LAS FUNCIONES DE LA DEMOSTRACIÓN EN LA FORMACIÓN INICIAL DE DOCENTES DE MATEMÁTICAS

JOSE LUIS HERRERA BRAVO

UNIVERSIDAD DEL CAUCA

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES, EXACTAS Y DE LA EDUCACIÓN

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

POPAYÁN

2015

LAS FUNCIONES DE LA DEMOSTRACIÓN EN LA FORMACIÓN INICIAL DE DOCENTES DE MATEMÁTICAS

JOSE LUIS HERRERA BRAVO

ASESORA:

Mg. Yeny Leonor Rosero Rosero

UNIVERSIDAD DEL CAUCA

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES, EXACTAS Y DE LA EDUCACIÓN

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

POPAYÁN

2015

NOTA DE ACEPTACIÓN

El presente trabajo de Grado

fue aprobado por la asesora y

respectivo evaluador.

Yeny Leonor Rosero Rosero

Vo. Bo. Yeny Leonor Rosero R.

Asesora

Vo. Bo. Willington Algeri Benítez Chará.

Evaluador

“Cuanto más pienso críticamente, rigurosamente, la práctica de la que participo o la práctica de otros, tanto más tengo la posibilidad, primero de comprender la razón de ser de la propia práctica, segundo por eso mismo, me voy volviendo capaz de tener una práctica mejor.”

(Freire, 1996)

AGRADECIMIENTOS

Agradezco a mis padres y a mi hermano por el apoyo incondicional que me han brindado para lograr culminar la segunda etapa en mi formación académica.

Agradezco a la profesora Yeny Rosero y al profesor Willington Benítez por el acompañamiento en el proceso de Práctica Pedagógica y los valiosos aportes realizados antes, durante y después de la construcción de este documento.

Agradezco al profesor Carlos Alberto Trujillo y a los estudiantes del curso de Pensamiento Matemático I, del segundo periodo académico del año 2014, por brindarme la confianza y el espacio académico para compartir mi pasión por las matemáticas y permitirme iniciar mi carrera como educador matemático.

Gracias, ¡Totales!

Jose Luis Herrera Bravo

TABLA DE CONTENIDO

INTRODUCCIÓN

La Práctica Pedagógica es la actividad diaria orientada por un currículo que se lleva a cabo en el aula, un laboratorio u otros espacios y que tiene como propósito la formación de un grupo de personas (Díaz, 2006). En particular, para el programa de Licenciatura en Matemáticas de la Universidad del Cauca la Práctica Pedagógica es un espacio curricular que pretende aproximar al estudiante a la realidad profesional que se manifiesta en los ámbitos socio-culturales y en el Sistema Educativo Colombiano (Artículo seis, Resolución N°024). Por estas razones y como exigencia curricular para obtener el título de Licenciado en Matemáticas, el presente texto presenta la sistematización del proceso de práctica docente llevado a cabo en el segundo período académico del año 2014 en el curso de Pensamiento Matemático I de esta Universidad.

De forma general, en este documento se encontrará un análisis de cómo se evidencian las funciones de la demostración en un contexto particular. Para lograr exponer lo anterior primero se describe la situación inicial y los elementos del contexto que permitieron el desarrollo de la Práctica Pedagógica que aquí se sistematiza. En seguida, se mencionan algunos referentes teóricos sobre las funciones de la demostración y se aclaran algunos términos que se utilizarán a lo largo del texto.

En seguida, se describe brevemente la intervención realizada en el aula y más adelante se analizan los registros obtenidos. Finalmente, se culmina la sistematización comentando las “lecciones aprendidas” con el objetivo de mejorar próximas prácticas e incentivar el estudio de las funciones de la demostración en el programa de Licenciatura en Matemáticas de la Universidad del Cauca.

1. SITUACIÓN EN CONTEXTO UNIVERSITARIO

1.1 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

¿Cómo se evidencian las funciones de la demostración durante la enseñanza de los métodos de demostración a los estudiantes del curso Pensamiento Matemático I del Programa de Licenciatura en Matemáticas de la Universidad del Cauca en el segundo periodo académico del 2014?

1.2 OBJETIVOS

- **GENERAL**

  Fomentar el estudio de las funciones de la demostración para el desarrollo del pensamiento matemático en estudiantes del programa de Licenciatura en Matemáticas de la Universidad del Cauca.

- **ESPECIFICOS**

  - ✓ Identificar las funciones de la demostración que usualmente se utilizan en los cursos básicos de matemáticas.

  - ✓ Incentivar la enseñanza de las funciones de la demostración como una herramienta que contribuye al desarrollo del pensamiento matemático.

  - ✓ Resaltar el sentido de la prueba en matemáticas, a través de las funciones de la demostración, en la formación inicial del maestro de matemáticas.

2. ELEMENTOS DE CONTEXTO

2.1 LAS CAUSAS DE LA PROBLEMATICA

2.1.1 DESCONOCIMIENTO DE LAS FUNCIONES DE LA DEMOSTRACIÓN MATEMÁTICAS EN SU ENSEÑANZA

Las demostraciones a lo largo de la historia han jugado un papel trascendental en el desarrollo de las matemáticas. La función de verificación/convicción que posee la demostración permite tener certeza de un teorema, convencer a los pares y a uno mismo. Este rol de la demostración ya es paradigmático en los contextos que envuelven aspectos relacionados con las matemáticas. Sin embargo, ***el pedestal de juez-verificador que se le ha construido a las demostraciones oculta otras de sus funciones no menos importantes***. En este sentido Villiers (1993), citado por Samper, Ospina y Plazas (2010), destaca otras utilidades de la demostración como: Explicar/comprender, sistematizar, descubrir/explorar y comunicar.

Al aterrizar la discusión en el aula se encuentra que muchos estudiantes no comprenden la necesidad y la utilidad de demostrar un resultado en matemáticas. Generalmente, el estudiante se conforma con verificar el teorema o el resultado y termina aceptándolo como un dogma. También existen problemas cuando el estudiante comprende la importancia de la demostración pero aún no es capaz de realizar razonamientos formalmente validos (Crespo, s.f.). La problemática también se extiende a los maestros porque muchos consideran que la demostración es en sí misma un objeto de la matemática que es intrínseco a la naturaleza de la disciplina (D´Amore, 2006) y restringen la palabra demostrar solo a la acción de verificar la validez de un teorema.

Härtig (1993), citado por D`Amore (2006), afirma que: “Demostrar”, en un sentido más estricto, debería ligarse a la utilización del “cemento lógico”, es decir, al vocabulario de la lógica de los predicados". En este orden de ideas D`Amore, cita a Bell (1976), que resalta tres sentidos generales de la demostración:

- **Verificación o justificación**: se refiere a la verdad de una afirmación;
- **Iluminación**: se refiere al por qué último de la verdad de una afirmación, una especie de convencimiento profundo del que cada uno debe tomar posesión íntima en modo personal;
- **Sistematización**: es la formalización matemática.

Los sentidos generales de la demostración que expone Bell se puede utilizar para analizar situaciones cotidianas en ambientes escolares. Por ejemplo, que un estudiante posea la capacidad de verificar la validez de un razonamiento le permitirá ir construyendo sus propios saberes. En este sentido, la demostración utilizada por el estudiante como una herramienta de justificación le otorga confianza para juzgar un razonamiento propio o de un tercero. Este proceso contribuye al encadenamiento de saberes previos que le permite la construcción de nuevos saberes y lo conduce a la "*iluminación*".

En teoría la demostración es una herramienta para el éxito de los procesos educativos. Sin embargo, en algunos programas de formación de docentes en matemáticas, en donde ya se incorporan formalmente los procesos demostrativos, también existen dificultades. Frecuentemente, los maestros en formación no encuentran el sentido a la demostración y esto constituye una causa de la problemática. Es importante mencionar que Glabraith (1981) (cit. en D´Amore (2006)) expone que: un punto sustancial de acuerdo entre todos los investigadores, es que el estudiante (en este caso el maestro en formación) debe involucrarse tanto en el plano de la producción de demostraciones, como en el plano de la reflexión sobre lo que hace cuando se hace una demostración. Por tanto, hay que inculcar en el futuro maestro la idea de que la demostración es un razonamiento al alcance de todos junto a sus funciones no ortodoxas[1]. Es conveniente precisar que en matemáticas siempre se hacen demostraciones para

[1] Las funciones de la demostración se abordan en el numeral 3.3.

resolver un problema, independientemente de lo simple o complejo que sea el problema (Antibi, 1993 cit. en D´Amore (2006)).

2.1.2 LA PRÁCTICA PEDAGÓGICA EN LA FORMACIÓN DEL LICENCIADO EN MATEMÁTICAS DE UNIVERSIDAD DEL CAUCA

La problemática descrita en el numeral 2.1.1 es posible abordarla en un espacio académico en el Programa de Licenciatura en Matemáticas por sus implicaciones en la formación matemática de un futuro docente de matemáticas. Es así como la Resolución N°024 del 26 de enero del 2012, expedida por el Consejo de la Facultad de Ciencias Naturales, Exactas y de la Educación de la Universidad del Cauca, reglamenta la práctica pedagógica del programa mencionado y establece en el artículo número nueve los objetivos de esta. Específicamente, la práctica pedagógica busca:

> *“Promover en el estudiante el desarrollo de competencias para diseñar, implementar y evaluar estrategias metodológicas encaminadas a la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, teniendo en cuenta las herramientas conceptuales aportadas por los cursos desarrollados en el plan de estudios”* (Articulo NUEVE, Resolución N°024).

En este sentido la Práctica Pedagógica se entiende como un espacio curricular que pretende aproximar al docente en formación a la realidad profesional del Sistema Educativo Colombiano. Por lo anterior, se debe trascender hacia espacios formativos donde el futuro docente pueda hacer uso de las competencias pedagógicas y didácticas que ha obtenido durante su formación. Para lograr esto, la Practica Pedagógica se ha estructurado en cuatro etapas.

La primera etapa es de exploración y fundamentación teórica. Aquí, se busca que los estudiantes conozcan las condiciones curriculares del centro donde realizarán las prácticas docentes. Además, se pretende que reconozcan las exigencias conceptuales y metodológicas de los procesos de sistematización. En la segunda etapa, se debe realizar una observación y un reconocimiento del contexto donde se va a desarrollar la Práctica Pedagógica. Junto a lo anterior, se deben diseñar instrumentos de recolección de información para iniciar el proceso de sistematización.

En la tercera etapa el maestro en formación debe realizar sus prácticas docentes en el centro de práctica escogido. Simultáneamente, debe continuar con la elaboración de la sistematización de la práctica basado en las experiencias vividas en el aula. Finalmente, en la cuarta etapa se debe elaborar un documento que contenga toda la sistematización de la práctica. Este documento, sin duda, busca:

> *"promover en el estudiante la investigación formativa que le permita indagar problemáticas y proponer estrategias de solución a situaciones relacionadas con los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas"* (Artículo catorce).

3. REFERENTES TEÓRICOS

3.1 LA EVIDENCIA EN LA DEMOSTRACIÓN

La palabra *evidencia* en un ambiente cotidiano tiene sentido para la mayor parte de las personas. No obstante, al momento de preguntarse sobre ¿qué o en qué consiste una evidencia? se llega a un panorama confuso. Paradójicamente, el concepto de evidencia no es evidente.

En primer lugar, el Diccionario de la R.A.E. define evidencia como: “certeza clara y manifiesta de lo que no se puede dudar” o “certidumbre de algo, de modo que el sentir o juzgar lo contrario sea tenido por temeridad”. Así, coloquialmente una evidencia es algo para lo cual intuitivamente se afirma la validez de su contenido como cierto y sin lugar a dudas. Además, en epistemología, la evidencia se toma para hacer relevante a la creencia justificada, cuando esta última, a su vez, se cree necesaria para el conocimiento (DiFate, s.f.).

Por otra parte, según DiFate (s.f.), si se buscan ejemplos de evidencia en la vida cotidiana, seguramente se pensará en ella como un objeto o un conjunto de objetos. Aun así, en diversos contextos, algunas entidades lingüísticas se consideran como “evidencias”. Por ejemplo, los testimonios y estudios científicos pueden ser considerados como evidencias en una corte durante un juicio o en una junta de médicos. De esta manera, una evidencia no necesariamente debe ser un objeto material. A modo de síntesis:

> *“La evidencia ha sido llevada a consistir en cosas tales como experiencias, propuestas, observación-informes, estados mentales, estados de cosas, e incluso los eventos fisiológicos, tales como la estimulación de las superficies sensoriales de uno mismo”* (DiFate, s.f.).

Bajo las reflexiones anteriores no se tendrían lineamientos claros para determinar el tipo de entidades que pueden catalogarse como evidencias. DiFate (s.f.) sostiene que una estrategia natural sería considerar el papel o las funciones que la evidencia desempeña tanto en la filosofía como en la vida cotidiana. Tal vez, suponer lo que hace la evidencia puede ofrecer pistas sobre lo que ella *es*. En este sentido, Timoteo Williamson (2000 cit. DiFate (s.f.)) estudia el rol de la evidencia en cierto tipo de razonamientos en el que se involucran. Esta estrategia lo llevo a concluir que la evidencia debe ser *proposicional*, esto es, que debe consistir en una proposición o conjunto de proposiciones. Hay que enfatizar que no se necesita una explicación teórica de las proposiciones, dado que se pueden tomar las proposiciones como portadoras de la verdad y la falsedad (lo que es verdadero o falso) y el contenido de las afirmaciones (lo que se dice o se afirma). Williamson también señala que la evidencia se manifiesta a menudo en el *razonamiento explicativo*, en el sentido de que se tiende a inferir que la hipótesis[2] proporciona la mejor explicación de la evidencia. Al mismo tiempo, la evidencia es el tipo de cosa que la hipótesis explica. A manera de conclusión, Williamson afirma que:

> *"si uno va a razonar con la propia evidencia, ya sea probabilísticamente, deductiva o explicativo, la evidencia debe ser el tipo de cosas que uno puede captar o entender, a saber, una proposición".*

En este sentido para efectos de esta práctica, se seguirá la definición de Brentano (cit. Mora, (1950)) quien afirma que:

> *"la evidencia es una propiedad de ciertos juicios[3]; sólo de éstos –y no de las representaciones- puede decirse que hay evidencia. La evidencia excluye el error y la duda, pero hay que observar que ni la liberación del error ni la liberación de la duda convierte un juicio en evidente. La evidencia es, pues, una propiedad por la cual se caracteriza un juicio como* ***correcto****. Los juicios evidentes pueden ser, por otro lado, o inmediata o mediatamente evidentes. Los juicios inmediatamente evidentes pueden dividirse en juicios de hechos (como "Yo pienso") y en verdades de razón (como el principio "Nada sucede sin razón suficiente"). Los juicios de hechos inmediatamente*

[2]Suposición de algo posible o imposible para sacar de ello una consecuencia.
[3]Juicio es el acto mental por medio del cual nos formamos una opinión de algo (Mora, pág. 1033).

evidentes solamente pueden ser juicios sobre percepciones internas. Pero debe nunca confundirse el juicio sobre la percepción con la percepción".

3.2 EL PENSAMIENTO MATEMÁTICO

En este apartado se plantea estudiar el significado de la expresión 'pensamiento matemático' para tener claridad sobre ella y evitar ambigüedades.

Según el Diccionario de la Real Academia de la Lengua Española (RAE, 2009) *pensamiento* se define como "potencia o facultad de pensar, acción y efecto de pensar, conjunto de ideas propias de una persona o colectividad"; donde *pensar* se entiende como "imaginar, considerar o discurrir, reflexionar, examinar con cuidado una cosa para formar dictamen, intentar o formar ánimo de hacer una cosa".

Desde una perspectiva filosófica Serrano (1979 cit. Gonzáles (2009)) relaciona pensamiento y conocimiento y expone: "Todo cúmulo de conocimiento que va pasando a través de las generaciones, se puede realizar debido a los pensamientos que todos los hombres (…) han concebido". Además considera que el pensamiento se puede ver de dos formas: como la actividad intelectual mediante la cual el hombre entiende, comprende y dota de sentido a lo que le rodea o como el resultado de esta actividad intelectual.

Por último, la noción de pensamiento que se adoptará en este texto es la de Gonzáles (2009). Ella define el término pensamiento como:

> *"La* ***actividad intelectual*** *(interna) mediante la cual el hombre entiende, comprende y dota de significado a lo que le rodea; la cual* ***consiste****, entre otras acciones, en* ***formar****,* ***identificar****,* ***examinar****,* ***reflexionar*** *y* ***relacionar ideas o conceptos****,* ***tomar decisiones*** *y* ***emitir juicios de eficacia****; permitiendo encontrar respuestas ante situaciones de resolución de problemas o hallar los medios para alcanzar una meta"* (pág. 52).

Al tener claridad sobre el término *pensamiento,* es momento de establecer qué se entiende por *pensamiento matemático.*

Bosch (2012), citando a Cantoral y otros (2005), expone que existen varios modos de entender el concepto de pensamiento matemático y de analizar el desarrollo del mismo. Por una parte, *atribuyen el término pensamiento matemático a las formas en que piensan las personas que se dedican profesionalmente a las matemáticas*. De otro lado, *se entiende el pensamiento matemático como parte de una ambiente científico en el cual los conceptos y las técnicas matemáticas surgen y se desarrollan en la resolución de tareas*. Adicionalmente, los autores concluyen que el pensamiento matemático incluye pensamiento sobre tópicos matemáticos y procesos avanzados de pensamiento como abstracción, justificación, visualización, estimación o razonamiento bajo hipótesis. Finalmente:

> *"El pensamiento matemático no encuentra sus raíces en las tareas propias y exclusivas de los matemáticos profesionales, sino que están incluidas todas las formas posibles de construcción de ideas matemáticas en una gran variedad de tareas. Por lo tanto, el pensamiento matemático se desarrolla en todos los seres humanos en el enfrentamiento cotidiano a sus múltiples tareas"* (Bosch, pág. 17).

