{2}G3MY11S9C10S11 \\
Q_{10} &= \frac{\sqrt{2}}{2}G3MY10S10 - \frac{\sqrt{2}}{2}G3MY10C9C10 \\
&\quad + \frac{\sqrt{2}}{2}G3MY11S10C11 \\
&\quad - \frac{\sqrt{2}}{2}G3MY11C9C10C11 \\
&\quad + \frac{\sqrt{2}}{2}G3MY11C10S11 + G3MY11C9S10S11 \\
Q_{11} &= \frac{\sqrt{2}}{2}G3MY11C11S11 + \frac{\sqrt{2}}{2}G3MY11C9S10S11 \\
&\quad + \frac{\sqrt{2}}{2}G3MY11S10C11 \\
&\quad - \frac{\sqrt{2}}{2}G3MY11C9C10C11
\end{aligned} \tag{1.44}$$

1.5.4. Modelo dinámico directo de la mano

El modelo dinámico directo permitirá la simulación de la prótesis de mano. Partiendo del modelo dinámico inverso, la ecuación (1.45) representa el modelo dinámico directo, aplicable a cada uno de los dedos de la mano:

$$\ddot{q} = A^{-1}(\Gamma - Q). \tag{1.45}$$

A continuación se muestra los respectivos \ddot{q} de cada dedo.

Dedo Medio

$$\begin{aligned}
\ddot{q}_1 &= \frac{(A_{22} A_{33} - A_{23}^2)(\Gamma_1 - Q_1)}{2 A_{13} A_{12} A_{23} - A_{13}^2 A_{22} - A_{12}^2 A_{33} + A_{11} A_{22} A_{33} - A_{11} A_{23}^2} - \\
&\frac{(A_{12} A_{33} - A_{13} A_{23})(\Gamma_2 - Q_2)}{2 A_{13} A_{12} A_{23} - A_{13}^2 A_{22} - A_{12}^2 A_{33} + A_{11} A_{22} A_{33} - A_{11} A_{23}^2} + \\
&\frac{(A_{12} A_{23} - A_{13} A_{22})(\Gamma_3 - Q_3)}{2 A_{13} A_{12} A_{23} - A_{13}^2 A_{22} - A_{12}^2 A_{33} + A_{11} A_{22} A_{33} - A_{11} A_{23}^2} \\
\ddot{q}_2 &= -\frac{(A_{12} A_{33} - A_{13} A_{23})(\Gamma_1 - Q_1)}{2 A_{13} A_{12} A_{23} - A_{13}^2 A_{22} - A_{12}^2 A_{33} + A_{11} A_{22} A_{33} - A_{11} A_{23}^2} + \\
&\frac{(-A_{13}^2 + A_{11} A_{33})(\Gamma_2 - Q_2)}{2 A_{13} A_{12} A_{23} - A_{13}^2 A_{22} - A_{12}^2 A_{33} + A_{11} A_{22} A_{33} - A_{11} A_{23}^2} - \\
&\frac{(A_{11} A_{23} - A_{13} A_{12})(\Gamma_3 - Q_3)}{2 A_{13} A_{12} A_{23} - A_{13}^2 A_{22} - A_{12}^2 A_{33} + A_{11} A_{22} A_{33} - A_{11} A_{23}^2} \\
\ddot{q}_3 &= \frac{(A_{12} A_{23} - A_{13} A_{22})(\Gamma_1 - Q_1)}{2 A_{13} A_{12} A_{23} - A_{13}^2 A_{22} - A_{12}^2 A_{33} + A_{11} A_{22} A_{33} - A_{11} A_{23}^2} \\
&- \frac{(A_{11} A_{23} - A_{13} A_{12})(\Gamma_2 - Q_2)}{2 A_{13} A_{12} A_{23} - A_{13}^2 A_{22} - A_{12}^2 A_{33} + A_{11} A_{22} A_{33} - A_{11} A_{23}^2} + \\
&\frac{(-A_{12}^2 + A_{11} A_{22})(\Gamma_3 - Q_3)}{2 A_{13} A_{12} A_{23} - A_{13}^2 A_{22} - A_{12}^2 A_{33} + A_{11} A_{22} A_{33} - A_{11} A_{23}^2}
\end{aligned} \tag{1.46}$$

Dedo Índice

$$\ddot{q}_4 = - \frac{(A55 A66 - A56^2)(\Gamma_4 - Q4)}{-2 A46 A45 A56 + A46^2 A55 + A45^2 A66 - A44 A55 A66 + A44 A56^2} +$$

$$\frac{(A45 A66 - A46 A56)(\Gamma_5 - Q5)}{-2 A46 A45 A56 + A46^2 A55 + A45^2 A66 - A44 A55 A66 + A44 A56^2} -$$

$$\frac{(A45 A56 - A46 A55)(\Gamma_6 - Q6)}{-2 A46 A45 A56 + A46^2 A55 + A45^2 A66 - A44 A55 A66 + A44 A56^2}$$

$$\ddot{q}_5 = \frac{(A45 A66 - A46 A56)(\Gamma_4 - Q4)}{-2 A46 A45 A56 + A46^2 A55 + A45^2 A66 - A44 A55 A66 + A44 A56^2} +$$

$$\frac{(A46^2 - A44 A66)(\Gamma_5 - Q5)}{-2 A46 A45 A56 + A46^2 A55 + A45^2 A66 - A44 A55 A66 + A44 A56^2} -$$

$$\frac{(-A44 A56 + A46 A45)(\Gamma_6 - Q6)}{-2 A46 A45 A56 + A46^2 A55 + A45^2 A66 - A44 A55 A66 + A44 A56^2}$$

(1.47)

$$\ddot{q}_6 = - \frac{(A45 A56 - A46 A55)(\Gamma_4 - Q4)}{-2 A46 A45 A56 + A46^2 A55 + A45^2 A66 - A44 A55 A66 + A44 A56^2} -$$

$$\frac{(-A44 A56 + A46 A45)(\Gamma_5 - Q5)}{-2 A46 A45 A56 + A46^2 A55 + A45^2 A66 - A44 A55 A66 + A44 A56^2} +$$

$$\frac{(A45^2 - A44 A55)(\Gamma_6 - Q6)}{-2 A46 A45 A56 + A46^2 A55 + A45^2 A66 - A44 A55 A66 + A44 A56^2}$$

Dedo Pulgar

$$\begin{aligned}
\ddot{q}_9 &= \frac{(A_{1010} A_{1111} - A_{1011}^2)(\Gamma_9 - Q_9)}{2 A_{911} A_{910} A_{1011} - A_{911}^2 A_{1010} - A_{910}^2 A_{1111} + A_{99} A_{1010} A_{1111} - A_{99} A_{1011}^2} - \\
&\frac{(A_{910} A_{1111} - A_{911} A_{1011})(\Gamma_{10} - Q_{10})}{2 A_{911} A_{910} A_{1011} - A_{911}^2 A_{1010} - A_{910}^2 A_{1111} + A_{99} A_{1010} A_{1111} - A_{99} A_{1011}^2} + \\
&\frac{(A_{910} A_{1011} - A_{911} A_{1010})(\Gamma_{11} - Q_{11})}{2 A_{911} A_{910} A_{1011} - A_{911}^2 A_{1010} - A_{910}^2 A_{1111} + A_{99} A_{1010} A_{1111} - A_{99} A_{1011}^2} \\
\ddot{q}_{10} &= -\frac{(A_{910} A_{1111} - A_{911} A_{1011})(\Gamma_9 - Q_9)}{2 A_{911} A_{910} A_{1011} - A_{911}^2 A_{1010} - A_{910}^2 A_{1111} + A_{99} A_{1010} A_{1111} - A_{99} A_{1011}^2} + \\
&\frac{(-A_{911}^2 + A_{99} A_{1111})(\Gamma_{10} - Q_{10})}{2 A_{911} A_{910} A_{1011} - A_{911}^2 A_{1010} - A_{910}^2 A_{1111} + A_{99} A_{1010} A_{1111} - A_{99} A_{1011}^2} - \\
&\frac{(A_{99} A_{1011} - A_{911} A_{910})(\Gamma_{11} - Q_{11})}{2 A_{911} A_{910} A_{1011} - A_{911}^2 A_{1010} - A_{910}^2 A_{1111} + A_{99} A_{1010} A_{1111} - A_{99} A_{1011}^2} \\
\ddot{q}_{11} &= \frac{(A_{910} A_{1011} - A_{911} A_{1010})(\Gamma_9 - Q_9)}{2 A_{911} A_{910} A_{1011} - A_{911}^2 A_{1010} - A_{910}^2 A_{1111} + A_{99} A_{1010} A_{1111} - A_{99} A_{1011}^2} - \\
&\frac{(A_{99} A_{1011} - A_{911} A_{910})(\Gamma_{10} - Q_{10})}{2 A_{911} A_{910} A_{1011} - A_{911}^2 A_{1010} - A_{910}^2 A_{1111} + A_{99} A_{1010} A_{1111} - A_{99} A_{1011}^2} + \\
&\frac{(-A_{910}^2 + A_{99} A_{1010})(\Gamma_{11} - Q_{11})}{2 A_{911} A_{910} A_{1011} - A_{911}^2 A_{1010} - A_{910}^2 A_{1111} + A_{99} A_{1010} A_{1111} - A_{99} A_{1011}^2}
\end{aligned}$$

(1.48)

Capítulo 2

Diseño y simulación de controladores

2.1. Control de movimientos

La idea del control de movimiento es garantizar el mínimo error en el seguimiento de consignas de movimiento. En el caso del control de movimiento de la mano robot esto significa obtener una posición de los dedos de la mano específica para cada una de las primitivas motoras (consignas de movimiento), donde dichas primitivas dependen de la forma del objeto.

El control de robots manipuladores ha sido el objeto de numerosos trabajos [1], [12], [13], [14], [15], [16] y los principales ejemplos de control son los siguientes [9]:

1. Control clásico de tipo PID.
2. Control por par calculado.

La dinámica de un robot manipulador en su forma compacta puede ser representada como:

$$\Gamma = A(q)\ddot{q} + H(q, \dot{q}), \quad (2.1)$$

donde

Γ vector $n \times 1$ de los torques articulares,

A matriz $n \times n$ de inercia del robot,

H matriz de fuerzas centrífugas, Coriolis y de gravedad,

\ddot{q} vector $n \times 1$ de aceleraciones articulares.

A continuación se presentan dos de los tipos de control que serán utilizados en la aplicación de control de posición para la mano robot, dada su sencillez y amplia difusión en las aplicaciones robóticas.

Control PID

Es el control de mayor aplicación en los robots industriales actuales, el mecanismo es considerado como un sistema lineal y cada una de sus articulaciones es gobernada por un control descentralizado de tipo PID. Su ventaja es la facilidad de implementación y el bajo costo de cálculo matemático, pero presenta problemas de precisión de movimientos rápidos. El esquema de la Figura 2.1 muestra este tipo de control.

La ley de control está dada por:

$$\Gamma = K_p(q^d - q) + K_v(\dot{q}^d - \dot{q}) + K_i \int (q^d - q) d\tau, \quad (2.2)$$

donde \dot{q}^d , q^d son las velocidades y la posiciones deseadas en el espacio articular, \dot{q} y q las velocidades y posiciones articulares medidas, y K_p , K_v y K_i son matrices correspondientes a las ganancias proporcionales, derivativas e

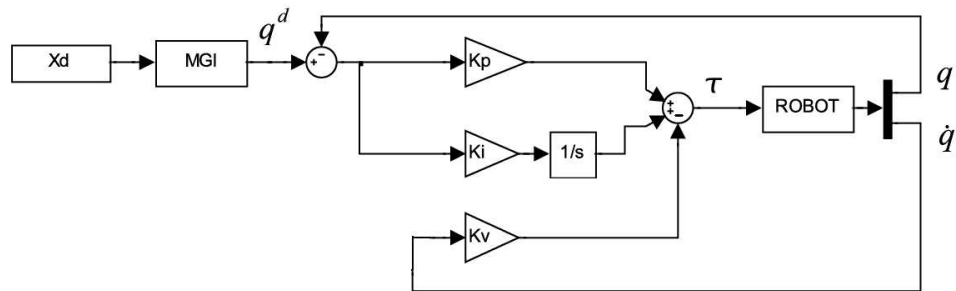


Figura 2.1: Esquema clásico de un control PID

integrales, respectivamente.

Control por par calculado

Dado que en la práctica se exigen evoluciones rápidas del robot con una gran precisión dinámica, es necesario utilizar un sistema de control más sofisticado que permita contar con la mayor parte de las fuerzas de interacción dinámica [9], [17]. La utilización del control por par calculado constituye una excelente solución teórica ya que este tipo de control asegura el desacople y la linealización de las ecuaciones del modelo las cuales son no lineales y acopladas. Este método sin embargo exige el cálculo del modelo dinámico en línea y el conocimiento de los valores numéricos de parámetros inerciales y de frotamiento, pero el problema del cálculo en línea está resuelto prácticamente con los métodos de modelización ya mencionados en la sección 1.5.3. El esquema de la Figura 2.2 muestra el modelo general del control por par calculado.

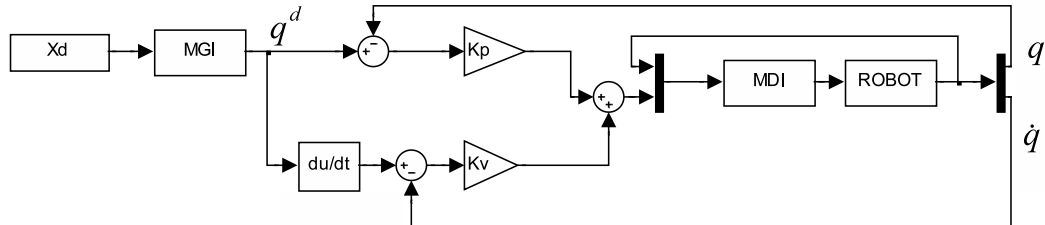


Figura 2.2: Esquema de un control por par calculado

2.1.1. Control Articular de la mano robótica

Para realizar el control de posición de la mano se procedió a controlar cada una de las articulaciones para el seguimiento de determinadas consignas articulares las cuales representan cierta posición deseada. El algoritmo implementado es el control por par calculado [9],[18].

Control por par calculado

La idea central del control por par calculado¹ es transformar la dinámica no-lineal del robot a una lineal que permita que técnicas lineales sean aplicadas [17]. En este trabajo la técnica lineal aplicada es el control proporcional derivativo o PD.

En la sección 1.5.3 se enunció la expresión para el modelo matemático de la mano como (2.1), que para esta aplicación en particular se reduce a la ecuación (1.38).

El control por par calculado se basa en lo siguiente: Para la implementación de este tipo de control se consideró un sistema no lineal descrito por $x_n = f(x) + b(x)u$, con x como la salida, y u como la entrada, el vector $x = [x, \dot{x}, \dots, x^{n-1}]^T$ es el vector de estado y $f(x)$ una función no lineal. Se puede apreciar que no existen derivadas de la entrada y el sistema puede describirse

¹CTC: Computed Torque Control

en la forma compañera:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ f(x) + b(x)u \end{pmatrix},$$

Si se define $u = \frac{1}{b(x)}(W - f(x))$, con W como una nueva entrada entonces:

$$x^n = f(x) + b(x)u = f(x) + b(x)\frac{1}{b(x)}(W - f(x)), \quad (2.3)$$

y la $n - \text{ésima}$ derivada de x es:

$$x^n = W \quad (2.4)$$

con lo cual se tiene un sistema equivalente linealizado al cual se puede aplicar una técnica de control lineal.

Para el robot se tiene que la $n - \text{ésima}$ derivada es:

$$\ddot{q} = A^{-1}(\Gamma - Q) = A^{-1}\Gamma - A^{-1}Q \quad (2.5)$$

donde: $\ddot{q} = x^n$, $\Gamma = u$, $A^{-1} = b(x)$ y $-A^{-1}Q = f(x)$.

Aplicando lo anterior al robot se tiene:

$$\ddot{q} = W, \quad (2.6)$$

donde W es el nuevo vector de control y \ddot{q} es el vector de aceleraciones articulares.

Al aplicar una técnica de control lineal como la PD es posible escribir W como:

$$W = K_p(q^d - q) + K_v(\dot{q}^d - \dot{q}), \quad (2.7)$$

donde q^d y \dot{q}^d son las posiciones y velocidades articulares deseadas, q y \dot{q} son las posiciones y velocidades articulares medidas y K_p , K_v son las ganancias proporcionales y derivativas, respectivamente.

De (2.6) y (2.7) la ecuación de lazo cerrado es:

$$\ddot{q} + K_v\dot{q} + K_pq = K_pq^d, \quad (2.8)$$

lo cual describe un sistema lineal.

El esquema del control por par calculado es indicado por (2.7) y se muestra en la figura 2.3.

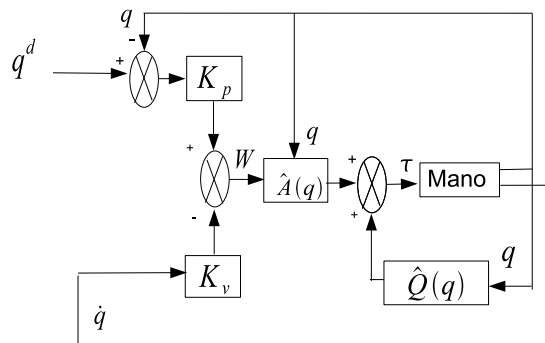


Figura 2.3: Control por par calculado en el espacio articular

Implementando en el software Matlab/Simulink, este controlador se traduce operativamente en el esquema mostrado en la Figura 2.4. El cuadro B.1 muestra el valor de las consignas articulares, en tanto que el cuadro B.2 las ganancias proporcional K_p y derivativa K_v para cada articulación. El resultado de la implementación del controlador está reflejado en la magnitud del error de seguimiento (ver figura 3.2).

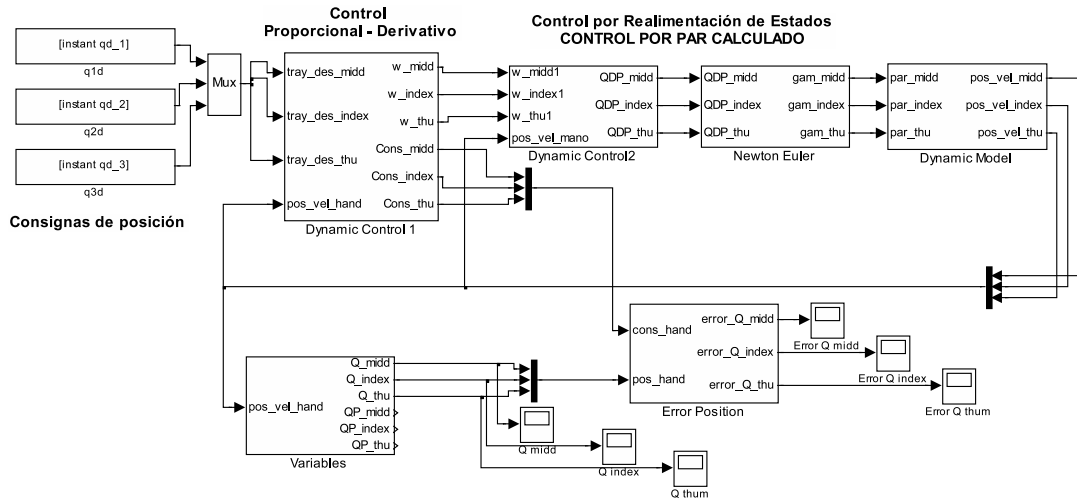


Figura 2.4: Esquema implementado en Matlab/Simulink

q_1^d	q_2^d	q_3^d	q_4^d	q_5^d	q_6^d	q_7^d	q_8^d	q_9^d
86°	74°	57°	86°	74°	57°	86°	74°	57°

Cuadro 2.1: Consignas articulares

j	1	2	3	4	5	6	7	8	9
K_p	1.6e6	1.2e6	1.2e5	1.6e6	1.2e6	1.2e5	0.8e6	1.0e6	1.0e5
K_v	2e3	2e3	2e3	2e3	2e3	2e3	2e3	2e3	2e3

Cuadro 2.2: Ganancias del controlador

2.2. Control de fuerza

En una tarea realizada por una mano robot en primera medida se debe asegurar el ubicar el efector final en una posición deseada, minimizando el error de posición independientemente del origen de cualquier perturbación. Sin embargo en el instante en el que el manipulador entra en interacción con un objeto es prioritario asegurar la minimización del error con respecto a ciertas consignas de fuerza, lo cual permite el control de sujeción o de contacto con dicho objeto.

Para tal acción cobra relevancia el control de fuerza [9]. Dos aproximaciones son posibles para el control de un robot en contacto:

1. El robot está trabajando en posición sin recibir consignas de fuerza (este caso ya se abordó en la sección la sección 1.5.3).
2. El robot está equipado de un sensor de fuerza y está trabajando con control de fuerza y posición.

Es de interés la segunda aproximación ya que es necesario controlar la fuerza de contacto entre los dedos de la mano robot y la superficie de los objetos, haciendo uso de las señales proporcionadas por sensores de fuerza en la terminación de los dedos, análogamente a como lo haría una mano humana. De manera preliminar se proponen unas estructuras de control con consignas de fuerza y de posición (híbrido), ya que el problema radica en realizar dos acciones: ubicar los dedos en las posiciones deseadas según el tipo de agarre (consignas de posición) y posteriormente entrar en contacto con el objeto controlando la fuerza (consignas de fuerza).

Antes del desarrollo de los esquemas de control es prudente explicar algunos de los pasos involucrados en la manipulación.

Entre los pasos de manipulación del objeto se tiene [19]:

planning (planeación del acercamiento)

approach (acercamiento al objeto)

grasping (ubicación de los dedos en la posición de agarre)

gripping (sujeción del objeto)

lifting (levantamiento del objeto)

transferring (transferencia del objeto)

lowering (descenso)

releasing (relajamiento)

withdrawing (alejamiento del objeto)

En un estado de aproximación o *planning*, trayectorias libres son seleccionadas para cada dedo con el fin de evitar una colisión durante el movimiento y debe de anticiparse el contacto con el objeto (trayectorias diferentes deben ser planeadas para un nuevo objeto), si el agarre inicia sin la acción sincronizada de todos los dedos se puede generar un desplazamiento incontrolado del objeto, para prevenir esto es necesario asegurarse un punto final del estado de *grasping* cuando todos los dedos se han acercado al objeto.

En el paso de *gripping* las correspondientes fuerzas son establecidas entre las puntas de los dedos y el objeto, las fuerzas de *gripping* son fuerzas internas del sistema, sistema que esta constituido por los dedos de la mano y el objeto. Esas fuerzas de levantamiento son la consecuencia de desplazamientos elásticos o plásticos de la estructura del objeto y los dedos robots.

Los pasos de: levantamiento (*lifting*), desplazamiento (*transferring*) y descenso (*lowering*), asumen el movimiento en un macroespacio, por lo cual el peso del objeto y todas las fuerzas producidas por el movimiento del objeto/dedos manipulador son asumidas por la mano. En el caso del movimiento las fuerzas inerciales no son considerablemente despreciables con respecto a las otras cargas.

El paso de *transferring* consiste en el movimiento del objeto a lo largo de una trayectoria con una orientación determinada, la mano robot mueve el objeto pero las fuerzas deben cumplir las necesidades de cargas del *gripping*.

La manipulación del objeto concluye cuando este se encuentra situado en la posición deseada, es aquí cuando se presenta el paso de *lowering* en el cual se deja de ejercer fuerza sobre el objeto y los dedos se mueven hasta una posición relajada lejos del objeto.

2.2.1. Bases del control explícito de fuerza

El control de fuerza basado en el control explícito de fuerza; compara la señal de referencia con la señal medida lo cual proporciona una señal de control para el robot. El diagrama general se representa en la figura 2.5

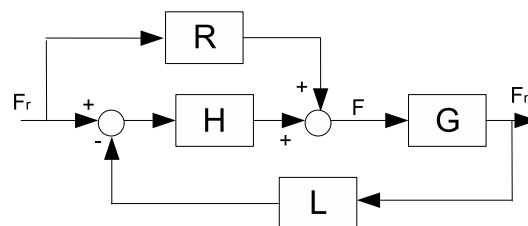


Figura 2.5: Diagrama de bloques de un control explícito de fuerza

Donde G es la planta, H es el controlador y L es un filtro de realimentación de fuerza (que para esta primera aplicación se considerará igual a 1). El control H suele ser un subgrupo de los controles PID (P, I, PD).

Estrategias de control explícito de fuerza

La fuerza ejercida a los objetos por parte de la mano robot es en resumen el resultado del torque efectuado por los motores en cada una de las articulaciones, de manera que para el control de fuerza la señal de control debe ser representada por un valor de par deseado, y la fuerza medida es una cantidad arrojada por los sensores de fuerza del robot.

Los pares de fuerza Γ controlados en los esquemas son obtenidos de la transpuesta de la Jacobiana J^T y la fuerza f [9] de la forma:

$$\Gamma = J^T f \quad (2.9)$$

A continuación se muestra las expresiones correspondientes a algunas combinaciones de control PID, donde f_r es la fuerza referencia, f_m la fuerza medida, f es la señal de control, \dot{X}_m es la velocidad cartesiana medida, K_{fp} ganancia de fuerza proporcional, K_{fi} ganancia de fuerza integral, K_v ganancia de velocidad para el amortiguamiento activo.

Control Proporcional:

$$f = f_r + K_{fp}(f_r - f_m) - K_v \dot{X}_m \quad (2.10)$$

Control Integral:

$$f = K_{fi} \int (f_r - f_m) dt - K_v \dot{X}_m \quad (2.11)$$

Control Proporcional Integrativo:

$$f = K_{fp}(f_r - f_m) + K_{fi} \int (f_r - f_m) dt - K_v \dot{X}_m \quad (2.12)$$

Control Proporcional Derivativo:

$$f = f_r + K_{fp}(f_r - f_m) + K_{fd} \frac{d}{dt}(f_r - f_m) - K_v \dot{X}_m \quad (2.13)$$

Implementación control explícito de fuerza

Se propone inicialmente un control explícito de fuerza haciendo las siguientes suposiciones:

1. La mano se encuentra moviéndose en el espacio libre hasta posicionarse con los valores articulares correspondientes al agarre necesario para sujetar el objeto y el control de posición se encuentra operando.
2. La mano entra en contacto con el objeto, el sensor de proximidad selecciona la operación del control de fuerza, el control de posición es desactivado y se efectúa un control de fuerza.

