LA ENSEÑANZA DEL ÁLGEBRA A TRAVÉS DE TALLERES LÚDICOS

Universidad del Cauca

VICTOR ALFONSO PÉREZ SALAMANCA

UNIVERSIDAD DEL CAUCA
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES, EXACTAS Y DE LA EDUCACIÓN
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS
POPAYÁN
2013

LA ENSEÑANZA DEL ÁLGEBRA A TRAVÉS DE TALLERES LÚDICOS

VICTOR ALFONSO PÉREZ SALAMANCA

Informe final de la Práctica pedagógica, requisito parcial para optar al título de Licenciado en Matemáticas

Directora: Ph.D GABRIELA INÉS ARBELÁEZ ROJAS

UNIVERSIDAD DEL CAUCA
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES, EXACTAS Y DE LA EDUCACIÓN
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS
POPAYÁN
2013

NOTA DE ACEPTACIÓN

El presente informe final de la
Práctica Pedagógica fue aprobado(a)
Por la asesora y
Respectivo evaluador

Yeny Leonor Rosero Rosero

Vo. Bo. Yeny Leonor Rosero Rosero
Coordinadora Licenciatura en Matemáticas

Vo. Bo. Gabriela Inés Arbeláez Rojas
Directora

Vo. Bo. Ángel Hernán Zúñiga Solarte
Evaluador

AGRADECIMIENTOS

Dedico el presente informe final de la Práctica Pedagógica a mi madre ANITA SALAMANCA por estar siempre a mi lado por su constante apoyo y consejos que he recibido.

A la directora Ph.D GABRIELA INÉS ARBELÁEZ ROJAS por su constante aporte en la finalización del presente informe final.

Al evaluador Mg. ÁNGEL HERNÁN ZÚÑIGA SOLARTE, por su colaboración en la finalización del presente informe final.

A mi hermana DANIELA OSORNO por estar siempre presente, apoyándome.

A todas aquellas personas que de una u otra forma colaboraron en la realización del presente informe final de la Práctica Pedagógica.

Tabla de contenido

TABLA DE ILUSTRACIONES

PRESENTACIÓN

El presente informe del trabajo realizado en el aula tiene como objetivo exponer las actividades realizadas durante la Práctica Pedagógica que se desarrolló a lo largo de cuatro semestres, con una parte teórica y una intervención en el aula que se llevó a cabo en el Colegio Champagnat de Popayán con los estudiantes de grado noveno y décimo. En la Práctica Pedagógica I, se hizo acopio de los elementos teóricos que guiaron la intervención en el aula. En la Práctica Pedagógica II, se construyó el anteproyecto para desarrollar la práctica de intervención en el aula. En la Práctica Pedagógica III, se realizó esta intervención, la cual se desarrolló en torno a talleres lúdicos en donde se observaba los procedimientos seguidos por los estudiantes y todas estas experiencias se plasmaban en unas bitácoras que se convirtieron en la reflexión de nuestro trabajo en el aula. Finalmente en la Práctica Pedagógica IV se sistematizó todo el proceso en un documento que es el que actualmente estoy presentando.

En el capítulo 1 se presenta la institución en la cual se llevó a cabo el proyecto y el grupo de estudiantes con los cuales tuve la oportunidad de interactuar. En el capítulo 2 se expone el marco teórico en el cual está inscrito mi proyecto de aula, tomando como eje central el impacto de los juegos en matemáticas como actividad lúdica. En el capítulo 3, se habla sobre la metodología y el diseño de los materiales con los que intervine en el aula. En el capítulo 4 se presentan las bitácoras, que recogen las experiencias vividas con los estudiantes del colegio.

Finalmente en el último capítulo expongo unas conclusiones sobre lo que significó todo este proceso de la práctica pedagógica.

El propósito con que se elaboró el proyecto aula, es el de rescatar la resolución de problemas como una de las actividades importantes para implementar en el aula, así como los talleres lúdicos, siguiendo el modelo del *Proyecto Matemática Recreativa de Colombia Aprendiendo* (ver metodología).

1. INSTITUCIÓN DONDE SE DESARROLLÓ EL PROYECTO AULA

El proyecto de aula llamado, “*La enseñanza del álgebra a través de talleres lúdicos”*, se desarrolló en el Colegio Champagnat de Popayán. El Colegio es una institución mixta de carácter privado, comprometidos con la de, “*formar excelentes cristianos y comprometidos ciudadanos*”. Su metodología, designada como “*pedagogía de la presencia*”, en ella exige que los profesores les brinden un acompañamiento continuo a los estudiantes aún fuera de las clases.

El colegio se fundó el 27 de septiembre del año 1932, bajo la Comunidad de los Hermanos Maristas, y ellos le dieron la apertura a la ciudad de Popayán con el nombre, “*Colegio Champagnat*”. El primer rector del colegio es el Hno. Acacio de origen francés, que estuvo en los periodos1932 -1937. Las primeras clases se iniciaron el día 10 de octubre de 1932, con 40 alumnos distribuidos en tres secciones: primaria, media y superior.

A comienzos de la década de los años 60, el colegio Champagnat, se trasladó a la antigua Villa Marista o Convento de San Camilo, y en 1967 se estrenó la actual sede sobre la carrera 9ª. No. 5 N- 51.(Champagnat, 2011)

El colegio, en cuanto a las matemáticas tiene un gran prestigio por realizar encuentros Nacionales de Matemáticas a partir del año 2000. En los periodos (2002-2005), se efectúan Encuentros Nacionales e Internacionales en el área de Matemáticas. En el año 2006, se realizan encuentros Nacionales e Internacionales en las áreas, español, literatura, matemáticas y religión.

El grupo de estudiantes que se trabajó mi proyecto de aula, fueron de grado noveno y décimo (ver ilustración 1), en promedio fueron 9 estudiantes. El desarrollo de las 5 sesiones fueron extra clases, el grupo de estudiantes no fueron estables debido a las actividades que ellos realizaban comprometidos con su institución.

2. MARCO TEÓRICO

La matemática a lo largo de la historia, ha sido una disciplina fundamental para los avances tecnológicos, desarrollos de programas en los computadores, aplicaciones en la física y química, etc.

Parafraseando a Miguel de Guzmán (s.f.) las matemáticas, en efecto, es un método práctico para generar pensamiento, y a la vez les ha servido a muchos filósofos de distintas épocas, iniciando por los pitagóricos, esto se puede notar por las exploraciones de la esencia y la estructura del universo, y que hoy en día manifiesta profundas conexiones con el pensamiento de tipo filosófico.

Por otro lado los juegos en las matemáticas, ante todo contribuyen en gran parte al desarrollo del pensamiento e intelecto a los seres humanos, por esta razón les crean retos, análisis intelectual y verdaderos rompecabezas.

Asimismo, este autor también resalta, que la matemática tiene sabor a juego, puesto que en ella, *presenta el mismo tipo de estímulos de actividad que se da en el resto de los juegos intelectuales.*

Como dice Miguel de Guzmán, ¿Dónde termina el juego y donde comienza la matemática seria?, esta es una pregunta muy capciosa como lo dice él. También hay que dar a conocer que la matemática tiene sabor a juego, a menos que la gente no la vea como una disciplina aburrida y difícil de entender, y sin tener nada que ver con los juegos.

Por otro lado, los juegos generaron impacto para el desarrollo de las matemáticas, en la historia antigua, por ejemplo en 1735 Leonard Euler (1707-1783) escucho hablar del problema de los siete puentes de Konigsberg; el problema se trata de atravesar los siete puentes, con la condición que podía pasar por cada uno de los puentes una sola vez, el gran espíritu matemático de Euler, contribuyo con la solución, con una nueva rama de la matemática denominada la teoría de grafos, que hoy en día se utiliza en las aplicaciones en las redes informáticas.

Análogamente al problema de los siete puentes, nacieron otros juegos como: el cruce de un rio del pastor, la oveja, la col y el lobo; los maridos celosos, entre otros. Juegos como los mencionados anteriormente, contribuyeron de una o de otra forma el desarrollo de las matemáticas.

Un juego en matemáticas sirve para, pensar, conjeturar, analizar y resolver problemas cuya solución sean difíciles de obtener; los problemas difíciles son los que generan conocimiento, y a su vez se convierte en verdaderos retos en matemáticas. No tiene importancia solucionar problemas cuya solución sea fácil de resolver, los problemas difíciles son los interesantes. "*El juego bueno, el que no depende de la fuerza o maña físicas, el juego que tiene bien definida sus reglas y que posee cierta riqueza de movimientos, suele prestarse muy frecuentemente a un tipo de análisis intelectual cuyas características son muy semejantes a las que presenta el desarrollo matemático."* (Guzmán, s.f., pág. 1)

Los cuadrados mágicos, es un claro ejemplo de un juego matemático, referente a la rama de la aritmética, en donde se pone de manifiesto la adivinación de números, cuya suma sean iguales tanto en las diagonales, filas y columnas. Es ahí donde se genera un verdadero reto para los estudiantes que desconocen esta disciplina. Análogamente los cuadrados mágicos también generaron impacto en el desarrollo matemático.

La lógica da lugar para el desarrollo de las matemáticas, no se sabría que les pasaría a las matemáticas sin las paradojas; las paradojas llaman la atención por su estructura y la forma de argumentación que desarrolla el pensamiento y el lenguaje matemático.

En vista de lo anterior, pondré de manifiesto la importancia que radica los juegos en la matemática para así tener recursos metodológicos que me facilite situaciones problemas que generen impacto en los estudiantes. Las situaciones problemas de este proyecto de aula (ver Anexo 1) son de carácter numérico, cuyas soluciones son con sistemas algebraicos.

2.1. Lineamientos Curriculares del Ministerio de Educación Nacional

El Ministerio de Educación Nacional con estos lineamientos pretende dar recomendaciones a instituciones de carácter educativo, de cómo diseñar programas curriculares por áreas de conocimiento. Asimismo en estos lineamientos traen las Estructuras Curriculares, que están en torno a los estándares importantes para los desempeños de los estudiantes en el área de matemáticas.

Las Estructuras Curriculares, traen los siguientes tipos de pensamientos los cuales son:

- El pensamiento numérico y sistemas de números
- El pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos
- El pensamiento espacial y sistemas geométricos

- El pensamiento métrico y sistemas de medidas

- El pensamiento aleatorio y sistemas de datos

Para el proyecto aula tendré en cuenta, el pensamiento numérico y los sistemas algebraicos, con ellos pondré en juego que los estudiantes recurran al conteo, por ejemplo *cuanto aumento o cuanto disminuyo*. Además al planteamiento de soluciones mediante ecuaciones. Asimismo, que ellos hagan cálculos mentalmente y desarrollar habilidades para solucionar problemas en distintos contextos.

Según estos lineamientos sobre el pensamiento numérico, "*estarían constituidos por el uso significativo de los números y el sentido numérico que suponen una comprensión profunda del sistema de numeración decimal, no sólo para tener una idea de cantidad, de orden, de magnitud, de aproximación, de estimación, de las relaciones entre ellos, sino además para desarrollar estrategias propias de la resolución de problemas.*" (M.E.N, 1998). Asimismo este pensamiento, "*requiere del apoyo de sistemas matemáticos más allá de los numéricos como el geométrico, el métrico, el de datos; es como si este tipo de pensamiento tomara una forma particular en cada sistema*" Ibíd. Para el caso de los sistemas algebraicos, están en marco de los sistemas de la Renovación Curricular de estos lineamientos.

La Resolución de Problemas es el eje central de la propuesta Curricular de estos Lineamientos, puesto que ayuda a la actividad matemática como tal. Con la resolución de problemas los estudiantes van adquiriendo gusto por las matemáticas, van desarrollando su capacidad mental, *"van aumentando su capacidad de comunicarse matemáticamente y su capacidad para utilizar procesos de pensamiento de más alto nivel." Ibíd.*

También estos lineamientos destacan que unos de los autores que más ha trabajado en el tema de resolución de problemas es George Polya.

George Polya (1887-1985), es un matemático que nació en Budapest, Hungría. Trabajó en temas matemáticos relacionados: Series, Teoría de números, Geometría, Álgebra, Análisis Matemático, Combinatoria y Probabilidad.

"En sus últimos años, invirtió un esfuerzo considerable en intentar caracterizar los métodos generales que usa la gente para resolver problemas, y para describir cómo debería enseñarse y aprender la manera de resolver problemas."(Wikipedia). Escribió tres libros sobre la enseñanza de las matemáticas:

1) *Como Plantear y Resolver Problemas*
2) *Matemáticas y razonamiento plausible, Volumen I: Inducción y analogía en matemáticas*
3) *Matemáticas y razonamiento plausible, Volumen II: Patrones de inferencia plausible.*

Para el proyecto aula, me basaré en (Polya, 1965) con su libro "Cómo plantear y resolver problemas". Él explica los siguientes pasos:

- Comprender el problema

- Concebir un Plan
- Ejecución del Plan
- Examinar la solución obtenida

Comprender un problema. Es un paso muy importante en todo problema ya sea de física, química, estadística, economía, etc. Pues si el estudiante no logra entender lo que pide el problema difícilmente lo logra resolver.El autor nos recomienda los siguientes cuestionamientos, ¿Cuál es la incógnita? ¿Cuáles son los datos? ¿Cuál es la condición?

