SOLUCIÓN DE ECUACIONES LINEALES EN DOS VARIABLES A TRAVÉS DEL TRATAMIENTO Y CONVERSIÓN DE SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN

JOHN GEYBER BEDON LLANTÉN

UNIVERSIDAD DEL CAUCA
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES, EXACTAS Y DE LA EDUCACIÓN
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS
POPAYÁN
2013

SOLUCIÓN DE ECUACIONES LINEALES EN DOS VARIABLES A TRAVÉS DEL TRATAMIENTO Y CONVERSIÓN DE SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN

JOHN GEYBER BEDON LLANTÉN

Trabajo de grado para optar al título de Licenciado en Matemáticas

DIRECTORA:

Dra. Gabriela Arbeláez

UNIVERSIDAD DEL CAUCA

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES, EXACTAS Y DE LA EDUCACIÓN

LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

POPAYÁN

2013

Nota de aceptación:

El presente trabajo de la práctica pedagógica fue asesorado y aprobado por

Vo. Bo. Ángel Hernán Zúñiga
Dr. En Educación Matemática
Evaluador

Vo. Bo. Gabriela Arbeláez
Dra. Historia de las Matemáticas
Directora

Vo. Bo. Yeny Leonor Rosero
Coordinadora Licenciatura en Matemáticas

Fecha de sustentación: Popayán 27 de noviembre de 2013

AGRADECIMIENTOS

Primero que todo doy gracias a Dios por darme la vida, por haber dispuesto a mi lado de un ser tan especial como lo es mi madre, gracias a ella, a su gran esfuerzo y apoyo incondicional, estoy hoy finalizando está etapa de mi vida y con ello empezando una nueva, para disponerme al servicio de la sociedad. Al Colegio Champagnat por brindarme el espacio para llevar a cabo este proyecto, a mis compañeros de curso por sus críticas constructivas en la elaboración de este proyecto y finalmente a la directora de este trabajo por la paciencia, y consejos durante las cuatro etapas de la práctica pedagógica.

TABLA DE CONTENIDO

TABLA DE CONTENIDO DE GRAFICOS

1. INTRODUCCIÓN

El presente proyecto de aula, da a conocer, como a través de la visualización y registros de representación, los alumnos de noveno de secundaria del Colegio Champagnat de la ciudad de Popayán, dan solución a un sistema de ecuaciones lineales en dos variables.

Este proyecto se desarrolló teniéndose presente algunos trabajos, que se han realizado alrededor de los sistemas lineales, lo cual sirvió de base para un análisis preliminar que guío los objetivos de este trabajo.

Dado que a los objetos matemáticos solo se les accede es a través de representaciones, se hace necesario para la construcción conceptual de un objeto matemático articular algunas representaciones. Este proceso implica hacer distintas conversiones y tratados de diferentes representaciones de un objeto en cuestión. Teniéndose presente lo anterior, desde Duval y su definición de registros de representaciones (1993,1995), nos proporciona un marco teórico adecuado para la solución de ecuaciones lineales en dos variables mediante diferentes registros de representación.

Para alcanzar este propósito se diseñó una secuencia de actividades, donde el ambiente de aprendizaje fuera distinto al sistema tradicional, en este sentido el enfoque que se desarrolló fue en términos de un carácter-a didáctico, esto con la idea que en lugar de hacerse una transmisión directa de los conocimientos, se plantearan problemas en una secuencia de actividades, con la finalidad de brindar

Al alumno pautas para que él diera solución a un sistema de ecuaciones en dos variables a través de los distintos registros de representación.

A continuación, se presenta la estructura del documento de sistematización de lo que fue la práctica pedagógica. En el capítulo uno: se habla sobre las características más importantes del colegio Champagnat, lugar donde se desarrolló la práctica pedagógica, como son; su ubicación geográfica, el año de creación, su fundador, su visión, misión, entre otros aspectos.

En el capítulo dos: se presenta el marco teórico, abordado desde la teoría de Raymond Duval, en los libros *SEMIOSIS Y PENSAMIENTO HUMANO, Registros Semióticos y Aprendizajes Intelectuales* y *LOS PROBLEMAS FUNDAMENTALES EN EL APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS Y LAS FORMAS SUPERIORES EN EL DESARROLLO COGNITIVO.*

En el capítulo tres: aquí se habla de manera general, sobre los propósitos que se buscaban con cada una de las cinco actividades, para al final lograr que estos fueran alcanzados por los estudiantes y así ellos, comprendieran las ecuaciones lineales en dos variables y dieran solución a través de distintas representaciones a cualquier problema que las relacionara.

En el capítulo cuatro: se presenta el análisis, la reflexión y los resultados obtenidos de los registros de los estudiantes, en cada una de las cinco actividades desarrolladas a lo largo del proyecto de aula, en esta parte se utiliza la idea de Bitácora, la cual es una reflexión de lo que se hizo en el aula.

En el capítulo cinco: se dan a conocer las conclusiones a las que se llega a partir del trabajo realizado y algunas recomendaciones para profesores y profesores en formación.

El proyecto de aula termina con el conjunto de referencias bibliográficas utilizadas, y el anexo de las cinco actividades realizadas

2. CARACTERÍSTICAS DEL ENTORNO

Figura 1: Escudo del colegio Champagnat

Este proyecto de aula, se realizó con estudiantes del grado noveno uno del Colegio Champagnat de Popayán, sede principal, la cual se encuentra ubicada en la carrera 9°número 5N-51.

La comunidad francesa de los hermanos Marista es un grupo de personas que ha obtenido premios ANDRES BELLO, título que se otorga a los mejores puntajes en pruebas ICFES. Ellos firman el 26 de marzo de 1889 el contrato celebrado entre el gobierno de Colombia representado en ese entonces por el general Joaquín Vélez, quien fuese embajador, de Colombia ante la santa sede.

En este contrato los hermanos Maristas se comprometen a dirigir dos escuelas en el Cauca. De esta manera los hermanos llegan el 26 de noviembre de 1989 a Colombia y a Popayán procedentes de Francia. El alcalde por ese entonces Cenon Vidal, anunció al hermano Pelayo director del nuevo grupo fundador el

Oficio 1551, del estado de gobierno, por el cual los hermanos quedaban encargados de la dirección de la escuela de varones 1 y 2 de Popayán.

El 27 de septiembre de 1932 al poco tiempo del cierre de la escuela del Carmen, los hermanos anunciaron la apertura actual del colegio Champagnat bajo la dirección del hermano francés Acacio. Las clases en este colegio empezaron el 10 de octubre del mismo año con 30 estudiantes, los cuales estaban distribuidos en tres sesiones de primaria; básica, media y superior. Para su funcionamiento se alquiló una casa entre la calle 5ª y 9ª.

Posteriormente las clases se iniciaron con 142 estudiantes en otro lugar más amplio, hoy correspondiente a donde se encuentra ubicado el banco de la república.

El 29 de mayo de 1954 la comunidad educativa Marista asiste a las celebraciones religiosas, con motivo de la beatificación del padre fundador, Marcelino Champagnat. El colegio Champagnat empieza a funcionar en la actual sede en 1967-2006.

Este colegio se ha destacado por obtener los mejores puntajes en las pruebas de estado para ingreso a la universidad y en la actualidad figura con nivel superior, destacándose como uno de los 100 colegios mejores de Colombia. Por sus aulas han pasado profesionales de todas las áreas, altos ejecutivos, deportistas, periodistas, parlamentarios, ministro, médicos, economistas, etc.

MISIÓN Y VISIÓN DEL COLEGIO

MISIÓN: El Colegio Champagnat de Popayán es una institución educativa de los Hermanos Maristas de la Enseñanza, que a través de la pedagogía Marista caracterizada por el amor a María, el espíritu de familia, el amor al trabajo, la sencillez de vida y la presencia, pretende que los niños y jóvenes conozcan y amen a Jesucristo, para ayudarles a ser buenos cristianos y buenos ciudadanos, haciendo así realidad, el sueño de San Marcelino Champagnat.

VISIÓN: En el año 2017 las instituciones educativas Maristas, serán reconocidas por la calidad de su formación explícita en los valores evangélicos, su convivencia solidaria y por la excelente formación académica, mediante la implementación de una cultura de mejoramiento continuo.