3.3 EXPLICAR, PROBAR Y DEMOSTRAR

Balacheff (2000) afirma que los verbos explicar, probar y demostrar son frecuentemente considerados como sinónimos en la práctica de la enseñanza de las matemáticas. Además, sostiene que confiar en esta costumbre conduce a confundir diferentes niveles de actividad de los estudiantes y por ende es necesario distinguirlos. A continuación se presentan algunas de las definiciones que él ha establecido para *explicar*, p*robar* y d*emostrar*:

3.3.1 EXPLICAR

La explicación se sitúa en el nivel del locutor. Para él esta establece la validez de una proposición, se arraiga en sus conocimientos y en lo que constituye su racionalidad. Es decir, en sus propias reglas de decisión de la verdad. Adicionalmente, cuando la explicación se expresa en un discurso, esta pretende hacer inteligible a los espectadores la verdad de una proposición ya adquirida por el locutor.

> "Ésta (la explicación) tiene como propósito establecer en el interlocutor un sistema de objetos caracterizados por una cierta homogeneidad. Estos objetos se encuentran, se armonizan y en su afinidad determinan la organización de una explicación que se orienta hacia el descubrimiento de un nuevo saber…" (Miéville, 1981 cit. por Balacheff, 2000 p. 12)

3.3.2 PROBAR

Cuando una explicación es reconocida y aceptada conviene disponer de un término que permita marcar una distinción del sujeto locutor. En matemáticas, el término "demostración" no es el más conveniente porque su aceptación es muy específica. Por tal razón se emplea el término prueba.

De otro lado, *el paso de la explicación a la prueba hace referencia a un proceso social por el cual un discurso que asegura la validez de una proposición cambia de posición siendo aceptada por una comunidad*. Esta posición no es definitiva; con el tiempo puede evolucionar simultáneamente con el avance de los saberes en los cuales se apoya. Finalmente, una prueba puede ser aceptada por una comunidad, pero también puedes ser rechazada por otra.

3.3.5 DEMOSTRAR[4]

El tipo de prueba dominante en matemáticas tiene una forma particular. Se trata de una serie de enunciados que se organizan siguiendo un conjunto de reglas bien definidas. De aquí en adelante se nombra *demostraciones* a este tipo de pruebas. Adicionalmente, según Almouloud (s.f.), las demostraciones son pruebas con las siguientes características:

- Son las únicas aceptadas por los matemáticos.
- Respetan ciertas reglas: algunos son considerados como verdaderos (axiomas), otros son deducidos de estos u otros anteriormente demostrados a partir de reglas de deducción tomadas de un conjunto de reglas lógicas.
- Trabajan sobre objetos matemáticos con un estatuto teórico, no pertenecen al mundo sensible, aunque a ellos haga referencia.

Otra concepción es esbozada por Godino & Recio (2001). Ellos, siguiendo a Cañón (1993), utilizan el término *demostración* para:

> *"referirse de modo genérico al objeto emergente del sistema de prácticas argumentativas (o argumentos) aceptadas en el seno de una comunidad, o por una persona, ante situaciones de validación y decisión, esto es situaciones que requieren justificar o validar el carácter de verdadero de un enunciado, su consistencia o la eficacia de una acción. Abarca, por tanto, las tres acepciones básicas de la verdad que reconoce la moderna teoría de la ciencia: correspondencia, consistencia y utilidad".*

En síntesis, en este trabajo se utilizara el término demostración para referirse a:

> *"el objeto emergente del sistema de prácticas argumentativas aceptadas en el seno de la comunidad matemática, o por una persona, ante situaciones de validación y decisión, esto es, situaciones que requieren justificar o validar el carácter de verdadero de un enunciado, su consistencia o la eficiencia de una acción. Abarca, por tanto, tres acepciones básicas de la*

[4] El significado de la demostración varía según el contexto donde se analiza. Godino& Recio (2001, págs. 407-411) realizan un estudio rápido sobre este aspecto.

> *verdad que reconoce la moderna teoría de la ciencia: correspondencia, consistencia y utilidad* (Cañon, 1993 cit. Godino & Recio, 2001)."

3.4 FUNCIONES DE LA DEMOSTRACIÓN MATEMÁTICA

En la sociedad matemática y en los ambientes escolares es tradicional considerar que la función de la demostración en matemáticas es la de ***verificar*** la pertinencia de una aseveración matemática. Así, la idea predominante de la demostración en la práctica docente, en debates e investigaciones sobre su enseñanza es distinguirla como un instrumento para remover dudas personales o dudas de escépticos. En este sentido, Volmink (1990) (cit. Villiers, 1999) ejemplifica la postura preponderante sobre la función de la demostración en matemáticas:

> "¿Por qué nos molestamos en demostrar teoremas? Hago el reclamo aquí que la respuesta es: para que podamos ***convencer*** a la gente (incluidos nosotros mismos)... podemos considerar una demostración como un argumento suficiente para ***convencer*** a un escéptico razonable" (De Villiers M. , 1999).

La función de ***verificación/convicción*** de la demostración en matemáticas diluye su verdadera naturaleza, dado que la convicción en matemáticas se obtiene por diversos medios que no se siguen estrictamente de una demostración lógica (Bell, 1976 cit. De Villiers, 1999). De otro lado, De Villiers (1999) sostiene que la práctica real de la investigación matemática moderna exige un análisis más completo de los distintos roles de la demostración y plantea el siguiente modelo[5]:

Funciones de la demostración:

- Verificación - Convicción.

[5] Ligera expansión del modelo de Bell (1976) que distingue las siguientes funciones: **Verificación o justificación** se refiere a la verdad de una afirmación. **Iluminación**: se refiere al por qué último de la verdad de una afirmación, una especie de convencimiento profundo del que cada uno debe tomar posesión íntima en modo personal. **Sistematización**: es la parte formal, matemática.

- Explicación.
- Descubrimiento.
- Sistematización.
- Comunicación.
- Desafío Intelectual.

3.4.1 Verificación

La verificación – convicción tiene por objetivo obtener certeza de un teorema y convencer a los pares y a uno mismo de ésta, exige demostraciones formales y completas, cuando se trata de un grupo de expertos. Pero, ello puede modificarse según el nivel académico del grupo de personas (Samper & Ospina, 2010).

Según De Villiers (1999) la mayor parte de los profesores de matemáticas creen que sólo la prueba da certeza al matemático. Por consiguiente, es la única autoridad que establece la validez de una conjetura. No obstante, la prueba no es un prerrequisito para la plena convicción. Por el contrario, el convencimiento es prerrequisito para hallar una prueba. En este sentido, De Villiers (1999) plantea el siguiente interrogante:

> *"¿Por qué extraña y oscura razón usualmente pasamos meses o años intentando probar cierta conjetura, si no estamos previamente convencidos de su veracidad?"* (pág. 4).

Con respecto a la pregunta anterior Polya (1954 cit. De Villiers 1999) sostiene que:

> "una vez verificado el teorema en varios casos particulares, reunimos fuerte evidencia inductiva para este. El paso inductivo superpone nuestra sospecha inicial y da una fuerte **confianza** en el teorema. Sin tal confianza apenas hubiéramos obtenido el coraje para emprender la prueba que no parecía en absoluto un trabajo rutinario. Cuando usted esté satisfecho de

que el teorema es **verdadero**, puede iniciar a **probarlo**"[6] (negrilla adicionada por De Villiers).

Finalmente, hay que tener en cuenta que la convicción previa a la prueba proporciona la motivación para ella. Así pues, la función de la prueba debe ser algo más que de la de verificación/convicción (De Villiers, The role and function of proof whit sketchpad, 1999).

3.4.2 Explicación

Frecuentemente los medios heurísticos (por ejemplo, construcciones precisas y medición, sustitución numérica, etc.) proporcionan un alto nivel de confianza a una conjetura. No obstante, estos métodos no proporcionan explicaciones del por qué la conjetura es válida. Es decir, no suministran información de cómo la conjetura es consecuencia de otros resultados conocidos. Por tanto, cuando los resultados son intuitivamente evidentes o son apoyados por pruebas convincentes cuasi-empíricas, la función de la demostración para los matemáticos no es la de validación, sino más bien la de explicación. Tanto así, que para algunos el aspecto de clarificación/explicación de una demostración es de mayor importancia que el aspecto de validación.

En síntesis, la demostración desde la óptica de la explicación, como la expone DeVilliers, proporciona información sobre por qué una proposición matemática es verdadera

3.4.3 Descubrimiento

La demostración como herramienta de descubrimiento tiene como objeto encontrar nuevos teoremas a partir de deducciones de otros teoremas, como ha

[6] En la investigación matemática real, la convicción personal por lo general depende de una combinación de intuición, la verificación cuasi-empírica y la existencia de una prueba lógica (pero no necesariamente rigurosa). De hecho, un nivel muy alto de convicción a veces puede ser alcanzado incluso en ausencia de una demostración (De Villiers, The role and function of proof whit sketchpad, pág. 4).

sucedido históricamente, o a partir de la exploración y análisis de situaciones (Samper & Ospina, 2010).

Usualmente se dice que los teoremas son primero descubiertos por medio de la intuición o métodos cuasi-empíricos, que más tarde son verificados por la producción de demostraciones. Sin embargo, durante la historia de las matemáticas se han presentado numerosos ejemplos de resultados que son descubiertos o inventados de manera puramente deductiva. Por ejemplo, las geometrías no-euclidianas. Por ende, en los trabajos matemáticos la demostración no es únicamente una herramienta que permite verificar algún resultado descubierto con anterioridad. También, es un medio de exploración, análisis, investigación y descubrimiento de nuevos resultados.

3.4.4 Sistematización

La demostración es una herramienta indispensable para la sistematización de diversos resultados conocidos en un sistema axiomático deductivo, definiciones y teoremas. Esto busca exponer la relación subyacente entre las proposiciones evitando demostraciones de intuición pura o cuasi-empíricas. De Villiers (1986) establece algunas de las funciones más importantes de la sistematización deductiva de resultados conocidos, entre ellas:

- Ayuda a identificar inconsistencias, argumentos circulares y supuestos no expuestos explícitamente.
- Unificación y simplificación de teorías matemáticas a través de la integración de afirmaciones no relacionadas, concepto y teoremas. Lo anterior busca la presentación económica de algunos resultados.
- Proporciona una perspectiva global de un tema exponiendo la estructura axiomática subyacente de ese tema a partir de la cual se pueden derivar todas las otras propiedades.

- Es útil para las aplicaciones ya sea dentro o fuera de las matemáticas, dado que hace posible verificar la aplicabilidad de una teoría o estructura compleja simplemente evaluando la idoneidad de sus axiomas y definiciones.
- A menudo conduce a sistemas deductivos alternativos que ofrecen nuevas perspectivas y/o son más económicos, elegantes y poderosos que los ya existentes.

En resumen, se puede decir que la demostración con su función de sistematización busca la organización, de sus principales conceptos y sus diversos resultados (teoremas), en un sistema axiomático deductivo.

3.4.5 Comunicación

De Villiers (1999) cita varios autores que resaltan la importancia de la función comunicativa de las demostraciones matemáticas, entre ellos, por ejemplo, Volminik (1990) quien afirma que:

> *"... Parece que la prueba es una forma de* ***discurso****, un medio de comunicación entre las personas que hacen las matemáticas"* (negrilla agregada por De Villiers).

Otra postura es la planteada por Davis y Hersh (1986):

> *"... Reconocemos que el argumento matemático se dirige a un público humano, que posee un conocimiento de fondo que le permita comprender las intenciones del hablante o autor. Al afirmar que el argumento matemático no es mecánico o formal, también hemos declarado implícitamente que lo es... es decir, un* ***intercambio humano*** *basado en los significados compartidos, no todos los cuales son verbales o fórmulas"* (negrilla agregada por De Villiers).

Finalmente, De Villiers (1999) cita a Davis (1976) que:

> *"…también indica que uno de los valores reales de la demostración es que crea un foro para el* ***debate crítico****. De acuerdo con este punto de vista, la prueba es la única manera de comunicar resultados matemáticos entre matemáticos profesionales, entre profesores y estudiante, y entre los mismos estudiantes. Así, el énfasis recae en el proceso social de la presentación de informes y difusión de los conocimientos matemáticos en la sociedad. Prueba como una* ***forma de interacción social****, por tanto, también implica subjetivamente negociar no sólo los significados de los conceptos en cuestión, también implícitamente los criterios para un argumento aceptable. A su vez, una filtración social de una prueba en diversas comunicaciones contribuye a su refinamiento y la identificación de errores, así como a veces a su rechazo por el descubrimiento de un contraejemplo".*

Finalmente, se concluye que la demostración busca a través de su función comunicativa la transmisión de conocimiento matemático.

3.4.6 Desafío intelectual

Para los matemáticos las demostraciones son un desafío intelectual tan interesante como para otras personas lo son los rompecabezas u otras actividades creativas o laboriosas. Tanto así, que la mayor parte de las personas tienen alguna experiencia, ya sea con un rompecabezas jigzag, para comprender las supuestas celebraciones exuberantes de Pitágoras o Arquímedes con el descubrimiento de sus pruebas (De Villiers, 1999). Formalmente, Davis y Hersh (1983 cit De Villiers, 1999) aseveran que: "*la demostración es un campo de entrenamiento para la resistencia intelectual y el ingenio del matemático"*. Por consiguiente es válida la siguiente analogía:

> Hacer demostraciones podría comparase con el reto físico de completar un maratón o un triatlón; y la satisfacción que viene después. En este sentido, la demostración (y la prueba) sirve para la autorrealización y la plenitud (De Villiers, 1999).

De Villiers realiza la siguiente reflexión pedagógica:

> *"Cuando los estudiantes ya han investigado a fondo una conjetura geométrica a través de la variación continua con un software dinámico como de dibujos, tienen poca necesidad de una mayor convicción o verificación. Así, la verificación sirve como poca o ninguna motivación para hacer una prueba. Sin embargo, he encontrado que es relativamente fácil encontrar más curiosidad preguntando a los estudiantes por qué creen que un resultado particular es cierto; es un reto tratar de explicarlo. Los estudiantes reconocen rápidamente que la verificación inductiva se limita a confirmar; no da sentido satisfactorio de iluminación, inteligencia, o la comprensión de cómo la conjetura es una consecuencia de otros resultados conocidos. Por lo tanto, a los estudiantes les resulta bastante satisfactorio ver un argumento deductivo como un intento de explicación, en vez de verificación"*.

Además, el mismo autor (1999) realiza una propuesta para la enseñanza de "la demostración":

> *También es recomendable introducir a los estudiantes desde la función de descubrimiento de una demostración y prestar bastante atención a los aspectos comunicativos en todo momento de negociación y aclarar con sus estudiantes los criterios de evidencia aceptable, las heurísticas subyacentes y la lógica de la demostración. La función de verificación de la demostración se debe dejar para los resultados que los estudiantes realmente presentan dudas. Aunque algunos estudiantes no pueden experimentar la demostración como un reto intelectual por sí mismos, son capaces de apreciar que otros pueden experimentarlo de esta manera.*

3.5 TRANSPOSICIÓN DIDÁCTICA

La mayor parte de los investigadores en didáctica atribuyen la paternidad del concepto de transposición didáctica a Michel Verret (1975). Él define la didáctica como "la transmisión de aquellos que saben a aquellos que no saben. De aquellos que han aprendido a aquellos que aprenden". Desde este punto de vista se plantea la pregunta de la caracterización del tipo de saber transmitido, dado que no se puede enseñar un objeto sin transformarlo y afirma que: "Toda práctica de enseñanza de un objeto presupone, en efecto; la transformación previa de su objeto en objeto de enseñanza (Verret, 1975)".

En este texto, "La Didáctica de las Matemáticas" se entenderá como la ciencia que se ocupa de "estudiar las actividades didácticas, es decir, las actividades que tienen como objeto la enseñanza, evidentemente en lo que ellas tienen de específico para las matemáticas" (Brousseau, 1986).

Por otro lado, uno de los mayores exponentes en Educación Matemática de la Transposición Didáctica, es Yves Chevallard que se preocupa en sus investigaciones por el "Sistema Didáctico" que radica en la relación existente entre el docente, los estudiantes y el saber matemático. Adicionalmente, Gómez (2005) sostiene que Chevallard insiste en la importancia de un término y una relación a menudo olvidada en la didáctica: el saber y la relación con el saber. Así, el concepto de Transposición Didáctica se focaliza en el paso del saber sabio al saber enseñado y luego a la obligatoria distancia que los separa. Sobre este tema Chevallard expone lo siguiente:

> *"Un contenido del saber sabio que haya sido designado como saber a enseñar sufre a partir de entonces un conjunto de transformaciones adaptativas que van a hacerlo apto para tomar lugar entre los objetos de enseñanza. El 'trabajo' que un objeto de saber a enseñar hace para transformarlo en un objeto de enseñanza se llama transposición didáctica"*.