Concebir un Plan. Es el siguiente paso, después de la comprensión del problema, con ello se pone en juego la relación entre los datos del problema planteado con las incógnitas

Ejecución del plan. Es el desarrollo del problema mediante operaciones algoritmos matemáticos.

Examinar la solución obtenida. Es la comprobación del problema, sería necesario resolverlo de otra forma, para saber si los resultados coinciden.

Para la ejecución de los talleres (ver anexo 1) con los estudiantes de la institución, me basaré en Polya en su libro antes mencionado, solamente los siguientes cuestionamientos:

- ¿Cuál es la incógnita? ¿Cuáles son los datos? ¿Cuál es la condición? ¿Es la condición suficiente para determinar la incógnita?

- ¿Se ha encontrado un problema semejante? ¿O ha visto el mismo problema planteado en forma diferente?
- ¿Conoce un problema relacionado con este?
- ¿Podría enunciar el problema en otra forma? ¿Podría plantearlo en forma diferente nuevamente?
- Si no puede resolver el problema propuesto, trate de resolverlo primero algún problema similar
- Al ejecutar su plan de la solución, compruebe cada uno de los pasos
- ¿Puede usted verificar el resultado? ¿Puede verificar el razonamiento?
- ¿Puede obtener el resultado en forma diferente?

Para ilustrar lo anterior, retomaré el siguiente el problema del taller Nº 3 (ver anexo 1), "*Un niño cazó varias arañas y escarabajos, en total ocho, y los guardó en una caja. Si se cuenta el número total de patas que corresponde a los 8 animales resultan 54 patas. ¿Cuántas arañas y cuántos escarabajos hay en la caja?* Nota: El escarabajo tiene 6 patas y la araña 8 patas"

¿Cuáles son los datos?, $sean: x\ el número de arañas$

$$y\ número de escarabajos$$

¿Cuáles son los datos?, el escarabajo tiene 6 patas y la araña 8 patas

¿Cuál es la condición?, hay x arañas e y escarabajos en total suman 8 insectos.

El sistema de ecuaciones con dos incógnitas queda planteado de la siguiente forma:

$$x + y = 8$$

$$8x + 6y = 54$$

Este un claro ejemplo en donde el estudiante logra pasar de un problema de un lenguaje corriente a un lenguaje algebraico, por eso es indispensable retomar algunos pasos de Polya para la resolución de problemas de tipo algebraico. Claro está él nos da algunas heurísticas para resolver un problema, como el problema anterior.

3. METODOLOGÍA

Una estrategia metodológica que me basaré para la ejecución de los talleres (ver Anexo 1) con los estudiantes de la institución es el *"Proyecto Matemática Recreativa de Colombia Aprendiendo"*. Este proyecto educativo, se ha venido efectuando desde 1997 en la Educación Básica Primaria, Básica Secundaria y Media Vocacional, de todo el territorio nacional, además tiene como estrategia de desarrollo la resolución de problemas.

Asimismo, este proyecto tiene materiales didácticos para la realización de actividades de preescolar, primaria y secundaria, gracias al apoyo de muchos docentes en Colombia. Gracias a este apoyo, ha hecho de este proyecto se convierta en una de las actividades más importantes para el desarrollo de la educación de nuestro país.

Las actividades propuestas en este proyecto tienen como referencia, el Enfoque de Planteamiento y Resolución de Problemas, lo cual permite en desarrollar habilidades y aptitudes en los estudiantes. Gracias a estas actividades, lograría dar una clase no magistral, en donde los estudiantes también serían participes en las actividades lúdicas.

Por otro lado, el proyecto educativo cuenta con los siguientes recursos tales como, calendario Matemático, cartelera matemática, página web, materiales en inglés, que llegan mes a mes. El calendario matemático, es una actividad que es realizada en Colegio Champagnat; está actividad consiste una serie de talleres, que les llegan cada mes en el colegio.

El profesor Bernardo Recamán Santos, está a cargo de una versión en inglés del Calendario Matemático desde Grandes Pensadores hasta Quinto Nivel. Ante todo, los niveles del Calendario Matemático corresponden al grado de dificultad: a mayor nivel, mayor grado de dificultad. En su orden son: Semanario, Grandes Pensadores, Primer Nivel, Segundo Nivel, Tercer Nivel, Cuarto Nivel, Quinto Nivel.

A partir del Segundo Nivel de Calendario Matemático, por atrás de la hoja, aparece una actividad llamada "exploración".

En los cuadernillos de preescolar y primaria, aparece: Letras y Números, esta actividad combina el lenguaje con las matemáticas. *Así como existe una matemática recreativa, existe también una lingüística recreativa*(Proyecto Matemática Recreativa Colombia Aprendiendo). En los cuadernillos de secundaria aparece el ítem, Resolución de Problemas; en la Resolución de Problemas, *cada mes, se plantean dos actividades que se asemejan a la pruebas de estado. El propósito es que los estudiantes se familiaricen con este tipo de pruebas y desarrollen habilidades y capacidades necesarias para enfrentarlas con confianza y seguridad*. Ibíd.

Y por último, *la Cartelera de Matemáticas consta de 110 diapositivas en formato PDF cada mes, de febrero a noviembre, presentamos 10 problemas, de estos 5 para primaria y otros 5 para secundaria Se trata de problemas que se pueden resolver sin necesidad de utilizar lápiz y papel ni otros implementos.* Ibíd.

La metodología se va a desarrollar con base en:

- Guías para el desarrollo de talleres lúdicos y recreativos que modelen problemas que involucren el sistema algebraico

- Talleres lúdicos y recreativos, ofrecidos como estrategias de resolución de problemas para la enseñanza del álgebra del grado noveno

Hay que resaltar *“la actividad de resolver problemas ha sido considerada como un elemento importante en el desarrollo de las matemáticas y en el estudio del conocimiento matemático.”* (M.E.N, 1998). Algo similar ocurre con el trabajo del alumno, dentro del contexto de la transposición didáctica, *“saber matemáticas, no es solamente aprender definiciones y teoremas, para reconocer el momento de utilizarlos y aplicarlos; sabemos que hacer matemáticas implica de ocuparse de problemas”*(Brousseau, 1986, pág. 6). Lo cual significa que la actividad del alumno es la de resolver problemas.

Una de las actividades más importantes, es identificar los ejercicios que se van a poner en juego en el aula de clase. Problemas que involucren soluciones por medio del álgebra en forma recreativa, con ayuda de los siguientes textos:

- *Matemáticas recreativas*(Perelman, Matemáticas Recreativas, 1986). Es un libro, que le ofrece al lector jugar mientras aprende matemáticas o viceversa. El propósito central que reside esta obra, es de fortalecer el aprendizaje de las matemáticas en forma lúdica al enfrentarse con problemas que se le convierta en un verdadero reto. Además le ofrece trucos ingeniosos en matemáticas y al final de la obra las respectivas soluciones. Pero cabe resaltar primero que debe enfrentarse los problemas, sin ir a las soluciones, solo en el caso de rectificar con su solución obtenida.

- *Algebra Recreativa*(Perelman, 2001). Es un libro que contiene problemas elaborados en temas relacionados con el álgebra, y traen problemas distintos a los que se dictan hoy en día en algunas instituciones. Además este libro le despierta la curiosidad al lector al enfrentarse con acertijos en forma algebraica, que se convierte en un verdadero rompecabezas matemático. Los rompecabezas matemáticos, y acertijos matemáticos ayudan a desarrollar su capacidad mental, debido a su contenido.

- *El hombre que Calculaba* (Tahan, 1999). Es una obra que habla de Beremiz Samir (El Hombre que calculaba), que es capaz de solucionar problemas en sus andanzas en un país árabe. Además este libro le ofrece estrategias metodológicas al maestro a la hora de enseñar las matemáticas.

Yakov Perelman. Este autor, es un divulgador de matemáticas soviético, es muy reconocido debido a las traducciones de sus obras, aparte, ha escrito, otras obras como: “Álgebra Recreativa”, “Matemáticas Recreativas”, “Física Recreativa”, “Astronomía Recreativa”, “Geometría Recreativa”, entre otras. Murió en 1942, durante el bloqueo de la ciudad de Leningrado.

Malba Tahan. Profesor de matemáticas y aprendiz de escritor. Este autor, decidió llamarse Malba Tahan, natural de Bagdad, para que su obra tuviera reconocimiento. Murió pobre, su fortuna desapareció entre amigos y juegos de azar.

Con los estudiantes, se trabajó en 6 sesiones, cada sesión con su respectivo taller. Cada grupo entregó por escrito en una hoja de cuadernillo, la respectiva solución. A continuación se va a presentar el los propósitos de cada taller:

Taller Nº 1

Con este taller privilegiaré el pensamiento algebraico, permitiendo así que los estudiantes utilicen sus habilidades y aptitudes, para resolverlas. El último punto de este taller es de especial interés para mi proyecto aula, se trata de traducir de un lenguaje corriente a un lenguaje algebraico.

Taller Nº 2

Los propósitos con estos puntos, es que los estudiantes desarrollen el pensamiento numérico y que recurran al álgebra para las respectivas soluciones. El pensamiento numérico le permite estimar, hacer cálculos mentalmente y desarrollar habilidades para solucionar problemas en distintos contextos.

Taller Nº 3

Los propósitos con estos puntos, es que los estudiantes desarrollen el pensamiento numérico y además recurran al algebra. El pensamiento numérico, "*es fundamental la* *manera como los estudiantes escogen, desarrollan y usan métodos de cálculo, incluyendo cálculo escrito, cálculo mental"* M.E.N (1998). Hay casos de problemas que le piden solamente resolverlo a simple vista, para ello se hace necesario, que primero el estudiante identifique las incógnitas y luego solucionarlo por cualquier método.

Taller Nº 4

Los propósitos con estos puntos es que los estudiantes desarrollen el pensamiento numérico y algebraico.

El primer punto y el tercer punto, el estudiante tienen que recurrir al álgebra, puesto que el problema está dado en un lenguaje corriente y tienen que pasarlo a un lenguaje algebraico para su solución. El segundo punto, los estudiantes tienen que recurrir al conteo, como por ejemplo cuanto aumento cuanto disminuyo, utilizarlo para resolver el problema planteado.

Taller Nº 5

Los propósitos con estos puntos es que los estudiantes desarrollen el pensamiento algebraico. El primer punto, consiste en expresar el número diez empleando cinco nueves. Lo que pretendo con este punto es que los estudiantes usen sus habilidades y aptitudes, para dar muchas soluciones. El segundo punto es de gran interés para mi proyecto, puesto que es un problema de tipo algebraico, es de pasar de un lenguaje corriente a un lenguaje algebraico. Además pretendo que los chicos se familiaricen con las aplicaciones del sistema de ecuaciones con cuatro incógnitas.

Taller Final.

Este taller consta de un solo punto, el propósito con este punto es que los estudiantes resuelvan un sistema de ecuaciones con cuatro incógnitas, llevándolo a un sistema más fácil de resolver.

4. BITÁCORAS

En las bitácoras del 1 al 5, se va a presentar las experiencias vividas por sesiones con los estudiantes de grado noveno y décimo del Colegio Champagnat de Popayán. Además se incluye las maneras heurísticas de resolver un problema por parte de los estudiantes, los inconvenientes que tuve y las recomendaciones para los futuros docentes. Las sesiones se desarrollaron en jordanas extra clases, evitando interrumpir las clases que ellos tengan habitualmente con su profesor asignado en el área de matemáticas en la jornada normal. Al principio se iban a efectuar 6 talleres, por la falta de disponibilidad de tiempo de los estudiantes no se alcanzó a desarrollar el taller final (ver anexo 1)

A continuación se muestran en forma detallada las actividades realizadas en cada sesión con los estudiantes:

4.1. Bitácora 1

Esta sesión es la primera vez que iba a trabajar con talleres lúdicos frente a los estudiantes. No sabía cómo empezar la clase de forma lúdica, pero gracias a las dinámicas del proyecto denominado "Proyecto Colombia Aprendiendo" (ver metodología), me sentí más seguro para iniciar la clase. Este proyecto me sirvió de guía para dar la clase de forma distinta como habitualmente se dicta hoy en día, en donde sean partícipes tanto el profesor y los estudiantes.

Se les hizo una breve introducción del proyecto aula, con el número de sesiones; cada sesión con su respectivo taller. Para está sesión, se contó con la participación de 8 estudiantes. Se dividieron en grupos pequeños. El primer taller es de motivación y se desarrolló en dos momentos, su finalidad es de generar participación en los estudiantes. Pero mi principal interés es el tercer punto para mi proyecto aula, con este punto se intentó, que los estudiantes desarrollen sus habilidades para enfrentarse problemas de tipo algebraico. El tema que se tratará en esta sesión son las ecuaciones lineales con una incógnita.

El primer punto del taller N°1 consiste en resolver el *"problema del sastre"* (ver anexo 1). Los estudiantes en este punto respondieron de forma rápida sin tomarse la molestia de leer bien el problema. En general las respuestas que dieron los estudiantes son, "36 o 6".