Figura 2: Fachada colegio Champagnat

Figura 3: Interior Colegio Champagnat

3. FUNDAMENTOS TEÓRICOS

En su libro *SEMIOSIS Y PENSAMIENTO HUMANO Registros Semióticos y Aprendizajes Intelectuales,* Raymond Duval hace referencia al hecho que en las matemáticas se privilegian diversas actividades cognitivas. Entre ellas menciona la conceptualización, el razonamiento, la resolución de problemas y también la comprensión de textos propios del área. Debido a la particularidad del aprendizaje en este campo, para las anteriores actividades, se hace necesario el uso de sistemas de expresión y también de representaciones diferentes a las del lenguaje o de las mismas imágenes, entre ellas están: escritura para los números, notaciones para los objetos, escritura algebraica. Los cuales se convierten en lenguajes que son paralelos al lenguaje natural y que sirven para expresar relaciones y operaciones entre figuras geométricas, gráficos cartesianos, etc.

Respecto a lo anterior Duval se pregunta lo siguiente (Duval, 2004, pág. 13) *¿es esencial esta utilización de varios sistemas semióticos de representación y de expresión, o al contrario, no es más que un medio cómodo pero secundario para el ejercicio y para el desarrollo de las actividades cognitivas fundamentales?* En este sentido, también se plantea la siguiente cuestión: *¿este funcionamiento cognitivo en sus actividades de aprehensión conceptual, de razonamiento o de comprensión de enunciados, es o no independiente de la existencia de una pluralidad de registros semióticos de representación?*

Para tratar de dar respuesta a estos interrogantes existen dos planteamientos. El primero hace referencia a que no hay comprensión en matemáticas al no distinguirse un objeto de su representación. De esta manera no se deben

Confundir los objetos matemáticos, (los números, las funciones, las rectas, etc.) con las distintas representaciones como son la escritura decimal o fraccionaria, los escritura decimal o fraccionaria, los símbolos, gráficos y trazados de figuras, debido a que un mismo objeto se puede dar a partir de distintas representaciones. Otro argumento más general y psicológico, es el de las representaciones mentales, las cuales se pueden ver como el conjunto de imágenes y de concepciones que el individuo puede tener sobre un objeto, sobre una situación.

Aunque existen oposiciones entre dichos argumentos, se optó en hacer énfasis en el primer argumento, sobre las representaciones semióticas, las cuales Duval deja muy claro que son importantes. Con ellas se buscó llevar al alumno a la comprensión y manejo de las soluciones de un sistema de ecuaciones lineales con dos variables.

Ahora bien, las representaciones semióticas son producciones constituidas por el uso de signos en enunciados en el lenguaje natural, formula algebraica, gráfico, figura geométrica, y se convierte en el medio por el cual un individuo hace visible o accesible a otros y así mismo, sus representaciones mentales.

En las matemáticas las representaciones semióticas son muy importantes no sólo para la comunicación sino también porque contribuyen al desarrollo de la actividad matemática misma. Sin duda alguna, los resultados en las matemáticas, a través de la historia de los números, el álgebra, la geometría y el análisis se han dado a través de una diversidad de sistemas semióticos de representación.

Para poder operar con los objetos matemáticos es necesario tener presente el sistema de representación semiótico a utilizar, dado que en algunas operaciones, por ejemplo con los números, para realizar un cálculo numérico importa el sistema de escritura escogido. Tenemos: la escritura binaria, decimal y fraccionaria.

En la enseñanza de las matemáticas no sólo son importantes los contenidos y metodología, sino que es pertinente tener presente las razones por las cuales se dan los problemas de comprensión en los estudiantes. Por ejemplo hablando de las operaciones con los números, algunos alumnos saben efectuar la adición de dos números ya sea en escritura decimal o fraccionaria, pero otros no piensan en la posibilidad de hacer esa *conversión*, porque no diferencian entre la operación que se debe hacer y el número con el cual se está trabajando, así:

La manera de operar con 1,5 no es la misma que operar por ejemplo con $\frac{3}{2}$ o 15×10^{-1} esto debido a que se utilizan procedimientos diferentes de *tratamiento*, obsérvese las tres adiciones siguientes:

$$1{,}5+1{,}5=3,\ \frac{3}{2}+\frac{3}{2}=\frac{6}{2},\ 15\times10^{-1}+15\times10^{-1}=30\times10^{-1}$$

Estos tres números tienen una escritura distinta y sin embargo representan el mismo número, por otra parte los algoritmos para efectuar estas operaciones son distintos, dependen del sistema de representación de los números.

De manera más general se puede decir que en el caso de un sistema semiótico, éste presenta sus propias reglas, las cuales permiten una combinación de sus signos, por lo cual el resultante también tiene sentido. Así cada sistema semiótico, puede tener un funcionamiento distinto.

Anteriormente se han enunciado las palabras *tratamiento* y *conversión*, estas son dos tipos de transformación de una representación semiótica. Se entenderá por *tratamiento* a la transformación de una representación en otra de un mismo registro o como la transformación estricta interna de un registro de escritura, ya sea simbólica, de letras o números, esto debido a que cambia en el mismo registro de escritura de los números, expresiones nuevas por unas ya dadas. Para ejemplificar un poco esto se puede ver en el cálculo con un sistema de escritura de los números (ver ejemplo anterior). De esta forma un tratamiento depende en sí, del funcionamiento representacional de un registro, así a una cantidad de registros le sucede una cantidad de *tratamientos.*

En otras palabras un *tratamiento* es la transformación de una representación inicial en otra terminal concerniente ya sea a una cuestión, a un problema o una necesidad.

Veamos otro ejemplo de *tratamiento:*

- Sumando un número con 3 se obtiene 5, este número es 2.
- La pendiente de la recta $-6x+3y=4$, es $m=2$.

El anterior es un ejemplo de *tratamiento* puesto que la transformación se efectúa quedándose en el mismo registro.

Por otro lado la *conversión* se entiende como la representación de un registro inicial en un nuevo registro, distinto al inicial. Por ejemplo:

Tomemos como registro inicial el siguiente enunciado, m es la diferencia de a y b, un nuevo registro es $m=a-b$, el cual es una representación distinta del registro inicial.

Otro ejemplo de *conversión* es el que nos presenta Duval, concerniente a hallar la relación numérica entre dos segmentos orientados. El problema consiste en lo siguiente:

A partir de la graduación regulada ilustrada, completar con el número conveniente la igualdad de longitud orientada (Duval, Los problemas fundamentales en el aprendizaje de las matemáticas y las formas superiores del desarrollo cognitivo, 1999, pág. 48).

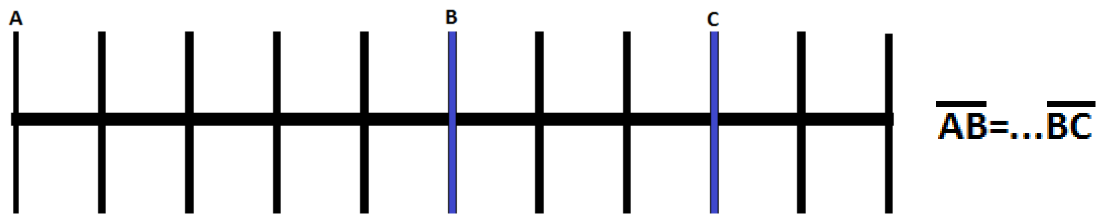


Figura 4: Segmentos orientados

A continuación se dan otros ejemplos de *conversión*:

Dado el siguiente gráfico de ecuaciones lineales determinar las ecuaciones algebraicas que las determinan:

