LA GEOMETRÍA DEL TRIÁNGULO
A TRAVÉS DE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

MARÍA DEL PILAR IMBACHÍ

UNIVERSIDAD DEL CAUCA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS
POPAYÁN
2013

LA GEOMETRÍA DEL TRIÁNGULO
A TRAVÉS DE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

ASESORA: GABRIELA ARBELÁEZ

UNIVERSIDAD DEL CAUCA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS
POPAYÁN
2013

NOTA DE ACEPTACIÓN

EL PRESENTE TRABAJO
DE PRÁCTICA PEDAGÓGICA
FUE APROBADO POR
LA DIRECTORA DE GRADO
Y RESPECTIVA EVALUADORA

WILMER LIBARDO MOLINA Y
COORDINADOR LICENCIATURA
EN MATEMÁTICAS

V.B GABRIELA ARBELÁEZ
DIRECTORA DEL TRABAJO DE
PRÁCTICA PEDAGÓGICA

V.B YENNY LEONOR ROSERO R.
EVALUADORA

CONTENIDO

INTRODUCCIÓN

El documento contiene la reflexión sobre del trabajo que se realizó en la Práctica Pedagógica. Tiene como eje central la formulación, implementación y el análisis de un proyecto, desarrollado en el aula con estudiantes de educación básica o media del municipio de Popayán, un tema de las matemáticas, y una metodología particular. El proyecto de aula se denomina "*la geometría de triángulo a través de la resolución de problemas*". En la primera fase de la Práctica Pedagógica se acercó a los lineamientos teóricos del proyecto, estudiando la obra de George Polya en torno a la resolución de problemas como una metodología alternativa para la enseñanza de las matemáticas. En la segunda fase y tomando en cuenta los elementos teóricos anteriores, se elaboró un diseño en el aula para trabajar el concepto de triángulo en la geometría plana euclidiana, a través del diseño de unas actividades y talleres que más adelante se especificarán. En la tercera fase se implementó el proyecto con estudiantes de grado noveno de la Institución Educativa Julumito, realizando los ajustes pertinentes al proyecto inicial. En la última fase se elaboró este documento que recoge las reflexiones y análisis de todo el proceso.

En el primer capítulo hay una breve descripción de la Institución educativa Julumito, donde se incluye la ubicación de la vereda para situar la Institución dentro de la ciudad de Popayán, una corta descripción de los estudiantes involucrados en el proyecto, apreciaciones personales alrededor de sus instalaciones y finalmente una reflexión suscitada por la implementación del proyecto alrededor de la docencia.

El segundo capítulo se enfoca en una geometría cercana al intelecto del ser humano a través de una breve introducción en la historia de los babilonios y griegos, para recordar que son los seres humanos a través de sus esfuerzos por resolver sus necesidades y sus problemas, los que han permitido el desarrollo de esta disciplina haciéndola asequible a la mente de cualquier ser humano. Un capítulo donde además de mostrar una historia que pone al ser humano como protagonista en el desarrollo de la geometría, resalta la potencialidad de la teoría de Resolución de problemas de G. Polya como una herramienta interesante que presenta una diversidad de instrumentos útiles como: sus cuatro pasos, la analogía, la figura, generalización y particularización para enfrentarse a problemas sin pretender dar recetarios para ello. Una teoría que representa la médula espinal de este trabajo la cual permitió descubrir capacidades en los estudiantes de grado noveno B de la institución Julumito (San Miguel Arcángel) para resolver problemas.

En el capítulo tercero se hace una breve descripción de las actividades y talleres planificados en la fase dos y posteriormente modificados en la fase tres. En éste se hicieron explícitos los temas a tratar, estos fueron: propiedad de los lados de un triángulo, los ángulos interiores y exteriores de un triángulo, recta y puntos notables, semejanza y congruencia de triángulos.

El capítulo cuatro contiene seis bitácoras, cada una de ellas a modo de diario personal en la cual se escribió las impresiones, aciertos, desaciertos de los estudiantes, junto con reflexiones suscitadas por las actividades y talleres implementados en la fase tres. Finalmente, se encuentra el capítulo cinco con las conclusiones, recogiendo la potencialidad de la resolución de problemas en el sentido de hacer de un problema una fuente de aprendizaje para el que quiera acercar a las matemáticas.

OBJETIVOS

Objetivo general

- Trabajar el concepto de triángulo a través de la resolución de problemas

Objetivos específicos

- Acercar a los estudiantes a la geometría a través de la figura como una herramienta potencial a la hora de resolver un problema.
- Reconocer el potencial de la resolución de problemas como un mecanismo para movilizar conocimiento.
- Orientar a los estudiantes en la resolución de una situación problema en geometría.

CAPÍTULO I - INSTITUCIÓN DE MENTES Y CORAZONES ABIERTOS

1.1 Breve Descripción De La Institución Julumito

El corregimiento de Julumito está localizado a 8 Km al occidente de la ciudad capital, sobre la cuenca del río Cauca, con un área de 1.157.17 ha. La vereda de Julumito tiene una institución educativa (sexto a once grado), una escuela (primaria) y un puesto de salud, una iglesia, un acueducto y servicio de energía. La práctica se realizó en la nueva sede San Miguel Arcángel, cuya construcción parte de la necesidad de satisfacer la enorme demanda por parte de la comunidad en el área de la educación, el lote donde reside fue donado por la comunidad con el apoyo de Monseñor Iván Antonio Marín López, esta instalación está constituida por tres pisos, 9 aulas escolares, una sala de profesores, un laboratorio y zonas de acceso para personas con discapacidad.

La institución educativa Julumito es un sitio enriquecido con zonas verdes, donde la contaminación auditiva es mínima lo cual la hace agradable para trabajar. Ésta institución brinda a sus estudiantes un acercamiento directo con la naturaleza, la cual envidiarían los estudiantes del centro de la ciudad. Con respecto a la práctica los estudiantes del grado noveno B, que estuvieron el día lunes de 2-4 de la tarde, eran niños cuyas edades oscilaban entre los 13 y 15 años aproximadamente, personas que según lo manifestaban, eran de escasos recursos, pero sacrificaban su almuerzo y tardes libres para asistir a la asesoría. Gracias a ellos se pudo vivir la experiencia de ejercer la docencia, y experimentar las ventajas y desventajas de esta profesión

1.2 La Práctica Docente: Un Acercamiento A La Realidad Educativa

La práctica fue orientada en el área de geometría, con la expectativa de tratar temas como: el de las propiedades del triángulo, semejanza, congruencia, en el triángulo y además, con el pensamiento ingenuo de tener bien preparadas las clases. ¡Inocente pensarlo! Ya que los errores e inconvenientes surgían durante las clases, convirtiendo lo predecible en lo impredecible donde las expectativas de culminar los temas en su totalidad se convierte en una ilusión.

Sin embargo, con la práctica se reflexiona frente a una expresión de Carlos E. Vasco “para enseñar muy bien mi disciplina, es necesario y suficiente saberla muy bien” (Vasco, 2001, p. 2). Advirtiéndonos que frente a la condición necesaria no tiene duda; pero se pregunta sobre la suficiencia. Interrogante permanente en el transcurso de la práctica, pues conocer matemáticamente los conceptos no garantiza compresión de los temas por parte de los estudiantes. Lo que permitió replantear las actividades y talleres para brindar mejores herramientas para obtener un aprendizaje importante para sus vidas.

Respecto a los estudiantes del grado noveno B, por su corta edad no han planificado un futuro, viven el presente, y no tienen una decisión frente a alguna carrera profesional y menos visualizarse en matemáticas. Sienten la matemática como una disciplina alejada y ajena a ellos. Frente a esto, si ser profesor es arduo se complica, más cuando se es de matemáticas. Cambiar dichas percepciones acerca de la matemática y en particular en geometría fue complicado en algunos estudiantes, empezando por la poca disposición por parte de ellos para trabajar en ésta. Sin embargo se encontró en otros el temple para enfrentarse a los problemas y en la de participar en la diferentes actividades propuestas a lo largo de la práctica, al punto de sentir el deleite por aprender, y esto se afirma porque algunos, agradecían el espacio para reforzar algunos temas los cuales utilizaban para sacar buenas notas en geometría.

CAPÍTULO 2 MARCO TEÓRICO

2.1 *La Geometría Accesible Al Intelecto Humano*

"El Universo está escrito en el lenguaje de las matemáticas y sus caracteres son triángulos, círculos y otras figuras geométricas, sin las cuales es humanamente imposible entender una sola de sus palabras. Sin ese lenguaje, navegamos en un oscuro laberinto". Galileo Galilei

Los inicios de la geometría en Babilonia y Egipto están muy ligados a las mediciones prácticas, de figuras planas como áreas de triángulos, rectángulos y trapecios; de ciertos volúmenes como prismas y cilindros rectos, también, trabajaron con lo que hoy se conoce como el teorema de Pitágoras, semejanza de triángulos, proporcionalidad y aproximación con respecto a lo que conocemos como número π. Todo esto lo consiguieron a través de formulación de reglas obtenidas a través de la experiencia sin ninguna justificación al respecto.

Los griegos antiguos aprovechan los conocimientos de estas civilizaciones y se ocupan de la demostración, privilegiando un pensamiento más abstracto. Este periodo se caracterizó, por seres humanos cuyos nombres perduran en nuestros días, como: Tales de Mileto (624 a. C -546 a. C), considerado el primer matemático griego, a quien se le atribuye el cálculo de la altura de la pirámide de Keops, comparando sus sombras con la de un bastón. La figura de Pitágoras (580 a. C-495 a. C), cuyo nombre es famoso por su gran descubrimiento de la conocida fórmula de los triángulos rectángulos. Desafortunadamente lo condujo a su infortunio con el descubrimiento de lo inconmensurable, el cual parecía refutar su filosofía, de que los números naturales daban explicaciones a los fenómenos del mundo. Pero no olvidemos a uno de los matemáticos famosos de Grecia antigua, Euclides (330 a.C. - 275 a. C) con el primer tratado conocido que propone un método axiomático en las matemáticas. Sin dejar de lado a Zenón de Elea, Arquímedes, Platón y etc.

Esta corta retrospección, se hace para resaltar el hecho de que la geometría está reflejada en la vida diaria de los seres humanos desde tiempos inmemoriales. En la naturaleza los seres humanos observamos figuras geométricas en múltiples eventos: espirales reflejadas en semillas de girasoles y en cualquier variedad de pinos, conchas marinas, caracoles, las cámaras hexagonales de una colmena, las montañas como conos, relámpagos como líneas rectas, los helechos a una cierta distancia se asemejan a un triángulo, y las formas circulares en flores, frutas, cuerpos celestes y la esfera en una gota de roció en la superficie de una hoja, etc.

Estas observaciones se ven expresadas en obras humanas para satisfacer sus necesidades. Recordemos a Leonardo Da Vinci, su fama fue obtenida debido a las observaciones de su medio, adelantándose a su época con máquinas realizadas únicamente en la primera mitad del siglo XX.

Pero no solo los grandes pensadores y profesionales como matemáticos, ingenieros, arquitectos, astrónomos hacen uso de ella. También, profesionales artistas, músicos, pintores, entre otros abstraen de sus conceptos lo mejor para sus disciplinas. Entonces la geometría es accesible al intelecto de cualquier ser humano por ser parte de su medio.

Pero no de la simple observación se puede llegar a entender la geometría. Los personajes mencionados inclinaron sus ojos a esta disciplina, por la necesidad de resolver problemas presentados en sus contextos. Aportando conocimientos a estas civilizaciones dando lugar al desarrollo de lo que conocemos hoy como geometría, cuyo conocimiento continúa cautivando a los contemporáneos.

2.2 *La Resolución De Problemas Como Movilización De Conocimiento*

Todos los que de alguna manera han cursado secundaria y han resuelto un problema matemático, han evidenciado que su solución permite la movilización de conocimiento. Entonces resolver un problema es parte esencial de las matemáticas y en particular de la geometría, la cual brinda a los estudiantes la posibilidad de explorar sus habilidades y de esta manera relacionar la matemática con el mundo que los rodea. Pero ¿Qué es un problema? Al respecto hay muchas definiciones.

"Tarea o situación que no se resuelve aplicando directamente una regla aprendida; hay que entender el enunciado, organizar la información, seleccionar los conocimientos matemáticos útiles, probar, aplicarlos adecuadamente y evaluar el proceso" (Gonzales,2009, p. 3).

"Un problema es un obstáculo arrojado ante la inteligencia para ser superado, una dificultad que exige ser resuelta, una cuestión que reclama ser aclarada" (Heber 2004. p. 2).

"Algunos autores definen el término "problema" como una situación estimulante para la cual el individuo no tiene respuesta; en otras palabras, el problema surge cuando el individuo no puede responder inmediata y eficazmente a la situación" (Jessup, 1998, p.2).

Uno de los matemáticos que más se interesó por la resolución de problemas fue Polya G. (1887-1985). Aunque no da una definición explícita de problema, al leer su libro "Como Plantear Y Resolver Problemas"[1] se puede tener una aproximación: un problema es un reto que permite recurrir a analogías, construir generalizaciones o particularizarlo admitiendo una verdadera movilización de conocimiento.

Aunque las respuestas anteriores son variadas observamos una coincidencia en todas ellas: el del compromiso personal, la dedicación y creatividad al momento de enfrentarse a ellos. No olvidemos la diferencia tan enorme de resolver un ejercicio a resolver un problema. En el primero solo se requiere de fórmulas y técnicas, mientras en el segundo se necesita de un análisis profundo de sus elementos, para organizarlos, y armar dentro de una variedad de conocimientos una posible solución.

[1]Polya G, Como Plantear y resolver Problemas, 2001, editorial trillas.

Polya advierte que "resolver un problema es una cuestión de habilidad práctica, como por ejemplo, el nadar. La habilidad práctica se adquiere mediante la imitación y práctica"[2] (Polya, 2001, p. 27). Una frase que sugiere, el constante entrenamiento, para adquirir experiencia en estrategias a través de la imitación, para luego generar las propias y de esta manera aplicarlas a problemas. Igualmente aconseja que para abordar un problema se deben considerar las cuatro fases siguientes:

- Comprender el problema.

Comprender un problema es interpretar de los elementos lo esencial y de esta manera identificar la relación de los datos con la incógnita.

- Trazar un plan.

Reflexionar frente a las herramientas a utilizar, las cuales deben ser más analíticas que algorítmicas o mecánicas.

- Poner en ejecución el plan.

Esta parte corresponde a comprobar que todas las piezas de plan encajen perfectamente, es decir, no exista duda de las operaciones a llevar a cabo.

- Visión retrospectiva.

Un buen hábito para corroborar y esclarecer la veracidad, es volver nuevamente sobre el problema y analizar con la solución la concordancia o no de la relación entre los datos y la incógnita.

Según Polya (2001) otros aspectos importantes a la hora de enfrentar un problema son: la analogía, la figura, la particularización y la generalización. Con respecto a la primera se tiene que "La analogía es una especie de similitud. Objetos semejantes concuerdan unos con otros en algunos aspectos mientras que objetos análogos concuerdan ciertas relaciones entre sus respectivos elementos" (p.57).

Entonces la analogía ofrece la posibilidad de enfrentarse a nuevos problemas, a través de unos más familiares, permitiendo una comparación de características compartidas para comprender la nueva información y establecer una solución. A continuación se ilustra este aspecto a través del siguiente problema.

"determinar la esfera circunscrita alrededor de un tetraedro dado",[3]

El problema está planteado en tres dimensiones, si no maneja la geometría tridimensional, es necesario buscar en una dimensión menor, para comparar relaciones y comprender el concepto. Esto es posible si abordamos el problema en el plano como por ejemplo:

"determinar el circulo circunscrito alrededor de un triángulo dado"[4]

Para cumplir dicha construcción se necesita de las mediatrices. Con éstas se determina el circuncentro permitiendo dibujar el círculo circunscrito alrededor del triángulo. ¿Cómo corresponder el procedimiento del problema dos con el problema uno? Relacionando las mediatrices del triángulo, con los planos perpendiculares en los puntos medios de las aristas del tetraedro, el cual localiza el centro de la esfera. Suficiente para construirla alrededor del tetraedro.

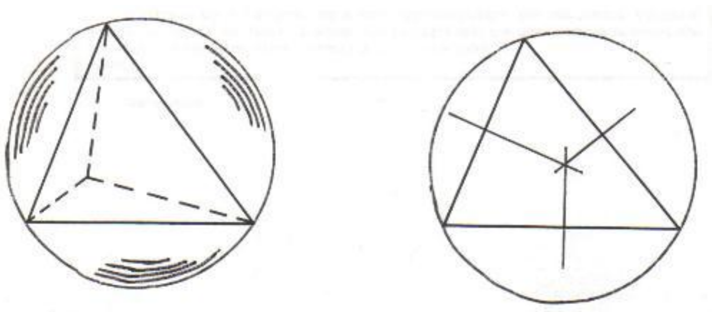


Figura 1. Solución del problema planteado

[3]SORANDO. M. s/f. Resolución de Problemas. Recuperado el 17 de febrero de 2013, de: http://www.oocities.org/es/humor_matematicas/PROBLEMAS/problemas_semejanza_analogia.htm.tmp.
[4]SORANDO. M. s/f. Resolución de Problemas. Recuperado el 17 de febrero de 2013, de: http://www.oocities.org/es/humor_matematicas/PROBLEMAS/problemas_semejanza_analogia.htm.tmp.

- La figura es otro de los aspectos importantes, para abordar un problema, como herramienta que permite distinguir partes de la condición y a pesar de no ser una demostración, permite examinar detalles sin pasarlos por alto, los cuales pueden ser importantes en la solución del problema, también pueden ser memorias auxiliares para no olvidar los datos del problema. Hay que ser cuidadoso con este instrumento, para no sugerir en ellas cosas o particularidades no mencionadas en el problema, que pueden llevar a falsas soluciones.
- No olvidemos, la particularización y la generalización. Al respecto Polya plantea con respecto a estos temas que:

"La particularización, consiste en pasar de la consideración de un conjunto de objetos dado a la consideración de un conjunto más pequeño o incluso de un objeto contenido en el conjunto dado" (Polya, 2001, p. 97).

"La generalización consiste en pasar de un examen de un objeto al examen de un conjunto de objetos, entre los cuales figura el primero; o pasar del examen de un conjunto limitado de objetos al de un conjunto más extenso que incluya al conjunto limitado" (Polya, 2001, p. 97).

Enfrentarse a problemas en ocasiones puede ser engorroso y desalentador, por la cantidad de elementos involucrados. En esta parte la particularización da mecanismos para enfrentarse a ellos a través de la simplificación, es decir, considerar algunos ejemplos para preparar el terreno a una posible generalización o para la refutación de esta a través de un contraejemplo.

Reflejemos mejor lo que es una posible particularización a través del siguiente problema

"Inscribir un cuadrado en un triángulo dado tal que dos vértices del cuadrado deben hallarse sobre la base del triángulo y los otros dos vértices del cuadrado sobre cada uno de los otros dos lados del triángulo respectivamente".[5]

Como la particularización consiste en centrar la atención en algunos ejemplos o en uno solo. Observemos en el grafico como la construcción de algunos cuadrados inscritos en el triángulos pueden acercarnos a una posible solución, ya que estos estas dispuesto con dos vértices en la base y el tercero vértice en el lado izquierdo.

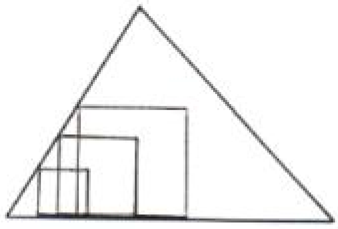


Figura 2. Cuadrados inscritos en el triángulo que cumple con parte de la condición del problema

En la figura 3 se observa que la solución del problema se acerca a una línea recta, en la cual se ubicará el cuarto vértice.

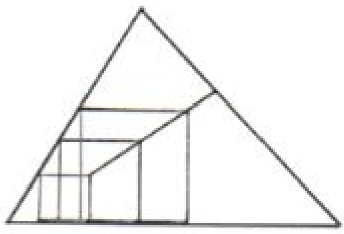


Figura 3. La solución del problema se acerca a una recta

Con lo que se obtiene la posición del cuarto vértice, y de igual manera un cuadrado inscrito en el triángulo cuyos vértices se posicionan en el perímetro del triángulo. El problema muestra como de casos particulares que cumplen

[5]SORANDO.M. s/f. Resolución de Problemas. Recuperado el 17 de febrero de 2013, de :catedu.es/matematicas_mundo/PROBLEMAS/problemas_particularizacion.htm

con una parte de la condición, se puede construir el caso que cumpla con todas las condiciones y así llegar a la solución al problema. (Figura 4)

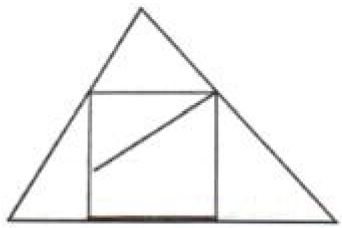


Figura 4. Solución del problema

Respecto a la generalización como una herramienta capaz de ampliar el contexto de un problema, es decir, de algunos casos particulares poder conjeturar y establecer características comunes que la agrupe en una sola propiedad y de esta manera resolver el problema. Por ejemplo

Si sabemos que: *El cuadrado construido sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo tiene la misma área que la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre los catetos*:[6]

Área M= a^2
Área P= b^2
Área N= c^2
$a^2=b^2 + c^2$

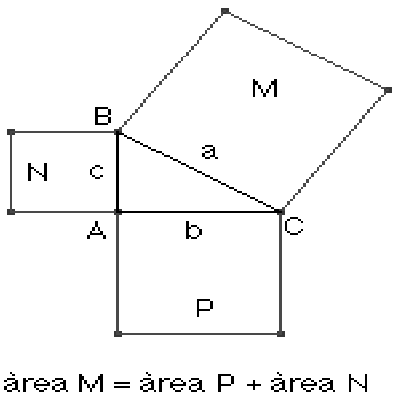


Figura 5. Representación gráfica de la propiedad descrita en el anterior párrafo

Entonces ¿El área de una figura regular construida sobre la hipotenusa, es la misma que la suma de las áreas de las figuras construidas sobre los catetos?