Objeto de saber → Objeto a enseñar → Objeto de enseñanza.

Desde una óptica centrada en el maestro Bruno D´Amore (2006) expone que:

> *"La transposición didáctica consiste entonces, desde un punto de vista del maestro, en el construir sus propias clases recabando de la fuente de los saberes, tomando en cuenta las orientaciones proporcionadas por las instrucciones y los programas (saber por enseñar), para adaptarlos a su propia clase: nivel de los estudiantes, objetivos perseguidos. La trasposición didáctica consiste en el extraer un elemento de saber de su contexto (universitario, social…) para recontextualizarlo en el contexto siempre singular, siempre único, de su propia clase"* (pág. 236).

A corde a lo anterior, en este trabajo el proceso de transposición didáctica se centró en la construcción de algunas clases centradas en la enseñanza de los métodos de demostración. En ellas se siguieron las disposiciones que se plantean en el currículo del curso Pensamiento Matemático I (Anexo 4) del programa de Licenciatura en Matemáticas de la Universidad del Cauca. Además, se siguió como fuente de saber el texto "Minicurso de Métodos de Prova" del II Coloquio de Matemáticas de la región del Sur (Brasil) editado por Renata de Freitas y Petrucio Viana (Anexo 14). Los capítulos 6 al 12 fueron adaptados al nivel de los estudiantes del curso de Pensamiento Matemático I (ver 4.2) y se buscaba evidenciar las funciones de la demostración en dicho ambiente.

3.4 MÉTODOS DE DEMOSTRACIÓN

Díez (s.f.) sostiene que "la demostración matemática, concebida como proceso de pensamiento, da base a la construcción de la teoría matemática. Sin embargo, no es posible concebirla de esta forma sin tener antes un dominio de las técnicas, tanto algorítmicas como heurísticas, involucradas en está". Además, el autor anterior también afirma que "se ha considerado a la demostración matemática como una vía formal para expresar formas particulares de razonamiento y justificación; se podría pensar que sólo se es capaz de entender las matemáticas si se es capaz de razonar en términos de demostraciones".

Por otra parte, hay diversos textos donde se presentan técnicas de demostración pero en ninguno se expone un método general para la elaboración de demostraciones. No obstante, se conocen una serie de métodos, que fundamentados en la lógica, permiten a los matemáticos decidir si un razonamiento es válido o es falso. Una exposición detallada de tales métodos se puede encontrar en el texto "Minicurso de Métodos de Prova" de Fritas, R. & Viana, P. (2012) o en "Método general para la demostración de proposiciones matemáticas" de Díez, C. (s.f.). A continuación se listan los métodos de demostración más sobresalientes[7]:

- Método directo.
- Prueba de existencias.
- Método de generalizaciones.
- Método del contrarreciproco.
- Método de reducción al absurdo.
- Prueba de negaciones.
- Prueba por casos.
- Método de inducción matemática.

[7] Una síntesis de estos métodos se puede encontrar en la página 46 de este trabajo.

4. INTERVENCIÓN EN EL CURSO PENSAMIENTO MATEMÁTICO I

Antes de iniciar, es pertinente hablar sobre qué es el *contexto* para tener clara la acepción de este término en este documento.

En términos generales la palabra contexto hace referencia al "entorno físico o de situación, ya sea político, histórico cultural o de cualquier otra índole, en el cual se considera un hecho" (RAE, 2014). Sin embargo, Montaño (2007), la presenta más precisa respecto a las intenciones de este trabajo:

> "*La palabra* ***CONTEXTO*** *'se refiere al entramado o tejido de significados provenientes del medio ambiente o entorno, que impresionan el intelecto o campo de conocimientos de un grupo humano, como parte integrante de su cultura y su visión del mundo o cosmovisión*[8]*' (…) En otras palabras, el Contexto Cultural es todo aquello que forma parte del medioambiente o entorno y <u>resulta significativo en la formación y desarrollo de un grupo humano especifico</u>*" (págs. 39-38).

En este sentido, para efectos de este trabajo, el contexto lo conforma la Universidad del Cauca y el curso Pensamiento Matemático I del Programa de Licenciatura en Matemáticas.

4.1 LA INSTITUCIÓN

En los procesos educativos existen tres componentes cruciales: el estudiante, el docente y el conocimiento. Sin embargo, estas tres componentes no divagan por el mundo y es poco probable que interactúen de forma casual. Usualmente, estas relaciones se presentan por medios o lugares consensuados. Por ejemplo: Blogs,

[8]Manera de ver e interpretar el mundo.

portales web, institutos, escuelas, bibliotecas o universidades. Consecuentemente, la institución educativa donde se desarrolló la práctica pedagógica, que aquí se analizará, fue la Universidad del Cauca. Esta es una institución de educación superior de carácter público creada el 24 de Abril de 1827 por Francisco de Paula Santander. En términos generales, la Universidad del Cauca es un proyecto cultural que tiene como compromiso el desarrollo social mediante la educación crítica, responsable y creativa. En este sentido, la misión de la Universidad es formar personas con integridad ética, pertenencia e idoneidad profesional, demócratas comprometidos con el bienestar de la sociedad y en armonía con el entorno (Universidad del Cauca, 2014).

> “La Universidad del Cauca, fiel a su lema "Posteris Lvmen Moritvrvs Edat" (Quién ha de morir deje su luz a la posteridad), tiene un compromiso histórico, vital y permanente con la construcción de una sociedad equitativa y justa en la formación de un ser humano integral, ético y solidario” (Universidad del Cauca, 2014).

La Práctica Pedagógica se realizó en el curso Pensamiento Matemático I del programa de Licenciatura en Matemáticas ofrecido por la Universidad del Cauca. Este busca “contribuir con la formación de docentes en matemáticas para la educación media a nivel regional y nacional dentro del marco de los lineamientos del desarrollo educativo del país” (Garcia, y otros, pág. 28).

Adicionalmente, en el PEP[9] del programa de Licenciatura en Matemáticas se establece como objetivo general la formación de educadores matemáticos que más haya de instruirse como un mero transmisor de saberes logre contribuir a la consolidación de una cultura matemática en su medio. Además, busca formar profesionales que entiendan el problema de la comunicación de las matemáticas como un asunto que requiere de múltiples disciplinas diferentes a la matemática, por ejemplo: historia, sociología, antropología, pedagogía y psicologías. En este sentido, la misión del programa de Licenciatura en Matemáticas es:

[9] Proyecto Educativo Programa Licenciatura en Matemáticas (2014).

> *“Proporcionar, a sus estudiantes, elementos teóricos, metodológicos y prácticos que les permita reflexionar las prácticas pedagógicas en matemáticas, y promover su transformación, o adecuación a las necesidades del contexto social y cultural en el que se desempeñen profesionalmente”* (Garcia, y otros, pág. 29)

Finalmente, acorde con el PEP (2014), un Licenciado en Matemáticas graduado de la Universidad del Cauca deber ser un profesional:

1. Con una excelente formación que integra las matemáticas, su pedagogía, y su componente socio-humanística, al servicio de la comunidad.
2. Con capacidad de interactuar con profesionales de otras áreas, respetando los criterios ajenos y buscando una capacitación constante y permanente.
3. Capaz de desarrollar y mantener una actitud de indagación, que enriquecida con las teorías y modelos investigativos, permita la reflexión disciplinada de la práctica educativa y avance del conocimiento pedagógico y didáctico.
4. Capaz de promover, formular y desarrollar proyectos de investigación desde el aula.
5. Capaz de comprometerse con proyectos de investigación relacionados con su saber.

4.2 PENSAMIENTO MATEMÁTICO I

El programa de Licenciatura en Matemáticas de la Universidad del Cauca contempla en su currículum el curso “Pensamiento Matemático I”; y está ubicado en el segundo semestre (ver anexo 3 y 4). Esta asignatura tiene por objetivo general: “inducir al estudiante hacia una reflexión de tipo cultural sobre las prácticas matemáticas”. Además, busca consolidar en el estudiante su formación humanística a partir de su propia disciplina y propiciar en el estudiante una reflexión crítica sobre el acto de conocer en matemáticas.

En él se llevó a cabo la fase de intervención de la práctica Pedagógica para trabajar el tema “métodos de demostración” durante el segundo periodo académico del 2014 de la Universidad del Cauca. Esta asignatura estuvo a cargo del profesor Carlos Alberto Trujillo Solarte con el horario de martes y jueves de 4:00 pm a 6:00 pm. Los estudiantes con los que se convivió eran 32 de Licenciatura en Matemáticas y en 4 del programa de Matemáticas. Por otra parte, las edades de los estudiantes oscilaban entre los 17 y 21 años de edad.

Otro aspecto que debe ser mencionado es todos los estudiantes se encontraban cursando su segundo semestre universitario y se hallaban aun en la transición de educación media a educación superior. Además, su formación matemática, a nivel universitario, era algo diversa. Todos habían aprobado el curso de Lógica y Conjuntos y asistían al curso de Geometría Euclidiana (ver anexo 2).

Finalmente, el 80% de los estudiantes se encontraban repitiendo el curso de matemáticas generales y el 20% restante estaba cursando la asignatura de Calculo I (Calculo diferencial). Esto fue pertinente porque el tema que se trabajó en el aula (métodos de demostración) debe utilizarse en esos cursos.

4.3 METODOLOGÍA

ACTIVIDADES DESAROLLADAS

El objetivo primordial de este trabajo es evidenciar cómo se presentan las funciones de la demostración matemática durante la enseñanza de los métodos de demostración en el contexto mencionado anteriormente. En busca de tales evidencias se diseñaron siete talleres que, en teoría, buscaban predisponer un ambiente propicio donde las *funciones de la demostración* se presentarán. Esto con el fin de analizar más adelante qué repercusiones tendrían dentro del proceso de enseñanza. Pues bien, dichos talleres se realizaron aproximadamente en 6 sesiones de dos horas cada una. A continuación, se describe de manera cada una de ellas.

SESIÓN N°1

La primera clase fue una de las más complicadas porque era la primera ocasión en la que el autor de este trabajo incursionaría en el aula como docente. Sin embargo, por medio de una presentación personal del profesor y los estudiantes se logró entrar en confianza rápidamente. En esta intervención se puso en práctica el primer taller grupal donde se formularon algunas preguntas genéricas en relación al contexto y a las matemáticas. Dichas preguntas fueron:

- ✓ ¿Qué les motivo a estudiar matemáticas?
- ✓ ¿Qué han encontrado al estudiar matemáticas?
- ✓ ¿Existen diferencias entre explicar, robar y demostrar?
- ✓ ¿Cuáles son las funciones de la demostración?
- ✓ ¿Cuál es la diferencia entre escribir una demostración y pensar una demostración?

Las respuestas de los estudiantes fueron muy variadas e interesantes. El material obtenido con las últimas tres preguntas son un insumo muy importante para el desarrollo de esta sistematización[10]. A groso modo, es importante resaltar que la mayoría de los estudiantes (al inicio de las charlas) creían que las funciones de la demostración eran únicamente la de verificar o justificar una afirmación. Ello desvanecía otras funciones de la demostración como por ejemplo: explicar/comprender, sistematización, descubrimiento/exploración y sistematización.

SESIÓN N°2

En la segunda intervención se trabajaron las nociones básicas de un sistema axiomático. En tal momento, se definió una axiomática como un sistema compuesto de tres elementos básicos: *objetos matemáticos*, *axiomas*[11] y

[10] Las respuestas a estas preguntas se pueden encontrar en el anexo 13.
[11] Se concibió axioma como propiedades de los objetos matemáticos que se toman como punto de partida.

proposiciones. Además se discutió sobre los tres grandes principios que deben mantener los objetos matemáticos al relacionarse entre sí. Los principios tratados fueron: el de *identidad*, el de *no contradicción* y el *tercio excluido*. Luego, se presentaron algunos sistemas axiomáticos haciendo énfasis en el conjunto de axiomas de la teoría de Conjuntos. Finalmente, se introdujo una definición general de *teorema* y se procedió a abordar el primer método de demostración: ***el método de suposición o método directo (MD).***

En ese orden de ideas, se presentó una axiomática (ver anexo 9, ejemplo 1) que pretendía reforzar la comprensión del MD. A partir de dicho sistema se expusieron algunas afirmaciones que debía ser probadas en la misma clase y al final debían ser entregadas. Estas proposiciones eran de corte aritmético y durante la preparación de las actividades se suponía que no generarían tropiezos a los estudiantes. Sin embargo, la realidad fue otra. Los ejercicios en la práctica se complicaron un poco para los estudiantes pero finalmente se logró que un número significativo de estudiantes comprendieran los aspectos generales del MD. No obstante, al recoger el trabajo hecho por los estudiantes en la clase se evidencia similitud en los resultados y una presunta copia de información. Pero ello no empaña el buen trabajo grupal y la naciente (pero tímida) participación del alumnado.

SESIÓN N°3.

En la tercera clase se presentó la forma genérica de cómo probar una proposición que contuviera un cuantificador existencial. Para facilitar la comprensión del método se trabajó con la definición de divisibilidad y se demostraron a modo de ejemplo algunas propiedades básicas de la divisibilidad. El objetivo era que los estudiantes comprendieran que para probar una proposición de la forma "Existe un x , talque $P(x)$" bastaba exhibir un elemento del conjunto en cuestión que satisficiera dicha propiedad. Esto fue fácil de cumplir basados netamente en la teoría pero en la práctica nuevamente se tuvieron dificultades. Por consiguiente, se decidió dejar algunas proposiciones para que se trabajaran en casa en busca de subsanar las dificultades.

SECCIÓN N°4

En la cuarta intervención se discutió sobre el método de prueba por contrareciproco y prueba de enunciados con cuantificador universal. Esta sección fue bastante teórica y de orientación magistral. Además, algunos estudiantes ya habían entrado en un buen nivel de confianza y participaban activamente de la construcción y la justificación del porque los métodos de demostración presentados en esta sesión eran válidos. Es importante resaltar que la presentación de los procesos de prueba para una generalización se construyó activamente con los estudiantes partiendo de casos finitos. En esta misma sección se hizo una introducción a las pruebas por reducción al absurdo.

SECCIÓN N°5

En la quinta clase se desarrolló un taller referente a los métodos trabajados en las clases anteriores y en especial la prueba por reducción al absurdo. En el taller se presentaban algunas nociones básicas como el teorema fundamental de la aritmética y una prueba de la siguiente proposición: “El conjunto de los números primos es infinito”.

SECCIÓN N°6

Para complementar el trabajo realizado en la sección anterior e introducir el método de demostración por inducción en la sexta clase se desarrolló una guía – taller. La idea principal del trabajo era que los estudiantes identificaran como se debe emplear el método de demostración por inducción en algunas proposiciones prácticas y teóricas. Además, se enfatizó en discernir sobre “¿Por qué el método de inducción funciona?”.

SECCIÓN N°7

La última sesión se destinó a la comunicación de una prueba matemática por parte de los estudiantes. Era complicado escuchar a cada uno, por consiguiente, se decidió que los estudiantes se organizaran en grupos y eligieran un representante. De esta manera, cada grupo debía estudiar una proposición que se había dado con anticipación (2 días) y debían preparar una exposición en la que se compartiera su prueba. Los resultados del ejercicio se condensan en la siguiente tabla:

GRUPO	OBSERVACIÓN
1	Es de resaltar el interés que este grupo tuvo frente a esta actividad. Ellos antes de realizar su exposición me consultaron sobre el ejercicio que debían trabajar y sin percatarme les proporcione una indicación errónea. No obstante, insatisfechos y en busca de claridad consultaron otra opinión que les permitió llegar a un resultado correcto.
2	En la mayor parte de las secciones este grupo no participo mucho. Sin embargo, quede sorprendido con la intervención de su expositora porque fue clara y utilizaba correctamente el lenguaje matemático
3	La exposición fue buena pero algunas expresiones comprometieron la claridad de su intervención.
4	Una excelente exposición. Desarrollaron una estrategia de solución muy interesante para el problema planteado.
5	El expositor tenía un buen manejo del público y se interesó mucho en que sus compañeros comprendieran.
6	Exposición clara y concisa. A pesar de que su intervención se hizo algunos minutos después de las 6 pm una cantidad considerable de sus compañeros se mantuvo en el salón.
7	El ejercicio planteado a este grupo fue demasiado sencillo. Esto fue un error por parte del profesor porque las capacidades de los integrantes de este grupo les permitían trabajar un problema más complejo.
8	El ejercicio que le correspondió a este grupo estaba buscaba extender por inducción las leyes de D´Morgan para conjuntos. Sin embargo, durante la intervención no lograron hacerse entender a pesar de tener claros los razonamientos de su prueba.
9	Este grupo no logro desarrollar la prueba. Aun así, mostraron a sus compañeros la idea que tenían para probar la proposición. Tanto así, que con ayuda de sus compañeros lograron, durante la exposición, culminar la prueba.
10	Este grupo no presento muchos avances en los talleres escritos pero en la exposición mostraron las buenas bases que tienen. Poseen algunos problemas de escritura pero con el tiempo y el bagaje desaparecerán.
11	La exposición fue bastante regular. Consumieron mucho tiempo escribiendo primero la prueba y luego explicándola. El ejercicio era parecido al del grupo 8 pero mostraron una estrategia de solución diferente.