Bajo las anteriores suposiciones se propone como primer control de prueba el control explícito de torque proporcional.

Control proporcional

La forma exacta de la ley de control es:

$$\Gamma = J^T \left[f_r + K_{fp}(f_r - f_m) + K_v \dot{X}_m \right], \quad (2.14)$$

donde J^T es la jacobiana de la mano robot, f_r la fuerza deseada, f_m la fuerza medida por los sensores de fuerza ubicados en los dedos \dot{X}_m la velocidad cartesiana medida, K_{fp} la ganancia proporcional de fuerza y K_v ganancia de velocidad [20].

2.2.2. Estructuras de control con consignas de fuerza: Control fuerza/posición

Los esquemas de control híbrido suelen tener dos bucles de control paralelos, uno para la posición y otro para la fuerza, pero de hecho cada articulación contribuye a la vez a la realización del control en posición y del control en

fuerza, las salidas de esos bucles son sumadas antes de ser enviadas al robot bajo la forma de un vector de control global G [21]. Es de recordar que el control de posición genera una orden de par a cada uno de los actuadores de las articulaciones para garantizar el seguimiento de las consignas de posición. Pero de manera similar el control de fuerza impone una orden de par en los actuadores para garantizar el seguimiento de las consignas de fuerza. La acción simultánea de los dos controles puede generar conflicto, dado que dos tipos diferentes de acción se están ordenando a los mismos actuadores. Para evitar antagonismo entre los controles se suele usar una matriz de selección diagonal frecuentemente llamada S , la cual permite elegir el tipo de control ya sea de posición o fuerza [9]. El esquema de la Figura 2.6 muestra la implementación de un control híbrido fuerza y posición.

Donde

S : Es una matriz de selección para evitar el conflicto entre los controles

G : Es el vector de control global

I : Matriz identidad.

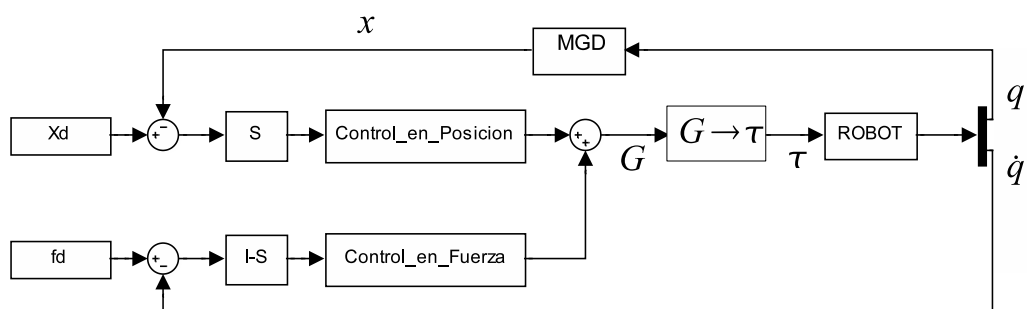


Figura 2.6: Esquema general del control fuerza - posición

En la sección anterior se consideró un control explícito en el cual la fuerza aplicada se obtenía a partir de la simulación de una medición de fuerza en la punta de los dedos. En esta sección se mostrará la implementación del control

de fuerza considerando que la fuerza es estimada, no medida.

En la mano robot se tiene control sobre los actuadores y por consiguiente son los torques de las articulaciones los encargados de realizar los movimientos de cada falange, pero en la manipulación habitual es necesario aplicar ciertas fuerzas al objeto (fuerzas deseadas) que deben ser traducidas al lenguaje de los actuadores (Torque), la figura 2.7 muestra el caso en el cual es aplicada una fuerza con la punta de los dedos a un objeto.

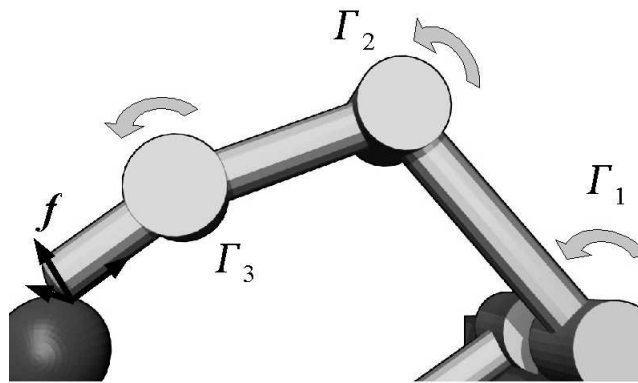


Figura 2.7: Fuerza aplicada a un objeto

Para desarrollar la dinámica de una variable $X(t)$ en el espacio cartesiano en relación a variables $q(t)$ en el espacio articular [22], se debe tener en cuenta que existe una relación de la forma:

$$X(t) = \varphi(q(t)) \quad (2.15)$$

donde $\varphi(q(t))$ es generalmente una transformación no lineal. Si ahora la ecuación (2.15) es derivada con respecto al tiempo, se tiene:

$$\frac{dX(t)}{dt} = \frac{\partial \varphi(q(t))}{\partial q(t)} \frac{dq(t)}{dt} \quad (2.16)$$

donde $\frac{\partial \varphi(q(t))}{\partial q(t)}$ corresponde a la matriz Jacobiana

$$J = \frac{\partial \varphi(q)}{\partial q}, \quad (2.17)$$

donde $\varphi(q)$ corresponde a las posiciones cartesianas de la punta de los dedos. De esta manera la ecuación (2.16) se expresa como:

$$dX(t) = Jdq(t) \quad (2.18)$$

Para encontrar la transformación de fuerzas estáticas entre frames coordenados se recurre al principio de trabajo virtual [22].

Se debe tener en cuenta que el trabajo realizado por un torque τ al recorrer un ángulo q es equivalente a:

$$W = \tau * q, \quad (2.19)$$

si de la ecuación (2.19) se considera un trabajo muy pequeño realizado con un movimiento casi infinitesimal se tiene:

$$\delta W = \tau * dq, \quad (2.20)$$

donde τ es el vector de control de torques/fuerza y $dq = [dq_1, dq_2, dq_3]$ para cada uno de los dedos de la mano robot.

Si se describe el mismo trabajo infinitesimal en coordenadas cartesianas el trabajo virtual se expresa como

$$\delta W = F^T dX, \quad (2.21)$$

donde el término dX esta definido en la ecuación (2.18), sustituyendo (2.18) en la ecuación (2.20) el trabajo virtual es

$$\delta W = \tau^T dq = F^T Jdq, \quad (2.22)$$

según la ecuación (2.22) la transformación de fuerza a torques es sintetizada a

$$\tau = J^T F, \quad (2.23)$$

de esta manera las fuerzas generalizadas en el espacio cartesiano es un vector compuesto de seis elementos

$$F = \begin{pmatrix} f_c \\ \tau_c \end{pmatrix} \quad (2.24)$$

con $f_c = [f_x, f_y, f_z]^T$ como vector de fuerzas cartesianas y $\tau_c = [\tau_x, \tau_y, \tau_z]^T$ como vector de torques cartesianos, en donde τ_x representa el torque ejercido alrededor del eje x. En este trabajo se tendra en cuenta solo el vector f_c dado que realizaremos un análisis de equilibrio estático en el agarre del objeto y la simetría del agarre no permite equilibrio rotacional.

En el caso de la mano robot para cada uno de los dedos las funciones $\varphi(q)$ corresponden a las posiciones cartesianas las cuales se pueden obtener de la cuarta columna de las matrices de transformación ${}^0T_{3E}$, ${}^0T_{6E'}$ y ${}^0T_{11E''}$ (ver sección 1.5.1):

Dedo medio:

$$\varphi_{mid}(q) = \begin{pmatrix} \varphi_{xmidd} \\ \varphi_{ymidd} \\ \varphi_{zmidd} \end{pmatrix} \quad (2.25)$$

donde:

$$\begin{aligned} \varphi_{xmidd} &= 0 \\ \varphi_{ymidd} &= -C_{12}S_3D_4 - S_{12}C_3D_4 - S_{12}D_3 - S_1D_2 \\ \varphi_{zmidd} &= -S_{12}S_3D_4 + C_{12}C_3D_4 + C_{12}D_3 + C_1D_2 \end{aligned} \quad (2.26)$$

Dedo Indice:

$$\varphi_{ind}(q) = \begin{pmatrix} \varphi_{xind} \\ \varphi_{yind} \\ \varphi_{zind} \end{pmatrix} \quad (2.27)$$

donde:

$$\begin{aligned}
 \varphi_{xind} &= R_5 \\
 \varphi_{yind} &= -C_{56}C_7D_8 - S_{56}S_7D_8 - S_{56}D_7 - S_5D_6 \\
 \varphi_{zind} &= -S_{56}C_7D_8 + C_{56}S_7D_8 + C_{56}D_7 + C_5D_6
 \end{aligned} \tag{2.28}$$

Dedo Pulgar:

$$\varphi_{ind}(q) = \begin{pmatrix} \varphi_{xpul} \\ \varphi_{ypul} \\ \varphi_{zpul} \end{pmatrix} \tag{2.29}$$

donde:

$$\begin{aligned}
 \varphi_{xpul} &= (-(-AC_{10} + AC_9S_{10})S_{11} + (AS_{10} + AC_9C_{10})C_{11})D_{12} + \\
 &\quad (AS_{10} + AC_9C_{10})D_{11} + AC_9D_{10} - x_2 \\
 \varphi_{ypul} &= (S_9C_{1011})D_{12} - S_9C_{10}D_{11} - S_9D_{10} \\
 \varphi_{zpul} &= (- (AC_{10} + AC_9S_{10})S_{11} + (-AS_{10} + AC_9C_{10})C_{11})D_{12} + \\
 &\quad (-AS_{10} + AC_9C_{10})D_{11} + AC_9D_{10} - x_1
 \end{aligned} \tag{2.30}$$

De esta manera el cálculo de la Jacobiana para determinado dedo es:

$$J_{dedo} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_{xdedo}(q)}{\partial q} \\ \frac{\partial \varphi_{ydedo}(q)}{\partial q} \\ \frac{\partial \varphi_{zdedo}(q)}{\partial q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_{xdedo}(q)}{\partial q_1} & \frac{\partial \varphi_{xdedo}(q)}{\partial q_2} & \frac{\partial \varphi_{xdedo}(q)}{\partial q_3} \\ \frac{\partial \varphi_{ydedo}(q)}{\partial q_1} & \frac{\partial \varphi_{ydedo}(q)}{\partial q_2} & \frac{\partial \varphi_{ydedo}(q)}{\partial q_3} \\ \frac{\partial \varphi_{zdedo}(q)}{\partial q_1} & \frac{\partial \varphi_{zdedo}(q)}{\partial q_2} & \frac{\partial \varphi_{zdedo}(q)}{\partial q_3} \end{pmatrix} \tag{2.31}$$

Las singularidades de la Jacobiana ocurre generalmente en las extremidades del espacio de trabajo de los dedos por lo cual se aplicó una pequeña restricción en los valores límites de los ángulos en el cálculo de la Jacobiana para evitar el impacto de estas singularidades en la simulación. El desarrollo matemático y la forma de la jacobiana puede verse en el apéndice 2.2.2, en tanto que las ecuaciones para los pares articulares y las fuerzas los cuales son implementados en Simulink se muestran en el apéndice 2.2.2

Cálculo de la Jacobiana

1. Cálculo de la Jacobiana del dedo medio

De esta manera el cálculo de la Jacobiana para el dedo medio es:

$$J_{midd} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_{xmidd}(q)}{\partial q} \\ \frac{\partial \varphi_{ymidd}(q)}{\partial q} \\ \frac{\partial \varphi_{zmidd}(q)}{\partial q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_{xmidd}(q)}{\partial q_1} & \frac{\partial \varphi_{xmidd}(q)}{\partial q_2} & \frac{\partial \varphi_{xmidd}(q)}{\partial q_3} \\ \frac{\partial \varphi_{ymidd}(q)}{\partial q_1} & \frac{\partial \varphi_{ymidd}(q)}{\partial q_2} & \frac{\partial \varphi_{ymidd}(q)}{\partial q_3} \\ \frac{\partial \varphi_{zmidd}(q)}{\partial q_1} & \frac{\partial \varphi_{zmidd}(q)}{\partial q_2} & \frac{\partial \varphi_{zmidd}(q)}{\partial q_3} \end{pmatrix} \quad (2.32)$$

y sus componentes teniendo en cuenta las relaciones 2.26 son:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_{xmidd}(q)}{\partial q_1} &= 0 \\ \frac{\partial \varphi_{xmidd}(q)}{\partial q_2} &= 0 \\ \frac{\partial \varphi_{xmidd}(q)}{\partial q_3} &= 0 \\ \frac{\partial \varphi_{ymidd}(q)}{\partial q_1} &= S_{12}S_3D_4 - C_{12}C_3D_4 - C_{12}D_3 - C_1D_2 \\ \frac{\partial \varphi_{ymidd}(q)}{\partial q_2} &= S_{12}S_3D_4 - C_{12}C_3D_4 - C_{12}D_3 \\ \frac{\partial \varphi_{ymidd}(q)}{\partial q_3} &= -C_{12}C_3D_4 + S_{12}S_3D_4 \\ \frac{\partial \varphi_{zmidd}(q)}{\partial q_1} &= -C_{12}S_3D_4 - S_{12}C_3D_4 - S_{12}D_3 - S_1D_2 \\ \frac{\partial \varphi_{zmidd}(q)}{\partial q_2} &= -C_{12}S_3D_4 - S_{12}C_3D_4 - S_{12}D_3 \\ \frac{\partial \varphi_{zmidd}(q)}{\partial q_3} &= -S_{12}C_3D_4 - C_{12}S_3D_4 \end{aligned}$$

2. Cálculo de la Jacobiana del dedo índice

De esta manera el cálculo de la Jacobiana para el dedo índice es:

$$J_{ind} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_{xind}(q)}{\partial q} \\ \frac{\partial \varphi_{yind}(q)}{\partial q} \\ \frac{\partial \varphi_{zind}(q)}{\partial q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_{xind}(q)}{\partial q_4} & \frac{\partial \varphi_{xind}(q)}{\partial q_5} & \frac{\partial \varphi_{xind}(q)}{\partial q_6} \\ \frac{\partial \varphi_{yind}(q)}{\partial q_4} & \frac{\partial \varphi_{yind}(q)}{\partial q_5} & \frac{\partial \varphi_{yind}(q)}{\partial q_6} \\ \frac{\partial \varphi_{zind}(q)}{\partial q_4} & \frac{\partial \varphi_{zind}(q)}{\partial q_5} & \frac{\partial \varphi_{zind}(q)}{\partial q_6} \end{pmatrix} \quad (2.33)$$

y sus componentes teniendo en cuenta las relaciones 2.28 son:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \varphi_{xind}(q)}{\partial q_4} &= 0 \\
\frac{\partial \varphi_{xind}(q)}{\partial q_5} &= 0 \\
\frac{\partial \varphi_{xind}(q)}{\partial q_6} &= 0 \\
\frac{\partial \varphi_{yind}(q)}{\partial q_4} &= S_{45}S_6D_7 - C_{45}C_6D_7 - C_{45}D_6 - C_4D_5 \\
\frac{\partial \varphi_{yind}(q)}{\partial q_5} &= S_{45}S_6D_7 - C_{45}C_6D_7 - C_{45}D_6 \\
\frac{\partial \varphi_{yind}(q)}{\partial q_6} &= -C_{45}C_6D_7 + S_{45}S_6D_7 \\
\frac{\partial \varphi_{zind}(q)}{\partial q_4} &= -C_{45}S_6D_7 - S_{45}C_6D_7 - S_{45}D_6 - S_4D_5 \\
\frac{\partial \varphi_{zind}(q)}{\partial q_5} &= -C_{45}S_6D_7 - S_{45}C_6D_7 - S_{45}D_6 \\
\frac{\partial \varphi_{zind}(q)}{\partial q_6} &= -S_{45}C_6D_7 - C_{45}S_6D_7
\end{aligned}$$

3. Cálculo de la Jacobiana del dedo pulgar

De esta manera el cálculo de la Jacobiana para el dedo pulgar teniendo en cuenta las relaciones (2.29) es:

$$J_{ind} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_{xpul}(q)}{\partial q} \\ \frac{\partial \varphi_{ypul}(q)}{\partial q} \\ \frac{\partial \varphi_{zpul}(q)}{\partial q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_{xpul}(q)}{\partial q_9} & \frac{\partial \varphi_{xpul}(q)}{\partial q_{10}} & \frac{\partial \varphi_{xpul}(q)}{\partial q_{11}} \\ \frac{\partial \varphi_{ypul}(q)}{\partial q_9} & \frac{\partial \varphi_{ypul}(q)}{\partial q_{10}} & \frac{\partial \varphi_{ypul}(q)}{\partial q_{11}} \\ \frac{\partial \varphi_{zpul}(q)}{\partial q_9} & \frac{\partial \varphi_{zpul}(q)}{\partial q_{10}} & \frac{\partial \varphi_{zpul}(q)}{\partial q_{11}} \end{pmatrix} \quad (2.34)$$

y sus componentes son:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \varphi_{xpul}(q)}{\partial q_9} &= AS_9S_{10}S_{11} - AS_9C_{10}C_{11})D_{12} - \\
&\quad AS_9C_{10}D_{11} - AS_9D_{10} \\
\frac{\partial \varphi_{xpul}(q)}{\partial q_{10}} &= -(AS_{10} + AC_9C_{10})S_{11} + (AC_{10} - \\
&\quad AC_9S_{10})C_{11})D_{12} + (AC_{10} - AC_9S_{10})D_{11} \\
\frac{\partial \varphi_{xpul}(q)}{\partial q_{11}} &= (-(-AC_{10} + AC_9S_{10})C_{11} - \\
&\quad (AS_{10} + AC_9C_{10})S_{11})D_{12} \\
\frac{\partial \varphi_{ypul}(q)}{\partial q_9} &= C_9C_{1011}D_{12} - \\
&\quad C_9C_{10}D_{11} - C_9D_{10} \\
\frac{\partial \varphi_{ypul}(q)}{\partial q_{10}} &= -S_9S_{1011}D_{12} + S_9S_{10}D_{11}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \varphi_{ypul}(q)}{\partial q_{11}} &= -S_9 S_{1011} D_{12} \\ \frac{\partial \varphi_{zpul}(q)}{\partial q_9} &= (AS_9 S_{10} S_{11} - AS_9 C_{10} C_{11}) D_{12} - \\ &\quad AS_9 C_{10} D_{11} - AS_9 D_{10}, \\ \frac{\partial \varphi_{zpul}(q)}{\partial q_{10}} &= (-(-AS_{10} + AC_9 C_{10}) S_{11} + (-AC_{10} - AC_9 S_{10}) C_{11}) D_{12} + \\ &\quad (-AC_{10} - AC_9 S_{10}) D_{11} \\ \frac{\partial \varphi_{zpul}(q)}{\partial q_{11}} &= -(AC_{10} + AC_9 S_{10}) C_{11} - \\ &\quad (-AS_{10} + AC_9 C_{10}) S_{11}) D_{12}\end{aligned}$$

Cálculo de los torques

Para determinar los pares articulares necesarios para realizar un fuerza \mathbf{F} en la punta de los dedos se parte de

$$F = \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{pmatrix}, \quad (2.35)$$

se hace uso de la Jacobiana transpuesta de la siguiente forma:

$$\tau = J^T F. \quad (2.36)$$

Segun la ecuación 2.36 para el dedo medio se tiene el siguiente grupo de torques:

$$\begin{aligned}\tau_{1midd} &= (S_{12} S_3 D_4 - C_{12} C_3 D_4 - C_{12} D_3 - C_1 D_2) f_{ymidd} + (-C_{12} S_3 \\ &\quad D_4 - S_{12} C_3 D_4 - S_{12} D_3 - S_1) D_2) f_{zmidd},\end{aligned} \quad (2.37)$$

$$\begin{aligned}\tau_{2midd} &= (S_{12} S_3 D_4 - C_{12} C_3 D_4 - C_{12} D_3) f_{ymidd} + (-C_{12} S_3 D_4 \\ &\quad - S_{12} C_3 D_4 - S_{12} D_3) f_{zmidd},\end{aligned} \quad (2.38)$$

$$\begin{aligned}\tau_{3mid} = & (-C_{12}C_3D_4 + S_{12})S_3D_4)f_{ymid} \\ & + (-S_{12})C_3D_4 - C_{12}S_3D_4)f_{zmid},\end{aligned}\quad (2.39)$$

para el dedo indice:

$$\begin{aligned}\tau_{4ind} = & (S_{45}S_6D_7 - C_{45}C_6D_7 - C_{45}D_6 - C_4D_5)f_{yind} + (-C_{45}S_6 \\ & D_7 - S_{45}C_6D_7 - S_{45}D_6 - S_4)D_5)f_{zind},\end{aligned}\quad (2.40)$$

$$\begin{aligned}\tau_{5ind} = & (S_{45}S_6D_7 - C_{45}C_6D_7 - C_{45}D_6)f_{yind} + (-C_{45}S_6D_7 \\ & - S_{45}C_6D_7 - S_{45}D_6)f_{zind},\end{aligned}\quad (2.41)$$

$$\begin{aligned}\tau_{6ind} = & (-C_{45}C_6D_7 + S_{45})S_6D_7)f_{yind} \\ & + (-S_{45})C_6D_7 - C_{45}S_6D_7)f_{zind},\end{aligned}\quad (2.42)$$

para el dedo pulgar:

$$\begin{aligned}\tau_{7pul} = & \left(\frac{1}{2}AD_{12}\sin(q_{11} - q_9 + q_{10}) - \frac{1}{2}AD_{11}S_{910}\right. \\ & - \frac{1}{2}AD_{11}\sin(q_9 - q_{10}) - AS_9D_{10} - \frac{1}{2}AD_{12}S_{91011})f_{zpul} \\ & + \left(\frac{1}{2}AD_{12}\sin(q_{11} - q_9 + q_{10}) - \frac{1}{2}AD_{11}S_{910}\right. \\ & - \frac{1}{2}AD_{11}\sin(q_9 - q_{10}) - AS_9D_{10} - \frac{1}{2}AD_{12}S_{91011})f_{xpul} + \\ & \left(\frac{1}{2}D_{12}\cos(q_{11} - q_9 + q_{10}) - \frac{1}{2}D_{11}\cos(q_9 - q_{10}) - \right. \\ & \left. \frac{1}{2}D_{11}C_{910} - C_9D_{10} + \frac{1}{2}D_{12}C_{91011})f_{ypul}\right.\end{aligned}\quad (2.43)$$

$$\begin{aligned}
\tau_{8pul} = & (-D_{11}A\cos(q_{10}) - \frac{1}{2}AD_{11}S_{910} + \\
& \frac{1}{2}AD_{11}\sin(q_9 - q_{10}) - \frac{1}{2}AD_{12}\sin(q_{11} - q_9 + q_{10}) - \\
& \frac{1}{2}AD_{12}S_{91011} - AD_{12}C_{1011})f_{zpul} \\
& + (-\frac{1}{2}D_{12}\cos(q_{11} - q_9 + q_{10}) + \frac{1}{2}D_{12}C_{91011} + \\
& \frac{1}{2}D_{11}\cos(q_9 - q_{10}) - \frac{1}{2}D_{11}C_{910})f_{ypul} \\
& + (\frac{1}{2}AD_{11}\sin(q_9 - q_{10}) + D_{11}A\cos(q_{10}) - \\
& \frac{1}{2}AD_{11}S_{910} + AD_{12}C_{1011} - \\
& \frac{1}{2}AD_{12}\sin(q_{11} - q_9 + q_{10}) \\
& - \frac{1}{2}AD_{12}S_{91011})f_{xpul},
\end{aligned} \tag{2.44}$$

$$\begin{aligned}
\tau_{9pul} = & (-\frac{1}{2}AD_{12}S_{91011} - AD_{12}C_{1011} - \\
& \frac{1}{2}AD_{12}\sin(q_{11} - q_9 + q_{10}))f_{zpul} + (-\frac{1}{2}D_{12}\cos(q_{11} - q_9 + q_{10}) \\
& + \frac{1}{2}D_{12}C_{91011})f_{ypul} + (AD_{12}C_{1011} - \\
& \frac{1}{2}AD_{12}\sin(q_{11} - q_9 + q_{10}) - \frac{1}{2}AD_{12}S_{91011})f_{xpul}.
\end{aligned} \tag{2.45}$$

Estimación de la fuerza aplicada en la punta de los dedos

La fuerza puede ser despejada de la ecuación (2.36) de la forma:

$$F = \text{inv}(J^T)\tau \tag{2.46}$$

para el caso del dedo medio e índice la Jacobiana es *no invertible* por lo tanto se resolvió el sistema formado por las ecuaciones (2.37), (2.38), (2.39) para

el dedo medio; (2.40), (2.41), (2.42) para el dedo índice y (2.43), (2.44), (2.45) para el dedo pulgar, el cálculo de las fuerzas se muestra a continuación.