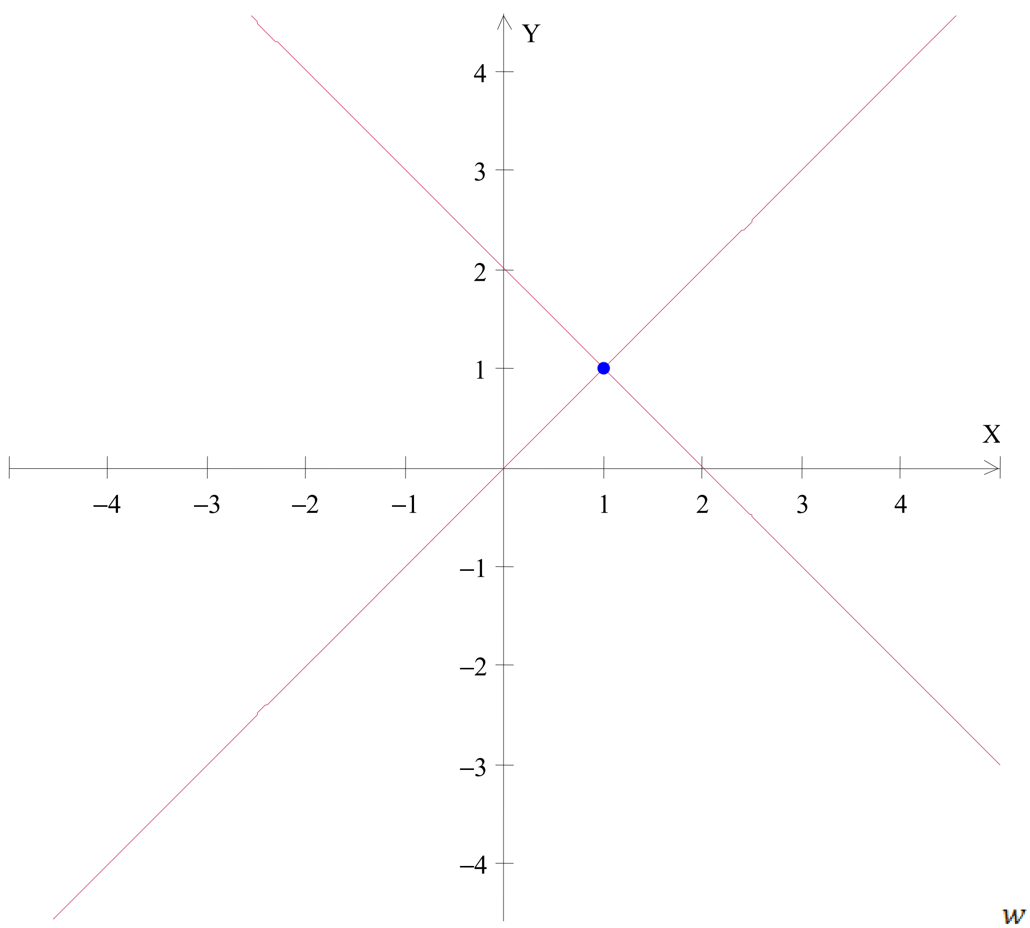


Figura 5: Intersección de dos rectas

Se quiere que a partir de la gráfica, se encuentren las ecuaciones algebraicas que representan a z y w.

$w : y = -x + 2$ y $z : y = x$ que como se ve es una nueva representación de registro distinto al inicial.

Así para redondear, la *conversión* es la transformación de la representación de un objeto, de una situación o de una información dada de un registro, en una nueva representación del mismo objeto. También hay otras palabras diferentes a *conversión*, que hacen corresponder una representación inicial de un registro, en otra representación, con un nuevo registro, entre estas mencionamos; traducción, ilustración, codificación, etc. La *conversión* es de este modo una transformación externa, relativa al registro de representación de partida.

Un ejemplo donde no existe *conversión* es el siguiente, mencionado por Duval:

> *Las siguientes tablas describen una situación de vectores en el plano o en el espacio. Dar una figura que ilustre la situación descrita por la tabla dada. Haz una tabla que describa la situación representada por la figura* (Duval, Los problemas fundamentales en el aprendizaje de las matemáticas y las formas superiores del desarrollo cognitivo, 1999, pág. 46)

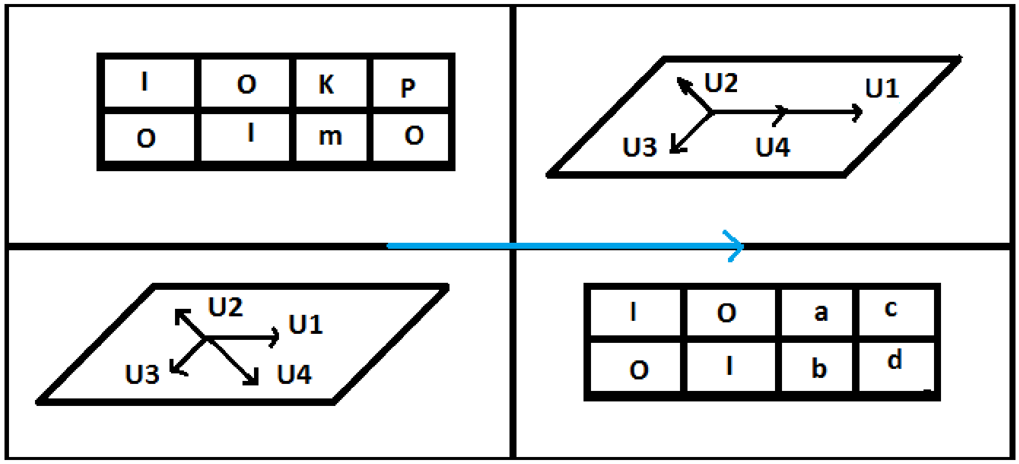


Figura 6: Puesta en evidencia de fenómenos de no congruencia

Duval nos da a saber que en este caso, al realizar esta actividad, la *conversión* podría conducir a variaciones considerables. Esto se debe a que la conversión en un sentido puede ser congruente y la contraria no lo es, una explicación es que las posibilidades para realizar una representación inicial, son distintas al sistema que se utiliza para producir una representación de llegada.

Es de tener presente que los procesos de *tratamiento* y *conversión* no se dan espontáneamente, debido a que pueden surgir dificultades en el pasaje de una representación a otra, por esto Duval menciona que para que una representación y otra sean congruentes debe haber correspondencia semántica entre las unidades que las constituyen, también un mismo orden de aprehensión de las unidades y finalmente convertir una unidad de partida en una sola de llegada. Cuando uno de estos criterios no se cumple se dice entonces que las representaciones no son congruentes.

La correspondencia semántica se da cuando a cada unidad significante simple[1], de una representación, se le asocia una unidad significante elemental, se entiende

[1] Son los que componen un enunciado, una formula o un texto, pueden ser tanto palabras como símbolos o reagrupación de palabras y símbolos.(Duval, 2004, pág. 77)

por unidad significante elemental, toda unidad que depende del léxico[2] de un registro.

Para la univocidad semántica terminal, a cada unidad significante elemental de la representación de partida le corresponde una única unidad significante elemental en el registro de llegada.

Para el orden de aprehensión de las unidades, es necesario que se tenga el mismo número de dimensiones.

Las unidades, mencionadas anteriormente, dependen del registro, puesto que por ejemplo hay registros que:

- *Tienen unidades discretas , como las lenguas formales*
- *Tienen unidades no separables, como las figuras y gráficos cartesianos.*
- *presentan varios niveles posibles de determinación funcional de las unidades como las lenguas naturales.*(Duval, 2004, pág. 76)

Las lenguas formales son aquellas en las que se combinan conectivos proposicionales, predicados, variables y cuantificadores, se utilizan en matemáticas y en la lingüística.

Los registros se convierten en una herramienta para el individuo, él los utiliza para explorar informaciones o por el contrario como un mecanismo para comunicarlas.

A las representaciones semióticas se encuentran ligadas dos actividades como es: *"su transformabilidad en otras representaciones que conservan ya sea todo el contenido de la representación inicial, o bien una sola parte de ese con".* (Duval, 2004, pág. 42)

2 Un léxico es un conjunto de elementos signos, símbolos o palabras.(Duval, 2004, pág. 96)

Ahora hemos introducido un nuevo concepto y es el de registro, Duval hace uso de este concepto, para referirse también a las representaciones semióticas. Esta palabra se emplea comúnmente para indicar maneras distintas de utilizar una lengua para expresarse. Mencionaremos los más utilizados en matemáticas: *los registros discursivos* y *no discursivos.* Los primeros son los que utilizan una lengua, en ellos se pueden formular proposiciones o transformar expresiones, aquí las proposiciones se caracterizan por ser verdaderas o falsas y se puede derivar unas de otras. En pocas palabras estas permiten describir, inferir, razonar, y calcular. Por otra parte los *no discursivos* son aquellos en los cuales se muestran formas o configuraciones de formas y también organizaciones, de esta manera se puede decir que estos permiten visualizar lo que no es dado de manera visible.

