UNIVERSIDAD DEL CAUCA

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES, EXACTAS Y DE LA EDUCACIÓN

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

EL INFINITO EN LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA: UNA EXPERIENCIA DE AULA

Estudiante del programa de Licenciatura en Matemáticas:

Francisco Javier España Gilón

Directora de trabajo:

Gabriela Inés Arbeláez Rojas

Profesora Departamento de Matemáticas

FEBRERO 2013

NOTA DE ACEPTACIÓN

El presente trabajo fue aprobado por:

Vo. Bo. Wilmer Molina Yépes
Coordinador Licenciatura en Matemáticas

Vo. Bo. Gabriela Arbeláez Rojas
Directora

Vo. Bo. Martha Lucía Bobadilla
Evaluadora

AGRADECIMIENTOS

A Dios, por haberme guiado a descubrir mi vocación y permitir vivir esta oportunidad al darme el don de la vida.

A mis padres, José Rafael y Rosa Estella, a mis hermanas Jennifer y Daniela, y a Cristian, mi hermano, por haber confiado en mí, por todas sus oraciones y constantes sacrificios para formar la persona que hoy soy.

A las profesoras Gabriela Arbeláez y Martha Bobadilla, por su valiosa formación en el ámbito académico, personal y profesional. Hoy es el día en el que uno siente que tanto esfuerzo vale la pena.

En especial, a mi amiga que está en el cielo Roció Paola Mosquera, le dedico este triunfo. Fue ella quien dejó la estrella en el éter que marcó mi derrotero en esta profesión.

A todas aquellas personas que confiaron en mí, me animaron y dedicaron su tiempo en escucharme y estar dispuestos a colaborarme en todo lo que estuviera a su alcance: amigos y amigas. Gracias totales y que Dios les bendiga.

CONTENIDO

INTRODUCCIÓN

La idea del infinito está presente en nuestra cotidianidad. Hace parte de nuestro raciocinio para explicar muchas veces lo inconmensurable, a saber: la esencia de Dios, la vida eterna, la extensión del universo, el tiempo, el ciclo del día y la noche, entre otras. Al parecer en el ser humano es innata la concepción del infinito asociándolo a lo inacabado, a lo que no tiene límites. Esta idea primigenia es la que se denomina *el infinito potencial.* No obstante, en el ámbito de las matemáticas se puede concebir otra noción del infinito: *el infinito actual.* Esta idea significa explicar el infinito como algo acabado y terminado, y de esta forma sustenta el hecho de pensar que existen varios infinitos, en otras palabras, un infinito más grande que otro.

Este trabajo propugna por la importancia de la historia y epistemología en la enseñanza de las matemáticas. Pero ésta no entendida como algo anecdótico, sino como un estudio de los conceptos para lograr rescatar elementos que apoyen el proceso educativo. Para ello se escogió el tema del *infinito matemático*. Por esta razón, en la primera parte del trabajo se hace un esbozo del desarrollo histórico y epistemológico que sufrió el concepto. A partir de ahí, se propone extraer puntos esenciales en la evolución del concepto, para buscar situaciones similares en el aula, donde siempre se buscó confrontar la idea primigenia del infinito que poseen los estudiantes, que hipotéticamente se pensará que es la noción de infinito potencial.

En la parte central del trabajo se hace una presentación de lo sucedido en cada una de la sesiones de clase. Se hace un recuento de la experiencia de la práctica docente, y se rescatan elementos sustanciales del trabajo en los talleres.

Al final, se muestra las conclusiones extraídas de las respuestas de los alumnos. No sólo de lo que se presentó en escrito, sino de lo que iban expresando oralmente en las discusiones generadas.

Los griegos, tan amantes de lo mesurado y lo perfecto, trataron de descartarlo, pues les parecía irracional, impensable e imperfecto (…) La matemática moderna exhibe una considerable variedad de infinitos, como si se hubieran reproducido en el éxodo, como los judíos.

Ernesto Sábato – Uno y el universo

1. AB AETERNO AD INFINITUM[1]

1.1. SINOPSIS HISTORICA DEL INFINITO MATEMÁTICO

La idea del infinito irrumpe en la ciencia como un concepto *´´perturbador y conflictivo´´* (Marín, 2008) . Históricamente numerosos pensadores y científicos han accedido a sus dominios buscando con ahínco comprender esta noción indómita al pensamiento humano. Entre los personajes más relevantes podemos citar sólo algunos: Aristóteles (384 a. C. – 322 a. C.), Tomás de Aquino (1224 – 1274), Giordano Bruno (1548 – 1600), Galileo Galilei (1564 – 1642), Bernard Bolzano (1781 – 1848), y George Cantor (1845 – 1918). También se ha intentado dar explicación al infinito desde varias perspectivas, como por ejemplo desde el campo de la teología[2], cosmología, filosofía, astronomía, literatura[3], y las matemáticas, entre otras. En el caso de las matemáticas, gracias a la *Teoría de Conjuntos*, el concepto evoluciona hasta lograr una formalización, no obstante, este desarrollo no se le debe sólo a esta rama de las matemáticas, sino que es un despliegue de todo el conocimiento matemático. Actualmente, en los estudios superiores de matemáticas, el infinito cuenta con una caracterización, que permite manipularlo con relativa facilidad.

---

[1] Desde la eternidad hasta el infinito
[2] Tomás de Aquino, en su obra trabaja la concepción del infinito.
[3] Jorge Luis Borges, impregna en algunos de sus ensayos la idea del infinito.

En la cultura occidental, ubicándonos en la antigüedad, el infinito emerge en el pensamiento griego. Aunque es pertinente aclarar que en las civilizaciones anteriores a los helenos, podría pensarse que había una concepción incipiente de la idea del infinito; donde se le asociaba —entre otras percepciones— a la eternidad de los dioses, la inmensidad del cielo, el ciclo del día y la noche. Así que, la noción de infinito estaba ahí, inherente a la cotidianidad del ser humano. Pero, es en la época de los griegos donde la noción de infinito se manifiesta como una idea conflictiva al pensamiento del individuo, y comienza su evolución en una etapa primigenia que va ir hasta el siglo XIX con las investigaciones de George Cantor.

Etimológicamente la palabra *infinito* tiene su raíz en la lengua griega con la expresión *ἄπειρον* (ápeiron), de donde *ἄ* significa ´´sin´´ y *πειρον*, fin o limite; es decir, que la acepción literal al término *ἄπειρον* (ápeiron) es: sin límite (Zellini, 2004) . Para los helenos, y específicamente para Aristóteles, el infinito existe en ciertas circunstancias. Él lo declara de la siguiente manera en el texto *Física – libro III*:

> *La creencia de que existe algo infinito podría ocurrírsele a quien lo considere sobre todo a partir de cinco hechos: (1) del tiempo, pues éste es infinito; (2) de la división dentro de las magnitudes, pues también los Matemáticos utilizan la noción de lo infinito; (3) por el hecho de que la generación y la destrucción no cesarían sólo en el supuesto de que fuera infinito aquello de donde es extraído lo que se genera; (4) también por el hecho de que lo finito siempre limita con algo, de manera que no puede haber necesariamente ningún límite si es necesario que una cosa limite con otra; (5) pero sobre todo, y con mayor razón, aquello que mayor perplejidad produce en todos: por el hecho de no cesar en el pensamiento parecen ser infinitos tanto el número de las magnitudes matemáticas como lo de más allá del cielo.* (Aristóteles, 1996, pág. 74)

Y más adelante, en el mismo libro, Aristóteles es turbado por la idea de lo infinito. Él expresa que esta noción presenta problemas, y se cuestiona en qué forma existe o no existe lo infinito. Para soslayar estos problemas, el filósofo hace precisión del concepto y enuncia lo siguiente:

> *Con que es menester, antes que nada, definir en cuántos sentidos se dice ''lo infinito''. Pues bien, en un sentido (a) es aquello que no se puede recorrer hasta el final por no estar en su naturaleza el atravesarlo; (b) en otro sentido es aquello que tiene el recorrido interminable, (c) o lo que le tiene difícil, (d) o aquello que, estando en su naturaleza tener un recorrido o un límite, no lo tiene. Además, lo infinito es, en suma, o en virtud de adición o en virtud de división o de ambas maneras.* (Aristóteles, 1996, págs. 74-75)

En cuanto a la noción de infinito en acto y en potencia, Aristóteles toma una posición, donde deja notar la aceptación sólo del infinito en potencia, y rechaza el infinito en acto. Es importante decir que este planteamiento del filósofo influenció decisivamente en el pensamiento occidental, hasta tal punto que sólo hubo aprobación del infinito en acto en el siglo XIX con los trabajos de George Cantor. Al respecto, Aristóteles deja clara su visión en el siguiente argumento:

> *En cuanto a lo infinito por adición viene a ser, de alguna manera, lo mismo que lo infinito por división: en aquello que es finito se produce un proceso de adición inversamente correspondiente; pues en la medida en que se va dividiendo hasta el infinito, en esa misma medida se verá añadido hasta una cantidad finita. Pues si en una magnitud finita se toma una determinada cantidad y se sigue tomando en la misma proporción, siempre que no se tome la misma fracción del todo, no se recorrerá hasta el final la magnitud finita; mientras que si se incrementa la proporción de tal manera que siempre se tome la misma fracción, se recorrerá hasta el final por el hecho de que toda cantidad finita es agotada por una cantidad determinada cualquiera. Sólo así, y no de otra manera, pues, existe lo infinito: en potencia y por disminución. Y es en ''potencia'' lo mismo que la materia, no ''por sí mismo'' como lo finito. También de esta forma, desde luego, ''es en potencia'' lo infinito por adición: decimos que ello es, en cierto sentido la misma cosa que lo infinito por división. Pues siempre será posible tomar algo más allá, aunque no excederá cualquier cantidad limitada, así como en el sentido de la división supera cualquier magnitud limitada y siempre habrá alguna más pequeña. De manera que superar cualquier magnitud por adición no es posible ni siquiera en potencia, a menos que exista por concurrencia algo infinito en actualidad: así dicen los Filósofos de la Naturaleza que es infinito el cuerpo exterior al mundo cuya entidad es el aire o cualquier otra cosa semejante. (Aristóteles, 1996, págs. 82-83)*

Estas reflexiones filosóficas de Aristóteles, en torno al infinito en potencia o en acto, marcaron decisivamente el pensamiento filosófico y matemático durante muchos siglos. No obstante, la matemática siguió desplegando sus conocimientos, a pesar de que la comprensión de la noción del infinito se soslayaba.

En el siglo XVI, sin embargo, aparece el filósofo italiano Giordano Bruno (1548 – 1600) haciendo oposición a la filosofía aristotélica. En cuanto a la noción de infinito, Bruno escribe un libro titulado: *Sobre el infinito universo y los mundos*. En este texto él arguye la existencia de un universo infinito y de mundos infinitos. Para demostrar esta idea, Bruno concibe aceptar la existencia del infinito en acto, contraponiéndose así, a la argumentación aristotélica. En su análisis, Bruno señala que el infinito no puede ser comprendido por la percepción de los sentidos, él lo expresas literalmente, así:

> *Ningún sentido ve el infinito; a ningún sentido se le puede exigir esa conclusión, porque el infinito no puede ser objeto del sentido. Por eso quien pide conocerlo por medio del sentido se parece a quien pretendiera ver las sustancias y la esencia con los ojos y quien negara la cosa porque no es sensible o visible vendría a negar la propia sustancia y el propio ser… (Bruno, 1981)*

Con esta cita, el filósofo argumenta que la experiencia sensible no es depositaria de la verdad, y que el estudio del infinito cimentado en las deducciones de los sentidos no tiene ningún asidero. Después de muchos razonamientos, el filósofo italiano, concluye que el universo es infinito y que los mundos son innumerables. Para sustentar esta tesis, es necesario significar la existencia del infinito como una totalidad, es decir admitir un infinito en acto.

Como se puede notar, la idea de que existen distintos infinitos emerge en la obra de Giordano Bruno, y a pesar de que en esta etapa no se tiene una matematización del concepto, se ha abierto una brecha que permitirá analizar otra perspectiva diferente a la aristotélica. De modo que, Bruno señala un derrotero para la compresión del infinito, y a partir de allí vendrían otros pensadores que seguirían su legado. En particular, el trabajo filosófico de Bruno marcará la obra de Cantor, quien le dará al infinito una caracterización matemática.

De lo expuesto hasta aquí se subraya que la noción de infinito potencial predominó durante un largo periodo, desde Aristóteles en el siglo IV a.C, hasta Giordano Bruno en el siglo XVI. El filósofo italiano Bruno, se opone a la concepción aristotélica haciendo una argumentación desde el campo de la lógica y la teología para admitir la existencia del infinito en acto. Empero, en el campo de las matemáticas, aún no existe una formalización del concepto, es más, lo que hay es una oposición a aceptar la existencia del infinito actual. Un rechazo heredado de casi veinte siglos siguiendo la filosofía aristotélica, que no sólo influenció el área de las matemáticas, sino que se impregnó en todas las áreas del conocimiento.

Después de Giordano Bruno, en el campo de las matemáticas, vendrían tres pensadores destacados que protagonizaron la última etapa de formalización del concepto del infinito, ellos son: Bernard Bolzano (1781–1848), Richard Dedekind (1831–1916), y George Cantor (1845–1918). Es pertinente aclarar, que antes de estos tres matemáticos, hubo un periodo —desde el siglo XVII hasta el siglo XIX— de desarrollo histórico y epistemológico del concepto, el cual se expondrá brevemente a continuación.