1. *Estimación de la fuerza aplicada en la punta del dedo medio*

$$f_{xmid} = 0 \quad (2.47)$$

$$\begin{aligned} f_{ymid} = & \frac{S_{12}D_3\tau_{1mid} + S_{12}D_3\tau_{3mid} - S_{12}C_3D_4\tau_{2mid}}{(D_3(S_{12}^2S_3D_4 - S_{12}C_1D_2 + C_{12}^2S_3D_4 + S_1D_2C_{12})} \\ & - C_{12}S_3D_4\tau_{2mid}} + \\ & \frac{D_3(S_{12}^2S_3D_4 - S_{12}C_1D_2 + C_{12}^2S_3D_4 + S_1D_2C_{12}) + \\ & C_{12}S_3D_4\tau_{3mid} - S_1D_2\tau_{2mid} + S_{12}C_3D_4\tau_{3mid}}{D_3(S_{12}^2S_3D_4 - S_{12}C_1D_2 + C_{12}^2S_3D_4 + S_1D_2C_{12})} \\ & - S_{12}D_3\tau_{2mid} + S_1D_2\tau_{3mid}}{D_3(S_{12}^2S_3D_4 - S_{12}C_1D_2 + C_{12}^2S_3D_4 + S_1D_2C_{12})} \end{aligned} \quad (2.48)$$

$$\begin{aligned} f_{zmid} = & \frac{-\tau_{2mid}S_{12}S_3D_4 + \tau_{2mid}C_1D_2 + \tau_{3mid}S_{12}S_3D_4}{D_3(S_{12}^2S_3D_4 - S_{12}C_1D_2 + C_{12}^2S_3D_4 + S_1D_2C_{12})} \\ & - \tau_{3mid}C_1D_2} + \\ & \frac{D_3(S_{12}^2S_3D_4 - S_{12}C_1D_2 + C_{12}^2S_3D_4 + S_1D_2C_{12}) + \\ & -C_{12}D_3\tau_{1mid} - C_{12}D_3\tau_{3mid} + C_{12}C_3D_4\tau_{2mid}}{D_3(S_{12}^2S_3D_4 - S_{12}C_1D_2 + C_{12}^2S_3D_4 + S_1D_2C_{12})} + \\ & \frac{-C_{12}C_3D_4\tau_{3mid} + C_{12}D_3\tau_{2mid}}{D_3(S_{12}^2S_3D_4 - S_{12}C_1D_2 + C_{12}^2S_3D_4 + S_1D_2C_{12})} \end{aligned} \quad (2.49)$$

2. *Estimación de la fuerza aplicada en la punta del dedo índice*

$$f_{xind} = 0 \quad (2.50)$$

$$\begin{aligned}
f_{yind} = & \frac{S_{45}D_6\tau_{4ind} + S_{45}D_6\tau_{6ind} - S_{45}C_6D_7\tau_{5ind} - C_{45}S_6D_7\tau_{5ind}}{(D_6(S_{45}^2S_6D_7 - S_{45}C_4D_5 + C_{45}^2S_6D_7 + S_4D_5C_{45}))} + \\
& \frac{C_{45}S_6D_7\tau_{6ind} - S_4D_5\tau_{5ind} + S_{45}C_6D_7\tau_{6ind}}{(D_6(S_{45}^2S_6D_7 - S_{45}C_4D_5 + C_{45}^2S_6D_7 + S_4D_5C_{45}))} + \\
& \frac{-S_{45}D_6\tau_{5ind} + S_4D_5\tau_{6ind}}{(D_6(S_{45}^2S_6D_7 - S_{45}C_4D_5 + C_{45}^2S_6D_7 + S_4D_5C_{45}))}
\end{aligned} \tag{2.51}$$

$$\begin{aligned}
f_{zind} = & \frac{-\tau_{5ind}S_{45}S_6D_7 + \tau_{5ind}C_4D_5 + \tau_{6ind}S_{45}S_6D_7 - \tau_{6ind}C_4D_5}{D_6(S_{45}^2S_6D_7 - S_{45}C_4D_5 + C_{45}^2S_6D_7 + S_4D_5C_{45})} + \\
& \frac{-C_{45}D_6\tau_{4ind} - C_{45}D_6\tau_{6ind} + C_{45}C_6D_7\tau_{5ind}}{D_6(S_{45}^2S_6D_7 - S_{45}C_4D_5 + C_{45}^2S_6D_7 + S_4D_5C_{45})} + \\
& \frac{-C_{45}C_6D_7\tau_{6ind} + C_{45}D_6\tau_{5ind}}{D_6(S_{45}^2S_6D_7 - S_{45}C_4D_5 + C_{45}^2S_6D_7 + S_4D_5C_{45})}
\end{aligned} \tag{2.52}$$

3. Estimación de la fuerza aplicada en la punta del dedo pulgar

El torque necesario para aplicar la fuerza en la punta del dedo pulgar cuyas componentes cartesianas son f_{xpul} , f_{ypul} , f_{zpul} , esta determinado por la siguiente expresión:

$$\begin{aligned}
\tau_{7pul} &= B f_{xpul} + C f_{ypul} + B f_{zpul}, \\
\tau_{8pul} &= E f_{xpul} + L f_{ypul} + M f_{zpul}, \\
\tau_{9pul} &= N f_{xpul} + O f_{ypul} + P f_{zpul},
\end{aligned} \tag{2.53}$$

donde:

$$\begin{aligned}
B &= \left(\frac{1}{2}AD_{12}\sin(q_{11} - q_9 + q_{10}) \right. \\
&\quad - \frac{1}{2}AD_{11}\sin(q_9 + q_{10}) - \\
&\quad \frac{1}{2}AD_{11}\sin(q_9 - q_{10}) - A\sin(q_9)D_{10} \\
&\quad \left. - \frac{1}{2}AD_{12}\sin(q_{11} + q_9 + q_{10}), \right. \\
C &= \left(\frac{1}{2}D_{12}\cos(q_{11} - q_9 + q_{10}) \right. \\
&\quad - \frac{1}{2}D_{11}\cos(q_9 - q_{10}) - \\
&\quad \frac{1}{2}D_{11}\cos(q_9 + q_{10}) - \cos(q_9)D_{10} \\
&\quad \left. + \frac{1}{2}D_{12}\cos(q_{11} + q_9 + q_{10}), \right) \\
E &= \left(\frac{1}{2}AD_{11}\sin(q_9 - q_{10}) + D_{11}A\cos(q_{10}) \right. \quad (2.54) \\
&\quad - \frac{1}{2}AD_{11}\sin(q_9 + q_{10}) + \\
&\quad AD_{12}\cos(q_{10} + q_{11}) \\
&\quad - \frac{1}{2}AD_{12}\sin(q_{11} - q_9 + q_{10}) - \\
&\quad \left. \frac{1}{2}AD_{12}\sin(q_{11} + q_9 + q_{10}) \right) \\
L &= \left(-\frac{1}{2}D_{12}\cos(q_{11} - q_9 + q_{10}) \right. \\
&\quad + \frac{1}{2}D_{12}\cos(q_{11} + q_9 + q_{10}) + \\
&\quad \frac{1}{2}D_{11}\cos(q_9 - q_{10}) \\
&\quad \left. - \frac{1}{2}D_{11}\cos(q_9 + q_{10}), \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M &= (-D_{11}A\cos(q_{10}) - \frac{1}{2}AD_{11}\sin(q_9 + q_{10}) \\
&\quad + \frac{1}{2}AD_{11}\sin(q_9 - q_{10}) - \\
&\quad \frac{1}{2}AD_{12}\sin(q_{11} - q_9 + q_{10}) \\
&\quad - \frac{1}{2}AD_{12}\sin(q_{11} + q_9 + q_{10})), \\
N &= -AD_{12}\cos(q_{10} + q_{11})(AD_{12}\cos(q_{10} + q_{11}) - \\
&\quad \frac{1}{2}AD_{12}\sin(q_{11} - q_9 + q_{10}) \\
&\quad - \frac{1}{2}AD_{12}\sin(q_{11} + q_9 + q_{10})), \\
O &= (-\frac{1}{2}D_{12}\cos(q_{11} - q_9 + q_{10}) \\
&\quad + \frac{1}{2}D_{12}\cos(q_{11} + q_9 + q_{10})), \\
P &= (-\frac{1}{2}AD_{12}\sin(q_{11} + q_9 + q_{10}) \\
&\quad - AD_{12}\cos(q_{10} + q_{11}) \\
&\quad - \frac{1}{2}AD_{12}\sin(q_{11} - q_9 + q_{10})),
\end{aligned} \tag{2.55}$$

de modo que la fuerza esta constituída por las siguientes componentes

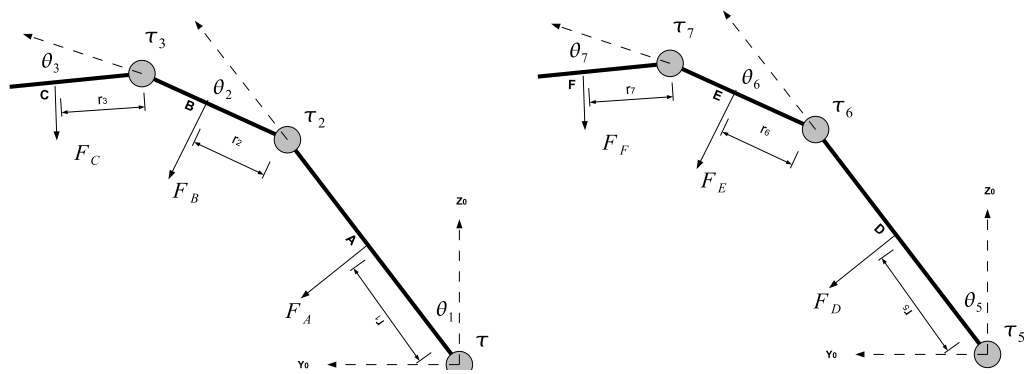
cartesianas:

$$\begin{aligned}
 f_{xpul} &= \frac{-C\tau_{8pul}P - BO\tau_{8pul} + BL\tau_{9pul}}{-ECP + BLP - LNB + NCM + EBO - BOM} \\
 &\quad + \frac{-\tau_{7pul}LP - CM\tau_{9pul} + \tau_{7pul}OM}{-ECP + BLP - LNB + NCM + EBO - BOM} \\
 f_{ypul} &= \frac{EB\tau_{9pul} - E\tau_{7pul}P - BM\tau_{9pul}}{-ECP + BLP - LNB + NCM + EBO - BOM} \\
 &\quad + \frac{-BN\tau_{8pul} + \tau_{7pul}NM + B\tau_{8pul}P}{-ECP + BLP - LNB + NCM + EBO - BOM}, \\
 f_{zpul} &= \frac{BL\tau_{9pul} + NC\tau_{8pul}}{-ECP + BLP - LNB + NCM + EBO - BOM} \\
 &\quad + \frac{-LN\tau_{7pul} - BO\tau_{8pul} - EC\tau_{9pul} + OE\tau_{7pul}}{-ECP + BLP - LNB + NCM + EBO - BOM}
 \end{aligned} \tag{2.56}$$

Estimación de los torques a partir de las fuerzas aplicadas en cualquier segmento del dedo

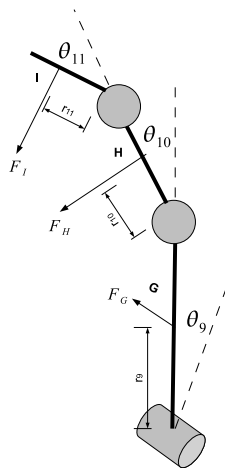
Se generalizó la obtención de los torques a partir de las fuerzas presentes en cualquier segmento de las falanges considerando ciertos puntos de contacto, tales puntos de contacto se asumieron a una distancia r_j de cada articulación, esta distancia puede considerarse en un ejemplo global ubicados en la mitad de la longitud de la respectiva falange, pero para este análisis se tomará r_j como una variable. En los puntos de estudio se asumirá que la fuerza esta concentrada allí.

La figura 2.8 es un esquema general de las consideraciones tomadas para la estimación de las fuerzas, un desarrollo más detallado se consigna en el anexo A.



(a) Dedo medio

(b) Dedo índice



(c) Dedo pulgar

Figura 2.8: Esquema de fuerzas aplicadas en las falanges de los dedos

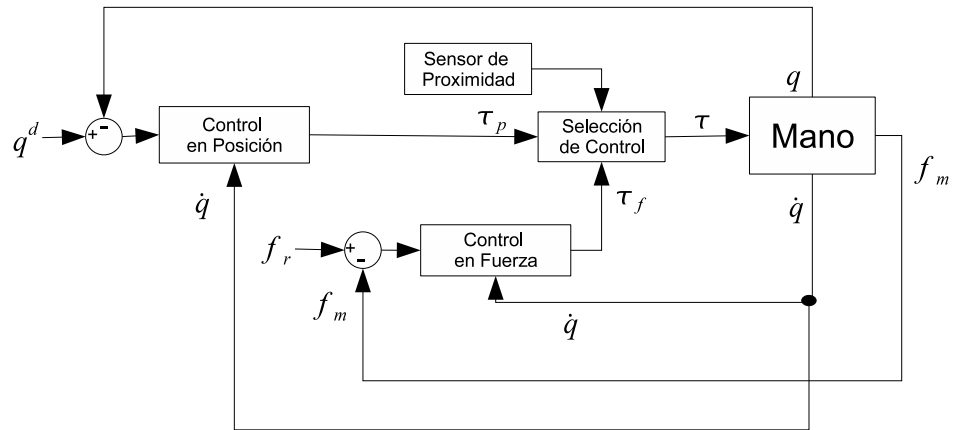
2.2.3. Esquemas de implementación del Control de fuerza

Se implemento un control de fuerza explícito en el cual la posición no juega ningun papel y en el que se simula la lectura de un sensor de fuerza, el segundo es un esquema básico de control de fuerza en el cual la fuerza medida se realiza con una estimación de la fuerza a partir de cálculos matemáticos que se mostrarón en la sección, el tercer esquema involucra ya el control de posición, y el cuarto esquema es una variación del control mostrado en la sección pero en el cual se simula una fase de *approach*(acercamiento al objeto)-*gripping*(sujeción del objeto)-*releasing*(relajamiento).

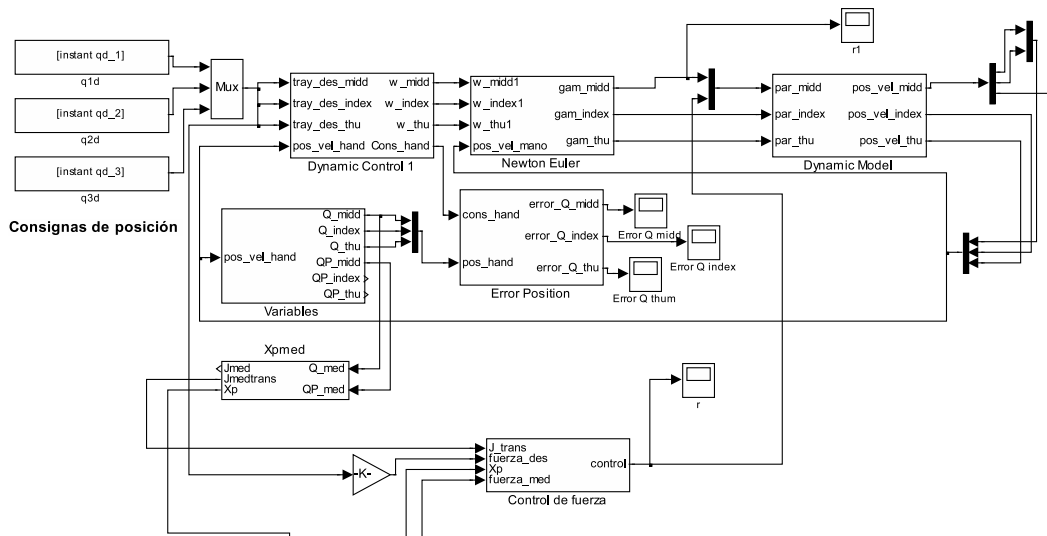
Control explícito de fuerza

La figura 2.9 muestra el esquema general del control de fuerza proporcional implementado el cual se ubica paralelo al control en posición. Cada control tiene como salida la consigna de par para cada actuador de la mano con el fin de cumplir con la posición o fuerza deseada. Para esta primera fase los controles no pueden estar actuando simultáneamente ya que generarían inestabilidad por el conflicto de las señales de par, por tal motivo debe hacerse una selección del control operante partiendo de la medición proporcionada por el sensor de proximidad. La figura 2.9 tambien muestra el diagrama de la implementación en el entorno Matlab/simulink y el esquema de control de fuerza para el dedo indice con $K_v = 1$ y $K_{pf} = [1, 1, 1]$.

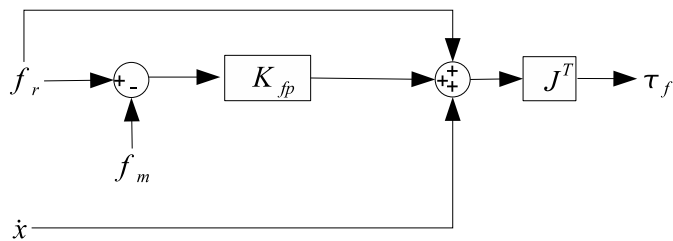
En la figura 3.3 se puede observar el comportamiento del error, suponiendo que la punta del dedo es rígida y tiene contacto con una superficie rígida. Es necesario precisar que bajo las suposiciones anteriormente citadas el dedo se puede encontrar tomando posiciones indeseadas para una prótesis de mano, en la implementación del control fuerza-posición se limita el movimiento de los dedos a los valores deseados permitidos para la mano humana.



(a) esquema general



(b) Esquema en matlab/simulink



(c) Detalle del esquema

Figura 2.9: Esquema del control de fuerza implementado para el dedo medio

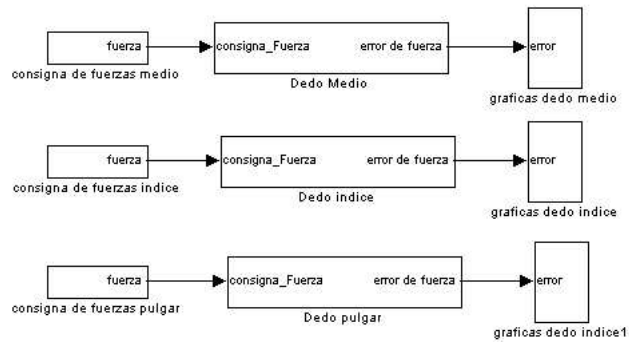
Esquema de control de fuerza sin control de posición

El esquema mostrado en la figura 2.10, se implementó con las siguientes ganancias

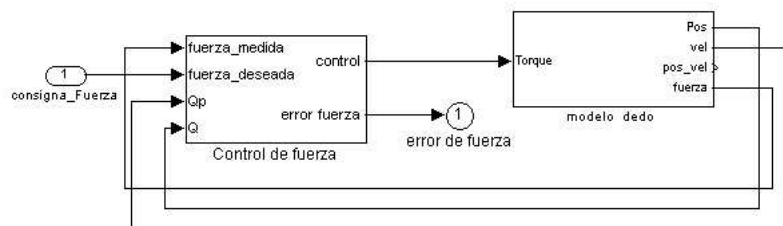
Ganancias dedo medio	Valor
KFv_1	0
KFv_2	200
KFv_3	100
KFi_1	10
KFi_2	10
KFi_3	10
Ganancias dedo indice	Valor
KFv_5	0
KFv_6	200
KFv_7	100
KFi_5	10
KFi_6	10
KFi_7	10
Ganancias dedo pulgar	Valor
KFv_9	90000
KFv_{10}	20000
KFv_{11}	100000
KFi_9	200
KFi_{10}	200
KFi_{11}	200

Cuadro 2.3: Ganancias del controlador fuerza sin control de posición

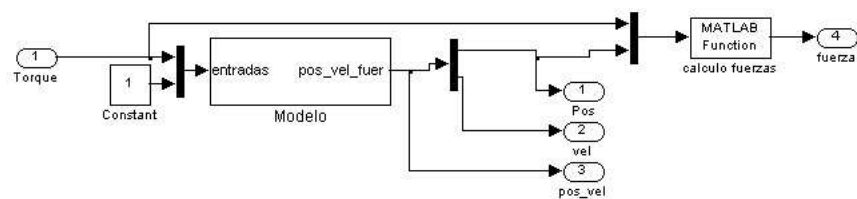
donde los términos KFv , KFv , KFv corresponden a las ganancias proporcionales y KFi , KFi , KFi a las integrativas.



(a) Esquema general control de fuerza



(b) Control de fuerza dedo medio



(c) Detalle de la conversión de fuerza dedo medio

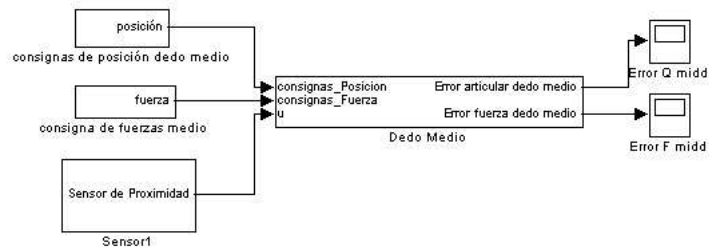
Figura 2.10: Esquema general del segundo esquema fuerza

Esquema de control de fuerza/posición

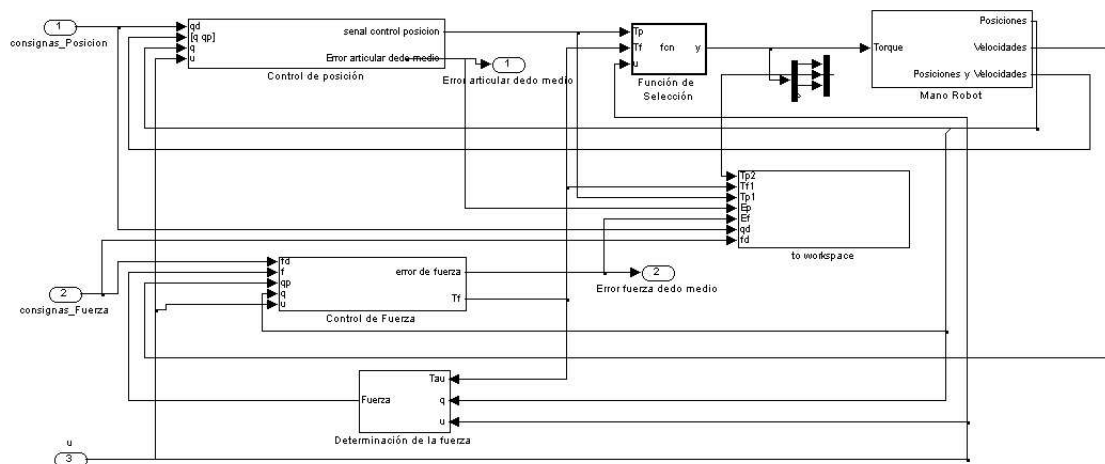
Este esquema ya se integra con el control de posición su forma general se puede ver en la figura 2.11, para su simulación se usaron las ganancias mostradas en el cuadro 2.4, donde Kp y Kv son las ganancias proporcionales y derivativas del control de posición, KFv y KFi las ganancias proporcionales e integrativas del control de fuerza.

Medio	Valor	Indice	Valor	Pulgar	Valor
Kp_1	1600000	Kp_5	1600000	Kp_9	480000
Kp_2	1200000	Kp_6	1200000	Kp_{10}	420000
Kp_3	1200000	Kp_7	1200000	Kp_{11}	420000
Kv_1	2000	Kv_5	2000	Kv_9	600
Kv_2	2000	Kv_6	2000	Kv_{10}	600
Kv_3	2000	Kv_7	2000	Kv_{11}	600
KFv_1	0	KFv_5	0	KFv_9	90000
KFv_2	200	KFv_6	200	KFv_{10}	20000
KFv_3	100	Kv_7	2000	KFv_{11}	100000
KFi_1	0	KFi_5	0	KFi_9	200
KFi_2	0	KFi_5	0	KFi_{10}	200
KFi_3	0	KFi_5	0	KFi_{11}	200

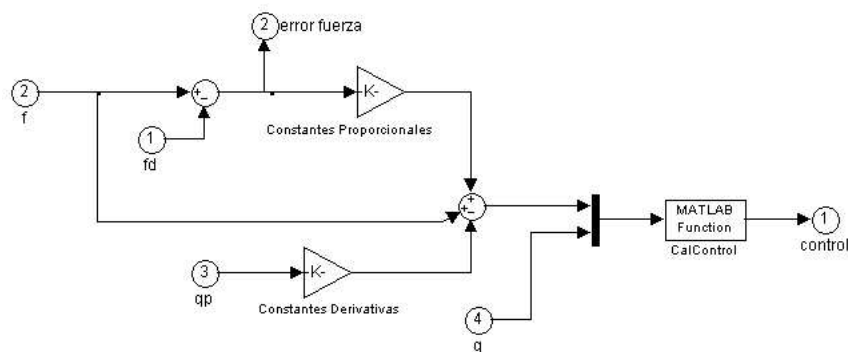
Cuadro 2.4: Ganancias del controlador fuerza/posición



(a) Esquema general control de fuerza/posición para el dedo medio



(b) Control de fuerza dedo medio



(c) Detalle control de fuerza dedo medio

Figura 2.11: Esquema general control fuerza/posición

Esquema de control de fuerza/posición con limitaciones de ángulos y módulo supervisor

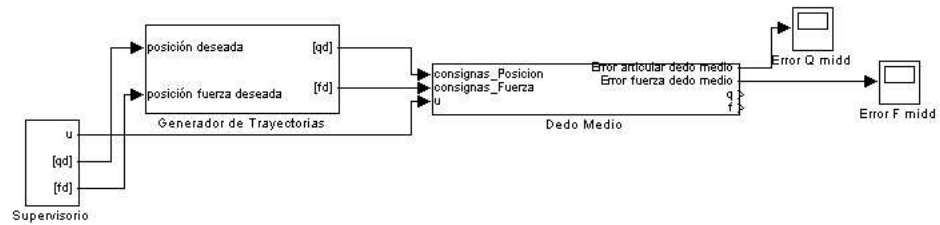
Con la implementación de un módulo supervisor en el montaje de la figura 2.11 es posible administrar el funcionamiento de los controladores de fuerza y posición mostrados allí según las fases de *approach* (acercamiento del objeto)- *grasping* (ubicación de los dedos en la posición de agarre)- *gripping* (sujeción del objeto)- *releasing* (relajamiento) y *withdrawing* (alejamiento del objeto).