---

6 Anónimo. s/f. Triángulos. Teorema de Pitágoras. Recuperado el 18 de febrero de 2013, de :http://www.uv.es/lonjedo/esoProblemas/3eso14triangulo.pdf

Con esta pregunta se acerca a una posible generalización, la cual permite conjeturar a partir de otros ejemplos como los mostrados en la figura 6, una regla más general de lo conocido con el cuadrado construido en la hipotenusa del triángulo rectángulo, es decir de observaciones particulares establecer una ley más general

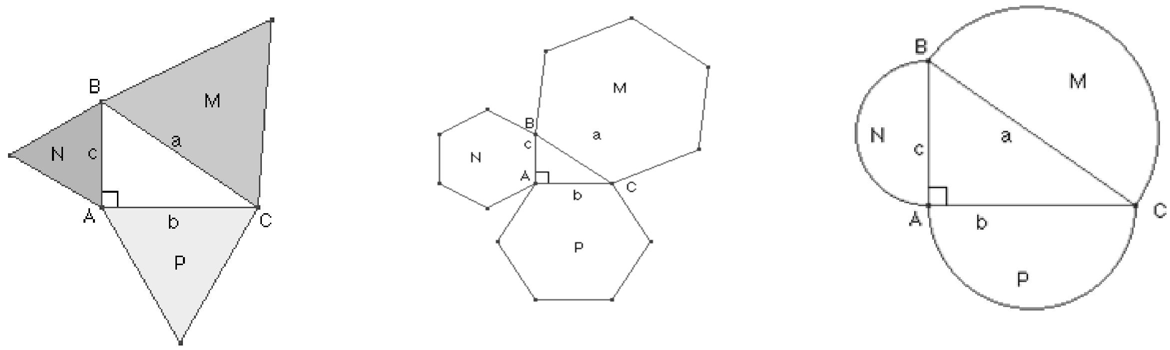


Figura 6. Representación gráfica de áreas de figuras regulares construidas sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo, es igual a la suma de las áreas de las figuras construidas sobre los catetos

Con lo que llegamos a que:

$$\text{Área M} = \text{Área P} + \text{Área N}$$

La analogía, la figura, la particularización y generalización llevan al sujeto a ampliar su léxico matemático y geométrico, y de alguna manera a mejorar sus estrategias basadas en el análisis y no sobre la mecanización de fórmulas. Con el cual movilizan sus propios conocimientos y la exploración de otros para obtener una posible solución al problema.

Recordemos resolver problemas no es un proceso de mecanización ni procesos algorítmicos. Enfrentarse a problemas en general es complejo y en ocasiones no son fáciles de abordar. Recordamos un problema famoso cuya solución llega después de 350 años, el famoso teorema de Fermat y tras grandes esfuerzos es demostrado por Andrew Wiles en el año de 1995. Por tal motivo, al enfrentarse a un problema no solo se debe pensar en su solución sino en sus aportes para el desarrollo del intelecto humano.

Se ha hablado de la geometría y del potencial de la resolución de problemas. Ahora es el turno para el triángulo. Esta figura ha sido de gran utilidad en antiguas civilizaciones, como por ejemplo el triángulo perfecto en Egipto cuyas longitudes corresponden a 3, 4 y 5 unidades, usado, mucho antes del nacimiento de la matemática griega, para hallar ángulos rectos mediante una manipulación empírica de que lo que hoy se conoce como el teorema de Pitágoras. También originó una rama de la matemática denominada trigonometría estudiando la relación de los lados y ángulos en un triángulo. También es evidente el uso en construcciones pasadas y presentes, siendo los triángulos más usados los equiláteros e isósceles por su estabilidad para distribuir peso. Un ejemplo de ello se encontrará en las famosas pirámides de Egipto cuyas cuatro caras son triángulos equiláteros.

Como se anotaba anteriormente las razones para estudiar el triángulo son muchas y variadas; pero ante todo porque es un concepto soporte de otros conceptos de geometría como el de área. Euclides en los libros I y II de los *Elementos* estudia el triángulo y sus propiedades porque ello le permitirá medir el área de cualquier figura rectilínea dividiéndola en triángulos, y transformándolos luego en cuadrados para sumarlos mediante el teorema de Pitágoras. De esta manera ha establecido una ley de composición interna para sumar áreas de figuras rectilíneas tomando como elemento base esta sencilla figura de la geometría. En su libro de los Elementos, Euclides da la definición de triángulo de la siguiente manera:

“Figuras rectilíneas son aquellas contenidas por líneas rectas: figuras triláteras aquellas contenidas por tres líneas rectas, cuadriláteras por cuatro, y multiláteras por más de cuatro”[7].

A pesar de que esta definición es circular como muchas definiciones matemáticas, en este proyecto se trabajará con la noción intuitiva euclidiana de triángulo. Se Parte del hecho de que los estudiantes de la educación básica y media tienen una idea del triángulo que han construido a través de sus cursos de geometría y de la diversidad de representaciones con que ella se refleja en la cultura.

La sencillez de esta figura hace que se estudie en detalle y genere con ello propiedades conocidas para los que están cursando o han tenido el privilegio de estudiar en secundaria. Entre ellos tenemos:

1. La suma de la medida de los ángulos interiores es de 180º.
2. La longitud de un lado es siempre menor que la longitud de la suma de los otros dos lados
3. La suma de la medida de los ángulos exteriores es de 360º
4. La medida de un ángulo exterior a un triángulo es igual a la suma de la medida de los ángulos interiores no adyacentes.

Es importante también resaltar los conceptos de congruencia y semejanza de triángulos. Respecto al primero, su palabra proviene del latín y significa concordar, convenir. En este sentido hablar de congruencia entre triángulos es imaginarse dos triángulos que al superponerlos coincidan y cuyas herramientas para establecer dicha congruencia son los tres criterios los cuales son: LLL, ALA, LAL. Para el segundo, no hay igualdad de tamaño sino conservación de la forma, cuyos instrumentos para establecer dicha condición son: dos pares de ángulos iguales, dos pares de lados homólogos proporcionales e igual ángulo comprendido entre tales lados, tres lados homólogos proporcionales

[7] EUCLIDES.1991.Elementos.Gredos.Madrid.

Para finiquitar, el triángulo es una figura sencilla pero de gran relevancia para la geometría, cuya utilización ha estado presente en el hombre para mostrar la capacidad humana para mejorar su entorno.

CAPÍTULO 3 METODOLOGÍA

El proyecto de aula desarrollado estuvo enfocado en la geometría del triángulo (construcción de triángulos, relación entre los ángulos internos y externos, semejanza y congruencia), El trabajo que se llevó a cabo con los estudiantes de noveno B, fue planificado a través de actividades y talleres, con unas pocas clases magistrales para cerrar temas. Los talleres y actividades, se brindaron como herramientas para comprender el problema, trazar y ejecutar el plan y revisar las soluciones. El trabajo en el aula se dividió de la siguiente manera.

1. Actividad uno y el taller de diagnóstico.
2. Construcción de triángulos a partir de sus lados.
3. Construcción de triángulos a partir de sus ángulos.
4. Congruencia.
5. Semejanza.

Las actividades de los seis ítems, fueron planificadas con el fin de brindar herramientas necesarias para enfrentarse a los problemas planteados en los talleres. Están compuestas de:

- Un gráfico, para resaltar la importancia de una interpretación profunda de esta, para hacer explícito lo oculto a los ojos y familiarizarse con las figuras geométricas en particular el triángulo.

- Un juego con componentes lúdicos para permitir conjeturar sobre las propiedades de los lados de los triángulos.
- Manipulación del papel con el fin de asociar propiedades de los ángulos internos como externos de forma empírica.
- Construcción de dos criterios de semejanza de triángulos a partir de la generalización del concepto.
- Reproducción de un triángulo para construir uno de los tres criterios de congruencia (LLL).

El primer taller fue propuesto para establecer un análisis, de cuanto saben los estudiantes con respecto al triángulo y sus propiedades. El taller diagnóstico tiene los siguientes temas:

1. Clasificación de triángulos.
2. Propiedades de los ángulos (ángulos internos y externos).
3. Semejanza de triángulos.
4. Congruencia de triángulos.
5. Rectas y puntos notables.

Los talleres de los cuatro ítems enfatizan en, resolver problemas los cuales permitan colocar en práctica los cuatro pasos de Polya: leer el enunciado identificando la relación de los datos con la incógnita, observar estrategias y posibles analogías para resolverlos al igual que la utilización de la figura para representar e interpretar los datos y la incógnita propuestos en algunos problemas.

Los talleres son dispuestos de tal forma que los estudiantes reconozcan a partir de sus observaciones conjeturas que les permita un acercamiento a lo referente al triángulo. Con lo que reforzaron conceptos, propiedades para conectarlos con los previos de una manera reflexiva, para olvidar en algunos la mecanización de algoritmos. Al finalizar cada ítem se fortalecieron conceptos a través de problemas adicionales, y se enunciaron explícitamente en el tablero los criterios y propiedades correspondientes para cerrar los temas.

CAPITULO 4 – BITÁCORAS

Bitácora en la vigésima edición del Diccionario de la Lengua Española, significa: “Mar. Libro en que se apunta el rumbo, velocidad, maniobras y demás accidentes de la navegación”[8]. El sentido de bitácora que hemos retomado en esta Práctica y que proviene primigeniamente de la anterior definición, tiene que ver con un escrito heterogéneo donde se recogen reacciones, percepciones, impresiones de las actividades (la descripción de las actividades se encuentran en los anexos) que se llevaron a cabo en el aula de clase. Evidentemente hay un elemento subjetivo; pero también intentamos hacer un análisis reflexivo de los problemas matemáticos propuestos en clase. Es una forma de diario personal cuyo fin según Valentino, Vries (s/f) oficia como una memoria acumuladora de experiencias recibidas y producidas en este caso en la fase tres.

4.1 B*itácora introductoria: un primer acercamiento a la geometría a través del triángulo*

La importancia de la figura para resolver algunos problemas geométricos la convierte en una herramienta importante a la hora de resolver problemas. Con la actividad uno (ver anexo, actividad uno p.55) se quiso realizar una acercamiento a este tipo de herramientas, por supuesto no tan formalmente, donde se permitió identificar que los estudiantes manejan la noción de cuadrado como “una figura cuyos lados son iguales” sin hacer alusión a sus ángulos. Con respecto al triangulo afirmaron lo siguiente “una figura formada de tres lados y tres ángulos, cuya posición no afecta esas características”.

Como se puede observar la actividad no se enfocó en un simple conteo de cuadrados y triángulos, sino la de explicitar aspectos importantes no captados con una simple observación. Pero en el camino para llegar a la solución, los

[8] Lujambio, A.L. 2008. Cuaderno de bitácora; un recurso para ir y venir de la teoría a la práctica. Revista que hacer educativo. Montevideo.

estudiantes trajeron significados que no eran importantes para la solución. Es aquí, donde Polya con su teoría encaja perfectamente, permitiendo con ésta infundir en ellos la importancia de hacer distinción entre datos importantes en el problema y posibles distractores, que cohíben una planificación acertada para acercarse o llegar a la solución.

Un aspecto importante (así se consideró) es que para resolver este problema no se requirió de conceptos previos elaborados, permitiendo un acercamiento no tan formalmente a la geometría, y de esta manera encontraran la motivación para resolver problemas geométricos que involucraran al triángulo.

El resultado obtenido fue: los estudiantes perciben de la figura solo cosas evidentes por el ojo humano, no lo exploran sino después de ser advertidos de ello, donde la labor del docente se convierte en la de un guía para que los estudiantes adquieran destrezas y estrategias para resolver problemas, y de esta manera movilizar conocimientos en particular en lo geométrico.

La actividad permitió, indagar acerca de conocimientos previos en los estudiantes alrededor del concepto de triángulo. Pero se necesitaba indagar más sobre esos conocimientos. Es por ello que el taller diagnóstico permitió hacer ese sondeo (ver anexo, taller uno, p. 55,56, 57, 58,59).

En el taller se vieron inconvenientes que no permitirían, realizar las actividades y talleres futuros. Entre ellos tenemos, la de haber olvidado o en otros casos no conocer propiedades del triángulo como por ejemplo, la medida del ángulo exterior a un triángulo es igual a la medida de la suma de la medida de ángulos interiores no adyacentes, aunque algunos estudiantes recitan bien que la suma de la medida de los ángulos interiores es de 180º fue difícil concebir un plan completo para calcular en el caso del punto tres (ver anexo, taller número uno p.56) el valor de las variables. Esto debido a que no relacionaban los datos con la incógnita, en otros casos ni siquiera sabía cuál era la incógnita por ignorar la información proporcionada en la figura.

A continuación en la figura 7 se muestra que tan lejos llegaron algunos estudiantes en este punto del taller.

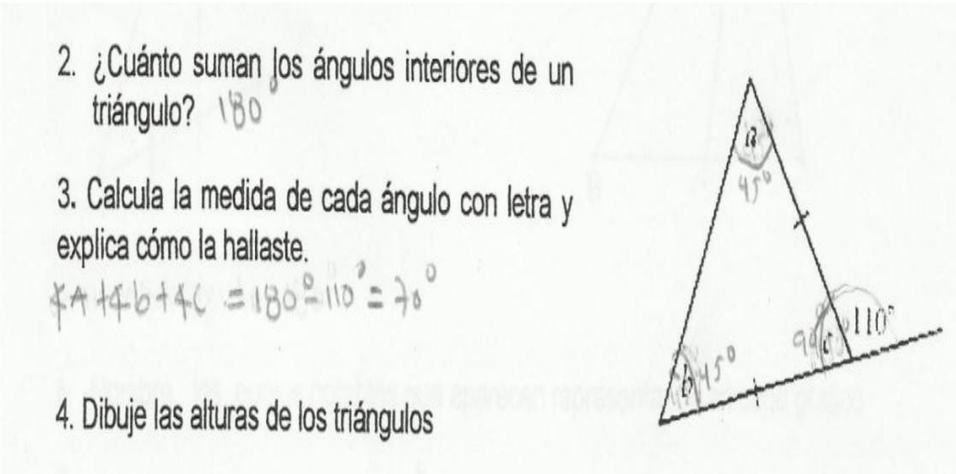


Figura 7. Aproximación a la solución del problema

En la figura 7, se observa como el punto dos fue utilizado en función de una planificación para encontrar la solución del punto tres, donde se logró una relación con la medida del ángulo exterior para hallar el valor de la incógnita c pero ignoran como utilizar éste dato para encontrar los valores restantes. Se hizo evidente que no se está contemplando todos los datos del problema, confirmando que leer y entender bien el problema para sacar datos e incógnitas, no son tenidas en cuenta al momento de enfrentarse al problema. A pesar de que en la actividad uno se exploró la potencialidad de la figura, no se usó y es allí donde se restringe la planificación de un plan para resolver el problema. Solución que estaba cercana si hubieran hecho una interpretación correcta de la figura que indicaba que el triángulo es isósceles con lo que facilita encontrar valores a las variables a y b.

Para los puntos cuarto, quinto y sexto (ver anexo, taller uno, p.56, 57, 58), las dificultades halladas, radicaron en desconocer los conceptos de rectas y puntos notables. Con excepción del cuarto ya que tenían recuerdos que giraban en torno a una sola altura dentro de un triángulo, sin contemplar las dos restantes y menos concebir una externa al triangulo para el caso del triángulo obtusángulo.

Para los puntos 7 y 11 correspondientes a congruencia y semejanza en el mismo taller, las cosas no pintaban muy bien. Los estudiantes relacionaron este concepto con congruencia y para este último recitaban su significado pero no tenía idea como aplicarlo en el problema. Con respecto a este punto para afirmar la congruencia entre triángulos las justificaciones fueron las siguientes: la respuesta es e) porque “no tienen ángulos iguales” conclusión a la que llegaron utilizando el transportador. Otros por lo siguiente “no tenían la misma forma, ni tamaño, ni medida” utilizando la regla. La respuesta a la anterior afirmación se ve reflejada en la figura 8.

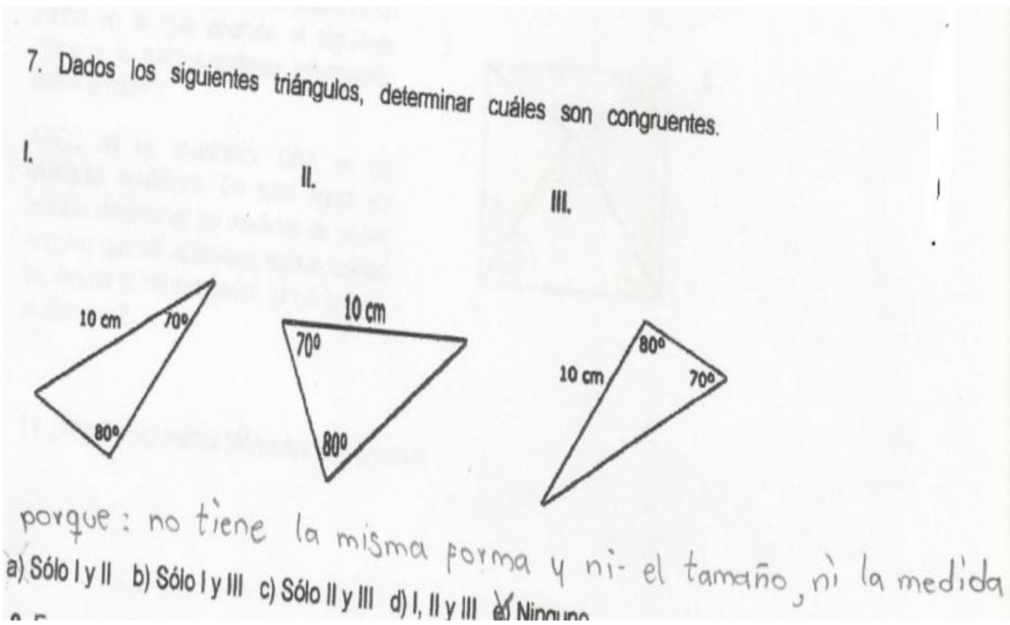


Figura 8. Solución planteada por un estudiante con respecto al problema 7 del taller diagnóstico

Respecto a la única solución del punto 11(ver anexo, taller uno, p. 58) se observa el uso aparente del el criterio de AAA para determinar la semejanza. Pero si se analiza la respuesta más detalladamente lo que permitió establecer la semejanza fue el segundo punto del taller que le confirmaba que en todo triángulo la suma de la medida de los ángulos interiores en un triángulo es de 180º más que el criterio (ver figura 9)

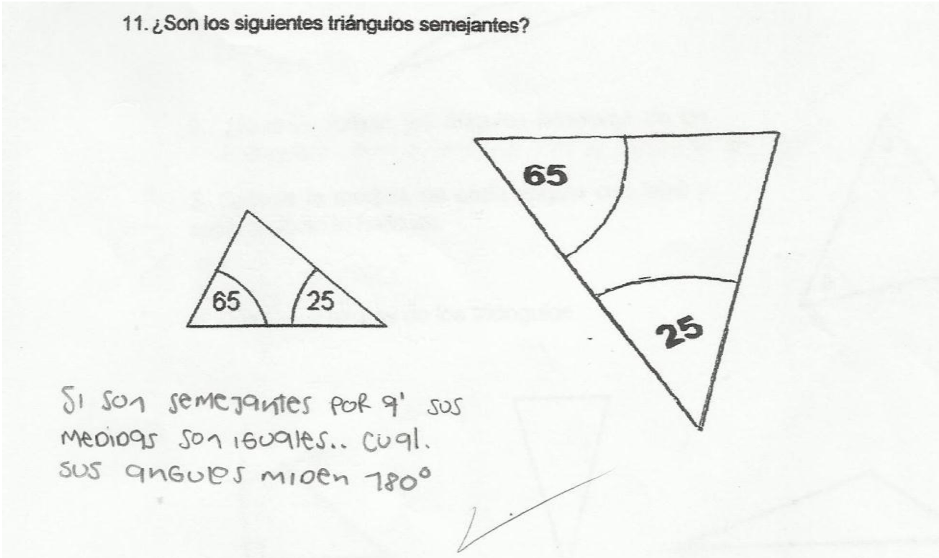


Figura 9. La única solución del punto 11

En el punto ocho del taller diagnóstico (ver anexo, punto ocho, ítems c, p. 58) se hizo evidente el gran temor al enfrentarse a problemas con variables, evadiéndolos en procedimientos que no son necesarios, como por ejemplo hallar el valor de la variable, cuando la incógnita no requiere de valores numéricos. Hallar la respuesta, requería por parte de los estudiantes un procedimiento análogo al de los ítems a y b (ver procedimientos en la figura 10) con la diferencia de que en lugar de un valor numérico se hallaría una función que dependería del valor que se le diera a la variable a.