El científico Galileo Galilei (1564–1642), contemporáneo con Bruno, en el año 1638 publica el libro, *Discurso y demostración matemática, en torno a dos nuevas ciencias*. En este texto, además de establecer los fundamentos de la mecánica como ciencia y de marcar el fin de la física aristotélica, Galileo hace notar un hecho que para ese tiempo era paradójico. Él lo expresa en el libro con los diálogos entre Salviati y Simplicius de la siguiente manera:

> *Simplicio: Aquí surge inmediatamente una duda que me parece insoluble; y es que, estando nosotros seguros de que pueden darse líneas, una de las cuales es mayor que la otra, teniendo ambas infinitos puntos, hay que confesar que existe, en magnitudes de la misma especie, una cosa más grande que el infinito, puesto que la infinitud de los puntos de la línea mayor excederá a la infinitud de los puntos de la menor. Ahora bien, que se dé un infinito más grande que el infinito, me parece algo totalmente absurdo.*
>
> *Salviati: Este tipo de dificultades proviene de los razonamientos que nosotros hacemos con nuestro entendimiento finito al tratar con los infinitos, otorgándoles los mismos atributos que damos a las cosas finitas y limitadas, lo cual pienso que es improcedente puesto que creo que las propiedades de mayor, menor o igual no convienen a los infinitos. Como prueba de ello, me viene a la memoria un argumento que propondré para ser más claro... Supongo que sabéis perfectamente cuáles son los números cuadrados y los no cuadrados.*
>
> *Simplicio: Se perfectamente que un número cuadrado es el que resulta de la multiplicación de otro número por sí mismo...*
>
> *Salviati: Muy bien... Si yo digo que todos los números, incluyendo cuadrados y no cuadrados, son más que los cuadrados, enunciaré una proposición verdadera, ¿no es así?*
>
> *Simplicio: Evidentemente*
>
> *Salviati: Si continúo preguntando cuántos son los números cuadrados, se puede responder con certeza que son tantos cuantas raíces tengan, teniendo presente que todo cuadrado tiene su raíz y toda raíz su cuadrado; no hay por otro lado, cuadrado que tenga más de una raíz ni raíz con más de un cuadrado.*
>
> *Simplicio: Así es*

> *Salviati: Pero si pregunto cuántas raíces hay, no se puede negar que haya tantas como números, ya que no hay ningún número que no sea raíz de algún cuadrado. Estando así las cosas, habrá que decir que hay tantos números cuadrados como números, ya que son tantos como sus raíces, y raíces son todos los números. Decíamos al principio, sin embargo, que todos los números son muchos más que todos los cuadrados, puesto que la mayoría de ellos no son cuadrados. Incluso el número de cuadrados va disminuyendo siempre a medida que nos acercamos a números más grandes...*
>
> *Simplicio: En este caso, ¿qué es lo que se deduce?*
>
> Salviati*: No veo que se pueda admitir otra conclusión, si no es la de decir que la cantidad de números en general es una cantidad infinita: los cuadrados son infinitos y además ni la cantidad de cuadrados es menor que la de los números en general, ni ésta es mayor que aquélla: en conclusión los atributos igual, mayor y menor no tienen sentido cuando se habla de infinitos, sino cuando se trata de cantidades finitas.* (Martínez, 2009)

De la cita anterior, se puede afirmar que para Galileo *el infinito no es susceptible de comparación y, por lo tanto, de aritmetización*; de lo contrario nos enfrentaríamos con algo paradójico. En otras palabras, afirmar que a pesar de que el conjunto de los números cuadrados es un subconjunto de los números enteros positivos, sea posible emparejar cada uno de sus elementos en una correspondencia biunívoca, es contradictorio a las ideas de Euclides y de Aristóteles. En Euclides, se contrasta con el axioma que enuncia que *el todo es mayor que la parte*; y en Aristóteles, confronta la noción de infinito —es decir, la idea de infinito potencial— que se tenía hasta esa época. De esta manera, en el contexto del infinito, Galileo pone en tela de juicio comparar ``conjuntos infinitos[4]`` con expresiones como por ejemplo: más grande, más pequeño, o igual. De modo que aún en el siglo XVI, con los trabajos de Galileo existía una

[4] Se anota que en la época de Galileo, siglo XVI y XVII, no se puede hablar de conjuntos infinitos, porque aún no se constituido la Teoría de Conjuntos. Esta teoría emerge en el siglo XIX con los trabajos de George Cantor.

renuencia para admitir el concepto de infinito actual[5].

Para comprender mejor estas ideas de Galileo, expresémoslo de la siguiente forma: el conjunto de los cuadrados perfectos es un subconjunto del conjunto del conjunto de los números enteros positivos. Es decir, sea $C = \{1^2,\ 2^2,\ 3^2,\ 4^2, \dots\}$ y $\mathbb{Z}^+ = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$, el conjunto C es subconjunto propio de $\mathbb{Z}^+$, significa que $C \subset \mathbb{Z}^+$. Sin embargo, el conjunto C se puede colocar en correspondencia biunívoca con los elementos del conjunto $\mathbb{Z}^+$. Notemos que se puede hacer la siguiente asignación:

$$
\begin{array}{c}
1 \to 1^2 \\
2 \to 2^2 \\
3 \to 3^2 \\
4 \to 4^2 \\
\vdots
\end{array}
$$

De esta manera, se indica que C y $\mathbb{Z}^+$ tienen igual cantidad de elementos. Es más, haciendo uso de la notación actual, se afirma que,[6] $|C| = |\mathbb{Z}^+| = \aleph_0$. Pero, a la luz de las concepciones de los siglos XVI y XVII entorno al infinito, afirmar que $|C| = |\mathbb{Z}^+|$, era absurdo.

Específicamente, en el siglo XVII, las matemáticas tenían un desarrollo innovador, a saber, la integración de la aritmética y la geometría. Esta idea

---

[5] Es más, a Giordano Bruno y a Galileo Galilei se les acusó de herejía por haber hecho este tipo —y otras— afirmaciones que iban en contra de la filosofía aristotélica que imperaba en esa época. En el caso de Bruno la sentencia fue la muerte en la hoguera, y Galileo fue exhortado a retractarse de sus ideas.

[6] $\aleph_0$ —*aleph cero*— es el primer número transfinito acuñado por Cantor, significa el cardinal de los números naturales, es decir $|\mathbb{N}| = \aleph_0$, y es el menor cardinal transfinito.

revolucionaria es conferida a René Descartes (1596–1650). En esta nueva rama de las matemáticas —*la geometría analítica*— se halla implícita la idea de que existe un continuo en la recta euclidiana. Martínez lo expresa de la siguiente forma:

> *En los fundamentos de la geometría analítica se halla implícita la hipótesis de que existe un número asociado con cada punto en el continuo del espacio geométrico. Pero, como demostraron los pitagóricos, no existen tales números asociados para ciertas magnitudes geométricas. Cualquier intento de expresar las coordenadas de ciertos puntos en forma numérica, tales como un desarrollo decimal, dan lugar a sucesiones infinitas. Aun así, la geometría analítica continuó desarrollándose con éxito. Descartes introdujo una distinción entre infinito, atributo propio de Dios, e indefinido utilizado para indicar magnitudes indefinidas en cantidad o en posibilidad.* (Martínez, 2009)

Con los trabajos de René Descartes (1596–1650) y Pierre de Fermat (1601–1665), todo estaba dispuesto para el surgimiento del Cálculo Infinitesimal. Contemporáneo a Descartes y Fermat, Bonaventura Cavalieri (1598–1647) hace aportes sustanciales al cálculo infinitesimal. Entre sus ideas, hay una en particular en lo que respecta al infinito, según Martínez,

> *Cavalieri fue el primero en adoptar respecto del infinito una posición que pudiéramos considerar moderna, a saber: que las magnitudes infinitas y las magnitudes finitas están gobernadas por leyes diferentes.* (Martínez, 2009)

Como se puede notar, con Cavalieri, se avizora una acercamiento a la comprensión del infinito matemático, sin embargo, aún existe una resistencia, a causa de lo *perturbador y conflictivo* de este concepto. Posteriormente, John Wallis (1616–1703) retoma los trabajos de Cavalieri, en cuanto al desarrollo de los procedimientos infinitesimales, y también, hace uso de los métodos analíticos de Fermat y Descartes de las series infinitas.

En el tratado *De sectionibus conicus* en 1655, John Wallis introduce el símbolo

∞ para denotar el infinito. Este símbolo ∞ es denominado *lemniscata*. El término *lemniscata* proviene del latín *lemniscus* que significa cinta. Wallis lo explicita en su tratado así:

> *Prop I. De figuris planis juxta Indivifibilius methodum confiderandis.*
> *Suppono in limine (juxtâ Bonaventurae Cavallerii Geometriam Indivifibilium) Planum quodlibet quasi ex infinitis Parallelogrammis aeque altis; quorum quidem singulorum altitude sit totius altitudinis* $\frac{1}{\infty}$ *, sive aliquota pars infinite parva; (esto enim* ∞ *nota numeri infiniti;) adeóq; omnium simul altitude aequalis altitudini figure. (Wallis, 1655, p. 4)*

El origen de la insignia del infinito también se le atribuye a símbolos alquímicos o religiosos, como por ejemplo ciertas representaciones de la serpiente *uróboros*, la cual es la representación de una serpiente engullendo su propia cola, conformando con su cuerpo una forma circular. *Uróboros* simboliza el esfuerzo eterno, el ciclo que vuelve a empezar a pesar de las acciones para impedirlo.

Sucesivo a estos matemáticos, vendrían Leibniz (1646–1716) y Newton (1642–1727), y con ellos el surgimiento del cálculo infinitesimal. Conviene subrayar, que en la obra de estos matemáticos, sólo se concibe el infinito de forma potencial —magnitudes tan grandes o pequeñas como se quiera—. Además, se hace uso de técnicas potentes para resolver problemas matemáticos respecto a los procesos infinitos, a pesar que no existía un rigor de estos procedimientos. José Luis Martínez, nos brinda una buena explicación de la incursión del infinito matemático en el contexto del cálculo:

> *La idea de Leibniz más conocida es que el universo está compuesto de un infinito de indivisibles e inmateriales mónadas, siendo Dios la mayor de ellas. Leibniz creía en un infinito actual pero no en el sentido de Cantor. Estos extraños infinitesimales eran más pequeños que cualquier número positivo pero distintos de cero. A pesar de su notable éxito práctico, en el corazón del Calculus había paradojas y contradicciones que implicaban el cálculo de sumas*

> *infinitas de infinitesimales que misteriosamente daban números finitos, así como manipulaciones incoherentes y misteriosas de cantidades infinitesimales. Pero, puesto que el Calculus funcionaba, era evidente que algo de verdad debía tener; de alguna manera, Newton y Leibniz habían descubierto una sutil "lógica de la infinitud" que les permitía realizar maravillas matemáticas sin ser capaces realmente de proporcionar unos fundamentos rigurosos o racionales a sus métodos. Las técnicas de Newton y Leibniz implicaban inconsistencias pues, siguiendo los pasos de Cusa, garantizaban la existencia actual a lo infinitamente grande y lo infinitamente pequeño, admitiendo que una sucesión infinita puede acabar en un límite actual.* (Martínez, 2009)

Después de Leibniz y Newton, vendrían otros matemáticos que convendrían dotar de un rigor al análisis matemático, entre ellos podemos mencionar a Cauchy (1789–1857) y Weierstrass (1815–1857). No obstante, aún se soslayaba el concepto del infinito matemático. También, otros matemáticos renombrados expondrían sus consideraciones en torno este tema, entre ellos podemos citar una locución de Gauss (1777–1855), donde se muestra la renuencia a aceptar el infinito en acto. El siguiente es un pasaje de una carta de Gauss dirigida a Schumacher en 1831:

> *Pero en lo que respeta a su demostración protesto ante todo contra el uso de una magnitud infinita como si fuera completa, cosa que nunca está permitida en la matemática. El infinito es sólo una façon de parler*[7]*, cuando propiamente se habla de límites que se acercan tanto como se quiera a determinadas relaciones, mientras que a otros se les permite crecer sin limitación. (Citado por Martínez 2009)*

De manera que, el ambiente generado por el infinito matemático en los siglos XVI, XVII y XVIII es problemático. Ya existe un derrotero en contravía con la filosofía aristotélica, iniciado por Giordano Bruno. Sin embargo, ilustres matemáticos y pensadores de la talla de Cauchy, Gauss, Weierstrass, Galileo, entre otros, se resistían a contraponerse a las ideas de los griegos, y admitir el infinito en acto. La geometría

[7] *façon de parler:* Significa una *forma de hablar*, es decir, que no debe tomarse literalmente, sino en el sentido de la comodidad de expresión.

analítica y el cálculo infinitesimal avanzaban, no obstante, había incertidumbres de sus fundamentos, y uno de los cimientos —sino es el más importante— que no se encontraba firme, era el concepto de infinito matemático.

A mediados del siglo XIX, después de aproximadamente dos siglos y medio de la publicación de Giordano Bruno, se divulga el libro *Las paradojas del infinito* (1851) de Bernard Bolzano (1781–1848). En este compendio por primera vez se analiza el concepto del infinito desde una perspectiva distinta. Ya no tanto desde el campo de la filosofía, como en Bruno, sino con una mirada inverosímil desde el área de las matemáticas. Al respecto, Guillermina Waldegg en su artículo *Identificación de obstáculos didácticos en el estudio del infinito actual*, lo expresa de la siguiente manera:

> *Por primera vez, el infinito actual es admitido en la matemática a título de concepto bien definido, asociado a los únicos objetos susceptibles de ser numerados o medidos: los conjuntos y las magnitudes.* (Waldegg, 1996)

Bolzano, en *Las Paradojas del Infinito,* postula dos principios que serán los cimientos para edificar de ahora en adelante el concepto del infinito matemático. Según Waldegg, estos principios son los siguientes:

> *a) El infinito es atributo de conjuntos. Bolzano descarta la idea de que los conjuntos infinitos son indeterminables. Su determinabilidad descansa en dos ideas que jugarán más tarde un papel crucial en la axiomatización de la teoría de conjuntos: la extensión y la comprensión.*
> *b) El infinito admite distintos grados, los conjuntos infinitos no tienen, como muchas veces se había argumentado, todos, el mismo tamaño. (Waldegg, 1996)*

De este modo, Bolzano ha cimentado las ideas con las que el concepto del infinito matemático pasará de una etapa pre-formal a una fase de matematización. Ahora el terreno está allanado para que la noción del infinito obtenga una formalización. En este periodo los protagonistas serán dos matemáticos contemporáneos, George Cantor (1845–1918) y Richard Dedekind (1831–1916).

Cantor se apoya en los trabajos de Bolzano para sus investigaciones sobre el infinito matemático. Y en el año de 1873 Cantor logra demostrar, en una carta dirigida a Dedekind, que el conjunto de los números reales es no numerable, en otras palabras, que el conjunto $\mathbb{R}$ no se puede poner en correspondencia biunívoca con el conjunto $\mathbb{N}$. La primera prueba que Cantor presentó a Dedekind a finales del 1873 es dispendiosa, por eso el argumento que se mostrará a continuación será la demostración de la diagonal, o también conocido, método de diagonalización, el cual fue publicado poco después, por el mismo Cantor, en el año de 1890.

> *Supongamos que los números reales en el intervalo (0,1) tienen la potencia*[8] *de los números naturales. Eso significa que existe una función biyectiva entre los naturales y los reales, y por lo tanto, la totalidad de los reales del intervalo en cuestión se puede listar en una sucesión de la forma:*
>
> $$r_1, r_2, r_3, \dots, r_n, \dots$$
>
> *Dado que cada uno de estos números están ubicados en el intervalo (0,1) quiere decir que su expansión decimal consta de la parte entera igual a cero, por lo cual se los puede representar de la siguiente manera:*
>
> $$\begin{gathered} r_1 = 0.a_{11}a_{12}a_{13}\dots a_{1n}\dots \\ r_2 = 0.a_{21}a_{22}a_{23}\dots a_{2n}\dots \\ r_3 = 0.a_{31}a_{32}a_{33}\dots a_{3n}\dots \\ \vdots \\ r_n = 0.a_{n1}a_{n2}a_{n3}\dots a_{nn}\dots \\ \vdots \end{gathered}$$
>
> *Se supone que en la lista se encuentran la totalidad de los reales del intervalo (0,1). Sin embargo, formemos el número real,*
>
> $$b = 0.b_1b_2b_3\dots b_n\dots$$

[8] La acepción de *potencia*, es similar a la de *cardinalidad de un conjunto.*

> *Tal que, $b_i \neq a_{ii}$ para todo i . Se tiene que, por definición, $b_i \neq r_i$ para todo i . Lo cual contradice el hecho de que en la lista se encontraban ´´todos`` los reales del intervalo (0,1)[9]. (Citado por Marín, 2008 p. 44)*

Como resultado de la anterior demostración, —emerge un descubrimiento inverosímil en las matemáticas— Cantor logra establecer que existen infinitos distintos, a saber, que el conjunto de los números reales es más grande que el conjunto de los números naturales. En términos matemáticos, quiere decir que $|\mathbb{R}| > |N|$, es más, Cantor prueba que el cardinal del continuo es:$|\mathbb{R}| = 2^{\aleph_0}$. Se debe mencionar además que Cantor instaura las bases para el surgimiento de la *Teoría de Conjunto*, y a partir de ahí, la aritmetización del infinito matemático.