5. PENSAMIENTO MATEMÁTICO I Y LA DEMOSTRACIÓN

En los últimos años se ha acrecentado el interés de la educación matemática en el problema de la enseñanza y aprendizaje de la demostración[12]. Este interés radica en la importancia de los procesos de validación en las matemáticas y el bajo nivel que muestran muchos estudiantes en la comprensión y elaboración de demostraciones (Godino & Recio, 2001). Además, cuando se habla de las funciones de la demostración siempre se llega a la verificación, que se considera como su función natural o tradicional. Además, cuando el profesorado sigue lo anterior rigurosamente sin cuestionarse sobre los aportes que se pueden conseguir en la formación integral del alumnado se pierde el verdadero papel de la demostración en el aula (Bravo & Arrieta, s.f.). Con respecto a esto, De Villiers (1993) (cit. Samper & otros (2010)) sostiene que es necesario cambiar el paradigma que tienen muchos profesores respecto a la demostración:

> *"La idea común formalista de muchos profesores de matemáticas de que la convicción es una cartografía monocromática de la demostración deductiva (esto es: una función biyectiva) debe ser, por tanto, completamente abandonada; la convicción no se consigue exclusivamente con la demostración ni es la verificación/convicción la única función de la demostración"* (pág. 27).

5.1 EL ROL DE LAS FUNCIONES DE LA DEMOSTRACIÓN EN EL CURSO DE PENSAMIENTO MATEMÁTICO

En el numeral 3.3 se describieron ampliamente las diversas funciones que tiene la demostración según las investigaciones de De Villiers. A continuación, se pretende

[12] "Hay que destacar la diferencia esencial entre analizar el papel de la demostración en la enseñanza y analizar la enseñanza de la demostración: una cosa es describir lo que ocurre con la demostración en el quehacer docente y, otra, lo que habría que hacer para enseñar a demostrar" (Recio, 2001).

identificar cuáles de esas funciones se utilizaron durante el proceso de enseñanza de los métodos de demostración con los estudiantes de Pensamiento Matemático I del programa de Licenciatura en Matemáticas.

5.1.1 ¿Verificación es equivale a convicción?

Los estudiantes con los que se realizó la práctica pedagógica que aquí se sistematiza ya habían tenido contacto con el concepto de demostración al momento de la intervención. Es más, la gran mayoría cursaron satisfactoriamente la asignatura de Lógica y Conjuntos[13]. Por consiguiente, era pertinente indagar las opiniones y concepciones que tenían sobre la demostración y sus funciones. En este orden de ideas, se realizó la siguiente pregunta ¿Cuáles son las funciones de la demostración? Algunas respuestas se presentan a continuación:

R1*: "La función de la demostración es hacer creíble mediante argumentos válidos (certeros) que lo que se está diciendo o exponiendo es verdadero".*
R2*: "Una de las funciones de la demostración es dar a conocer que un teorema ya planteado es verdadero".*
R3*: "Demostrar el teorema. Cuando alguien este leyendo el teorema tenga la seguridad de que está bien".*
R4: *"Las funciones de la demostración son:* *1. Verificar la veracidad de un enunciado.* *2. A partir de lo demostrado podemos demostrar otros".*
R5: *"Funciones:* *1. Decir si un enunciado es válido o no.* *2. A partir de teoremas demostrados construir nuevos conocimientos.* *3. Utilizar las diferentes propiedades, axiomas, conceptos vistos".*

Registro N° 1.

[13]En esta asignatura hay un capítulo destinado al estudio de los métodos de demostración.

Por otro lado, los profesores de matemáticas (en formación) parecen, con muy pocas excepciones, creer que una demostración proporciona *certeza absoluta* y que es la *autoridad absoluta* para establecer la validez de una conjetura (De Villiers M. , 2001). Esta postura se evidencia claramente en cada una de las respuestas anteriores. Los estudiantes de Pensamiento matemático perciben que la demostración sirve esencialmente para decidir sobre la veracidad de una afirmación. Además, en R2 y R3 se establece como función primordial la verificación de un teorema. Es decir, se piensa a priori la existencia del teorema y la demostración se convierte en la autoridad que lo garantiza. Esto último sigue la visión de Davis & Hersch (1986 cit. De Villiers 2001) que consiste en creer que detrás de cada proposición existe una secuencia de transformaciones lógicas que van desde la hipótesis a la conclusión, absolutamente comprensibles e irrefutables garantes de la verdad. Por lo anterior, se concluye que los estudiantes de Pensamiento Matemático ven la demostración como prerrequisito para lograr convencerse [14] de una proposición.

Aquí es importante aclarar que, según De Villiers (2001), ***la demostración no es necesariamente un prerrequisito para la convicción***. Por el contrario, la convicción es probablemente un prerrequisito para la búsqueda de una demostración[15].

En realidad, no se esperaba que los estudiantes detectaran que antes de demostrar un teorema es pertinente estar convencido del mismo. Sin embargo, durante las actividades realizadas en el aula se evidenció lo anterior. A continuación se exhiben dos ejemplos; el primero donde los estudiantes utilizan la demostración para convencerse de una afirmación y en contraposición otro ejemplo en donde hay convencimiento sin necesidad de una demostración.

El ejercicio trabajado por parte de los estudiantes fue el siguiente:

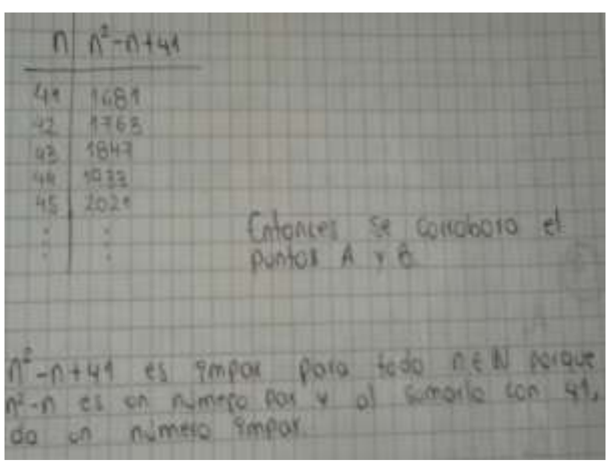
[14] Convicción: Idea religiosa, ética o política a la que se está fuertemente adherido (RAE, 2015).
[15] Sobre este punto el autor (2001) pregunta:
¿Por qué abstrusas y obscuras razones íbamos a perder meses, años incluso, para demostrar ciertas conjeturas sino estábamos ya convencidos de antemano que su veracidad?

“Analicemos algunos valores de la siguiente expresión $n^2 - n + 41$ cuando $n \in \mathbb{N}$.

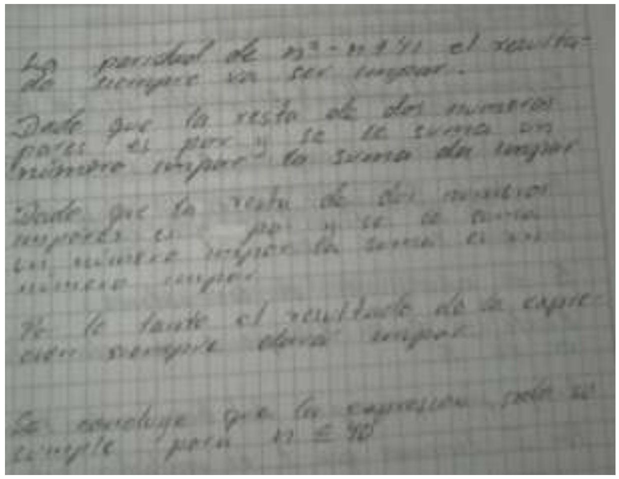
n	$n^2 - n + 41$
1	41
2	43
3	47
4	53
$\vdots$	$\vdots$

A. ¿Qué se puede decir acerca de la paridad de $n^2 - n + 41$?
B. Evalué la expresión $n^2 - n + 41$ para valores mayores que 40 ¿qué se puede concluir de ello?

Los estudiantes mediante la tabla suministrada concluyeron que los valores que arrojaba la expresión eran números impares. Muchos simplemente se quedaron con la prueba empírica, es decir, evaluando la función se percataban del fenómeno y concluían que: *“con $n \in \mathbb{N}$, se puede decir que independientemente del valor que tome n, $n^2 - n + 41$ será un número impar”.* Esta conclusión fue generalizada en las soluciones planteadas por los estudiantes. No obstante, algunos a pesar de estar convencidos decidieron corroborar su afirmación a través de una prueba más formal. Algunos razonamientos son las siguientes:

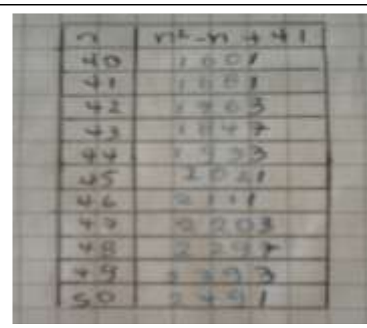


Registro N° 2.1

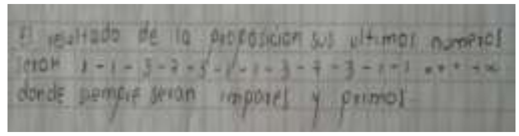

La paridad de n^2-n+41 el resultado siempre va ser impar.
Dado que la resta de dos números pares es par y se le suma un número impar la suma da impar
Dado que la resta de dos números impares es par y se le suma un número impar la suma es un número impar
Por lo tanto el resultado de la expresión siempre dará impar
Se concluye que la expresión solo se cumple para $n \leq 40$

Registro N° 2.2

Claramente, en el actual análisis no interesa si la prueba es perfecta o completamente rigurosa. Aquí lo importante es observar que la convicción personal, en este caso la de los estudiantes, depende de una combinación de intuición, verificación cuasi-empírica y la existencia de una demostración lógica, no necesariamente rigurosa (De Villiers M. , 2001, pág. 19). Además, según el autor anterior, se puede llegar a veces a un alto nivel de convicción incluso sin la existencia de una demostración. Para ejemplificar lo anterior, observe el siguiente registro.

El análisis de un estudiante:	

n	n^2-n+41
40	1601
41	1681
42	1763
43	1847
44	1933
45	2021
46	2111
47	2203
48	2297
49	2393
50	2491

Conclusión del estudiante:	

Registro N° 3.

En este caso, los estudiantes debían evaluar la expresión $n^2 - n + 41$ para valores mayores que 40 y establecer una conclusión. En este sentido, la idea era que concluyeran que las imágenes de la función no necesariamente eran números primos. Sin embargo, en el registro anterior se puede apreciar que los estudiantes dedujeron que el último dígito de $n^2 - n + 41$ con $n \in \mathbb{N}$ será 1, 3 o 7 y tales números mantienen un patrón. Además la expresión “siempre serán”, que se aprecia en el registro, permite inferir que los estudiantes estaban convencidos que su afirmación era verdadera. En este caso, la evidencia es “tan fuerte que conduce a la convicción incluso sin demostración rigurosa”. Así pues, el camino hacia altos niveles de confianza en una proposición se puede recorrer por caminos distintos a la demostración.

5.1.2 La “explicación”, tiquete matemático a la sabiduría

Los registros anteriores han permitido observar y analizar el funcionamiento de la demostración como una herramienta de verificación que permite la convicción plena de alguna proposición. Aunque, la demostración no siempre es un prerrequisito para la convicción. Con respecto a este punto De Villiers (2001) dice que:

> *“es posible alcanzar un alto grado de confianza en la validación de una conjetura por verificación cuasi-empírica (por ej., construcción y medida muy precisa de un modelo; substitución numérica, etc.)”* (pág. 20).

De esta manera, el registro N°3 es prueba de que los estudiantes tenían alto grado de confianza en su afirmación. Sin embargo, sus procedimientos (substitución numérica) no proporcionaban una explicación satisfactoria del ***por qué*** tal afirmación podía ser cierta. Así pues, la consideración de más y más ejemplos puede aumentar la confianza pero no da el sentido, psicológicamente satisfactorio, de iluminación, esto es: una visión desde dentro o meterse dentro en el cómo surge (la afirmación de los estudiantes) como consecuencia de otros resultados ya familiares (De Villiers M. , 2001).

El autor (2001) que ha fundamentado los análisis que se han realizado afirma de forma general que:

> *"en la mayoría de los casos en los que los resultados son intuitivamente evidentes por sí mismos, y/o están apoyados por evidencia cuasi-empírica convincente, la función de la demostración no es, ciertamente, la de verificación, sino más bien la de* ***explicación****"* (pág. 21).

Con forme a la postura anterior, el concepto de demostración en el contexto del registro N°3 no busca "asegurarse" de la afirmación, sino que busca "explicar su por qué". Es más, para muchos matemáticos es más importante el aspecto de aclaración o explicación que brinda la demostración que el de verificación. Acorde con esto, Manin (1981) y Bell (1976), citados por De Villiers (2001), argumentan que la explicación es un criterio para una "buena" demostración, "la que hace al ser humano más sabio" y que se espera que proporcione una visión interior de por qué la proposición es cierta[16]. Visto esto, desde la educación matemática, la demostración como herramienta de explicación es vital para la formación matemática de un individuo porque cultiva en el estudiante la curiosidad, la reflexión y el espíritu crítico frente a la disciplina.

[16] En la actualidad existen proposiciones matemáticas para las cuales las evidencias heurísticas hacen creer que son verdaderas. Por ejemplo la conjetura de Goldbach y la conjetura de Riemann. Sin embargo, actualmente se busca una demostración que explique por qué son verdaderas o en su defecto un, poco probable, contraejemplo.

5.1.3 Un intento de “sistematización” en el aula

En los párrafos anteriores se ha estudiado el rol de la demostración como medio de verificación/convicción y de explicación. Ahora, es momento de analizar el papel de la demostración como medio de sistematización. En el apartado 3.3.4 se afirma que las pruebas matemáticas eran indispensables para la organización de resultados matemáticos en un sistema axiomático deductivo, definiciones y teoremas. Esta estructuración busca exponer las relaciones existentes entre las proposiciones de la teoría y evitar razonamientos circulares o pruebas cuasi-empíricas.

Sin lugar a duda, desde los tiempos de Euclides la sistematización ha permitido que la cultura matemática se preserve y evolucione. No obstante, la actividad de sistematización es usualmente realizada por los matemáticos profesionales y su utilidad en el aula es casi mínima (De Villiers, 1999). Pese a esto, en el proceso educativo llevado con los estudiantes de Pensamiento Matemático se recreó un proceso o actividad de “sistematización” de los métodos de demostración usuales en matemáticas con el propósito de extraer los procesos genéricos que se utilizan en:

- El método directo.
- Pruebas de existencias.
- Pruebas de generalización.
- El método del contrareciproco.
- Método de reducción al absurdo.
- Prueba de negaciones.
- Pruebas por casos.
- El método de inducción matemática.

En el siguiente cuadro se presentan en detalle cada uno de los métodos que se trabajaron. Cabe aclarar que, en el aula se desarrolló un estudio detallado utilizando como sustento la lógica de proposiciones y predicados.

MÉTODO DIRECTO Para probar una implicación ***si φ, entonces ψ*** es suficiente hacer lo siguiente: 1. ***Suponer*** que el antecedente ***φ es verdadero.*** 2. ***Probar*** que el consecuente ***ψ es verdadero***, usando φ como premisa.	**PRUEBA DE EXISTENCIAS** Para probar una afirmación de la forma existe ***$x \in A$ talque $\varphi(x)$*** es suficiente hacer lo siguiente: 1. ***Exhibir*** un elemento especifico ***a de A***. 2. Probar que **$\varphi(a)$ es verdadero**
MÉTODO DE LA GENERALIZACIÓN Para probar una generalización de la forma ***para todo $x \in A$, tenemos $\varphi(x)$*** basta hacer lo siguiente: 1. Suponer que la variable de generalización x asume como valor un elemento cualquiera de A. 2. Probar que el enunciado de generalización $\varphi(x)$ es verdadero, usando solamente propiedades de x que son genéricas en A, es decir, usando propiedades de x solamente propiedades que valen para todos los elementos de A.	**MÉTODO DEL CONTRARRECIPROCO** Para probar una implicación ***"si φ, entonces ψ"*** es suficiente hacer lo siguiente: 1. Suponer que la negación del consecuente, ***no ψ***, es verdadera. 2. Probar que la negación del antecedente, ***no φ***, es verdadera usando $no\ \psi$ como premisa.
MÉTODO DE REDUCCIÓN AL ABSURDO (MRA) Para probar una implicación ***"si φ, entonces ψ"*** a través del MDA es suficiente hacer lo siguiente: 1. Asumir verdadera la hipótesis φ. 2. Suponer la negación del consecuente, $no\ \psi$. 3. Probar algún enunciado θ y su negación $no\ \theta$.	**PRUEBA DE NEGACIONES** Para probar una negación $no\ \varphi$, es suficiente hacer lo siguiente: 1. Suponer que el enunciado negado φ es verdadero. 2. Probar algún enunciado ψ que contradiga un enunciado θ, ya conocido, usando φ como premisa.
MÉTODO DE LA PRUEBA POR CASOS Para probar un enunciado de la forma: "Si ψ_1 o ψ_2 entonces φ" Es suficiente hacer lo siguiente: 1. Probar que φ es verdadero, usando ψ_1 como premisa (y no usando ψ_2). 2. Probar que φ es verdadero, usando ψ_2 como premisa (y no usando ψ_1).	**MÉTODO DE INDUCCIÓN MATEMÁTICA** Para probar una generalización de la forma "Para todo $n \in \mathbb{N}$, tenemos que $P(n)$", es suficiente hacer lo siguiente: 1. Probar que: $P(1)$ es cierta. 2. Probar la generalización: Para todo $n \in \mathbb{N}$: Si $P(n)$ entonces $P(n+1)$.