Las respuestas de los estudiantes son erróneas, pensaba que ellos lo iban a resolver en forma instantánea, ya que es una pregunta de simple comprensión de lectura. Para no darles las respuestas a los estudiantes le pregunte a un grupo que me argumentaba su respuesta. Las respuestas que dieron el grupo, en forma verbal son las siguientes:

- *"te están diciendo que tiene una pieza de paño de* $12\ mt$ *de longitud, pero entonces si uno lo toma de* $12\ mt$ *de longitud quedarían como. Como si uno tomaría un hilo o algo así, entonces lo que se yo, es volverla un cuadrado entonces* $12\ mt$ *de longitud por un lado…"*
- *"144 dividido 4 entonces ya me dan 36, lo que se me convertirían en 36 días"*

Al verme incomodo, frente a las respuestas que daban los estudiantes, les dije que lo discutíamos en otra sesión, pues no sabía solventar esta falencia de los estudiantes ya que es mi primera vez que trabajaba con este tipo de talleres. Por otro lado un estudiante resolvió este punto, dibujando una tela en forma rectangular, haciendo las particiones de cada día. Luego él muestra, que al otro día no es necesario cortar la tela, y la respuesta es 5 días. Otro estudiante no quedó satisfecho con la respuesta de su compañero, se acercó y me dijo que la respuesta es 6. Para explicarlo, le cambie datos al problema, en vez de 12 mt de tela, por 4 mt de tela, y que todos los días corta 2 mt de tela, ¿Al cabo de cuantos días corta la tela?, el estudiante me respondió que en 1 día. Por último le dije que lo relacionara con el problema inicial, por lo tanto el estudiante comprendió el problema.

En este caso el papel de profesor que desempeñe fue de guía para los estudiantes, no dándole respuestas si no dándole pautas para que lo resolvieran. Pero el estudiante que resolvió el primer punto, me contó que ha visto un problema similar. Frente a esto el estudiante está utilizando algunos pasos de Polya, con los siguientes cuestionamientos, ¿Se ha encontrado un problema semejante? ¿O ha visto el mismo problema planteado en forma diferente?

En general las respuestas que dan en el primer punto se deben, cuando les hablan de "problemas". La palabra problema a los chicos les causa terror; además ellos creen en el mito que los problemas son complicados de resolver, sin importar que sea un problema fácil o difícil. A menos que los estudiantes resuelven los problemas con conocimientos previos (ver ilustración 2).

El segundo punto del taller Nº1 consistía en resolver el "problema de los 35 camellos" (ver anexo 1). Este punto los estudiantes le dieron más prioridad que los otros dos. Cada grupo dieron varias versiones de respuestas. A continuación se presentará las respuestas de cada grupo:

- Grupo 1.

$$Mayor\frac{1}{2} \to 19$$

$$Otro\ 1/3 \to 13$$

$$Menor\ 1/9 \to 4$$

$$19 + 13 + 4 = 36\ camellos$$

- Grupo 2. "$36\ camellos, 18\ ,12\ y\ 9 \quad 34 \neq 2$"
- Grupo 3, "$Novena\ parte{:}\ 4,\ mitad{:}\ 18,\ tercera\ parte{:}\ 12$"
- Grupo 4, "$18 + 12 + 4 = 34$"

Con este punto pretendía que los estudiantes respondieran como en el grupo 4, agregándole que pasaría con los otros dos camellos que sobraron. La suma está bien hecha de la respuesta del grupo 1, pero el que sale ganando es el hermano mayor y el segundo. La respuesta a mi consideración se puede modificarla así, los dos camellos sobrantes se pueden repartirlos de modo que, el que tiene 19 le correspondería 18, y el segundo el que tiene 13 le correspondería 12 y el menor 4, lo que me da 34 camellos y los otros dos uno le corresponde al amigo bagdalí, y el otro a Beremiz por premio por haber resuelto el problema. Aquí es importante rescatar que los estudiantes tienen varias heurísticas para solventar un problema.

El último punto del taller Nº1 consistía en resolver “los números de 3 cifras decrecientes en 1 y el número 198” (ver anexo 1). Además es un punto de principal interés para el presente proyecto de aula, debido a que es un sistema de carácter numérico con solución por medio de sistemas algebraicos. En general los grupos se plantean varios ejemplos para resolver el problema. Pero solo un grupo, intentó plantear un sistema de ecuación en un caso concreto con varios ejemplos, sin embargo le falta dar el salto para la generalización (ver ilustración 3).

Los estudiantes intentaron resolver este punto, pero no sabían dar salto a la generalización. Pero en el transcurso del desarrollo del taller, cometí un grave error en resolverles el problema. Para evitar estos inconvenientes es indispensable medir el tiempo que los estudiantes en promedio se pueden gastar en cada punto. Fue por eso que les resolví el problema, los estudiantes les gasto bastante tiempo a este problema, al verme presionado por el tiempo y además que los estudiantes me preguntaban por la resolución de este punto fue por eso que les resolví el problema.

A pesar que ellos hayan visto en cursos anteriores sobre el Sistema de Numeración Decimal, en este caso desconocen el uso el tercer punto del presente taller. De manera que si no se comenzaba a operar con este sistema muy difícilmente se podría resolver el problema.

En general la resolución del taller y aportes de cada punto, que hicieron los estudiantes fue buena, pero no se alcanzó a indagar el último punto del taller debido a la falta de tiempo. Aquí es importante tener presente lo anterior, para que en un futuro ponga talleres adecuados al tiempo de resolución y que se alcancen a discutir en clase.

4.2. **Bitácora 2**

Frente a los inconvenientes que tuve en la anterior sesión (ver bitácora 1), fue necesario restaurar el taller Nº 2, modificando solo las preguntas (ver anexo 1). Lo hice con el fin que se alcanzará abordar todos los puntos, sin quedar uno sin discutir. Esta sesión Nº 2 me enfrente con otro inconveniente que han venido estudiantes nuevos que no estuvieron en la anterior sesión, pues al inicio era continuar con el orden establecido en la primera sesión. Al principio no sabía cómo manejar esta situación, si era indispensable implementar el taller Nº 2 o retomar el taller de la anterior sesión, opte por el taller Nº 2 para seguir con las dinámicas establecidas desde el comienzo y el otro taller lo discutíamos con ellos en otra ocasión.

Para esta sesión se contó con la participación de 12 estudiantes. Se dividieron en grupos pequeños para desarrollar el segundo taller. Con estos puntos se intentó, que los estudiantes desarrollen sus habilidades para enfrentarse problemas de tipo algebraico. Los temas que se trataran en esta sesión son: las ecuaciones lineales con una incógnita y el sistema de numeración decimal.

El primer punto del taller Nº2 consiste en resolver la "Primera Paradoja" (ver anexo 1). El principal motivo que realicé este punto es que los estudiantes identifiquen el error que tiene el problema, y con ello indaguen varios argumentos para resolverlo. Cada grupo respondieron de forma diferente a los demás con argumentos bastante ingeniosos.

El grupo 1 escribió que $\frac{a}{0} = \frac{b}{0}$, argumentando que "ningún número es divisible entre 0, porque $a - b = 0$"

El grupo 2, partieron del final del problema $1 = 2$, luego iban reemplazando en cada procedimiento llegando a una contradicción. El procedimiento que ellos escribieron es el siguiente: "*El error del procedimiento al final porque si utilizo la que me dan al final* $1 = 2$ *no se cumple ninguna de las fórmulas como por ejemplo*

$a^2 = ab \ como \ asi$

$1^2 = 1.2$

$1 = 2$

$1^2 - 2^2 = 1.2 - 2^2$

$1 - 4 = 2 - 4$

$-3 = -2$

$(1-2)(1+2)=(1-2)2$

$1+2-2-4=-3$

$-3=-2$”

Grupo 3, parten $a^2 \neq ab$, luego como el final del problema llega el absurdo que 1=2, en fondo sustituyen $a = 1\ yb = 2$ al sustituir en $a^2 \neq ab$, argumentan que el error está en $1^2 \neq 1.2$, es decir que $1 \neq 2$

Las respuestas que dan cada grupo son distintas que se tenía en mente, lo que se puede rescatar es que los estudiantes utilizan las condiciones del problema.

El absurdo se da, si partimos de, $(a-b)(a+b)=(a-b)b$ cuando dividamos ambos lados de la igualdad por$(a-b)$;$(a-b)$ tiene que ser distinto de cero, por hipótesis se tiene que $a=b$, lo cual$(a-b)=0$, es por eso que nos condujo el resultado absurdo$1=2$. El segundo punto del taller Nº2 consiste en dada una ecuación despejar brevemente el valor de x (ver anexo 1). El propósito de este punto es que lo estudiantes utilicen las propiedades da la potenciación y radicación para solventar el problema. Lo que me encontré es que algunos estudiantes manipulan la calculadora para dar una aproximación (ver ilustración 4), ya que ellos se dieron cuenta que el valor de x no es un numero entero, sino un número real. Algo similar ocurre con otros estudiantes intentaban despejar el valor de x con un número entero sin el uso de la calculadora, además me preguntaban si en realidad es un entero, para ayudarles les dije que el valor de la incógnita es un número real y que recordaran las propiedades de la radicación y potenciación, que ellos han visto en cursos anteriores.

En la educación hoy en día estos aparatos electrónicos son necesarios en los cursos de trigonometría y cálculo. En estas dos materias manejan logaritmos, funciones trigonométricas, funciones exponenciales, funciones cuadráticas, límites y entre otros, en donde es indispensable tener a la mano la calculadora, para hacer cálculos rápidamente. Frente a la manipulación de las calculadoras por los estudiantes en ciertos momentos es necesario, pues el grupo de estudiantes que manejaron la calculadora son de grado noveno, en el problema hicieron coincidir con decimales el valor de x (ver ilustración 6). En este caso fue indispensable que los estudiantes manipularan estos aparatos, ya que era un taller libre. En fondo estos estudiantes están buscando un decimal que le aproxime y lo que les da en la calculadora es una aproximación. Otro grupo de estudiantes realizaron el problema propuesto como lo esperaba, utilizando $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$ (ver ilustración 5)

Los dos aportes que hicieron los dos grupos de estudiantes son importantes pues cada uno verificaba sus resultados. Lo que estaba en la calculadora es una aproximación de raíz de tres.

El tercer punto del taller consiste en una propiedad, averiguar si existía números con esa propiedad (ver anexo 1). Un estudiante (ver ilustración 7) explicó el resultado, de la siguiente forma:

Primero, tomemos el siguiente producto:

$$48 \times 63$$

Los dos números, tiene la siguiente forma:

- El producto de la primera cifra del primer factor con la primera cifra del segundo factor, es igual al producto de la segunda cifra del primer factor con la segunda cifra del segundo factor. Es decir $4 \times 6 = 8 \times 3 = 24$

Para los factores $36 \times 42\ y\ 62 \times 39$, lo hizó de foma analoga.

Agregando:

$$48 \times 63 = 3024$$

$$36 \times 42 = 1512$$

$$62 \times 39 = 2418$$

El resultado del primer producto 3024, las dos cifras de este producto coinciden con $4 \times 6 = 8 \times 3 = 24$. Con los otros productos coinciden con esa propiedad. Estos números tienen la siguiente propiedad : $a * b = c * d$. Por ejemplo si tomamos, $a = 4,\ b = 6,\ c = 3\ yd = 8$. Reemplazando en $a * b = c * d$. Se tiene $4 * 6 = 3 * 8 = 24$.

Para explicar el anterior resultado en lenguaje algebraico. Tomemos el siguiente ejemplo:

$$46 * 96 = 4416 = 64 * 69$$

Ahora, sean x, y, z, t. De ahí contruyamos la siguiente ecuación:

$$(10x + y)(10z + t) = (10y + x)(10t + z)$$

Resolviendo, obtenemos la siguiente igualdad $x * z = y * t$

En este punto, ningún grupo de estudiantes acudieron a solventar el problema que tenia en mente. En este caso hay que rescatar que los problemas se pueden solventar de varias maneras si se trabaja en equipo, respetando los criterios de unos a otros.

En general los estudiantes trabajaron completamente el taller debido a, que el taller tienen preguntas bien claras en donde se puedan determinar varias repuestas. El papel de profesor que desempeñé en está sesión fue de guia, dejando a que los estudiantes en forma libre discutieran sus repuestas en el tablero.Aquí se puede rescatar que los estudiantes plantearon soluciones mediante ecuaciones. No hay que olvidar que lo anterior está referenciado en el pensamiento numérico y sistemas algebraicos.

4.3.**Bitácora 3**

Con un taller bien elaborado, como profesor se siente más seguro para dar la clase de forma recreativa, esto ayuda a los estudiantes tengan mayor comprensión en cada punto del taller, evitando inconvenientes como la falta de claridad en las preguntas, como es el caso del problema de los 35 camellos discutido en la primera sesión (ver bitácora 1). Por otro lado, gracias a la metodología implementada por el Proyecto Colombia Aprendiendo, me sirvió de apoyo para la restauración del taller N°3 (ver anexo 1), elaborando problemas que se puedan discutir en clase para así lograr tener una clase agradable.