Para este trabajo se escogió las ecuaciones lineales con dos incógnitas, puesto que estas permiten que se hagan variadas representaciones y tratamientos en la solución e interpretación de problemas de matemáticas, que por lo general se dan en el lenguaje natural, algebraico y gráfico. Éste requiere realizar en ocasiones, distintas representaciones y cambios de registro, para hacer el desarrollo de un problema. Se quiere pues con el proceso del reconocimiento y uso de estos mecanismos que el alumno solucione un sistema de ecuaciones en dos variables.

Por otra parte, desde el punto de vista de los sistemas de representación semiótico, entendido esto como las diversas maneras en las que se puede mostrar un objeto y sus relaciones con otros, las ecuaciones lineales, son uno de esos tantos conceptos existentes en matemáticas, que permite diferentes formas de representación; verbal, simbólica, grafica, numérica, y tecnológica entre otras.

El caso de la representación verbal seda en la comunicación de los enunciados de los problemas, en la aplicación de los algoritmos de solución y los resultados, por ejemplo:

- Restar el mismo número a ambos miembros de una igualdad.

- La edad de Felipe aumentada en 5 años es 10 años.

La representación simbólica, se basa en la utilización de signos para representar una ecuación, signos que denotan operación, determinan la expresión canónica, por ejemplo:

$$ax + b = c$$

$$bx = a$$

Una ecuación también se puede representar de forma numérica, aplicando métodos básicos para resolverlas. Por el ejemplo el método de sustitución para el siguiente sistema dos por dos se aplica de la siguiente manera:

$$(1) \quad 3x - 2y = 9$$

$$(2) \quad 5x + 2y = 7$$

Despejando la variable x en la ecuación (1) tenemos:

$$x = \frac{9 + 2y}{3}$$

Ahora remplazando el valor

$$x = \frac{9 + 2y}{3}$$

En (2) se tiene lo siguiente:

$$5(\frac{9 + 2y}{3}) + 2y = 7$$

De donde:

$$5(\frac{9+2y}{3}) = 7-2y$$

$$5(9+2y) = 3(7-2y)$$

$$45+10y = 21-6y$$

$$10y+6y = 21-45$$

$$16y = -24$$

$$y = -\frac{24}{16} = -\frac{3}{2}$$

Ahora sustituyendo el valor de

$$y = -\frac{3}{2}$$

En (1) se tiene:

$$3x-2(-\frac{3}{2}) = 9$$

$$3x+3 = 9$$

$$3x = 6$$

$$x = \frac{6}{3} = 2$$

La representación gráfica se construye al dar ciertos valores a una de las variables x o y, (realizando el proceso llamado comúnmente tabulación), los cuales se ubican en el plano cartesiano y al hacer una línea continua sobre ellos, se tiene la representación gráfica correspondiente.

Por otra parte Duval nos dice que en las rectas se pueden encontrar valores visuales que resultan como la asociación de tres variables visuales relativos al registro de los gráficos cartesianos, como es: el sentido de inclinación de la recta, la posición de su intersección con el eje de las ordenadas, y su posición en relación con un repartimiento simétrico de los cuadrantes opuestos. Es de tener en cuenta que estas variables no es lo que se ve que ocurre a simple vista.

Las posibilidades de visualización que da un gráfico cartesiano competen a la segunda y a la tercera manera como son: aprehensión local por punteo, aprehensión icónica, aprehensión global cualitativa.

La aprehensión por punteo, es la que da la indicación de un valor en un momento dado. La aprehensión icónica es la que evoca lo alto y lo bajo, las subidas suaves a partir del nivel de base. Y la aprehensión global en la cual se trata de poder discriminar las características de los grafos, como la orientación en relación con los dos ejes y posición en relación a los ejes.

Finalmente en cuanto a la representación tecnológica, está se pone en juego cuando se manejan software para afianzar en conceptos matemáticos. (Wimplot, Cabry, entre otros.)

Para realizar el estudio sobre la solución de ecuaciones lineales en dos variables, se tomó también como texto guía, el libro *GEOMETRIA ANALÌTICA LEHMANN.* En este libro se abordaron conceptos como:

- Sistema coordenado en el plano.
- Definición de pendiente de una recta.
- Forma general de la ecuación de una recta.
- Formas alternativas para hallar una recta:
    - Ecuación punto pendiente.
    - Ecuación pendiente ordenada.

Para la explicación de los métodos que permiten resolver un sistema de ecuaciones dos por dos y para proponer ejercicios, se consideró como guía los textos, *Algebra intermedia, (R. David Gustafson), Guía Del Educador Pensamiento Matemático 9.* También se utilizaron los textos, LOS PROBLEMAS FUNDAMENTALES EN EL APRENDIZAJE DE LAS MATEMATICAS Y LAS FORMAS SUPERIORES EN EL DESARROLLO COGNITIVO (Raymond Duval, 1999),*CÁLCULO UNDECIMO GRADO, (Larson-Hostetler)* e *INTRODUCCIÒN AL CÀLCULO CON GEOMETRIA ANALÌTICA, (EARL W SWOKWSKY).*

4. METODOLOGÍA

Las ecuaciones lineales en dos variables, es un concepto que se aborda en la enseñanza de la secundaria. Su estudio inicia con nociones como la pendiente, el plano cartesiano, forma de la ecuación general de una recta y el estudio de otras ecuaciones alternativas para encontrar la ecuación de una recta, entre ellas están; la ecuación punto pendiente, ecuación pendiente ordenada, etc. Posteriormente se pasa a la etapa de aplicaciones, pero antes de ello se da a conocer los distintos métodos para solucionar un sistema cualquiera de ecuaciones lineales en dos variables (método gráfico, método de sustitución, método de igualación, método de reducción y el método de Cramer).

La ecuación lineal es un concepto básico de abordar respecto al objeto función que se da en matemáticas, por otro lado se trabaja en otros objetos de la matemática, como son: límites, derivadas, continuidad, entre otros. Así se puede encontrar esta noción en áreas de la matemática como: la geometría euclidiana, geometría analítica, el análisis, cálculo diferencial, y cálculo integral. Respecto a este concepto se espera que el estudiante lo manipule, de manera tal que adquiera madurez mental, que le permita comprender, y operar de manera aritmética, algebraica y gráficamente el mismo concepto, como también otros que estén relacionados con ellas.

Ahora bien dado que el concepto de ecuación lineal, permite realizar distintas representaciones semióticas, para la puesta en marcha del proyecto de aula, se desarrollaron distintas actividades que las involucraron directamente. En las actividades se planeó involucrar de esta manera, ejercicios donde se debió

Realizar representaciones semióticas, e involucrar el desarrollo de distintos tratamientos y conversiones. Para el desarrollo del proyecto de aula: SOLUCIÓN DE ECUACIONES LINEALES EN DOS VARIABLES A TRAVÉS DEL TRATAMIENTO Y CONVERSIÓN DE SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN. Se desarrollaron cinco actividades y se elaboraron guías para los estudiantes, las cuales contenían conceptos y definiciones importantes sobre la recta. En cada una de estas actividades se involucraron distintas situaciones en las cuales el estudiante debió movilizar distintas representaciones, hacer tratamientos y conversiones. Con el desarrollo de estos procesos por parte de los estudiantes, se pretendía que ellos al finalizar, lograran solucionar un sistema de ecuaciones a través de distintas representaciones.

En la primera actividad denominada *actividad de diagnóstico*, el propósito fue explorar, lo que sabían los estudiantes sobre ecuaciones lineales en dos variables, para detectar las debilidades y fortalezas en relación a esta temática, como también ver qué argumentos utilizaban para desarrollar cambios de registros, del lenguaje natural, registro gráfico y registro algebraico.