Ahora bien, de lo llevado hasta aquí se hecho un recuento en breve del desarrollo de la noción del infinito matemático. Hemos iniciando con los griegos en el siglo IV a. C; pasando por el filosofo Giordano Bruno, en el siglo XVI; posteriormente un recuento lacónico entre los siglos XVI, XVII y XVIII; y finalmente, con Dedekind y Cantor se llega a una formalización del infinito matemático en el siglo XIX. Se observa una evolución del concepto de aproximadamente veintitrés siglos. Un desarrollo histórico y epistemológico, que a pesar de lo problemático del concepto, y de la resistencia de muchos pensadores y matemáticos, emerge imponente para señalar el rumbo de las matemáticas del siglo XX.

---

[9] Para una mejor comprensión, veamos el siguiente ejemplo:
La siguiente sucesión de números reales está en el intervalo (0,1):

1.2. LA PROBLEMÁTICA DEL CONCEPTO DEL INFINITO EN LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA

En correspondencia con los contenidos de las diferentes líneas de estudio de las matemáticas, se exhibe una necesidad de trabajar el concepto del infinito. Además, es claro que este concepto subyace en muchos de los contenidos del programa académico desde los primeros años de escuela hasta los estudios superiores. Se puede afirmar que la noción de infinito es transversal en muchos de los conceptos matemáticos, y que a pesar de esta transcendencia no está incluido como un temario del currículo. Es más, no se hace una presentación y caracterización del concepto, y se asume la idea de infinito como si hiciera parte del sentido común de los estudiantes. De modo que, no es de sorprenderse que los jóvenes muestren dificultades en el estudio de conceptos que involucran colecciones infinitas, o procesos infinitos.

Muchos estudios han expuesto que en los primeros semestres de la educación universitaria, los estudiantes presentan obstáculos cuando están en frente de situaciones donde subyace la noción de infinito. Para la elaboración de este trabajo, se ha rescatado algunas investigaciones referidas a la problemática del concepto del infinito en la educación matemática. Todas ellas muestran que los estudiantes en sus primeros cursos de matemáticas en la universidad, conciben sólo la idea de infinito potencial.

Guillermina Waldegg, en su artículo titulado, *Identificación de obstáculos didácticos en el estudio del infinito actual,* afirma que uno de los obstáculos más difíciles, es la resistencia que manifiestan los estudiantes para aceptar que es posible establecer una biyección entre un conjunto infinito y uno de sus subconjuntos propios. Es decir, se evidencia una confrontación cognitiva referida al axioma euclidiano, *el todo es mayor que la parte.* Al parecer este axioma es inherente al raciocinio de cada individuo, o quizá, es la herencia filosófica de los helenos impregnada en el pensamiento colectivo de la humanidad. Parafraseando a Waldegg, se arguye que la raíces de este conflicto cognitivo, están asentadas en el hecho de que *los esquemas intelectuales* del estudiante están construidos a partir de la intuición natural. Estos esquemas, se extrapolan a situaciones que tienen que ver con conjuntos infinitos. Este traslado del razonamiento desde los conjuntos finitos al caso de los conjuntos infinitos, genera contradicciones en el estudiante. Así que, la propuesta que se elabora para solventar este encallamiento, es que se hace apremiante un análisis histórico y epistemológico de la evolución del concepto, donde se logre identificar las dificultades que se rebasaron en el desarrollo histórico, para que de este modo, se rescaten elementos que propicien de alguna manera u otra una confrontación análoga en los razonamientos de los estudiantes.

Por otra parte, Mónica Andrea Aponte, realiza un trabajo[10]donde se arroja resultados similares a las investigaciones de Waldegg. No obstante, entre los resultados se eligen algunos singulares. Se declara que los estudiantes asocian la idea del infinito como algo que no termina, y esto conduce a que la mayoría de ellos intuyan que sólo existe un infinito, *‘’que si existen varios conjuntos infinitos tendrán la misma cantidad de elementos porque son infinitos. ’’* También, se concluye que pensar como única la

[10] *De la intuición sensible del infinito potencial a la caracterización lógico–formal del infinito actual: un estudio histórico–epistemológico en la perspectiva de la educación matemática. Mónica Andrea Aponte Marín. Universidad del Valle. 2008*

concepción de infinito de forma potencial, se revela como un obstáculo para comparar dos conjuntos acotados; al parecer, el proceso infinito permanece oculto en un conjunto acotado, lo que no ocurre en un conjunto no acotado, donde se *permite disponer de las posiciones necesarias para continuar el proceso.*

Para el caso de los estudiantes de Matemáticas y Licenciatura en Matemáticas que hicieron parte del grupo investigado por Aponte, se formula que a pesar que cuentan con cursos previos de teoría de conjuntos, existe una resistencia para aceptar el criterio de biyección, que permite comparar un conjunto infinito con sus subconjuntos propios. Por último, se infiere que cuando el estudiante se ve abocado a situaciones que involucran la idea del infinito, ellos recurren primero a la idea de infinito potencial, que es la que prima en el razonar matemático. Y que para lograr cambiar este aspecto y otros similares, es necesaria la *intervención de procesos didácticos bien planificados, que tengan en cuenta la naturaleza de los obstáculos que subyacen al concepto mismo y que el estudiante tiene que superar*.

Para concluir, se nota que el ambiente generado por la problemática del infinito matemático en la educación, está enmarcado en investigaciones en los primeros semestres de los estudios universitarios. Se confirma que los estudiantes sólo conciben la idea del infinito de manera potencial, y que hay renuencia a cambiar esta perspectiva. Quizá esto se deba a que los jóvenes, nunca han abordado la idea del infinito de forma particular, es decir, tal vez como una temática explicita en el currículo, o al menos, una mirada reflexiva al concepto que permita crear una conciencia de su uso en otros contextos matemáticos. Lo que queda claro, es que hay una preocupación sobre la temática tratada, y que una de las posibles soluciones está en el apoyo del análisis histórico y epistemológico que ha sufrido el concepto.

2. LA INSTITUCIÓN EDUCATIVA Y LOS ESTUDIANTES

La etapa de implementación de la Práctica Pedagógica Investigativa se realizó en la Institución Educativa Comercial del Norte. El plantel educativo está ubicado en el barrio El Placer en la calle 73 N 9-21 de la ciudad de Popayán, departamento del Cauca. El colegio tiene influencia social y educativa en la comuna dos. La mayoría de sus estudiantes viven en los barrios de la periferia: El Placer, Bello Horizonte, Villa del Norte, El Uvo, La Primavera, La Arboleda, Zuldemaida, entre otros. La institución cuenta con un sitio web: *http://www.iecomercialdelnorte.edu.co*. Al plantel educativo pertenecen cinco sedes: Principal, La Paz, Francisco José Chaux Ferrer, Toez, y Villanueva. En la sede principal se ofrecen tres jornadas escolares: en la mañana y tarde se distribuyen los grados de la Educación Básica Secundaria y Media Vocacional; y en la noche se brindan todos los cursos desde sexto hasta undécimo.

El énfasis de la institución es la educación comercial, es decir, el tipo de formación hace hincapié en las áreas de estudio de administración, contabilidad y secretariado. En particular, el colegio fortalece el campo de la contabilidad. Significa que sumado a las asignaturas de corte académico, los alumnos tienen en su plan estudios materias encaminadas hacia la enseñanza de la técnica comercial en el terreno contable. Aún más, en la Media Vocacional, los estudiantes que se han destacado en los anteriores cursos, y que gusten de este énfasis, pueden seguir consolidando su estudios en horarios de contra jornada; en este etapa de su proceso de formación, son dirigidos por docentes del SENA. Con esta entidad el plantel educativo mantiene un convenio, que permite a los estudiantes antes y después del grado de bachiller continuar el desarrollo formativo para optar una titulación técnica y posteriormente tecnológica. De ahí que la institución hace una labor trascendental, y crea las condiciones para que sus estudiantes continúen el proceso formativo después del grado, además, da los elementos necesarios para que incursionen en el medio laboral. Cabe señalar que no todos los alumnos se inclinan por esta área del conocimiento, en este caso, el colegio ofrece el componente académico para que logren seguir sus estudios universitarios, de modo que puedan incursionar en otros sectores educativos o laborales.

La práctica docente se llevó a cabo con los estudiantes en la jornada de la tarde. El espacio cedido por la institución fue la clase de cálculo del grado 11ºA. Todas las sesiones se hicieron los días lunes de 2:20 pm hasta las 3:15 pm y de 3:45 hasta las 4:35 pm. El trabajo en el aula se inició el 27 de febrero y finalizó el 7 de mayo de 2012. Es pertinente dejar claro que se hicieron visitas previas para concretar el convenio entre la Universidad del Cauca y la Institución Educativa Comercial del Norte.

Los estudiantes desde el primer día estuvieron dispuestos a trabajar en los talleres, y atentos a las explicaciones y sugerencias del profesor. La interacción entre alumnos y profesor fue excelente y se vio reflejada en el ámbito social. En ocasiones surgieron espacios de dialogo dentro y fuera del aula. Con los jóvenes se platicaba sobre las oportunidades de seguir estudiando en las diferentes universidades de la región o del país, y la elección de la carrera universitaria. Ellos tenían muchas inquietudes sobre su futuro profesional y laboral. Expresaron preguntas como las siguientes:

— *¿cómo es el ingreso a la Universidad del Cauca?*

— *¿qué requisitos se piden para el ingreso a las universidades públicas y privadas?*

— *¿cuáles son las mejores carreras?*

— *¿cómo es el ambiente universitario?*

— *¿es bueno seguir estudiando?, entre otras.*

Y cuando la conversación se centraba en alguna carrera en particular, se departía sobre su perfil profesional y ocupacional. Hubo notable interés en carreras como por ejemplo: ingeniería física, ingeniería automática, ingeniería electrónica y administración de empresas. En estas conversaciones con los estudiantes lo que yo hacía era motivarlos para que siguieran sus estudios. Algunas veces, al inicio de la clase les leía y exponía información de alguna carrera en particular. Y después, en el transcurso de la clase o en el descanso ellos se acercaban a preguntar sobre las posibilidades de estudio del pre-grado.

Por otro lado, en lo que se refiere al proyecto de aula, cuando se pasaba por los grupos dando algunas indicaciones se suscitaba un ambiente de discusión en torno al tema de trabajo: *el infinito matemático.* En particular, algunos de los puntos de los talleres generaban una confrontación con la intuición del estudiante, este hecho hacia germinar el debate en el grupo y entre los grupos de estudio. De esta manera, se creaba un entorno propicio para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

En suma, el trabajo con estudiantes fue muy agradable y rico en experiencias educativas. Con esta práctica docente he confirmado mi vocación de docente de las matemáticas. Aunque soy consciente de que a lo largo de esta profesión habrá que sortear muchas dificultades, no obstante, a mi modo de ver este ha sido un excelente comienzo. Es mi deseo expresar que desde un comienzo concebí a los alumnos como la esencia y médula de este proyecto, ya que el análisis de los conceptos matemáticos en el ámbito de la educación de las matemáticas, toma vida cuando se lleva a un salón de clases, y lo teórico se pone a prueba con los estudiantes.

3. METODOLOGÍA

3.1. ¿CÓMO SE LLEVERÁ A CABO EL TRABAJO EN EL AULA?

Para la implementación del proyecto de aula se diseñaron cuatro talleres, los cuales gravitan en torno a la temática: *el infinito matemático*. Cada taller hace énfasis en un contenido específico, y se subraya que para desarrollar los talleres 2,3, y 4 se propone una lectura previa. Específicamente, el 2 y 3 van acompañados, respectivamente, de la primera y segunda parte del capítulo nueve del libro *El Diablo de los Números*, y en el taller 4 se hará lectura del relato *El Hotel de Hilbert*[11]. Con base en las lecturas se pretende que los estudiantes se cuestionen sobre su contenido, y posteriormente con asesoría del profesor y el debate en el grupo, se logre trabajar cada taller.

La propuesta para trabajar cada sesión es organizar a los estudiantes en grupos de dos o tres personas como máximo. La dinámica de trabajo se hará de la siguiente manera: primero, en cada grupo se realizará la lectura de los textos mencionados (excepto el taller 1); después se empezará a desarrollar el taller respectivo; y por último, socializar lo que se trabajó en los grupos. Transversal a estas tres actividades, será una labor del profesor pasar por cada uno de los equipos de trabajo brindando asesoría, y se señala que un propósito primordial será generar debate en cada grupo y entre los grupos.

El primer taller es introductorio. Con este primer trabajo se pretende recoger por

[11] Extraído el 22 de septiembre de la página http://www.educarargentina.com.ar/ENE2007/educ181.htm#.UF3L_bKTtdg

medio de las respuestas de los estudiantes, cuál es la concepción que tienen ellos sobre la noción de infinito, y a su vez de la idea de lo qué es finito. En estos cuestionamientos se quiere confirmar la siguiente hipótesis: el estudiante sólo conciben la noción del infinito potencial, al parecer esta idea se da de forma natural en el pensamiento del individuo y está asociada a la intuición; por el contrario, con la noción de infinito actual, el estudiante se opone a aceptarlo, el individuo muestra una resistencia cognitiva para admitirlo en su pensamiento. Se anota que estas ideas se desarrollan con más profundidad en los trabajos de Guillermina Waldegg (Waldegg, 1996) y Mónica Aponte Marín (Marín, 2008). Al respecto, Waldegg lo expresa de la siguiente manera:

> *Cuando el estudiante se enfrenta por primera vez a los conjuntos infinitos (hay que señalar que un conjunto infinito, de acuerdo con la definición de conjunto, sólo puede ser actualmente infinito) debe aceptar que el todo puede ser igual a la parte, lo que representa una verdadera contradicción. Las raíces del conflicto se deben buscar en el hecho de que los esquemas intelectuales están construidos a partir de experiencias empíricas. Estos esquemas son extendidos y, en cierta medida, adaptados a situaciones infinitas; extrapolación que conduce a contradicciones difícilmente superables.* (Waldegg, 1996)

En el taller número dos, el eje central es la definición de conjunto infinito[12]. Para ello se emplea el conjunto de los números naturales, enteros, y racionales. El propósito de este taller es confrontar la intuición de los estudiantes, referido a lo que ocurre con los conjuntos infinitos, donde el cardinal de los subconjuntos propios puede ser igual al conjunto dado. Distinto a lo que pasa con los conjuntos finitos, donde todos los subconjuntos propios tiene menor cardinal que el conjunto. En otras palabras, lo que se busca es confrontar el axioma enunciado en los Elementos de Euclides[13]: *el todo es mayor que la parte.*

[12] Dedekind en 1888 presenta la primera definición precisa de un conjunto infinito: Un conjunto A es infinito si y sólo si existe una biyección entre A y un subconjunto propio de A.
[13] Axioma nueve de Los Elementos de Euclides: el todo es mayor que su parte

En el taller tres, se trabajan las series convergentes y no convergentes, específicamente la serie geométrica y armónica. Lo que se persigue es que los estudiantes identifiquen que existen procesos infinitos que tienden a un número dado, en este caso, el desarrollo de sumas infinitas puede ocurrir que converge a un número, lo que se quiere es contraponer la idea que las sumas infinitas crecen infinitamente, o siendo más precisos no convergen. No obstante, en el taller se analiza el caso cuando la suma infinita no converge, para esta cuestión se utiliza la serie armónica. Aquí es preciso aclarar que no se trata de hacer un estudio profundo sobre series, sino que se trabaja la idea del infinito matemático con la ayuda del concepto matemático serie. Es más, en ningún momento se pretende dar una definición de serie, ni su caracterización, ni la forma de calcular una suma infinita cuando converge. Simplemente se hace uso de conocimientos básico de los estudiantes como por ejemplo, potenciación y suma de fraccionarios. Además se les permitirá a los estudiantes utilizar la calculadora para hacer los cálculos engorrosos de las sumas.