Para está sesión, se contó con la participación de 10 estudiantes. Se dividieron en grupos pequeños para el desarrollo del taller. Los temas que se trataran en esta sesión son: la radicación, aplicaciones de las ecuaciones lineales con dos incógnitas y las ecuaciones lineales con una incógnita.

El primer punto del taller Nº3 consiste, en dados dos raíces, averiguar cuál es la mayor, sin utilizar la calculadora. Pero los estudiantes hicieron aproximaciones con decimales en cada uno de las raíces, indicando en sus argumentos que raíz cuadrada de dos es mayor que raíz quinta de cinco. Lo que observó en este punto es que los estudiantes asocian la raíz con los decimales, sin denotar que la raíz enésima de algunos números me da un entero o un decimal infinito. Lo que escriben los estudiantes en sus pruebas son aproximaciones. Al principio pretendía que ellos retomaran las propiedades de radicación, para la resolución del problema. Me preguntaban por la solución del punto, para evitar darles las respuestas, di la siguiente propiedad $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$.

Un estudiante de un grupo utilizó la anterior propiedad, el procedimiento que hizo él (ver ilustración 8), fue la de elevar a la diez a las ambas raíces, partiendo de la siguiente propiedad, "*si* $M > N$ *entonces* $M^a > N^a$". De ahí llegó que 32 es mayor que 25, es decir $\sqrt[2]{2}$ es mayor que $\sqrt[5]{5}$. En fondo el estudiante utilizó el mínimo común múltiplo entre 2 y el 5 que es el 10. El problema, también se podría resolver elevando a cada raíz con cualquier múltiplo de 10.

Siempre fue indispensable darles indicaciones pues al ver que los estudiantes intentaban desarrollar este punto, y me preguntaban todos como se hacía este punto sin utilizar la calculadora. A partir de la sugerencia los estudiantes si llegaron al resultado que esperaba. La experiencia que adquirí, me servirá en mi futura labor docente, que a los estudiantes hay que darles pistas o sugerencias, evitando darles las respuestas, como es el caso en las sesiones anteriores, que resolví los puntos que no se alcanzaron a discutir en clase.

El punto número dos del taller Nº3 (ver anexo 1), corresponde al problema de las arañas y los escarabajos. Un estudiante lo resolvió de una manera que no me esperaba (ver ilustracion 9) , pensaba ellos iban a utilizar sistemas de ecuaciones con dos incognitas. Pero la respuesta que da el estudiante es válida debido que él, obtiene los múltiplos de 6 y de 8, correspondientes al número de patas de los insectos. En total hay ocho insectos con 54 patas entre arañas y escarabajos, relacionó el tercer múltiplo de 8, con 3 arañas; y el quinto múltiplo de 6, con 5 escarabajos. En total hay 3 arañas y 5 escarabajos que en total suman 8 insectos. Hay casos, que uno como futuro docente hay que estar preparados con los argumentos que dan los estudiantes, cuando miré la respuesta del estudiante en sus escritos con su respectiva respuesta. Me dio la curiosidad de saber cómo lo hizo, fue por eso que lo pasé al tablero para discutir la respuesta.

El último punto del taller Nº3 (ver anexo 1), corresponde en dada una división incompleta, completar los números que hacen falta. Los estudiantes en este punto lo resolvieron completamente, la mayoría lo hicieron por tanteo (ver ilustración 10), por ejemplo, por cuanto tengo que dividir, sumar, restar y multiplicar.

Finalmente, los estudiantes en esta sesión me trabajaron completamente el taller en forma grupal, compartiendo ideas entre ellos para llegar a la solución de cada punto del taller. En está sesión evite resolverles los puntos del taller, en caso de duda, se les dieron sugerencias. El grupo que resolvia cualquier punto del taller, pasaba al tablero para que se generará discusión, así no se volviera una clase aburrida para ellos.

Está sesión, me sirvió de apoyo para que en futuras clases en mi labor profesional, tenga siempre presente los argumentos que dan los estudiantes en sus escritos, puesto que ellos tienen sus heuristicas para resolver los problemas planteados. Algunos estudiantes realizan la resolución de problemas, diferentes a la que uno espera, retomando el caso del punto número dos. Es necesario plantearles problemas, que se puedan resolver de varias formas, para que los estudiantes tengan varias repuestas y que puedan discutir en clase. Gracias a está experiencia realizaré talleres que se puedan resolver de varias maneras. Es indispensable dejar solos a los estudiantes para que puedan resolver problemas. Si uno le resuelve el problema, lo que haran los estudiantes es imitar al profesor, dandoles a entender que el problema se puede resolver de una sola forma. Por último este tipo de talleres lúdicos manejados con la misma metodologia del Proyecto Colombia Aprendiendo, permitió al estudiante interaturar libremente con los demás, generando asi discusión, debate y participación ayudando que la clase sea entretenida y no aburrida, que sean participes tanto ellos y el profesor.

4.4. **Bitácora 4**

Gracias a la experiencia que adquirí en las anteriores sesiones, me sentí más seguro para abordar está sesión, permitiendo vencer los miedos que tuve en la primera sesión (ver bitácora 1). Para evitar inconvenientes en sesiones pasadas como la falta de tiempo para la discusión y solución de los puntos de los talleres, para solventar está falencia fue indispensable realizar un taller Nº 4, para que se alcancen a discutir todos los puntos en la presente sesión.

Para está sesión, se contó con la participación de 7 estudiantes. Se dividieron en grupos pequeños para el desarrollo del taller. El tema que se tratara en esta sesión son, las ecuaciones lineales con una incógnita.

El primer punto del taller Nº4 (ver anexo 1), los estudiantes fomentaron participación, cada grupo tenían una manera heurística de resolver el problema de tipo algebraico (ver ilustraciones 11-12). En la ilustración 11 el estudiante planteó bien la ecuación llegando la solución, pero le faltó igualarlo a x como en la ilustración 12. En la ilustración 12 plantearon bien la ecuación, pero con un error llegaron a la solución. Frente a esto opinó que los estudiantes llegaron a la respuesta a la que me esperaba, pero los errores que ellos tuvieron fueron mínimos. En este caso lo más importante en todo problema es comprender el problema y los estudiantes en ambos grupos comprendieron el problema, planteando bien la ecuación.

El segundo punto del taller Nº4 (ver anexo 1), los estudiantes la mayoría salieron a resolverlos de distintas formas (ver ilustraciones 13-14). El desarrollo de este punto los estudiantes tuvieron buenos argumentos llegando a la solución deseada (ver ilustración 13). Salieron dos estudiantes a resolver el problema. El primer estudiante (ver ilustración 13), lo realizó de la siguiente forma, se escribe los números del 1 al 9, el número medio es el 5, que se coloca en la mitad y por tanteo se coloca los números que hacen falta para que coincida la suma. El segundo estudiante (ver ilustración 14), lo realizó de la siguiente forma, se escribe los dígitos del 1 al 9, de ahí hace coincidir los extremos como, la "ley de la oreja", el 1 con el 9, el 2 con el 8, el 3 con el 7, el 4 con el 6 y el 5 se coloca en el medio; la suma de los extremos me da 10 y lo que falta es 5. El papel que desempeñe fue de hacer partícipes a los estudiantes que salgan al tablero, logrando así un buen desempeño entre ellos.

El último taller Nº 4 (ver anexo 1), se trata de resolver un problema de tipo algebraico. Los estudiantes en cada grupo resolvieron completamente el problema (ver ilustraciones 15-16). En fondo los estudiantes están utilizando los pasos del Polya, por ejemplo:

¿Cuáles son las incógnitas?, sea $b = cantidaddeaños$, el padre tiene $32 + b$y el hijo $5 + b$.

¿Cuáles son los datos?, El padre tiene 32 años y el hijo 5 años.

¿Cuál es la condición?, el padre debe tener 10 veces más años que el hijo.

De lo anterior se establece la ecuación $32 + b = 10(5 + b)$, llegando $b = -2$.

Estos argumentos que dan los estudiantes en las dos anteriores ilustraciones, se deben a que ellos trabajan en Olimpiadas Matemáticas por parte de la institución, es por eso que están familiarizados con estos tipos de problemas de tipo lúdico o acertijos matemáticos.

Por último el taller Nº 4, se discutió y se desarrolló completamente, esto es debido a que se les colocaron problemas con la misma dinámica del Proyecto Colombia Aprendiendo (ver metodología) con acertijos matemáticos, fomentando participación entre los estudiantes, gracias a esto no tuve inconvenientes con ellos.

4.5.**Bitácora 5**

Ya para terminar con la última sesión tuve que implementar un taller nuevo que se alcanzara a discutir en clase, evitando inconvenientes como en las primeras sesiones por el tiempo de discusión de ellos. El taller Nº5 (ver anexo 1) para esta sesión cuenta con dos preguntas. La primera es de indagar la mayor cantidad de respuestas que ellos puedan encontrar. El segundo, es dado un problema plantear un sistema de ecuaciones con cuatro incógnitas y resolverlo de una forma fácil. Los estudiantes le dieron más prioridad al primer punto que el segundo punto, y por lo tanto el segundo no se alcanzó a discutir, dejándolo para otra sesión.

Para está sesión, se contó con la participación de 8 estudiantes. Se dividieron en grupos pequeños para el desarrollo del taller. Los temas que se tratara en esta sesión son, las ecuaciones lineales con una incógnita y las aplicaciones de las ecuaciones lineales con cuatro incógnitas.

El primer punto del taller, todos los estudiantes participaron, logrando respuestas que tenía en mente. Los estudiantes dieron cada uno sus aportes (ver ilustración 17), de esta forma contribuyó más respuestas de las que se tiene el libro que se está manejando para esta sesión.

El segundo punto del taller no se alcanzó a discutir debido a los aportes que dieron los estudiantes al primer punto.

Para que los estudiantes les cojan amor por las matemáticas es indispensable ponerles problemas que los pongan a pensar sin que se memoricen alguna fórmula, sólo con conocimientos previos. Con las experiencias que adquirí en los transcursos de las sesiones, aquí en adelante en mi futura labor docente pondré talleres bien elaborados que se puedan discutir en clase, logrando así una clase enriquecedora tanto para mí y para ellos.

5. CONCLUSIONES

Los estudiantes en su formación académica se ven enfrentados con problemas matemáticos. No obstante algunos estudiantes de los grados octavo y noveno no se muestran interesados por el álgebra ya que la conciben como una asignatura llena de, fórmulas, letras, símbolos, notaciones y números, sin ninguna aplicación y significado en su vida cotidiana. La finalidad de este proyecto de aula fue de generar impacto entre ellos, haciendo ver que la matemática en si es una disciplina entretenida con actividades de tipo lúdico.

El Proyecto de Colombia Aprendiendo fue un recurso metodológico y una guía indispensable para llevar a cabo las sesiones con los estudiantes del Colegio Champagnat de Popayán (ver bitácoras). Los materiales que cuenta este proyecto me sirvieron, para el diseño de los talleres en forma lúdica. En el transcurso de la práctica fue agradable trabajar con este tipo de talleres, ya que la mayoría de los estudiantes del Colegio Champagnat de Popayán están acostumbrados a resolver problemas de tipo Olimpiadas Matemáticas que traen estos materiales.

Por otro lado, opté como recurso metodológico trabajar con tres libros: Álgebra Recreativa, Matemáticas Recreativas y El hombre que Calculaba. Estos libros me proporcionaron problemas de modo que se puedan discutir con los estudiantes, ayudando que la clase sea enriquecedora. Al principio estos libros los estudiantes no los conocían, pero con el desarrollo de las sesiones trataba de familiarizarlos con estos libros, haciéndolos ver que hay problemas entretenidos en las matemáticas como los problemas que ellos se enfrentan de tipo Olimpiadas Matemáticas. Además sería indispensable que la educación hoy en día, los estudiantes en el área de matemáticas tuvieran presente estos libros, para que ellos desarrollen sus habilidades en lectura y en matemáticas. Los estudiantes del curso que participan en Olimpiadas Matemáticas de la institución, fomentaron gran parte de las intervenciones y discusiones entre los estudiantes, solventando la mayoría de problemas planteados. Los procedimientos empleados por los estudiantes para la resolución de problemas, la mayoría lo hacen por tanteo, otros empleando algunos pasos de George Polya, encontrando las incógnitas, para luego buscar los datos y por último plantearse la condición del problema para su respectiva solución (ver bitácoras 1-5).

Al principio se vio la apatía por parte de los estudiantes, pero con las mismas dinámicas en diferentes sesiones hicieron que los estudiantes participaran. El uso de los talleres lúdicos sirvió como elemento motivador para el estudiantado, ya que hacen de las matemáticas una disciplina divertida y no aburrida. Los alumnos a la hora de enfrentarse con este tipo de talleres, desarrollan sus habilidades y aptitudes, de esta forma ellos están haciendo matemáticas de una forma más agradable a como normalmente lo hacen en su educación.