Esta implementación cuenta con:

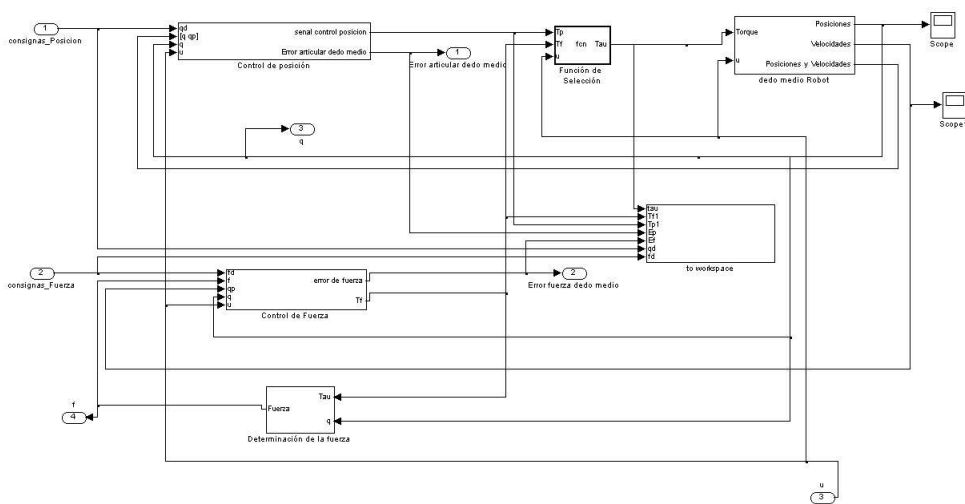
- Un bloque de supervisor que administra las tareas de generación de consignas y de cambio entre controles
- Un bloque de generación de consignas
- un bloque de limitación de consignas
- Un bloque de Control de Posición basado en CTC
- Un bloque de Control de Fuerza PD
- Un bloque de selección de señal de Control
- Un bloque de conversión de Fuerza a Torque
- Un bloque de conversión de Torque a Fuerza

además se modificó el modelo dinámico para simular el agarre, el cual ya no se basa en un análisis dinámico sino estático para el cual $m\ddot{x} = 0$.

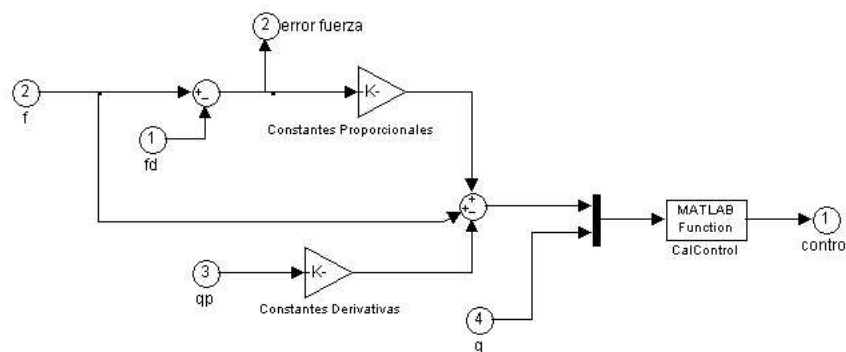
Los siguientes esquemas corresponden al dedo medio.



(a) Esquema general control de fuerza/posición con supervisor para el dedo medio



(b) Control de fuerza dedo medio



(c) Detalle control de fuerza dedo medio

Figura 2.12: Esquema general control fuerza/posición con supervisor

Capítulo 3

Análisis de la respuesta de cada controlador

3.1. Control de movimiento

En la sección 2.1.1 se mostró el esquema de control utilizado en el control de movimientos en esta sección se muestran los resultados de la simulación de dicho controlador.

La figura 3.1 muestra las consignas de posición aplicadas a la mano, estas consignas se generaron con el uso de una función polinomial la cual permitió trabajar con consignas de comportamiento muy suave, como se puede apreciar en la figura 3.1.

La figura 3.2 muestra los errores articulares obtenidos en el seguimiento de las trayectorias articulares mostradas en la figura 3.1.

Los errores articulares resultan ser pequeños no superando el orden de 10^{-5} radianes, de lo cual se puede deducir que el control articular propuesto resulta ser satisfactorio para el seguimiento de las consignas requeridas para ejecutar los agarres de la mano robot.

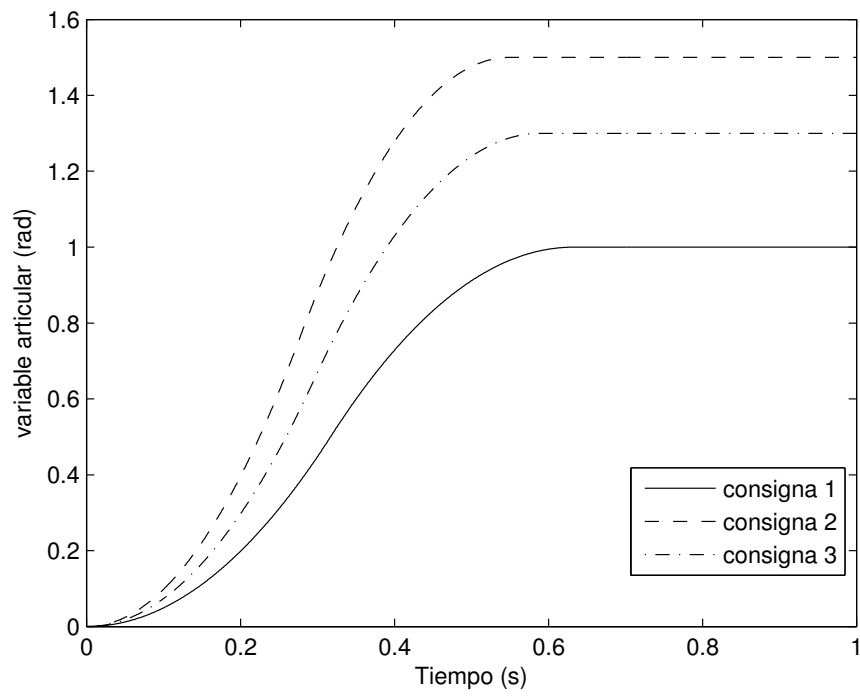
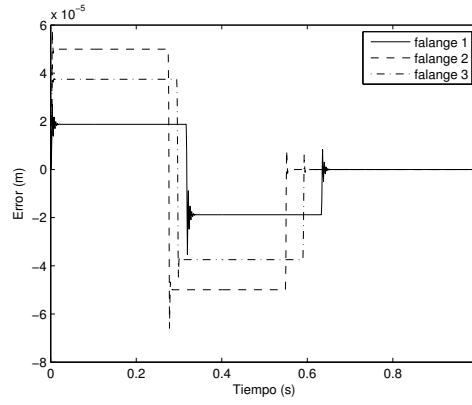
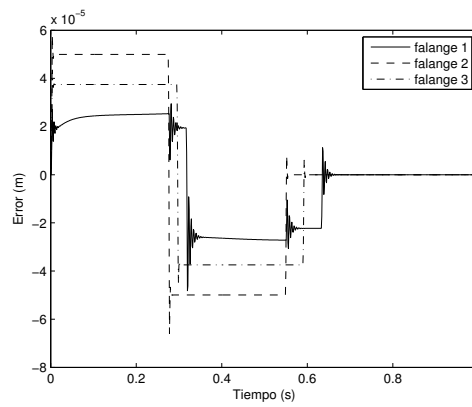


Figura 3.1: Consignas articulares

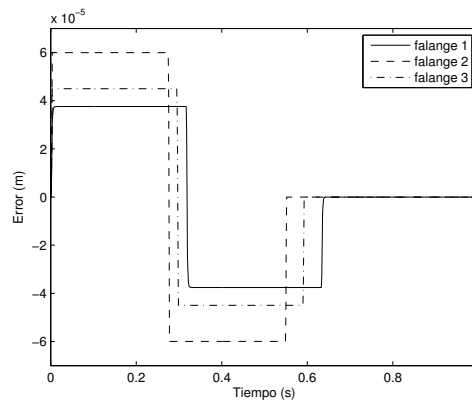
CAPÍTULO 3. ANÁLISIS DE LA RESPUESTA DE CADA CONTROLADOR73



(a) Error dedo medio



(b) Error dedo indice



(c) Error dedo pulgar

Figura 3.2: Errores de seguimiento de movimiento.

3.2. Control de fuerza

3.2.1. Control explícito de fuerza

En la sección 2.2.3 se propuso como primer control a implementar el control explícito de fuerza este tipo de control asume el control de fuerza como un bucle aislado, y la realimentación de la fuerza ejercida a los objetos se obtiene con la simulación de un sensor de fuerza. En este caso la consigna de fuerza es constante y equivalente a 1Newton . La figura 3.3 muestra el error de fuerza en un control explícito de fuerza. Los picos se deben al hecho de que se empleo un control solo proporcional .

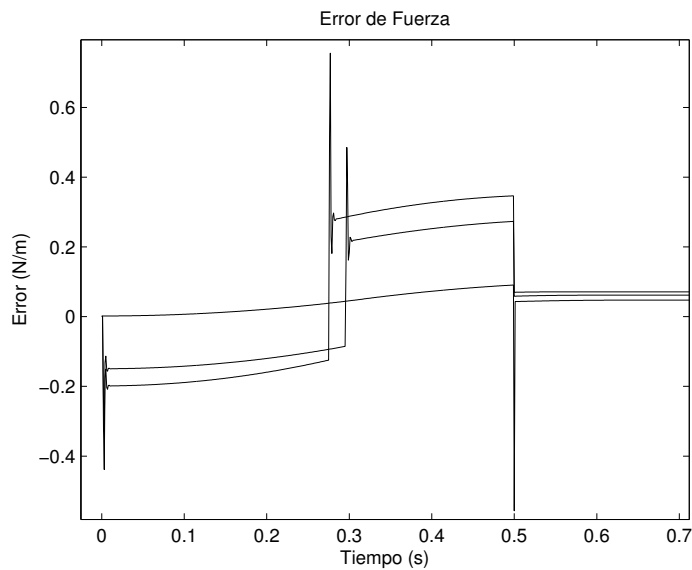


Figura 3.3: Error de fuerza para una consigna de fuerza en el dedo índice en un control explícito de fuerza.

3.2.2. Control de fuerza sin control de posición

En el ejemplo anterior se abordó el problema de control de fuerza pero se usó como sensor de fuerza un esquema simulado, en esta sección se trata el

CAPÍTULO 3. ANÁLISIS DE LA RESPUESTA DE CADA CONTROLADOR 75

problema de control de fuerza haciendo una estimación de la fuerza generada en la punta de los dedos, en la sección 2.2.3 se abordó este esquema y las siguientes gráficas muestran el control en la punta de los dedos.

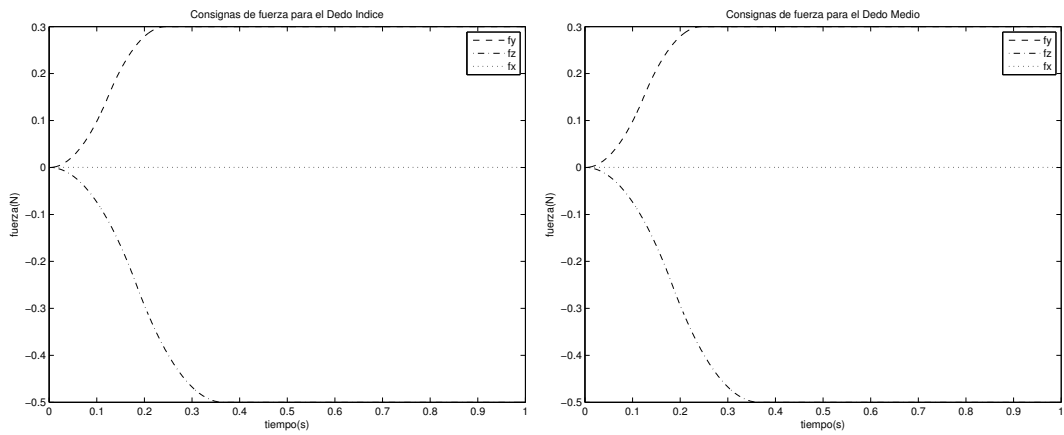
En este esquema de control se aplicaron consignas de fuerza de carácter polinomial para garantizar unas consignas suaves con aumento gradual en sus valores, la función del control es seguir dichas consignas. La figura 3.4 muestra las consignas de fuerza en los tres ejes coordenados para cada uno de los dedos. En el caso del dedo medio e índice no se tiene en cuenta una fuerza en el eje x dado que en esta eje los dedos medio e índice no se mueven. Aunque un objeto sujetado por la mano propuesta puede experimentar una fuerza de sujeción en x debido al efecto de la fuerza perpendicular a las superficies en contacto (fuerza normal) multiplicado por el coeficiente de fricción estático de dichas superficies.

En el control mostrado en esta sección no se involucró el control de posición pero es este esquema el que más adelante se usará en el control posición-fuerza.

La señal de control (Torque) se muestra en la figura 3.5 y se puede observar que la señal de control es suave y no presenta picos que puedan resultar nocivos para los actuadores eléctricos. El error de las fuerzas cartesianas f_x, f_y, f_z de cada uno de los tres dedos se muestran en las figuras 3.6, 3.7 y 3.8. En estas gráficas se puede apreciar como el error esta por debajo del orden de 10^{-3} .

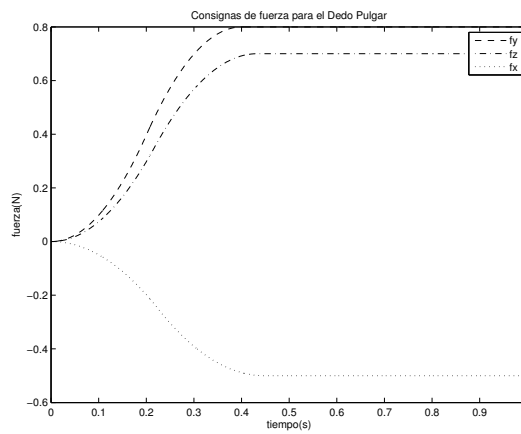
El error porcentual es de 1.1 % y 0.5 % para las fuerzas en f_y y f_z del dedo medio, 0.8 % y 0.6 % para las correspondientes en el dedo índice, y 4.4 %, 0.008 y 0.001 % para f_x, f_y, f_z en el dedo pulgar, lo cual muestra un buen desempeño del control que se propone.

CAPÍTULO 3. ANÁLISIS DE LA RESPUESTA DE CADA CONTROLADOR 76



(a) Fuerza deseada dedo indice

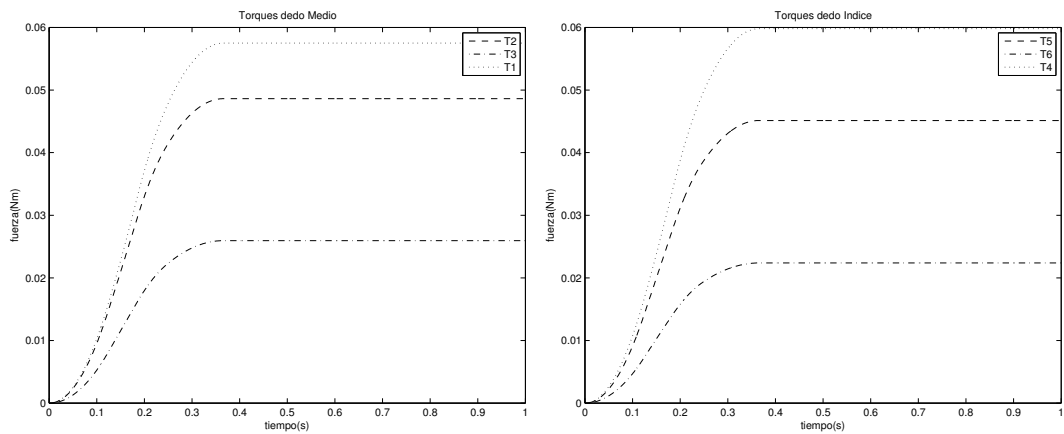
(b) Fuerza deseada dedo medio



(c) Fuerza deseada dedo pulgar

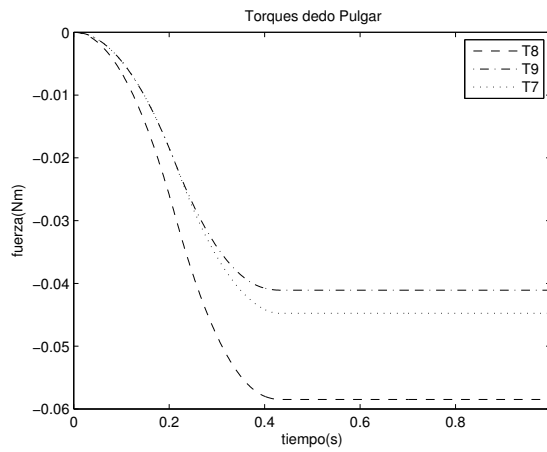
Figura 3.4: Consigna de fuerza aplicada a los dedos en el control de fuerza con estimación de la fuerza aplicada.

CAPÍTULO 3. ANÁLISIS DE LA RESPUESTA DE CADA CONTROLADOR77



(a) Dedo medio

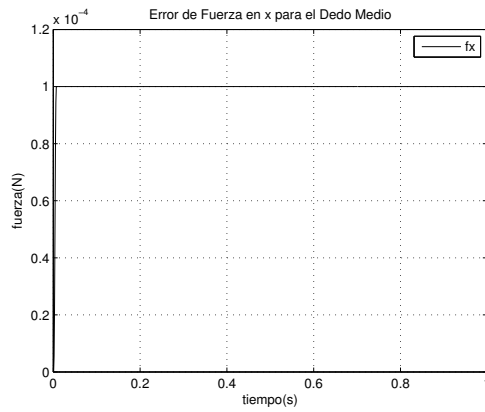
(b) Dedo indice



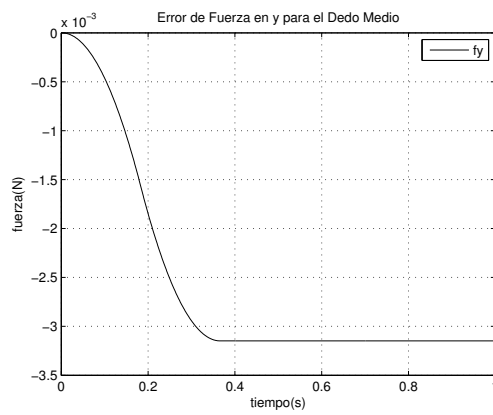
(c) Dedo pulgar

Figura 3.5: Señal de control para las articulaciones 1, 2 y 3 de cada dedo

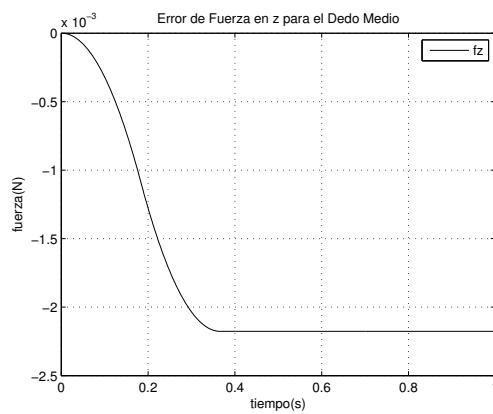
CAPÍTULO 3. ANÁLISIS DE LA RESPUESTA DE CADA CONTROLADOR 78



(a) fuerza en el eje x



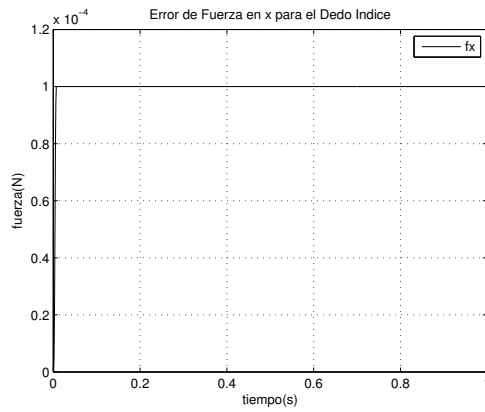
(b) fuerza en el eje y



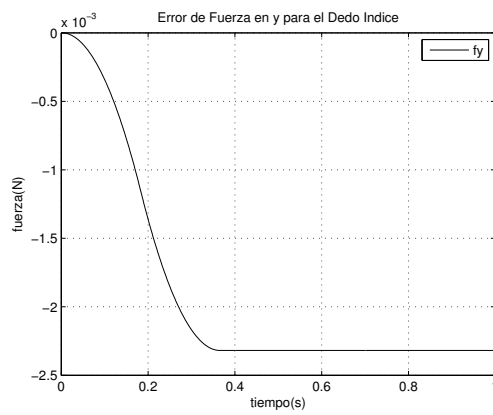
(c) fuerza en el eje z

Figura 3.6: Error de fuerzas cartesianas del dedo medio en el control de fuerza

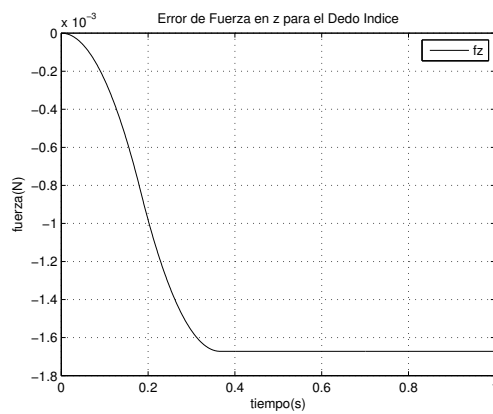
CAPÍTULO 3. ANÁLISIS DE LA RESPUESTA DE CADA CONTROLADOR 79



(a) fuerza en el eje x



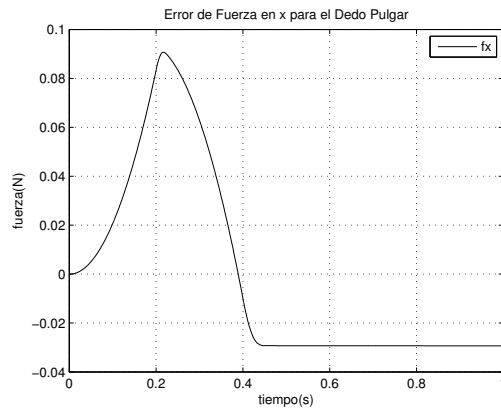
(b) fuerza en el eje y



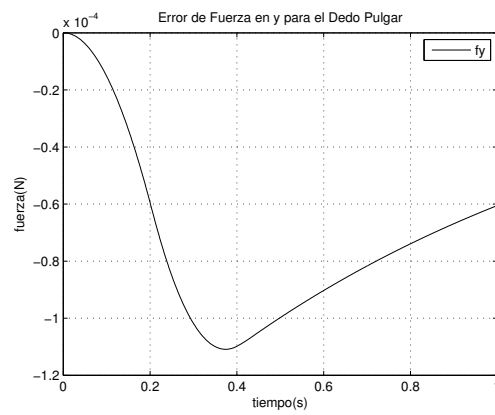
(c) fuerza en el eje z

Figura 3.7: Error de fuerzas cartesianas del dedo indice en el control de fuerza

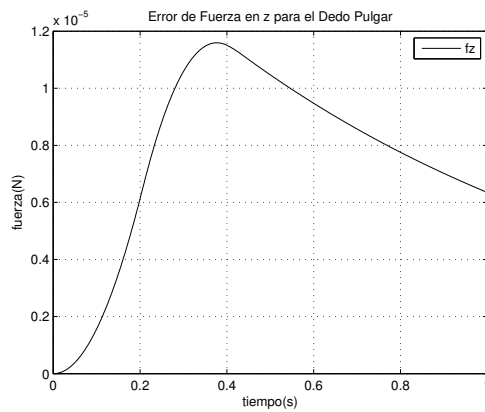
CAPÍTULO 3. ANÁLISIS DE LA RESPUESTA DE CADA CONTROLADOR 80



(a) fuerza en el eje x



(b) fuerza en el eje y



(c) fuerza en el eje z

Figura 3.8: Error de fuerzas cartesianas del dedo pulgar en el control de fuerza

3.2.3. Control de fuerza/posición

En la subsección anterior se mostró el desempeño del control de fuerza trabajando por separado, en esta sección se involucró de manera paralela el control de posición.

El control posición/fuerza fué implementado con una fase de ubicación de los dedos en la posición de agarre (control de posición) hasta el primer segundo y una fase de sujeción posterior al primer segundo (control de fuerza). La figura 3.9 esquematiza las fases.

Las gráficas de la figura 3.10 muestran las características de las consignas aplicadas que también se caracterizan por ser polinomiales tanto para la posición como para la fuerza. La figura 3.11 muestra el esfuerzo de control (que debe llegar a los actuadores) y la figura 3.12 los errores de seguimiento de las consignas lo cual muestra un comportamiento satisfactorio del control en las dos fases de funcionamiento mostradas en la figura 3.9.