Registro N° 4.

Este ejercicio no es estrictamente una sistematización como la define De Villiers (2001). Sin embargo, sigue algunas de las funciones que en 3.3.4 se especificaron para la sistematización deductiva. Por ejemplo, el registro N°3 logra:

- Simplificar la teoría concerniente a los métodos de demostración en una presentación económica.
- Proporcionar una perspectiva global del tema.

5.1.4 La comunicación en el aula

Para finalizar el análisis de las funciones de la demostración que se evidenciaron en el curso de Pensamiento Matemático se estudiará un registro obtenido en una conversación con un estudiante. En la charla, el alumno intenta dar a conocer un comportamiento particular que tiene la función $f(n) = n^2 - n + 41$ con $n \in \mathbb{N}$. En síntesis, él afirma que la diferencia entre dos imágenes consecutivas de f es igual al doble de la preimagen menor. Es decir $f(n+1) - f(n) = 2n$.

En el marco teórico se hizo referencia a la demostración como un medio de comunicación entre quienes hacen matemáticas (Volmink, 1990) y los argumentos matemáticos como un puente que permite al hablante o autor hacer comprender a un público humano sus intenciones (Davis y Hersh, 1986). En el contexto particular de este trabajo quienes hacen matemáticas son el docente en formación y el estudiante. En este caso, el estudiante utilizó argumentos matemáticos, que compartía con el practicante, para lograr transmitir su punto de vista. De esta manera, acorde con Davis (1976), la demostración alcanza uno de sus valores reales dado que crea un foro para el análisis crítico.

No obstante, en el momento real del registro, el profesor no comprendió totalmente la idea del estudiante porque no fue convencido por los argumentos del estudiante a pesar de que eran convincentes. Aquí nuevamente, la demostración hace presencia como forma de interacción social que involucra una *negociación* *subjetiva* de conceptos concernidos y los criterios para una argumentación aceptable (De Villiers, 2001).

5.2 LA FUNCIÓN FORMATIVA DE LA DEMOSTRACIÓN

La demostración matemática es uno de los conceptos más problemáticos para la educación matemática y para los estudiantes de los primeros años de carreras con énfasis en matemáticas. Las posturas de De Villiers (2001) ya mostraron que es errado entender la demostración como un método que sirve simplemente para la verificación o convicción de una afirmación. Más aún:

> *"tal aproximación no es sólo deshonesta intelectualmente, sino que no tiene sentido para los estudiantes, especialmente cuando se trata de casos evidentes por si mismos o fácilmente verificables"* (2001, pág. 27)

Por consiguiente, debe incentivarse la enseñanza de la demostración, junto con sus diversas funciones, como una actividad significativa para el estudiante. Acorde a esta premisa, Recio (2001) distingue, dentro de la enseñanza universitaria, dos funciones nuevas para la demostración:

1. **Parte esencial del contrato didáctico en Matemáticas**:
    > *"el profesor se ve obligado a demostrar en clase, sin usar el recurso a su conocimiento de otras fuentes de información, lo afirma que es cierto; y también forma parte del mismo contrato el que el alumno deba estar atento a descubrir cualquier resquicio, aunque sea inesencial, en la prueba que le presentan"* (2001, pág. 17).
2. **Fuente insustituible de entrenamiento**:
    > *"Ocurre que el profesor muestra, de modo sistemático, las pruebas de todos los resultados que enuncia, porque considera que el análisis y comprensión de las mismas por los estudiantes es una fuente*

insustituible de entrenamiento en las formas peculiares de razonar y de usar los hechos básicos de la teoría que explica” (2001, pág. 17).

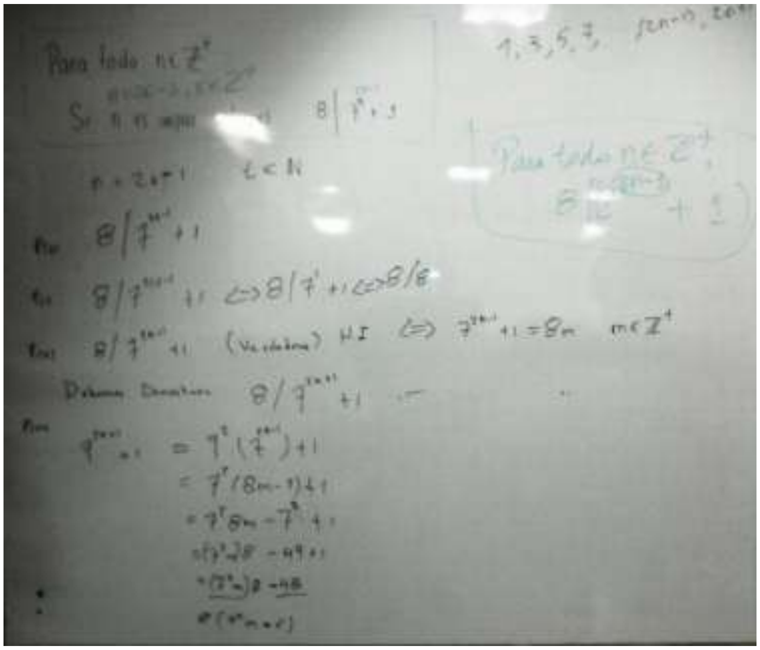
Además, las funciones anteriores están en constante retroalimentación durante un proceso educativo. Según Recio (2001), el profesor enseña al estudiante a demostrar mostrando como demuestra él. No obstante, el proceso contrario también se presenta porque el estudiante en muchas ocasiones contribuye en la comprensión de las demostraciones en el aula. Por ejemplo, un estudiante de Pensamiento Matemático I tenía por ejercicio probar lo siguiente:

“Para todo $n \in \mathbb{N}$, si n es impar entonces 8 divide a $7^n + 1$”.

El profesor, durante la preparación de la clase, demostró la proposición aplicando el método de inducción matemática de la siguiente manera:

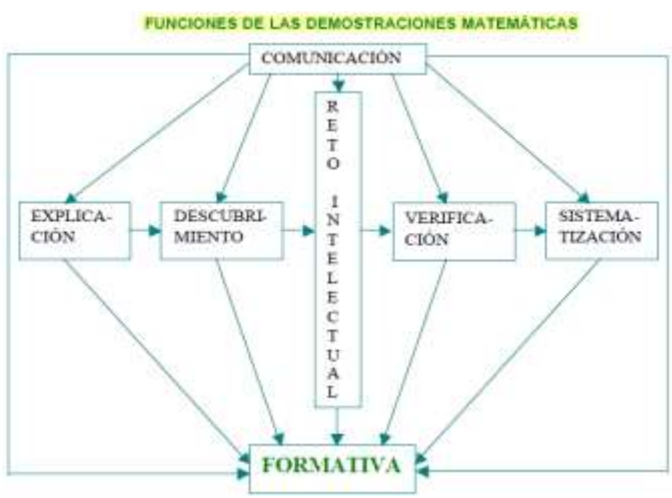
Registro N° 5

Al revisar juiciosamente la prueba se concluye que se ha aplicado incorrectamente el método de inducción matemática. Sin embargo, lo interesante es que esta prueba se presentó a un grupo de estudiantes que desde el inicio expresó su inconformidad. La necesidad que tenían los estudiantes por verificar la validez de la proposición los llevo al siguiente argumento:



Registro N° 6

Con lo anterior se concluye que la demostración tiene más funciones además de las mencionadas en 3.3. El último análisis muestra que las pruebas matemáticas juegan también un ***papel formativo*** para los estudiantes como para los profesores. Además, la función formativa se integra perfectamente con las funciones descritas por De Villiers (2001). Esto lo esquematiza Bravo & Arrieta (s.f.) en la siguiente figura:



Finalmente, la enseñanza obtenida del análisis del rol de la demostración en el curso de Pensamiento Matemático I se reflejan en las palabras de Bravo y Arrieta (s.f.):

> *"Si tratamos con las demostraciones hasta convertirlas en una actividad significativa y necesaria, entonces, desde nuestro punto de vista, perdurarán en la formación profesional de los educandos de tal manera que podrán transmitir sus significados a otros individuos… en las diferentes enseñanzas según corresponda a su posterior actividad profesional".*

6. LAS FUNCIONES DE LA DEMOSTRACIÓN Y LOS BENEFICIOS.

El proceso educativo llevado a cabo con los estudiantes de Pensamiento Matemático I permitió estudiar algunas funciones de la demostración. Paralelo a esto también se pudieron evidenciar una serie de beneficios, en pro del desarrollo del pensamiento matemático de los estudiantes y el profesor. A continuación se pretende dar a conocer cuáles fueron los beneficios y quiénes se vieron capturados por ellos.

En las primeras clases, los estudiantes tendían a realizar las demostraciones siguiendo un esquema (ver anexo 6) análogo al que usualmente se utiliza en un curso de lógica de predicados. Sin embargo, con el trabajo posterior se logró que cambiaran su forma algorítmica de trabajar por un método más reflexivo. Por consiguiente, se consiguió que comprendieran la importancia de interpretar, valorar y comprender una prueba matemática. No obstante, lo ideal no es únicamente que los estudiantes comprendan la importancia sino también que sean capaces de interpretar, comprender y finalmente elaborar una demostración. Lograr esto, no es un proceso fácil porque requiere tiempo y una planeación minuciosa. Al respecto, Bravo y Arrieta (s.f.) hacen el siguiente aporte:

> "(…) debe darse paso a la realización de una amplia ejercitación y aplicación de los teoremas y sus demostraciones de forma gradual y sistemática, a la *explicación* de todas las posibles variantes mediante la *reflexión* individual y/o colectiva de cada posible vía de solución, donde los estudiantes *buscan, discuten* y *analizan diferentes formas de proceder,* de vías de solución y múltiples posibilidades de modelar situaciones bajo la *sistematización* y *actualización* de conocimientos."

Lo anterior permite concluir que el trabajo realizado con los jóvenes de Pensamiento Matemático I fue un espacio que les permitió poner de manifiesto su pensamiento creativo y la fantasía, el pensamiento lateral[17], el pensamiento especulativo, el pensamiento heurístico y el pensamiento lógico deductivo.

Por otra parte, Bravo y Arrieta (s.f.) sostienen que:

> "el debate de las vías de solución, de las figuras pertinentes, en los aportes de la demostración, debe exigirse una correcta expresión oral, no considerada sólo como un medio de comunicación, sino también como una manifestación del pensamiento. Ello porque el hecho de exigir una expresión adecuada contribuye a la formación lingüística, al desarrollo del lenguaje propiamente matemático con la utilización correcta del vocabulario técnico de la asignatura y se ponen de manifiesto rasgos de la conducta como son el *rigor* en sus *razonamientos*, la *exigencia* y *el carácter reflexivo"*.

Por ende, la incursión pedagógica que aquí se sistematiza tuvo un fuerte componente lingüístico. La participación activa de los estudiantes les permitió mejorar su expresión oral frente a un público y exponer sus ideas utilizando lenguaje matemático que será frecuente en su formación profesional. Además, el maestro también debió perfeccionar sus expresiones porque al inicio, su lenguaje poco formal, llevaba a confusiones. Cabe aclarar, que la confianza que se logró establecer entre los estudiantes y el maestro facilitó mejorar las expresiones orales porque ambas partes hacían observaciones críticas al momento de no comprender las ideas del otro.

Finalmente, es importante la enseñanza de la demostración y del uso consiente de sus funciones por los efectos en la formación integral de los estudiantes, del desarrollo de su pensamiento y lenguaje. Adicionalmente, se debe mostrar que los procesos demostrativos no sirven únicamente para el trabajo con teoremas y demostraciones. También influyen significativamente en el desarrollo de las

[17] Método de pensamiento que es una técnica para la resolución de problemas de manera imaginativa.

capacidades generales como argumentar, fundamentar, inferir, refutar y deducir (Bravo & Arrieta, s.f.).

Finalmente, es importante la enseñanza de la demostración y del uso consiente de sus funciones por los efectos en la formación integral de los estudiantes, en el desarrollo de su pensamiento y lenguaje. Adicionalmente, se debe mostrar que los procesos demostrativos no sirven únicamente para el trabajo con teoremas y demostraciones. También influyen significativamente en el desarrollo de las capacidades generales como argumentar, fundamentar, inferir, refutar y deducir. Así pues:

> "(…) las demostraciones de proposiciones matemáticas son un punto neurálgico para los estudiantes en el estudio de las Matemáticas, por lo que hay que incentivar la *tenacidad, perseverancia, esfuerzo, disciplina y constancia* a lo largo del proceso de resolución de un problema de demostración, para así llegar a lograr la *independencia* en la realización de éstas, se convierte en un *reto intelectual* ante el deseo de adquirir nuevos conocimientos, métodos de trabajo y desarrollo del pensamiento en sentido amplio" (Bravo & Arrieta, s.f.)

7. LECCIONES APRENDIDAS

El objetivo de este documento es sistematizar la experiencia realizada en la Practica Pedagógica vivida con los estudiantes del curso Pensamiento Matemático I durante el segundo periodo académico de 2014 de la Universidad del Cauca. De esta manera, es pertinente recordar que la sistematización:

> "constituye una reflexión crítica y participativa de la experiencia vivida (…). Produce conocimientos teóricos a partir del análisis crítico reflexivo de la realidad, la enriquece y contribuye a su progreso. Se dilucidan etapas, regularidades, causas de logros o dificultades. **Precisa qué se debe repetir y qué no se volvería a ejecutar nuevamente"** (el subrayado ha sido agregado).

Por consiguiente, a continuación se resaltan aspectos sobresalientes de esta experiencia y que merecen ser repetidos en prácticas posteriores junto a aquellos hechos que deben replantearse para obtener mejores resultados en próximas prácticas.

En primer lugar, es conveniente retomar en futuras prácticas el tema trabajado y el contexto en donde se hizo. La demostración y sus funciones abren espacios de discusión entre los estudiantes y el maestro donde ambos deben poner en funcionamiento sus conocimientos. El estudiante debe esforzarse por interpretar o construir una demostración y el maestro debe hacer uso de diversas estrategias pedagógicas para que el estudiante desarrolle al máximo sus capacidades. Adicionalmente, las funciones de la demostración son un tema que a primera impresión solo se reduce a la verificación. No obstante, al profundizar en el tema es posible descubrir otras funciones que pueden ser más significativas. Así pues, es importante ampliar la visión de futuros maestro en torno a la demostración y sus funciones para lograr que las próximas generaciones comprendan el verdadero valor de una demostración en matemáticas. Esto hace significativo retomar el tema trabajado en esta sistematización y en particular en el programa de Licenciatura en Matemáticas.

Por otra parte, esta sistematización hace evidente varios hechos que deben replantearse en próximas experiencias. En primer lugar, es conveniente delimitar mejor el problema a estudiar. No es viable analizar en conjunto todas las funciones de la demostración porque al momento de realizar los análisis el trabajo se torna dispendioso y se puede llegar a confusiones. Por consiguiente, es aconsejable fijar una sola función para luego realizar un análisis minucioso. Por ejemplo, para próximas experiencias de Práctica Pedagógica se pueden formular las siguientes preguntas de investigación:

- ¿Cuál es el papel de la verificación el aula?
- ¿Cómo se pude utilizar la demostración para construir conocimiento en el aula?
- ¿Cómo se diferencia la verificación y la convicción en el aula utilizando procesos y pruebas inductivas?
- ¿Cómo conciben los estudiantes del Programa de Licenciatura en Matemáticas de la Universidad del Cauca la demostración?
- ¿Cómo conciben los docentes del Programa de Licenciatura en Matemáticas de la Universidad del Cauca la demostración?
- ¿Qué papel juega la demostración en la formación de docentes en Matemáticas en el programa de Licenciatura en Matemáticas de la Universidad del Cauca?

Otro hecho que se debe tener en cuenta está relacionado con la precisión en el uso del lenguaje. Por ejemplo, para esta experiencia no se realizó una clara delimitación entre estas dos expresiones “demostración en la enseñanza” y “enseñanza de la demostración”. En ocasiones, se llegó a confusiones entre estas y se desvió el estudio. Por consiguiente, es preciso tener claridad y para ello se recomienda la distinción que hace Recio (2001) (cit. Bravo y Arrieta (s.f.)):

- **Demostración en la enseñanza:** Lo que ocurre con la demostración en el quehacer docente.

- **Enseñanza de la demostración:** lo que habría que hacer para enseñar a demostrar.

El último aspecto, el cual debería modificarse en próximas experiencias está relacionado con los registros. Para este trabajo la recolección de los datos no fue realizada de forma juiciosa. Esto provoco inconvenientes al momento de buscar pruebas para mostrar cómo se evidencian las funciones de la demostración, dado que, muchos registros que pudieron haber contribuido y sustentado mejor la sistematización se perdieron por no ser archivados de forma correcta. Por consiguiente, para próximos trabajos la recolección y la sistematización de los datos obtenidos en el aula deben ser almacenadas en matrices o plantillas previamente establecidas que permitan optimizar y archivar la mayor cantidad de información. De esta manera, se podrá describir, interpretar y analizar las situaciones vividas con mayor precisión.