El último taller contiene una serie de preguntas a partir de la lectura, *El Hotel de Hilbert*. Se espera que los estudiantes desarrollen los cuestionamientos teniendo en cuenta la lectura previa, y también, lo que se ha elaborado en los talleres anteriores. Básicamente se trabaja con el conjunto de los números naturales y sus subconjuntos, como por ejemplo el conjunto de los números pares e impares. Es decir, que se usa implícitamente la definición de un conjunto infinito.

Al finalizar cada taller, se realizará una socialización de las respuestas, y en esa medida se pretende hacer los ajustes y correcciones que sean necesarios. Lo que se busca en esta fase final, es hacer una síntesis de cada contenido.

Por último, para cerrar el trabajo en el aula, en la última sesión se pedirá a los estudiantes elaborar un ensayo escrito. La actividad consiste en hacer un ejercicio de escritura libre, en la cual debe ir una síntesis de lo que se trabajó en todas las sesiones, o si los estudiantes prefieren desarrollar alguna (as) idea por la que se hayan inclinado.

4. BITACORAS

4.1. EL PRIMER ENCUENTRO

Es una tarde de un lunes cualquiera del mes de febrero. A eso de las dos de la tarde, aproximadamente, me encontraba en el patio de la Institución Educativa Comercial del Norte, sentado y expectante, porque unos minutos después me encontraría en frente de los alumnos del grado once. Ahí tendría que encarar mis miedos al abordar un grupo de personas, y en este caso jóvenes que en algunos casos no les interesa escuchar al profesor, y mucho menos al de matemáticas. Así que trataba de organizar las ideas, como iniciar la presentación, exponer brevemente el tema a tratar, y sin más preámbulos dar inicio al desarrollo del primer taller. Me decía a mí mismo —tranquilo, tómalo con calma, con mesura y todo saldrá bien—. A medida que se aproximaba el cambio de clase, para ser exactos a las 2:20 pm, la ansiedad aumentaba.

El sonido del timbre que muchas veces fue tan anhelado en mis días de colegio, ahora se había convertido en la señal que me indicaba volver a un aula, ya no como estudiante sino como el profesor de matemáticas. El aviso del timbre marcaba el cambio de clase. Entonces, en eso pocos minutos de intercambio, el colegio se asemejaba a un mercado persa. Estudiantes corriendo de un lado a otro, chicos en busca de las chicas de otro curso y viceversa, para otros, esos instantes era la oportunidad de sacar sus reproductores de música o de conectarse al facebook, en fin, cada estudiante con su mundo, que en ocasiones es subyacente al resto personas, y otras veces, es lo contrario, es decir jóvenes tratando de llamar la atención de compañeros y profesores. Después del alboroto llega la calma, los docentes van llegando uno por uno al salón que le corresponde a esa hora, y para los estudiantes esta es la indicación de entrar a clases, guardar sus reproductores de música, y sentarse en sus puestos.

En el transcurrir de ese espacio de tiempo voy subiendo las gradas para llegar al salón, las yemas de mis dedos comienzan a expeler un poco de sudor. Nervios, ansiedad, sea lo que fuese era la hora de afrontar la realidad y hacer mi mejor esfuerzo. Un episodio anecdótico, fue el hecho de haberme predispuesto a que la profesora encargada de la clase a esa hora, iba a hacer la presentación y ambientaría un poco mi entrada en escena, pero no fue así, fue una sorpresa, porque había diseñado todo un esquema de lo que iba a sobrevenir, es decir que el primer episodio no fue acorde a lo previsto. En ese momento sentí que el andamiaje se me balanceaba. ¡Pero bueno!, ya estaba ahí, parado, enfrente de cincuenta y seis ojos expectantes a lo que yo iba a decir. Todo pasó muy rápido, la presentación no duro mucho: saludé, di mi nombre, carrera de estudio y hablé someramente sobre el proyecto que se pensaba implementar en esa clase de matemáticas —*el infinito matemático*—. ¡Claro!, algunas cosas que había pensado decir se me pasaron por alto, quizá por la ansiedad. Luego de estos episodios me dispuse a entrar en materia.

Para empezar a desarrollar el taller uno, el curso se organiza en grupos de dos o tres personas como máximo. Se aclara que para solucionar el taller no se ha realizado una clase previa sobre el infinito matemático, lo que se pretende es que los estudiantes den sus respuestas con los conocimientos previos adquiridos en su proceso escolar, y, que hagan uso de su intuición. En la medida en que se fue realizando el trabajo en el aula se gestó un ambiente de debate en los grupos y entre los grupos cercanos, esto era un buen síntoma de que la labor iba por buen camino. El plan era pasar de grupo en grupo resolviendo dudas de los alumnos e induciendo al debate entre ellos. Con esta actividad se logró interactuar con los alumnos y empezar a conocerlos mejor.

El primer punto del taller fue analizar el número de rebotes y la distancia recorrida por una pelota al caer desde una altura de 100 cm (ver anexo 1). Hubo respuestas variadas. No obstante, la mayoría de los grupos dedujeron que el número de rebotes estaba en un rango de 5 a 8, y que la pelota hacia un recorrido aproximado de 297 cm[14]. Cuando se pasaba por los grupos se hizo énfasis en lo que ocurre en lo físico, y contraponiéndolo a lo que pasa en el cálculo matemático, aludiendo al punto de vista abstracto. Se logró notar que los estudiantes eran conscientes que se podría seguir dividiendo la distancia en los cálculos matemáticos, y, en lo referente al fenómeno físico, la mayoría argumentó que la pelota no seguía rebotando cuando la distancia se hacía menor que 1cm.

En el transcurso de las siguientes preguntas, se evidenció un ambiente agradable en el aula. Se percibía que los jóvenes estaban interesados en la temática. La labor de pasar por cada grupo hacia posible personalizar un poco la enseñanza, sin embargo, reconozco que se presentan algunas dificultades ya que era bastante laborioso, y los

[14] Se anota que este es el cálculo de una serie geométrica, y que se puede hallar su valor preciso, el cual es 300 cm

grupos empezaban a tomar distancia unos de otros en las soluciones. A pesar de ello, es más interesante y enriquecedor hacerlo de esta manera. Además, la labor de práctica sólo se llevará a cabo una vez a la semana, por lo cual, vale la pena hacer el esfuerzo en las dos horas asignadas.

En cuanto al grupo de preguntas (ver anexo 1) que apuntaban a cuestionarse si los cabellos de la cabeza y los granos de arena en un determinado espacio, ¿es finita o infinita?, hizo generar una buena discusión. Los chicos se miraban e imaginaban como lograr contar los cabellos de sus cabezas, y discutían como seria para el caso de los granos de arena en un espacio determinado. En términos generales, los estudiantes argumentaban que los cabellos de cada persona es finita, esta idea la asociaban a la posibilidad de contarlos. Cuando se les preguntaba sobre los cabellos de todas las personas del mundo, la mayoría respondieron que es infinita, debido a la imposibilidad de hacer el conteo. Al respecto, una de las respuestas de un grupo, fue aducir que eran infinitos los cabellos de las personas del mundo, porque cada día nacen más personas. No obstante, hubo un grupo con un argumento interesante: ellos decían que debido a que la cantidad de cabellos de cada persona es finita, entonces que cada persona podría contar los de su cabeza, de este modo, y como la población del mundo es finita, se concluye que la cantidad de cabellos de todas las personas de todo el mundo, es finita.

Para las respuestas sobre la cantidad de granos de arena en un espacio determinado, los estudiantes expresaron razonamientos similares a lo sucedido con los cabellos de la cabeza. Asociaban la posibilidad de contar con la idea de que sea finita la cantidad de granos de arena, este hecho ocurrió cuando los granos estaban en una tapa o en una botella. Pero cuando se exponía que estaban en una playa o en todas las playas del mundo, la mayoría de los grupos determinaron que la cantidad es infinita, a causa de la imposibilidad de hacer el conteo. Uno de los grupos, no obstante, concluyó lo siguiente: es finita la cantidad de granos de arena en una playa, ya que se podría hacer el conteo con medidas de peso, es decir primero pesar una determinada cantidad de arena y contar los granos de arena, después, ir pesando la misma cantidad repetidamente hasta completar toda la playa. Con este razonamiento, ellos también indujeron que es finita la cantidad de granos de arena en todas las playas del mundo[15].

Al final del taller se hizo el cuestionamiento sobre la idea que tienen los estudiantes del infinito, y su vez de la idea de lo que es finito. Para el caso de la noción de infinito, los alumnos manifestaron algunas ideas como las siguientes:

— *Infinito es algo que no tiene ningún fin, ejemplo, los números.*
— *La idea de infinito es que es una cantidad tan demasiado grande que sería casi imposible de contar, porque siempre habrá una cantidad mayor o una cantidad menor.*
— *Infinito son las cosas que no podemos contar, como la arena son muchas partículas, las estrellas.*
— *Infinito es algo que no podemos calcular, contar o ver su comienzo y final.*
— *Infinito son los que sabemos dónde inicia pero no sabemos cuándo termina.*
— *Lo infinito es todo lo contrario de finito.*

El resto de los grupos dieron respuestas similares éstas.

[15] Arquímedes (287 a. C – 212 a. C), en *El Arenario*, idea un sistema numérico para estimar los granos de arena que harían falta para llenar el universo, tal y como se concebía entonces, consistía en una esfera con centro en la tierra y cuyo radio era la distancia de la Tierra al Sol.

Para el caso de la idea de lo que es finito, algunas respuestas comunes son:

— *Finito es que tiene un punto donde las cosas se acaban y nos daría la oportunidad de darle un valor exacto (las cosas se pueden contar)*
— *Finito son los elementos que podemos decir cuando empieza y cuando acaba.*
— *Finito es todo aquello que de una u otra forma la podemos contar.*
— *Finito es todo lo que nosotros los humanos en nuestra calidad de seres superiores podemos contar fácilmente, ejemplo, los colegios de una ciudad.*
— *La idea que tenemos acerca de finito, es una cantidad contable.*

Así que, teniendo en cuenta las respuestas de los estudiantes, se infiere que hubo un razonamiento recurrente en asociar la idea de infinito con la imposibilidad de contar los elementos de un conjunto. Es decir, que un conjunto es infinito si no se puede contar, y que es finito si es posible contar los elementos del conjunto. Este tipo de raciocinios se dan casi de forma natural en el individuo, ya que sin un previo análisis de este concepto se apela siempre a la intuición, y a la idea primigenia —*infinito potencial*— de lo que es el infinito.

Para terminar, quiero expresar que esta primera intervención en el aula estuvo cargada de experiencias y emociones. Una de ellas, fue la experiencia de relacionarme un poco mas con los estudiantes, fue enriquecedor porque pude percibir qué conocimientos básicos tenían, qué grupos trabajaban más, qué estudiantes se rezagaban al solucionar el taller, en fin, ir identificando todas las personalidades que confluyen en un salón de clase. Una experiencia personal fue confirmar que la labor de docente, es el trabajo al cual deseo dedicarme durante muchos años más. Es para mí muy agradable interactuar con los chicos, hablar un poco, reírme con ellos, escucharlos, observar sus diferentes comportamientos en esta etapa de sus vidas tan cargada de emociones, alegrías, afectados por su relaciones familiares, amistades o el entorno en el que se desenvuelven. Esta labor no es para nada monótona, sino por el contrario cada día se presentan nuevas experiencias. En fin, en una sola palabra, describo esta primera intervención al aula como: ¡Genial!

4.2. ¿EL TODO ES MAYOR QUE LA PARTE?

El eje central de la segunda sesión, es confrontar la intuición de los estudiantes frente al axioma euclidiano: *el todo es mayor que la parte.* Para llevar a cabo este propósito, primero se invita a los grupos de estudio que hagan la lectura del capítulo 9 del libro, *El Diablo de los Número* (ver anexo 5). En este texto, al estilo de una quimera, se describe la correspondencia que se puede hacer entre el conjunto de los números naturales y el conjunto de los números pares, del mismo modo con los impares, los cuadrados perfectos, los números primos, los de Fibonacci, los números factoriales —llamados en el relato, los números con exclamaciones—, los números triangulares, y las potencias de 2. Con esta lectura, se busca que los estudiantes tengan este elemento adicional para argumentar sus respuestas.

En los primeros ítems del taller se muestran dos conjuntos finitos[16]. En cada uno de estos conjuntos finitos se interroga: ¿cuántos elementos tiene el subconjunto propio de los números pares, y los impares?, ¿y si el subconjunto de los números cuadrados perfectos tiene una cardinalidad mayor, igual o menor? Al respecto, los alumnos no manifestaron mayor dificultad en los cuestionamientos, todos argumentaron que estos subconjuntos tienen una cantidad de elementos menor a los conjuntos propuestos, y determinaron el número de elementos (pares e impares) en cada uno de los conjuntos sugeridos.

[16] $G = \{1, 2, 3, 4, \dots, 96, 97, 98, 100\}$ y $H = \{1, 2, 3, \dots, 999997, 999998, 999999, 1000000\}$

En el tercer punto, se contrasta lo anterior con la presentación del conjunto de los números naturales, el cual es un conjunto infinito. Y a los estudiantes se les plantea interrogantes similares. Se pide que analicen las siguientes situaciones:

1. ¿Cuántos elementos tiene $\mathbb{N}$?

La respuesta común de los estudiantes, fue aducir que $\mathbb{N}$ tiene infinitos elementos. De entre las respuestas, se rescata las de dos grupos:

— *La cantidad de elementos que tiene el conjunto $\mathbb{N}$, es indeterminado por lo que es un conjunto infinito.*
— *Es un conjunto infinito por lo cual no sabríamos cuantos elementos tiene.*

Otro de los interrogantes fue:

2. ¿La cantidad de números pares que pertenecen a $\mathbb{N}$ es menor, mayor o igual que la cantidad de elementos de $\mathbb{N}$?

Para dar solución a esta cuestión, se espera que los grupos tengan en cuenta la lectura previa. Al respecto, la mayoría argumentaron que el cardinal de los dos conjuntos es igual. No obstante, las siguientes respuestas son interesantes:

— *La cantidad de números pares es menor que $\mathbb{N}$*
— *Los que pertenecen a $\mathbb{N}$ son mayores, ya que el conjunto $\mathbb{N}$ tiene infinitos números naturales.*
— *La cantidad de números pares es la mitad que $\mathbb{N}$*
— *Como comprendemos en la lectura la cantidad de números pares no es menor, mayor ni igual porque pertenecen al conjunto de los números naturales que es infinito.*

A la pregunta:

3. ¿Cuántos números pares crees que pertenecen a $\mathbb{N}$?