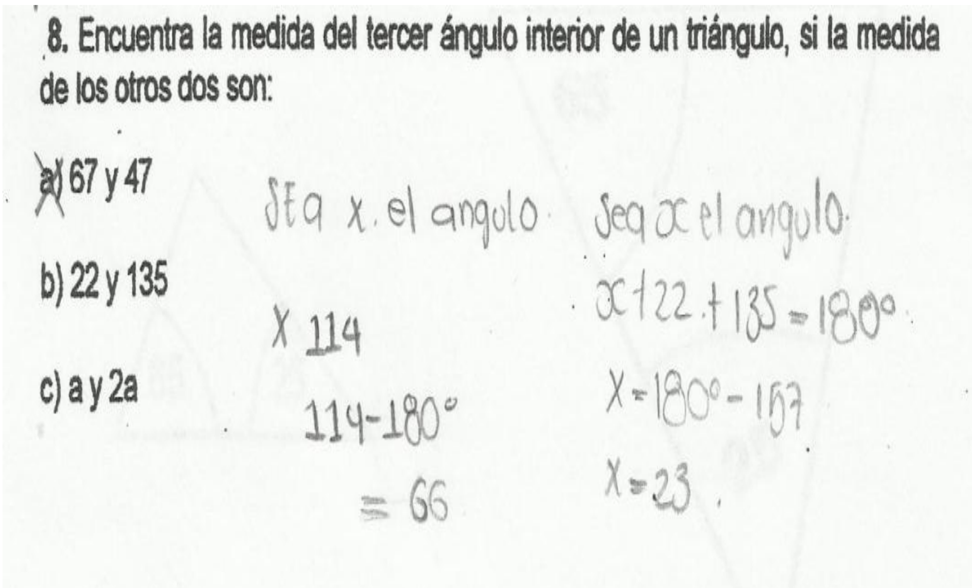


Figura 10. Procedimientos para resolver los ítems a y b del problema 8

Como la idea a trabajar es incluir la resolución de problemas, para movilizar conocimiento y en particular el triángulo. El punto décimo (ver anexo, taller uno, p.58) comienza a ser el primer paso para poner en juego los cuatro pasos de Polya, como leer bien el problema, comprender el problema ejecutar un plan y realizar una retrospección. Sin embargo aparece el fantasma del punto ocho el temor a las variables, dicho temor no permitió por parte de los estudiantes elaborar un plan para solucionar el problema. Éste no permitía encontrar la relación de los datos con la incógnita por sumergirse en esta última sin analizar los datos que ofrecían los valores que necesitaban para solucionar el problema.

A pesar de los inconvenientes, la motivación con la actividad se consiguió, ya que en unos generó curiosidad por continuar asistiendo a las sesiones y aprender cosas nuevas o recordar las adquiridas en el pasado. Con respecto a sus conocimientos previos alrededor del triángulo ignoraban muchas cosas o no las recordaban en ese instante, convirtiéndose en su mayor dificultad a la hora de abordar los problemas del taller. El sondeo permitió reconocer las fortalezas y debilidades descritas en la bitácora y que se contemplaron para posteriores sesiones, y de esta manera lograr el objetivo principal.

Adicionalmente se evidencia y se valora en los estudiantes del grado noveno B, la flexibilidad de cambiar sus opiniones frente a como se debe abordar un problema. Reconociendo en ese proceso la importancia del triángulo como la motivación para comprender que la geometría puede ser una herramienta útil para comprender el mundo que los rodea.

4.2 *Bitácora 1: Construyendo Triángulos A Partir De Sus Lados*

Una de las razones para abordar la propiedad de los lados de un triángulo, es la poca reflexión frente a esta. No se recapacita si dada tres longitudes arbitrarias, la construcción es posible. Para obtener la atención respecto a la propiedad se recurre al "juego de triángulos" (ver anexo, actividad dos, p .58, 59)

El juego parecía ideal para recordar la clasificación de los triángulos según sus lados, y la propiedad de los lados de un triángulo. Pero, lo de ideal se esfuma con la práctica. Para los estudiantes los valores arrojados por los dados representaban números sin ningún significado. Para responder ¿Cuándo es permitido construir un triángulo? Recurren a la regla, para trazar triángulos con los valores obtenidos. Sin detenerse a reflexionar si las longitudes permitían dicha construcción. En la figura 11 se representa dichos dibujos.

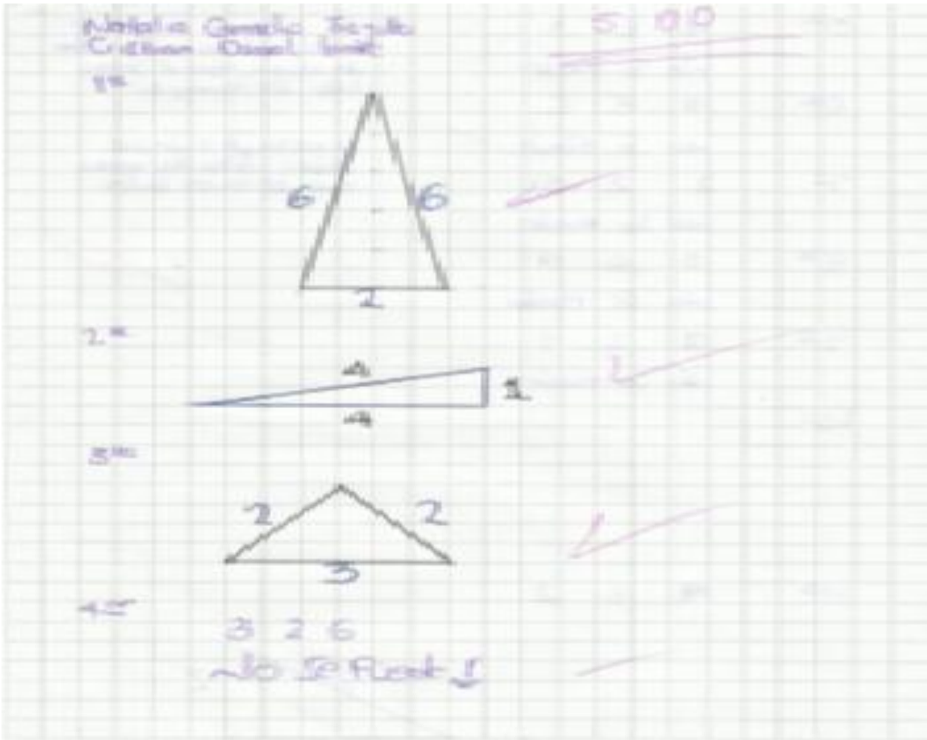


Figura 11. Representación de los posibles triángulos con las longitudes arrojadas por los dados

Al observar los inconvenientes con el juego como: estrategias equivocadas para enfrentarse a él, se optó por representar los 12 lanzamientos en una tabla. Para indicar donde se permitía la construcción de triángulos, sin enunciar la propiedad. Mediante la observación a dicha tabla los estudiantes conjeturan lo siguiente “solo se puede construir un triángulo cuando dos de sus tres longitudes fueran pares”.

Dicha conjetura fue obtenida, al observar que en la mayoría de los casos donde se obtenía la construcción, dos de sus tres lados eran pares.

Tabla 1

12 lanzamientos obtenidos con el juego

N^0		
1	6 6 2	Si
2	4 4 1	Si
3	2 2 3	Si
4	3 2 6	No
5	4 2 1	No
6	3 3 6	No
7	2 2 5	No
8	5 6 1	No
9	2 2 1	Si
10	6 5 2	Si
11	4 3 2	Si
12	6 6 3	Si

Para culminar esta parte se comentó que las suma de dos de los lados de un triángulo es mayor que la del tercero. Un error que cohibió a los estudiantes hacer más conjeturas. Pero al proporcionarla establecen para el primer lanzamientos que 6+6 =12 y 12 es mayor que 2.

La tabla ofreció, también, la posibilidad de explorar otros aspectos, como ¿Qué pasa si se resta dos de los lados de un triángulo? Pregunta cuya respuesta es:” *menor que esa diferencia*” permitiendo la utilización de la propiedad general para conseguir la respuesta. Otro aspecto importante, se destacó en el quinto lanzamiento. Observemos, 4+2=6 y 6 mayor que uno, a simple vista la propiedad es válida. Con esta suma refutaban la negación obtenida en la tabla. Un ejemplo perfecto para indicar que para refutar la negación del quinto lanzamiento era necesario hacer la suma 2+1 para observar si es o no posible la construcción. Al hacer la verificación los estudiantes comprenden, la importancia de considerar una segunda suma para indicar una posible construcción.

Para finalizar esta parte se analizó el lanzamiento 6, el cual generó confusión en los estudiantes. En este se obtiene una igualdad, con la cual no se tenía la seguridad de afirmar o refutar la construcción del triángulo. La propiedad según lo manifestado por los estudiantes, no brinda herramientas para obtener algo al respecto. A lo cual se detiene a analizar la propiedad y observar la no posibilidad para la igualdad. Sino de una desigualdad estricta, donde no se contempla este aspecto para la construcción.

Esto permitió contemplar el gusto de los estudiantes por los algoritmos. Pero complacencia sin análisis a la solución, sino por salir rápidamente del problema sin detenerse a pensar en la verificación de esta. Con la tabla se reconoce, la importancia de dicha retrospección, acercándose a la propiedad para aclarar aspectos pasados por alto como la no consideración de la igualdad en la propiedad y realizar combinaciones con los lados para asegurar la construcción.

Las verificaciones de los lanzamientos están representados en la figura 12 (algunos optaron por sumas y otras por restas mientras otros optaron por elegir ambas).

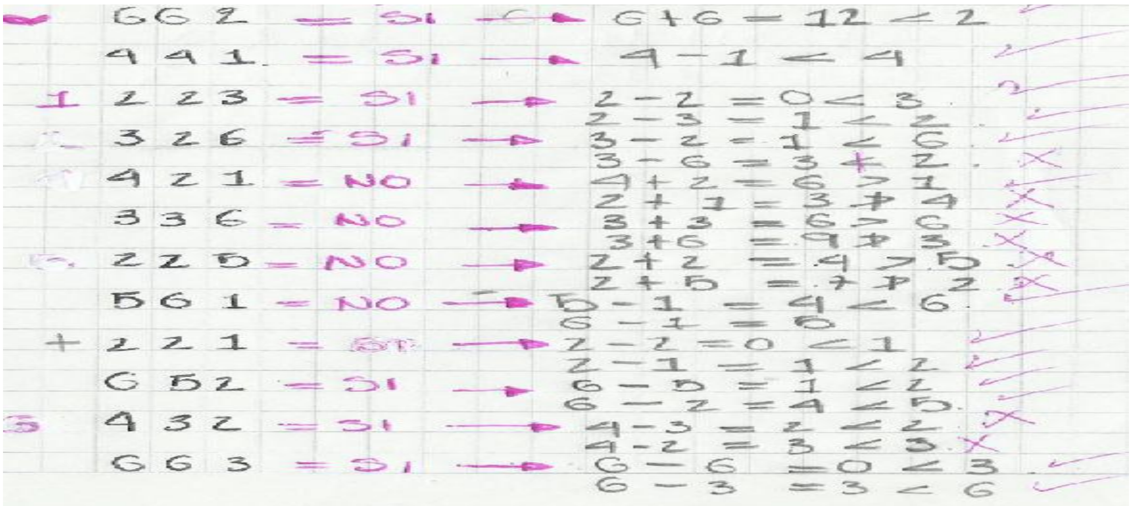


Figura 12. Verificación de las longitudes obtenidas con los lanzamientos para una posible construcción de triángulos

En las verificaciones no se encuentra todas las combinaciones, pero se realizan mentalmente o en hojas para dar seguridad de la construcción. En esta figura se refleja dificultad en los símbolos de mayor y menor, igual que sumar números enteros. Conceptos comentados en el transcurso de la actividad para llenar esos vacíos y de esta manera poder enfrentarse al taller.

Para finiquitar esta parte, se pide a los estudiantes redactar la propiedad. Esto con el fin de que el concepto no fuera mecánico, y permanezca presente en su vida para en un futuro reflexionar, si dada tres longitudes es posible la construcción de un triángulo.

Uno de los resultados se encuentra en la figura 13

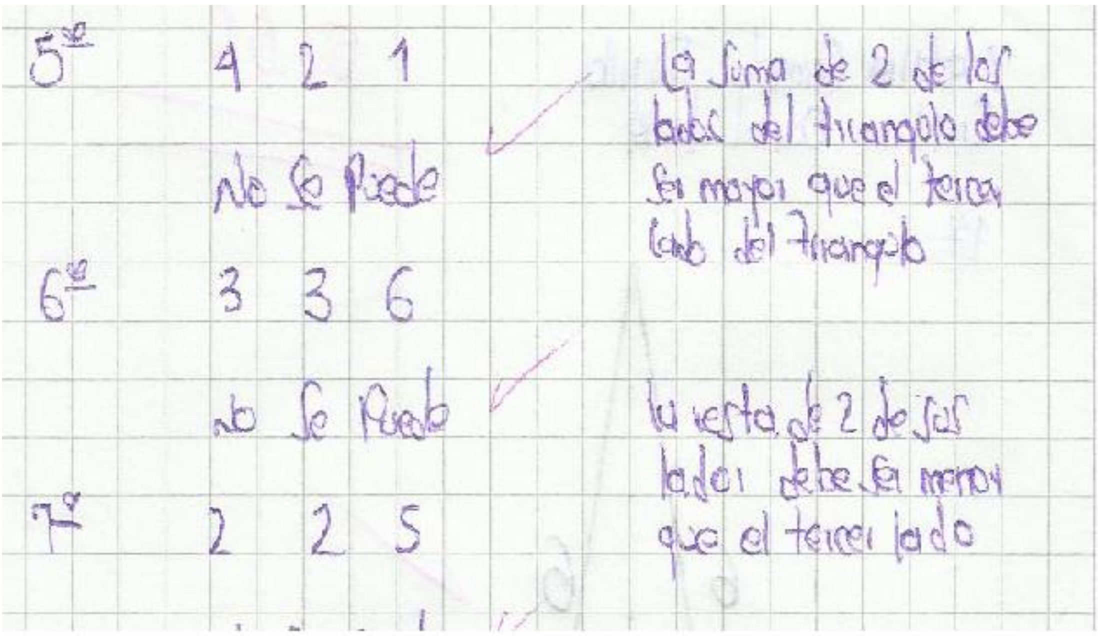


Figura 13. Redacción de la propiedad por parte de los estudiantes

Aunque el propósito formulado con el juego para establecer la propiedad de los lados del triángulo falló, éste fue usado, también, para observar la apropiación de la clasificación de los triángulos a partir de los lados. Donde no hubo problema una vez se establecía la construcción de los triángulos.

Para corroborar cuan profunda fue la reflexión para los estudiantes alrededor de la propiedad, se procedió con el taller (ver anexo, taller número dos, p. 60) el cual permitió con el punto uno utilizar la propiedad, para confirmar una posible construcción o descartarla, donde en el ítems a) y c) la construcción no es posible por romper con la condición de la propiedad, un punto que no causó dificultad una vez fue sustentado con las reflexiones obtenidas en la actividad número dos.

Siempre se recalcará que uno de los objetivos primordiales es movilizar conocimiento en particular el triángulo a través de la resolución de problemas. Con esta percepción se incluye el punto dos del taller (ver anexo, taller número dos, p 60). Punto que permitió conectar los conceptos dados y conectarlos con los previos de una manera reflexiva, olvidando la mecanización de algoritmos para solucionar el problema, surgidos en la actividad dos. Reflexión orientada en la aplicación de algunas de las recomendaciones de Polya

Se podrá parecer repetitivo con respecto a las recomendaciones que hace Polya para enfrentarse a un problema, pero se consideran necesarias pues sería como dice Polya (2001) inútil contestar una pregunta que no se entienda.

Con éstas los estudiantes comienzan a identificar los datos más claramente identificándolos de la incógnita, pero conservando la relación entre ellos. Pero como Polya no da recetarios con sus recomendaciones no siempre asegura el triunfo. Esto se afirma por que el problema presentó dificultades con el concepto de perímetro, ya que los estudiantes no recordaban su significado, truncando la posibilidad de encontrar la solución.

Para subsanar este obstáculo se menciona al perímetro como la suma de las longitudes de los lados de una figura. Una vez aclarada la palabra, establecen que los lados del triángulo equilátero era de 12 y los lados del isósceles eran de 10 y uno de 12. Con esto y la definición de perímetro supuestamente comprendido sumaron todas las longitudes de los lados. Surge aquí otra dificultad la de sumar los tres longitudes de los lados del triángulo equilátero y las longitudes de los lados del triángulo isósceles. Lo cual confirmaba dificultad en la definición de perímetro. Para aclarar esto, se pidió a los estudiantes dibujar la figura en el tablero e indicar cuales eran realmente los lados a sumar para establecer el perímetro de la figura. A lo que concluyen que eran cuatro y no seis. Una vez aclarado el inconveniente hallaron la solución.

En la figura 14 se presenta una solución del problema. La solución presenta errores de redacción, pero se escogió por la argumentación verbal del estudiante la cual era correcta. Fue uno de los estudiantes que se motivó con este tipo de problemas, que exigen un comprensión y análisis profundo de conocimientos sin hacer uso mecánico de fórmulas. Uno de los mejores estudiantes, quien a pesar de no gustarle mucho las matemáticas, tenía una habilidad especial para resolver problemas.

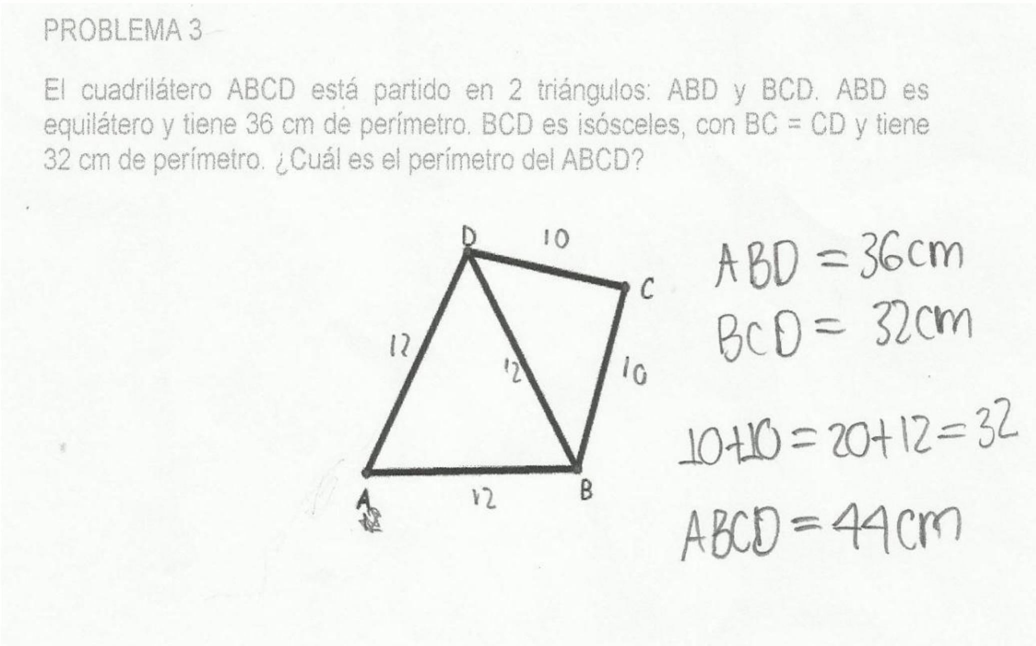


Figura 14. Solución al problema 3 taller dos

Se es consciente del error cometido, al dar a los estudiantes la propiedad, reduciendo la actividad a mecanización de fórmulas. Esto es debido a que se asume como practicante preceptos como el de tener estudiantes que utilizarían instrumentos como el compás para responder afirmativamente o negativamente a la construcción a partir de tres longitudes dadas. Lo cual no sucedió, pues se limitaron solo al uso de la regla, que no permitía identificar la propiedad sino alejarlos de ella. Sin embargo la actividad cumplió con su cometido meditar si tres longitudes permiten la construcción de un triángulo al igual que revisar la solución para verificar si cumple con las condiciones iniciales del problema. Con lo realizado si no recuerdan a la perfección la propiedad se van a detener a reflexionar si dadas tres longitudes cualesquiera se puede construir un triángulo.

Con respecto a las recomendaciones que hace Polya a la hora de enfrentarse a un problema tratados en la bitácora uno (problema dos del taller dos) los resultados obtenidos fueron aceptables. Pues entender el problema fue crucial al momento de resolver el problema dos, con lo que se generó la motivación para resolver este tipo de problemas. Éstos (problema dos) exigen un análisis "profundo" para conectar y movilizar conocimientos para adquirir experiencia a la hora de elaborar un plan que permita cálculos acertados para obtener su solución.

4.3 *Bitácora 2: la suma de la medida de los ángulos interiores de un triángulo es 180º*

Por lo general en la educación media se comentan que la suma de la medida de los ángulos interiores de un triángulo es de 180º y en muchas ocasiones se ignora la razón del por qué esa igualdad. Para aclarar esta cuestión se pensó en primera instancia llevar una demostración formal, pero al revisar el taller diagnóstico comentado en la bitácora introductoria, se comprende que no era la mejor idea, ni el camino correcto para infundirles el aprecio por la geometría.

Para generar motivación alrededor de encontrar una justificación de la propiedad ya mencionada se optó porque los estudiantes, se acercaran a la justificación de manera empírica. A través, de la manipulación del papel (ver anexo, actividad tres, manipulación con papel, p.61). La actividad permitió reflexionar frente a la diferencia de recitar de memoria una propiedad al de justificarla.

Si recordamos en el taller diagnóstico los estudiantes recitan la propiedad, pero no tienen una justificación al respecto. Esto es más claro con la actividad tres, en la figura 15 hay una afirmación correcta pero no concuerda con la manera como arregló los ángulos recortados en el triángulo (para obtener un ángulo llano que le hubiera garantizado que la medida de los ángulos interiores de un triángulo es de 180º). Por el contrario en la figura 16 hay conexión entre la afirmación y lo realizado por el estudiante obteniendo una justificación no solamente escrita sino empíricamente de la propiedad.

El caso de la figura 15 hace reflexionar, en que a pesar de generar motivación en los estudiantes la actividad tres, no fue suficiente para lograr el 100 por ciento. Queda la duda si fue por falta de comprensión en la explicación de la actividad o por no ser lo suficientemente convincente la justificación llevada.