8. BIBLIOGRAFÍA

Almouloud, S. (s.f.). PROVA E DEMONSTRAÇÃO EM MATEMÁTICA: PROBLEMÁTICA DE SEUS PROCESSOS DE ENSINO E APRENDIZAGEM. *GT: Educação Matemática*(19), 1-18.

Balacheff, N. (2000). *Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas.* Colombia: Una empresa docente.

Bosch, M. A. (2012). Apuntes teóricos sobre el pensamiento matemático y multiplicativo en los primeros niveles. *Educación Matemática en la Infancia*, 15-37.

Bravo, M. L., & Arrieta, J. J. (s.f.). ALGUNAS REFLEXIONES SOBRE LAS FUNCIONES DE LA DEMOSTRACIONES MATEMÁTICAS. *Revista Iberoamericana de educación*, 1-8.

Brenes, G. S. (s.f.). *Propuesta sobre la enseñanza de la demostración de implicaciones.*

Crespo, C. (s.f.). La importancia de la argumentación matemática en el aula. *Sociedad Argentina de educación Matemática*, 23-28.

D´Amore, B. (2006). Comencemos a hablar de demostración. ¿Demostremos qué? In: B. D´Amore, *Didáctica de las Matemáticas* (pp. 341 - 363). Bogotá: Coorporación Magisterio.

De Villiers, M. (1999). The role and function of proof whit sketchpad.

De Villiers, M. (2001). El papel y la función de la demostración en matemáticas. *Epsilon N°26*, 15-30.

Departamento de Matemáticas, Universidad del Cauca. (s.f.). *Misión del Departamento de Matemáticas*. Acceso en 10 de Noviembre de 2014, disponible en Departamento de Matemáticas de la Universidad del Cauca: http://www.unicauca.edu.co/matematicas/

Díaz, V. (2006). Formación docente, práctica pedagógica y saber pedagógico. *Laurus*, 88-103.

Díez, C. (s.f.). *Konrad Llorenz*. Acesso em 13 de Julio de 2015, disponível em Konrad Llorenz:

http://www.konradlorenz.edu.co/images/stories/articulos/metodo_demostracion_matematicas.pdf

DiFate, V. (s.f. de s.f. de s.f.). *Internet Encyclopedia of Philosophy*. Acesso em 9 de Mayo de 2014, disponível em Internet Encyclopedia of Philosophy: http://www.iep.utm.edu/evidence/

García, W., Rosero, Y., Hernán, A., Bobadilla, M., Inés, G., Molina, W., et al. (2014). *PROYECTO EDUCATIVO PROGRAMA LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS.* Popayán: Universidad del Cauca.

Godino, J. D., & Recio, Á. M. (2001). Significados institucionales de la demostración. Implicaciones para la Educación Matemática. *Enseñanza de las ciencias*, 405-414.

Gómez, M. A. (2005). LA TRANSPOSICIÓN DIDÁCTICA: LA HISTORIA DE UN CONCEPTO. *Revista Latinoamericana de Estudios Educativos*, 83-115.

Gonzáles, M. (2009). *Molina, M. (2006). Desarrollo de Pensamiento Relacional y Comprensión del signo igual por alumnos de Tercero de Molina, M. (2006). Desarrollo de Pensamiento Relacional y Comprensión del signo igual por alumnos de Tercero de Educación Primaria.* Granada: Universidad de Granada.

Montaño, D. C. (2007). *Aprender a investigar investigando. "Cuadernos universitarios de estudio". Cuaderno N°3: Estrategias y técnicas de investigación cualitativa. "El trabajo de Campo".* Popayán.

Mora, J. (1950). *Diccionario de Filosofía.* Buenos Aires: Sudamericana.

Recalde, L., Hinestroza, D., Álvarez, J., Marmolejo, M., & Acosta, E. (s.f.). *Técnicas y conceptos Básicos de Matemáticas.* Cali: Universidad del Valle.

Recio, T. (2001). La mecánica de la demostración y la demostración mecánica. *X JAEM* (pp. 405-414). Zaragoza: Universidad de Cantabria.

Samper, C., & Ospina, T. y. (2010). Aproximación a las visiones de demostración de algunos profesores universitarios de matemáticas. *Tecné, Episteme y Didaxis*, 25-37.

Samper, C., Ospina, Y., & Plazas, T. (2010). Aproximación a las visiones de demostración de algunos profesores universitarios de matemáticas. *Tecné, Episteme y Didaxis*, 25-37.

Universidad del Cauca. (2014). *Universidad del Cauca.* Acesso em 11 de Noviembre de 2014, disponível em Universidad del Cauca: http://www.unicauca.edu.co/versionP/acerca-de-unicauca/filosofia

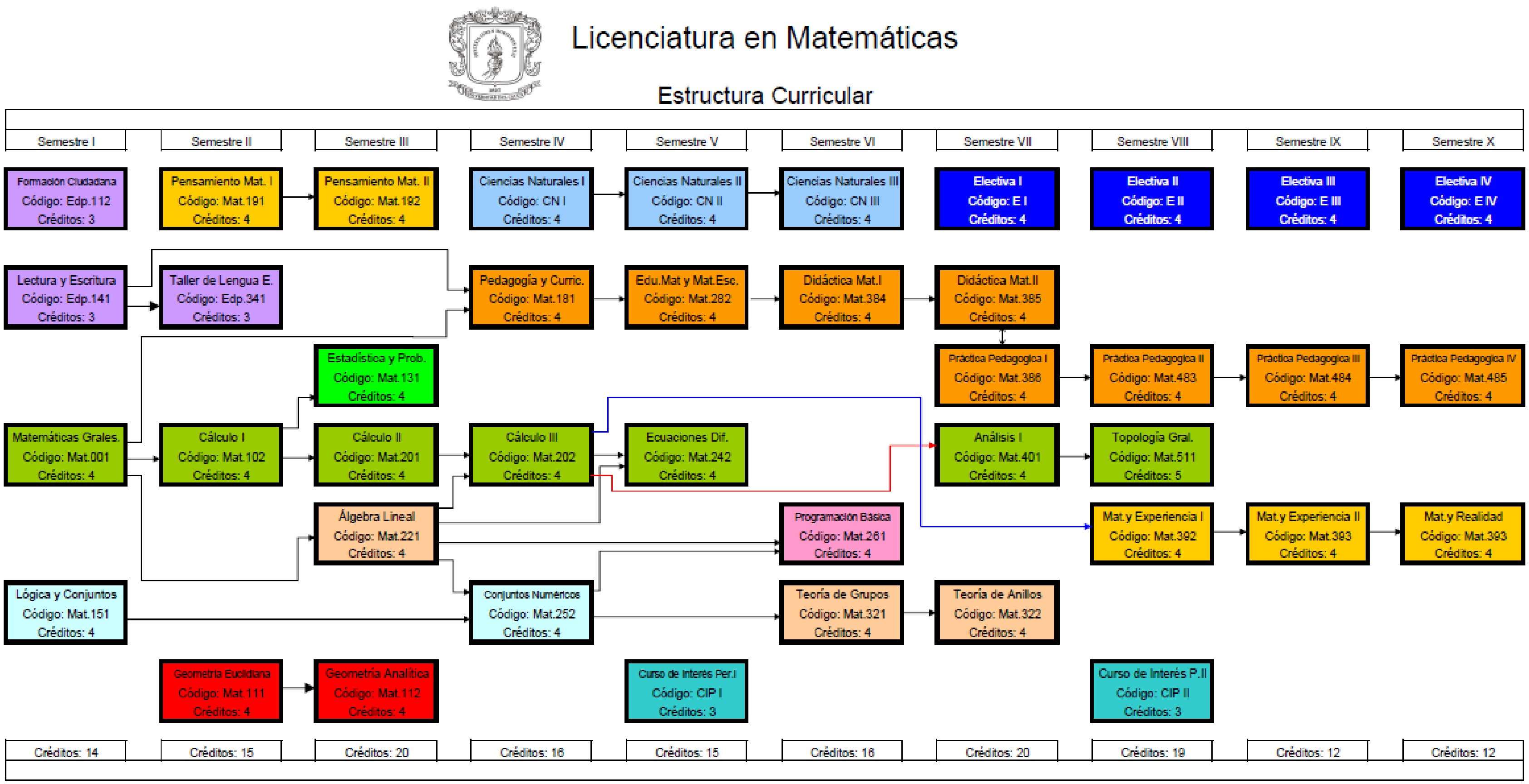
Universidad del Cauca. (s.d.). *Programa de Licenciatura en Matemáticas*. Acesso em 8 de Noviembre de 2014, disponível em http://www.unicauca.edu.co/versionP/oferta-academica/programas-de-pregrado/licenciatura-en-matematicas

9. ANEXOS

ANEXO 1: UNIVERSIDAD DEL CAUCA (UNICAUCA).

ANEXO 2: FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES, EXACTAS Y DE LA EDUCACIÓN (FACNED).

ANEXO 3: ESTRUCTURA CURRICULAR DEL PROGRAMA DE LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS DE LA UNICAUCA



ANEXO 4: PROGRAMA DE PENSAMIEMTO MATEMÁTICO I.

Facultad de Ciencias Naturales, Exactas y de la Educación

Departamento: Matemáticas

Tipo de Actividad: Seminario **Créditos:** 4 por semestre

Nombre: Pensamiento Matemático I (Mat 191) **Intensidad Horaria:** 4 h.s.

Requisitos:

DESCRIPCIÓN DEL SEMINARIO

En estos seminarios se pretende abordar algunas formas particulares de pensamiento matemático desde una perspectiva socio-cultural. Se trataría de propiciar en el estudiante una reflexión sobre las prácticas matemáticas, a la luz de la cultura y sociedad específica en que éstas emergen.

Generalmente pensamos que los objetos a los que alude la matemática, -por ejemplo número o infinito-, son abstracciones o construcciones mentales de los matemáticos que no tienen relación alguna con el mundo "real", con el mundo que percibimos a través de nuestros sentidos. Cuando nos hablan de función, de derivada o integral, creemos que estos conceptos han perdurado a través del tiempo, incólumes ante los avatares del hombre, su sociedad, y su cultura. Evidentemente esta forma de pensamiento matemático, la que conocemos, (la occidental), no surgió de la noche a la mañana, ni tampoco ha permanecido estática a través del tiempo. Por el contrario ella se ha ido desarrollando con el concurso de muchos seres humanos inmersos en sociedades y culturas específicas.

Pero no todas las culturas perciben y construyen el mundo de la misma manera. Es interesante constatar que aunque la mayoría de sociedades y pueblos poseen un pensamiento numérico por ejemplo, no se han sentido impelidos a teorizar sobre él, y mucho menos han sentido la necesidad de desligarlo de unas prácticas concretas.

No fue este el caso de la cultura griega antigua, en el que las conceptos matemáticos se erigieron en procesos de abstracción y parecieron desvincularse de cualquier referente empírico. Igualmente en las matemáticas occidentales muchos conceptos aparentan no tener trazas de lo empírico y mucho menos de lo social. Pero como las teorías matemáticas son construidas por seres humanos en conglomerados específicos, se trataría de evidenciar la manera en que éstas se encuentran contaminadas de una forma particular de entender el mundo, de una cosmovisión.[1]

Otro elemento importante en esta reflexión sobre matemáticas, cultura y sociedad, lo constituyen las comunidades de matemáticos; es decir la matemática entendida como institución social. Si bien existen los grandes centros matemáticos a nivel mundial, no se puede desconocer que los países periféricos se apropian y difunden una teoría matemática de acuerdo a unos ciertos valores e ideologías, y de acuerdo también a unos intereses particulares.

Precisamente cierto tipo de estudios históricos dan evidencia fehaciente de que la construcción de las teorías y conceptos matemáticos occidentales está lejos de cumplir el modelo purista.[2] En muchos casos los desarrollos matemáticos se gestan precisamente en la confrontación entre comunidades de matemáticos y en la fusión e interacción con otras disciplinas. Es el caso, por ejemplo, de la comunidad matemática europea del siglo XIX, cuando comienzan a emerger los matemáticos profesionales, las sociedades científicas, las revistas especializadas, los textos y artículos de referencia; al respecto nos interesaría analizar los mecanismos de comunicación entre los diversos países y el complejo proceso de instauración de algunos conceptos matemáticos.

En este seminario se pretende estudiar formas de pensamiento matemático a la luz de una reflexión de tipo sociocultural. Se trata de indagar y encontrar vínculos entre unas prácticas concretas de tipo numérico y una cierta manera de pensar el mundo y construirse una realidad propia.

El seminario consta de dos partes. En una primera etapa se debe plantear una reflexión teórica alrededor de las siguientes nociones: cultura, sociedad, pensamiento matemático, cosmovisión, imaginario social. En la segunda etapa se estudiarían algunos casos particulares de pensamiento numérico en culturas determinadas.

OBJETIVO GENERAL

Inducir al estudiante hacía una reflexión de tipo cultural sobre las prácticas matemáticas.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

1. Ir consolidando en el estudiante su formación humanística a partir de su propia disciplina.
2. Propiciar en el estudiante una reflexión crítica sobre el acto de conocer en matemáticas.

3. Iniciar al estudiante en los procesos de lectura y escritura.
4. Acercar al estudiante a otras formas de “conocer”, distintas a la occidental.

CONTENIDO DEL CURSO

Observación: Se sugiere un listado de temas generales, sin embargo, de acuerdo con las características de un seminario, estos temas pueden ser abordados desde diferentes ópticas y diferentes niveles de profundización de acuerdo con el criterio del profesor y las características e intereses particulares del grupo

TEMÁTICAS

Parte 1

- Pensamiento matemático y cultura

Parte 2

- Características socio-culturales y formas de pensamiento matemático en las civilizaciones antiguas: Egipto y Babilonia.
- Los imperios invaden América. Aspectos socio-culturales del colonialismo. El pensamiento matemático del mundo precolombino. Los mayas, los incas, los aztecas.
- Sistemas de numeración en diversas culturas: maya, india, babilonia, egipcia, árabe.

METODOLOGÍA

La metodología con que se abordará esta asignatura contempla las modalidades de seminario y taller de lectura. Previamente se asignará un material de lectura para ser estudiado por los integrantes del grupo.

TALLER DE LECTURA

El taller de lectura es una modalidad de trabajo en clase, en el que los estudiantes, (individualmente o en grupo) previo estudio de un documento, se enfrentan a una serie de problemas e interrogantes que surgen a partir del análisis concienzudo del documento y que invitan a un tipo de lectura más profunda en donde se va un poco más allá de lo textual y explícito. Este ejercicio que generalmente es de escritura, tiene también una segunda etapa de comunicación y confrontación con todo el colectivo de participantes.

EVALUACIÓN

La evaluación de la asignatura se hará de acuerdo a los siguientes elementos:

- Dos pruebas parciales
- Trabajo final.
- Coordinación del seminario
- Relatorías
- Talleres de lectura
- Participación en la discusión y compromiso con las sesiones.

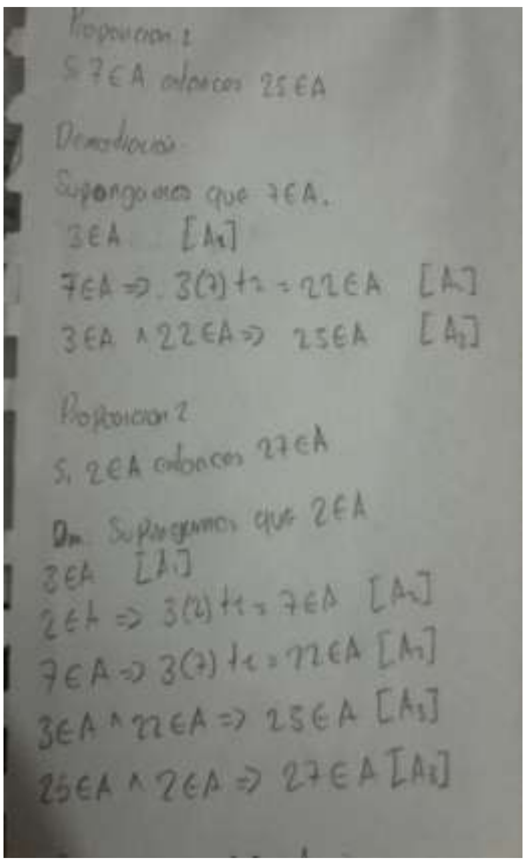
El peso de cada actividad será acordado por el profesor y los estudiantes. El curso no es habilitable.

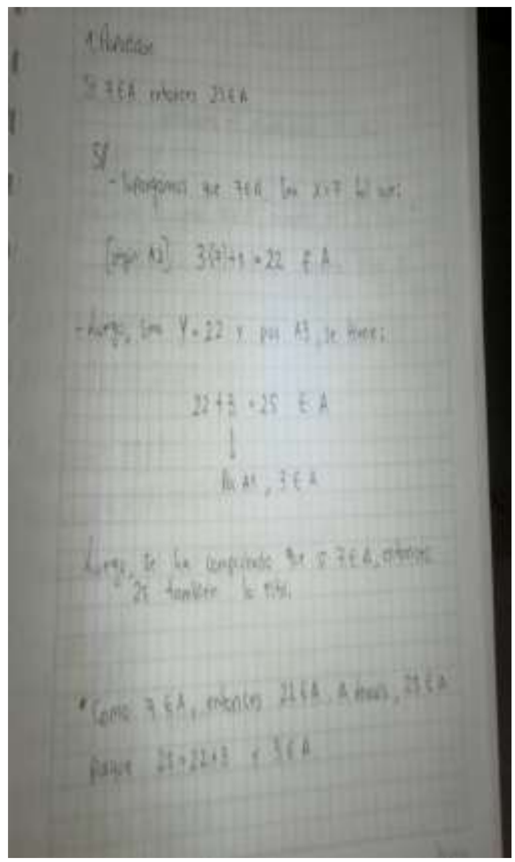
ANEXO 5: ESTUDIANTES DE PENSAMIENTO MATEMATICO I.