En una segunda actividad se pretendía que el estudiante hiciera uso de registros de representación para el pasaje del lenguaje natural, al algebraico y gráfico. Entre los ejercicios propuestos se invitaba al estudiante a que utilizara signos para modelar a través de una ecuación algebraica un problema dado, además que interpretara a partir del cálculo de una pendiente, la dirección de una recta. Se indujo a realizar el proceso de sustitución y comprobación de ciertos valores iníciales para ver si eran o no solución de una ecuación propuesta.

En la actividad tres, se planeó que el estudiante hiciera las respectivas conversiones dentro de un mismo registro y diera solución a problemas planteados, también que siguiera realizando conversiones entre el lenguaje natural, algebraico y gráfico, por otra parte construyera a partir de la información de la ecuación algebraica de una recta, otra recta que fuera, paralela o perpendicular a la ecuación algebraica inicial.

En esta actividad también se involucró problemas matemáticos, que estaban en el lenguaje natural y que requerían que su solución fuera a través de un sistema de ecuaciones lineales que involucrara la información suministrada. Y además se utilizaran operaciones propias de cada registro de representación.

En la cuarta actividad se pretendía que el estudiante pudiera hacer el proceso de pasar del registro de un lenguaje natural al algebraico y viceversa, para ello se propusieron problemas que requerían una modelización a través de un sistema de ecuaciones lineales dos por dos. También que hiciera uso de alguno de los métodos estudiados en la guía, para hallar su solución.

Se enfatizó en la conversión del lenguaje natural al algebraico y viceversa, para que el estudiante adquiriera destreza y pudiera pasar sin dificultad de un registro de representación a otro. Se insistió en esto porque por lo general son las conversiones más comunes que se utilizan en matemáticas. Por otro lado también se pidió una interpretación, a través del registro gráfico.

Para finalizar se propuso una quinta actividad, en donde los ejercicios requerían del uso de distintos registros de representación y de la movilización de unos a otros. También la intencionalidad de la actividad era ver que tanto asimilaron los estudiantes de la noción de ecuaciones lineales en dos variables.

Al final del documento, en el capítulo 7 anexos, se encuentran las actividades que se implementaron en el aula.

5. BITÁCORAS

BITÁCORA UNO

“Si te atreves a enseñar, no dejes de aprender” (John Cotton Dana).

En esta parte, se hará una reflexión alrededor del desarrollo de la primera de las actividades, diseñada en el proyecto de aula, denominada ***actividad de diagnóstico****,* en torno a la *solución de ecuaciones lineales en dos variables a través del tratamiento y conversión de sistemas de representación*. En él se registran, las emociones, dificultades, y comportamientos surgidos en este primer acercamiento a los estudiantes, como también se muestra, los primeros registros de representación que surgen de esta actividad.

De nuevo se le recuerda al lector, que en esta actividad de diagnóstico, (ver anexo 2), la pretensión era explorar los conocimientos que tenían los estudiantes sobre la solución de ecuaciones lineales en dos variables.

En primer lugar se comentara sobre la situación que se vivió en el rol de estudiante- practicante, antes de ingresar al salón. En principio había una enorme emotividad. En la mente empezaron a pasar muchas ideas, entre ellas la angustia de pasar de ser un estudiante en formación a convertirse en profesor. De otro lado también inquietaba, las especificidades del grupo de estudiantes al que se debería enfrentar durante las sesiones programadas en el proyecto de aula.

Al estar frente a un grupo significativo de estudiantes, se sintió por un instante un escalofrío recorrer el cuerpo, y una fuerza extraña nos dominaba, y no daba

Alternativas u opción alguna para romper el silencio, en el que se encontraban los espectadores en aquel salón. De cierta manera sin tener que hacer esfuerzo, desde el momento en que se cruzó la puerta para ingresar a aquel lugar, se tuvo la atención de todos, sus miradas estaban todas puestas en el visitante, al devolverles la mirada, se encontró entre todas ellas, miradas de asombro, otras reflejaban alegría. En fin, la situación era de incomodidad para ambas partes, al menos así se percibía. La condición en que se encontró a los estudiantes, dio a entender que estaban a la expectativa.

Al hacer un esfuerzo y vencer esos temores, se dentro en confianza, y se irrumpió en ese silencio con estas palabras, "*hola cómo están*?". De ahí en adelante, poco a poco, se fue logrando vencer esa fuerza extraña que se había apoderado de nuestro ser y se empezó a formar frases, e inspirare de la mejor manera posible, para poder explicar y dar a conocer el motivo de la presencia y evitar que ellos notaran la incomodidad.

Una vez que les dio a conocer lo que se pretendía, se les hice entrega de la *actividad de diagnóstico* a cada uno de los ahí presentes, de esta manera se dio inicio al proceso de formación.

Durante el desarrollo de la actividad, los estudiantes continuaron en la misma tónica, la mayoría de ellos estaban en silencio. Al percibir esa situación, se optó por dirigirse a cada uno de ellos, con la intencionalidad de crear un ambiente más dinámico. Al acercarnos se les preguntaba si era claro qué había que hacer en cada ítem de la actividad.

Para resumir, podemos decir que el desarrollo de este primer acercamiento, se dio a través de dos momentos:

- *Momento antes de ingresar al salón*.
- *Ilustración y compromiso*.

El *momento antes de ingresar al salón*, se explica a partir de todo lo que se sintió, las emociones fuertes, débiles, e ideas vagas que nos hicieron pensar en el posible desenlace que tomaría este primer acercamiento con los estudiantes.

La *ilustración y compromiso,* se dio a partir del ingreso al salón, seguido de la presentación tanto personal, como del proyecto de aula, y el desarrollo de la primera actividad.

A continuación se muestran los resultados que se obtuvieron de esta primera actividad.

En relación al punto **1:**

a) Escribir la noción que tiene de ecuación lineal

b) Escribir dos ejemplos de ecuaciones lineales y realice sus respectivas gráficas.

Respecto a la parte a), no todos respondieron, los que sí lo hicieron, coincidieron con la siguiente idea, "*es una línea recta, dibujada en el plano cartesiano*". Esta idea planteada por ellos, no está lejos de la idea formal que se tiene de ecuación lineal, sin embargo, no es posible determinar a través de este dato, si realmente se tiene la idea de ecuación lineal, puesto que la respuesta que se da, hace alusión al caso particular de registro de representación de este objeto, como lo es el registro gráfico. Duval es claro al hacer énfasis en que se debe distinguir el objeto de su representación. Sin embargo aquí se está diciendo que esa representación es el objeto como tal y según la teoría de Duval un objeto puede darse a través de representaciones diferentes.

Para este primer ítem se esperaba, que, además de darse una explicación literal, también se hubiera dado una explicación haciendo uso de una expresión algebraica, pero esto no ocurrió.

La confusión entre el objeto y su representación, según establece Duval, puede ocasionar una pérdida en la comprensión, de esta manera los conocimientos obtenidos hasta ese momento, son poco útiles por fuera de su contexto de aprendizaje, debido a que puede ser que no se recuerden o porque tan solo aparecen como representaciones inertes que no dan idea alguna de hacer un *tratamiento.*

Considerando ahora el ítem b), los estudiantes en su mayoría, escribieron expresiones algebraicas en las variables x y y he ilustraron un gráfico. Las ecuaciones dadas estaban en la forma de la ecuación general de una recta. Ante esta respuesta se deduce que se tiene noción de la representación algebraica de una línea recta, la cual es otro tipo de representación semiótica, sin embargo algunos de los estudiantes que respondieron a este ítem, no lo hicieron en el ítem a), no hicieron alusión en sus respuestas, a las expresiones algebraicas, para dar una noción sobre ecuación lineal.