La figura 3.11 muestra la señal de control que debe llegar a los actuadores, esa señal de control tiene características de par de fuerza por lo cual tiene unidades de $[Newton\ metro]$, en esta gráfica se aprecia como el par de fuerza en la fase de control de movimiento es pequeño pero suficiente para contrarrestar la dinámica del sistema. Posterior a 1seg se ejecuta una sujeción en la cual se realiza fuerza con los dedos, en este caso es necesario mayor torque para garantizar las exigencias de fuerza mostrada en la gráfica de consignas de fuerza 3.10. La gráfica 3.12 muestra el error de seguimiento en las dos fases de control tanto en el seguimiento de la consigna de posición como en la de fuerza. De las gráficas 3.10 y 3.12 se puede obtener que el error porcentual máximo para el seguimiento de consignas de posición para las articulaciones q_1 , q_2 y q_3 es: 0.0025 %, 0.0015 % y 0.0025 % respectivamente, para el seguimiento de las consignas de fuerza se tiene como errores: 0.04 % y 0.01 % para f_y y f_z , respectivamente

CAPÍTULO 3. ANÁLISIS DE LA RESPUESTA DE CADA CONTROLADOR 82

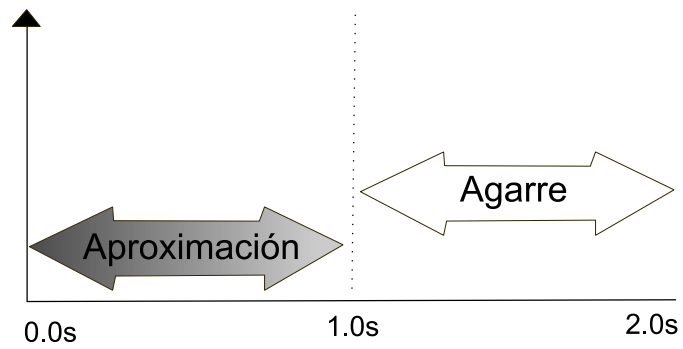
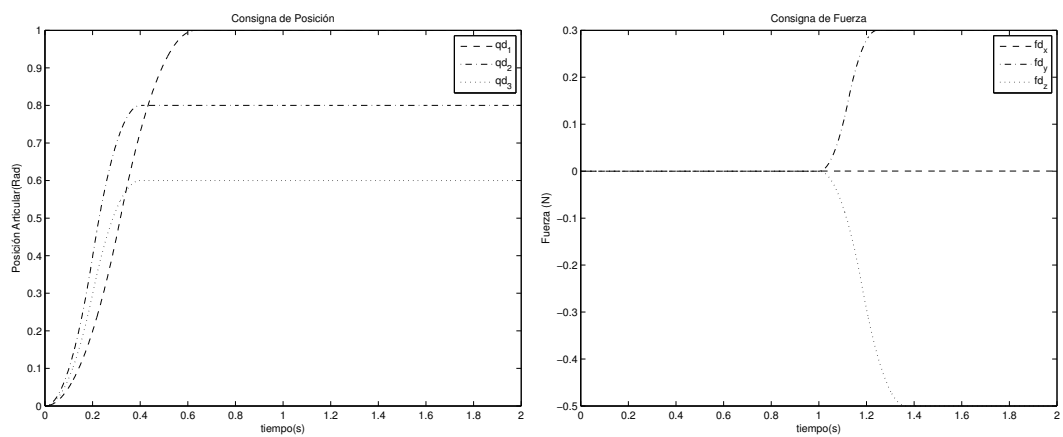


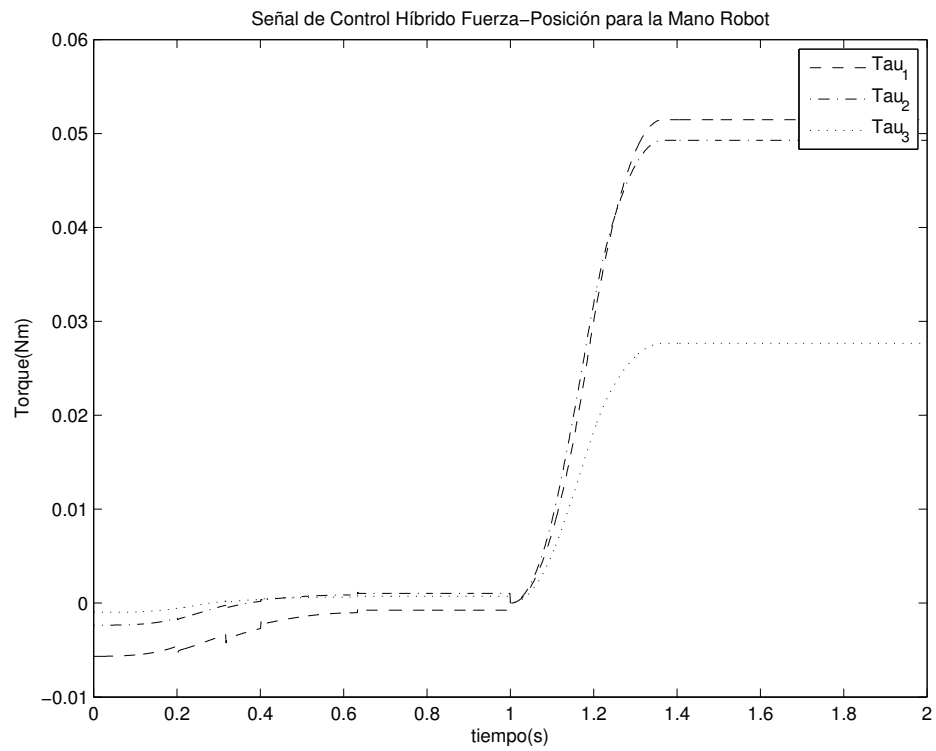
Figura 3.9: Secuencia de control posición/fuerza



(a) Consigna de posición

(b) Consigna de fuerza

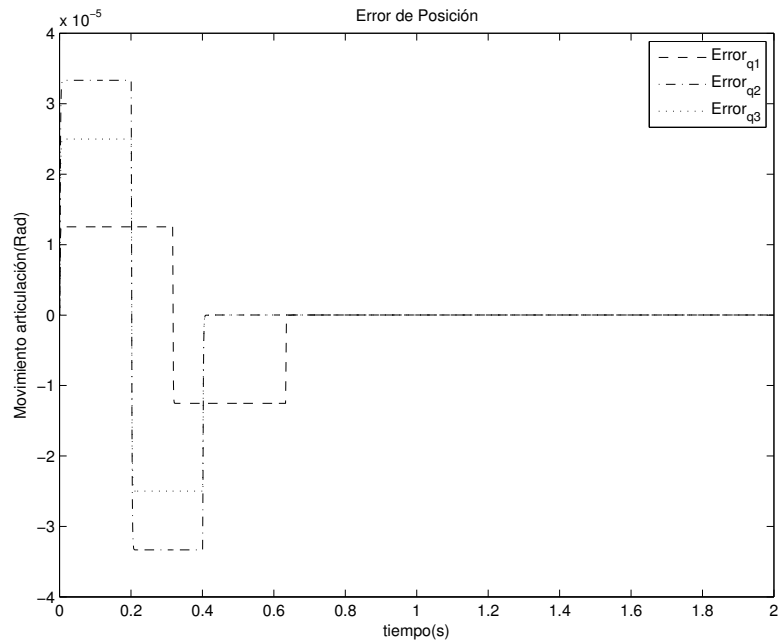
Figura 3.10: Consignas aplicadas a la mano en el control posición/fuerza.



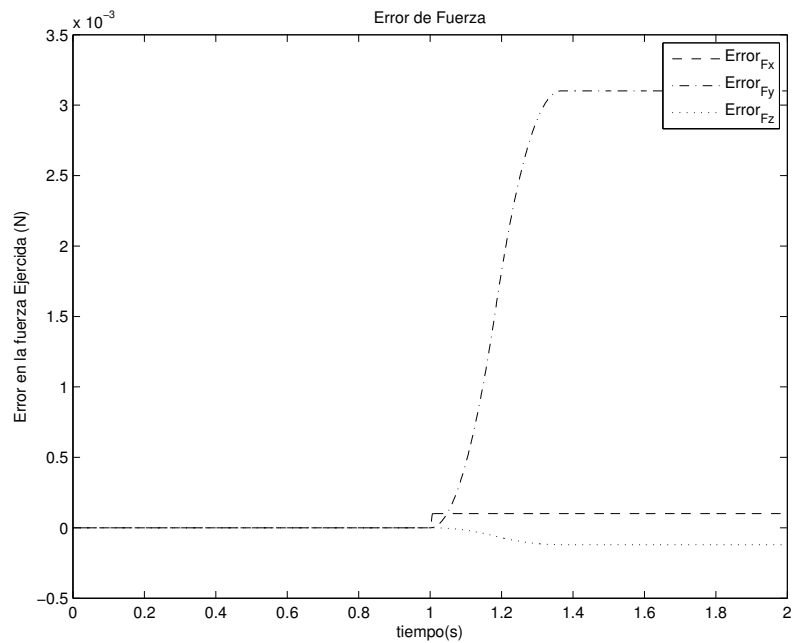
(a) Control posición/fuerza

Figura 3.11: Esfuerzo de control en el control posición/fuerza.

CAPÍTULO 3. ANÁLISIS DE LA RESPUESTA DE CADA CONTROLADOR 84



(a) Error de posición



(b) Error de fuerza

Figura 3.12: Error de seguimiento en el control posición/fuerza.

3.2.4. Esquema de control de fuerza/posición con limitaciones de ángulos y módulo supervisor

En esta sección se hace uso del esquema de control fuerza/posición pero se generaliza a nuevas fases de control de fuerza adjuntando un bloque que administra el funcionamiento de los controles alternandolos entre control de posición o fuerza según el caso, este bloque también administra las consignas o trayectorias deseadas. En este esquema se implementó una fase de ubicación de los dedos en la posición de agarre hasta el primer segundo, una fase de sujeción en el tramo 1s a 3s posterior al primer segundo y una fase de regreso de los dedos a posición relajada en el tramo de 2s a 3s como se muestra en el esquema de la figura 3.13. Este tipo de control mejoró el simple control explícito de fuerza al involucrar el control de posición. Las gráficas muestran un buen desempeño para el control de posición y el control de fuerza. Las gráficas de la figura 3.14 muestran las características de las consignas aplicadas. La figura 3.15 muestra el esfuerzo de control y la figura 3.16 los errores de seguimiento de las consignas.

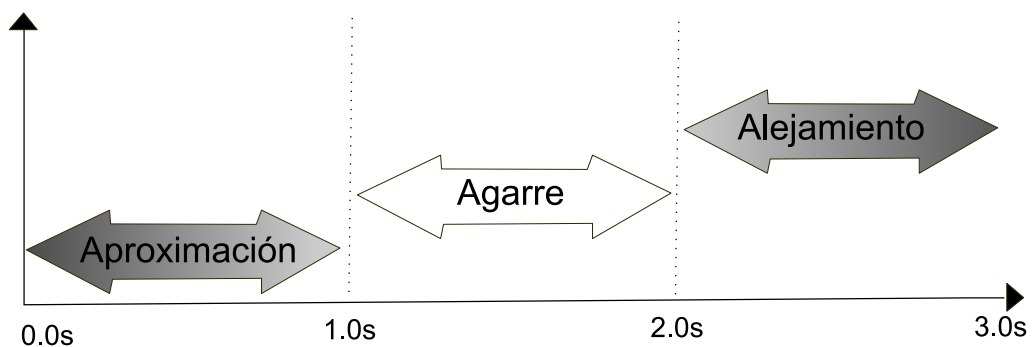
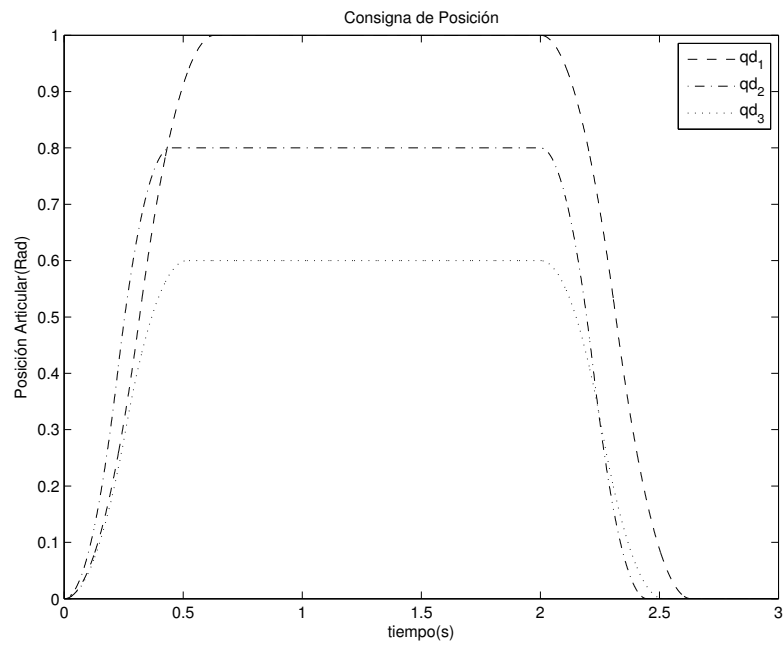
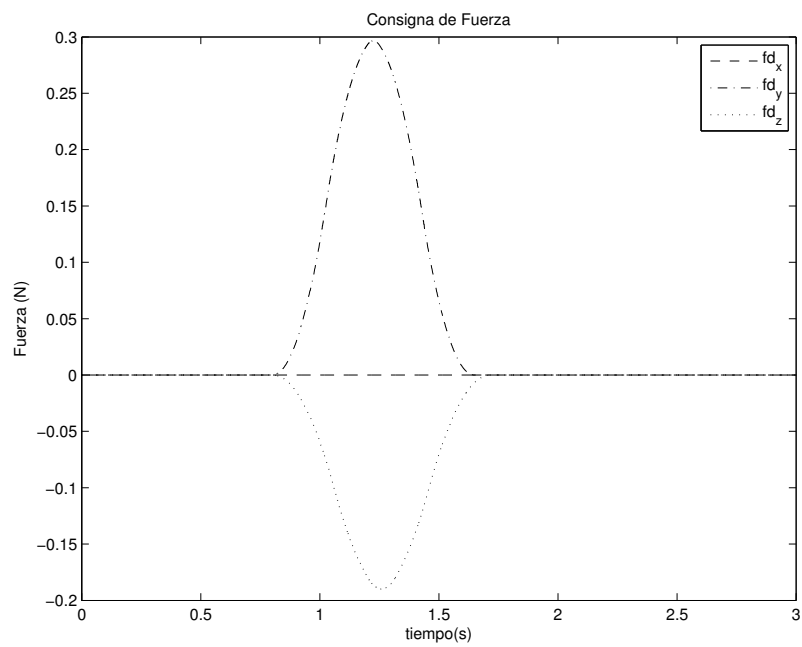


Figura 3.13: Secuencia de control posición/fuerza/posición

CAPÍTULO 3. ANÁLISIS DE LA RESPUESTA DE CADA CONTROLADOR 86



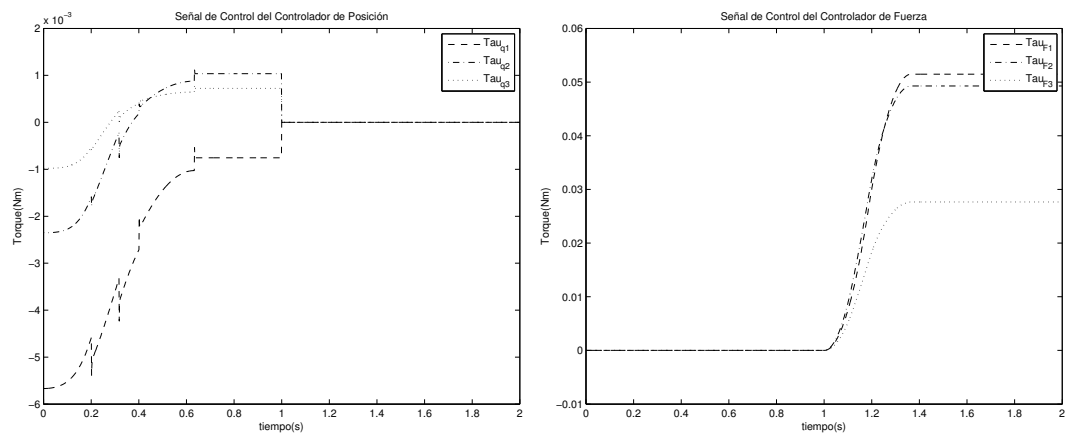
(a) Consigna de posición



(b) Consigna de fuerza

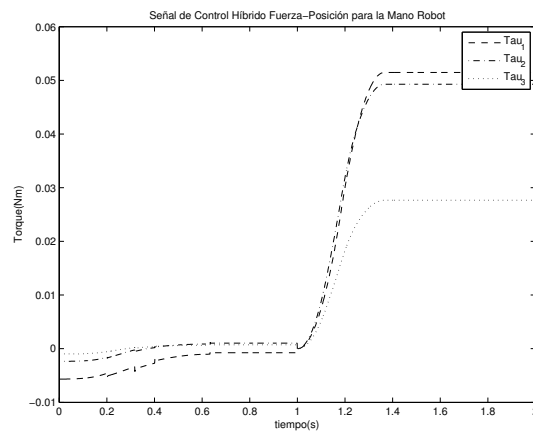
Figura 3.14: Consignas aplicadas a la mano en el control posición/fuerza con supervisorio.

CAPÍTULO 3. ANÁLISIS DE LA RESPUESTA DE CADA CONTROLADOR 87



(a) Control de posición

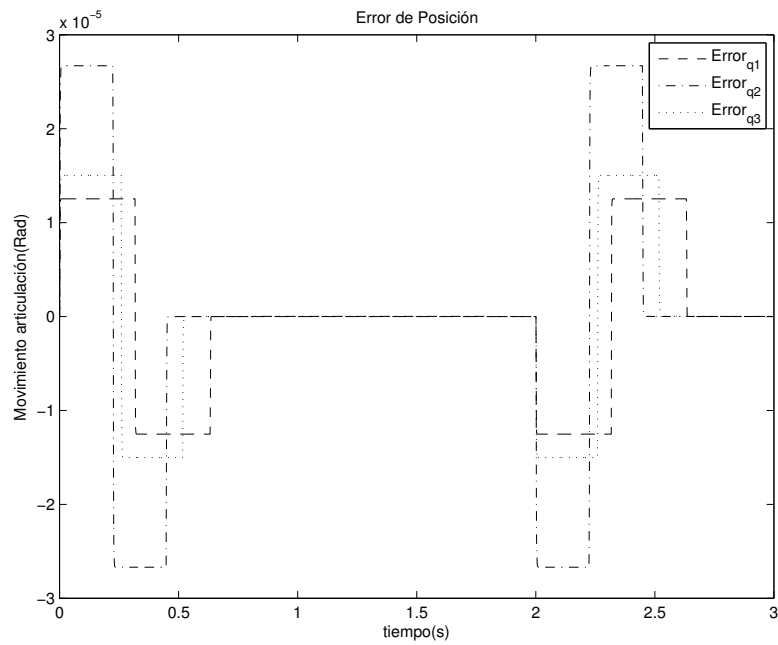
(b) Control de fuerza



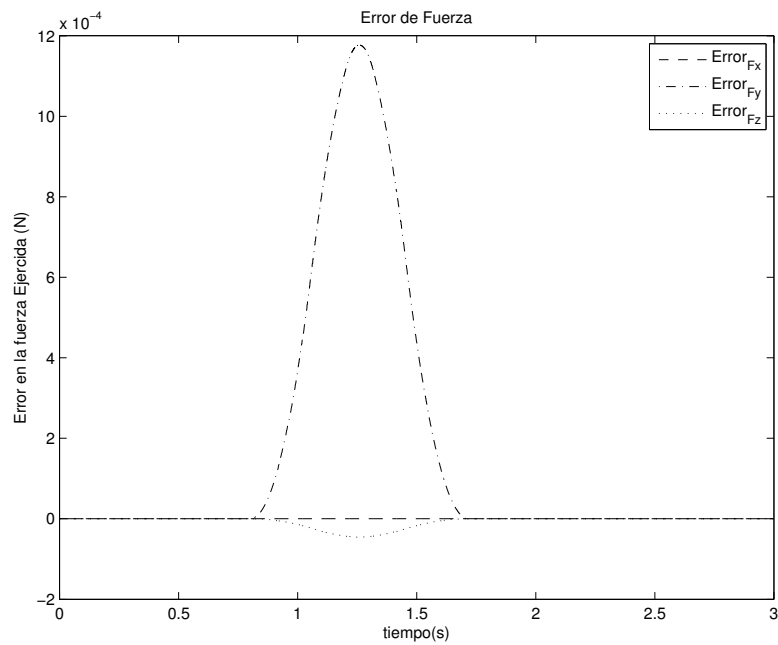
(c) Control posición/fuerza

Figura 3.15: Esfuerzo de control en el control posición/fuerza con supervisorio.

CAPÍTULO 3. ANÁLISIS DE LA RESPUESTA DE CADA CONTROLADOR 88



(a) Error de posición



(b) Error de fuerza

Figura 3.16: Error de seguimiento en el control posición/fuerza con supervisorio.

Capítulo 4

Conclusiones y recomendaciones

En este trabajo se presentó un esquema de la arquitectura funcional de una mano protésica compuesta por una estructura arborescente de nueve grados de libertad, compuesta por tres dedos; medio, índice y pulgar, cada uno con tres grados de libertad. Con base en esta propuesta se obtuvo el modelo geométrico, representando de esta manera la relación entre la posición cartesiana de la punta de los dedos con respecto a los valores angulares de cada una de las nueve articulaciones sentando la base matemática para relacionar la ubicación espacial y las consignas que deben ser enviadas a la mano robot. Posteriormente se derivó el modelo dinámico directo que se constituye en el modelo físico de la mano robot y permitió simular y validar los controles sin contar aun con la mano real.

Debido a que la mano debe en primera instancia moverse en el espacio con la suavidad de la mano humana y adicionalmente debe garantizar ubicación de precisión, se propuso como esquema de control de posición un esquema de control por par calculado o CTC por sus siglas en inglés, este esquema permitió no solo llegar a las consignas deseadas con errores porcentuales inferiores al 0.003 %, sino también seguir trayectorias de consignas en cada articulación, esto permitirá que la mano pueda moverse copiando fielmente trayectorias se-

cuenciales abstraídas de manos humanas reales, mostrando un movimiento que parezca menos mecanizado. Seguido a la comprobación del control de posición se procedió a montar un control de fuerza, el primer control era del tipo PD y asumía que se contaba con un sensor de fuerza para realimentar la fuerza ejecutada a los objetos. En el segundo esquema se probó el control de fuerza basandose en una suposición de equilibrio estático en el cual se consideró que los segmentos de las articulaciones no se aceleraban más al encontrarse en contacto con un objeto, con base en lo anterior se propuso simular la realimentación de fuerza a través de un análisis mecánico del sistema haciendo uso de la mecánica analítica relacionando Fuerzas-Torques y Torques-Fuerzas, este análisis se realizó en primera instancia para un toque en la punta de los dedos y se generalizó posteriormente para un toque en cualquier segmento de los dedos realizando un análisis matemático que es mostrado con detalle en el apéndice en donde la solución de las ecuaciones permite estimar las fuerzas. El tercer esquema involucró el control fuerza-posición y el cuarto esquema fue una mejora del tercero.

Para trabajos futuros se recomienda abordar el proceso de agarre como una tarea cooperativa de los dedos de la mano, debido a que en los pasos de levantamiento (*lifting*), desplazamiento (*transferring*) y descenso (*lowering*) los movimientos ejecutados se encuentran en un macroespacio, por lo cual el peso del objeto y todas las fuerzas producidas por el movimiento del objeto/dedos manipuladores son asumidas por la mano y en el caso del movimiento las fuerzas inerciales no son considerablemente despreciables con respecto a las otras cargas.

Referencias Bibliográficas

- [1] Folgheraier M. and Gini G. Human-like reflex control for an artificial hand. *BioSystems*, Vol. 76, pp. 65–74, 2004.
- [2] Zecca M. *On the development of a cybernetic prosthetic hand*. PhD thesis, Scuola Superiore Sant'Anna, Italia, 2003.
- [3] Indice internacional y diccionario de la rehabilitación y de la integración social, iidris. <http://www.med.univ-rennes1.fr>. visitado en: octubre de 2006.
- [4] Hernández J. and Hernández I. Una aproximación a los costos indirectos de la discapacidad en Colombia. *Revista de Salud Pública*, Vol. 7, pp. 130–144, 2005.
- [5] Boletín censo general 2005, discapacidad en Colombia, actualización. <http://www.dane.gov.co/censo/files/boletines/discapacidad.pdf>. visitado en: octubre de 2006.
- [6] Tubiana R. *The Hand*. W. B. Saunders Company, 1981.
- [7] Lasso H.R. *Anatomía Fisiología y Salud*. Kapelusz, 1980.
- [8] The southern californian orthopedic institute. <http://www.scoi.com>. visitado en: octubre de 2006.
- [9] Khalil W. and Dombre E. *Modeling, identification and control of robots*. Hermes Penton Science, 2002.

- [10] Guzmán A. and Torres V. *Pinzas y agarres privilegiados según perfil ocupacional en el diseño de una mano robótica*. Universidad del Cauca, 2008.
- [11] Paul R.C.P. *Robot Manipulators Mathematics, Programming and Control*. MIT Press, 1981.
- [12] Kyberd P. J. and Holland O. E, Chappel P. H. and Smith S., and Bagwell P. J. and Snaith J. Tregidgoi R. Marcus: A two degree of freedom hand prosthesis with hierarchical grip control. *IEEE Trans Rehab Eng*, 1995.
- [13] Borst C., Fischer M., Haidacher S., Liu H., and Hirzinger G. DLR hand II: experiments and experiences with an anthropomorphic hand. In Proceedings *IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pp. 702–707, 2003.
- [14] Montano L. and Sagués C. Control de esfuerzos con un robot industrial. *Informática y Automática*, Vol. 20, No. 2, 1997.
- [15] Cheah C., Hirano M., Kawamura S., and Arimoto S. Approximate jacobian control with task-space damping for robot manipulators. *IEEE Transactions on automatic control*, Vol. 49, No. 5, 2004.
- [16] Kelly R., Santibanez V., and Loria A. *Control of Robot Manipulators in JointSpace*. Springer, 2005.
- [17] Slotin J. and Li W. *Applied Nonlinear Control*. Prentice Hall, 1991.
- [18] Sciavicco L. and Siciliano B. *Modelling and Control of Robot Manipulators*. McGraw-Hill, 1996.
- [19] Zivanovic M. and Vukobratovic M. *Multi-Arm Cooperating Robots*. Springer, 2006.
- [20] Volpe R. *Real and Artificial Forces in the Control of Manipulators: Theory and Experiments*. PhD thesis, Cornege Mellon, 1990.