Además estos talleres lúdicos se generó en los estudiantes resultados los cuales se destacaron: participación en el tablero, indagación, críticas, discusiones y buenos argumentaciones en la resolución de problemas. La participación en el tablero ayudó con la comunicación matemática, se exponen ideas ante una audiencia en forma discutible con argumentación matemática. Las críticas que hicieron los estudiantes ante su audiencia, permitió vencer un obstáculo como el aburrimiento, permitiendo ver a las matemáticas como una materia viva llena de interés y motivación, generando así discusiones entre ellos.

A partir de las heurísticas utilizadas por los estudiantes para la resolución de problemas, puedo rescatar algunos aspectos, que me parecen importantes en mi futura labor docente. En primer lugar que los métodos con los que los estudiantes resuelven los problemas son distintos a los que se tienen en mente. Al principio este elemento, me causó cierta incomodidad porque no sabía cómo confrontarlo; pero en el transcurso de las sesiones fui adaptándome a esta situación e intente captar esos razonamientos diversos con que se puede encarar un mismo problema. De otro lado, es una realidad que el paso de un problema escrito en lenguaje natural a lenguaje algebraico tiene un nivel de dificultad muy alto para los estudiantes. Esto me llevó a implementar más problemas de este tipo para solventar esta falencia y familiarizarlos con este tipo de situaciones.

Los resultados que se observaron en las bitácoras se puede concluir que: al implementar talleres recreativos ayudó de una u otra forma con el aprendizaje de los estudiantes conllevando a la familiarización de temas antes vistos; la realización de los ejercicios de cada taller sirvió para ayudar a los estudiantes a desarrollar habilidades en el manejo de algunos problemas de tipo algebraico.

Unos de los impedimentos que tuve en la práctica, fue la poca disponibilidad de tiempo por parte de los estudiantes, ya que ellos realizaban actividades de tipo, académico, deportivo y cultural del colegio. Frente a esta problemática no hubo solución por más que se hacia los llamados a los estudiantes que recuperáramos las sesiones pérdidas, por eso una de las recomendaciones que les darían a los futuros docentes o practicantes, es que a los estudiantes hay que colocarles problemas que se alcancen a discutir en clase.

El trabajo en grupo en cierta medida es importante a la hora de solventar los problemas planteados con un taller bien elaborado, lo que incide que los estudiantes discutan, participen e indaguen. No hay que olvidar que solamente hay que darles sugerencias sólo en caso de duda.

BIBLIOGRAFÍA

Brousseau, G. (1986). *Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques.*

Champagnat. (24 de Noviembre de 2011). Recuperado el 16 de Enero de 2013, de http://www.champagnatpopayan.edu.co/index.php/joomlaoverview/funda?tmpl=component&print=1

Guzmán, M. d. (s.f.). Recuperado el 1 de Agosto de 2013, de http://www.rac.es/ficheros/doc/00337.pdf.

M.E.N. (1998). *Lineamientos Curriculares de Matemáticas.* Santa Fe de Bogotá, D.C.: Ministerio de Educación Nacional.

Perelman, Y. (5 de Junio de 2001). (P. p. Barros, Ed.) Recuperado el 24 de Abril de 2012, de http://zeth.ciencias.uchile.cl/~delegado/ebooks/mate/PY.pdf

Perelman, Y. (1986). *Matemáticas Recreativas.* (F. B. Pérez, Trad.) Barcelona: Orbis.

Polya, G. (1965). *Cómo plantear y resolver problemas.* México Distrito Federal: Trillas.

Proyecto Matemática Recreativa Colombia Aprendiendo . (s.f.). Recuperado el 10 de Enero de 2013, de http://es.scribd.com/doc/87739688/PROYECTO-MATEMATICAS

Tahan, M. (1999). *El Hombre que Calculaba.* Santa Fe de Bogotá: Panamericana.

Wikipedia . (s.f.). Recuperado el 26 de Noviembre de 2012, de http://es.wikipedia.org/wiki/George_P%C3%B3lya.

ANEXOS

Anexo 1. Talleres que se abordaron durante las sesiones

Taller Nº1

Popayán, 17 de abril de 2012
Colegio Champagnat de Popayán
Grado: 10-02
Profesor: Víctor A. Pérez
Universidad del Cauca
Curso: Práctica Pedagógica 3

El problema del sastre.

"Un sastre tiene una pieza de paño de 12 metros de longitud, y todos los días corta 2 m. ¿Al cabo de cuantos días habrá cortado completamente la pieza?"[1]

Problema de los 35 camellos

"Donde se narra la singular aventura de los treinta y cinco camellos que tenían que ser repartidos entre tres hermanos árabes, y de cómo Beremiz Samir, el Hombre que Calculaba, efectuó un reparto impecable dejando plenamente satisfechos a los tres querellantes. De la ganancia inesperada que obtuvimos con la transacción." [2]

Hacía pocas horas que viajábamos sin detenernos cuando nos ocurrió una aventura digna de ser relatada, en la que mi compañero Beremiz, con gran talento, puso en práctica sus habilidades de eximio cultivador del Álgebra.
Cerca de un viejo albergue de caravanas medio abandonado, vimos a tres hombres que discutían acaloradamente junto a un hato de camellos. Entre gritos e improperios, en plena discusión, braceando como energúmenos, lanzaban exclamaciones:
-¡Que no puede ser!
-¡Es un robo!
-¡Pues yo no estoy de acuerdo!
El inteligente Beremiz procuró informarse de lo que discutían.

---

[1]**Tahan, Malba. 1997.***El Hombre que Calculaba.* Santafé de Bogotá : Panamericana, 1997. pág. 211. ISBN: 958-30-0107-4.
[2]Ibíd., pág. 14

-Somos hermanos, explicó el más viejo, y recibimos como herencia esos 35 camellos. Según la voluntad expresa de mi padre, me corresponde la mitad; a mi hermano Hamed Namur una tercera parte y a Harim, el más joven, solo la novena parte. No sabemos, sin embargo, cómo efectuar la partición y a cada reparto propuesto por uno de nosotros sigue la negativa de los otros dos. Ninguna de las particiones ensayadas hasta el momento, nos ha ofrecido un resultado aceptable. Si la mitad de 35 es 17 y medio, si la tercera parte y también la novena de dicha cantidad tampoco son exactas, ¿cómo proceder a tal partición?
-Muy sencillo -dijo el Hombre que Calculaba-. Yo me comprometo a hacer con justicia ese reparto, mas antes permítanme que una a esos 35 camellos de la herencia este espléndido animal que nos trajo aquí en buena hora.
En este punto intervine en la cuestión.
-¿Cómo voy a permitir semejante locura? ¿Cómo vamos a seguir el viaje si nos quedamos sin el camello?
-No te preocupes, bagdalí -me dijo en voz baja Beremiz-. Sé muy bien lo que estoy haciendo. Concédeme tu camello y verás cómo termina todo esto.
Y tal fue el acento de seguridad con que lo dijo que le entregué sin el menor titubeo mi bello *jamal* que, inmediatamente, pasó a incrementar la cáfila que debía ser repartida entre los tres herederos.
-Amigos míos –dijo-, voy a hacer la división justa y exacta de los camellos, que como ahora ven son 36.

¿Cómo repartió Beremiz esos 35 camellos a los tres hermanos?

Los números de 3 cifras decrecientes en 1 y el numero 198

“Escríbase un número de tres cifras decrecientes en 1, por ejemplo, 765; inviértanse las cifras: 567; efectúese la resta de esos dos números: 765-567=198. Se obtendrá siempre el mismo número, 198.” [3]

1. Escribir dos ejemplos.
2. ¿Cómo se podría explicar el anterior resultado, usando el lenguaje algebraico?

[3] Ibíd., pág.239

Taller Nº 2

Popayán, 24 de abril de 2012
Colegio Champagnat de Popayán
Grados: 9º-10º
Profesor: Víctor A. Pérez
Universidad del Cauca
Curso: Práctica Pedagógica 3

"Primera Paradoja: 1 = 2." [4]

Sean a y b dos números iguales,
$a = b$

Multipliquemos ambos lados de la igualdad por a:

$a^2 = ab$

Restemos b^2 a ambos lados de la igualdad:

$a^2 - b^2 = ab - b^2$

Factoricemos:
$(a - b)(a + b) = (a - b)b$

Dividamos ambos lados de la igualdad por $a - b$:

$(a + b) = b$

Como $a = b$, entonces

$2b = b$

Dividiendo ambos lados por b. Se tiene $1 = 2$

¿Dónde está el error en el anterior procedimiento?

[4] El hombre que Calculaba: Juegos matemáticos, Panamericana, pp. 244-245

Resuélvase a primera vista

Dada la siguiente ecuación,

$$x^{x^3} = 3$$

Calcular el valor de X

Dos números de dos cifras

“Problema. Los números 46 y 96 tienen una curiosa propiedad: su producto no se altera aunque las cifras que los componen cambien de lugar. En efecto,” [5]

$46 * 96 = 4416 = 64 * 69$

i. Averigüe si hay otros números con esa propiedad.
ii. ¿Cómo podrá averiguarse si existen otros números de dos cifras con idéntica propiedad?
iii. De algunos ejemplos.

[5] Perelman, Yakov. 2001. [En línea] 5 de Junio de 2001. [Citado el: 24 de Abril de 2012.] http://zeth.ciencias.uchile.cl/~delegado/ebooks/mate/PY.pdf.

Taller Nº 3

Popayán, 8 de mayo del 2012
Colegio Champagnat de Popayán
Grados: 9°-10°
Profesor: Víctor A. Pérez
Universidad del Cauca
Curso: Práctica Pedagógica 3

¿Cuál es la raíz mayor?

Sin utilizar calculadora, decida cuál de las raíces es la mayor.

$$\sqrt[5]{5} \quad ó \quad \sqrt{2}$$

Las arañas y los escarabajos

"Un niño cazó varias arañas y escarabajos, en total ocho, y los guardó en una caja. Si se cuenta el número total de patas que corresponde a los 8 animales resultan 54 patas. ¿Cuántas arañas y cuántos escarabajos hay en la caja?" [6]

Nota: El escarabajo tiene 6 patas y la araña 8 patas.

¿Qué número hemos dividido?
"Repongan las cifras que faltan en la división:" [7]

```
 *2*5* | 325
-***   |------
------   1**
 -*0**
  *9**
 ------
   -*5*
    *5*
```

[6] Y. Perelman. Matemáticas recreativas. Ediciones Orbis, Barcelona, 1986, pp. 82
[7] Ibíd. pp. 40

Taller Nº 4

Popayán, 22 de mayo de 2012
Colegio Champagnat de Popayán
Grados: 9º-10º
Profesor: Víctor A. Pérez
Universidad del Cauca
Curso: Práctica Pedagógica 3

Universidad
del Cauca

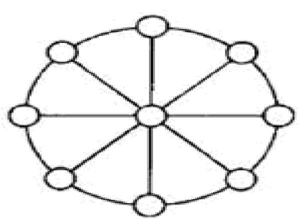
¿Cuántos años tiene?

"A un aficionado a los rompecabezas le preguntaron cuántos años tenía. La respuesta fue compleja:

-Tome tres veces los años que tendré dentro de tres años, ahora résteles tres veces los años que tenía hace tres años y resultará exactamente los años que tengo ahora. ¿Cuántos años tiene?" [8]

La rueda con números

"Las cifras del 1 al 9 hay que distribuirlas en la rueda de la figura: una cifra debe ocupar el centro del círculo y las demás, los extremos de cada diámetro de manera que las tres cifras de cada fila sumen siempre 15 " [9]



La ecuación piensa por nosotros

"Si no cree que las ecuaciones sean a veces más previsoras que nosotros mismos resuelva este problema:

El padre tiene 32 años; el hijo, 5. ¿Al cabo de cuántos años será la edad del padre diez veces mayor que la del hijo?" [10]

[8] Y. Perelman. Matemáticas recreativas. Ediciones Orbis, Barcelona, 1986, pp. 30
[9] Ibíd., pp. 89

Taller Nº 5

Popayán, 5 de junio del 2012
Colegio Champagnat de Popayán
Grado: 10º
Profesor: Víctor A. Pérez
Universidad del Cauca
Curso: Práctica Pedagógica 3

Con cinco nueves

"Exprese el número diez empleando cinco nueves. Indique, como mínimo, dos procedimientos de los múltiples que hay para realizarlo." [11]

Los cuatro hermanos

"Cuatro hermanos tienen 45 rublos. Si el dinero del primero es aumentado en 2 rublos, el del segundo reducido en 2 rublos, se duplica el del tercero y el del cuarto se reduce a la mitad, todos los hermanos tendrán la misma cantidad de rublos. ¿Cuánto dinero tenía cada uno?"[12]

---

[10]Perelman, Yakov. 2001. [En línea] 5 de Junio de 2001. [Citado el: 24 de Abril de 2012.] http://zeth.ciencias.uchile.cl/~delegado/ebooks/mate/PY.pdf.

[11]Y. Perelman. Matemáticas recreativas. Ediciones Orbis, Barcelona, 1986. Pp. 84.

[12]Perelman, Yakov. 2001. [En línea] 5 de Junio de 2001. [Citado el: 24 de Abril de 2012.] http://zeth.ciencias.uchile.cl/~delegado/ebooks/mate/PY.pdf.