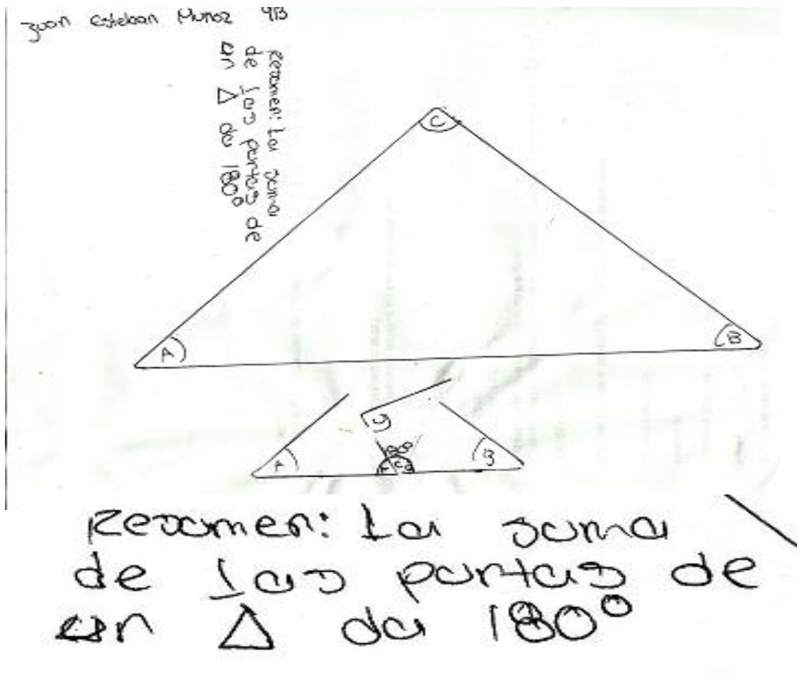


Figura 15. Arreglo de los ángulos del triángulo de forma incorrecta

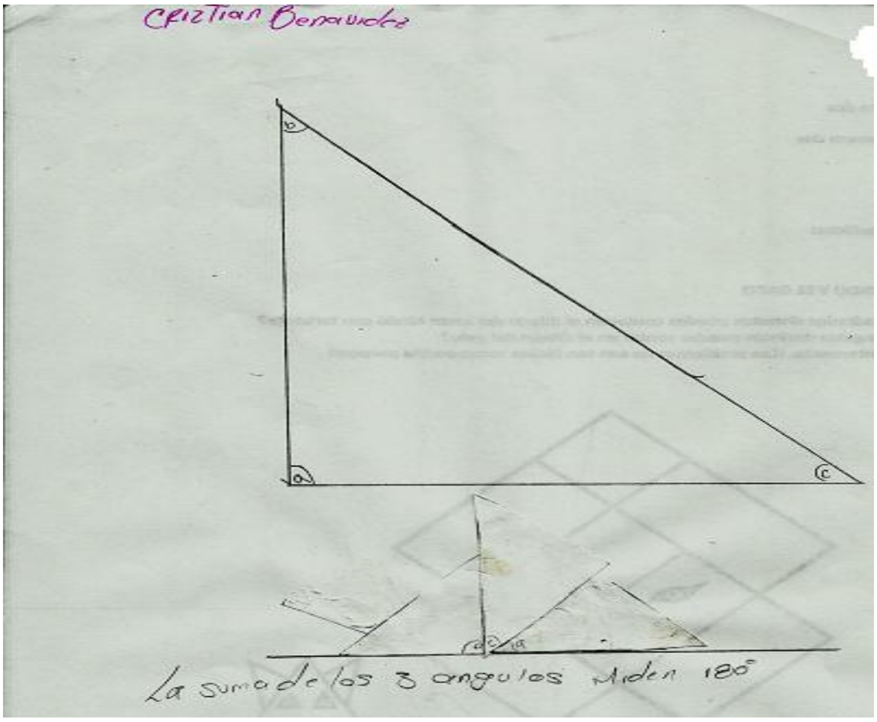


Figura 16. Arreglo de ángulos del triángulo de forma correcta

A partir de este momento se pasa de la actividad al taller tres con sus resultados, aciertos y fracasos de los estudiantes con las respectivas reflexiones.

El punto uno (ver anexo, taller tres primera parte, p. 61) arrojó resultados inesperados, si observamos en la figura 17 hay una construcción del triángulo, a partir de la suma de los dos ángulos para formar un ángulo de 90º. Pero si se analiza el problema, el triángulo debe ser construido a partir de los ángulos por separado.

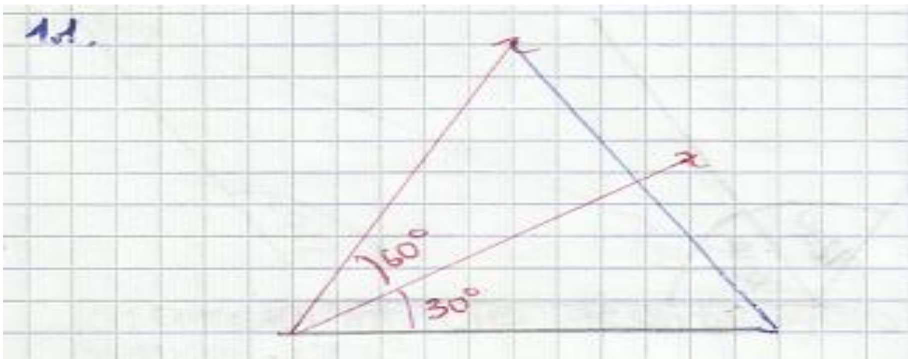


Figura 17.Construcción incorrecta del triángulo a partir de unir la medida de los ángulos dados

Para subsanar este contratiempo se induce a leer el problema de nuevo. Insistiendo en esta parte con la recomendación de Polya en entender el problema. Con esta recomendación reflexionan respecto a su error, arrojando resultados satisfactorios. Como se observa en la figura 18.

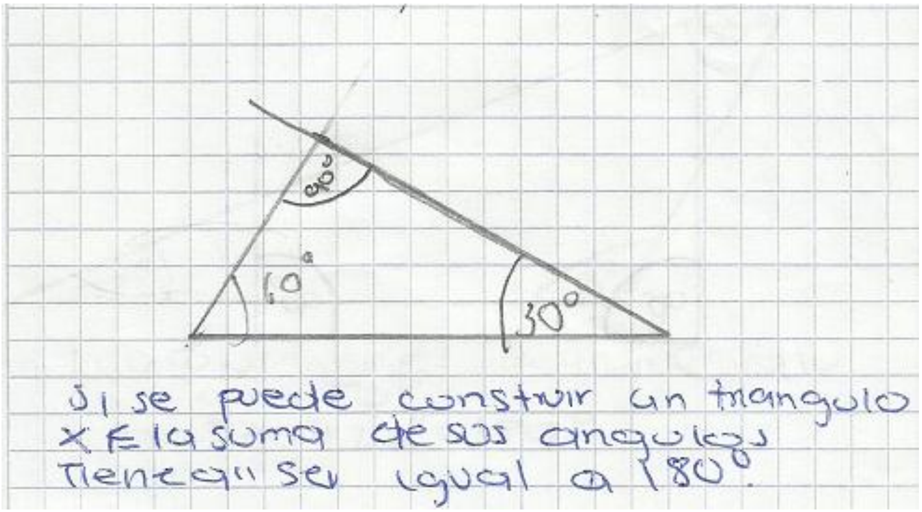


Figura 18. Solución correcta del problema uno taller tres

La herramienta para llegar a la construcción (se habla del punto uno) es la propiedad de los ángulos interiores, con la cual establecen el tercer ángulo y con la que construyen al menos un triángulo, con dichos ángulos. En esta parte el interés fundamental es la reflexión de la propiedad de la suma de la medida de los ángulos interiores es 180º.

En el problema dos del mismo taller se observan dos soluciones. La primera muy peculiar pues toman los ángulos por separado, por ejemplo el de 120º y con la suma de la medida de los ángulos interiores de un triángulo determinan los dos ángulos restantes como 40 y 20, 50 y 10, 30 y 30; construyendo tres triángulos (ver figura 19). Frente a esta solución a pesar de no ser la correcta sirvió para reflexionar alrededor de la suma de la medida de los ángulos interiores es 180º pero los alejó de la posibilidad de hacer una buena interpretación del problema. Con este problema se hace evidente el poco esfuerzo para entender el problema obstruyendo la posibilidad de hacer un buen uso de los conocimientos adquiridos en la actividad para la buena elaboración de un plan. Se obtienen como resultados soluciones no sugeridas en el problema, que pueden ser de utilidad pero restringen el objetivo del problema.

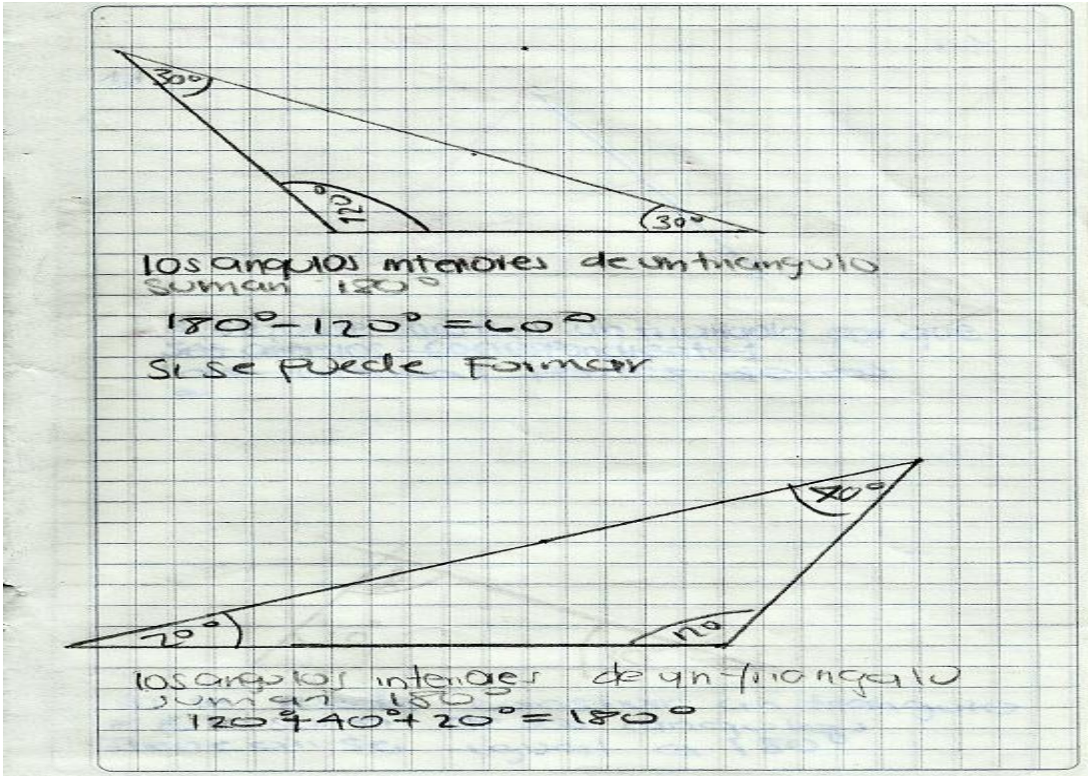


Figura 19. Solución sin una buena interpretación del problema, taller tres

La segunda solución reflejó la buena lectura de algunos estudiantes para dar solución sin tantos preámbulos. Esta consistía en la no construcción de un triángulo a partir de los ángulos dados, ya que la suma de dichas medidas excedía los 180º. Entender el problema fue clave para los estudiantes, pues permitió conectar los conocimientos adquiridos o recordados en la actividad y usarlos de forma correcta para obtener de inmediato la solución.

En el punto tres (taller tres) la suma de la medida de los ángulos dados es de 180º. Bajo este precepto los estudiantes infirieron la no posible construcción por no permitirse la entrada de un tercer ángulo puesto que la propiedad sugiere la suma de tres medidas de ángulos igualados a 180º y no la de dos solamente. Además de la justificación a partir de la propiedad verificaron su solución utilizando el transportador para dibujar los ángulos, con lo que se desprende que la figura arrojada se parece a un cuadrado no a un triángulo (ver figura 20).

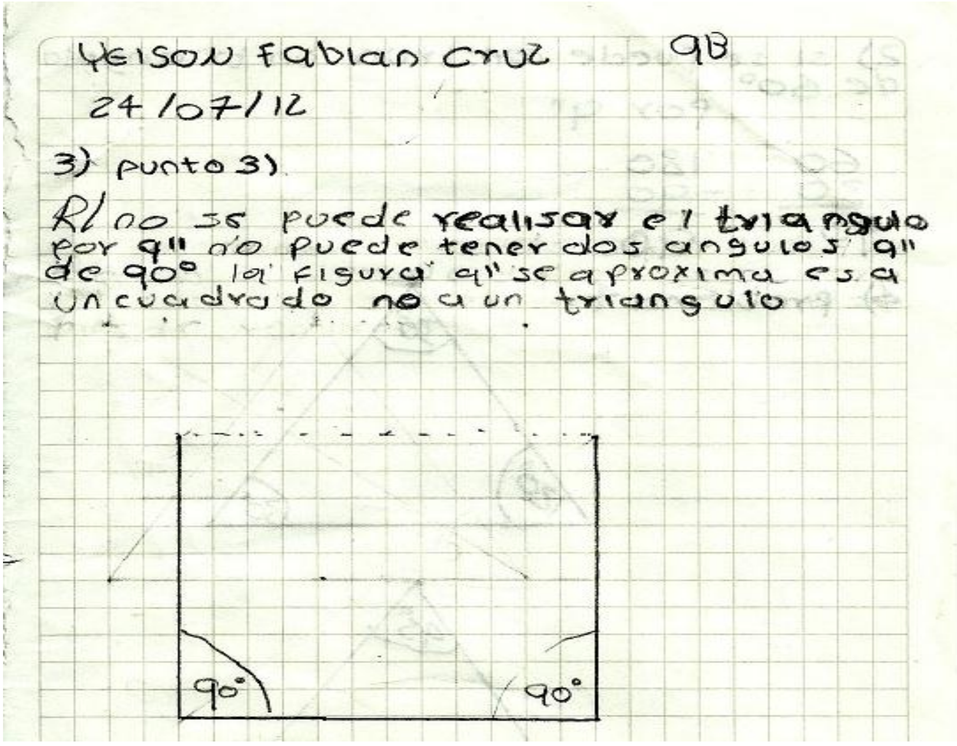


Figura 20. Solución al problema tres, taller tres

El punto quinto (taller tres) fue propuesto con el fin de obtener una propiedad de los triángulos que involucra los ángulos externos de éste. Abordaron el problema a través de la manipulación de papel, donde reproducen el triángulo y lo rompen en tres trozos de tal forma que cada uno de ellos contenga uno de los ángulos interiores del triángulo. Con estos ángulos comienzan a unir para el caso del ángulo X los ángulos b y c para llegar a justificaciones afirmativas a la pregunta, de manera análoga proceden con los ángulos Y, Z. Esta estrategia se observa en la figura 21

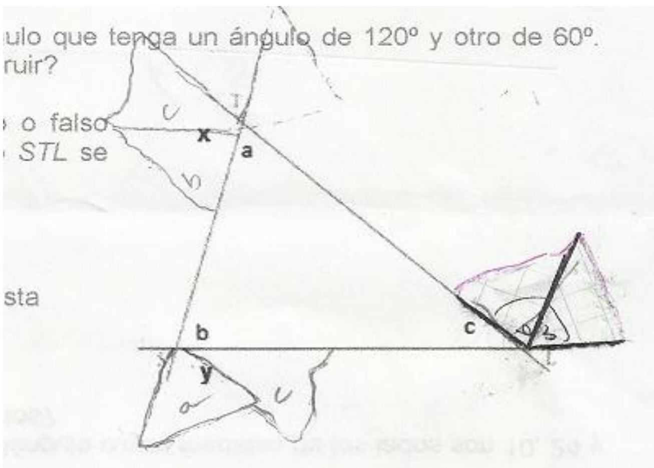


Figura 21. Representación de la justificación afirmativa a la pregunta del problema quinto del taller tres

Lo obtenido fue interesante pues los estudiantes comenzaba a entender lo primordial de leer bien un problema y de esta manera desencadenar con esto buenos resultados. Comprendieron además que realizar cálculos sin sentido hacia perder tiempo valioso y desorientaba el rumbo a una solución. Rescataron la conexión de actividades anteriores como herramientas para solucionar problemas, como también tener certeza de la solución revisándola al volver nuevamente sobre el problema y analizando la concordancia de los datos con la incógnita.

Esto se hizo más explícito al retomar el punto tres del taller uno. Recordemos una solución a medias, donde no hay un rumbo claro hacia una elaboración de un plan para solucionar el problema. Al retomar el punto tres los estudiantes hicieron una relación automática con el punto quinto del taller tres, primera parte. Con este punto relacionan las ecuaciones presentes en este para emplearlas de tal forma que pudieran hallar los valores restantes, y además de todos los datos puestos en escena para obtener resultados satisfactorios. El éxito en este punto además de entenderlo fue recurrir a un problema ya conocido e identificar en él aspectos importantes y útiles para enfrentarse “al nuevo”. (Ver figura 22).

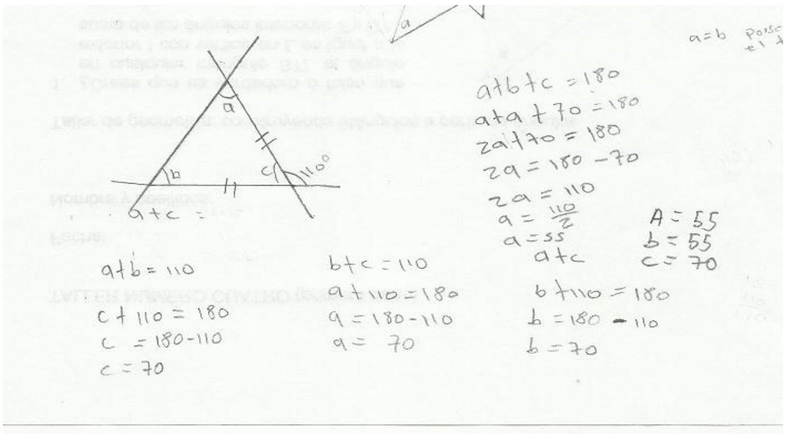


Figura 22. Procedimiento para hallar los valores a la incógnita a, b y c

Para finiquitar la bitácora número 2 y a modo de comentario se hace necesario que el lector entienda que para cerrar este tema se da un repaso de las propiedades descritas en ésta bitácora. Esto con el fin de que los estudiantes organicen la información trabajada y pueda utilizarla en futuros problemas.

4.4 *Bitácora Número 3: Analizando Estrategias*

El taller tres segunda parte (ver anexo, p.61, 62) fue enfocado para observar cómo se aborda un problema, con los pasos de Polya: comprensión del problema, elaboración de un plan, ejecución y verificación. El taller constaba de tres puntos, donde los temas centrales giran alrededor de la suma de la medida de los ángulos interiores de un triángulo es de 180º, triangulo isósceles, una propiedad importante de la circunferencia (dos ángulos inscritos en una circunferencia que abarca el mismo arco son iguales) y que los ángulos opuesto por el vértice son iguales. Las dos últimas se brindan una vez abarcados los dos últimos problemas.

La primera dificultad en el problema uno (ver anexo, taller tres segunda parte, p. 61,62) radicó en la no lectura completa del problema, donde no se tuvo en cuenta la recomendación de no calcar los ángulos hasta establecer alguna estrategia para dar una respuesta. Sin embargo a pesar del inconveniente se pudieron identificar estrategias para abordar el problema como: reproducir los ángulos e identificarlas con colores (denotadas con A, B y C, ver figura 23) y hacer coincidir alguna de ella para permitir la reconstrucción. Con esta elaboración del plan y su ejecución los estudiantes establecen dos soluciones B y C.

Pero son soluciones todavía intuitivas de una posible solución, donde para hacer una retrospección de esta se induce a su verificación. Para esto se recomienda utilizar el transportador, donde surge una segunda estrategia el de medir los tres ángulos para llegar a una solución no tan intuitiva. De igual manera miden los ángulos del triángulo incompleto. Y utilizando la propiedad de los ángulos interiores de un triángulo establecen que en efecto la solución no tan intuitiva es B. (figura 23).

El punto permite establecer la importancia de la verificación de la solución para esclarecer la veracidad y concordancia entre los datos y la incógnita para modificar o crear nuevas planificaciones para abordar el problema. También muestra la potencialidad de la figura al igual que las limitaciones si se maneja bajo una simple observación sin tener reflexión frente a ella.