- [21] Fisher W. and Mujtaba S. Hybrid position/force control a correct formulation. Technical report, Hewlett Packard, 1991.
- [22] Munro N. and Lewis F. *Robot Manipulator Control and Practice*. Marcel Dekker, 2004.

Modelado y control de posición y de fuerza de una prótesis robótica de mano

Apéndice

Eliana Aguilar Larrarte

Tutor:

PhD. Andrés Vivas Albán

Universidad del Cauca

Facultad de Ingeniería Electrónica y Telecomunicaciones

Maestría en Electrónica y Telecomunicaciones

Popayán

Marzo 2010

Índice general

A. Proceso de sintonización	1
A.1. Control de movimiento	1
A.1.1. paso 1	1
A.1.2. paso 2	1
A.1.3. paso 3	2
A.1.4. paso 4	2
A.2. Ejemplo para el dedo medio	2
B. Fuerzas aplicadas en las falanges	6
B.1. Fuerzas aplicadas en las falanges del dedo medio	6
B.1.1. Matrices de transformación dedo medio	6
B.1.2. Transformaciones cartesianas de los puntos de interés del dedo medio	11
B.1.3. Determinación de los pares articulares del dedo medio .	12
B.2. Fuerzas aplicadas en las falanges del dedo índice	17
B.2.1. Matrices de transformación dedo índice	17
B.2.2. Transformaciones cartesianas de los puntos de interés del dedo índice	21
B.2.3. Determinación de los pares articulares del dedo índice .	22
B.3. Fuerzas aplicadas en las falanges del dedo pulgar	26
B.3.1. Matrices de transformación dedo pulgar	26

B.3.2. Transformaciones cartesianas de los puntos de interés del dedo pulgar	32
B.3.3. Determinación de los pares articulares del dedo pulgar .	34

Apéndice A

Proceso de sintonización

A.1. Control de movimiento

El proceso de sintonización del controlador PD que hace parte del control por par calculado de movimientos de la mano robot de nueve grados de libertad el cual se realizó de manera manual y su proceso se describe a continuación.

A.1.1. paso 1

Poner el valor de las constantes derivativas en cero y las proporcionales en un valor cercano al valor 100, observar el comportamiento de las gráficas, si las curvas tienen una tendencia oscilatoria se puede proceder a aumentar el valor de las constantes derivativas, sino se debe comenzar a aumentar las constantes proporcionales hasta ver un comportamiento del error casi oscilatorio.

A.1.2. paso 2

Cuando se consigue que la grafica muestre oscilación no se varían más las constantes proporcionales y se procede a aumentar las constantes derivativas hasta hacer que la oscilación desaparezca. En este proceso se puede

notar que las oscilaciones se atenúan con una tendencia hacia un valor muy pequeño a medida que se incrementa el valor de la constante derivativa, pero si se aumenta demasiado el valor de estas constantes el sistema se comporta inestable, en este punto se cesa el aumento de la constante derivativa y se procede a aumentar la constante proporcional, se puede experimentar aumentar la constante proporcional en 10 veces o hasta conseguir de nuevo que el error muestre nuevamente comportamiento oscilatorio

A.1.3. paso 3

Se repiten los pasos 1 y 2 cuantas veces sea necesario, es decir hasta que se consiga una magnitud del error por debajo de un valor que se considere adecuado en virtud de la amplitud mínima y máxima que tendrán las consignas de posición.

A.1.4. paso 4

Cuando se tiene una magnitud del error satisfactoria solo basta en sintonizar haciendo los pasos 1, 2 y 3 con pequeños valores de incremento.

A.2. Ejemplo para el dedo medio

La figura A.1 muestra la implementación del paso 1, la constante proporcional se incrementa hasta tener un comportamiento casi oscilatorio dejando la constante derivativa en cero. En la figura A.2 se ve la aplicación del paso 2. La figura A.3 muestra el caso del paso 3 y se puede observar como se ha disminuido la amplitud del error, resta suavizar un poco la curva ver figura A.4, y repetir los pasos 1 y 2 hasta obtener un error satisfactorio por debajo del 2% o menos. La gráfica A.4 muestra una disminución sustancial del error, el cual

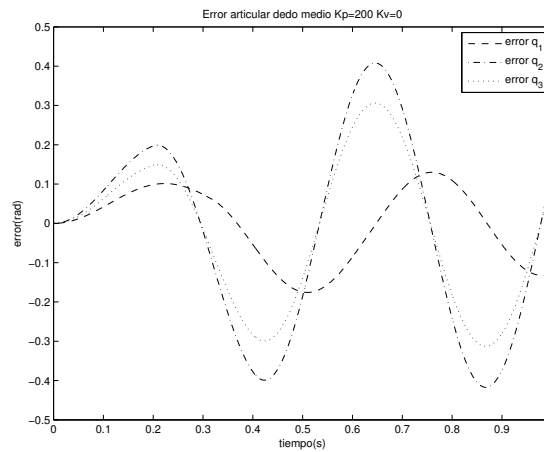


Figura A.1: Error articular dedo medio $Kp_1=Kp_2=Kp_3=200$ $Kv_1=Kv_2=Kv_3=0$

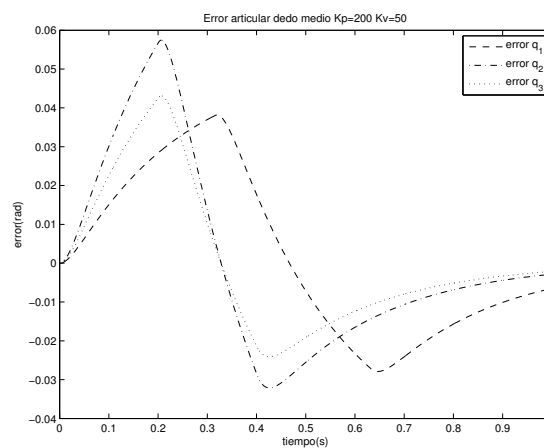


Figura A.2: Error articular dedo medio $Kp_1=Kp_2=Kp_3=200$ $Kv_1=Kv_2=Kv_3=50$

esta ahora por debajo del orden de 10^{-3} . La grafica A.5 muestra el resultado final de la sintonización

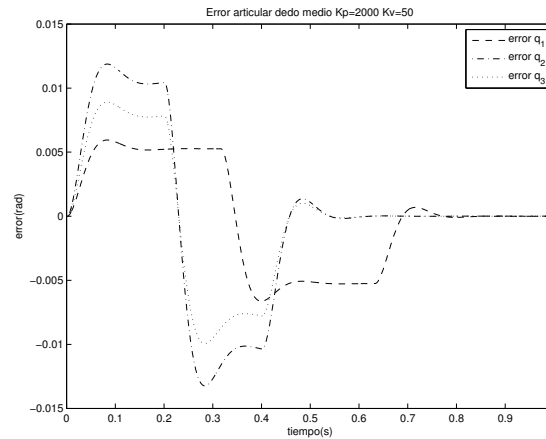


Figura A.3: Error articular dedo medio $Kp_1=Kp_2=Kp_3=2000$ $Kv_1=Kv_2=Kv_3=50$

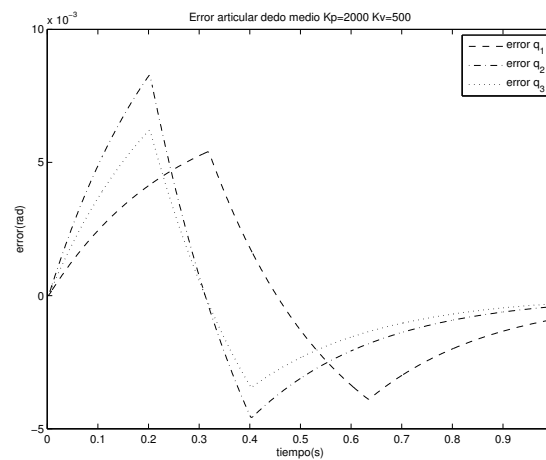


Figura A.4: Error articular dedo medio $Kp_1=Kp_2=Kp_3=2000$ $Kv_1=Kv_2=Kv_3=500$

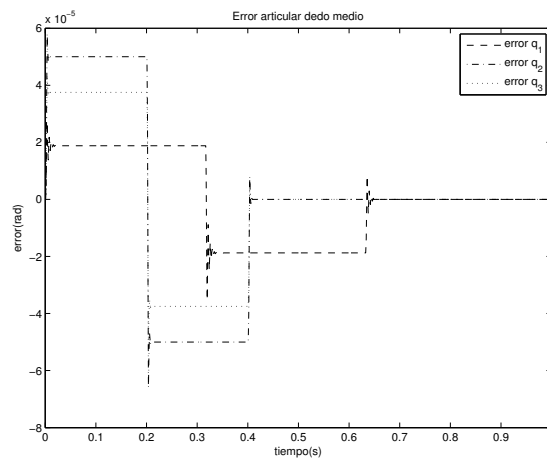


Figura A.5: Error articular final dedo medio $Kp_1 = 1600000, Kp_2 = 1200000, Kp_3 = 1200000$ $Kv_1 = Kv_2 = Kv_3 = 2000$

Apéndice B

Fuerzas aplicadas en las falanges

La siguiente sección describe un método general para estimar la fuerza en las falanges para lo cual es necesario aclarar que la forma general mostrada a continuación fué realizada para una fuerza por falange pero puede generalizarse facilmente a n fuerzas aplicadas.

B.1. Fuerzas aplicadas en las falanges del dedo medio

B.1.1. Matrices de transformación dedo medio

Partimos de las matrices de transformación que relacionan los frames 1, 2, 3 y la posición del efector final, en este caso la punta del dedo con respecto a la base, tales matrices son:

$${}^0T_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(q_1) & -\sin(q_1) & 0 \\ 0 & \sin(q_1) & \cos(q_1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{B.1})$$

$${}^1T_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(q_2) & -\sin(q_2) & 0 \\ 0 & \sin(q_2) & \cos(q_2) & D_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{B.2})$$

$${}^2T_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(q_3) & -\sin(q_3) & 0 \\ 0 & \sin(q_3) & \cos(q_3) & D_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{B.3})$$

$${}^3T_E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & D_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{B.4})$$

Se consideraron ciertos puntos de contacto en las falanges del dedo medio. Tales puntos de contacto se encuentran a una distancia r_j de cada articulación, esta distancia puede considerarse como la mitad de la longitud de la respectiva falange, pero para este análisis se tomará r_j como una variable. En los puntos de estudio se asumirá que la fuerza esta concentrada (ver figura B.1 para mayor ilustración). Dichos puntos son:

- punto **A** situado a una distancia r_a de la articulación q_1
- punto **B** situado a una distancia r_b de la articulación q_2
- punto **C** situado a una distancia r_c de la articulación q_3

Con ayuda de las matrices de transformación mostradas en B.1, B.2, B.3 se obtuvieron unas nuevas matrices de transformación esta vez para los puntos de contacto **A**, **B** y **C**, tales matrices son ${}^0T_A, {}^0T_B, {}^0T_C$ en el grupo de ecuaciones

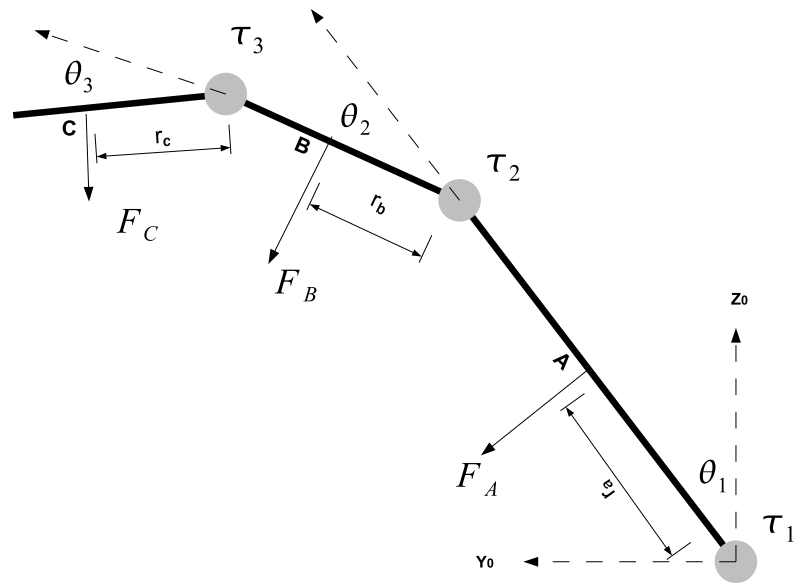


Figura B.1: Esquema de fuerzas aplicadas en las falanges del dedo medio

B.5, B.6 y B.7. Debido a que los elementos son muy extensos se mostrará elemento a elemento sus componentes usando la notación $matrix(n, m)$ con n como el numero de la fila, y m el de la columna.

$$\begin{aligned} {}^0T_A(1, 1) &= 1 \\ {}^0T_A(1, 2) &= 0 \\ {}^0T_A(1, 3) &= 0 \\ {}^0T_A(1, 4) &= 0 \\ {}^0T_A(2, 1) &= 0 \\ {}^0T_A(2, 2) &= \cos(q_1) \\ {}^0T_A(2, 3) &= -\sin(q_1) \\ {}^0T_A(2, 4) &= -\sin(q_1)r_a \\ {}^0T_A(3, 1) &= 0 \\ {}^0T_A(3, 2) &= \sin(q_1) \\ {}^0T_A(3, 3) &= \cos(q_1) \\ {}^0T_A(3, 4) &= \cos(q_1)r_a \\ {}^0T_A(4, 1) &= 0 \\ {}^0T_A(4, 2) &= 0 \\ {}^0T_A(4, 3) &= 0 \\ {}^0T_A(4, 4) &= 1 \end{aligned} \tag{B.5}$$

$${}^0T_B(1, 1) = 1$$

$${}^0T_B(1, 2) = 0$$

$${}^0T_B(1, 3) = 0$$

$${}^0T_B(1, 4) = 0$$

$${}^0T_B(2, 1) = 0$$

$${}^0T_B(2, 2) = \cos(q_1 + q_2)$$

$${}^0T_B(2, 3) = -\sin(q_1 + q_2)$$

$${}^0T_B(2, 4) = -\sin(q_1 + q_2)r_b - \sin(q_1)D_2$$

$${}^0T_B(3, 1) = 0$$

(B.6)

$${}^0T_B(3, 2) = \sin(q_1 + q_2)$$

$${}^0T_B(3, 3) = \cos(q_1 + q_2)$$

$${}^0T_B(3, 4) = \cos(q_1 + q_2)r_b + \cos(q_1)D_2$$

$${}^0T_B(4, 1) = 0$$

$${}^0T_B(4, 2) = 0$$

$${}^0T_B(4, 3) = 0$$

$${}^0T_B(4, 4) = 1$$

$$\begin{aligned}
{}^0T_C(1, 1) &= 1 \\
{}^0T_C(1, 2) &= 0 \\
{}^0T_C(1, 3) &= 0 \\
{}^0T_C(1, 4) &= 0 \\
{}^0T_C(2, 1) &= 0 \\
{}^0T_C(2, 2) &= \cos(q_1 + q_2 + q_3) \\
{}^0T_C(2, 3) &= -\sin(q_1 + q_2 + q_3) \\
{}^0T_C(2, 4) &= -\sin(q_1 + q_2 + q_3)r_c - \sin(q_1 + q_2)D_3 - \sin(q_1)D_2 \\
{}^0T_C(3, 1) &= 0 \\
{}^0T_C(3, 2) &= \sin(q_1 + q_2 + q_3) \\
{}^0T_C(3, 3) &= \cos(q_1 + q_2 + q_3) \\
{}^0T_C(3, 4) &= \cos(q_1 + q_2 + q_3)r_c + \cos(q_1 + q_2)D_3 + \cos(q_1)D_2 \\
{}^0T_C(4, 1) &= 0 \\
{}^0T_C(4, 2) &= 0 \\
{}^0T_C(4, 3) &= 0 \\
{}^0T_C(4, 4) &= 1
\end{aligned} \tag{B.7}$$

las constantes D_2 y D_3 corresponden a las distancias de la primera (falange proximal o MCP) y segunda falange (falange media o PIP).

B.1.2. Transformaciones cartesianas de los puntos de interés del dedo medio

De las anteriores matrices los tres primeros términos de la columna cuatro de las matrices de transformación mostradas en B.5, B.6 y B.7 corresponden a las funciones de transformación cartesiana \mathbf{x} , \mathbf{y} , \mathbf{z} . Para los puntos A , B y C , estas funciones son:

para el punto A:

$$\begin{aligned}\varphi_{Ax} &= 0 \\ \varphi_{Ay} &= -r_a \sin(q_1) \\ \varphi_{Az} &= r_a \cos(q_1)\end{aligned}\tag{B.8}$$

para el punto B:

$$\begin{aligned}\varphi_{Bx} &= 0 \\ \varphi_{By} &= -r_b \sin(q_1 + q_2) - D_2 \sin(q_1) \\ \varphi_{Bz} &= r_b \cos(q_1 + q_2) + D_2 \cos(q_1)\end{aligned}\tag{B.9}$$

para el punto C:

$$\begin{aligned}\varphi_{Cx} &= 0 \\ \varphi_{Cy} &= -r_c \sin(q_1 + q_2 + q_3) - D_3 \sin(q_1 + q_2) - D_2 \sin(q_1) \\ \varphi_{Cz} &= r_c \cos(q_1 + q_2 + q_3) + D_3 \cos(q_1 + q_2) + D_2 \cos(q_1)\end{aligned}\tag{B.10}$$

Estas funciones relacionan los estados de la mano q_1 , q_2 y q_3 , las dimensiones de la primera y segunda falange ¹ y el punto de aplicación del contacto. Una anotación importante es que la distancia al punto de aplicación del contacto juega un papel de variable.

B.1.3. Determinación de los pares articulares del dedo medio

Realizando un análisis de sumatoria de torques se encuentra que el torque total τ es equivalente al aporte de los torques parciales generados por cada una de las fuerzas cartesianas en los puntos A, B y C.

¹estas dimensiones que se consideran constantes debido a que los *links* que constituyen las falanges son rígidos

Para obtener el aporte de cada una de las fuerzas es necesario usar una función de transformación de la forma $\tau = J^T F$ de esta manera generalizando para varias fuerzas se tiene:

$$\tau = {}^0J_A^T F_A + {}^0J_B^T F_B + {}^0J_C^T F_C \quad (\text{B.11})$$

donde $F_A = [f_{ax} \ f_{ay} \ f_{az}]$ es las fuerzas cartesianas en el punto A, $F_B = [f_{bx} \ f_{by} \ f_{bz}]$ es las fuerzas cartesianas en el punto B y $F_C = [f_{cx} \ f_{cy} \ f_{cz}]$ las fuerzas cartesianas en el punto C.

Matriz Jacobiana de los puntos de interés del dedo medio

Para realizar los calculos de B.11 se debe obtener la matrix Jacobiana de cada uno de los puntos de esta manera los componentes de las matrices Jacobianas son de la forma:

$${}^0J_A = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_{Ax}(q)}{\partial q_1} & \frac{\partial \varphi_{Ax}(q)}{\partial q_2} & \frac{\partial \varphi_{Ax}(q)}{\partial q_3} \\ \frac{\partial \varphi_{Ay}(q)}{\partial q_1} & \frac{\partial \varphi_{Ay}(q)}{\partial q_2} & \frac{\partial \varphi_{Ay}(q)}{\partial q_3} \\ \frac{\partial \varphi_{Az}(q)}{\partial q_1} & \frac{\partial \varphi_{Az}(q)}{\partial q_2} & \frac{\partial \varphi_{Az}(q)}{\partial q_3} \end{pmatrix} \quad (\text{B.12})$$

$${}^0J_B = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_{Bx}(q)}{\partial q_1} & \frac{\partial \varphi_{Bx}(q)}{\partial q_2} & \frac{\partial \varphi_{Bx}(q)}{\partial q_3} \\ \frac{\partial \varphi_{By}(q)}{\partial q_1} & \frac{\partial \varphi_{By}(q)}{\partial q_2} & \frac{\partial \varphi_{By}(q)}{\partial q_3} \\ \frac{\partial \varphi_{Bz}(q)}{\partial q_1} & \frac{\partial \varphi_{Bz}(q)}{\partial q_2} & \frac{\partial \varphi_{Bz}(q)}{\partial q_3} \end{pmatrix} \quad (\text{B.13})$$

$${}^0J_C = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_{Cx}(q)}{\partial q_1} & \frac{\partial \varphi_{Cx}(q)}{\partial q_2} & \frac{\partial \varphi_{Cx}(q)}{\partial q_3} \\ \frac{\partial \varphi_{Cy}(q)}{\partial q_1} & \frac{\partial \varphi_{Cy}(q)}{\partial q_2} & \frac{\partial \varphi_{Cy}(q)}{\partial q_3} \\ \frac{\partial \varphi_{Cz}(q)}{\partial q_1} & \frac{\partial \varphi_{Cz}(q)}{\partial q_2} & \frac{\partial \varphi_{Cz}(q)}{\partial q_3} \end{pmatrix} \quad (\text{B.14})$$

de esta manera las matrices Jacobianas para los puntos A, B y C son:

$$\begin{aligned}
{}^0J_A(1,1) &= 0 \\
{}^0J_A(1,2) &= 0 \\
{}^0J_A(1,3) &= 0 \\
{}^0J_A(2,1) &= -\cos(q_1) r_a \\
{}^0J_A(2,2) &= 0 \\
{}^0J_A(2,3) &= 0 \\
{}^0J_A(3,1) &= -\sin(q_1) r_a \\
{}^0J_A(3,2) &= 0 \\
{}^0J_A(3,3) &= 0
\end{aligned} \tag{B.15}$$

$$\begin{aligned}
{}^0J_B(1,1) &= 0 \\
{}^0J_B(1,2) &= 0 \\
{}^0J_B(1,3) &= 0 \\
{}^0J_B(2,1) &= -\cos(q_1 + q_2) r_b - \cos(q_1) D_2 \\
{}^0J_B(2,2) &= -\cos(q_1 + q_2) r_b \\
{}^0J_B(2,3) &= 0 \\
{}^0J_B(3,1) &= -\sin(q_1 + q_2) r_b - \sin(q_1) D_2 \\
{}^0J_B(3,2) &= -\sin(q_1 + q_2) r_b \\
{}^0J_B(3,3) &= 0
\end{aligned} \tag{B.16}$$

$$\begin{aligned}
 {}^0 J_C(1, 1) &= 0 \\
 {}^0 J_C(1, 2) &= 0 \\
 {}^0 J_C(1, 3) &= 0 \\
 {}^0 J_C(2, 1) &= -\cos(q_1 + q_2 + q_3) r_c \\
 &\quad -\cos(q_1 + q_2) D_3 - \cos(q_1) D_2 \\
 {}^0 J_C(2, 2) &= -\cos(q_1 + q_2 + q_3) r_c \\
 &\quad -\cos(q_1 + q_2) D_3 \\
 {}^0 J_C(2, 3) &= -\cos(q_1 + q_2 + q_3) r_c \\
 {}^0 J_C(3, 1) &= -\sin(q_1 + q_2 + q_3) r_c \\
 &\quad -\sin(q_1 + q_2) D_3 - \sin(q_1) D_2 \\
 {}^0 J_C(3, 2) &= -\sin(q_1 + q_2 + q_3) r_c \\
 &\quad -\sin(q_1 + q_2) D_3 \\
 {}^0 J_C(3, 3) &= -\sin(q_1 + q_2 + q_3) r_c
 \end{aligned} \tag{B.17}$$

Pares articulares del dedo medio

El vector de torques $\tau = [\tau_1 \ \tau_2 \ \tau_3]^T$ para las articulaciones 1, 2 y 3 esta compuesto por los siguientes elementos:

$$\begin{aligned}
 \tau_1 &= -\cos(q_1) r_a f_{ay} - \sin(q_1) r_a f_{az} + \\
 &\quad [-\cos(q_1 + q_2) r_b - \cos(q_1) D_2] f_{by} + \\
 &\quad [-\sin(q_1 + q_2) r_b - \sin(q_1) D_2] f_{bz} + \\
 &\quad [-\cos(q_1 + q_2 + q_3) r_c - \cos(q_1 + q_2) D_3 - \cos(q_1) D_2] f_{cy} + \\
 &\quad [-\sin(q_1 + q_2 + q_3) r_c - \sin(q_1 + q_2) D_3 - \sin(q_1) D_2] f_{cz}
 \end{aligned} \tag{B.18}$$

$$\begin{aligned}
 \tau_2 = & -\cos(q_1 + q_2)r_b f_{by} - \sin(q_1 + q_2)r_b f_{bz} + \\
 & [-\cos(q_1 + q_2 + q_3)r_c - \cos(q_1 + q_2)D_3]f_{cy} + \\
 & [-\sin(q_1 + q_2 + q_3)r_c - \sin(q_1 + q_2)D_3]f_{cz}
 \end{aligned} \tag{B.19}$$

$$\tau_3 = -\cos(q_1 + q_2 + q_3)r_c f_{cy} - \sin(q_1 + q_2 + q_3)r_c f_{cz} \tag{B.20}$$