La mayoría de estudiantes respondieron que eran infinitos. Dos razonamientos interesantes son los siguientes:

— *Como dijimos en la respuesta anterior no lo podríamos determinar la cantidad.*
— *No podemos decir porque son infinitos.*

4. De acuerdo al texto ‘’El Diablo de los Números’’. Explica una forma de contar el conjunto de los números pares

Algunos grupos expresaron lo siguiente:

— *De acuerdo al texto podemos coger todos los números pares y emparejarlos con los naturales, así sabríamos cuantos pares hay, pero al igual son infinitos.*
— *Ponemos a los números pares de la mano con los números naturales, de esta forma podemos deducir que hay infinitos números pares como infinitos son los números* $\mathbb{N}$
— *Una forma de contar el conjunto de los números pares es: 2, 4, 6, 8, 10, etc. y por cada número par le damos un número natural 1, 2, 3, 4,…*

El resto de los grupos hicieron alusión a contar los números pares de dos en dos.

Para el caso del subconjunto propio de los números impares, los estudiantes manifestaron razonamientos análogos al del conjunto de los números pares.

En cuanto al punto cinco (ver anexo 2), el análisis debía hacerse en el contexto del conjunto de los números enteros y sus subconjuntos propios como los son: los pares, impares, y los cuadrados perfectos. Realizar este tipo estudio en $\mathbb{Z}$, generó más dificultad. Se evidenció la imposibilidad para establecer que $\mathbb{Z}$ es equipotente con $\mathbb{N}$; y de la misma forma, se exhibe la resistencia para admitir que el conjunto de los números pares e impares tienen la misma cardinalidad que $\mathbb{Z}$ y que $\mathbb{N}$. Sin embargo, como el trabajo en el ítem 4 fue muy provechoso, había en los grupos un afán por reflexionar qué es lo que podría pasar en $\mathbb{Z}$. Para lo cual, uno de los grupos determinó la siguiente correspondencia entre $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{N}$:

$$\begin{array}{l}
0 \;\;\; \longrightarrow 1 \\
-1 \longrightarrow 2 \\
1 \;\;\; \longrightarrow 3 \\
-2 \longrightarrow 4 \\
2 \;\;\; \longrightarrow 5 \\
-3 \longrightarrow 6 \\
3 \;\;\; \longrightarrow 7 \\
-4 \longrightarrow 8 \\
4 \;\;\; \longrightarrow 9 \\
\quad\;\; \vdots
\end{array}$$

Este mismo grupo, expresó la siguiente asignación entre el conjunto de los números naturales y el conjunto de los números pares en $\mathbb{Z}$:

$$\begin{array}{l}
-2 \longrightarrow 1 \\
2 \;\;\; \longrightarrow 2 \\
-4 \longrightarrow 3 \\
4 \;\;\; \longrightarrow 4 \\
-6 \longrightarrow 5 \\
6 \;\;\; \longrightarrow 6 \\
\quad\;\; \vdots
\end{array}$$

Así que, fue notorio la dificultad cognitiva para admitir que los conjuntos: de los números enteros, de los pares e impares y los cuadrados perfectos, tiene el mismo cardinal que el conjunto de los números naturales. Es pertinente subrayar que este tipo de obstáculo se esperaba que sucediera. Lo que se buscaba con este taller, es al menos plantear lo problemático que puede resultar hacer este tipo de análisis en los conjuntos infinitos. Que si se quiere trasladar el mismo razonar de los conjuntos finitos al contexto de los conjuntos infinitos, puede resultar paradójico. Sin embargo, fue destacado el trabajo de dos de los grupos, que debatían para lograr inferir sus respuestas, como en el caso de determinar la biyección entre $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{N}$, y asimismo, entre $\mathbb{N}$ y el conjunto de los números pares en $\mathbb{Z}$.

Al final de la sesión, en el espacio designado para compartir las respuestas de los grupos, cada uno de ellos las argumentaba de forma oral. Esto permitió que algunos estudiantes se quedaran cavilando con las respuestas de otros compañeros. Se debatía cada uno de los interrogantes, y con la guía del profesor se iba haciendo una síntesis concluyente. Es importante aclarar que en este espacio, se enfatizó en lo paradójico que puede resultar trasladar los mismo raciocinios de los conjuntos finitos a los conjuntos infinitos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, y $\mathbb{Q}$.

4.3. SUMAS INFINITAS

El taller número tres (ver anexo 3) está diseñado para trabajar el contenido temático: *series*. Específicamente la serie geométrica y armónica. Conviene subrayar que los alumnos en sus cursos previos no han estudiado este concepto. Por esta razón, y debido a la importancia de la noción de serie en el desarrollo histórico y epistemológico del concepto del infinito, se elaboró un taller donde no fuese necesario enunciar definiciones correspondientes al tema, a saber: serie, convergencia, limite, criterios de convergencia, entre otras. Es más, en ningún momento se les mencionó la palabra serie, convergencia, limite, serie geométrica o armónica. La propuesta es que los estudiantes trabajen con los elementos básicos de la aritmética, como por ejemplo: sumas de racionales, potenciación, división y potencias de dos. También, era necesario el uso de la calculadora para poder realizar las sumas repetidas veces, y de este modo, conjeturar si la serie converge o no converge. El concepto de serie no se presentó con todo su andamiaje conceptual, ya que se decidió que esto viciaría el pensamiento del individuo, y se convertiría en un obstáculo para trabajar la idea del infinito matemático. Entonces, se recurrió a la intuición y conocimientos básicos de los estudiantes para que desarrollaran las sumas, y a partir de ahí argumentaran sus respuestas.

Los grupos de estudio iniciaron la sesión haciendo la lectura de la segunda parte del capítulo 9 del libro, *El Diablo de los Números* (ver anexo 5). En este texto, se explica la convergencia de la siguiente serie geometría: $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n} = 1$. Y luego se hace una comparación con la divergencia de la serie armónica $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$

El primer ítem (ver anexo 3), consistía en bisecar el segmento $[0,1]$, y se planteaba el siguiente cuestionamiento:

¿Crees que es posible llegar a una situación en la que un punto de la bisección coincide con el punto 0? Explica tu respuesta.

Al respecto, todos los grupos argumentaron que no es posible que el punto de bisección coincida con el punto 0. Expresaron que lo más que se podría hacer es que el punto de bisección se aproxime al punto 0 tanto como se quiera.

En el segundo ítem (ver anexo 3), se presentó la siguiente serie geométrica:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\cdots$$

Donde se preguntaba:

¿Cuál crees que es el valor de esta suma? Explica tu respuesta.

Para esta interpelación era importante tener en cuenta la lectura previa. Los grupos iban sumando repetidas veces, e intuyeron que la suma se aproximaba a 1. En este punto, se anota que los jóvenes hicieron uso de la calculadora, y de este modo se facilitó aproximar la suma.

El tercer punto (ver anexo 3) era el siguiente,

Considera la siguiente ecuación:

$$y = \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots$$

Podrías decir para que valores de n resulta $y = 1$. Explica tu respuesta.

Recomendación: tener en cuenta el ejercicio anterior y de ahí sacar el valor que puede tomar n

Algunas de las respuestas de los estudiantes son las siguientes:

> *—n tendría que ser igual a un número muy grande el cual no podríamos decir uno en concreto ya que nunca vamos a llegar a uno.*
>
> *—bueno ''n'' tendría que tomar un valor infinito para poder obtener ''1'' pero teniendo en cuenta que siempre ''n'' podría ser mayor y siempre nos dará 1 porque ''n'' no será un valor fijo natural.*
>
> *—no se puede dar un número exacto porque nunca nos daría pero si lo llevamos al infinito si nos daría*
>
> *—es un infinito dado pero no fijo porque al sumarle a ese infinito se le suma cualquier número dará otro número.*
>
> *—el valor de n será un número infinito, ya que si seguimos elevando con los números naturales no vamos a alcanzar y no va hacer un valor natural fijo.*

En la segunda parte del taller se trabaja la confrontación con la serie armónica. Los grupos de estudio realizan las sumas repetida veces, y así conjeturan que la suma se incrementa cada vez más. Algunas de las respuestas que expresaron los estudiantes fueron:

> *—por cada número que aumenta la cifra del resultado es mayor*
>
> *—el resultado va aumentado a medida que vamos sumando más números*
>
> *—el resultado que nos daría si le seguimos sumando más elementos seria infinito, y se alejaría bastante al 1*
>
> *—si se sigue sumando más y más esto dará igualmente infinito*

Dos respuestas que llaman la atención son:

> *—2.103210678 cada vez que le sumamos un número quebrado irá aumentando y su resultado será indeterminado*

> *—el resultado seria 4 por más que sumemos números más grande nunca pasaría de 4*

Cuando se pidió que se hiciera la comparación entre las dos sumas infinitas —*serie geométrica y armónica*—, la mayoría de los grupos aducían que la primera suma infinita —*serie geométrica*— se aproximaba a 1, y que nunca sobrepasaba este valor. Con la segunda suma infinita —*serie armónica*— decían que sobrepasa el valor de 1, y que aumentaba cada vez más.

Explicitemos algunas respuestas:

- *El resultado en el conjunto A es igual a 1, mientras en el conjunto B es igual a infinito*
- *La diferencia es que el conjunto A siempre nos va a dar 1 y el conjunto B un resultado diferente*
- *Ambos conjuntos son infinitos por lo tanto el conjunto A nos dará 1 y el conjunto B nos dará un número infinito.*
- *Su resultado va hacer 1en el A y en el B va dar indeterminado*
- *Bueno la suma sería infinito pero si nos daría un resultado, pero tocaría gastarse mucho tiempo*

Al final de la sesión, en el espacio de socialización, se hizo hincapié en que existen sumas infinitas —*serie geométrica*— que se aproximan a un número dado, y por el contrario otras sumas infinitas —*serie arménica*— no se aproximan a un valor. El taller fue fructífero en el hecho de que en los estudiantes fueron notorias las dificultades para la comprensión de esta temática, de ahí que es un nicho propicio para extraer conclusiones.

Para terminar, quiero manifestar que ha sido grato el trabajo con los jóvenes, ya que se ha producido una buena sintonía entre estudiantes y profesor. Son alumnos respetuosos, atentos y ávidos del conocimiento, receptivos a las recomendaciones académicas y personales. Además, como están en vísperas de terminar sus estudios de bachillerato, he propiciado una comunicación con ellos para cuestionarlos hacia dónde dirigir sus vidas; las oportunidades de estudios de pregrado; hablar de cómo es el ingreso a la universidad; cómo es el trabajo académico universitario; todo esto para motivarlos a que sigan sus estudios universitarios.

4.4. EL HOTEL DE HILBERT

En el taller número cuatro (ver anexo 4) se trabaja con base en la lectura, *El Hotel de Hilbert*. Desde el primer momento este relato cautivo la atención de los estudiantes, así que de ahí en adelante el trabajo en el aula se hizo más ameno. Como resultado se gestaba un buen ambiente de debate, lo cual fue indicio que las cosas iban nuevamente por buen camino. En efecto, después de arduas y embrolladas jornadas de trabajo con las series, los estudiantes se sentían desganados —también esto afectó mi proceder— no obstante, empezar a desarrollar este taller fue un respiro para los estudiantes, y ¡claro! mucho más para mí. Así que, que el primer objetivo estaba cumplido, había logrado, nuevamente, captar la atención de los jóvenes.

Después de leer el relato, los alumnos empezaron a cuestionarse y dieron libertad a su imaginación para poder dar las respuestas. Al principio fue jocoso encontrar la solución de la primera pregunta (ver anexo 4), los alumnos eran muy creativos, por ejemplo decían:

> *—El huésped que llega lo ubicamos en la recepción*
> *—El huésped que llega lo ubicamos con otra persona en una habitación*

A medida que se debatía en el grupo —y entre los grupos— se notó que la discusión se encaminaba bien. La numeración que se usa para las habitaciones del hotel, hizo guiar el uso de los números naturales, y rápidamente los estudiantes conectaron esto con el trabajo en el segundo taller.

Un grupo que se había destacado durante todas las sesiones conformado por tres alumnas: Diana Marcela Mera, Vanesa Samboni y Katherine Gutiérrez; dieron una solución que me dejo sorprendido. La primera pregunta decía:

> *¿Puede ser correcta la respuesta del recepcionista ‘’no hay más lugar’’, si el hotel tiene infinitas habitaciones?*

La respuesta de las alumnas fue la siguiente:

> *No es correcta porque podríamos ubicar a las personas de tal manera que el huésped podría ocupar una habitación, porque el hotel tiene habitaciones pares e impares, entonces están ocupadas las habitaciones pares que son infinitas y nos quedan disponibles las impares que también son infinitas.*

Como se puede notar la respuesta es más que acertada, ya que a falta de una habitación disponible habían encontrado la forma de disponer de infinitas habitaciones. Esto significaba que las alumnas habían desarrollado todo el taller con sólo esta respuesta, ya que las otras preguntas hacían referencia a que si llegasen una cantidad finita de personas, y la última pregunta se cuestionaba si arribasen infinitas personas. De este modo, en tan poco tiempo ya estaba la solución del taller. Tomé la decisión que las alumnas hicieran otras labores que tuviesen pendientes, —ante este imprevisto, no se me ocurrió nada más— mientras que sus compañeros terminaban, para que al final hiciéramos todos la socialización.

Los otros grupos seguían en el debate y al final todos estaban de acuerdo que siempre habría una habitación para las personas que llegaran. Al principio la discusión se centraba en dónde ubicar a esta persona. La mayoría se decidieron ubicar al huésped al final, es decir recurrían a la idea del infinito potencial, lo cual permitía siempre disponer de una habitación, sin embargo, yo les advertía que esa posible habitación ya estaba ocupada. Así que seguían recabando entre su imaginación para lograr ubicar al huésped. Al final, uno de los grupos, se le ocurrió reubicar a todos los huéspedes, y dejar la habitación número 1 disponible, lo cual era una solución al problema. A pesar que los otros grupos no acertaron en sus respuestas, se resalta el trabajo que hicieron, ya que evocaron lo realizado en las anteriores sesiones, y buscaban por varios caminos creativos encontrar la solución.

Para mí fue grato observar la controversia que generó este taller. Encontré que los estudiantes utilizaban el recurso de las otras sesiones. En los debates pude notar como tenían especial cuidado con el tratamiento del infinito, ya que en antes se habían encontrado con ideas que disentían con su intuición. De ahí que, en términos generales el desarrollo en esta sesión fue muy bueno. Y al final brotó lo que se había hecho anteriormente.

Hay un concepto que es el corruptor y el desatinador de los otros.

No hablo del mal cuyo limitado imperio es la ética; hablo del infinito.

J. L. Borges

5. CONCLUSIONES

5.1. SOBRE EL ESTADO DEL ARTE

El infinito alguna vez fue imaginado como algo inacabado, pensado como único y absoluto. Con seguridad —hasta nuestros días— atributo del tiempo, característica del éter, naturaleza de algún dios, sinónimo de la eternidad —y de este modo esperanza de una vida eterna— propiedad de los números, intuido en la cantidad de estrellas y de granos de arena en el universo, percibido en el discurrir del ciclo del día y la noche, y tal vez, quizá, muy atrás en el tiempo, en los viajes marítimos, al vislumbrar la inmensidad del mar. Ahora, en la ciencia matemática, razonado de manera opuesta al ideario natural del individuo. Contrapuesto a lo inacabado, es decir, entendido como algo terminado. Y aunque pareciese una locura, comprendido como innumerables infinitos, admitido como un infinito más grande que otro.