Respuesta al problema uno

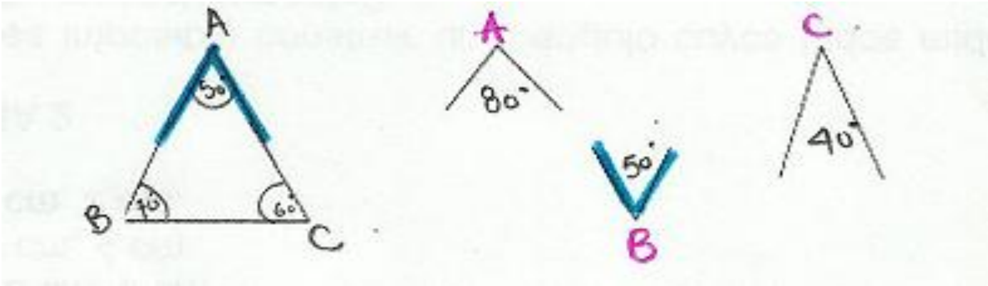


Figura 23.B como la solución correcta al problema

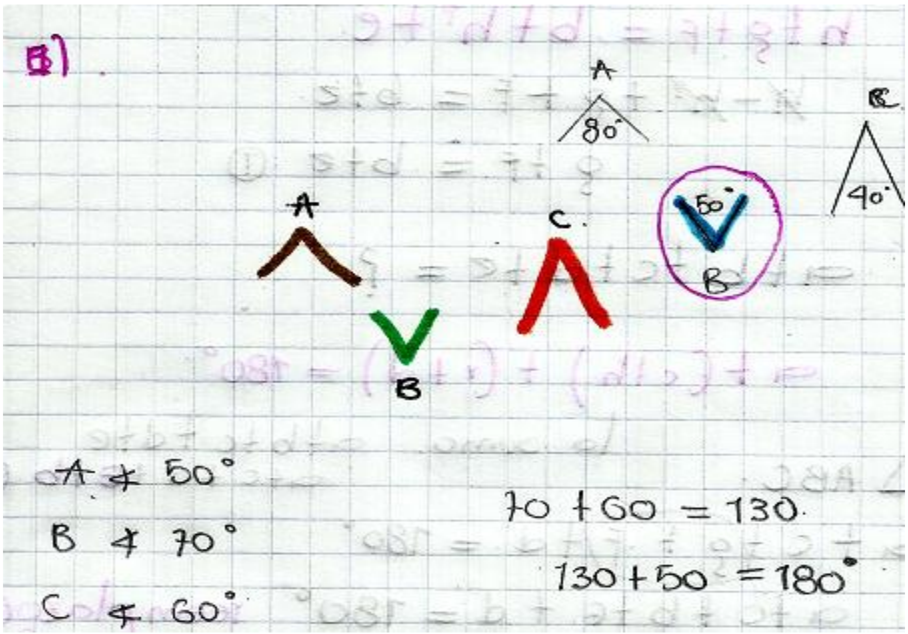


Figura 24. Además de la indicación de la solución se visualiza un procedimiento

Para abordar el segundo problema del taller (ver anexo, taller tres segunda parte, p.61, 62) usan ecuaciones donde toman cuatro o los cinco ángulos de la figura y lo igualan a 180º y por tanteo comienzan a darle valores para obtener la igualdad. Al principio se creía que usaban triángulos inscritos en la figura. Pero luego comentaron que era necesario hallar los valores de los ángulos para establecer la suma de ellos. Se comentó que este plan no es el más adecuado, por partir de una supuesta solución que no se tenía. Dicha planificación se ve reflejada en la figura 25

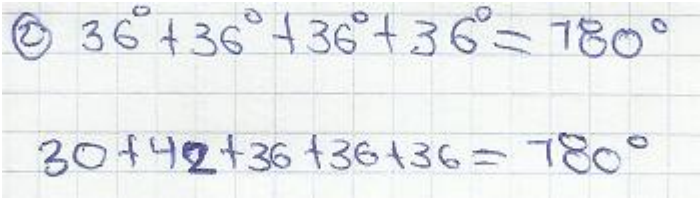


Figura 25. Ecuaciones partiendo de una solución que no se poseía

Al ver la dificultad se indica observar bien la figura y recordar como ella guarda datos ocultos que solo la agudeza de la visión puede hacer explícitos o claros. Con esta recomendación comienzan a ver triángulos pero se limitaban a contarlos, y donde gira la discusión de ¿cuantos triángulos formaba la figura? Pregunta con la que no se contaban pues nunca se detuvo a contarlos para resolverlo. Pero el objetivo del problema no era esta y se estaba desviando de la solución del problema. Sin respuesta a su pregunta, se comenta ¿es necesario saber cuántos triángulos forma la figura para llegar a su solución? La respuesta fue el silencio. Lo que afirmaba, una desmotivación al respecto de encontrar una planificación para el problema.

Para motivarlos se da la siguiente pista, hay tres triángulos claves para llegar a la solución del problema. Al principio se podría pensar ¿qué clase de pista es esta? Para ellos fue encontrar una luz en tanta oscuridad. Los estudiantes pensaron ya no en trabajar en cuatro, en cinco o seis triángulos, la solución estaba en encontrar tres y trabajar con ellos. Para encontrarlos se recurre a la figura del problema, y del ensayo y error los encontraron, estos eran el triángulo CAB y los triángulos cuyos ángulos son b, c y h y h, f y g (ver figura cuatro) para hablar del mismo ángulo h en el segundo y tercer triángulo, se aplicó la sugerencia recomendada al principio del problema (los ángulos opuestos por el vértice son iguales). Una vez establecido estos triángulos comienzan a plantear ecuaciones como las expresadas en la figura 27.

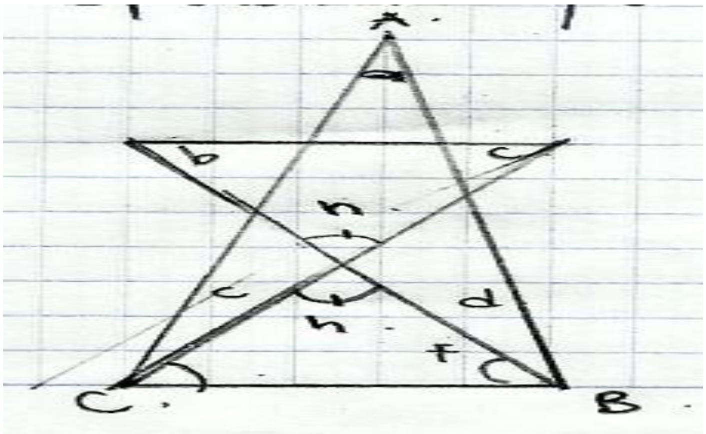


Figura 26. Los tres triángulos claves para solucionar el problema, el triángulo CBA, el triángulo cuyo ángulos son b ,h y c, y el último triangulo cuyos ángulos son h, f y g

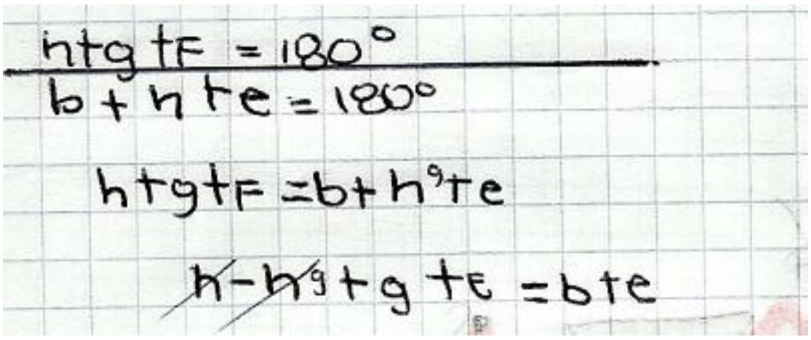


Figura 27. Ecuaciones planteadas a partir de dos triángulos claves en la figura 26

Las ecuaciones de esta figura muestra la utilización de dos triángulos. Ahora la dificultad radicaba en cómo hacer uso del triángulo CAB para establecer un valor para la suma de los ángulos a, b, c, d y e. Para esto se recalcó el hecho de que la suma de medida de los ángulos interiores de un triángulo es de 180º. Una vez indicado esto plantean dos ecuación (ver figura 28 y 29)

Figura 28. Ecuación establecida a partir del triángulo CBA

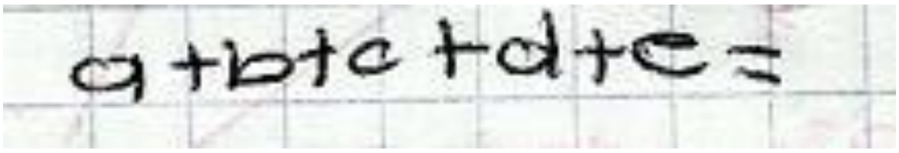


Figura 29. Incógnita del problema

Con estas ecuación algunos estudiantes se percatan que les falta la suma b + e en la ecuación de la figura 29 para lo cual relacionan las ecuaciones de la figura 27.

Con esta observación toman de las ecuaciones de la figura 27 g + f =b + e y la remplazan en la ecuación de la figura 29 obteniendo la suma de a, b, c, d y e. (ver figura 30)

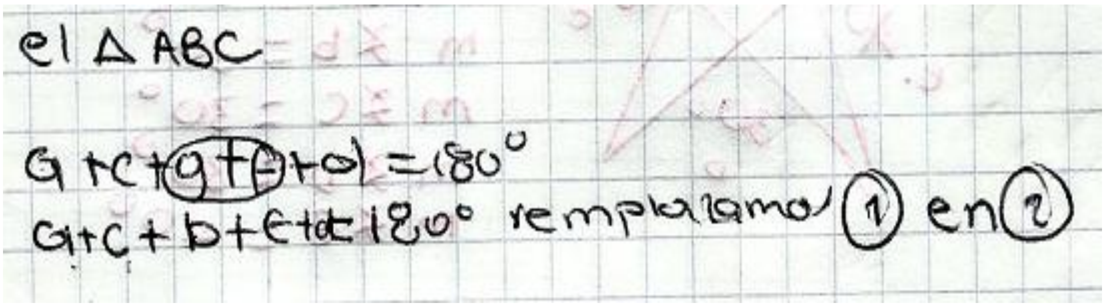


Figura 30. Reemplazo de g + f por b + e

No todos los estudiantes lograron establecer dicha relación, para hacer una aclaración de lo obtenido, la respuesta fue socializada con el fin de esclarecer dudas frente a la planificación y ejecución del plan que los llevó a la solución del problema.

El problema en general se convirtió en un contratiempo para los estudiantes. Algunos se sintieron frustrados al respecto, por no tener valores numéricos para de esta forma recurrir a alguna fórmula y resolverlo inmediatamente. También buscar los triángulos claves para llegar a la solución fue complicado. En este punto se reconoce intervenir demasiado para ayudar a visualizarlos.

Un problema en el que pensaba encontrar dificultad solamente en los ángulos opuestos por el vértice. Pero las cosas fueron distintas, la dificultad se hallaba en la ausencia de valores la que no permitía explorar la figura y establecer de esta forma un plan para la solución.

Para enfrentarse al tercer problema (ver anexo, taller tres segunda parte, p.62) y elaborar un plan los estudiantes optaron por identificar los datos y la incógnita y utilizar la sugerencia dada al inicio del problema (dos ángulos inscritos en una circunferencia que abarcan el mismo arco son iguales). Con lo que empiezan a identificar el triángulo AEC como primordial para resolver la incógnita. A pesar de que con dicho triángulo se llega a la solución, surge con él una dificultad, posee incógnitas adicionales, donde descartarlo es la mejor opción. Sin embargo antes de eliminarlo se advierte ¿por qué no hallar la incógnita? Si no es complicado hallarlo. En el camino para resolver dichas incógnitas tanto la del problema como las surgidas, observan que deben siempre utilizar todos los datos inclusive los de la figura, con lo que utilizan el hecho de tener dos triángulos isósceles. Con este hecho empiezan a elaborar ecuaciones que facilitan establecer el valor del ángulo AEC.

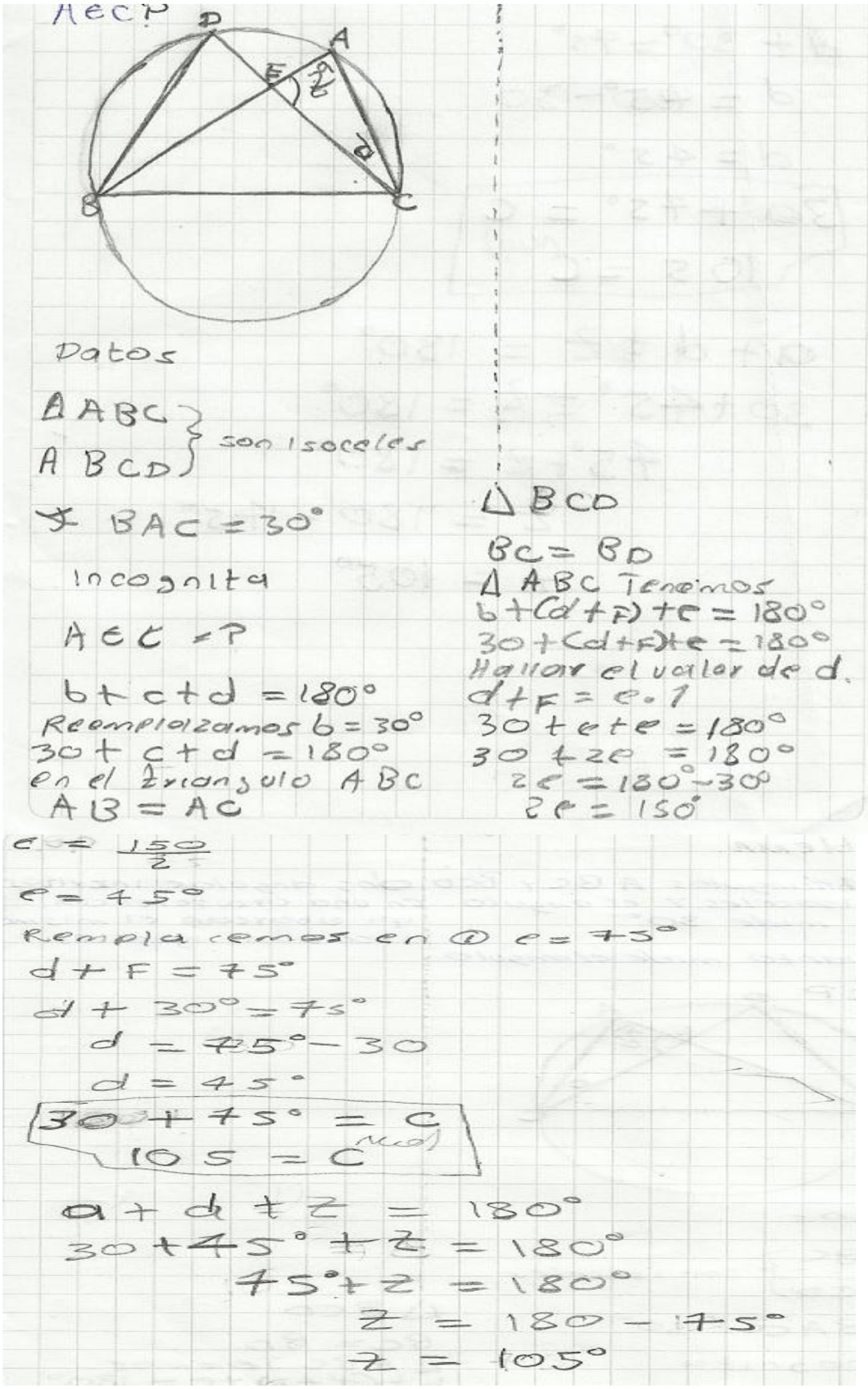


Figura 31. Procedimiento para hallar el ángulo AEC

En la gráfica 31 se observa como los estudiantes sacan los datos e identifican la incógnita y como plantean las ecuaciones. Estas ecuaciones las diseñaron a través de la propiedad de los ángulos interiores de un triángulo.

El taller permite ver la recursividad de los estudiantes para establecer un plan, entendiendo la importancia de comprender el problema y obtener a *grosso modo* lo posibles cálculos para llegar a la solución. Esos posibles cálculos en la mayoría de los problemas son las ecuaciones a la que llegaron y las cuales facilitaron obtener un valor para las incógnitas. Se plantea por parte de los estudiantes que llegar a ella fue gracias a la observación de las figuras e identificar los datos que junto a los conocimientos obtenidos anteriormente permiten acceder a la solución.

Los problemas reflejan el temor de los estudiantes de enfrentarse a problemas carentes de valores numéricos desorientándolos en establecer un plan. En algunos momentos se ve la desmotivación por parte de ellos a seguir resolviéndolos. Pero con ciertas ayudas que se vio necesaria para motivarlos comenzaron a darse cuenta que el no tener valores numéricos, o no tener brillantes ideas al instante no debe convertirse en un impedimento para siempre estar en la búsqueda de una solución. Un problema en ocasiones no siempre debe estar relacionado con valores numéricos para resolverlo, sino con la recursividad del sujeto que se enfrenta a él y por supuesto su motivación para no desfallecer.

Se ve en ocasiones que los estudiantes siempre buscan como una necesidad establecer fórmulas que faciliten resolver problemas sin esforzarse. Pero los problemas fueron introducidos para comenzar a cambiar en los estudiantes que no siempre la carencia de valores es ni será impedimento para resolver un problema, y que cada uno de nosotros posee capacidades para enfrentarse a este tipo de problemas

Con este taller se permitió movilizar conocimientos, pues a pesar de estar enfocado en los triángulos, en el proceso se encuentra con planteamientos de ecuaciones, despeje de incógnitas, una propiedad de círculo, los ángulos opuestos por el vértice son iguales, entre otros. Donde además de movilizar conocimientos se movilizan estrategias que llevan al estudiante resolver problemas para ganar experiencia y así ganar habilidad para enfrentarse a ellos.

Para cerrar esta bitácora las estrategias observadas en ésta, permiten colocar en descubierto que al momento de enfrentarse a un problema siempre transita en la mente de quien se enfrenta a un problema una idea. Dicha idea puede ser errónea o acertada pero se deben desarrollar para adquirir madurez en la elaboración de un plan.

Dicha elaboración según Polya (2001) y con lo que se está de acuerdo es una de los pasos más complicados y decisorios al momento de encontrar la solución. Con éste, se puede facilitar o complicar resolver la incógnita ya que en él se encuentran los posibles cálculos a realizar, y se hace una mal consideración o se descarta datos importantes desvían al sujeto del triunfo frente a un problema. Como lo visto en la bitácora. Es por esto que estos problemas se convirtieron en un contratiempo, pues a pesar de entenderlos, el paso siguiente se complicó demasiado para los estudiantes al punto de sentir desmotivación por resolverlos, se es todavía muy cuadriculado y a toda costa se quieren fórmulas para resolverlo y esto fue lo que les sucedió a los estudiantes de noveno B. Si recordamos un problema a diferencia de un ejercicio demanda del sujeto movilizar conocimiento a través del análisis que permiten aclarar dudas sobre conceptos incluidos en el problema y que junto con la creatividad e imaginación permiten encontrar la solución.

4.5 *Bitácora 4: Semejanza no es igualdad*

La concepción de semejanza de triángulos en los estudiantes del grado noveno B es la siguiente:

> "que es una igualdad de dos figuras en particular triángulos, que deben tener sus tres lados y ángulos iguales para establecer que haya una semejanza".

Si observamos la afirmación está relacionada más con congruencia que con semejanza. Con lo que se confirmó que ver semejanza antes de congruencia fue la mejor elección. Para abordar este tema y disipar un poco esa confusión entre semejanza y congruencia de triángulos se recurrió a la definición general de semejanza entre figuras.

> *Semejanza, relación entre dos figuras geométricas que tienen la misma forma, aunque distinto tamaño*[9]

La definición general fue utilizada con el fin de llegar a la particularización de semejanza entre triángulos. En el camino hacia esa particularización, se observó con una pequeña actividad de duplicación de figuras[10]permitió conservar lo esencial de la definición: la forma de esa figura donde simultáneamente hubo una variación en su tamaño.

Como el camino apenas empezaba para establecer la particularización de semejanza en triángulos se debe abordar obligatoriamente la proporcionalidad como clave para establecer semejanza entre figuras. Para esto es interesante recoger las concepciones de los estudiantes sobre la proporcionalidad, algunas de ellas son las siguientes:

- Es una porción de un número, la mitad de un número y su valor es la incógnita.
- Es equivalencia de figuras.
- Son ángulos semejantes.
- Corresponde a una misma medida equivalente a cualquier figura.
- Una parte de algo o una equivalencia.
- Una porción que se divide en partes o que corresponde a varias partes.

---

[9]BARIOS. L, CASSINELLO. A, CAÑAS J, GALO. J, MARTÍN. M, RAMÍRES. C, RODRÍGUEZ. F, RUÍZ. C. 2008. Matemática de 2º de Edu. Editorial Anaya. pág. 120.

[10] Consintió en tomar una figura, por ejemplo un barco y duplicarlo, donde se conservó la forma pero su tamaño cambió.

Como se puede observar para ellos proporcionalidad indica división o equivalencia.

Para aclarar el concepto se menciona que la proporcionalidad en semejanza es una constante que permite establecer en cuanto ha disminuido o aumentado dicha figura. ¿Cómo determinar esa constante? Como una razón la cual es la relación entre dos números, definido como el cociente de un número por el otro.

En esta parte se recuerda que poseer conocimiento no implica tener una clase ideal, pues los estudiantes presentan al igual que semejanza ideas vagas acerca de proporcionalidad y haberse presentado la proporcionalidad como una constante no implicaba nada para ellos.

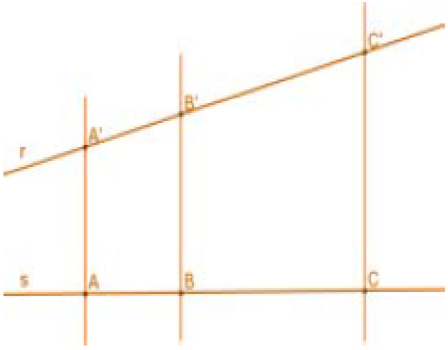
Se necesitaba aclarar esta parte para lograr el cometido y para ello se trabajó el teorema de Tales como:

> *"Si varias rectas paralelas son cortadas por dos rectas no necesariamente paralelar r, s, los segmentos que determinan dichas paralelas en la recta r son proporcionales a los segmentos que determinan en s"*[11].

Para tener claro el teorema (que no se enunció como tal sino como una propiedad) se brinda la figura 33. Donde se aclaró que dos rectas son paralelas, si dichas rectas no se cortan por más que se prolonguen. En la cual se mostró la proporcionalidad como igualdad de razones.

---

[11] BARIOS. L, CASSINELLO. A, CAÑAS J, GALO. J, MARTÍN. M, RAMÍRES. C, RODRÍGUEZ. F, RUÍZ. C. 2008. Matemática de 2º de Edu. Editorial Anaya. Pág., 118.



$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{A'C'}{AC}$$

Figura 32. Proporcionalidad como igualdad de razones

Para reforzar lo visto se colocó un problema el cual se denominó problema cero (ver anexo, semejanza problema cero, p. 63) para establecer que tan receptivos son los estudiantes cuando se les da este tipo de conceptos y si aplican analogía al momento de enfrentarse a estos problemas.

Al leer el problema los estudiantes comenzaron a relacionarlo con la propiedad dada en clase. Para establecer la analogía los estudiantes le asignaron las mismas características de la propiedad al problema. Con lo cual elaboran un plan el cual consistía en tener las proporcionalidades igualadas (como en la figura uno). Y una vez ejecutado obtuvieron los valores de x e y como se observa en la figura dos. Como se puede percatar trabajaron la proporcionalidad y el teorema de Tales enlazados, movilizando conocimientos llegando a lo que se quería a usar análisis de lo que se tiene y junto con su recursividad encontraron la solución.