Taller Final

Popayán, 12 de Junio del 2012
Colegio Champagnat de Popayán
Grado: 10º
Profesor: Víctor A. Pérez
Universidad del Cauca
Curso: Práctica Pedagógica 3

Un sistema de ecuaciones con cuatro incógnitas

Encuentre, "x, y, uyz *que satisfagan el sistema de cuatro ecuaciones*" [13]

$$\mathbf{x + 7y + 3u + 5z = 16}$$

$$\mathbf{8x + 4y + 6u + 2z = -16}$$

$$\mathbf{2x + 6y + 4u + 8z = 16}$$

$$\mathbf{5x + 3y + 7u + z = -16}$$

(Busque un procedimiento rápido)

[13] Polya, G. *Cómo plantear y resolver problemas.* México D.F : Trillas, 1965. pág. 203.

Anexo 2. Tabla de Ilustraciones

Ilustración 1.Estudiantes de grado noveno y décimo con que desarrolló el proyecto aula

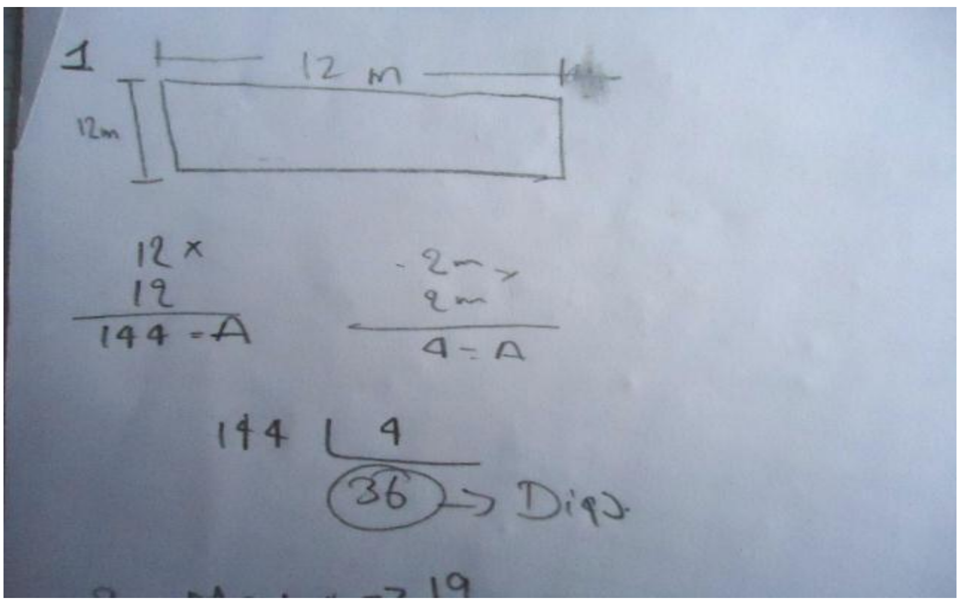


Ilustración 2. Respuesta de un grupo del punto 1 del taller Nº1

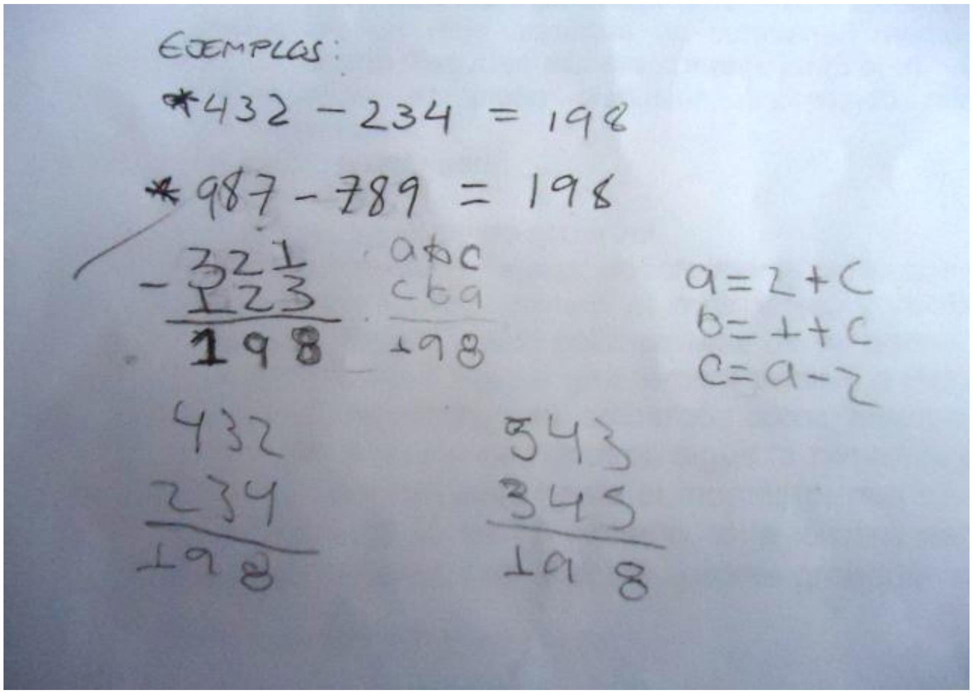


Ilustración 3. Respuesta del punto 3 del taller Nº1 por un grupo de estudiantes.

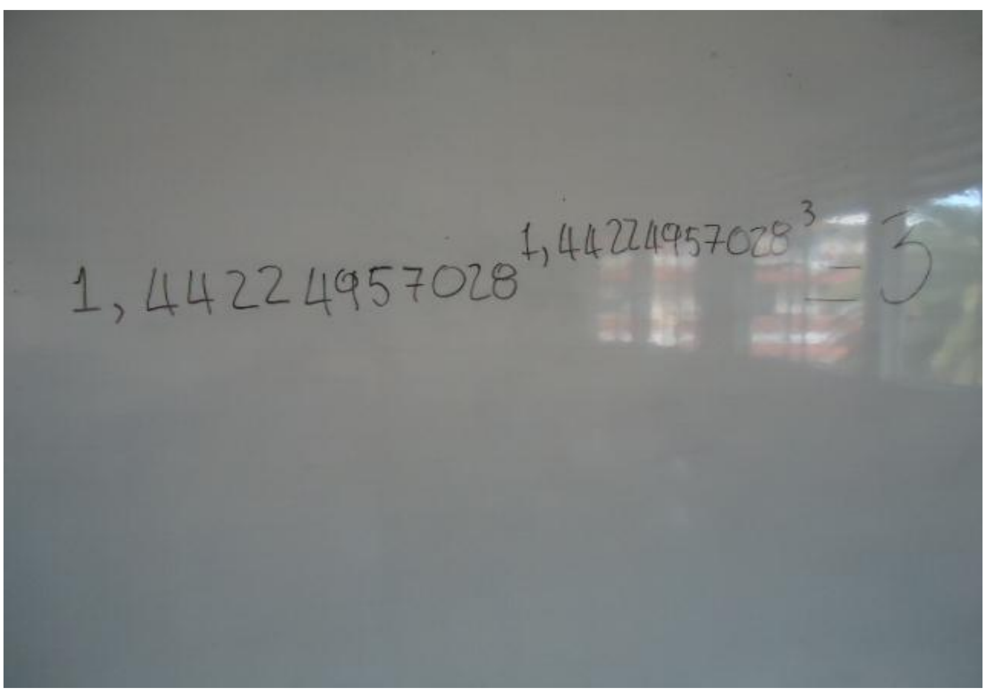


Ilustración 4. Resultado de un estudiante en el tablero.

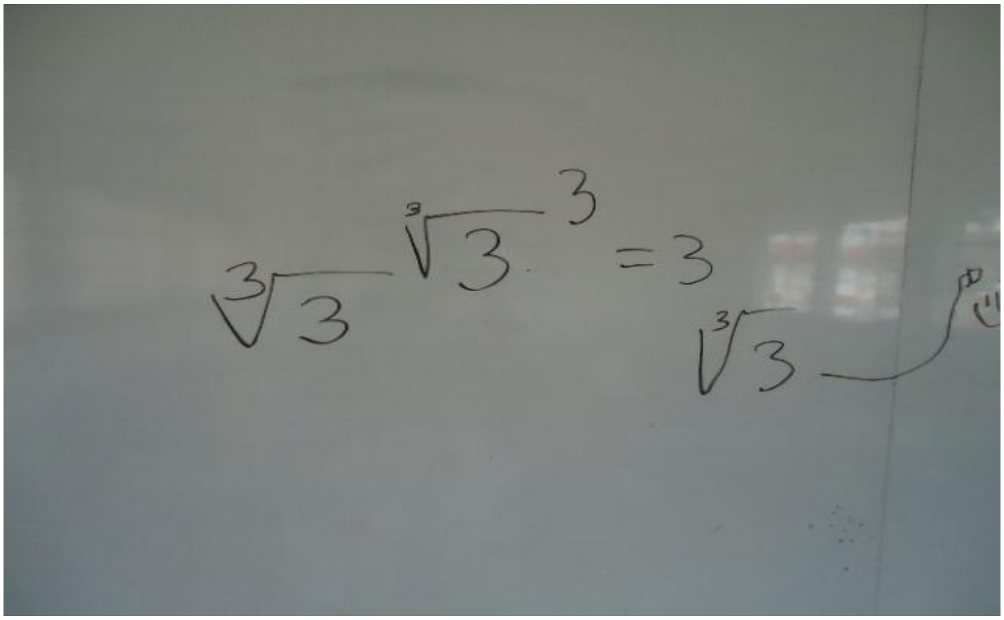


Ilustración 5. Resultado de un estudiante en el tablero utilizando propiedades.

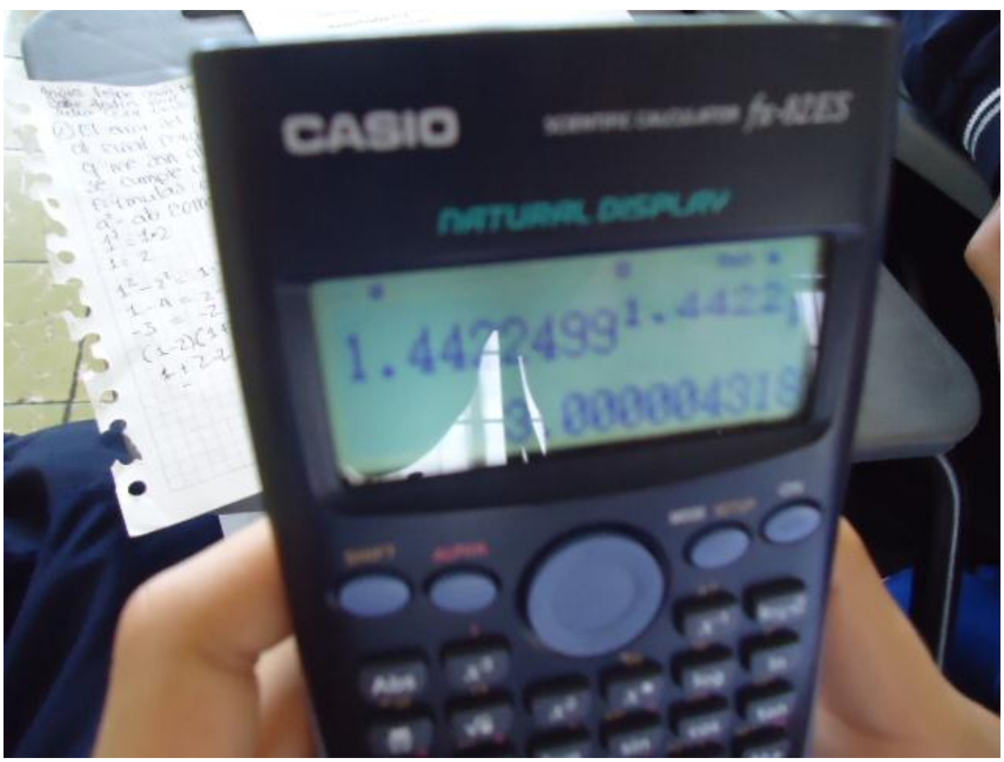


Ilustración 6.Manipulación de la calculadora por un estudiante para un problema.