La matematización del infinito, ha logrado direccionar el debate milenario hacia la aceptación de un infinito en acto. En la actualidad existe una distinción entre dos nociones del concepto: *infinito potencial e infinito actual*. El primero, entendido como ausencia de límites, y el segundo, idea de una totalidad. No ha sido nada fácil admitir el *infinito actual*, aceptar esta idea ha sido traumática para grandes pensadores, y, a pensar de mucho, en nuestros días aún lo sigue siendo.

En páginas anteriores de este trabajo, se ha esbozado el desarrollo histórico y epistemológico que ha sufrido el concepto. Este análisis se ha hecho con el propósito de lograr rescatar puntos sustanciales en la evolución del concepto, y de este modo, trasladar al aula de clase algún tipo de símil. No comprendido como un llevar al aula todo un discurrir histórico, esto sería absurdo, sino como un estudio de puntos sustanciales en el desarrollo del concepto, los cuales es posible reflexionarlos, y, así, propiciar en el individuo una confrontación de su intuición y de la idea natural que tiene del infinito.

En cuanto a la educación, generalmente, el concepto se explica haciendo uso de analogías con los números naturales —y en la medida que se avanza en la escolaridad, se recurre a los conjuntos $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{I}$ y $\mathbb{R}$—, la extensión de la recta, el tiempo, entre otras. De igual manera, se relaciona el infinito a conjuntos muy grandes y asociando la idea a lo que nunca tienen fin. Estas ideas del infinito, que al parecer vienen innatas al individuo, —o a lo mejor quién sabe, no es así— son arraigas y apisonadas con la instrucción académica. Esto ocasiona ver el concepto sólo ligado a la intuición, y razonado únicamente con la definición de *infinito potencial*.

La noción de infinito en las matemáticas, es parte sustancial y característica principal de conjuntos como por ejemplo, $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{I}$ y $\mathbb{R}$. También, es transversal en muchos conceptos, como en el caso de la noción de límite, serie, continuidad, derivada, integral, entre otros. En vista de que el *infinito matemático* es esencia de muchos conceptos matemáticos, — o quizá permea a todos— es evidente que hace parte del currículo, tal vez no lo encontremos como un tema especifico, o en la tabla de contenidos de algún texto, no obstante, él está ahí, implícito y transversal a los contenidos temáticos.

El problema del *infinito matemático* en la educación, se ha soslayado y se ha dejado pasivo en un letargo en donde prima la noción de infinito desde la perspectiva aristotélica. Es insuficiente explicar con esta idea que $\mathbb{N}, \mathbb{Z}$ y $\mathbb{Q}$ son equipotentes, y, que por el contrario $\mathbb{R}$ tiene un cardinal mayor. A la luz de estos cuestionamientos, emergen las siguientes preguntas:

— ¿Hasta qué punto es apropiado reforzar y apisonar en los primeros grados de la escuela la idea primigenia de infinito, como una noción absoluta y única?

— ¿En cuál etapa de su formación se debe enfrentar al estudiante con el concepto de infinito actual? O ¿quizá es mejor que no ocurra en él está confrontación cognitiva?

— ¿El estudiante posee experiencias previas que inciten en él una distinción entre las dos nociones de *infinito matemático*?

Además, una pregunta lanzada de forma hipotética, sería:

— ¿La idea de infinito que tienen los estudiantes, incide en la comprensión de conceptos del cálculo como por ejemplo, la noción de límite, continuidad, sucesiones, series, área bajo la curva, entre otros?

En definitiva, el debate queda abierto, y a consideración de educadores y estudiosos de las matemáticas. Al respecto, este trabajo simplemente, espera aportar elementos a la discusión del infinito en la educación matemática.

5.2. SOBRE LOS TALLERES

El primer problema del taller uno fue analizar el fenómeno de la pelota que se deja caer desde una altura de 100 cm (ver anexo 1). Esta fue la primera situación que se eligió para confrontar el razonamiento de los estudiantes. Su escogencia tuvo dos propósitos: captar la atención de los jóvenes hacia al tema, y generar una confrontación cognitiva. De las discusiones que se suscitaron en los grupos de estudio, se observó que al finalizar el análisis de este problema, los estudiantes fueron conscientes de la diferencia entre lo que sucede con el fenómeno físico, y lo que pasa en el ámbito matemático —aludiendo a lo abstracto—. Es decir, que en lo físico, llega un momento en que la pelota deja de rebotar, y por lo cual la distancia recorrida es finita; y en lo matemático, la pelota sigue haciendo infinitos rebotes, y se infiere que la distancia se incrementa cada vez más, se cree que es infinita. Se señala que en este caso específico la pelota recorre una distancia de 300 cm, esto se puede hacer ya que de esta situación se extrae un modelo matemático de una serie geométrica, la cual siempre converge.

En los ítems siguientes, se evidenció que la idea de finito está ligada a la posibilidad de hacer el conteo de los elementos de un conjunto. De ahí que la noción de infinito, los estudiantes la asocian con la imposibilidad de contar un determinado conjunto. Por ejemplo, con los granos de arena en un espacio dado, se notó que cuando los granos de arena se encuentran en una espacio ‘’muy grande’’, como por ejemplo todas las playas del planeta tierra, la respuesta recurrente fue argumentar que eran infinitos a causa de la imposibilidad de contarlos. Por el contrario cuando los granos de arena se ubicaban en una tapa de gaseosa, adujeron que la cantidad es finita.

Se destaca, sin embargo, que uno de los grupos arguyó que los granos de arena, en una playa o en todas las playas del mundo, son finitos. Ellos fueron muy creativos, explicaban que para contar los granos de arena en una playa, se podía hacer pesando una cantidad determinada y hacer el conteo ahí. Después ir extrapolando este resultado a medida que se iban haciendo las demás medidas de pesos de igual cantidad. Los estudiantes manifestaron que era claro que no se llegaba a una cantidad exacta, sino que se conseguía una aproximación, pero que en todo caso, eran finitos. Teniendo en cuenta esta idea de los jóvenes, se anota que este es un planteamiento análogo a la forma como Arquímedes demostró que la cantidad de granos de arena en el universo[17] es finita.

Para el caso de los cabellos de la cabeza, los alumnos también fueron muy recursivos. Cuando se les pidió analizar la situación para una persona, argumentaron que la cantidad de cabellos es finita, aunque decían, que para ciertas personas sería dispendioso hacer el conteo. Y cuando se les planteó la situación de todas las personas del mundo, la mayoría expresó que eran infinitos por la imposibilidad de realizar el conteo. Uno de los grupos apoyó este tipo de de razonamiento, en el hecho de que cada

[17] Para Arquímedes el universo era concebido como una esfera, con centro en la tierra, y el radio, la distancia de la tierra al sol. Él crea un sistema numérico que le permite realizar grandes cálculos, y halla la cantidad de granos de arena que hay en el universo. Estas ideas las plasma en su libro, *El Arenario.*

día nacen más personas. Otro grupo, no obstante, dijo que eran finitos, su explicación fue: como los cabellos de cada persona son finitos, entonces que cada persona cuente los de su cabeza; y como la población del mundo es finita, se concluye que la cantidad de cabellos de todas las personas del mundo es finita.

En definitiva, se observó que la idea de finito está asociada a la posibilidad de hacer el conteo en un determinado conjunto. Y que la noción de infinito, se liga a la imposibilidad de realizar el conteo. También se notó que algunos alumnos, relacionaban la idea del infinito a un número muy grande, como por ejemplo, los granos de arena de todas las playas del mundo.

Por otra parte, los resultados que arrojó el taller número dos (ver anexo2) son los siguientes: se observa que existe aprensión para admitir y utilizar el criterio de biyección, el cual logra comparar un conjunto infinito con uno de sus subconjuntos propios. Hay una negativa para admitir que el conjunto infinito tiene igual cantidad de elementos que uno de sus subconjuntos propios. Con los conjuntos finitos, no obstante, no se presentaba esta resistencia cognitiva, es más, se usa de forma casi natural, podría decirse que es como inherente al individuo. Sin embargo, es interesante el caso de algunos estudiantes donde al parecer la confrontación cognitiva fue ‘’leve’’, es más, siguieron haciendo uso de esta herramienta —criterio de biyección para los conjuntos infinitos— en posteriores reflexiones.

La resistencia cognitiva fue más notoria cuando se planteo situaciones similares, pero esta vez en el conjunto de los números enteros. Se observó en los alumnos que se hallaba muy arraigada la idea intuitiva de que $\mathbb{Z}$ es un conjunto ‘’más grande’’ que $\mathbb{N}$, esto radica en la concepción conjuntista de que $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$. Ahora bien, se subraya que fue insistente llevar el mismo razonar en el caso de conjuntos finitos, y trasladarlo para conjuntos infinitos. En efecto, cuando se analizan conjuntos finitos, se satisface sin inconvenientes el axioma euclidiano, *el todo es mayor que la parte*, es decir que si un conjunto A es subconjunto propio de un conjunto B $(A \subset B)$ con A y B finitos, entonces el número de elementos de A es menor que los de B, $(|A| < |B|)$. Esta concepción, tan arraigada histórica y epistemológicamente, los jóvenes la usaron recurrentemente cuando se les planteo situaciones con los conjuntos infinitos. No obstante, es interesante ver que uno de los grupos, al parecer, admitió en sus razonamientos que subconjuntos propios de $\mathbb{N}$ y $\mathbb{Z}$ tienen la igual cardinal. Plasmaron en sus respuestas la biyección que se puede dar entre $\mathbb{N}$ y $\mathbb{Z}$, y también, la correspondencia entre $\mathbb{N}$ y el conjunto de los números pares en $\mathbb{Z}$.

En lo referente al taller de las *series* (ver anexo 3), se concluye que fue apropiado llevar al aula este concepto sin todo su andamiaje conceptual matemático. La propuesta fue estudiar la noción de serie de la forma más básica posible, para que no obstruyera el concepto de estudio de este trabajo, *el infinito matemático.* En cuanto a los ítems donde se analizó el ejemplo de la serie geométrica, se notó que existía la idea de que la serie no se aproximaba a un número dado. Este obstáculo es importante tenerlo en cuenta para abordar las temáticas del cálculo, donde se analiza los infinitesimales.

Es interesante el hecho de que cuando se analizó la serie armónica se observó que los jóvenes concebían la idea de que el resultado de la suma infinita aumentaba, pero no se advertía que fuese hasta el infinito. Es más, uno de los grupos lo expreso aduciendo que el resultado de la suma no sobrepasaría a 4. Esto quizá se deba a que el incremento de la serie se hace cada vez más lento, a medida que tiende hacia el infinito. Entonces en este taller de las series, se infiere que los estudiantes no perciben el proceso infinito como acabado.

En cuanto al taller que tomó como referencia el relato *el Hotel de Hilbert* (ver anexo 4), se rescata la actividad de debate por parte de los estudiantes. Fue recurrente evocar lo realizado en las otras sesiones para aplicar lo aprendido en este taller concluyente. Llamó la atención que uno de los recursos fue lo trabajado en la sesión donde se estudió y confrontó el axioma euclidiano. Sobresalió un grupo de alumnas que recordaron que se había concluido que a pesar de que los conjuntos de los números pares e impares sean subconjuntos propios de $\mathbb{N}$, tienen igual cardinal que $\mathbb{N}$. Entonces, a partir de ahí utilizaron este hecho para colegir que todos los huéspedes del hotel se podrían reubicar en las habitaciones pares, de este modo quedaban disponibles infinitas habitaciones, la impares.

En suma, se puede afirmar que las ideas intuitivas en el estudiante, generan un obstáculo para admitir la existencia del infinito actual. Y que confrontar su intuición en torno a la idea del infinito, suscita un grado de reflexión matemática para contribuir en la aceptación del infinito en acto. También se puede decir que los estudiantes exteriorizan una resistencia a pasar de sólo concebir el infinito de forma potencial a admitir la idea del infinito actual. Entonces, en consonancia con el análisis histórico y epistemológico del concepto del infinito matemático, se puede sustentar que el estudiante rivaliza con la transformación que permite pasar de una etapa primigenia a una formal de la noción del infinito. Es decir, que el individuo se encuentra encallado en un problema de raíces epistemológicas. Pero no podemos pretender que el estudiante ¡espere!, y que con el paso del tiempo, él quizá, alcance un nivel de conceptualización adecuada. De modo que, es necesaria la planificación de un proceso didáctico que propicie en el individuo al menos un inicio de la conceptualización del concepto del infinito, o mejor dicho, una conciencia del uso de este objeto matemático.

Por último, llama la atención que en los ensayos escritos los estudiantes plasmaron reiteradamente el hecho de que en el conjunto de los números naturales, los subconjuntos de los números pares e impares, tienen igual cardinal que $\mathbb{N}$. Evidentemente, aquí se rompe con el axioma euclidiano que enuncia: *que el todo es menor que la parte*. Finalmente, un apunte interesante de ellos, los estudiantes, fue la siguiente expresión:

Todo sería igual de grande que su mitad

BIBLIOGRAFIA

Aristóteles. (1996). *Física.* Madrid: Consejo superior de investigaciones científicas.

Bruno, G. (1981). *Sobre el infinito universo y los mundos.* Barcelona : Ediciones Orbis, S.A.

Euclides. *Elementos de Euclides.*

Ferreiros, J. (1991). El nacimiento de la teoría de conjuntos. *El nacimiento de la teoría de conjuntos* . Madrid, España: Universidad Autónoma de Madrid.

Iván Castro Chadid, J. H. (2003). Las Paradojas en Matemáticas. *Redalyc* , 25-37.

Marín, M. A. (2008). De la intuición sensible del infinito pontencial a la caracterización lógico-formal del infinito actual: un estudio histórico-epistemológico en la perspectiva de la educación matemática. Santiago de Cali, Colombia: Universidad del Valle.

Martínez, J. L. (2009). Modelos Intuitivos y Esquema Coneptual del Infinito. Salamanca: Universidad de Salamanca.

Sabrina, G. D. (s.f.). Ideas del infinito, percepciones y conexiones en distintos contextos: el caso de estudiantes con conocimientos previos del cálculo. *Ideas del infinito, percepciones y conexiones en distintos contextos: el caso de estudiantes con conocimientos previos del cálculo* . Universidad Simon Bolivar.

Waldegg, G. (1996). Identificación de obstaculos didácticos en el estudio del infinito actual. *Revista Mexicana de Investigación Educativa* , 107-122.

Wallis, J. (1655). *De Sectionibus conicis. Nova Methodo Expositis.* LEON : LICHFIELD.

Zellini, P. (2004). *Breve historia del infinito.* Madrid: Ediciones Siruela.

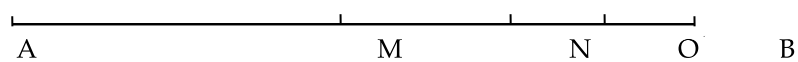
ANEXOS

Anexo 1. Taller de la primera sesión

TALLER NÚMERO UNO

1. Se deja caer una pelota desde 100 cm de altura sobre una superficie horizontal. Cada vez que la pelota llega al suelo, tras caer desde una altura $\boldsymbol{h}$, rebota hasta una altura $\frac{\boldsymbol{h}}{\boldsymbol{2}}$.
   ¿Podrías calcular la distancia total recorrida por la pelota? Explica tu respuesta.
   ¿Podrías decir cuántos rebotes hará la pelota? Explica tu respuesta.[18]

2. Observa la siguiente figura.



Nos muestra un esquema en el que se biseca una vez más el segmento de la derecha que va quedando de la anterior bisección, es decir los puntos ***M, N, O, P***, son los puntos medios de los segmentos ***AB, MB, NB y OB*** respectivamente.
Si se sigue haciendo más y más bisecciones, ¿crees que es posible llegar a una situación en la que un punto de la bisección coincide con el punto ***B*** ? Explica tu respuesta.[19]

3. ¿La cantidad de cabellos que tiene tú cabeza es, ***finita o infinita*** ? Explica la respuesta.