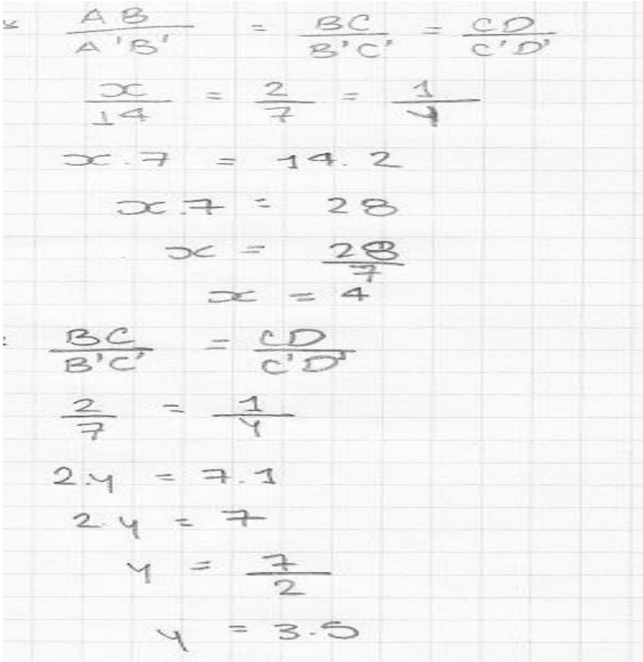


Figura 33. Procedimiento para hallar la solución al problema cero

La propiedad junto con el problema cero lograron su cometido aclarar y utilizar la proporcionalidad. Se considera ideal este momento para establecer el taller cuatro (ver anexo, taller cuatro, primera parte, p.63, 64) compuesto de dos puntos, el primero para utilizar la generalización de la semejanza, y en el segundo para establecer la particularización de esta.

Una vez leído el enunciado del primer punto, los estudiantes comenzaron a establecer, por ejemplo en las gráfica A y B semejanzas, porque tenían la misma forma y distinto tamaño y además al ser rectángulos conservaban el mismo ángulo de 90º y muy pocos se atrevían a hablar de la proporcionalidad de los lados homólogos.

Con respecto a los lados homólogos, sorprende la no utilización de la proporcionalidad y el problema cero para justificar esta parte. Por el contrario comiencen a divagar sobre ello alejándose de la proporcionalidad. Pero según Polya (2001) el profesor debe ayudar al alumno, cuando se sienta desorientado y es esto lo que se quiso hacer cuando se ubicó a los estudiantes a detallar el problema cero. Ayuda fructífera, porque además de llevarlos a explorar el problema recurrieron a la definición de semejanza para enfocar su mirada a la proporcionalidad, como fundamental para resolver el problema en su totalidad. Con esto establecen la solución que se ve reflejada en la figura 34

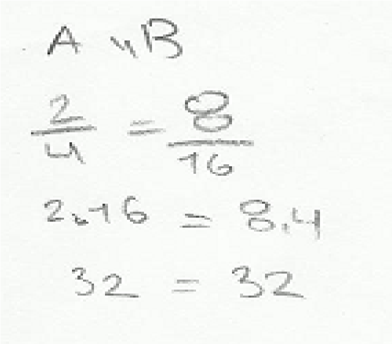


Figura 34. Utilización de la proporcionalidad para resolver el primer problema del taller cuatro, estrategia uno

Como se pueden observar los estudiante establecen la igualdad y multiplica en cruz para establecer que realmente se obtiene una igualdad de razones y de esta manera llegar a la proporcionalidad como se quería. Una segunda estrategia se puede detallar en la figura 36 al sacar mitad a 8/16 y llegar al valor de 2/4 y establecer que realmente se tiene una igualdad y por ende la seguridad de proporcionalidad.

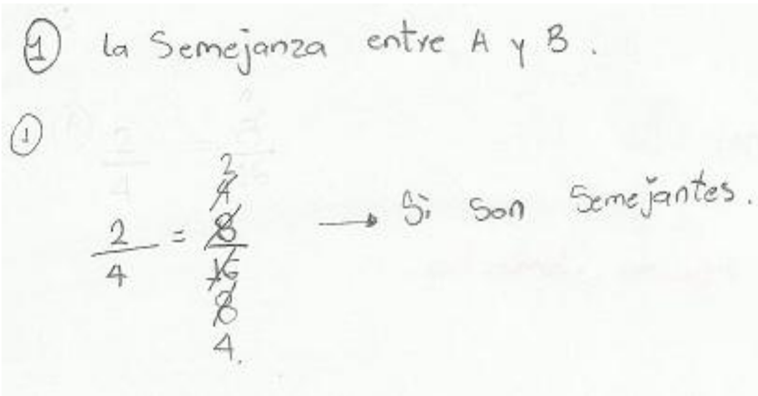


Figura 35. Segunda estrategia

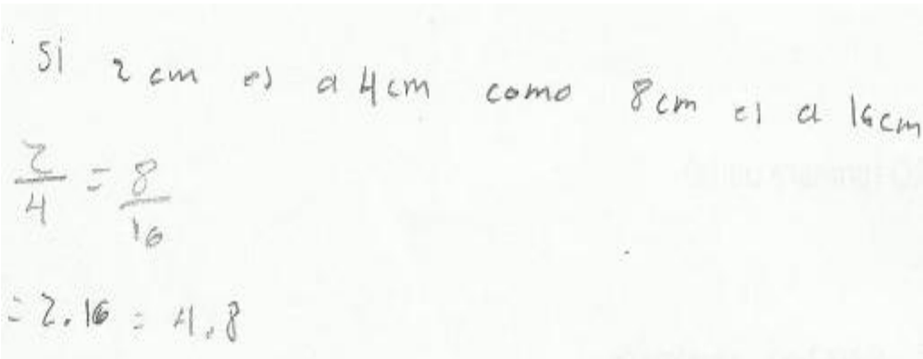


Figura 36. Tercera estrategia

Una tercera estrategia para obtener la igualdad es dividir como se aprecia en la figura 36.

De manera análoga proceden para establecer la semejanza entre A y C; B y C concluyendo que no son semejanza porque no existe igualdad en las razones (figura 37)

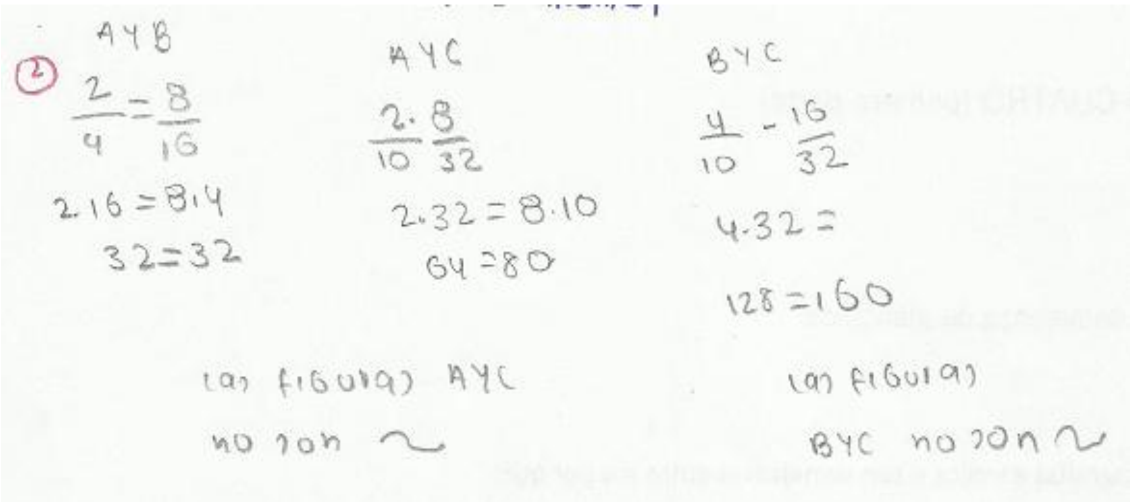


Figura 37. Procedimiento para descartar que las figuras A y C; B y C no sean semejantes

La actividad junto con el taller (cuatro primera parte) permite concluir que con dedicación y concentración es posible enfrentarse a cualquier tipo de problemas. Si se lee los enunciados y dibujos del problema haciendo visible todo lo que nos brindan puede permitirse encontrar la solución.

Todavía no se llegaba a la particularización de la definición general para los triángulos. El problema dos (ver anexo, taller número cuarto primera parte, p.64) intentaba esto. Como se había trabajado con el transportador los estudiantes recurren a él para responder la pregunta 2.1 del punto dos. Sin dificultad establecieron que los ángulos mencionados en la pregunta son iguales. Como se ha venido trabajando con semejanza de figuras establecen que tienen la misma forma y diferente tamaño. Entonces para determinar semejanza en los triángulos faltaban los lados, pero ese problema se establecía en la pregunta 2.2 (punto dos) el cual debían verificar. Para esto reemplazan los valores correspondientes obteniendo la igualdad y con ello la proporcionalidad de los lados

Los estudiantes al observar la igualdad de ángulos de los triángulos y proporcionalidad de los lados de los triángulos, consideran que los dos triángulos son semejantes por tener lados proporcionales y ángulos iguales con la misma forma pero distinto tamaño estableciendo que dos triángulos son semejantes como se deseaba. Hasta el momento han visualizado dos criterios de semejanza, pero se quiso que llegaran a considerarlos por separados para establecer semejanza de triángulos.

Para lograr este cometido se planteó lo siguiente, en el problema dos si solo se hubiera dado los ángulos <DAB =<GEF y <ABE=<EFG ¿podría haber establecido semejanza inmediatamente? Sabiendo que los triángulos conservan la misma forma pero no el mismo tamaño. La respuesta que dieron fue interesante pues asociaron lo visto en construcción de triángulos a partir de ángulos de la siguiente manera; como se tiene dos ángulos con la propiedad de los ángulos interiores se puede inferir el tercero, por ejemplo en el triángulo con los ángulos <DAB y <ABE se obtendrá el ángulo ADB que a su vez será igual a FGE y con la ayuda del transportador no solo se podría construir el triángulo EGF semejante a ABC sino construir una infinidad de triángulos semejantes. Con lo que infieren el primer criterio de semejanza "dos triángulos son semejantes si sus ángulos correspondiente son iguales"[12].

Con respecto a la proporcionalidad de los lados, recurren al problema dos (taller cuarto, primera parte) ítems 2.2. Donde infieren que si se confirma la proporcionalidad de los lados puedo establecer de inmediato la semejanza de ellos. Si se confirma que las razones donde interfieren las longitudes de los lados son iguales, se obtiene una constante la cual me indica una semejanza y ya no se recurre a hacer una verificación de igualdad en los ángulos. En esta parte los estudiantes comunican que la semejanza entre triángulos se establece solo si se dan ángulos iguales o lados proporcionales y no es necesario recurrir a verificar las dos condiciones simultáneamente.

[12] BARIOS. L, CASSINELLO. A, CAÑAS J, GALO. J, MARTÍN. M, RAMÍRES. C, RODRÍGUEZ. F, RUÍZ. C. 2008. Matemática de 2º de Edu. Editorial Anaya. pág. 120.

4.5.1 ¿Cuánto se ha comprendido acerca de semejanza?

Como al menos se tenía claro que la semejanza no es necesariamente igualdad entre figuras los estudiantes estuvieron listos para la segunda parte del taller cuatro (ver anexo, segunda parte, p.64, 65).

Como se puede observar el punto tres (ver anexo, taller cuatro, segunda parte, p.64) asegura de antemano la semejanza entre los triángulos. A partir de esto se quería que los estudiantes trabajaran los criterios encontrados hasta el momento, pero desde la resolución de problemas como herramienta para la relación de este conocimiento con su creatividad. Es decir, colocando siempre en juego los cuatro pasos de Polya: comprender el problema como condición necesaria para la elaboración de un plan y de esta manera llegar satisfactoriamente a su solución.

No interesaba cuantos veces se repitiera en cada sesión la importancia de los pasos de Polya, siempre evadían detalles, en esta ocasión fue el de no establecer cuál era la incógnita, lo cual indica una lectura superficial del problema, convirtiéndose en un impedimento para llegar a la solución. Lo bueno de este error es que reconocen que si no hay rumbo los cálculos son inútiles. Una vez reconocen la incógnita, infieren de la relación de ésta con los datos, la necesidad de usar semejanza de triángulos, y con ella sus criterios, es decir para el caso de hallar los valores de los ángulos faltantes hacen uso del primer criterio y para el valor de las longitudes faltantes la proporcionalidad de sus lados.

Pero el criterio de mayor dificultad es el de la proporcionalidad, para lograr manipularlo de una manera adecuada se recomienda revisar el problema dos de la primera parte del taller. Con éste igualan las razones correspondientes de los lados homólogos de los triángulos, a lo que llegan a obtener dos incógnitas. Para solucionar este inconveniente, comienzan a igualar a su conveniencia dos razones de manera que quedara una sola incógnita para establecer de esta manera el valor de la longitud. Análogamente proceden con la segunda incógnita. Con este punto la proporcionalidad estaba tomando más fuerza en su utilización y esto era lo que se buscaba, aclarar dudas sobre los conceptos que se estaban trabajando para fortalecerlos.

El problema cuarto (ver anexo, taller cuatro, segunda parte, p .64, 65) aunque se procede de manera análoga al tercero, tiene una condición adicional, realizar la figura e introducir en ella sus datos e incógnita. Es aquí donde se hace visible que puede ser un arma de doble filo, y solo la comprensión del problema evitará que se convierta en un impedimento para hallar la solución. La comprensión pasa entonces para los estudiantes a ser su mayor aliado para no introducir en la figura cosas incorrectas. Por este motivo se hace necesario por parte de los estudiantes entender cada una de las partes del problema. En primer lugar hacer una verificación de si en efecto los lados ofrecidos permitían la construcción del triángulo para el caso a), y en segundo lugar recordar que es un triángulo rectángulo para el caso b) y en tercer lugar usar la semejanza para ubicar en los triángulos los datos e incógnitas correctamente para luego proceder como en el punto tres para obtener los valores de las incógnitas. (Ver figura uno, 38 y 39)

a)

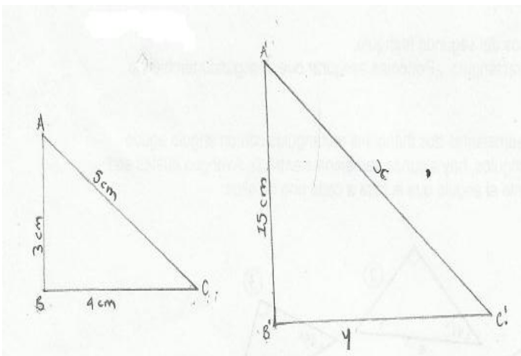


Figura 38. Figura donde se introduce los datos y la incógnita del ítems a

b)

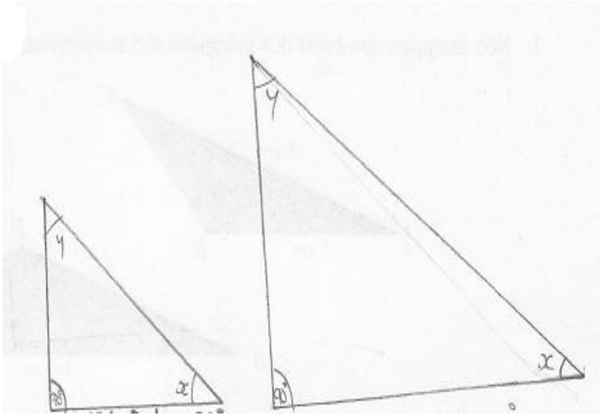


Figura 39. Figura donde se introduce los datos y la incógnita del ítems b

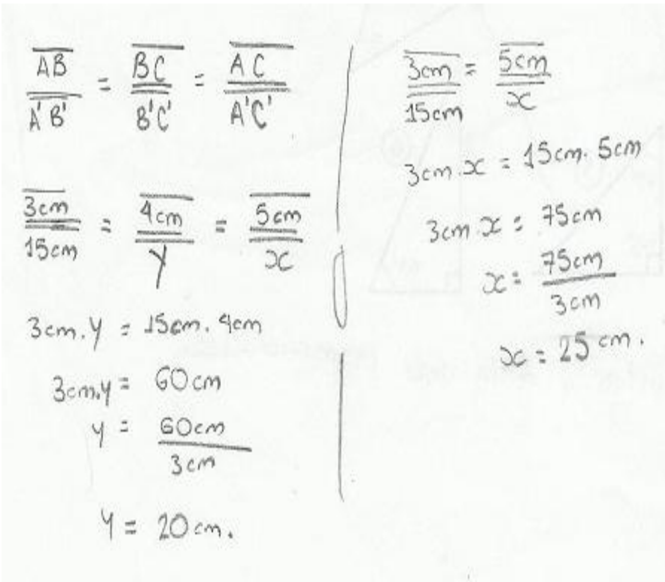


Figura 40. Procedimiento para hallar las incógnitas del problema cuarto del taller cuarto

Para finalizar la sesión de semejanza se entrega un problema adicional (ver anexo, problema adicional, p. 65) donde se refuerza la importancia de la figura al momento de resolver un problema. La figura no tiene una representación única, y esto se hace evidente en la construcción que realizan (ver figura cuatro) los estudiantes la cual es diferente a la que se esperaba que realizaran (ver figura 43)

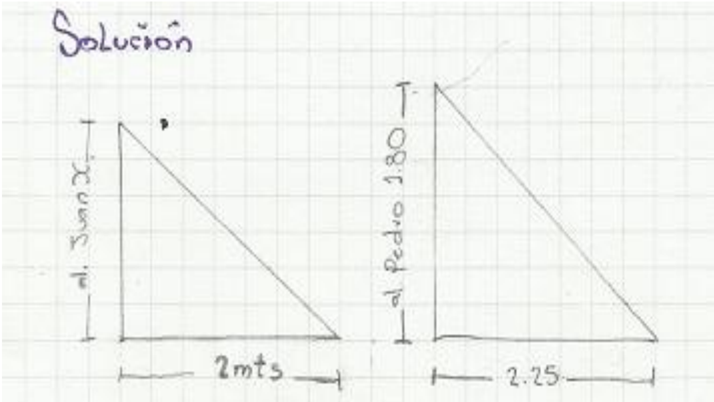


Figura 41. Figura elaborada por los estudiantes a partir del problema

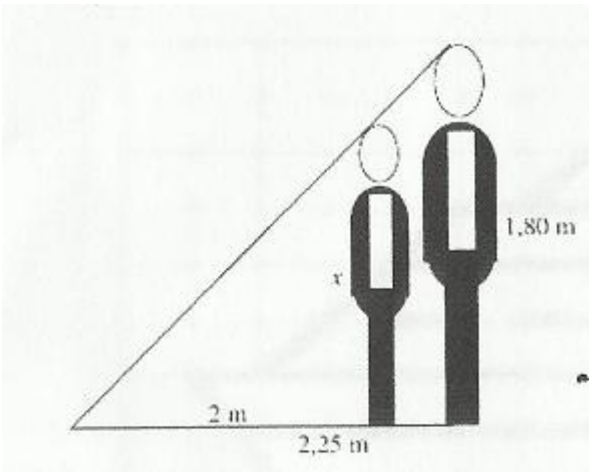


Figura 42. Figura que se esperaba que realizarán los estudiantes

Como se puede observar, la figura cuatro al igual que la figura cinco, facilita realizar los cálculos necesarios para encontrar el valor de la incógnita, procediendo análogamente a los anteriores problemas se obtuvo la solución que es única. De esta manera se muestra que el profesor es una ayuda y esta debe ser a modo de sugerencia y no una imposición pues puede reprimir la creatividad de los estudiantes, que de alguna manera motiva a continuar en el proceso de resolver problemas.

Se cierra el tema con el tercer criterio de semejanza:

"Dos triángulos pueden ser semejantes solo si dos de sus lados son proporcionales y el ángulo comprendido entre ellos es igual"[13]

Para mostrar que la proporcionalidad de los lados homólogos y ángulos iguales entre dos triángulos no es el único camino para tener la certeza de semejanza.

Si recordamos al inicio de la bitácora los estudiantes relacionaban semejanza de triángulos con congruencia. Para finalizar esta bitácora los estudiantes relacionan semejanza de triángulos con ángulos iguales y lados homólogos proporcionales. Esto fue posible por la generalización de semejanza entre figuras, que les dio herramientas para llegar a particularizarlo a los triángulos, construyendo de alguna manera junto con la resolución de problemas dos de los criterios de semejanza.

Se es consciente que en el futuro pueden olvidarse por parte de los estudiantes, dichos criterios y más aún del tercero que fue lanzado formalmente en un tablero. Sin embargo se tendrá certeza de que los estudiantes se detendrán a reflexionar que no es igualdad de figuras sino la conservación de su forma pero no su tamaño, y una de las herramientas para afirmar esto es la igualdad de ángulos y proporcionalidad de sus lados homólogos.

4.6 *Bitácora 5: Congruencia De Triángulos*

Para abordar el tema de congruencia se empezó interrogando a los estudiantes acerca de lo que entendían sobre ésta palabra. Sus concepciones no estaban muy alejadas del significado de la palabra, pues todos afirmaban que se trataba de igualdad entre figuras. Como el objetivo con esta actividad fue el de establecer al menos un criterio para afirmar cuando dos triángulos son

[13] BARIOS. L, CASSINELLO. A, CAÑAS J, GALO. J, MARTÍN. M, RAMÍRES. C, RODRÍGUEZ. F, RUÍZ. C. 2008. Matemática de 2º de Edu. Editorial Anaya. Pág., 120.

congruentes se opte por introducir una sesión adicional para evitar cometer errores como los descritos en la bitácora 1.

Esta actividad adicional estaba compuesta por construcciones de triángulos con regla y compás (ver anexo, actividad final uno, p.65, 66) para cuando llegara el momento de introducir la actividad central de reproducción de triángulos, tuvieran una herramienta para lograr el cometido. Se debe recordar que ya se había trabajado alrededor de la reflexión que dada tres longitudes cualesquiera no necesariamente se puede construir un triángulo. Partiendo de esto los estudiantes tuvieron el cuidado de tomar para el triángulo escaleno el tercer vértice de tal forma que hubiera una construcción del triángulo.