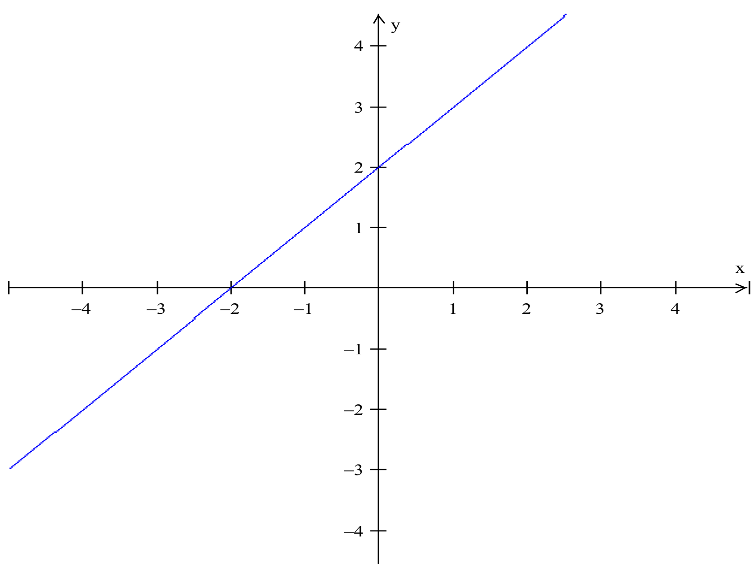
Lo anterior muestra que como tal, desde el punto de vista teórico, no se maneja, por parte de ellos una noción, de este objeto matemático, y deja entrever por otro lado que para algunos, las representaciones gráficas, es el registro más común que manejan. Y para unos pocos es el registro algebraico.

Se ve así, que no hay una claridad frente al hecho de que, la representación gráfica y la representación algebraica, aluden al mismo objeto matemático. Esto podría posteriormente causar dificultades en su aprendizaje. De no lograrse una comprensión, el estudiante, caería en la situación de utilizar siempre un gráfico para aludir a un objeto matemático o siempre una expresión algebraica, lo cual no le permitiría construir el concepto, este debe ser un apoyo visual para entender o hacerse a una idea de su significado, pero no se debe pensar que es el objeto como tal.

Recordemos que según Duval, las representaciones semióticas son un medio por el cual se puede denotar a un objeto, las cuales permiten operar y hacerle tratamientos y conversiones entre las distintas representaciones, de esta manera son las representaciones las que hacen visibles a los objetos matemáticos.

Para concluir esta parte del análisis, podemos decir que los estudiantes no articulan el objeto ecuación lineal, en sus diferentes representaciones, sino que ven a estas de manera separada.

Continuando con el punto **2** referido a lo siguiente: Teniendo en cuenta las siguientes gráficas, responder lo que a continuación se pide.



l_1

Figura 7: Recta con pendiente positiva

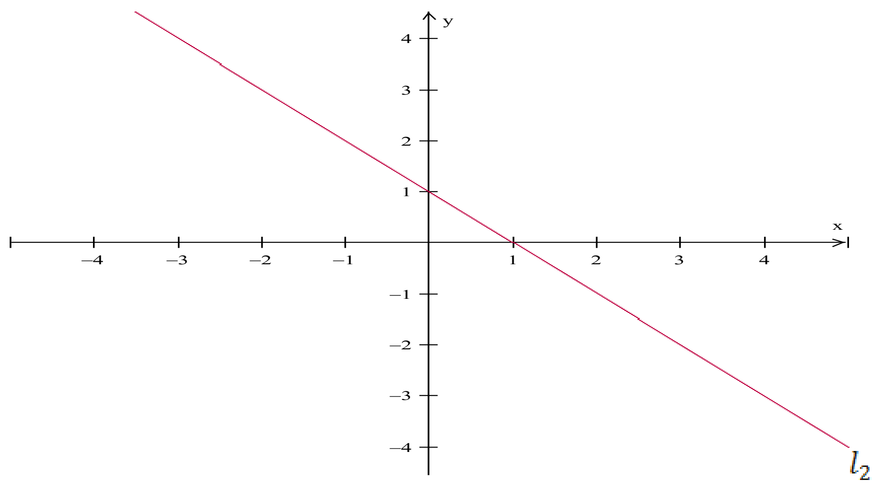


Figura 8: Recta con pendiente negativa

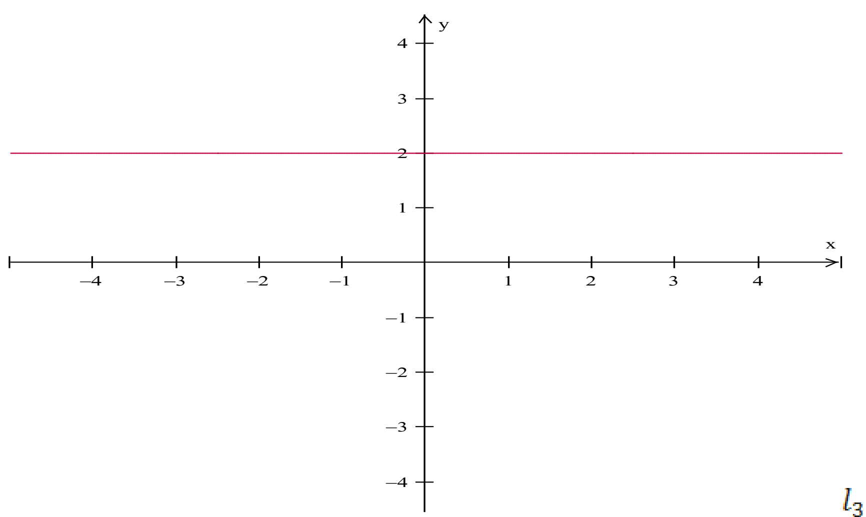


Figura 9: Recta con pendiente cero

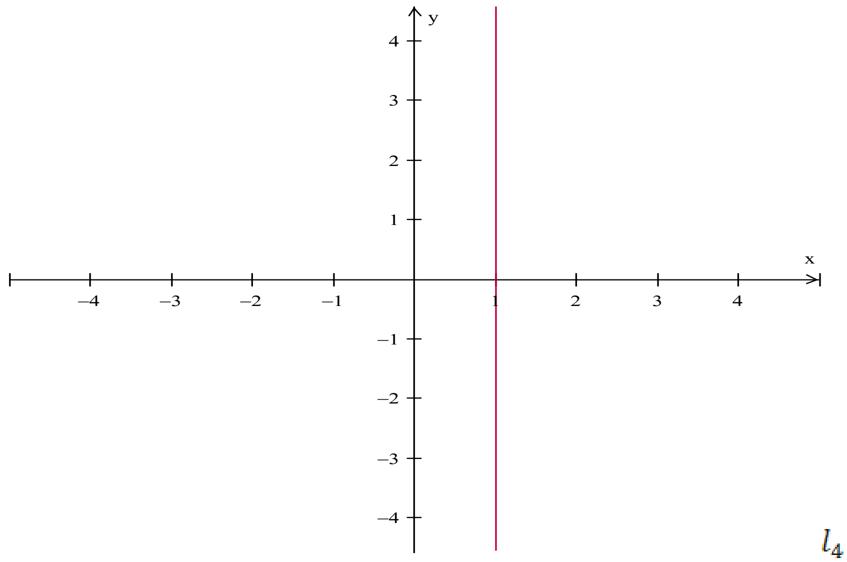


Figura 10: Recta con pendiente indefinida

Se observó lo siguiente, resumido en la tabla 1.

Gráfica 1	**Pendiente**	**Interceptos**
Correctas	1	1
Incorrectas	1	
Sin respuesta	6	
Gráfica 2		
Correctas	1	1
Incorrectas	1	
Sin respuesta	6	
Gráfica 3		

Correctas	2	1
Incorrectas		
Sin respuesta	6	
Gráfica 4		
Correctas	0	0
Incorrectas		
Sin respuesta	8	

La tabla anterior nos da a conocer que los alumnos carecen de una técnica para determinar la pendiente de una recta, esto tal vez se debe a la falta de procesos de visualización [3]de los Intercepto, con los ejes para hacer el cálculo adecuado de la pendiente de cada gráfica, ello podría inducir a una dificultad para realizar el pasaje del registro gráfico al algebraico.

Además según la teoría de Duval, en las rectas se pueden encontrar valores visuales. Para hacer un tratado de estos valores visuales, se debe hacer variar una y tomar las otras dos como constantes, por otra parte a cada uno de los valores de estas tres variables corresponde una variación en la escritura de la ecuación de la recta gráficamente representada.

En relación al ítem b) Determinar los interceptos de las rectas l_1, l_2, l_3, l_4 , con los ejes coordenados X y Y, un solo estudiante lo desarrolló. Sus aciertos fueron correctos para tres de las gráficas dadas. De esta manera se puede decir que este estudiante hizo un buen uso de visualización.