4. ¿La cantidad de cabellos de la cabeza de todas las personas del planeta tierra es, ***finita o infinita***? Explica la respuesta.

5. Imaginemos que tenemos granos de arena en una tapa de gaseosa. ¿La cantidad de granos de arena en la tapa es, ***finita o infinita***? Explica la respuesta.

6. Imaginemos que tenemos granos de arena en una botella. ¿La cantidad de granos de arena en la botella es, ***finita o infinita***? Explica la respuesta.

7. Imaginemos los granos de arena en una playa. ¿La cantidad de granos de arena en la playa es, ***finita o infinita***? Explica la respuesta.

8. Imaginemos los granos de arena de todas las playas del mundo. ¿La cantidad de granos de arena es, ***finita o infinita***? Explica la respuesta.

---

[18] Extraído y modificado del artículo. ¿Cómo piensan los alumnos entre 16 y 20 años el infinito? La influencia de los modelos, las representaciones y los lenguajes matemáticos. Sabrina Garbin. 2005. Revista Relime

9. Qué podríamos decir del ciclo del día y la noche. ¿Es un ciclo **finito o infinito**? Explica tu respuesta.

10. Qué podríamos decir del tiempo de nuestra vida. ¿Es un tiempo **finito o infinito**? Explica tu respuesta.

11. Considere el siguiente conjunto
$$B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$
¿Cuál es el número de elementos de B? ¿Por qué?

12. Considere el siguiente conjunto
$$C = \{-10, -9, -8, -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1\}$$
¿Cuál es el número de elementos de C? ¿Por qué?

13. Consideremos el conjunto de los números naturales N
$N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, . . .\}$
¿Cuántos elementos tiene el conjunto N? ¿Por qué?

14. Consideremos el siguiente conjunto
$D = \{. . . , -10, -9, -8, -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1\}$
¿Cuántos elementos tiene el conjunto D? ¿Por qué?

15. Consideremos el conjunto de los números enteros Z

$Z = \{. . . , -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, . . .\}$
¿Cuántos elementos tiene el conjunto Z? ¿Por qué?

16. Escribe la idea que tienes de lo que es ***finito.*** Explica con ejemplos

17. Escribe la idea que tienes de lo que es ***infinito.*** Explica con ejemplos.

Anexo 2. Taller de la sesión dos

TALLER 2

1. **Consideremos un conjunto *finito***

$$G = \{1, 2, 3, 4, \dots, 96, 97, 98, 100\}$$

a) ¿Cuántos elementos pertenecen a G?
b) ¿Cuántos números pares pertenecen a G?
c) ¿Cuántos números impares pertenecen a G?
d) ¿Cuántos números cuadrados perfectos pertenecen a G?
e) ¿La cantidad de números primos que pertenecen a G es menor, mayor o igual que la cantidad de elementos de G?

2. **Consideremos un conjunto más grande, pero finito H**

$$H = \{1, 2, 3, \dots, 999997, 999998, 999999, 1000000\}$$

a) ¿Cuántos elementos tiene H?
b) ¿Cuántos números pares crees que pertenecen a H?
c) ¿Cuántos números impares crees que pertenecen a H?
d) ¿La cantidad de números cuadrados perfectos que pertenecen a H, es menor, mayor o igual que la cantidad de elementos de H?
e) ¿Cuántos cuadrados perfectos pertenecen a H ?

AHORA PASEMOS A CONJUNTOS INFINITOS:

3. **Consideremos el conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$**

$$\mathbb{N} = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13, \dots\}$$

a) ¿Cuántos elementos tiene $\mathbb{N}$?
b) ¿La cantidad de números pares que pertenecen a $\mathbb{N}$ es menor, mayor o igual que la cantidad de elementos de $\mathbb{N}$?
c) ¿Cuántos números pares crees que pertenecen a $\mathbb{N}$?
d) De acuerdo al texto ''El Diablo de los Números''. Explica una forma de contar el conjunto de los números pares

e) ¿La cantidad de números impares que pertenecen a $\mathbb{N}$ es menor, mayor o igual que la cantidad de elementos de $\mathbb{N}$?
f) ¿Cuántos números impares crees que pertenecen a $\mathbb{N}$?
g) De acuerdo al texto ''El Diablo de los Números''. Explica una forma de contar el conjunto de los números impares

h) Para el caso del conjunto de los números cuadrados perfectos, ¿qué podemos concluir?
i) De acuerdo al texto ''El Diablo de los Números''. Explica una forma de contar el conjunto de los números cuadrados perfectos.

4. **Consideremos el conjunto de los números enteros $\mathbb{Z}$**

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \ \dots\}$$

a) ¿Cuántos elementos tiene $\mathbb{Z}$?
b) Descubre una forma de contar el conjunto de los números enteros $\mathbb{Z}$ haciendo uso del conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$

c) ¿La cantidad de números pares que pertenecen a $\mathbb{Z}$ es menor, mayor o igual que la cantidad de elementos de $\mathbb{Z}$?
d) ¿Cuántos números pares crees que pertenecen a $\mathbb{Z}$?
e) Descubre una forma de contar el conjunto de los números pares de $\mathbb{Z}$ haciendo uso del conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$

f) Para el caso del conjunto de los números impares y los cuadrados prefectos. Qué podemos concluir.
g) Descubre una forma de contar el conjunto de los números impares y los cuadrados prefectos de $\mathbb{Z}$, utilizando el conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$

5. Escribir algunas conclusiones, teniendo en cuenta lo que se trabajo en los puntos anteriores.

Ahora avancemos un poco más. El conjunto de los números naturales es un subconjunto del conjunto de los números racionales positivos, es decir que $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Q}^+$

Ahora bien, a pesar de que $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Q}^+$. *Se puede demostrar que la cantidad de elementos de* $\mathbb{N}$ *y* $\mathbb{Q}^+$ *es igual. Es decir infinito.*

6. **En el diagrama siguiente descubramos cómo podemos contar el conjunto de los números racionales positivos $\mathbb{Q}^+$, haciendo uso del conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$**

1/1	1/2	1/3	1/4	1/5	…
2/1	2/2	2/3	2/4	…	
3/1	3/2	3/3	…		
4/1	4/2	.			
5/1	.	.			
.	.	.			
.	.				

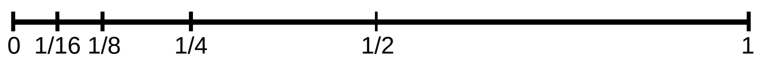
Anexo 3. Taller de la sesión tres

TALLER 3

1. Consideremos el siguiente conjunto A

$$A = \left\{\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \dots, \frac{1}{1024}, \dots, \frac{1}{1048576}, \dots\right\}$$

La siguiente grafica muestra la ubicación en la recta numérica de sólo los cinco primeros elementos del conjunto anterior
<u>NOTA:</u> No se ubican más puntos en el segmento porque sería difícil representarlos en el pequeño espacio



PREGUNTA: ¿Crees que es posible llegar a una situación en la que un punto de la bisección coincide con el punto $\mathbf{0}$? Explica tu respuesta.

2. ***<u>NOTA:</u> Para dar respuesta a la siguiente pregunta tener en cuenta la lectura del texto "El Diablo de los Números"***
Teniendo en cuenta el anterior conjunto A
Considera la siguiente suma:

$$\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{8}} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{16}} + \cdots + \cdots$$

<u>Recomendación:</u> *Suma muchas, muchas los valores de la suma y utiliza la calculadora. Y observa el valor al cual se aproxima la suma*

PREGUNTA: ¿Cuál crees que es el valor de esta suma? Explica tu respuesta.

3. Considera la siguiente ecuación:

$$\boldsymbol{y} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2^1}} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2^2}} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2^3}} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2^4}} + \cdots + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}^{\boldsymbol{n}}} + \cdots$$

Podrías decir para qué valor de $\boldsymbol{n}$ resulta $\boldsymbol{y} = \mathbf{1}$. Explica tu respuesta.
<u>Recomendación:</u> *Ten en cuenta el ejercicio anterior y de ahí saca el valor que toma* $\boldsymbol{n}$

4. Se deja caer una pelota desde $\mathbf{100}\ \boldsymbol{cm}$ de altura sobre una superficie horizontal. Cada vez que la pelota llega al suelo, tras caer desde una altura $\boldsymbol{h}$ **,** rebota hasta una altura $\frac{\boldsymbol{h}}{\mathbf{2}}$.
<u>NOTA:</u> *Este ejercicio se había hecho en el taller uno. Pero aquí se quiere aproximar aún más el recorrido de la pelota. Se recomienda utilizar la calculadora para hacer muchas, muchas sumas del recorrido y de esta manera observar el valor al cual se aproxima la suma*
PREGUNTA: ¿Calcula la distancia total recorrida por la pelota? Explica tu respuesta.
¿Cuántos rebotes da la pelota? Explica tu respuesta.

5. Consideremos el siguiente conjunto

$$\boldsymbol{B} = \left\{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}, \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}, \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}, \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{5}}, \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{6}}, \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{7}}, \dots\right\}$$

a) ¿Cuál es la suma de los doce primeros términos?

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}$$

b) Si seguimos calculando la suma cada vez con más elementos del conjunto *(incluso considera que sean infinitos elementos del conjunto)* ¿cuál crees que sería el resultado? Explica tu respuesta

6. Comparar los siguientes conjuntos y concluir por qué el resultado de la suma de los elementos es diferente. Escribir las conclusiones.
Nota: ***Recuerda que en los ejercicios 2 y 5.b. se calculo la suma***

$$\boldsymbol{A}=\left\{\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\frac{1}{16},\frac{1}{32},\frac{1}{64},\frac{1}{128},\dots\right\}$$

$$\boldsymbol{B}=\left\{\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5},\frac{1}{6},\frac{1}{7},\dots\right\}$$

7. Consideremos el siguiente conjunto

$$\boldsymbol{C}=\left\{2^1,2^2,2^3,2^4,2^5,2^6,\dots.\right\}$$

a) Calcular la suma de los diez primeros términos
$$2^1+2^2+2^3+2^4+2^5+2^6+2^7+2^8+2^9+2^{10}$$

b) Si seguimos calculando la anterior suma cada vez con más elementos del conjunto *(incluso considera el caso en que sean infinitos elementos en la suma)*
PREGUNTA: ¿cuál crees que sería el resultado? Explica tu respuesta

Anexo 4. Taller de la sesión cuatro

EL HOTEL DE HILBERT[20]

Los conjuntos infinitos tienen siempre un lado atractivo: atentan contra **la intuición**.

Supongamos que hubiera un número infinito de personas en el mundo. Y supongamos también que hay un hotel, en una ciudad, que contiene infinitas habitaciones. Estas habitaciones están numeradas, y a cada una le corresponde un número natural. Así entonces, la primera lleva el número 1, la segunda el número 2, la tercera el 3, etc. Es decir: en la puerta de cada habitación hay una placa con un número, que sirve de identificación.
Ahora, supongamos que todas las habitaciones están ocupadas y sólo por una persona. En un momento determinado, llega al hotel un señor con cara de muy cansado. Es tarde en la noche y todo lo que este hombre espera es terminar rápido con el papelerío para irse a descansar. Cuando el empleado de la recepción le dice: "lamentablemente no tenemos ninguna habitación disponible ya que todas las habitaciones están ocupadas", el recién llegado no lo puede creer. Y le pregunta:

- Pero cómo... ¿No tienen ustedes infinitas habitaciones?

- Sí -responde el empleado del hotel.

- Entonces, ¿cómo me dice que no le quedan habitaciones disponibles?

- Y sí, señor. Están todas ocupadas.

- Vea. Lo que me está contestando no tiene sentido porque el hotel tiene infinitas habitaciones

Y aquí conviene que ustedes piensen la respuesta.

1. ¿Puede ser correcta la respuesta del recepcionista "no hay más lugar", si el hotel tiene infinitas habitaciones?
2. ¿Cómo haría el recepcionista para **reubicar** a los huéspedes de tal suerte que cada uno tenga una habitación y nadie comparta su habitación con otro?

NOTA: En una habitación sólo puede hospedarse una persona

Ahora bien, algunos problemas más:

3. Si en lugar de llegar un pasajero, llegan dos, ¿qué sucede? ¿Cuál sería la solución al problema?
4. ¿Y si en lugar de dos, llegan cien?
5. ¿Y si llegaran infinitas personas? ¿Qué pasaría en ese caso? ¿Cómo solucionar el problema?

CONCLUSIÓN:

Los conjuntos infinitos tienen propiedades muy peculiares, pero, entre otras, la que atenta contra la **intuición** es que un subconjunto "más pequeño", "contenido" dentro de un conjunto, puede contener el mismo número de elementos que el *todo*.

[20] Tomado de http: //www.educar-argentina.com.ar/ENE2007/educ181.htm

Anexo 5. Institución Educativa Comercial del Norte

Institucion Educativa
Comercial del Norte
Popayan

Anexo 6. Estudiantes en una de la sesiones de trabajo

Anexo 7. Profesor brindando asesoría a los estudiantes

Anexo 8. Capítulo nueve del texto *El Diablo de los Números*

La novena noche

Robert soñaba que soñaba. Ya se había acostumbrado. Siempre que en los sueños le ocurría algo desagradable, por ejemplo encontrarse con un pie encima de una piedra resbaladiza en medio de un río de fuerte corriente y no poder avanzar ni retroceder, pensaba con rapidez: Espantoso, pero no es más que un sueño.

Pero luego cogió la gripe, y cuando tuvo que quedarse todo el día en la cama con fiebre ese truco no le sirvió de mucho, porque Robert sabía muy bien que los sueños que da la fiebre son los peores. Se acordaba de que, una vez que había estado enfermo, había ido a parar a una erupción volcánica. Montañas que escupían fuego lo habían disparado hacia el cielo, y había estado a punto de caer lentamente, con espantosa lentitud, desde allí arriba al centro de las fauces del volcán... Prefería no pensar en ello. Por eso intentaba mantenerse despierto, aunque su madre siempre decía:

-Lo mejor es que duermas y sudes la gripe. ¡No leas tanto! No es sano.

Tras haberse leído aproximadamente doce tebeos, estaba tan cansado que se le cerraban los ojos.

Pero lo que soñó entonces fue extrañísimo. So-

ñó que tenía gripe y estaba en la cama, y a su lado estaba sentado el diablo de los números.

Ahí está el vaso de agua en la mesita, pensó. Ardo. Tengo fiebre. Creo que ni siquiera me he dormido.

-¿Ah, sí? -dijo el anciano-. ¿Y qué pasa conmigo? ¿Estás soñando conmigo, o estoy realmente aquí?

-Tampoco lo sé -dijo Robert.

-Es igual. En cualquier caso, quería hacerte una visita porque estás enfermo. Y cuando se está enfermo hay que quedarse en casa, y no hacer excursiones al desierto o contar liebres en campos de patatas. Así que pensé: Vamos a pasar una velada tranquila, sin grandes trucos. Para no aburrirnos, he hecho venir a unos cuantos números. Ya sabes que no puedo vivir sin ellos. Pero no te preocupes, son enteramente inofensivos.