ANEXO 6: EJEMPLO DE UNA DEMOSTRACIÓN REALIZADA POR LOS ESTUDIANTES.

Sea $A \subset \mathbb{N}$ que satisface los siguientes axiomas:

A1.	$3 \in A.$		
A2.	$x \in A$	$\Longrightarrow$	$3x + 1 \in A.$
A3.	$x \in A \ \wedge \ y \in A$	$\Longrightarrow$	$x + y \in A.$





ANEXO 7: TALLER 1 – “MATEMÁTICAS EN PRIMERA PERSONA”

Universidad
del Cauca

Universidad del Cauca
Licenciatura en Matemáticas
Aspectos Generales
Taller – Matemáticas en primera persona
Por: José Luis Herrera Bravo

Antes de iniciar con las actividades referentes a los métodos de demostración es pertinente intercambiar opiniones frente aspectos generales de la matemática. Compartiremos un espacio académico y de aprendizaje mutuo durante algunos días, por consiguiente, conocer sus intereses y perspectivas es de vital importancia para mí. En este sentido se proponen una serie de preguntas que ayudaran a conocernos y a relacionarnos como tema en común: las matemáticas.

1. ¿Qué les motivo a estudiar matemáticas?
2. ¿Qué les gusta de las matemáticas?
3. ¿Cuál fue el primer contacto que tuvieron con las matemáticas?
4. Desde una perspectiva académica y social:
   ¿Qué han encontrado al estudiar matemáticas?
5. ¿Por qué piensan que las matemáticas son útiles?
6. ¿Por qué las matemáticas son útiles para la sociedad?
7. ¿Qué hacen las matemáticas?

Ahora entraremos en el campo que nos preocupara la mayor parte del tiempo.

8. ¿Existen diferencias entre **explicar**, **probar** y **demostrar**?
9. ¿Cuál es la diferencia entre <u>escribir una demostración</u> y <u>pensar una demostración</u>?
10. ¿Cuáles son las funciones de la demostración?

ANEXO 8: GUIA1 – MÉTODOS DE DEMOSTRACIÓN (INTRODUCCIÓN).

Universidad del Cauca
del Cauca

Universidad del Cauca
Licenciatura en Matemáticas
Guía 1.
Métodos de Demostración (Introducción).
Por: José Luis Herrera Bravo

Los principios lógicos constituyen la base de la demostración matemática. En este sentido, la lógica permite que los razonamientos, dentro de la matemática, estén libres de incoherencias y subjetividades. En general, las entidades matemáticas son entidades abstractas a las que no tenemos acceso a través de los sentidos sino a través del procesos hipotéticos – deductivos que se fundamenta fuertemente en el método axiomático.

SISTEMA AXIOMATICO.

Un sistema axiomático está formado por tres elementos claves:

1. **OBJETOS MATEMÁTICOS**: Dados mediante definiciones o de manera nominal.
2. **AXIOMAS**: Propiedades de los objetos matemáticos que se toman como punto de partida.
3. **PROPOSICIONES**: Enunciado declarativo que, expresado dentro en un contexto particular, tiene sentido preguntarse si es falso o verdadero.

Dentro de los sistemas axiomáticos es importante tener en cuenta que los objetos matemáticos <u>se definen</u> y <u>se relacionan</u> manteniendo tres grandes principios:

- ✓ **PRINCIPIO DE IDENTIDAD** (<u>Permite</u> hacer sustituciones y equivalencias).
- ✓ **PRINCIPIO DE NO CONTRADICCIÓN** (<u>Prohíbe</u> que los contrarios se den simultáneamente).
- ✓ **TERCIO EXCLUIDO** (<u>Excluye</u> términos intermedios entre los contrarios).

A continuación se presentan algunas definiciones transcendentales dentro del mundo matemático.

<u>DEFINICIÓN 1</u> [AXIOMA].

Un axioma es una <u>proposición fundamental</u> de un sistema axiomático que se toma como verdadera sin demostración alguna.

EJEMPLOS:

- **AXIOMATICA DE ZERMELO – FRANKEL**
  1. **AXIOMA DE EXTENSIÓN:**
     Si todo elemento de un conjunto A pertenece al conjunto B y todo elemento del conjunto B pertenece al conjunto A entonces el conjunto A es igual a B.

2. **AXIOMA DE SEPARACIÓN**[18]**:**
   Si A es un conjunto, existe otro conjunto, contenido en A, que satisface una propiedad determinada.
3. **AXIOMA DEL CONJUNTO VACIO:**
   Existe un conjunto el cual no tiene elementos.
4. **AXIOMA DE PARES:**
   Dados dos conjuntos cualesquiera, existe un conjunto cuyos elementos son estos conjuntos.

DEFINICIÓN 2 [TEOREMA].

Un teorema matemático es un enunciado sobre los objetos matemáticos el cual debe ser demostrado (probado técnicamente).

NOTA (¡IMPORTANTE!): Todo teorema es de la forma:

$$Si\ \boxed{HIPOTESIS}\ entonces\ \boxed{TESIS}$$

$$\boxed{HIPOTESIS}\ \Rightarrow\ \boxed{TESIS}$$

EJEMPLOS:

1. **TEOREMA DE PITAGORAS**
   En cualquier triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.

DEFINICIÓN 3 [DEMOSTRACIÓN].

Una demostración es un proceso deductivo con punto de partida la hipótesis y al utilizar: las definiciones, los postulados y teoremas, demostrados previamente, se concluye la tesis.

OBSERVACIÓN (¡IMPORTANTE!)

Para demostrar el teorema [$H \Longrightarrow T$] se procede de la siguiente forma:

i. Se supone que la hipótesis H es un enunciado verdadero.

“Observemos la tabla de verdad de la implicación:

H	T	$H \Longrightarrow T$
V	V	V
V	F	F
F	V	V

[18] Indagar sobre la paradoja de Russell.

F	F	V

Si se quiere que $H \Longrightarrow T$ sea verdadero basta probar que el caso subrayado en la tabla no se cumple. Es decir, es suficiente demostrar que si H es verdadero entonces se puede concluir que T es verdadero y por tanto no se puede dar el caso en que $H \Longrightarrow T$ sea falso.
Si por el contrario a partir de H y de otras proposiciones verdaderas de la teoría se deduce $\sim T$, entonces $H \Longrightarrow T$ es una CONTINGENCIA y no una falacia" (Brenes, s.f.).

ii. A partir de H construimos un proceso argumentativo para obtener mediante la aplicación de las reglas de deducción la validez de T.

iii. Aquí concluye la prueba y se establece la veracidad del teorema $H \Longrightarrow T$.

ASPECTOS A TENER EN CUENTA

Es importante resaltar que en la presente guía se ha mostrado un esquema general de paradigma demostrativo que existe dentro de las matemáticas. Sin embargo, no existe una receta o un algoritmo universal para construir el proceso argumentativo de una demostración. En este sentido, las siguientes guías pretenden presentar unos métodos usuales (y de alguna manera canónicos) para hacer demostraciones.

Finalmente, no guarde esta guía en un anaquel es importante que compare el procedimiento que aquí se presentó con los que se presentaran más adelante.

ANEXO 9: GUIA 2 – MÉTODO DIRECTO

Universidad del Cauca
Licenciatura en Matemáticas
Guía 2.
Métodos de Demostración.
Método Directo [MD].
Por: José Luis Herrera Bravo

INTRODUCCIÓN

Tradicionalmente las matemáticas se han considerado como la ciencia exacta por excelencia. Los resultados matemáticos son aceptados de manera "dogmática" por la mayor parte de personas. Sin embargo, es hora de preguntarse ¿Por qué las matemáticas no mienten o por qué se confía en las matemáticas? Seguramente, afloran muchas respuestas. En este sentido, el objetivo de esta guía es dar a conocer una serie de técnicas, usuales, que la comunidad matemática utiliza para sustentar la veracidad de cualquier afirmación matemática como por ejemplo: $2 \times 2 = 0$, el teorema de pitagoras $a^2 + b^2 = c^2$ o que el área de un rectángulo es igual al producto de sus lados.

A continuación se presenta de manera sintética los aspectos más relevantes de los métodos de demostración. Es crucial que se practique bastante la demostración y no se olvide que: "Las matemáticas son la ciencia del ORDEN y la medida, de las bellas cadenas de razonamiento, todos sencillos y fáciles" (Rene Descartes, s.f.).

Antes de comenzar con el primer método de demostración recordemos la regla de inferencia[19] M.P.P. (Modus Ponendo Ponens).

M.P.P. (Modo que afirmando afirma)

Suponga que dentro de alguna teoría el teorema $A \Rightarrow B$ es válido y simultáneamente la proposición A se satisface. Por consiguiente, la regla de inferencia M.P.P. permite concluir la veracidad de B.

En la lógica de predicados se suele presentar esta regla de la siguiente forma:

$$\begin{array}{c} A \Rightarrow B, \\ A, \\ \hline B \end{array}$$

Figura 2.1

NOTA: Recuerde que el razonamiento anterior es válido si: $[(A \Longrightarrow B) \wedge A] \Rightarrow B \ (*)$ es una tautología[20]. Construya la tabla de verdad de $(*)$.

[19] Esquema diseñado para construir inferencias lógicas válidas.

EJEMPLO 1. Considere las siguientes proposiciones:

$A: Tengo\ dinero\ para\ pagar\ el\ boleto\ del\ bus.$

$B: Puedo\ viajar\ en\ el\ bus.$

$A \Rightarrow B$:
$Si\ \boxed{tengo\ dinero\ para\ pagar\ el\ boleto\ del\ bus}\ entonces\ \boxed{puedo\ viajar\ en\ el\ bus}.$

<u>Si tengo dinero para pagar el boleto del bus entonces puedo viajar en el bus</u>. Y además, <u>tengo para pagar el boleto del bus</u>, por el M.P.P, se concluye que <u>puedo viajar en el bus</u>.

MÉTODO DE DEMOSTRACIÓN DIRECTA

A quién madruga Dios le ayuda…
Quién madruga, duerme por la tarde…
Quién duerme por tarde, no duerme por la noche
Quién no duerme en la noche, sale de juerga
Conclusión: ¡Dios ayuda a los que salen de juerga!

El método de demostración se basa en una aplicación sucesiva y finita del M.P.P. Así pues, una demostración directa del teorema $H \Rightarrow T$ consiste en exhibir un razonamiento de la forma:

$$\begin{array}{l} P_1: H \\ P_2: H \Longrightarrow h_1 \\ P_3: h_1 \Longrightarrow h_2 \\ \quad\quad \vdots \\ P_n: h_{n-1} \Longrightarrow h_n \\ P_{n+1}: h_n \Longrightarrow T \\ \hline C: \quad\quad T \end{array}$$

Figura 2.2

OBSERVACIONES:

- ✓ El método de demostración directo se basa en una aplicación sucesiva del M.P.P. Esto se expone en el diagrama de la izquierda.

[20] Una formula proposicional es una tautología si es verdadera para todas los valores de verdad de las proposiciones que la componen.

$$
\begin{array}{c}
H \\
H \Longrightarrow h_1 \\
\hline
h_1 \\
h_1 \Longrightarrow h_2 \\
\hline
h_2 \\
\vdots \\
h_{n-1} \\
h_{n-1} \Longrightarrow h_n \\
\hline
h_n \\
h_n \Longrightarrow T \\
\hline
T
\end{array}
$$

Figura 2.3

✓ La mayoría de demostraciones matemáticas que utilizan el método directo NO siguen estrictamente el modelo de la izquierda. Por esta razón, los ejercicios siguientes muestran como usualmente se redactan las demostraciones por MD en un texto matemático. Es IMPORTANTE que por sus propios medios identifique el proceso análogo que se muestra en la figura de la izquierda para cada ejemplo.

En resumen, para demostrar un teorema por el método directo se parte de la hipótesis y empleando axiomas, definiciones y/o propiedades previamente demostradas se forma una cadena de inferencias lógicas, que de manera natural, posibilita concluir la tesis.

ANALISIS DEL MÉTODO DIRECTO

1. Método de demostración predilecto en la comunidad matemática.
2. Método constructivista porque el conocimiento se edifica mediante la demostración.
3. El método directo conduce de forma directa la hipótesis a la tesis.
4. La hipótesis siempre se asume como verdadera.
5. La proposición final siempre es la tesis.
6. El razonamiento es una Tautología. Es decir, su tabla de verdad siempre es verdadera independientemente de los valores que adopten las proposiciones.

EJEMPLO Nº1

Sea A un conjunto de números naturales ($A \subset \mathbb{N}$) que cumplen los siguientes axiomas:

AXIOMA1. $3 \in A$.
AXIOMA2. $x \in A \Longrightarrow 3x + 1 \in A$.
AXIOMA3. $x \in A \wedge y \in A \Longrightarrow x + y \in A$.

Pruebe los siguientes teoremas:

TEOREMA 1: Si $7 \in A$ entonces $25 \in A$.

Demostración:

Supongamos cierto que: $7 \in A$ [*Paso P_1, en la figura 2.2*]

POR DEMOSTRAR QUE: $25 \in A$

Como $7 \in A$ entonces [*Por AXIOMA2*] $3(7) + 1 = 22 \in A$. Además, por AXIOMA1, $3 \in A$.

Luego, $22 \in A$ y $3 \in A$. Al utilizar el AXIOMA3 con 22 y 3 se concluye que $25 \in A$ ■.

TEOREMA 2: Si $2 \in A$ entonces $27 \in A$.

DEMOSTRACION:

Supongamos que $2 \in A$.Por AXIOMA1 $3 \in A$ y ya se tiene que $2 \in A$. Luego, al utilizar el AXIOMA3 se obtiene que $5 \in A$.

Como $5 \in A$ y $2 \in A$ entonces $7 \in A$. (Aplicando nuevamente AXIOMA3)

Al aplicar AXIOMA2 a $7 \in A$ se deduce que $24 \in A$.

Ahora se sabe que $24 \in A$ y $3 \in A$. Finalmente, aplicando AXIOMA3 a 24 y 3 se concluye que $27 \in A$.

EJERCICIO: Diseñar otra demostración del TEOREMA 2 utilizando el TEOREMA 1.

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Sea A un conjunto de números reales que cumplen los siguientes axiomas:
   A1. $5 \in A$.
   A2. $x \in A \Rightarrow 3x + 2 \in A$.
   A3. $x \in A \ \wedge \ y \in A \Rightarrow x + y \in A$.

   Demuestre los siguientes teoremas:
   a. $3 \in A \Rightarrow 16 \in A$.
   b. $4 \in A \Rightarrow 23 \in A$.
   c. $3 \in A \Rightarrow 51 \in A$.
   d. $x \in A \ \wedge \ y \in A \Rightarrow 3x + 2y + 17 \in A$.
   e. $8 \in A \Rightarrow 51 \in A$.
   f. $x \in A \ \wedge \ y \in A \Rightarrow 7x + 3y + 16 \in A$

2. **DEFINICIÓN**.
   Sean a y b números enteros con $a \neq 0$.
   Decimos que a divide a b si existe un entero c talque $b = ac$. En tal caso escribimos: $a|b$.

   a. Si $k \in \mathbb{Z}$ entonces $1|k$.
   b. Si $k \in \mathbb{Z}$ y $k \neq 0$ entonces $k|k$.
   c. Si $a \in \mathbb{Z}$ y $a \neq 0$ entonces $a|0$, $a|a$ y $a|(-a)$.
   d. Si $a \in \mathbb{Z}$ entonces $(-1)|a$.
   e. Si $a|b$ y $c \in \mathbb{Z}$ entonces $a|bc$.
   f. Si $a|b$ y $b|c$ entonces $a|c$.
   g. Si $a|b$ y $a|c$ entonces para todo $x, y \in \mathbb{Z}$ se cumple que $a|bx + cy$.
   h. Si $a|b$ y $b|a$ entonces $a = \pm b$.
   i. Si $d|a + b$ y $d|a$ entonces $d|b$.
   j. Si $d|a$ entonces $d^2|b^2$.

3. Las propiedades algebraicas de los números reales son los siguientes: Suponga que a,b y c son números reales:

Nombre de la propiedad	Para la Suma	Para el producto
Uniforme	Si $a = b$ y $c = d$ entonces $a + c = b + d$	Si $a = b$ y $c = d$ entonces $ac = bd$
Conmutativa	$a + b = b + a$	$ab = ba$
Asociativa	$(a + b) + c = a + (b + c)$	$(ab)c = a(bc)$
Neutros operativos	$a + 0 = a$	$1a = a$
Inversos Operativos $(\boldsymbol{a \neq 0})$	$a + (-a) = 0$	$a\frac{1}{a} = 1$
Distributivita	$a(b + c) = ab + bc$	$ab + ac = a(b + c)$

A partir de las propiedades anteriores demostrar:

a. Si $a \in \mathbb{R}$, entonces $a0 = 0a = 0$.
b. Si $a \in \mathbb{R}$, entonces $a = -(-a)$.
c. Si $a, b \in \mathbb{R}$, entonces $(-a)b = a(-b) = -ab$.
d. Si $a \in \mathbb{R}$, entonces $(-1)a = -a$.
e. Si $a, b \in \mathbb{R}$, entonces $(-a)(-b) = ab$.
f. $(-1)(-1) = 1$.