Este metodo puede ampliarse al evento de presencia de multiples fuerzas en cada una de las falanges. Se puede observar que en el esquema mostrado en la figura B.1 se muestra solo una fuerza por falange. F_A con componentes cartesianos $[f_{ax} f_{ay} f_{az}]$ a una distancia r_a de la articulación q_1 , F_B con componentes cartesianos $[f_{bx} f_{by} f_{bz}]$ a una distancia r_b de la articulación q_2 y F_C con componentes cartesianos $[f_{cx} f_{cy} f_{cz}]$ a una distancia r_c de la articulación q_3 , pero suponiendo que se tiene medición de varias fuerzas a distintas posiciones en una misma falange como por ejemplo : F_{A1} con componentes cartesianos $[f_{ax1} f_{ay1} f_{az1}]$ a una distancia r_{a1} , F_{A2} con componentes cartesianos $[f_{ax2} f_{ay2} f_{az2}]$ a una distancia r_{a2} , F_{An} con componentes cartesianos $[f_{axn} f_{ayn} f_{azn}]$ a una distancia r_{an} y todas estas fuerzas presentandose en la falange próximal y de manera similar en las falanges media y distal. Si se generalizan las expresiones B.18, B.19, B.20 a una representación que incluya esas multiples fuerzas se tiene:

$$\begin{aligned}
 \tau_1 = & -\cos(q_1)\mathbf{R}_a \mathbf{f}_{ay} - \sin(q_1)\mathbf{R}_a \mathbf{f}_{az} + \\
 & [-\cos(q_1 + q_2)\mathbf{R}_b - \cos(q_1)D_2]\mathbf{f}_{by} + \\
 & [-\sin(q_1 + q_2)\mathbf{R}_b - \sin(q_1)D_2]\mathbf{f}_{bz} + \\
 & [-\cos(q_1 + q_2 + q_3)\mathbf{R}_c - \cos(q_1 + q_2)D_3 - \cos(q_1)D_2]\mathbf{f}_{cy} + \\
 & [-\sin(q_1 + q_2 + q_3)\mathbf{R}_c - \sin(q_1 + q_2)D_3 - \sin(q_1)D_2]\mathbf{f}_{cz}
 \end{aligned} \tag{B.21}$$

$$\begin{aligned}
 \tau_2 = & -\cos(q_1 + q_2)\mathbf{R}_b\mathbf{f}_{by} - \sin(q_1 + q_2)\mathbf{R}_b\mathbf{f}_{bz} + \\
 & [-\cos(q_1 + q_2 + q_3)\mathbf{R}_c - \cos(q_1 + q_2)D_3]\mathbf{f}_{cy} + \\
 & [-\sin(q_1 + q_2 + q_3)\mathbf{R}_c - \sin(q_1 + q_2)D_3]\mathbf{f}_{cz}
 \end{aligned} \tag{B.22}$$

$$\tau_3 = -\cos(q_1 + q_2 + q_3)\mathbf{R}_c\mathbf{f}_{cy} - \sin(q_1 + q_2 + q_3)\mathbf{R}_c\mathbf{f}_{cz} \tag{B.23}$$

donde

$$\mathbf{R}_a: [r_{a1} \ r_{a2} \ \dots \ r_{an}] ,$$

$$\mathbf{R}_b: [r_{b1} \ r_{b2} \ \dots \ r_{bn}],$$

$$\mathbf{R}_c: [r_{c1} \ r_{c2} \ \dots \ r_{cn}].$$

$$\mathbf{f}_{ax}: [f_{ax1} \ f_{ax2} \ \dots \ f_{axn}]^T,$$

$$\mathbf{f}_{ay}: [f_{ay1} \ f_{ay2} \ \dots \ f_{ayn}]^T,$$

$$\mathbf{f}_{az}: [f_{az1} \ f_{az2} \ \dots \ f_{azn}]^T,$$

$$\mathbf{f}_{bx}: [f_{bx1} \ f_{bx2} \ \dots \ f_{bxn}]^T,$$

$$\mathbf{f}_{by}: [f_{by1} \ f_{by2} \ \dots \ f_{byn}]^T,$$

$$\mathbf{f}_{bz}: [f_{bz1} \ f_{bz2} \ \dots \ f_{bzn}]^T,$$

$$\mathbf{f}_{cx}: [f_{cx1} \ f_{cx2} \ \dots \ f_{cxn}]^T,$$

$$\mathbf{f}_{cy}: [f_{cy1} \ f_{cy2} \ \dots \ f_{cyn}]^T,$$

$$\mathbf{f}_{cz}: [f_{cz1} \ f_{cz2} \ \dots \ f_{czn}]^T,$$

B.2. Fuerzas aplicadas en las falanges del dedo índice

B.2.1. Matrices de transformación dedo índice

Partiendo de un análisis similar al realizado en B.1, las matrices de transformación que relacionan los frames 4, 5, 6 y la posición del efector final con

respecto a la base son:

$${}^0T_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & R_5 \\ 0 & \cos(q_5) & -\sin(q_5) & 0 \\ 0 & \sin(q_5) & \cos(q_5) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{B.24})$$

$${}^5T_6 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(q_6) & -\sin(q_6) & 0 \\ 0 & \sin(q_6) & \cos(q_6) & D_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{B.25})$$

$${}^6T_7 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(q_7) & -\sin(q_7) & 0 \\ 0 & \sin(q_7) & \cos(q_7) & D_7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{B.26})$$

$${}^7T'_E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & D_8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{B.27})$$

De igual manera que en la sección B.1 se consideraron ciertos puntos de contacto en las falanges a distancias r_j de cada articulación y puntos que coinciden con la aplicación de la fuerza por parte del dedo a los objetos (ver figura B.2), tales puntos son:

- punto **D** situado a una distancia r_5 de la articulación q_5
- punto **E** situado a una distancia r_6 de la articulación q_6
- punto **F** situado a una distancia r_7 de la articulación q_7

Con ayuda de las matrices de transformación mostradas en B.24, B.25, B.26 se encontraron las matrices de transformación de los puntos **D**, **E** y **F**, a

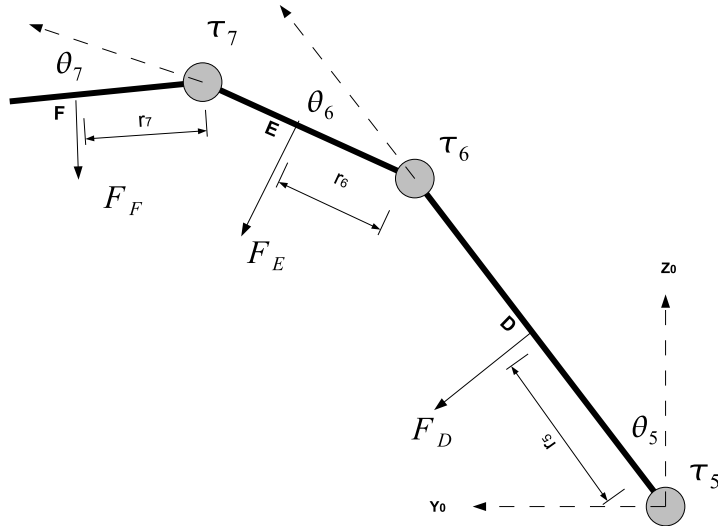


Figura B.2: Esquema de fuerzas aplicadas en las falanges del dedo índice

continuación se muestran sus elementos.

$${}^0T_D(1, 1) = 1$$

$${}^0T_D(1, 2) = 0$$

$${}^0T_D(1, 3) = 0$$

$${}^0T_D(1, 4) = R_5$$

$${}^0T_D(2, 1) = 0$$

$${}^0T_D(2, 2) = \cos(q_5)$$

$${}^0T_D(2, 3) = -\sin(q_5)$$

$${}^0T_D(2, 4) = -\sin(q_5)r_5$$

$${}^0T_D(3, 1) = 0$$

$${}^0T_D(3, 2) = \sin(q_5)$$

$${}^0T_D(3, 3) = \cos(q_5)$$

$${}^0T_D(3, 4) = \cos(q_5)r_5$$

$${}^0T_D(4, 1) = 0$$

$${}^0T_D(4, 2) = 0$$

$${}^0T_D(4, 3) = 0$$

$${}^0T_D(4, 4) = 1$$

(B.28)

$$\begin{aligned}
{}^0T_E(1, 1) &= 1 \\
{}^0T_E(1, 2) &= 0 \\
{}^0T_E(1, 3) &= 0 \\
{}^0T_E(1, 4) &= R_5 \\
{}^0T_E(2, 1) &= 0 \\
{}^0T_E(2, 2) &= \cos(q_5 + q_6) \\
{}^0T_E(2, 3) &= -\sin(q_5 + q_6) \\
{}^0T_E(2, 4) &= -\sin(q_5 + q_6)r_6 - \sin(q_5)D_6 \\
{}^0T_E(3, 1) &= 0 \\
{}^0T_E(3, 2) &= \sin(q_5 + q_6) \\
{}^0T_E(3, 3) &= \cos(q_5 + q_6) \\
{}^0T_E(3, 4) &= \cos(q_5 + q_6)r_6 + \cos(q_5)D_6 \\
{}^0T_E(4, 1) &= 0 \\
{}^0T_E(4, 2) &= 0 \\
{}^0T_E(4, 3) &= 0 \\
{}^0T_E(4, 4) &= 1
\end{aligned} \tag{B.29}$$

$$\begin{aligned}
{}^0T_F(1, 1) &= 1 \\
{}^0T_F(1, 2) &= 0 \\
{}^0T_F(1, 3) &= 0 \\
{}^0T_F(1, 4) &= R_5 \\
{}^0T_F(2, 1) &= 0 \\
{}^0T_F(2, 2) &= \cos(q_5 + q_6 + q_7) \\
{}^0T_F(2, 3) &= -\sin(q_5 + q_6 + q_7) \\
{}^0T_F(2, 4) &= -\sin(q_5 + q_6 + q_7)r_7 - \sin(q_5 + q_6)D_7 - \sin(q_5)D_6 \\
{}^0T_F(3, 1) &= 0 \\
{}^0T_F(3, 2) &= \sin(q_5 + q_6 + q_7) \\
{}^0T_F(3, 3) &= \cos(q_5 + q_6 + q_7) \\
{}^0T_F(3, 4) &= \cos(q_5 + q_6 + q_7)r_7 + \cos(q_5 + q_6)D_7 + \cos(q_5)D_6 \\
{}^0T_F(4, 1) &= 0 \\
{}^0T_F(4, 2) &= 0 \\
{}^0T_F(4, 3) &= 0 \\
{}^0T_F(4, 4) &= 1
\end{aligned} \tag{B.30}$$

las distancias D_6 y D_7 corresponden a las distancias de la primera y segunda falange del dedo índice.

B.2.2. Transformaciones cartesianas de los puntos de interés del dedo índice

De las anteriores matrices los tres primeros términos de la columna cuatro de cada matriz de transformación corresponden a las transformaciones cartesianas \mathbf{x} , \mathbf{y} , \mathbf{z} las cuales son:

Para el punto D:

$$\begin{aligned}
 \varphi_{Dx} &= R_5 \\
 \varphi_{Dy} &= -\sin(q_5)r_5 \\
 \varphi_{Dz} &= \cos(q_5)r_5
 \end{aligned} \tag{B.31}$$

Para el punto E:

$$\begin{aligned}
 \varphi_{Ex} &= R_5 \\
 \varphi_{Ey} &= -\sin(q_5 + q_6)r_6 - \sin(q_5)D_6 \\
 \varphi_{Ez} &= \cos(q_5 + q_6)r_6 + \cos(q_5)D_6
 \end{aligned} \tag{B.32}$$

Para el punto F:

$$\begin{aligned}
 \varphi_{Fx} &= R_5 \\
 \varphi_{Fy} &= -\sin(q_5 + q_6 + q_7)r_7 - \sin(q_5 + q_6)D_7 - \sin(q_5)D_6 \\
 \varphi_{Fz} &= \cos(q_5 + q_6 + q_7)r_7 + \cos(q_5 + q_6)D_7 + \cos(q_5)D_6
 \end{aligned} \tag{B.33}$$

B.2.3. Determinación de los pares articulares del dedo índice

El torque total τ es equivalente al aporte de las fuerzas cartesianas en los puntos D,E y F por sus respectivas Jacobianas transpuestas es de la forma

$$\tau = {}^0J_D^T F_D + {}^0J_E^T F_E + {}^0J_F^T F_F \tag{B.34}$$

donde $F_D = [f_{dx} \ f_{dy} \ f_{dz}]$ es las fuerzas cartesianas en el punto D, $F_e = [f_{ex} \ f_{ey} \ f_{ez}]$ es las fuerzas cartesianas en el punto E y $F_f = [f_{fx} \ f_{fy} \ f_{fz}]$ las fuerzas cartesianas en el punto F.

Matriz Jacobiana de los puntos de interés del dedo índice

El cálculo de la matrix Jacobiana es de la forma:

$${}^0 J_D = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_{Dx}(q)}{\partial q_5} & \frac{\partial \varphi_{Dx}(q)}{\partial q_6} & \frac{\partial \varphi_{Dx}(q)}{\partial q_7} \\ \frac{\partial \varphi_{Dy}(q)}{\partial q_5} & \frac{\partial \varphi_{Dy}(q)}{\partial q_6} & \frac{\partial \varphi_{Dy}(q)}{\partial q_7} \\ \frac{\partial \varphi_{Dz}(q)}{\partial q_5} & \frac{\partial \varphi_{Dz}(q)}{\partial q_6} & \frac{\partial \varphi_{Dz}(q)}{\partial q_7} \end{pmatrix} \quad (\text{B.35})$$

$${}^0 J_E = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_{Ex}(q)}{\partial q_5} & \frac{\partial \varphi_{Ex}(q)}{\partial q_6} & \frac{\partial \varphi_{Ex}(q)}{\partial q_7} \\ \frac{\partial \varphi_{Ey}(q)}{\partial q_5} & \frac{\partial \varphi_{Ey}(q)}{\partial q_6} & \frac{\partial \varphi_{Ey}(q)}{\partial q_7} \\ \frac{\partial \varphi_{Ez}(q)}{\partial q_5} & \frac{\partial \varphi_{Ez}(q)}{\partial q_6} & \frac{\partial \varphi_{Ez}(q)}{\partial q_7} \end{pmatrix} \quad (\text{B.36})$$

$${}^0 J_F = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_{Fx}(q)}{\partial q_5} & \frac{\partial \varphi_{Fx}(q)}{\partial q_6} & \frac{\partial \varphi_{Fx}(q)}{\partial q_7} \\ \frac{\partial \varphi_{Fy}(q)}{\partial q_5} & \frac{\partial \varphi_{Fy}(q)}{\partial q_6} & \frac{\partial \varphi_{Fy}(q)}{\partial q_7} \\ \frac{\partial \varphi_{Fz}(q)}{\partial q_5} & \frac{\partial \varphi_{Fz}(q)}{\partial q_6} & \frac{\partial \varphi_{Fz}(q)}{\partial q_7} \end{pmatrix} \quad (\text{B.37})$$

de esta manera los elementos de las Jacobianas para los puntos D, E y F son:

$$\begin{aligned} {}^0 J_D(1, 1) &= 0 \\ {}^0 J_D(1, 2) &= 0 \\ {}^0 J_D(1, 3) &= 0 \\ {}^0 J_D(2, 1) &= -\cos(q_5)r_5 \\ {}^0 J_D(2, 2) &= 0 \\ {}^0 J_D(2, 3) &= 0 \\ {}^0 J_D(3, 1) &= -\sin(q_5)r_5 \\ {}^0 J_D(3, 2) &= 0 \\ {}^0 J_D(3, 3) &= 0 \end{aligned} \quad (\text{B.38})$$

$$\begin{aligned}
{}^0 J_E(1, 1) &= 0 \\
{}^0 J_E(1, 2) &= 0 \\
{}^0 J_E(1, 3) &= 0 \\
{}^0 J_E(2, 1) &= -\cos(q_5 + q_6)r_6 - \cos(q_5)D_6 \\
{}^0 J_E(2, 2) &= -\cos(q_5 + q_6)r_6 \\
{}^0 J_E(2, 3) &= 0 \\
{}^0 J_E(3, 1) &= -\sin(q_5 + q_6)r_6 - \sin(q_5)D_6 \\
{}^0 J_E(3, 2) &= -\sin(q_5 + q_6)r_6 \\
{}^0 J_E(3, 3) &= 0
\end{aligned} \tag{B.39}$$

$$\begin{aligned}
{}^0 J_F(1, 1) &= 0 \\
{}^0 J_F(1, 2) &= 0 \\
{}^0 J_F(1, 3) &= 0 \\
{}^0 J_F(2, 1) &= -\cos(q_5 + q_6 + q_7)r_7 - \cos(q_5 + q_6)D_7 - \cos(q_5)D_6 \\
{}^0 J_F(2, 2) &= -\cos(q_5 + q_6 + q_7)r_7 - \cos(q_5 + q_6)D_7 \\
{}^0 J_F(2, 3) &= -\cos(q_5 + q_6 + q_7)r_7 \\
{}^0 J_F(3, 1) &= -\sin(q_5 + q_6 + q_7)r_7 - \sin(q_5 + q_6)D_7 - \sin(q_5)D_6 \\
{}^0 J_F(3, 2) &= -\sin(q_5 + q_6 + q_7)r_7 - \sin(q_5 + q_6)D_7 \\
{}^0 J_F(3, 3) &= -\sin(q_5 + q_6 + q_7)r_7
\end{aligned} \tag{B.40}$$

Pares articulares del dedo índice

De esta manera el vector de torques $\tau = [\tau_5 \ \tau_6 \ \tau_7]^T$ para las articulaciones numeradas con 5, 6 y 7 esta compuesto por los siguientes elementos:

$$\begin{aligned}
 \tau_5 = & -\cos(q_5)r_5f_{dy} - \sin(q_5)r_5f_{dz} + \\
 & (-\cos(q_5 + q_6)r_6 - \cos(q_5)D_6)f_{ey} + \\
 & (-\sin(q_5 + q_6)r_6 - \sin(q_5)D_6)f_{ez} + \\
 & (-\cos(q_5 + q_6 + q_7)r_7 - \cos(q_5 + q_6)D_7 - \cos(q_5)D_6)f_{fy} + \\
 & (-\sin(q_5 + q_6 + q_7)r_7 - \sin(q_5 + q_6)D_7 - \sin(q_5)D_6)f_{fz}
 \end{aligned} \tag{B.41}$$

$$\begin{aligned}
 \tau_6 = & -\cos(q_5 + q_6)r_6f_{ey} - \sin(q_5 + q_6)r_6f_{ez} + \\
 & (-\cos(q_5 + q_6 + q_7)r_7 - \cos(q_5 + q_6)D_7)f_{fy} + \\
 & (-\sin(q_5 + q_6 + q_7)r_7 - \sin(q_5 + q_6)D_7)f_{fz}
 \end{aligned} \tag{B.42}$$

$$\tau_7 = -\cos(q_5 + q_6 + q_7)r_7f_{fy} - \sin(q_5 + q_6 + q_7)r_7f_{fz} \tag{B.43}$$

y generalizando para multiples fuerzas,

$$\begin{aligned}
 \tau_5 = & -\cos(q_5)\mathbf{R}_d\mathbf{f}_{dy} - \sin(q_5)\mathbf{R}_d\mathbf{f}_{dz} + \\
 & (-\cos(q_5 + q_6)\mathbf{R}_e - \cos(q_5)D_6)\mathbf{f}_{ey} + \\
 & (-\sin(q_5 + q_6)\mathbf{R}_e - \sin(q_5)D_6)\mathbf{f}_{ez} + \\
 & (-\cos(q_5 + q_6 + q_7)\mathbf{R}_f - \cos(q_5 + q_6)D_7 - \cos(q_5)D_6)\mathbf{f}_{fy} + \\
 & (-\sin(q_5 + q_6 + q_7)\mathbf{R}_f - \sin(q_5 + q_6)D_7 - \sin(q_5)D_6)\mathbf{f}_{fz}
 \end{aligned} \tag{B.44}$$

$$\begin{aligned}
 \tau_6 = & -\cos(q_5 + q_6)\mathbf{R}_e\mathbf{f}_{ey} - \sin(q_5 + q_6)r_6\mathbf{f}_{ez} + \\
 & (-\cos(q_5 + q_6 + q_7)\mathbf{R}_f - \cos(q_5 + q_6)D_7)\mathbf{f}_{fy} + \\
 & (-\sin(q_5 + q_6 + q_7)\mathbf{R}_f - \sin(q_5 + q_6)D_7)\mathbf{f}_{fz}
 \end{aligned} \tag{B.45}$$

$$\tau_7 = -\cos(q_5 + q_6 + q_7)\mathbf{R}_f\mathbf{f}_{fy} - \sin(q_5 + q_6 + q_7)\mathbf{R}_f\mathbf{f}_{fz} \tag{B.46}$$

$$\begin{aligned}
 \text{donde, } \mathbf{R}_d: & [r_{d1} \ r_{d2} \ \dots \ r_{dn}] , \\
 \mathbf{R}_e: & [r_{e1} \ r_{e2} \ \dots \ r_{en}] , \\
 \mathbf{R}_f: & [r_{f1} \ r_{f2} \ \dots \ r_{fn}] . \\
 \mathbf{f}_{dx}: & [f_{dx1} \ f_{dx2} \ \dots \ f_{dxn}]^T , \\
 \mathbf{f}_{dy}: & [f_{dy1} \ f_{dy2} \ \dots \ f_{dyn}]^T , \\
 \mathbf{f}_{dz}: & [f_{dz1} \ f_{dz2} \ \dots \ f_{dzn}]^T , \\
 \mathbf{f}_{ex}: & [f_{ex1} \ f_{ex2} \ \dots \ f_{exn}]^T , \\
 \mathbf{f}_{ey}: & [f_{ey1} \ f_{ey2} \ \dots \ f_{eyn}]^T , \\
 \mathbf{f}_{ez}: & [f_{ez1} \ f_{ez2} \ \dots \ f_{ezn}]^T , \\
 \mathbf{f}_{fx}: & [f_{fx1} \ f_{fx2} \ \dots \ f_{fxn}]^T , \\
 \mathbf{f}_{fy}: & [f_{fy1} \ f_{fy2} \ \dots \ f_{fyn}]^T , \\
 \mathbf{f}_{fz}: & [f_{fz1} \ f_{fz2} \ \dots \ f_{fzn}]^T ,
 \end{aligned}$$

de la misma forma esta generalización es aplicada para el dedo pulgar en las correspondientes expresiones para los pares articulares.

B.3. Fuerzas aplicadas en las falanges del dedo pulgar

B.3.1. Matrices de transformación dedo pulgar

Partimos de las matrices de transformación que relacionan los frames 9, 10, 11 y la posición del efector final con respecto a la base, tales matrices son:

$${}^{0''}T_9 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\sin(q_9) & \frac{\sqrt{2}}{2}\cos(q_9) & 0 \\ 0 & \cos(q_9) & -\sin(q_9) & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\sin(q_9) & \frac{\sqrt{2}}{2}\cos(q_9) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{B.47})$$

$${}^9T_{10} = \begin{bmatrix} 0 & \cos(q_{10}) & \sin(q_{10}) & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sin(q_{10}) & \cos(q_{10}) & D_{10} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{B.48})$$

$${}^{10}T_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(q_{11}) & -\sin(q_{11}) & 0 \\ 0 & \sin(q_{11}) & \cos(q_{11}) & D_{11} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{B.49})$$

$${}^{11}T_{E''} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & D_8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{B.50})$$

de igual manera que en las secciones anteriores se consideraron ciertos puntos de contacto en las falanges a distancias r_j de cada articulación y de aplicación de la fuerza por parte de la mano a los objetos (ver figura B.2), tales puntos son:

- punto **G** situado a una distancia r_9 de la articulación q_9
- punto **H** situado a una distancia r_{10} de la articulación q_{10}
- punto **I** situado a una distancia r_{11} de la articulación q_{11}

Con ayuda de las matrices de transformación mostradas en B.47,B.48,B.49 se encontró las matrices de transformación de los puntos **G**, **H** y **I** las cuales