[3] La visualización se refiere a una actividad cognitiva que es intrínsecamente semiótica, es decir ni mental ni física.(Duval, 1999)

Se hace énfasis en incorporar en esta parte los gráficos, puesto que en matemáticas ellos se utilizan siempre como una manera de articular con otro registro de representación. Ellos permiten además tratamientos a otros modos de visualización, como lo es la interpolación, extrapolación. A través de cada una de estas maneras se debe poder distinguir lo que se observa en un gráfico y lo que los aspectos observados permiten identificar.

En matemáticas, las posibilidades de visualización que permiten una representación construida son independientes de los procedimientos de su construcción, en el caso de las representaciones gráficas, los procedimientos de construcción a la aplicación de una simple regla de codificación, según la cual, cada punto de intersección del plano cuadriculado puede ser asociado a una dupla de números. Así, la primera manera de ver se limita a operaciones locales y sucesivas de codificación o de-codificación, que es equivalente a una lectura. Pero las posibilidades de visualización que da un gráfico cartesiano competen a la segunda y a la tercera manera como son: aprehensión local por punteo, aprehensión icónica, aprehensión global cualitativa. Las cuales se explicó en el marco teórico.

Teniendo presente esta tercera manera que compete a las posibilidades de visualización, el estudiante que acertó en este ítem, manejo muy bien este tipo de aprehensiones, a las cuales alude Duval.

Ahora en relación al punto 3:

3)a). Hallar la ecuación algebraica que representa a cada una de las rectas l_1, l_2, l_3, l_4.

b). A continuación se presentan tres tablas con valores de expresiones algebraicas, determinar si los valores que se dan en cada una de ellas corresponden o no a valores de una ecuación lineal con dos variables. Justificar la respuesta.

x	y
-2	5
-1	2
0	1
1	2
2	5

x	y
-2	-3
-1	-1
0	1
1	3
2	5

x	y
-2	-8
-1	-1
0	0
1	1
2	2

Figura 11: Tabla con valores numéricos para X y Y

Este punto no fue desarrollado por ninguno de los estudiantes. En relación a la gran cantidad de estudiantes sin responder, se puede inferir que hay una falta de dominio y comprensión alrededor del concepto de ecuaciones lineales, así la visualización y la conversión entre registros no fue una técnica dominante para resolver los problemas.

Para cerrar esta parte de nuestro análisis, podemos decir que los estudiantes no articulan el objeto ecuación lineal, en sus diferentes representaciones, sino que ven a estas de manera separada, por ende se les dificultad la compresión del concepto de ecuaciones lineales.

BITÁCORA DOS

"La escritura no es producto de la magia, sino de la perseverancia."(Richard North Patterson).

En el desarrollo de la actividad uno (ver anexo 2), en el colegio Champagnat, con los estudiantes de noveno, muchas cosas estaban cambiando. Por una parte la relación con los estudiantes mejoraba poco a poco, por otro lado, los temores existentes desde un principio, fueron quedando atrás. Los estudiantes mostraban más confianza, factor que incidía para tener mayor seguridad.

Los estudiantes en esta ocasión, tuvieron una actitud más dinámica, ahora se mostraban participativos, daban a conocer sus criterios en la solución de algún problema de la actividad, y respetaban los criterios de los demás. Estos entre otros aspectos convirtieron esta sesión en un momento agradable, razón que motivaba, y hacía pensar, en buscar mejores alternativas de trabajo, para mantener esa dinámica hasta el final del proyecto de aula.

Ahora bien para el desarrollo de esta actividad, se tuvo como apoyo la guía número uno, (ver anexo 1), esta guía tenía como contenido, las siguientes nociones:

- Sistema coordenado.
- Definición de pendiente de una recta.
- Fórmula general de una recta.
- Formas alternativas para encontrar la ecuación de una recta:

  _ Ecuación punto pendiente.

  _ Ecuación pendiente ordenada.

Se buscaba con el estudio de estas nociones, que el estudiante las tuviera presentes, o simplemente las recordara si era el caso, porque ellas serían de utilidad para incursionarnos, en adelante, en el desarrollo de las distintas actividades a realizarse, concernientes a la solución de las ecuaciones lineales en dos variable a través de distintos registros de representación.

En relación a la actividad, se pretendía que el estudiante hiciera uso de tratamientos y conversiones, para el pasaje del lenguaje natural, al algebraico y gráfico. También se proponía al estudiante a que utilizara signos y símbolos, para modelar a través de una ecuación algebraica, un problema dado en el lenguaje natural, además a interpretar a partir del cálculo de la pendiente, la dirección de una recta. Se buscaba inducirlos a realizar los procesos de sustitución y comprobación de ciertos valores iníciales para ver si eran o no solución de una ecuación.

Ahora bien respecto a los numerales de la actividad, la mayoría de estudiantes presentaron dificultad en los puntos uno y dos. En cuanto al punto uno referido, a calcular la pendiente de cuatro rectas L, M, N, y T, a partir de un punto en común y luego realizar las gráficas, las dificultades más comunes tenían que ver con operaciones de tratamiento en un mismo registro, para este caso cálculos numéricos a través de la operación división. Las dificultades se presentaron al quedar un cero en el denominador de una fracción, también en la notación que utilizaban, además hubo dificultad, para realizar las respectivas gráficas que se les solicitaba hacer.

En cuanto a operaciones con la división que involucraban un cero en el denominador hacían lo siguiente:

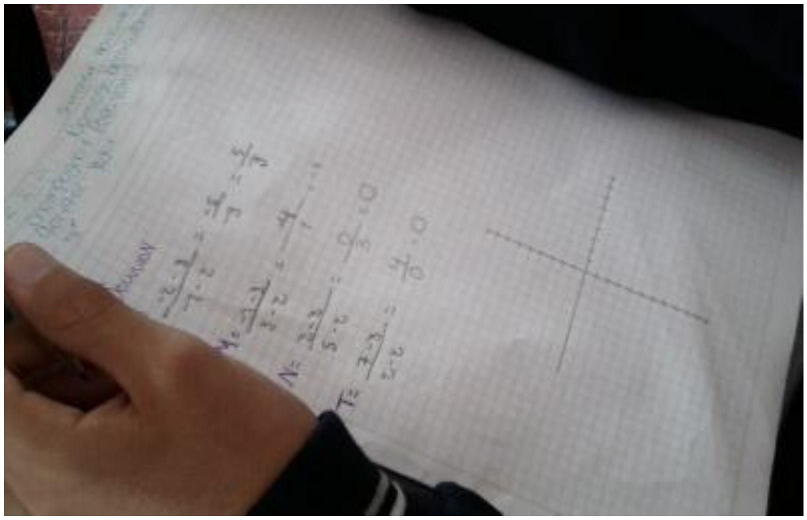


Figura 12: Registro de cálculo de pendiente para rectas

La división por cero para algunos estudiantes daba como resultado cero. De este hecho se deduce que ellos tienen dificultades con la aritmética, además no se estaba interpretando bien esta situación gráficamente. Para aclarar un poco esto último, se optó por explicarles a través de la definición de la pendiente, recordándoles los tipos de pendientes que tenían las rectas paralelas y las rectas verticales. Esta situación que se da en el registro algebraico, donde el tratamiento no está siendo desarrollado correctamente a causa de la dificultad en las operaciones, no permite que se llegue al tratamiento final como es el hallar el valor correcto de la pendiente y ello conlleva a que aunque se haga la conversión de lo algebraico a lo gráfico, esta se dé con errores en la construcción de la gráfica. Es decir no hay una verdadera congruencia entre los registros.

Aludiendo al punto dos, se pretendía que el estudiante realizara una representación gráfica, para modelar e interpretar una información dada, sobre la orientación de una recta, y estableciera con ello el valor de la pendiente, también con este ejercicio se quería que ellos visualizaran y a partir de las gráficas construidas por ellos mismos, generalizaran la pendiente de una recta. La mayoría de los estudiantes así lo hicieron, pero tuvieron dificultad a la hora de interpretar la pendiente de una recta horizontal y una recta vertical.