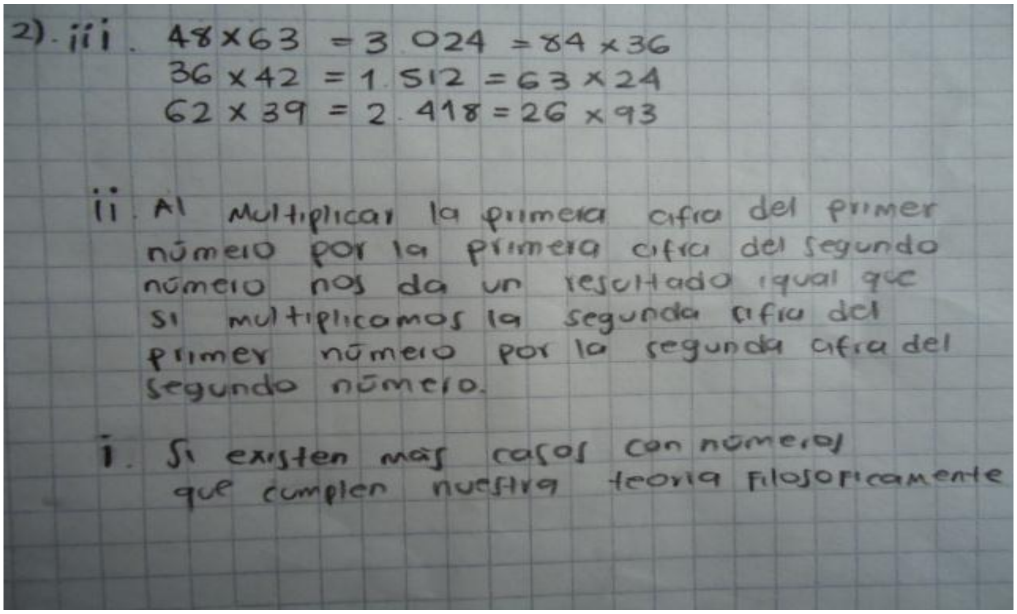


Ilustración 7, Resultado por un grupo de estudiantes el punto 3 del taller Nº 2.

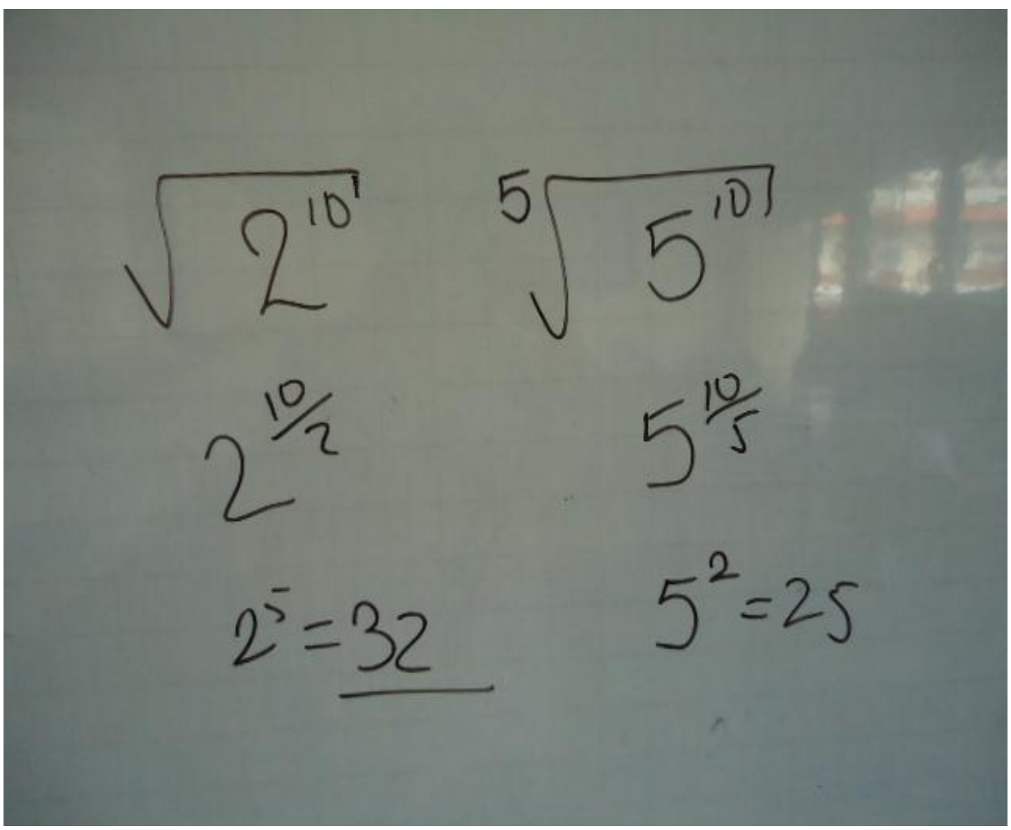


Ilustración 8.Respuesta punto 1 del taller Nº 3 en el tablero.

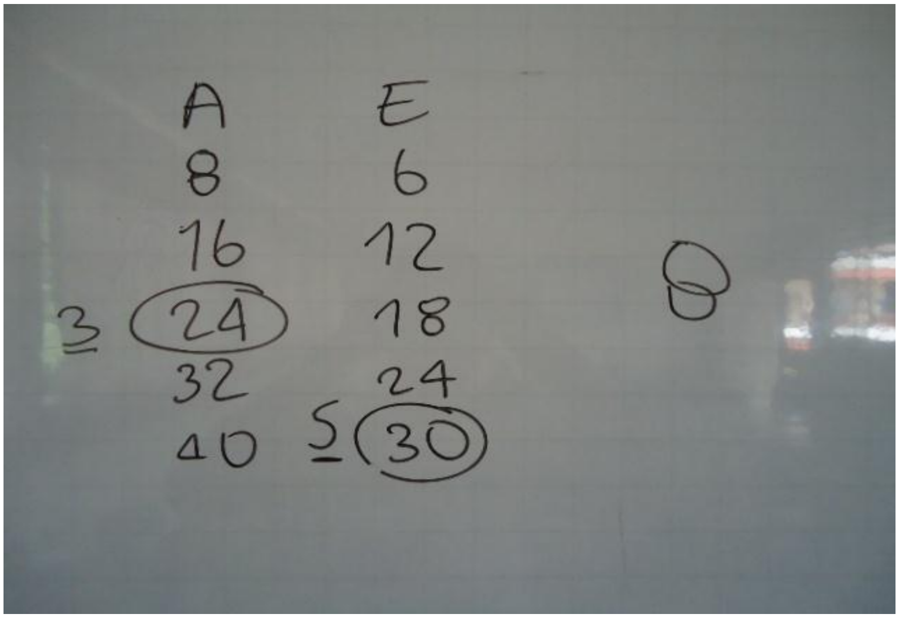


Ilustración 9. Respuesta del punto 2 del taller Nº3 en el tablero por un estudiante.

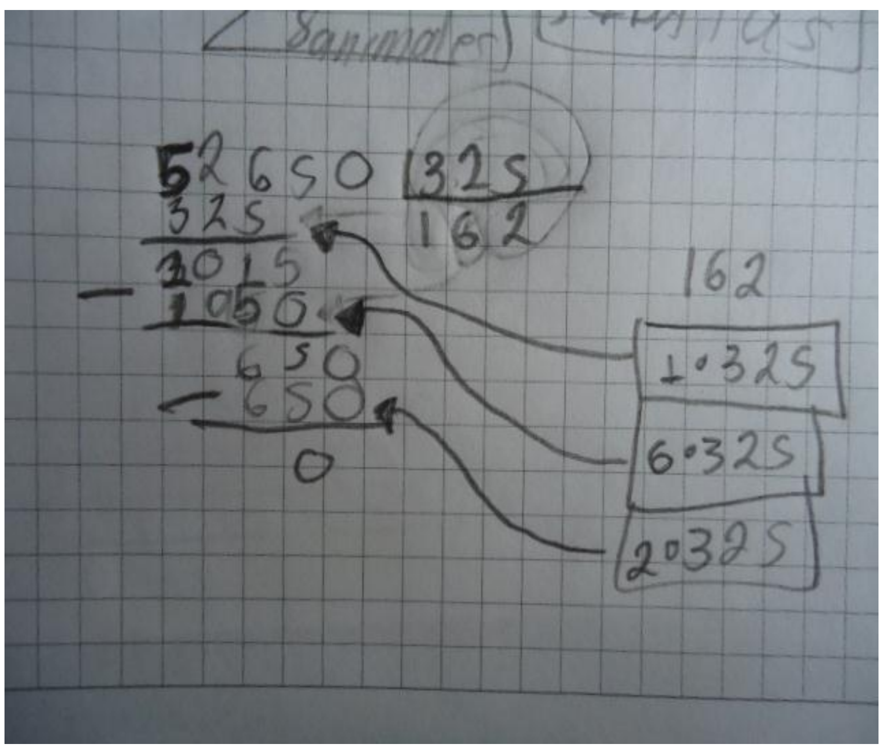


Ilustración 10. Respuesta del punto 3 del taller Nº3.

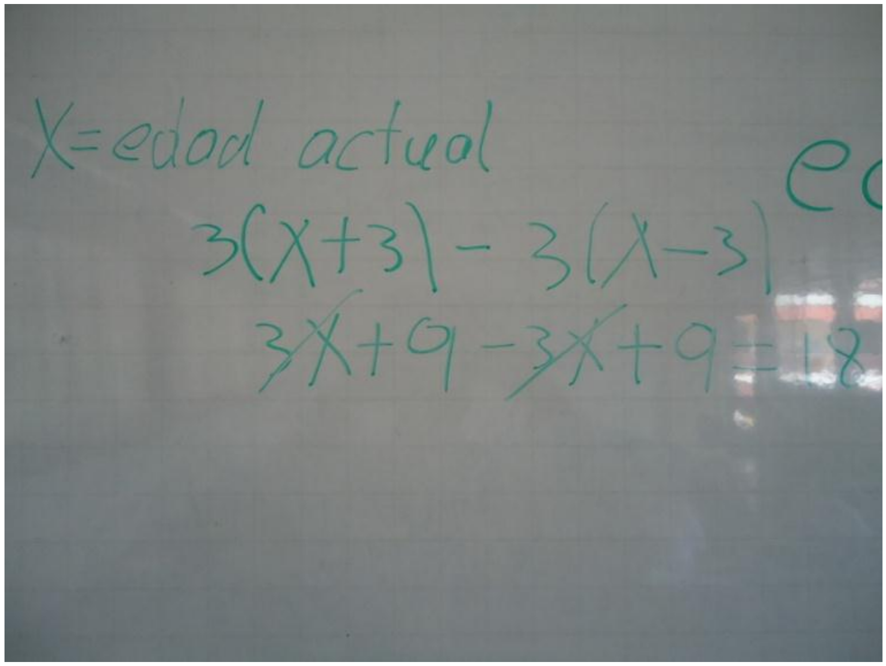


Ilustración 11. Solución del primer punto del taller Nº 4 por un estudiante en el tablero.

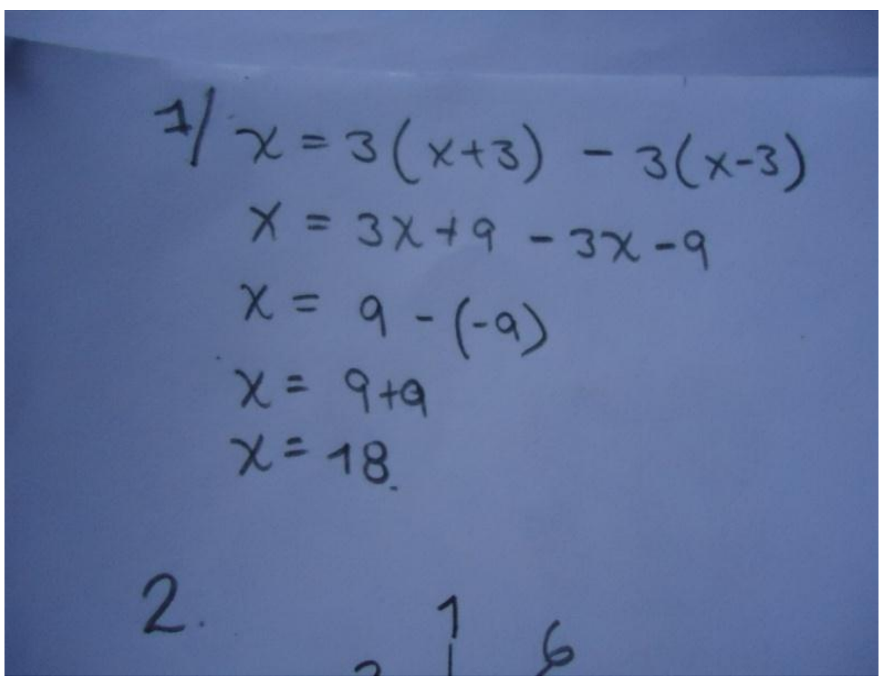


Ilustración 12. Solución del primer punto del taller Nº 4 por un grupo estudiante en sus hojas.