A continuación se presenta las construcciones de un triángulo equilátero, isósceles y escaleno hechas por los estudiantes (figura 43). La pretensión de traer las construcciones es la de que el lector observe que la actividad fue un éxito, y fue acogida con beneplácito por los estudiantes.

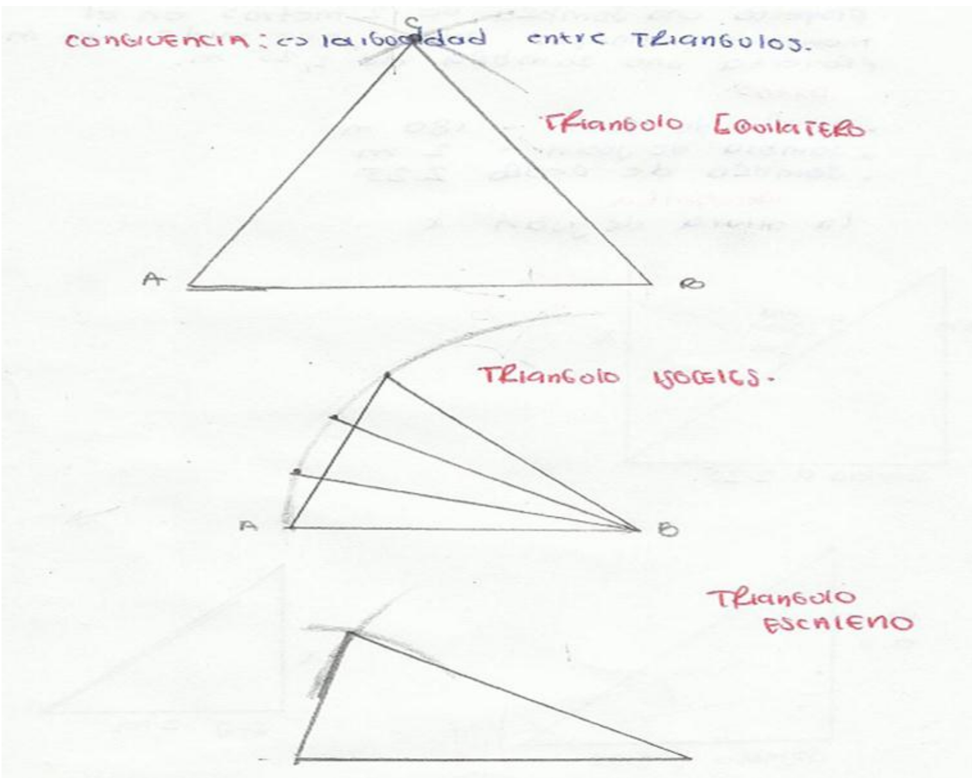


Figura 43. Construcciones con regla y compás realizadas por los estudiantes

Ahora se procedía a introducir una condición adicional, dar valores a los lados de los triángulos a construir (ver anexo, problema cero, p.66), con la cual no hubo inconveniente, los estudiantes aplicaron el proceso para construir el triángulo equilátero perfectamente, el problema estaba en el triángulo isósceles, en ¿Cómo ubicar el tercer vértice de tal forma que obtuvieran un lado de 6 cm? (problema, anexo actividad final, p. 66). Esto dio a entender que desafortunadamente hubo complicaciones para relacionar procesos ya elaborados. Sin embargo se dan cuenta de su error y organizan sus ideas asociando la propiedad del triángulo vista en la bitácora 1 con la construcción del triángulo isósceles visto en la actividad de esta bitácora, para ubicar el tercer vértice de tal forma que puedan tener la medida exigida por el problema.

El paso a la construcción del criterio (LLL) de congruencia entre triángulos apenas empieza, y su eje central se ubica en la actividad dos (ver anexo, actividad final dos, p.66). La actividad en el grupo se organizó en dos grupos el de los niños y niñas. Las preguntas son claves y es por eso que se consideran de importancia para construir el criterio. Para el caso del grupo de la niñas sus preguntas son dos ¿Cuál es la clasificación del triángulo? Y ¿Cuáles son sus longitudes? preguntas con las que aseguraron su triunfo, pues el triángulo es isósceles y tenían valores para sus lados por lo que proceden de manera análoga al del problema cero, obteniendo la reproducción del triángulo de los niños (ver figura 45).

Para el caso del grupo formado por los niños sus preguntas fueron las siguientes ¿Cuáles son las longitudes de los lados del triángulo? ¿Cuáles son los grados de sus ángulos? el problema se complicó para los niños reconstruir el triángulo no sería tarea fácil. Son conscientes el grupo de los niños en que la dificultad radicaba en ubicar el único ángulo que poseían y el desconocer el tercer lado del triángulo. Pero no desfallecieron frente a estos inconvenientes y utilizaron la regla y compás para intentar hacer una reproducción del triángulo. Primer trazan un segmento con una de las longitudes, trazan el arco y se detienen a pensar en el ángulo dado, el cual tiene 100º. Al cuestionarse sobre ese ángulo, recuerdan la manipulación del transportador y con este ubican el ángulo en la figura encontrando el tercer vértice para unirlos y trazar efectivamente un triángulo idéntico al del grupo de las niñas (ver figura 44).

Se hace esta descripción de la actividad porque en esta radica como los estudiantes establecen el criterio de congruencia de triángulos (LLL)

En la figura se observaran los triángulos a reproducir

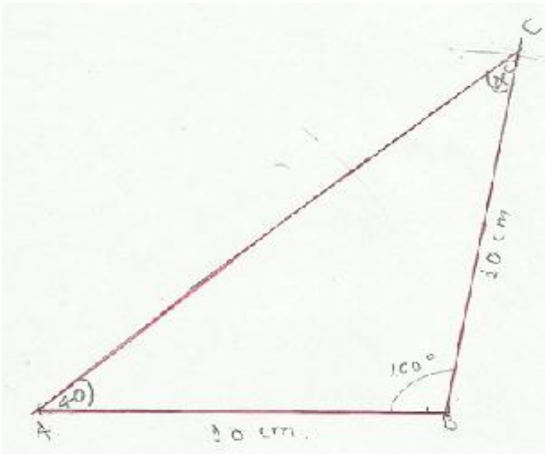


Figura 44. Triángulo a reproducir por el grupo de los niños

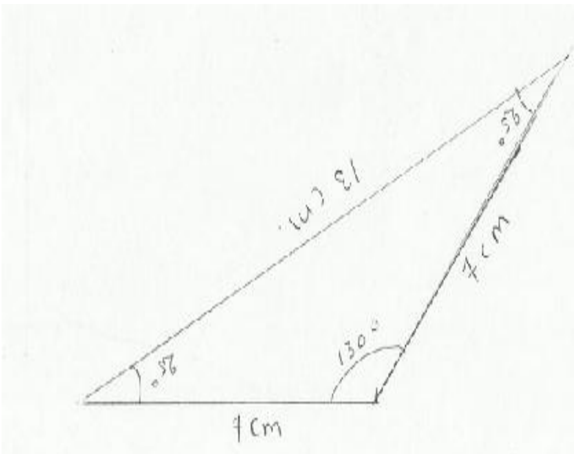


Figura 45. Triángulo a reproducir por el grupo de las niñas

Para convencer a ambos grupos que efectivamente los triángulos construidos por ellos fueron una copia del original se superpusieron los triángulos obtenidos y de esta manera se convencieron que los triángulos son copias exactas, donde hay una coincidencia de ángulos y lados. Los cuales adicionalmente verifican con el transportador y regla para estar seguros de que se tenía copias exactas.

La descripción de la actividad se hace necesaria para entender la forma como los estudiantes establecieron dos criterios de congruencia de triángulos (LLL, LAL). Para ello retoman los pasos necesarios para reproducir el triángulo de los grupos, bajo esta exploración las niñas deducen que realmente la ayuda radicaba en tener tres lados más que la condición de ser isósceles. El grupo formado por niñas encontraron lo que se había venido buscando, inferir de las actividades el criterio de LLL para establecer congruencia entre triángulos.

Pero de la exploración surgió la afirmación de que los ángulos iguales establecían igualdad de triángulos. Surge la inquietud de si realmente se tenía apropiación suficiente de semejanza entre triángulos por parte de los estudiantes. Para no dejar la duda se pregunta ¿que garantiza tener ángulos iguales, en dos triángulos?, la cual los llevó a reflexionar sobre la cuestión y orientarlos que semejanza no es necesariamente igualdad. Con lo que infiere que se debe descartar esa posibilidad para concluir congruencia entre triángulos.

En la búsqueda de establecer condiciones necesarias para congruencia entre triángulos, el grupo formado por los niños infieren que en su caso solo necesitaron dos lados y un ángulo entre ellos, complicado para imitar pero efectivo para obtener una reproducción de un triángulo, con lo que se obtiene un segundo criterio (LAL). El objetivo hasta este momento había sido superado, se obtuvieron dos en lugar de un criterio para establecer congruencia entre triángulos.

Para abordar el tercer criterio (ALA) no construido en las sesiones se da teóricamente junto con los dos obtenidos. Con el fin de abordar un último problema (ver anexo taller número uno numeral 7, p. 58) e inferir de este su receptividad para elegir entre los tres criterios el conveniente para resolver el problema. Esta parte fue la mayor dificultad para resolver el problema pues se enfocaron en los dos criterios trabajados en las actividades desechando el tercero dado en el tablero.

De alguna manera fue una ventaja, pues al explorar esos caminos se dieron cuenta en las figuras del problema, una desventaja al intentar usar esos criterios. Como no se tenía la seguridad de todos los lados, y ningún camino para hallarlos, con lo que no se podría usar el criterio de LLL, para el segundo criterio LAL las condiciones no pintaban bien, pues se tenía la misma complicación del primero. Para solucionarlo entonces quedaba el tercer criterio ALA para usarlo solo debieron recurrir a hallar la medida del tercer ángulo, garantizando éxito para hallar la solución.

CAPÍTULO 5 – CONCLUSIONES

Para un estudiante de la educación básica o media, resolver un problema implica adquirir cierto tipo de pensamiento matemático que le va a permitir en el futuro usar esta disciplina como una herramienta de modelación o por qué no dedicarse a esta ciencia como un proyecto de vida. La resolución de problemas es un proceso de movilización de saberes, en el sentido de hacer de un problema una fuente de aprendizaje para el que quiera acercarse a las matemáticas. El sujeto se vuelve parte activa de su proceso educativo y se involucra y compromete a escudriñar en sus conocimientos previos o buscar los nuevos para resolver un problema.

Al trabajar el concepto de triángulo bajo la resolución de problemas permitió conectar enunciados geométricos con enunciados aritméticos y viceversa; es decir, entender que la geometría no es una disciplina disjunta de la matemática. El rumbo que se toma para construir una posible solución de un problema que involucra un concepto es unirlo con otros componentes matemáticos, empalmándolos de tal forma que no se podrían concebir el uno sin el otro. Por ejemplo para el caso de la semejanza entre figuras, se sabe que para establecer dicha condición es necesaria además de igualdad de ángulos, el concepto de proporcionalidad, pero para manejarlo se debe conocer la razón como cociente entre dos números.

Pero para lograr la movilización de conocimientos, Polya sugiere enfrentarse al problema sin tratar de buscar recetas o fórmulas. Sin embargo al enfrentar a los estudiantes con los problemas, ellos buscaban fórmulas y comenzaban a hacer cálculos a la ligera que no indicaba un rumbo claro hacia la solución del mismo. Este tipo de facilismo se fue superando con dificultad a través de las sesiones. En este sentido se enfrenta a un segundo problema que fue el de tratar que los estudiantes lograran configurar un plan para resolver el problema. La complicación radicaba en ciertos análisis para conectar conocimientos que a *grosso modo* originarían ciertos cálculos para resolver el problema. Al menos eso fue notorio en los estudiantes del grado noveno B. Un ejemplo de ello se hace evidente en la bitácora número 3, en donde se reflexionó sobre la complicación de pasar de comprender el problema a elaborar un plan. Mientras hacer una visión retrospectiva, fue la herramienta para mostrar que el facilismo en ocasiones complica las cosas, pues al corroborar la veracidad de sus procesos derrumba malas interpretaciones que no permiten concordancia entre los datos y la incógnita, llevándolos a replantear sus cálculos.

En el proceso de comprender un problema parapasar a elaborar un plan no se puede olvidar a la figura y los problemas análogos. Estos elementos ayudaron a los estudiantes, en algunas ocasiones, a transitar sin tanta complicación del paso de comprender el problema a elaborar el plan. La figura, cuando se incluía en un problema o se requería es porque podía ser de utilidad al momento de resolver un problema. Sin embargo los estudiantes no exploraban la potencialidad de esta al instante de resolver el problema, descartándola. Pero cuando se mostraba su importancia los estudiantes empezaban a reflexionar de su función en el problema, como brindar datos importantes, hacer explícita la relación con la incógnita y entender cuáles pueden ser los horizontes en la construcción de un plan para aproximarse o llegar a la solución, en el mejor de los casos. Con respecto a la analogía, para los estudiantes del grado noveno B, tomaba sentido cuando se retomaba un problema trabajado en el pasado con experiencias adquiridas en el presente, que permitían recurrir a problemas ya trabajados y hacer uso de sus características con las cuales se establecía un plan para resolverlo implicando con ello movilizar conocimiento.

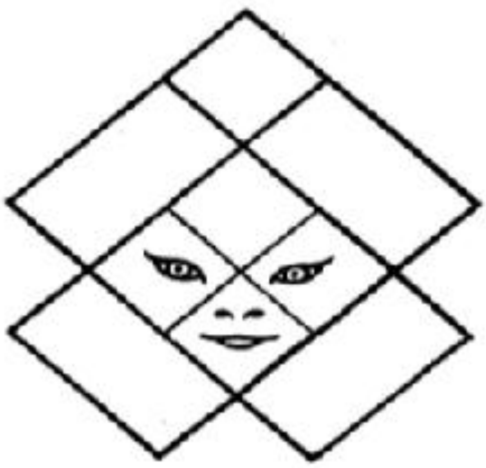
Finalmente, resolver un problema es un proceso donde los estudiantes del grado noveno B enfrentaron sus dificultades e inconvenientes en el campo de la matemática. Esas dificultades inducían al fracaso pero igualmente influían en solventar esos inconvenientes, solidificando conceptos como semejanza, congruencia de triángulos, etc. Con esto los estudiantes exploran sus conocimientos, adquiere nuevos para organizarlo y hacer uso de ello no solo para solucionar el problema sino para su formación matemática.

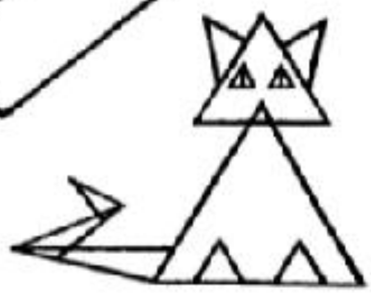
ANEXOS

Actividad uno

EL JOVEN HINDÚ Y EL GATO

¿Cuántos cuadrados distintos puedes contar en el dibujo del joven hindú con turbante?





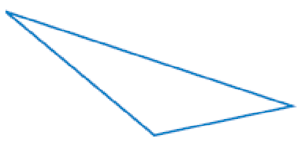
Taller número uno (segunda parte, sesión número uno)

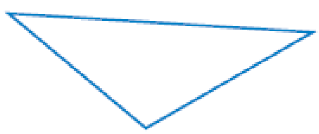
Fecha:

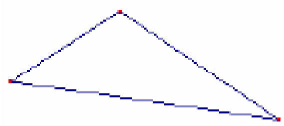
Nombre y apellidos:

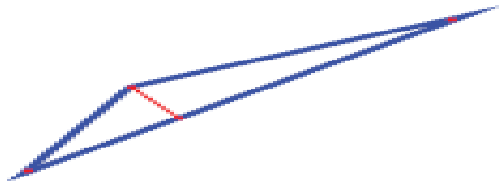
Taller de geometría: ¿Cuáles son tus conocimientos acerca de los triángulos?

1. ¿Cuál de las siguientes figuras es un triángulo?



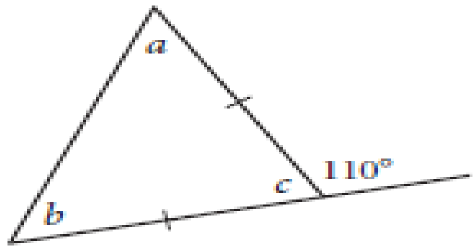




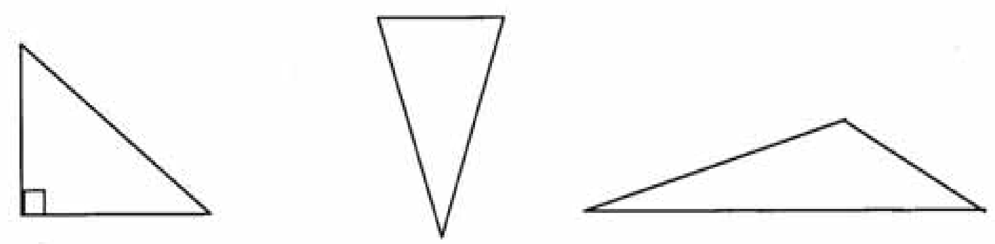


2. ¿Cuánto suman los ángulos interiores de un triángulo?

3. Calcula la medida de cada ángulo con letra y explica cómo la hallaste.

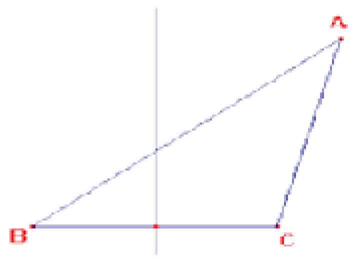


4. Dibuje las alturas de los triángulos

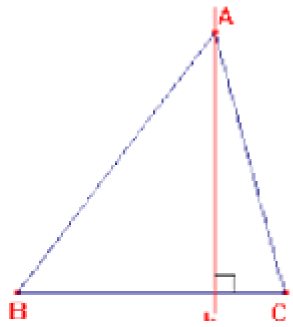


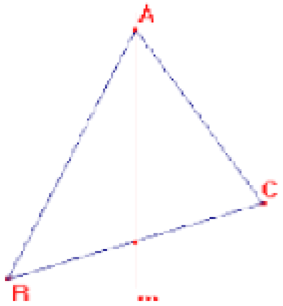
5. Nombre las rectas notables que aparecen representados en cada gráfico:

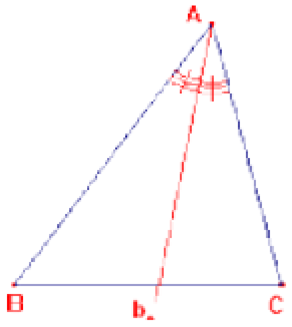
a)



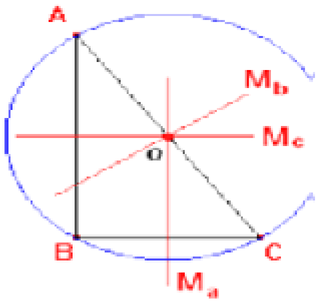
b)

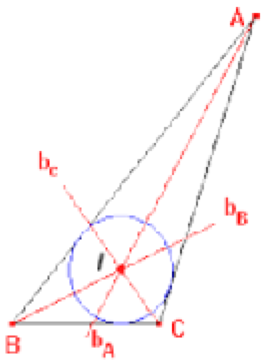


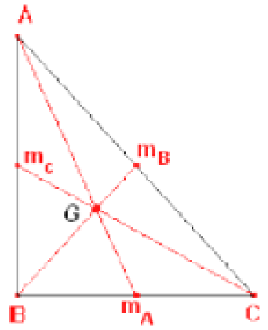
c) 

d) 

6. Nombre los puntos notables que aparecen representados en cada gráfico

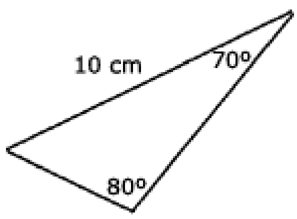
a. 

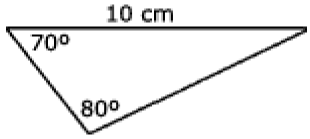
b. 

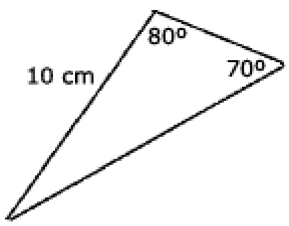
c. 

7. Dados los siguientes triángulos, determinar cuáles son congruentes.

I.II. **III.**







a) Sólo I y II   b) Sólo I y III   c) Sólo II y III   d) I, II y III   e) Ninguno

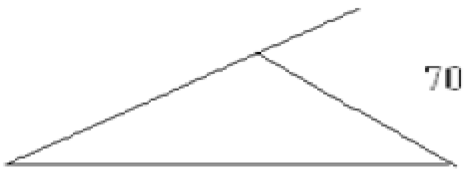
8. Encuentra la medida del tercer ángulo interior de un triángulo, si la medida de los otros dos son:

a) 67 y 47

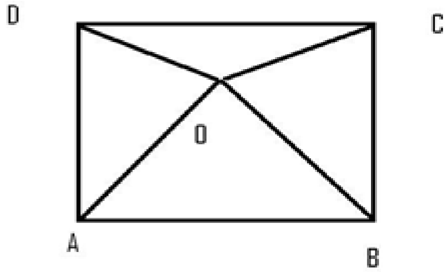
b) 22 y 135

c) a y 2a

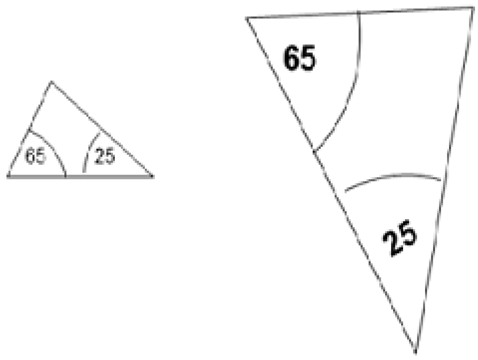
9. En un triángulo isósceles, el ángulo exterior del vértice mide 70º. ¿Cuánto miden los ángulos interiores de la base?