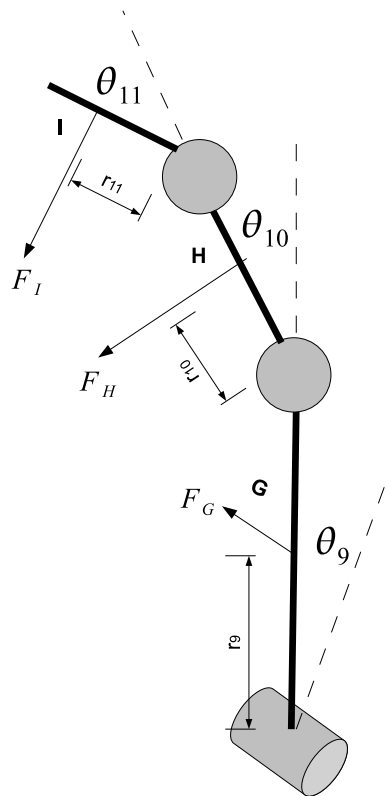


Figura B.3: Esquema de fuerzas aplicadas en las falanges del dedo pulgar

se muestran a continuación elemento a elemento,

$$\begin{aligned}
 {}^0T_G(1, 1) &= \frac{1}{2} \\
 {}^0T_G(1, 2) &= \frac{\sqrt{2}}{2} \sin(q_9) \\
 {}^0T_G(1, 3) &= \frac{\sqrt{2}}{2} \cos(q_9) \\
 {}^0T_G(1, 4) &= \frac{\sqrt{2}}{2} \cos(q_9) r_9 \\
 {}^0T_G(2, 1) &= 0 \\
 {}^0T_G(2, 2) &= \cos(q_9) \\
 {}^0T_G(2, 3) &= -\sin(q_9) \\
 {}^0T_G(2, 4) &= -\sin(q_9) r_9 \\
 {}^0T_G(3, 1) &= \frac{\sqrt{2}}{2} \\
 {}^0T_G(3, 2) &= \frac{\sqrt{2}}{2} \sin(q_9) \\
 {}^0T_G(3, 3) &= \frac{\sqrt{2}}{2} \cos(q_9) \\
 {}^0T_G(3, 4) &= \frac{\sqrt{2}}{2} \cos(q_9) r_9 \\
 {}^0T_G(4, 1) &= 0 \\
 {}^0T_G(4, 2) &= 0 \\
 {}^0T_G(4, 3) &= 0 \\
 {}^0T_G(4, 4) &= 1
 \end{aligned} \tag{B.51}$$

$$\begin{aligned}
 {}^0T_H(1, 1) &= \frac{\sqrt{2}}{2} \sin(q_9) \\
 {}^0T_H(2, 1) &= \cos(q_9) \\
 {}^0T_H(3, 1) &= \frac{\sqrt{2}}{2} \sin(q_9) \\
 {}^0T_H(4, 1) &= 0 \\
 {}^0T_H(1, 2) &= \frac{\sqrt{2}}{2} \cos(q_{10}) + \frac{\sqrt{2}}{4} \sin(q_9 + q_{10}) - \frac{\sqrt{2}}{4} \sin(q_9 - q_{10}) \\
 {}^0T_H(2, 2) &= -\frac{1}{2} \cos(q_9 - q_{10}) + \frac{1}{2} \cos(q_9 + q_{10}) \\
 {}^0T_H(3, 2) &= \frac{1}{2} \sqrt{2} \cos(q_{10}) + \frac{\sqrt{2}}{4} \sin(q_9 + q_{10}) - \frac{\sqrt{2}}{4} \sin(q_9 - q_{10}) \\
 {}^0T_H(4, 2) &= 0 \\
 {}^0T_H(1, 3) &= \frac{\sqrt{2}}{2} \sin(q_{10}) + \frac{\sqrt{2}}{4} \cos(q_9 - q_{10}) + 1\sqrt{2} \cos(q_9 + q_{10}) \\
 {}^0T_H(2, 3) &= -\frac{1}{2} \sin(q_9 + q_{10}) - \frac{1}{2} \sin(q_9 - q_{10}) \\
 {}^0T_H(3, 3) &= \frac{\sqrt{2}}{2} \sin(q_{10}) + \frac{\sqrt{2}}{4} \cos(q_9 - q_{10}) + \frac{\sqrt{2}}{4} \cos(q_9 + q_{10}) \\
 {}^0T_H(4, 3) &= 0 \\
 {}^0T_H(1, 4) &= \frac{1}{2} r_{10} \sqrt{2} \sin(q_{10}) + \frac{\sqrt{2}}{4} r_{10} \cos(q_9 - q_{10}) \\
 &\quad + \frac{\sqrt{2}}{4} 10 \cos(q_9 + q_{10}) + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos(q_9) D_{10} \\
 {}^0T_H(2, 4) &= -\frac{1}{2} r_{10} \sin(q_9 + q_{10}) \\
 &\quad - \frac{1}{2} r_{10} \sin(q_9 - q_{10}) - \sin(q_9) D_{10} \\
 {}^0T_H(3, 4) &= \frac{1}{2} r_{10} \sqrt{2} \sin(q_{10}) \\
 &\quad + \frac{\sqrt{2}}{4} r_{10} \cos(q_9 - q_{10}) \\
 &\quad + \frac{\sqrt{2}}{4} r_{10} \cos(q_9 + q_{10}) + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos(q_9) D_{10} \\
 {}^0T_H(4, 4) &= 1
 \end{aligned} \tag{B.52}$$

$$\begin{aligned}
 {}^0T_I(1, 1) &= \frac{\sqrt{2}}{2} \sin(q_9) \\
 {}^0T_I(2, 1) &= \cos(q_9) \\
 {}^0T_I(3, 1) &= \frac{\sqrt{2}}{2} \sin(q_9) \\
 {}^0T_I(4, 1) &= 0 \\
 {}^0T_I(1, 2) &= \frac{\sqrt{2}}{2} \cos(q_{11} - q_{10}) \\
 &\quad + \frac{\sqrt{2}}{4} \sin(q_{11} + q_9 + q_{10}) + \frac{\sqrt{2}}{4} \sin(q_{11} - q_9 + q_{10}) \\
 {}^0T_I(2, 2) &= -1/2 \cos(q_{11} - q_9 + q_{10}) + 1/2 \cos(q_{11} + q_9 + q_{10}) \\
 {}^0T_I(3, 2) &= \frac{\sqrt{2}}{2} \cos(q_{11} - q_{10}) \\
 &\quad + \frac{\sqrt{2}}{4} \sin(q_{11} + q_9 + q_{10}) + \frac{\sqrt{2}}{4} \sin(q_{11} - q_9 + q_{10}) \\
 {}^0T_I(4, 2) &= 0 \\
 {}^0T_I(1, 3) &= -\frac{\sqrt{2}}{2} \sin(q_{11} - q_{10}) \\
 &\quad + \frac{\sqrt{2}}{4} \cos(q_{11} + q_9 + q_{10}) + \frac{\sqrt{2}}{4} \cos(q_{11} - q_9 + q_{10}) \\
 {}^0T_I(2, 3) &= \frac{1}{2} \sin(q_{11} - q_9 + q_{10}) - 1/2 \sin(q_{11} + q_9 + q_{10}) \\
 {}^0T_I(3, 3) &= -\frac{\sqrt{2}}{2} \sin(q_{11} - q_{10}) \\
 &\quad + \frac{\sqrt{2}}{4} \cos(q_{11} + q_9 + q_{10}) + \frac{\sqrt{2}}{4} \cos(q_{11} - q_9 + q_{10}) \\
 {}^0T_I(4, 3) &= 0
 \end{aligned} \tag{B.53}$$

$$\begin{aligned}
 {}^0T_I(1, 4) &= -\frac{\sqrt{2}}{2}r_{11}\sin(q_{11} - q_{10}) + \frac{\sqrt{2}}{4}r_{11}\cos(q_{11} + q_9 + q_{10}) \\
 &\quad + \frac{\sqrt{2}}{4}r_{11}\cos(q_{11} - q_9 + q_{10}) + \frac{\sqrt{2}}{2}D_{11}\sin(q_{10}) \\
 &\quad + \frac{\sqrt{2}}{4}D_{11}\cos(-q_9 + q_{10}) + \frac{\sqrt{2}}{4}D_{11}\cos(q_9 + q_{10}) \\
 &\quad + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos(q_9)D_{10} \\
 {}^0T_I(2, 4) &= \frac{1}{2}r_{11}\sin(q_{11} - q_9 + q_{10}) \\
 &\quad - \frac{1}{2}r_{11}\sin(q_{11} + q_9 + q_{10}) - \frac{1}{2}D_{11}\sin(q_9 + q_{10}) \\
 &\quad + \frac{1}{2}D_{11}\sin(-q_9 + q_{10}) - \sin(q_9)D_{10} \\
 {}^0T_I(3, 4) &= -\frac{\sqrt{2}}{2}r_{11}\sin(q_{11} - q_{10}) \\
 &\quad + \frac{\sqrt{2}}{4}r_{11}\cos(q_{11} + q_9 + q_{10}) \\
 &\quad + \frac{\sqrt{2}}{4}r_{11}\cos(q_{11} - q_9 + q_{10}) \\
 &\quad + \frac{\sqrt{2}}{2}D_{11}\sin(q_{10}) + \frac{\sqrt{2}}{4}D_{11}\cos(-q_9 + q_{10}) \\
 &\quad + \frac{\sqrt{2}}{4}D_{11}\cos(q_9 + q_{10}) + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos(q_9)D_{10} \\
 {}^0T_I(4, 4) &= 0
 \end{aligned} \tag{B.54}$$

las distancias D_{10} y D_{11} corresponden a las distancias de las falanges proximal y media del dedo pulgar.

B.3.2. Transformaciones cartesianas de los puntos de interés del dedo pulgar

De las anteriores matrices los tres primeros términos de la columna cuatro de cada matriz de transformación corresponden a las transformaciones cartesianas \mathbf{x} , \mathbf{y} , \mathbf{z} las cuales son:

para el punto G:

$$\begin{aligned}
 \varphi_{Gx} &= \frac{\sqrt{2}}{2} \cos(q_9) r_9 \\
 \varphi_{Gy} &= -\sin(q_9) r_9 \\
 \varphi_{Gz} &= \frac{\sqrt{2}}{2} \cos(q_9) r_9
 \end{aligned} \tag{B.55}$$

para el punto H:

$$\begin{aligned}
 \varphi_{Hx} &= \frac{\sqrt{2}}{2} r_{10} \sin(q_{10}) + \frac{\sqrt{2}}{4} r_{10} \cos(-q_9 + q_{10}) \\
 &\quad + \frac{\sqrt{2}}{4} r_{10} \cos(q_9 + q_{10}) + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos(q_9) D_{10} \\
 \varphi_{Hy} &= -\frac{1}{2} r_{10} \sin(q_9 + q_{10}) + \frac{1}{2} r_{10} \sin(-q_9 + q_{10}) - \sin(q_9) D_{10} \\
 \varphi_{Hz} &= -\frac{1}{2} r_{10} \sin(q_9 + q_{10}) + \frac{1}{2} r_{10} \sin(-q_9 + q_{10}) - \sin(q_9) D_{10}
 \end{aligned} \tag{B.56}$$

para el punto I:

$$\begin{aligned}
 \varphi_{Ix} &= -\frac{\sqrt{2}}{2} r_{11} \sin(q_{11} - q_{10}) + \frac{\sqrt{2}}{4} r_{11} \cos(q_{11} + q_9 + q_{10}) \\
 &\quad + \frac{\sqrt{2}}{4} r_{11} \cos(q_{11} - q_9 + q_{10}) + \frac{\sqrt{2}}{2} D_{11} \sin(q_{10}) \\
 &\quad + \frac{\sqrt{2}}{4} D_{11} \cos(-q_9 + q_{10}) + \frac{\sqrt{2}}{4} D_{11} \cos(q_9 + q_{10}) \\
 &\quad + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos(q_9) D_{10} \\
 \varphi_{Iy} &= \frac{1}{2} r_{11} \sin(q_{11} - q_9 + q_{10}) \\
 &\quad - \frac{1}{2} r_{11} \sin(q_{11} + q_9 + q_{10}) - \frac{1}{2} D_{11} \sin(q_9 + q_{10}) \\
 &\quad + \frac{1}{2} D_{11} \sin(-q_9 + q_{10}) - \sin(q_9) D_{10} \\
 \varphi_{Iz} &= -\frac{\sqrt{2}}{2} r_{11} \sin(q_{11} - q_{10}) \\
 &\quad + \frac{\sqrt{2}}{4} r_{11} \cos(q_{11} + q_9 + q_{10}) \\
 &\quad + \frac{\sqrt{2}}{4} r_{11} \cos(q_{11} - q_9 + q_{10}) \\
 &\quad + \frac{\sqrt{2}}{2} D_{11} \sin(q_{10}) + \frac{\sqrt{2}}{4} D_{11} \cos(-q_9 + q_{10}) \\
 &\quad + \frac{\sqrt{2}}{4} D_{11} \cos(q_9 + q_{10}) + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos(q_9) D_{10}
 \end{aligned} \tag{B.57}$$

B.3.3. Determinación de los pares articulares del dedo pulgar

El torque total τ es equivalente al aporte de las fuerzas cartesianas en los puntos G,H y I por sus respectivas Jacobianas transpuestas es de la forma:

$$\tau = {}^0J_G^T F_G + {}^0J_H^T F_H + {}^0J_I^T F_I \quad (\text{B.58})$$

donde $F_G = [f_{gx} \ f_{gy} \ f_{gz}]$ es las fuerzas cartesianas en el punto G, $F_H = [f_{hx} \ f_{hy} \ f_{hz}]$ es las fuerzas cartesianas en el punto H y $F_I = [f_{ix} \ f_{iy} \ f_{iz}]$ las fuerzas cartesianas en el punto I.

Matriz Jacobiana de los puntos de interés del dedo pulgar

El cálculo de la matrix Jacobiana para cada punto es de la forma:

$${}^0J_G = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_{Gx}(q)}{\partial q_9} & \frac{\partial \varphi_{Gx}(q)}{\partial q_{10}} & \frac{\partial \varphi_{Gx}(q)}{\partial q_{11}} \\ \frac{\partial \varphi_{Gy}(q)}{\partial q_9} & \frac{\partial \varphi_{Gy}(q)}{\partial q_{10}} & \frac{\partial \varphi_{Gy}(q)}{\partial q_{11}} \\ \frac{\partial \varphi_{Gz}(q)}{\partial q_9} & \frac{\partial \varphi_{Gz}(q)}{\partial q_{10}} & \frac{\partial \varphi_{Gz}(q)}{\partial q_{11}} \end{pmatrix} \quad (\text{B.59})$$

$${}^0J_H = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_{Hx}(q)}{\partial q_9} & \frac{\partial \varphi_{Hx}(q)}{\partial q_{10}} & \frac{\partial \varphi_{Hx}(q)}{\partial q_{11}} \\ \frac{\partial \varphi_{Hy}(q)}{\partial q_9} & \frac{\partial \varphi_{Hy}(q)}{\partial q_{10}} & \frac{\partial \varphi_{Hy}(q)}{\partial q_{11}} \\ \frac{\partial \varphi_{Hz}(q)}{\partial q_9} & \frac{\partial \varphi_{Hz}(q)}{\partial q_{10}} & \frac{\partial \varphi_{Hz}(q)}{\partial q_{11}} \end{pmatrix} \quad (\text{B.60})$$

$${}^0J_I = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_{Ix}(q)}{\partial q_9} & \frac{\partial \varphi_{Ix}(q)}{\partial q_{10}} & \frac{\partial \varphi_{Ix}(q)}{\partial q_{11}} \\ \frac{\partial \varphi_{Iy}(q)}{\partial q_9} & \frac{\partial \varphi_{Iy}(q)}{\partial q_{10}} & \frac{\partial \varphi_{Iy}(q)}{\partial q_{11}} \\ \frac{\partial \varphi_{Iz}(q)}{\partial q_9} & \frac{\partial \varphi_{Iz}(q)}{\partial q_{10}} & \frac{\partial \varphi_{Iz}(q)}{\partial q_{11}} \end{pmatrix} \quad (\text{B.61})$$

de esta manera los componentes de las matrices anteriores son:

$${}^0J_G(1,1) = -\frac{\sqrt{2}}{2}\sin(q_9)r_9$$

$${}^0J_G(2,1) = -\cos(q_9)r_9$$

$${}^0J_G(3,1) = -\frac{\sqrt{2}}{2}\sin(q_9)r_9$$

$${}^0J_G(1,2) = 0$$

$${}^0J_G(2,2) = 0$$

$${}^0J_G(3,2) = 0$$

$${}^0J_G(1,3) = 0$$

$${}^0J_G(2,3) = 0$$

$${}^0J_G(3,3) = 0$$

(B.62)

$$\begin{aligned}
 {}^0 J_H(1, 1) &= \frac{\sqrt{2}}{4} r_{10} \sin(-q_9 + q_{10}) - \frac{\sqrt{2}}{4} r_{10} \sin(q_9 + q_{10}) \\
 &\quad - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin(q_9) D_{10} \\
 {}^0 J_H(2, 1) &= -\frac{1}{2} r_{10} \cos(q_9 + q_{10}) \\
 &\quad - \frac{1}{2} r_{10} \cos(-q_9 + q_{10}) - \cos(q_9) D_{10} \\
 {}^0 J_H(3, 1) &= \frac{\sqrt{2}}{4} r_{10} \sin(-q_9 + q_{10}) \\
 &\quad - \frac{\sqrt{2}}{4} r_{10} \sin(q_9 + q_{10}) \\
 &\quad - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin(q_9) D_{10} \\
 {}^0 J_H(1, 2) &= \frac{\sqrt{2}}{2} r_{10} \cos(q_{10}) - \frac{\sqrt{2}}{4} r_{10} \sin(-q_9 + q_{10}) \\
 &\quad - \frac{\sqrt{2}}{4} r_{10} \sin(q_9 + q_{10}) \\
 {}^0 J_H(2, 2) &= -\frac{1}{2} r_{10} \cos(q_9 + q_{10}) \\
 &\quad + \frac{1}{2} r_{10} \cos(-q_9 + q_{10}) \\
 {}^0 J_H(3, 2) &= \frac{\sqrt{2}}{2} r_{10} \cos(q_{10}) - \frac{\sqrt{2}}{4} r_{10} \sin(-q_9 + q_{10}) \\
 &\quad - \frac{\sqrt{2}}{4} r_{10} \sin(q_9 + q_{10}) \\
 {}^0 J_H(1, 3) &= 0 \\
 {}^0 J_H(2, 3) &= 0 \\
 {}^0 J_H(3, 3) &= 0
 \end{aligned} \tag{B.63}$$

$$\begin{aligned}
 {}^0J_I(1, 1) &= -\frac{\sqrt{2}}{4}r_{11}\sin(q_{11} + q_9 + q_{10}) \\
 &\quad + \frac{\sqrt{2}}{4}r_{11}\sin(q_{11} - q_9 + q_{10}) + \frac{\sqrt{2}}{4}D_{11}\sin(-q_9 + q_{10}) - \\
 &\quad \frac{\sqrt{2}}{4}D_{11}\sin(q_9 + q_{10}) - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin(q_9)D_{10} \\
 {}^0J_I(2, 1) &= -\frac{1}{2}r_{11}\cos(q_{11} - q_9 + q_{10}) \\
 &\quad - \frac{1}{2}r_{11}\cos(q_{11} + q_9 + q_{10}) - \frac{1}{2}D_{11}\cos(q_9 + q_{10}) \\
 &\quad - \frac{1}{2}D_{11}\cos(-q_9 + q_{10}) - \cos(q_9)D_{10} \\
 {}^0J_I(3, 1) &= -\frac{\sqrt{2}}{4}r_{11}\sin(q_{11} + q_9 + q_{10}) + \frac{\sqrt{2}}{4}r_{11}\sin(q_{11} - q_9 + q_{10}) \\
 &\quad + \frac{\sqrt{2}}{4}D_{11}\sin(-q_9 + q_{10}) - \frac{\sqrt{2}}{4}D_{11}\sin(q_9 + q_{10}) \\
 &\quad - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin(q_9)D_{10} \\
 {}^0J_I(1, 2) &= \frac{\sqrt{2}}{2}r_{11}\cos(q_{11} - q_{10}) \\
 &\quad - \frac{\sqrt{2}}{4}r_{11}\sin(q_{11} + q_9 + q_{10}) - \frac{\sqrt{2}}{4}r_{11}\sin(q_{11} - q_9 + q_{10}) \\
 &\quad + \frac{\sqrt{2}}{2}D_{11}\cos(q_{10}) - \frac{\sqrt{2}}{4}D_{11}\sin(-q_9 + q_{10}) \\
 &\quad - \frac{\sqrt{2}}{4}D_{11}\sin(q_9 + q_{10})
 \end{aligned} \tag{B.64}$$

$$\begin{aligned}
 {}^0J_I(2, 2) &= \frac{1}{2}r_{11}\cos(q_{11} - q_9 + q_{10}) - \frac{1}{2}r_{11}\cos(q_{11} + q_9 + q_{10}) \\
 &\quad - \frac{1}{2}D_{11}\cos(q_9 + q_{10}) + \frac{1}{2}D_{11}\cos(-q_9 + q_{10}) \\
 {}^0J_I(3, 2) &= \frac{\sqrt{2}}{2}r_{11}\cos(q_{11} - q_{10}) - \frac{\sqrt{2}}{4}r_{11}\sin(q_{11} + q_9 + q_{10}) \\
 &\quad - \frac{\sqrt{2}}{4}r_{11}\sin(q_{11} - q_9 + q_{10}) + \frac{\sqrt{2}}{2}D_{11}\cos(q_{10}) \\
 &\quad - \frac{\sqrt{2}}{4}D_{11}\sin(-q_9 + q_{10}) - \frac{\sqrt{2}}{4}D_{11}\sin(q_9 + q_{10}) \\
 {}^0J_I(1, 3) &= -\frac{\sqrt{2}}{2}r_{11}\cos(q_{11} - q_{10}) - \frac{\sqrt{2}}{4}r_{11}\sin(q_{11} + q_9 + q_{10}) \\
 &\quad - \frac{\sqrt{2}}{4}r_{11}\sin(q_{11} - q_9 + q_{10}) \\
 {}^0J_I(2, 3) &= \frac{1}{2}r_{11}\cos(q_{11} - q_9 + q_{10}) - \frac{1}{2}r_{11}\cos(q_{11} + q_9 + q_{10}) \\
 {}^0J_I(3, 3) &= -\frac{\sqrt{2}}{2}r_{11}\cos(q_{11} - q_{10}) - \frac{\sqrt{2}}{4}r_{11}\sin(q_{11} + q_9 + q_{10}) \\
 &\quad - \frac{\sqrt{2}}{4}r_{11}\sin(q_{11} - q_9 + q_{10})
 \end{aligned} \tag{B.65}$$

Pares articulares del dedo índice

El vector de torques $\tau = [\tau_9 \ \tau_{10} \ \tau_{11}]^T$ para las articulaciones numeradas con 9, 10 y 11 esta compuesto por los siguientes elementos:

$$\begin{aligned}
\tau_9 = & -\frac{\sqrt{2}}{2}\sin(q_9)r_9f_{gx} - \cos(q_9)r_9f_{gy} - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin(q_9)r_9f_{gz} \\
& + \left(\frac{\sqrt{2}}{4}r_{10}\sin(-q_9 + q_{10}) - \frac{\sqrt{2}}{4}r_{10}\sin(q_9 + q_{10})\right) \\
& - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin(q_9)D_{10}f_{hx} \\
& + \left(-\frac{1}{2}r_{10}\cos(q_9 + q_{10}) - \frac{1}{2}r_{10}\cos(-q_9 + q_{10}) - \cos(q_9)D_{10}\right)f_{hy} \\
& + \left(\frac{\sqrt{2}}{4}r_{10}\sin(-q_9 + q_{10}) - \frac{\sqrt{2}}{4}r_{10}\sin(q_9 + q_{10})\right) \\
& - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin(q_9)D_{10}f_{hz} + \left(-\frac{\sqrt{2}}{4}r_{11}\sin(q_{11} + q_9 + q_{10})\right) \\
& + \frac{\sqrt{2}}{4}r_{11}\sin(q_{11} - q_9 + q_{10}) + \frac{\sqrt{2}}{4}D_{11}\sin(-q_9 + q_{10}) \\
& - \frac{\sqrt{2}}{4}D_{11}\sin(q_9 + q_{10}) - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin(q_9)D_{10}f_{ix} \\
& + \left(-\frac{1}{2}r_{11}\cos(q_{11} - q_9 + q_{10})\right) \\
& - \frac{1}{2}r_{11}\cos(q_{11} + q_9 + q_{10}) - \frac{1}{2}D_{11}\cos(q_9 + q_{10}) \\
& - \frac{1}{2}D_{11}\cos(-q_9 + q_{10}) - \cos(q_9)D_{10}f_{iy} \\
& + \left(-\frac{\sqrt{2}}{4}r_{11}\sin(q_{11} + q_9 + q_{10}) + \frac{\sqrt{2}}{4}r_{11}\sin(q_{11} - q_9 + q_{10})\right) \\
& + \frac{\sqrt{2}}{4}D_{11}\sin(-q_9 + q_{10}) - \frac{\sqrt{2}}{4}D_{11}\sin(q_9 + q_{10}) \\
& - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin(q_9)D_{10}f_{iz}
\end{aligned} \tag{B.66}$$

$$\begin{aligned}
 \tau_{10} = & \left(\frac{\sqrt{2}}{2} r_{10} \cos(q_{10}) - \frac{\sqrt{2}}{4} r_{10} \sin(-q_9 + q_{10}) \right. \\
 & - \frac{\sqrt{2}}{4} r_{10} \sin(q_9 + q_{10}) \left. \right) f_{hx} + \left(-\frac{1}{2} r_{10} \cos(q_9 + q_{10}) \right. \\
 & + \frac{1}{2} r_{10} \cos(-q_9 + q_{10}) \left. \right) f_{hy} + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} r_{10} \cos(q_{10}) \right. \\
 & - \frac{\sqrt{2}}{4} r_{10} \sin(-q_9 + q_{10}) - \frac{\sqrt{2}}{4} r_{10} \sin(q_9 + q_{10}) \left. \right) f_{hz} \\
 & + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} r_{11} \cos(q_{11} - q_{10}) - \frac{\sqrt{2}}{4} r_{11} \sin(q_{11} + q_9 + q_{10}) \right. \\
 & - \frac{\sqrt{2}}{4} r_{11} \sin(q_{11} - q_9 + q_{10}) + \frac{\sqrt{2}}{2} D_{11} \cos(q_{10}) \\
 & - \frac{\sqrt{2}}{4} D_{11} \sin(-q_9 + q_{10}) - \frac{\sqrt{2}}{4} D_{11} \sin(q_9 + q_{10}) \left. \right) f_{ix} \\
 & + \left(\frac{1}{2} r_{11} \cos(q_{11} - q_9 + q_{10}) - \frac{1}{2} r_{11} \cos(q_{11} + q_9 + q_{10}) \right. \\
 & - \frac{1}{2} D_{11} \cos(q_9 + q_{10}) + \frac{1}{2} D_{11} \cos(-q_9 + q_{10}) \left. \right) f_{iy} \\
 & + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} r_{11} \cos(q_{11} - q_{10}) - \frac{\sqrt{2}}{4} r_{11} \sin(q_{11} + q_9 + q_{10}) \right. \\
 & - \frac{\sqrt{2}}{4} r_{11} \sin(q_{11} - q_9 + q_{10}) + \frac{\sqrt{2}}{2} D_{11} \cos(q_{10}) \\
 & \left. - \frac{\sqrt{2}}{4} D_{11} \sin(-q_9 + q_{10}) - \frac{\sqrt{2}}{4} D_{11} \sin(q_9 + q_{10}) \right) f_{iz}
 \end{aligned} \tag{B.67}$$

$$\begin{aligned}
 \tau_{11} = & \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} r_{11} \cos(q_{11} - q_{10}) - \frac{\sqrt{2}}{4} r_{11} \sin(q_{11} + q_9 + q_{10}) \right. \\
 & - \frac{\sqrt{2}}{4} r_{11} \sin(q_{11} - q_9 + q_{10}) \left. \right) f_{ix} + \left(\frac{1}{2} r_{11} \cos(q_{11} - q_9 + q_{10}) \right. \\
 & - \frac{1}{2} r_{11} \cos(q_{11} + q_9 + q_{10}) \left. \right) f_{iy} + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} r_{11} \cos(q_{11} - q_{10}) \right. \\
 & \left. - \frac{\sqrt{2}}{4} r_{11} \sin(q_{11} + q_9 + q_{10}) - \frac{\sqrt{2}}{4} r_{11} \sin(q_{11} - q_9 + q_{10}) \right) f_{iz}
 \end{aligned} \tag{B.68}$$