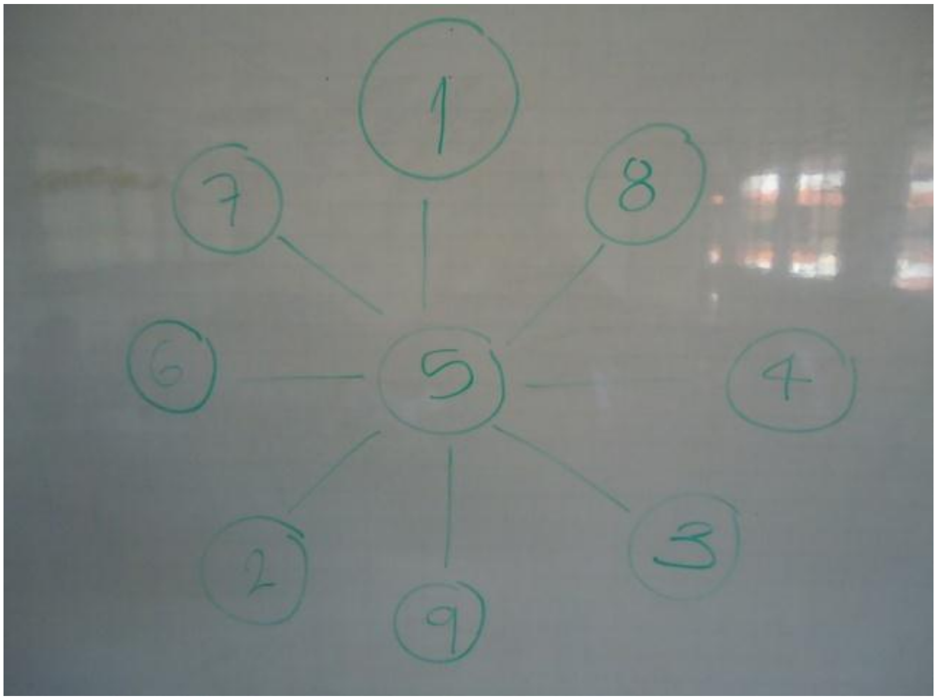


Ilustración 13. Solución del segundo punto del taller Nº 4 por un estudiante en el tablero.

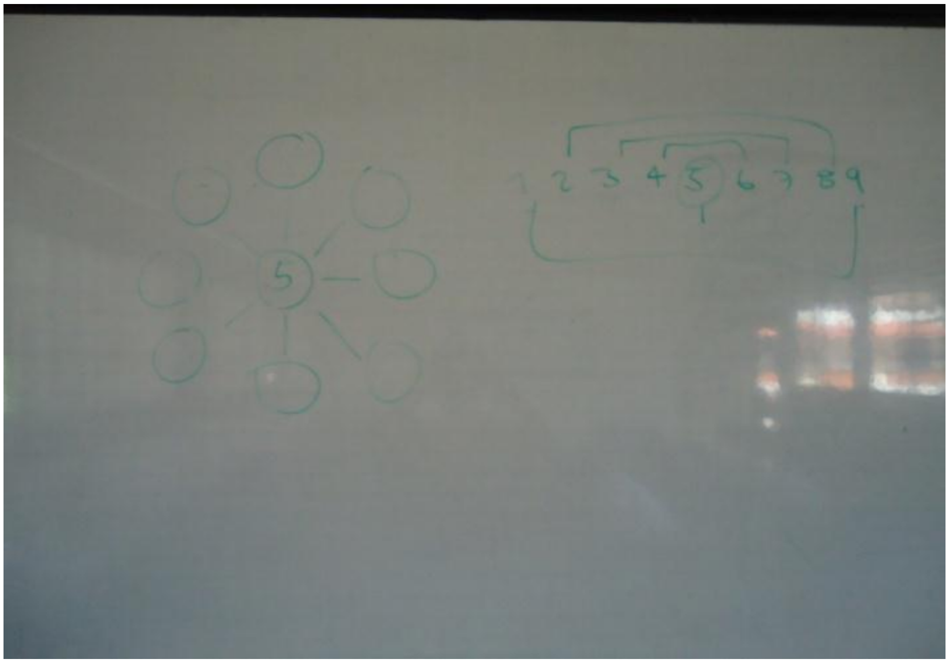
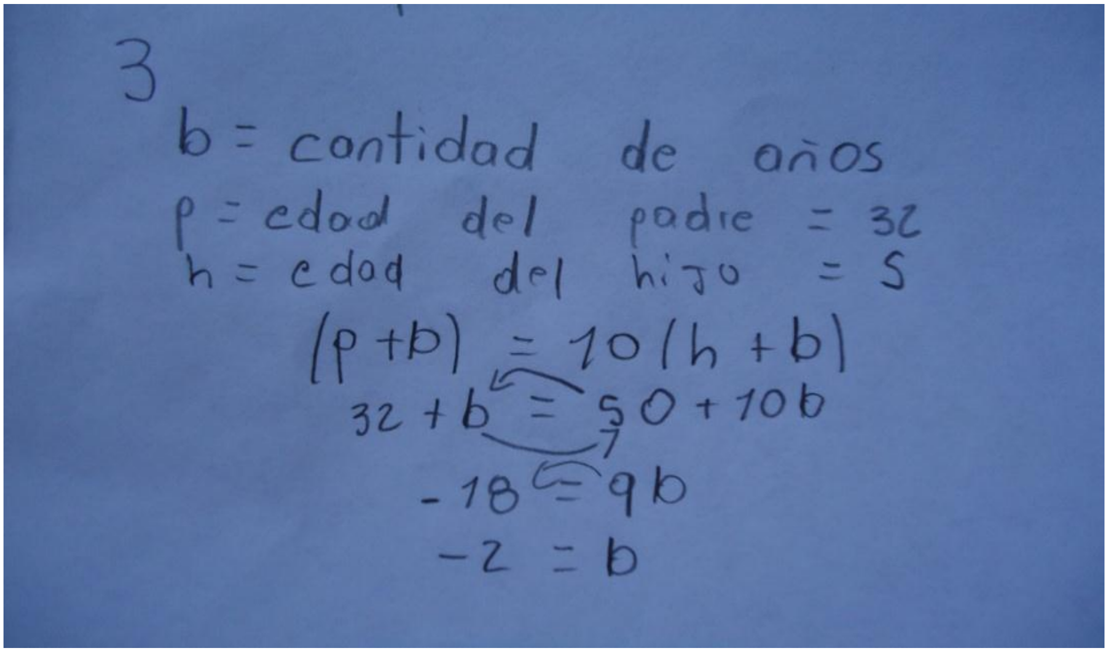


Ilustración 14. Solución del segundo punto del taller Nº 4 por otro estudiante en el tablero.



3

b = contidad de años

p = edad del padre = 32

h = edad del hijo = 5

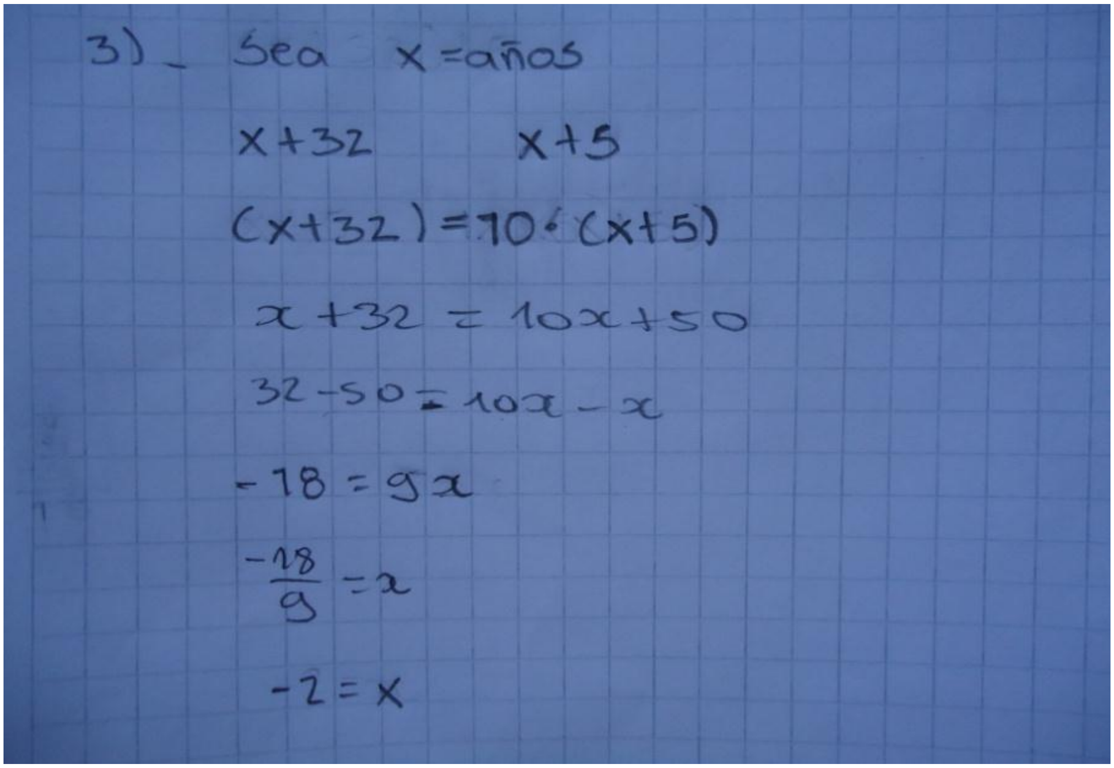
$(p+b) = 10(h+b)$

$32+b = 50+10b$

$-18 = 9b$

$-2 = b$

Ilustración 15. Solución del punto 3 del taller Nº4 por un grupo de estudiantes.



3) _ Sea x = años

$x+32 \qquad x+5$

$(x+32) = 10\cdot(x+5)$

$x+32 = 10x+50$

$32-50 = 10x-x$

$-18 = 9x$

$\frac{-18}{9} = x$

$-2 = x$

Ilustración 16. Solución del punto 3 del taller Nº4 por otro grupo de estudiantes.

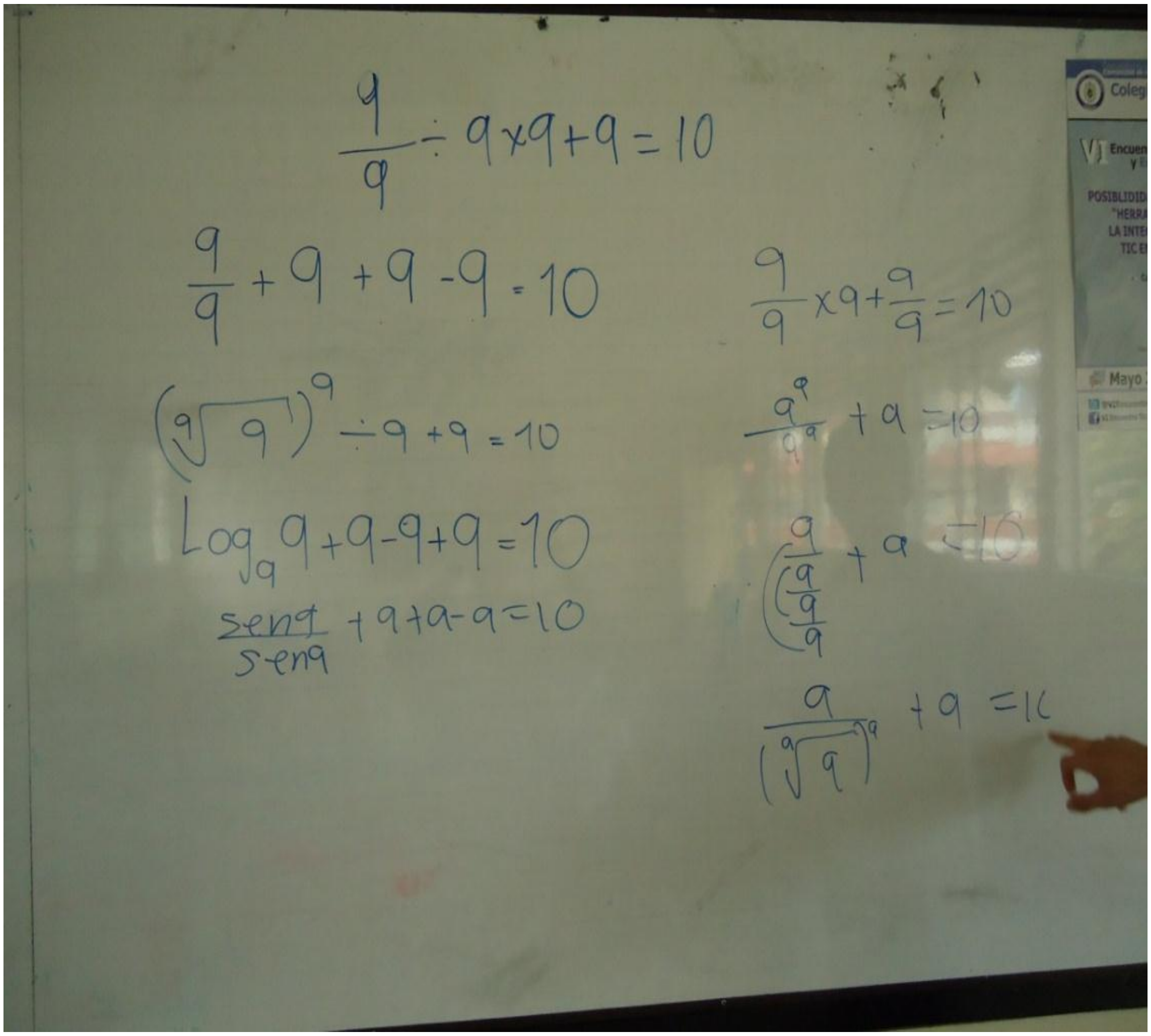


Ilustración 17. Manera heurística de resolución del primer punto del taller Nº5 por los estudiantes.