-Eso dices siempre -dijo Robert.

Llamaron a la puerta, y el diablo de los números gritó: *¡Adelante!* Enseguida entraron desfilando, y de tal manera, todos a una, que el dormitorio de Robert estuvo hasta los topes en un abrir y cerrar de ojos. Le asombró cuánta gente cabía entre la puerta y la cama. Los números pasaban ante él como ciclistas de competición o corredores de maratón, porque todos llevaban sus números en camisetas blancas. El cuarto era bastante pequeño, pero cuantos más números se apretujaban más largo parecía. La puerta se fue alejando cada vez más, hasta que apenas fue posible distinguirla al final de un recto pasillo.

Los números anduvieron por ahí riendo y charlando, hasta que el diablo de los números gritó como un sargento:

-¡Atención! ¡A formar!

Enseguida se pusieron en una larga fila, con la espalda contra la pared, el uno primero y todos los demás junto a él.

-¿Dónde está el cero? -preguntó Robert.

-¡El cero, un paso al frente! -rugió el diablo de los números.

Se había escondido debajo de la cama. Salió arrastrándose y dijo con timidez:

-Pensaba que no me necesitarían. ¡Me siento tan mal!, creo que he cogido la gripe. Ruego humildemente que se me conceda un permiso por enfermedad.

-¡Fuera! -gritó el anciano, y el cero volvió a meterse a rastras bajo la cama de Robert.

»Bueno, es algo especial, este cero. Siempre quiere figurar. Pero los otros... ¿te has dado cuenta de lo obedientes que son?

Miró complacido a los números normales, ordenados en fila:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	...

-¡Segunda fila, a formar! -gritó, y enseguida afluyeron nuevos números, armando gran tumulto y alboroto, hasta que al fin estuvieron en el orden correcto:

Estaban justo delante de los otros en la habitación -si es que aún podía llamársele habitación, porque entre tanto se había convertido en un tubo de longitud imprevisible-, y todos llevaban camiseta roja.

-Ajá -dijo Robert-. Estos son los impares.

-Sí, pero adivina cuántos son, comparados con los de camiseta blanca que están alineados contra la pared.

-Está claro -dijo Robert-. Uno de cada dos números es impar. Así que hay la mitad de rojos que de blancos.

-¿Crees entonces que hay el doble de números normales que de impares?

-Claro.

El diablo de los números rió, pero no fue una risa amable, a Robert casi le pareció sarcástica.

-Me veo obligado a decepcionarte, querido -dijo el anciano-. Hay exactamente el mismo número de cada clase.

-Eso no puede ser -exclamó Robert-. *Todos* los números no pueden ser exactamente el mismo número que *la mitad* de ellos. ¡Eso es absurdo!

-Atiende, te lo demostraré.

Se volvió hacia los números y rugió:

-¡Primera y segunda fila, estrecharse las manos!

-¿Por qué les gritas de esa manera? -dijo Robert enfadado-. Esto parece el patio de un cuartel. ¿No podrías ser un poquito más cortés con ellos?

Pero su protesta se esfumó, porque cada uno de los blancos había dado la mano a uno de los rojos, y de pronto estaban por parejas, como soldados de plomo:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	...
1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	...

-¿Ves? Para cada número corriente desde el uno hasta allá fuera hay un número impar, también desde el uno hasta allá fuera. ¿O puedes enseñarme un solo rojo que se haya quedado sin pareja blanca? Así que hay infinitos números normales, y el mismo número de impares. Es decir, infinitos.

Robert reflexionó un rato.

-¿Significa eso que si divido infinito entre dos me sale dos veces infinito? ¡Entonces el todo sería igual de grande que su mitad!

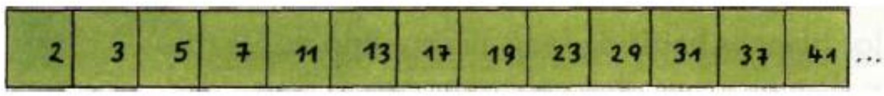
-Sin duda -dijo el diablo de los números-. Y no sólo eso.

Sacó un silbato del bolsillo y silbó.

Enseguida, del fondo de la infinita habitación salió una nueva columna. Esta vez llevaban camisetas verdes, y estuvieron yendo de un lado para otro hasta que el viejo maestro gritó:

-¡Tercera fila, a formar!

No pasó mucho tiempo antes de que los verdes se pusieran en perfecto orden delante de los rojos y los blancos:



-Ésos son los números de primera -constató Robert.

El anciano se limitó a asentir. Luego volvió a tocar su silbato, cuatro veces seguidas. En el cuarto de Robert se desencadenó un verdadero infierno. ¡Una pesadilla! ¡Quién hubiera pensado que en un solo cuarto, aunque entre tanto se hubiera hecho tan largo como el camino de un cohete a la Luna, tuviera sitio tan espantosa cantidad de números! Ya casi no se podía respirar. Robert se sentía como si su cabeza se hubiera convertido en una ardiente bombilla.

-¡Basta! -gritó-. No puedo más.

-No es más que tu gripe -dijo el diablo de los números-. Seguro que mañana vuelves a estar mejor.

Luego, siguió dando órdenes:

-¡Todos aquí! ¡Las filas cuatro, cinco, seis y siete, a formar! ¡Aprisa, por favor!

Robert abrió los ojos, que ya se le estaban cerrando, y vio siete clases distintas de números, con camisetas blancas, rojas, verdes, azules, amarillas, negras y rosas, correctamente ordenadas

«¡Adelante!», gritó el diablo de los números. Enseguida los números entraron desfilando, de tal modo que en un abrir y cerrar de ojos el dormitorio de Robert estuvo lleno hasta los topes.

unas tras otras, en pie en su infinitamente alargado dormitorio:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	...
1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	...
2	3	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37	41	43	47	...
1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377	610	...
1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	66	78	91	105	120	...
1	2	6	24	120	720	5040	40320		362880		3628800		39916800		...

Ya casi no pudo leer los últimos números sobre las camisetas rosas, porque eran tan largos que apenas cabían en el pecho de quienes los llevaban.

-Crecen a una velocidad terrorífica -dijo Robert-. No puedo seguirlos.

-¡Pum! -dijo el anciano-. Los números con exclamaciones.

$$3! = 1 \times 2 \times 3$$
$$4! = 1 \times 2 \times 3 \times 4$$

»Etcétera. Esto va más deprisa de lo que crees. Pero ¿qué pasa con los otros? ¿Los conoces?

-A los rojos ya los teníamos, son los impares, y los verdes son los números de primera. Los azules... no sé, pero también me resultan familiares.

-¡Piensa en las liebres!

-Ah, sí. Son los Bonatschi. Y probablemente los amarillos sean los triangulares.

-No está mal, mi querido Robert. Con gripe o sin gripe, estás haciendo progresos como aprendiz de brujo.

-Bueno, y los negros no son más que números saltarines. 2^2, 2^3, 2^4, etcétera.

-Y hay el mismo número de cada clase -dijo el diablo de los números.

-Infinitos -suspiró Robert-. Eso es lo terrible. Qué multitud.

-Filas uno a siete, ¡rompan filas! -rugió el anciano maestro.

Y se puso en marcha un nuevo arrastrar y apretujar y empujar y patear y desplazar. Sólo cuando todos los números volvieron a estar fuera se produjo un delicioso silencio, y el cuarto de Robert volvió a ser pequeño y a estar vacío, como había estado antes.

-Ahora es cuando necesito un vaso de agua y una aspirina -dijo Robert.

-Y descansa bien, para poder volver a tenerte en pie mañana.

El diablo de los números le tapó incluso.

-Sólo tienes que mantener los ojos abiertos -dijo-. El resto te lo escribiré en el techo.

-¿Qué resto?

-Oh -dijo el anciano, que ya volvía a agitar su


0
1/2
1

«Ahora necesito un vaso de agua y una aspirina», dijo Robert. Pero el anciano ya estaba agitando otra vez su bastón.

bastón-, hemos expulsado a las filas porque arman demasiado alboroto y meten demasiada suciedad en la habitación. Ahora les toca el turno a las series.

-¿Series? ¿Qué clase de series?

-Bueeeno -dijo el diablo de los números-, los números no siempre forman como soldados de plomo. ¿Qué pasa cuando se unen? Quiero decir, cuando se les suma.

-No entiendo -gimió Robert.

Pero el anciano ya había escrito la primera serie en el techo de la habitación.

-¿No has dicho que debo descansar? -preguntó Robert.

-No te pongas así. Sólo tienes que leer lo que pone:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}\ldots=$$

-¡Son quebrados! -exclamó indignado Robert-. ¡Al diablo con ellos!

-Perdona, pero la verdad es que son muy sencillos. ¿No te lo parece a ti?

-Un medio -leyó Robert- más un cuarto más un octavo más un dieciseisavo, etcétera. Arriba hay siempre un uno, y abajo están los números saltarines de la serie del dos, los de la camiseta negra: 2, 4, 8, 16... Ya sabemos cómo sigue.

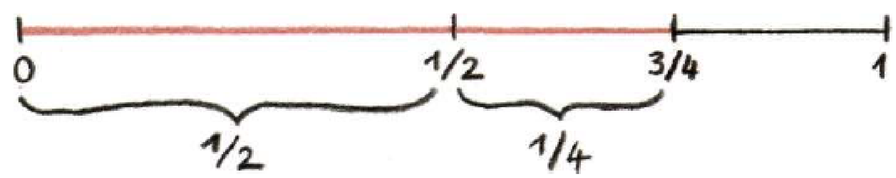
-Sí, pero ¿qué sale si sumamos todos esos quebrados?

-No lo sé -repuso Robert-. Como la serie no termina nunca, probablemente salga una cantidad infinita. Pero por otra parte 1/4 es menos que 1/2, 1/8 es menos que 1/4, etcétera... así que lo que añado es cada vez más pequeño.

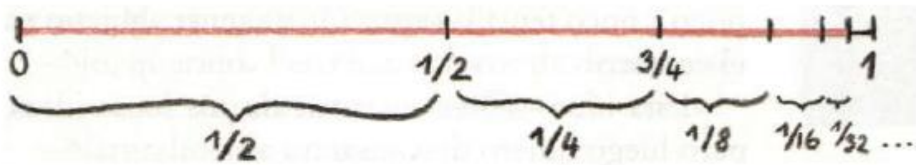
Las cifras desaparecieron del techo. Robert se quedó mirando fijamente hacia arriba y no vio más que una larga raya:

-¡Ajá! -dijo al cabo de un rato-. Creo que comprendo. Empieza con 1/2. Luego sumo la mitad de 1/2, es decir 1/4.

Y lo que decía apareció en el techo del cuarto, negro sobre blanco:



-Luego, sencillamente, sigo adelante, añadiendo siempre una mitad. La mitad de 1/4 es 1/8, la mitad de 1/8 es 1/16, etcétera. Los quebrados que se añaden son cada vez más pequeños, hasta que son tan diminutos que ya no puedo verlos, de forma parecida a como sucedió aquella vez con el chicle compartido.



-Y puedo seguir así hasta que me salgan canas verdes. Así llegaré *casi* hasta el uno, pero nunca del todo.

-Sí puedes llegar. Sólo tienes que seguir hasta el infinito.

-Eso no me apetece. Al fin y al cabo estoy en cama con gripe.

-Aun así -dijo el anciano-, ahora sabes cómo sigue y qué sale. Porque *tú* puedes cansarte, pero los números nunca.

Arriba en el techo la raya desapareció, y se pudo leer:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}\cdots=1$$

-¡Fantástico! -exclamó el diablo de los números-. ¡Magnífico! ¡Pero ahora sigue!

-Estoy cansado. ¡Tengo que dormir!

-Pero ¿qué es lo que quieres? -preguntó el anciano-. Ya estás durmiendo. Al fin y al cabo estás soñando conmigo, y sólo se puede soñar cuando se duerme.

Robert tuvo que aceptar que era cierto, aunque poco a poco tenía la sensación de tener agujetas en el cerebro.

-Está bien -dijo-, *una* más de tus locas ideas, pero luego quiero descansar.

El diablo de los números alzó su bastoncillo y chasqueó los dedos. En el techo volvieron a aparecer unos cuantos números:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \dots =$$

-Exactamente lo mismo que antes -exclamó Robert-. También puedo alargar esta serie hasta cuando quiera. Cada nuevo número será menor que el anterior. Probablemente vuelva a salir uno.

-¿Tú crees? Entonces, miremos la cosa con un poquito más de atención. Cogeremos los dos primeros números.

Ahora, en el techo tan sólo estaban los dos primeros miembros de la serie:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$$

-¿Cuánto es esto?

-No lo sé -murmuró Robert.

-No te hagas más tonto de lo que eres -renegó

el diablo de los números-. ¿Qué es más: la mitad o un tercio?

-La mitad, naturalmente -gritó enfadado Robert-. ¿Me tomas por estúpido?

-No, querido. Pero haz el favor de decirme sólo una cosa: ¿qué es más, un tercio o un cuarto?

-Naturalmente un tercio.

-Bueno. Tenemos dos quebrados, de los que cada uno es más que un cuarto, ¿y qué son dos cuartos?

-Qué pregunta más tonta, dos cuartos son la mitad.

-¿Lo ves? Así que

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \quad \text{es más que} \quad \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$$

»Y si ahora cogemos los próximos cuatro miembros de la serie y los sumamos, vuelve a salir más de la mitad:

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7}$$

-Eso es demasiado complicado para mí -rezongó Robert.

-¡Tonterías! -gritó el diablo de los números-. ¿Qué es más: un cuarto o un octavo?

-Un cuarto.

-¿Qué es más: un quinto o un octavo?

-Un quinto.

-Correcto. Y con el sexto y el séptimo pasa igual. De los cuatro quebrados

$$\frac{1}{4},\ \frac{1}{5},\ \frac{1}{6},\ \frac{1}{7}$$

cada uno de ellos es más que un octavo. ¿Y qué son cuatro octavos ?

A regañadientes, Robert respondió:

-Cuatro octavos son exactamente 1/2.

-Magnífico. Ahora tenemos

$$\underbrace{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}_{\text{más que } 1/2}+\underbrace{\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}}_{\text{más que } 1/2}+\underbrace{\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\cdots\frac{1}{15}}_{\text{más que } 1/2}+\frac{1}{16}\cdots$$

»Y así sigue. Hasta el infinito. Verás que ya los seis primeros miembros de esta serie dan más de 1 si se les suma. Y así podríamos seguir cuanto quisiéramos.

-Por favor, no -dijo Robert.

-Y *si* siguiéramos (no te preocupes, no vamos a hacerlo), ¿adónde iríamos a parar?

-Probablemente al infinito -dijo Robert-. ¡Es una cosa endemoniada!

-Sólo que llevaría bastante tiempo -explicó el diablo de los números.

»Hasta haber llegado al primer millar, y aunque calculáramos a enorme velocidad, creo que necesitaríamos hasta el fin del mundo. Así de lento aumenta la serie.

-Entonces dejémoslo -dijo Robert.

-Entonces dejémoslo.

La escritura del techo se borró muy lentamente, el viejo maestro desapareció sin ruido, el tiempo pasó. Robert despertó porque el sol le hacía cosquillas en la nariz. Cuando su madre le tocó la frente y dijo «¡Gracias a Dios, la fiebre ha remitido!», ya había olvidado lo fácil que podía ser deslizarse del uno al infinito.