10. El docente pega en el pizarrón un afiche en el que aparece el siguiente dibujo y la correspondiente información sobre el mismo: ABCD es un cuadrado. OBA es un triángulo equilátero. En esta figura es posible determinar las medidas de varios ángulos que allí aparecen, sin necesidad de recurrir al transportador. ¿Podría decir cuáles son?



11. ¿Son los siguientes triángulos semejantes?



Actividad dos

Juego de los triángulos

NOMBRE DEL JUEGO	JUEGO DE LOS TRIÁNGULOS
Tipo	Dados
Material Necesario	Dados , hojas
Número de jugadores	Dos o tres
referencias	Corbalán, F. Juegos matemáticos para secundaria y bachillerato.
Niveles de utilización	Educación Secundaria
objetivos	Encontrar relaciones entre los lados de un triángulo.

El juego consiste en formar grupos de dos o tres estudiantes, en el cual se necesitara tres dados normales y una hoja para ir apuntando los resultados. Cada uno de los jugadores, por turno, tira los tres dados a la vez y comprueban si los números que le salen pueden ser las longitudes de un triángulo. En caso afirmativo el estudiante dirá el tipo de triangulo: equilátero, isósceles o escaleno. Si con las longitudes que sale no se puede formar un triángulo, entonces el jugador se anota un cero. En la hoja de resultados se anotan las tiradas de cada jugador y la puntuación correspondiente: un punto si el triángulo es escaleno; dos si es isósceles y tres si es equilátero. Gana el jugador que más puntos consigue en un número prefijado de tiradas.

Con este trabajo pretendo que los estudiantes encuentren la relación entre las longitudes de los lados de un triángulo: cada lado ha de ser menor que la suma de los otros dos y mayor que su diferencia.

Observaciones:

1. La puntuación de cero puntos no deberá explicitarse al comienzo del juego, hasta que sea planteada por algún jugador. En el momento que aparezca será cuestión de ver la primera condición para que exista el triángulo.
2. Tras haber jugado algunas veces es el momento de intentar encontrar alguna relación que se cumpla siempre entre las longitudes de los lados que se permiten formar triángulos. una vez hecha la discusión habrá que generalizar el resultado para otras longitudes, mayores o menores.

Nº	Jugador 1			P	Jugador 2			P	Jugador 3			P	Jugador 4			P
1																
2																
3																
4																
5																
6																
7																
8																
9																
10																
11																
12																
13																
14																
15																
16																
17																
18																
19																
20																
	Total				Total				Total				Total			

TRIÁNGULOS	Jugador 1					Jugador 2					Jugador 3					Jugador 4				
EQUILÁTEROS																				
ISÓSCELES																				
ESCALENOS																				

Taller número dos

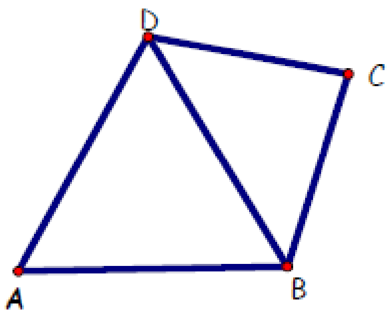
Problema uno

Decidan en cada caso si con ellas se puede o no construir un triángulo.

a. 3 cm, 2 cm, 1 cm
b. 8 cm, 12 cm, 5 cm
c. 7 cm, 1cm, 2 cm.

PROBLEMA 2

El cuadrilátero ABCD está partido en 2 triángulos: ABD y BCD. ABD es equilátero y tiene 36 cm de perímetro. BCD es isósceles, con BC = CD y tiene



32 cm de perímetro. ¿Cuál es el perímetro?

Actividad número tres

Manipulación con papel

Dibujar un triángulo cualquiera en una hoja, luego calcar en otro dicho triángulo, y poner nombres a sus ángulos interiores, después cortar los tres ángulos en el triángulo y organizar de tal forma que integren un ángulo llano el cual se sabe de antemano es de 180º.

Taller número tres (primera parte)

Taller de geometría: construyendo triángulos a partir de ángulos

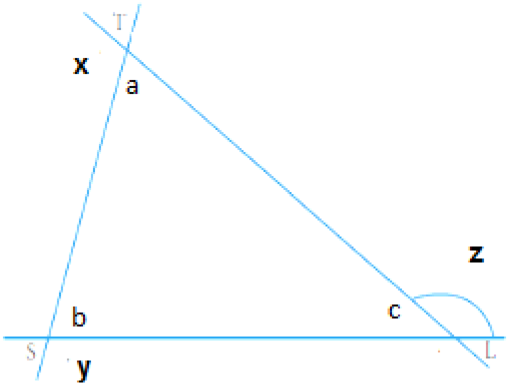
1. Se podrá dibujar, un triángulo que tenga un ángulo de 60º y otro de 30º.
2. Se podrá dibujar un triángulo que tenga un ángulo de 120º y otro de 100º.
3. Se podrá dibujar un triángulo que tenga dos ángulos de 90º.
4. Se podrá dibujar un triángulo que tenga un ángulo de 120º y otro de 60º.

5. ¿Crees que es verdadero o falso que en cualquier triángulo *STL* se tiene que

X = b + c

Y = a + c

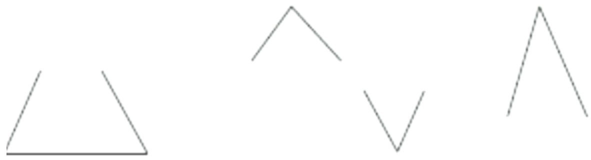
Z = a + b ? justifica tu respuesta



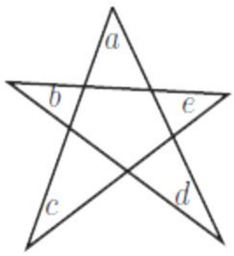
Taller número tres (segunda parte)

PROBLEMA 1:

En la ilustración que puede verse más abajo hay un triángulo al que se le ha borrado uno de sus ángulos. Lo que ustedes tienen que hacer es encontrar cuál o cuáles de los ángulos que se ofrecen permiten reconstruir el triángulo. Para ello pueden utilizar la estrategia que crean más conveniente, la única condición es que primero deben ponerse de acuerdo y elegir uno de los ángulos y recién después calcarlo para comprobar si coincide con el resto del triángulo.



PROBLEMA 2:

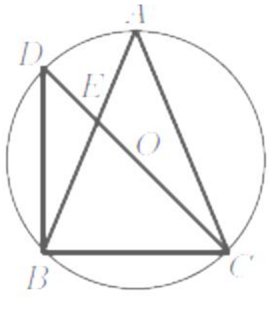


En la siguiente figura, ¿cuánto vale la suma de los ángulos a, b, c, d y e?

Una vez leído el enunciado, se da como sugerencia hacer uso de una clase de ángulo importante para resolver el problema (los pares de ángulos no adyacentes (vecinos) formados cuando dos rectas se intersectan se denominan ángulos opuestos por el vértice y además estos ángulos son iguales).

PROBLEMA 3

Los triángulos ABC y BCD son isósceles y el ángulo BAC mide 30. ¿Cuánto mide el ángulo AEC?



Semejanza

En las figuras geométricas, la semejanza es la relación entre dos figuras que poseen la misma forma pero diferente tamaña. Para comprobar que dos figuras son semejantes, se tiene que verificar que los lados homólogos (parecidos son proporcionales.

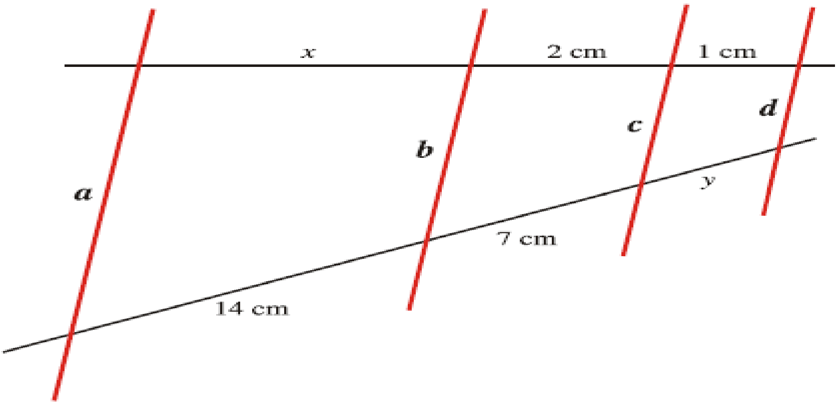
Las figuras geométricas pueden ser semejantes en caso de que conserven la misma forma. La semejanza entre figuras es entonces una relación entre figuras que conservan la forma, variando el tamaño. El tamaño de las figuras semejantes varía proporcionalmente.

Para reconocer si una figura es semejante es necesario verificar que los lados homólogos sean proporcionales y sus ángulos homólogos congruentes, es decir que miden lo mismo. La proporcionalidad es una constante que se obtiene calculando la razón entre las magnitudes de la figuras **k = b: a.** Por ejemplo, b sería el lado de un triángulo semejante al lado a de otro triángulo. Calculando la constante se puede reconocer si se trata de figuras que han sido reducidas o aumentadas. El Teorema de Thales es otra forma de aplicación de la proporcionalidad en la geometría. Calculando la constantes se puede reconocer si se trata de figuras que han sido reducidas o aumentadas. Dos figuras son semejantes si poseen la misma forma pero diferente tamaño.

- La semejanza se reconoce por la relación proporcional entre los lados homólogos y por la congruencia de los ángulos homólogos.
- La proporcionalidad es una constante que determina si la relación entre las figuras es de reducción o de ampliación.
- La constante se calcula mediante la razón entre los lados homólogos de la figura.
- El teorema de Thales aplica de otra manera la proporcionalidad en geometría.

Problema cero

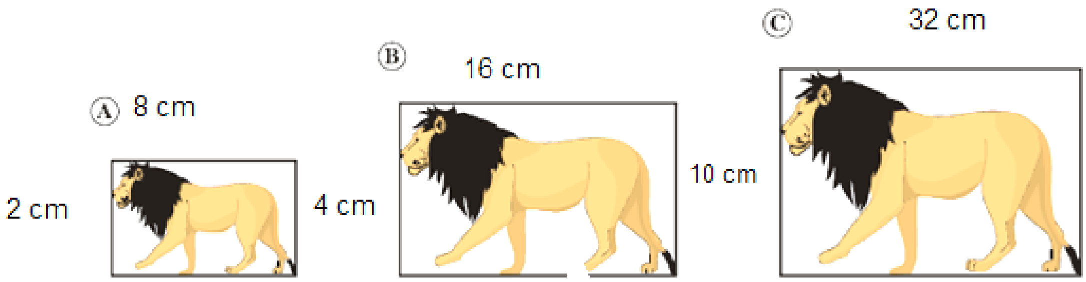
Sabiendo que las rectas *a*, *b, c* y *d* son paralelas, calcula la longitud de *x* e *y*:



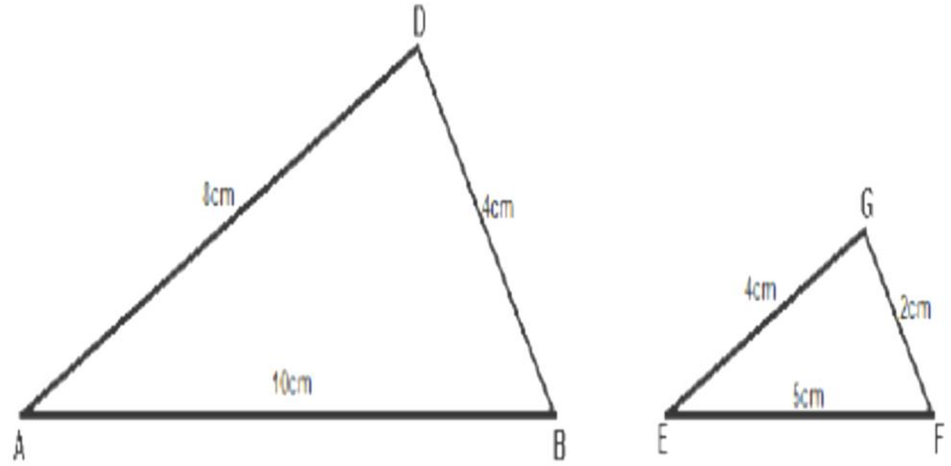
Taller número cuatro (primera parte)

Problema uno

Observa estas tres fotografías e indica si son semejantes entre sí y por qué:



Problema dos



2.1 ¿Qué puede concluir respecto a: *∠A,∠E,∠B,∠F* y *∠D, ∠G?*

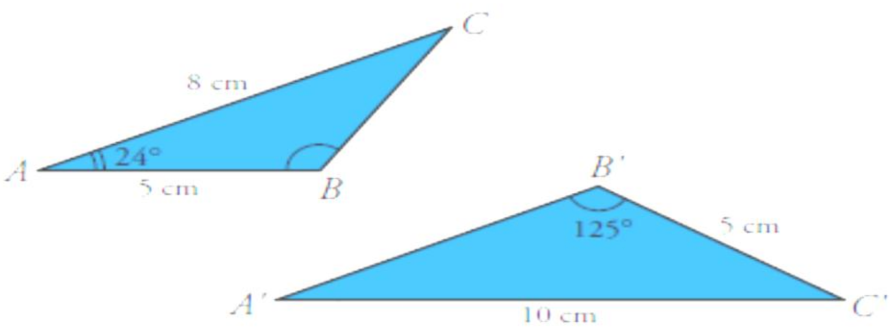
2.2 Verifique la igualdad siguiente

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{DB}}{\overline{GF}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{EG}} = 2$$

Taller cuatro (segunda parte): semejanza de triángulos

Problema tres

Nos aseguran que estos dos triángulos son semejantes:



Halla los lados y los ángulos que le faltan a cada uno de ellos.

Problema cuatro

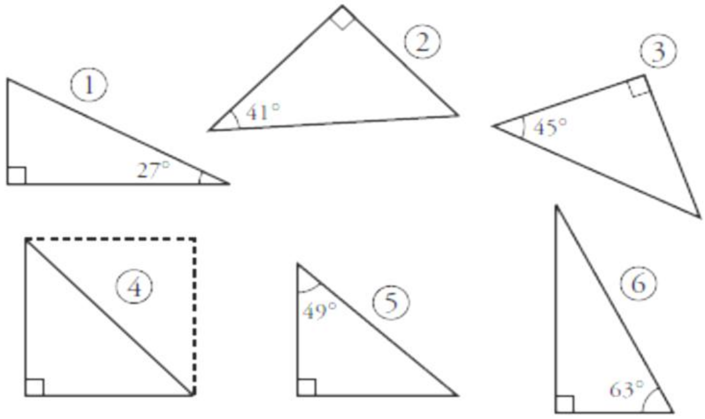
Los lados de un triángulo miden 3 cm, 4 cm y 5 cm. Se construye otro semejante a él cuyo lado menor mide 15 cm.

a) Halla los otros dos lados del segundo triángulo.

b) El primer triángulo es rectángulo. ¿Podemos asegurar que el segundo también lo será?

Problema cinco

Explica por qué son semejantes dos triángulos rectángulos con un ángulo agudo igual. Entre estos triángulos, hay algunos semejantes entre sí. Averigua cuáles son calculando previamente el ángulo que le falta a cada uno de ellos:

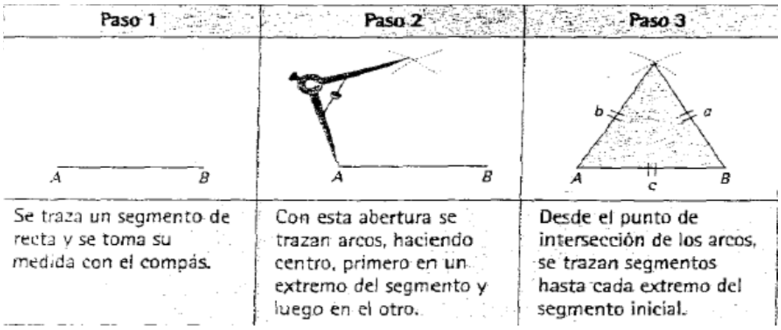


Problema adicional

Calcula la altura de Juan sabiendo que proyecta una sombra de 2 metros en el momento en que Pedro, que mide 1,80 m, proyecta una sombra de 2,25 metros.

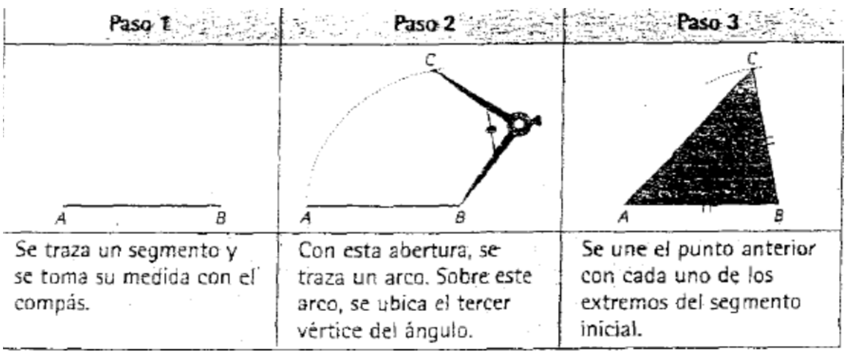
Actividad final uno

Triángulo equilátero



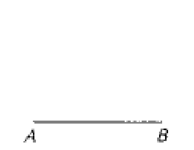
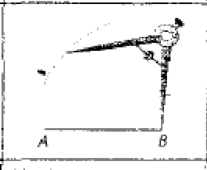
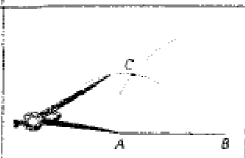
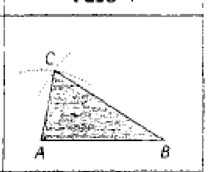
Paso 1	Paso 2	Paso 3
Se traza un segmento de recta y se toma su medida con el compás.	Con esta abertura se trazan arcos, haciendo centro, primero en un extremo del segmento y luego en el otro.	Desde el punto de intersección de los arcos, se trazan segmentos hasta cada extremo del segmento inicial.

Triángulo isósceles



Paso 1	Paso 2	Paso 3
Se traza un segmento y se toma su medida con el compás.	Con esta abertura, se traza un arco. Sobre este arco, se ubica el tercer vértice del ángulo.	Se une el punto anterior con cada uno de los extremos del segmento inicial.

Triángulo escaleno

Paso 1	Paso 2	Paso 3	Paso 4
			
Se traza un segmento.	Haciendo centro en un extremo del segmento se traza un arco de medida diferente.	Variando la abertura del compás, se traza un arco, haciendo centro en el otro extremo del segmento.	Se unen los extremos del segmento con el punto de intersección de los arcos.

Problema cero

Construir dos triángulos uno equilátero cuyos lados fuesen de 4 cm y otro isósceles cuyos lados iguales fuesen de 4 cm y el tercero de 6 cm.

Actividad final dos

Se forman grupos de tres personas donde se proporciona un triángulo al grupo A y otro al grupo B, donde cada grupo debe con el mínimo de preguntas al otro grupo reproducir un triángulo idéntico.

BIBLIOGRAFÍA

- AREMENTA. E., CASTRO, J., VÁSQUEZ, A., ECHEGARAY A. 2005. Problemas para la 19ª Olimpiada Mexicana de Matemáticas. s/c .México.
- BARIOS. L, CASSINELLO. A, CAÑAS J, GALO. J, MARTÍN. M, RAMÍRES. C, RODRÍGUEZ. F, RUÍZ. C. 2008. Matemática de 2º de Edu. Editorial Anaya.
- BARREDO, Diana. 2006. La Geometría del Triángulo. s/c. Buenos Aires.
- FERNÁNDEZ, A.L. 2006. Cuaderno de Bitácora: un recurso para ir y venir de la teoría práctica. Revista Que Hacer Educativo. s/c. Montevideo
- GARCIA, S. y LÓPEZ, O. L. 2008. La enseñanza de la Geometría. s/c .México.
- GARDNER, M. 2002. Matemática para Divertirse. Ediciones Granica. New York.
- GODINO. J. D. 2004. Didáctica de las Matemáticas para Maestros. Alianza Editorial. Granada.
- EUCLIDES.1991.Elementos.Gredos.Madrid.
- HERNÁNDEZ, E. D. Y GUTIÉRREZ, C. E. s/f. La presencia de la geometría en la naturaleza y en el arte.
- HERMMERLING. E. 2003, Geometría elemental. Editorial Limusa. México.
- IVARRA.C. Geometría. s.n.t.
- POLYA, G. 2001. Como Plantear y resolver Problemas. Editorial trillas. México.
- ROSA, P. 2009. Estrategias En La Resolución De Problemas I, “Reyes Católicos” EJEA. CIUDAD.
- VALENTINO. J., VRIES. M. s/f. El “Cuaderno de Bitácora” Un dispositivo pedagógico. Recuperado 20 de febrero de 2013, de: http:// ww.catedravalentino.com.ar/descargas/ElCuadernoDeBitacora.pdf.

AGRADECIMIENTOS

Existen un grupo de personas a quien quisiera manifestar mis más sinceros e infinitos agradecimientos por permanecer todo este tiempo presente en este proceso. Cuyas palabras, sé no serán suficientes para encerrar la gratitud que siento.

A Dios por manifestar su presencia junto a mí, a través de permitir compartir mi triunfo junto con mis padres que fortaleció mí espíritu en el proceso.

A mis padres, sin duda unos de los principales precursores y quienes me enseñaron que la perseverancia por aprender todos los días, sin importar las circunstancias y el tiempo permitió hacer realidad este sueño.

A la profesora Gabriela Arbeláez, quien compartió conmigo sus conocimientos, su tiempo, dedicación que fueron valiosos para formar no solo a una profesional, sino a una persona comprometida con la docencia.

Mis familiares por su permanente motivación e incondicional apoyo y a mis amigos por apoyarme y compartir conmigo momentos tristes y alegres. John Jairo, Alexandra, Enid, Erika, Idalí.

.