ANEXO 10: GUIA MÉTODO DEL CONTRARECIPROCO.

Universidad del Cauca
Licenciatura en Matemáticas
Guía 2.
Métodos de Demostración.
Método del Contrarreciproco
Por: José Luis Herrera Bravo

MÉTODO DEL CONTRARRECIPROCO

¿Y no es el mismo método directo?
¿Y si no salgo de juerga, Dios no me ayuda?

Para demostrar un teorema de la forma $H \Rightarrow T$ por medio del método del contrarrecíproco se necesita únicamente probar $\sim T \Rightarrow \sim H$ a través del método directo.

Pero ¿Por qué al demostrar $\sim T \Rightarrow \sim H$ queda demostrado el teorema $H \Rightarrow T$?

El siguiente ejercicio responde la pregunta anterior.

EJERCICIO: Probar que $H \Rightarrow T$ y $\sim T \Rightarrow \sim H$ son lógicamente equivalentes. Es decir, $H \Rightarrow T$ y $\sim T \Rightarrow \sim H$ tienen la misma tabla de verdad; o $[H \Rightarrow T] \Leftrightarrow [\sim T \Rightarrow \sim H]$ es una tautología.

Ahora, el hecho que $H \Rightarrow T$ y $\sim T \Rightarrow \sim H$ sean equivalentes implica la validez del método del contra-recíproco.

EJEMPLO Nº2

Considere el conjunto de números enteros (usualmente notados como $\mathbb{Z}$). Recuerde que:

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$$

Universalmente se establecen las siguientes definiciones:

DEFINICIÓN [Entero Par]
Un entero a se denomina PAR cuando <u>existe</u> un entero, digamos k, talque $a = 2k$.

SUB - EJEMPLOS

1. 16 es un entero par <u>porque existe</u> el entero 8 talque $16 = 2(8)$.
2. -76 es un entero par porque existe el entero -38 talque $-76 = 2(-38)$.
3. Observe que $0 = 2t$ para todo $t \in \mathbb{Z}$. ¿Qué quiere decir esto?

DEFINICIÓN [Entero Impar]
Un entero a se denomina IMPAR cuando <u>existe</u> un entero, digamos k, talque $a = 2k + 1$.

SUB - EJEMPLOS

1. 15 es un entero impar porque existe el entero 7 talque $15 = 2(7) + 1$.
2. -21 es entero impar porque existe el entero -11 talque $-21 = 2(-11) + 1$
3. 1 es un entero impar porque existe el entero 0 talque $1 = 2(0) + 1$.

Con estas definiciones demostremos algunos resultados interesantes:

1. Sea $n \in \mathbb{Z}$. Probemos la veracidad de la siguiente afirmación:

   Si $3n + 2$ es un número impar entonces n es impar.

   SOLUCIÓN 1:
   Procedamos, en primero instancia, utilizando el método directo.
   Así, supongamos que $3n + 2$ es un número impar.
   Luego, existe un $q \in \mathbb{Z}$ talque:

   $$3n + 2 = 2q + 1.$$
   $$3n = 2q - 1$$
   $$n = \frac{2q - 1}{3}$$

   Hasta aquí todas las deducciones son válidas. Ahora la pregunta es: ¿cómo concluyo que n es impar? ¿De dónde se obtiene un k, para n, que satisfaga la definición de entero impar?

   Este inconveniente lleva a pensar en otra estrategia.

   SOLUCIÓN 2:
   Ahora se procederá mediante el método del contra-recíproco. Es decir, se demostrara por método directo el siguiente enunciado:

   Si n es un entero par entonces $3n + 2$ es un entero par.[21]

   Así, supongamos que n es un entero par.
   Luego, existe $r \in \mathbb{Z}$ talque $n = 2r$.
   De esta manera:

   $$3n + 2 = 3(2r) + 2$$
   $$3n + 2 = 2(3r + 1)$$

   Luego, existe el entero $k = 3r + 1$ talque $3n + 2 = 2k$. Por tanto, $3n + 2$ es un entero par.

[21] La negación de ser impar es ser par; y viceversa, la negación de ser par es ser impar.

Luego la afirmación "Si n es un entero par entonces $3n+2$ es un entero par" es verdadera. En consecuencia (Por el método del contra-recíproco) se concluye que la proposición "Si $3n+2$ es un número impar entonces n es impar" es también cierta.

2. Probar la siguiente proposición:

Si ab es par entonces a es par o b es par.

SOLUCIÓN:
Demostraremos la proposición mediante el método del contra-recíproco. Es decir, demostraremos por el método directo la afirmación:

"Si a es impar y b es impar entonces ab es impar".[22]

Por consiguiente, supongamos que a es impar y b es impar.
De la definición de impar:
- Existe $r \in \mathbb{Z}$ talque $a = 2r + 1$; y
- Existe $s \in \mathbb{Z}$ talque $b = 2s + 1$.

Luego $ab = (2r+1)(2s+1) = 4rs + 2r + 2s + 1 = 2(2rs + r + s) + 1$.
Por tanto, existe $k = 2rs + r + s \in \mathbb{Z}$ talque $ab = 2k + 1$. Esto implica que ab es impar; como se quería probar.

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Considere la siguiente definición:

DEFINICIÓN [PRODUCTO CARTESIANO] Dados dos conjuntos A y B, llamaremos producto cartesiano de A y B, notado $A \times B$, al conjunto de todas las parejas ordenadas (a, b) tales que $a \in A$ y $b \in B$. $A \times B \equiv \{(a,b) \mid a \in A \ \wedge \ b \in B\}$

Pruebe o refute las siguientes afirmaciones:

I. $X \subseteq A \ \wedge \ Y \subseteq B$ si y sólo si $X \times Y \subseteq A \times B$. (MD)
II. $A \times B = \emptyset$ si y sólo si $A = \emptyset \ \vee \ B = \emptyset$. (MC)

[22] Recuerde la ley de De Morgan $\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$.

III. $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$. (MD)

IV. $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$. (MD)

ANEXO 11: TALLER 2.

Universidad del Cauca
Licenciatura en Matemáticas
Taller 2
Por: José Luis Herrera Bravo

Universidad del Cauca

1. Considere las siguientes proposiciones:

   I. *Todo número natural mayor o igual que* 1 *puede ser escrito como un producto de números primos*.

   Aplique el teorema para tres números naturales diferentes (no triviales).

   NOTA: Como consecuencia de la proposición; dado $n \in \mathbb{N}$ con $n > 1$ se tiene que:

   $$n = {p_1}^{\alpha_1}{p_2}^{\alpha_2} \dots {p_k}^{\alpha_k}.$$

   Donde:

   - $\alpha_i > 0$ para todo $i = 1,2, \dots, k$.
   - Si $i \neq j$ entonces $p_i \neq p_j$.

   II. Probar que:
   Si un número natural a divide a los números b y c entonces a divide a $a - b$.

   III. El número *1 no posee divisores primos*, ¿Por qué?

2. **<u>PROPOSICIÓN</u>:** El conjunto de números primos es infinito.

   Supongamos que el conjunto de números primos es finito. Podemos considerar que la cantidad de números primos es finita y son $p_1, p_2, \dots, p_n$ para algún $n \in \mathbb{N}$.

   Consideremos el número $p = p_1 p_2 \dots p_n + 1$.

   Como todo número natural puede ser escrito como producto de primos entonces p_i divide a p para algún $i \in \{1,2, \dots, n\}$. [A. ¿Por qué?]

   Por consíguete, p_i divide a p y p_i también divide a $p_1 p_2 \dots p_n$ [B. ¿Por qué?]. Luego, p_i divide a $p - p_1 p_2 \dots p_n$ [C. ¿Por qué?]. Pero $p - p_1 p_2 \dots p_n = 1$. Por tanto, p divide a 1. Esto último es una contradicción porque 1 no posee divisores primos.

I. ¿Por qué es más conveniente probar la proposición por reducción al absurdo?
II. ¿Para qué y por qué se considera el número $p = p_1 p_2 \dots p_n + 1$?
III. Responder los "¿Por qué?" que se hacen en la prueba.
IV. Según la prueba: ¿qué contradicción se obtiene al suponer que el conjunto de los números primos es finito?
V. Resuma los pasos claves de la prueba.

3. Considere la siguiente proposición:

Para todo $x \in \mathbb{Z}$, tenemos que: x y x^2 tienen la misma paridad.

I. Describir los pasos generales para realizar la prueba.
II. Construir una prueba ordenada y clara.

ANEXO 12. TALLER SOBRE INDUCCIÓN MATEMÁTICA.

Universidad del Cauca
Licenciatura en Matemáticas
Guía - Taller 1.
Métodos de Demostración.
Principio de Inducción Matemática [PIM].
Por: José Luis Herrera Bravo

1. Analicemos, algunos valores de la siguiente expresión algebraica $n^2 - n + 41$ cuando $n \in \mathbb{N}$:

n	$n^2 - n + 41$
1	41
2	43
3	47
4	53
5	61
$\vdots$	$\vdots$

   A. ¿Qué puede decir con respecto a la primalidad de $n^2 - n + 41$ cuando $n \in \mathbb{N}$?
   B. ¿Qué puede decir con respecto a la paridad de $n^2 - n + 41$ cuando $n \in \mathbb{N}$?
   C. Evalué la expresión $n^2 - n + 41$ para valores mayores que 40. ¿Qué puede concluir de ello?
   D. Al parecer $n^2 - n + 41$ es impar para todo $n \in \mathbb{N}$. ¿Por qué sucede esto?
   Sugerencia: Analice la paridad de $n^2 - n$.

2. PROPIEDAD DEL BUEN ORDENAMIENTO DE LOS ENTEROS.
Todo conjunto de enteros NO VACIO acotado inferiormente[23] posee un elemento mínimo[24].

   A. Probar que el orden de los racionales no posee esta propiedad.
   Sugerencia: Observe que $W = \{r \in \mathbb{Q} \mid 1 < r\}$ es no vacio y acotado inferiormente pero no posee primer elemento; ¿por qué?

---

[23] Si un $A \subset \mathbb{R}$ posee una cota inferior se dice que A es ***acotado inferiormente***.
Además, c es una cota inferior de A si y sólo si: Para todo $x \in A$, $c \leq x$.
[24] Sea $A \subset \mathbb{R}$. Decimos que: m es un **extremo inferior** de A si y sólo si:
- m es una cota inferior de A; y
- m es la mayor de las cotas inferiores.

NOTA: m no necesariamente esta en$A$. En el caso que $m \in A$ se dice que m es el elemento mínimo de A.

B. Probar que el orden de los reales no posee la propiedad del "buen orden".
Sugerencia: Analice el conjunto $(1, +\infty)$.

3. Realice una demostración detallada del siguiente teorema:

TEOREMA [PRINCIPIO DE INCUCCIÓN MATEMÁTICA]
Sea una sucesión de proposiciones $\{P_1, P_2, \dots P_n, \dots\}$.
Si se cumple que:

I. [PASO BASE]:

$$P_1 \text{ es verdadera; y}$$

II. [PASO INDUCTIVO]:

Para todo $k \in \mathbb{N}$, si P_k es verdadera entonces P_k es verdadera.

Entonces:

La proposición P_n es verdadera para todo $n \in \mathbb{N}$.

SUGERENCIA: Suponga que existe un $m \in \mathbb{N}$ talque P_m es falsa. Luego, construya el conjunto $S = \{j \in \mathbb{N} \mid P_j\ es\ falsa\}$. Por el principio del buen orden S posee un elemento mínimo, llamémoslo p. Dado que P_1 es verdadera entonces $1 < p$. Además, se tiene que $p = \min(S)$ entonces P_p es falsa y P_{p-1} debe ser verdadera. Por II, como P_{p-1} es verdadera entonces P_p es verdadera. Esto permite concluir que no existe un $m \in \mathbb{N}$ talque P_m sea falsa.

4.

A. ¿Cuántos cerillos se necesitan para construir N cuadrados en línea, de forma que el lado de cada cuadrado sea común al cuadrado qué sigue?

B. ¿Cuántos cerillos se necesitarán para construir un cuadrado que contenga $N \times N$ cuadritos?

C. Utilice el PIM (Ejercicio 3) para probar la siguiente afirmación:

Para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene $(1 + 2 + \cdots + n)^2 = 1 + 2^3 + \cdots + n^3$.

ANEXO 13: ALGUNAS RESPUESTAS DEL TALLER “MATEMÁTICAS EN PRIMERA PERSONA”.

GRUPO	9	8	6	7	5
¿Cuáles son las funciones de la demostración?	"Verificar, cerciorarse, afirmar la veracidad".	"Llegar a probar algo, ser sustento para comprender algo, ser saber previo para usarlo como ayuda en otro tipo de situaciones"		"Es probar si algo es verdadero o falso a través de los métodos de demostración"	"Funciones e la demostración: Verificar, afirmar"
¿Existen diferencias entre explicar, probar y demostrar?		"En nuestro contexto no existen diferencias entre los tres, ya que para cada uno de ellos usamos conocimientos previos y el razonamiento personal para abordarlos".	"Explicar: hacer entender un tema a una persona. Probar: es realizar una acción sin tener certeza de ello. Demostrar: Realizar una serie de procesos para dejar claro la veracidad de lo que se está afirmando".	"Para nosotros no existe una diferencia entre estos términos por el contario van ligados el uno con el otro. Como ejemplo tenemos que para dar una conocer una demostración tenemos que saberla explicar paso a paso y al demostrar estamos probando la veracidad o falsedad de dicho planteamiento"	"Explicar: exponer un ejercicio de la temática vista y dalo a entender"
¿Cuál es la diferencia entre escribir una demostración y pensar una demostración?	"Escribir una demostración: pasara en limpio. Hacer una demostración es analizarla, escribirla, estudiarla muy bien y buscar el camino conveniente y entendible para su desarrollo".	"Escribir una demostración es simplemente copiarla, mientras que pensar una demostración es hacer uso de nuestros conocimientos y de la capacidad de entendimiento que poseemos para saber comprenderla, estudiarla y aprender de ella".		"Al escribir una demostración estamos asumiendo como verdadera. Y al pensarla estamos analizando paso a paso dicha demostración".	"Escribir una demostración: es transcribir algo que ya está demostrado. Pensar una demostración es tratar de hallar una solución o conjetura".

GRUPO	4	3	2	1	10
¿Cuáles son las funciones de la demostración?	"La función de la demostración es hacer creíble mediante argumentos válidos (certeros) que lo que se está diciendo o exponiendo es verdadero".	"Una de las funciones de la demostración es dar a conocer que un teorema ya planteado es verdadero".	"Demostrar el teorema. Cuando alguien este leyendo el teorema tenga la seguridad de que está bien".	"Las funciones de la demostración son: 1. Verificar la veracidad de un enunciado. 2. A partir de lo demostrado podemos demostrar otros".	"Funciones: 1. Decir si un enunciado es válido o no. 2. A partir de teoremas demostrados construir nuevos conocimientos. 3. Utilizar las diferentes propiedades, axiomas, conceptos vistos"
¿Existen diferencias entre explicar, probar y demostrar?	"Explicar es la acción donde se comparte el conocimiento. Aquí, entra en juego probar y demostrar que son lo que permite convencer al otro que lo dicho es verdadero mediante algunos argumentos"	"Explicar: Dar a entender cosas que no son claras. Probar: es dar la certeza de una proposición. Demostrar: Dar a conocer mediante argumentos lógicos la validez de una afirmación"	"Demostrar: es probar la veracidad de cierta proposición. Explicar: Procedimiento, desarrollo o pasos para llegar a una determinada conclusión. Probar: (Sin solucionar)**"**	"Si existen diferencias ya que Explicar se refiere a darle a entender a otra persona algo que ya entiendo, Probar se basa en que ya tenemos un solución concreta de algo y necesitamos saber si nuestra respuesta es correcta; y demostrar se refiere a comprobar si es verdadero para ciertas condiciones dadas de ciento grupo en general".	"Existen diferencias entre explicar y las otras dos. Explicar es: hacer entender un determinado tema a las personas que tengan inquietudes. Probar y demostrar son sinónimos".
¿Cuál es la diferencia entre escribir una demostración y pensar una demostración?	"La diferencia entre escribir y pensar una demostración radica en que primero se piensa en lo que se va a hacer y en los posibles caminos para encontrar la solución y después de esto, se empieza a escribir con lo pensado. Si el primer camino no dio solución, será el otro".	"La diferencia entre escribir y pensar una demostración es que cualquier persona puede escribir una demostración sin entender lo que está haciendo mientras que cuando uno piensa una demostración dedica todos sus conocimientos para hacerlo".	"Pensar es reunir ideas. Escribir la demostración es el desarrollo estructurado de las ideas en orden determinado".	"Escribir una demostración es tener unas bases claras y volverlo más práctico, pensar una demostración es comprender y analizar un enunciado".	

ANEXO 14: "MINICURSO DE MÉTODOS DE PROVA".

Minicurso de Métodos de Prova

Renata de Freitas
e
Petrucio Viana

IME-UFF

II Colóquio de Matemática da Região Sul
24 a 28 de abril de 2012
Universidade Estadual de Londrina
Londrina, PR

Sumário