En cuanto a los puntos del tres al cinco, estos estaban relacionados con problemas que involucraban el plantear una ecuación lineal en dos variables, por lo cual se tornaba interesante, el observar como procedían los estudiantes para solucionar problemas de este estilo. Es decir se buscaba que el estudiante hiciera el pasaje del registro en el lenguaje natural al registro algebraico. En términos de Duval, que se hicieran procesos de conversión de un registro a otro.

En principio algunos estudiantes, presentaron dificultad, en cuanto a lo que se les pedía realizar en el punto tres, por lo cual se les explico aludiendo a la ecuación general de la recta $ax+by+c=0$, diciéndoles que la idea era lograr conseguir una ecuación en el mismo estilo, teniéndose en cuenta que las ecuaciones que se construyeran, relacionaran los datos dados.

Desde la teoría de Duval, teniéndose en cuenta que los registros discursivos están constituidos por unidades discretas con restricciones de organización lineal, hay varios factores que contribuyen a determinar la congruencia o no congruencia entre dos registros diferentes de esa clase. Estos son los que habíamos mencionado en el marco teórico:

- La posibilidad de una correspondencia lexical.
- La univocidad semántica terminal.
- El orden de organización de las unidades significantes en la representación.

El hecho de la transparencia de la conversión de un registro discursivo a otro depende de los anteriores factores.

Las dificultades dadas en esta parte, se debieron como no lo hace saber Duval, a la falta de comprensión de los enunciados, la cual requiere necesariamente de una tarea de conversión y a la falta de escogencia de un modelo de tratamiento matemático, guiado por los valores numéricos. A esto se añade el desconocimiento de algunos conceptos básicos de la matemática, como son el perímetro.

Luego de la explicación que se dio sobre de la ecuación general de la recta, se observó que los estudiantes habían captado la explicación. Respecto a la parte a) del tercer punto no hubo dificultad, los estudiantes escribieron la ecuación que se les pedía. Prosiguiendo con el ítem b) del punto tres, algunos estudiantes, escribieron la ecuación algebraica alusiva al problema, pero olvidaron en explicar el papel que cumplía cada variable, es decir no especificaron que variable representaba al lápiz y que variable al bolígrafo. Otros por el contrario si lo tuvieron en mente y así lo anotaron. Ahora con relación a la parte c), de este mismo numeral, algunos estudiantes no asociaron la palabra perímetro del rectángulo y simplemente escribieron ecuaciones como: $x+y=30$ otros grupos si lo realizaron bien. En el ítem d), no hubo dificultad, los estudiantes manejaban la noción de proporción, para una igualdad de dos cocientes de números.

Prosiguiendo con el resto de los puntos del taller, el punto cuatro solo lo trabajo uno de los grupos, en cuanto al punto cinco y seis no se presentó dificultad. Lo curioso en cuanto al punto seis, fue ver que uno de los grupos lo desarrolló realizando el cálculo al tanteo, es decir no hicieron uso del proceso algebraico para encontrar la solución. En otras palabras no se mostró, el proceso de tratamiento realizado en este registro.

Una vez observado que la mayoría de los estudiantes, habían realizado todos los puntos, se prosiguió a sacar de cada grupo, un representante, para que mostrara la solución a los demás. De esta manera se solucionó entre todos la actividad, y se aclararon las dudas existentes.

Para esta ocasión, los estudiantes mostraron una buena dinámica desde el inicio, hasta el final del trabajo, razón por la cual el desarrollo y cierre de esta actividad se dio de la mejor manera.

Para finalizar, es de anotar, que desde este momento empezó una verdadera identificación como profesor de matemáticas, los estudiantes de cierta manera estaban influyendo en ello. Por ahora había logrado ganar su respeto, y era grato escuchar de ellos la palabra profesor. Algo también satisfactorio fue el observar que el tiempo para desarrollar una actividad como estas, pasa muy rápido.

Se concluye de esta actividad, que hay dificultades en los estudiantes, para plantear la ecuación algebraica de un problema, dado en el lenguaje natural, problemas al operar con los números y los signos, y los pasajes entre los registros algebraico y gráfico no se dan de manera espontánea, debido a que los tratamientos realizados dentro de un registro, no eran del todo correctos.

BITÁCORA TRES

"Escribir con sencillez es tan difícil como escribir bien." (W. Somerset Maugham).

Para esta sesión, se hizo entrega como apoyo para la clase, la guía número dos (ver anexo 1), al igual que la actividad denominada "actividad dos", (ver anexo 2). La guía contenía lo siguiente:

- Explicaba sobre como deducir la pendiente y el intercepto con uno de los ejes coordenados, a partir de la ecuación general de una recta.
- Noción acerca de un sistema de ecuaciones lineales en dos variables, métodos para resolver un sistema de ecuaciones en dos variables, y las posibilidades de solución de un sistema de ecuaciones lineales en dos variables vistas en el plano cartesiano.

- Como identificar rectas paralelas y perpendiculares a una recta dada a partir de la pendiente de esta última. Con esta actividad se pretendía que el estudiante explorara la ecuación de una recta, en relación a su pendiente e interpretara el signo, valiéndose de la ayuda del proceso visual y del cambio de registro del algebraico al registro gráfico.

Ahora bien en cuanto a la guía, se realizó una lectura pausada, y en esa medida se fue realizando las respectivas apreciaciones. Al considerarse la parte relacionada con los métodos para solucionar un sistema de ecuaciones lineales 2x2, se resolvió el siguiente sistema, haciendo uso de los métodos de reducción y sustitución.

$$x + 6y = 27 \qquad ; \qquad 7x + 3y = 9$$

Respecto a la actividad, se entregó una copia a cada 2 estudiantes, (ella contenía 5 numerales para desarrollar), seguidamente se dio lectura a la actividad, y en esa medida se fue explicando a todos lo que había que hacer en cada punto.

De los resultados obtenidos de la actividad, se observó dificultad en la totalidad de los 5 puntos, por ejemplo en cuanto al primer punto el cual se refería a:

1. Dibujar las gráficas de los grupos 1 y 2 por separado, cada grupo en un mismo sistema coordenado, luego comparar y dar conclusiones en relación a las pendientes de las rectas dibujadas.

Grupo 1	Grupo 2
$y = 0$	$y = 0$
$y = \frac{1}{3}x$	$y = \frac{-1}{3}x$

$y = x$	$y = -x$
$y = 4x$	$y = -4x$
$y = 7x$	$y = -7x$

Figura 13: Tabla de comparación de ecuaciones de rectas con pendiente negativa y la misma con pendiente positiva

En general los estudiantes, siguieron presentando problemas de tratamiento al sumar y al operar con los signos, también en algunos, se evidenciaba la dificultad para ubicar puntos en el plano cartesiano, pero cabe resaltar que a todos, se les miró explorando alternativas para buscar las soluciones que se les pedía, fue así como con el proceso de tratamiento, al darle valores a la variable x de la ecuación, obtuvieron el valor de la variable y, es decir hicieron uso del proceso de tabulación, como se observa en el siguiente registro.

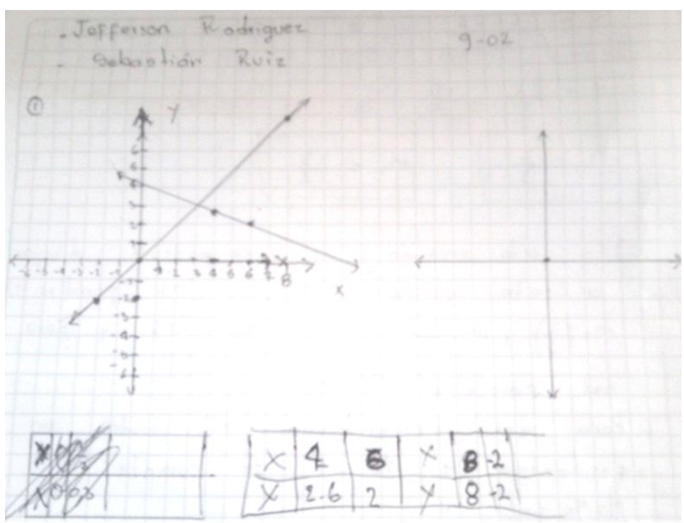


Figura 14: Registro de tabulación y su gráfica respectiva

Aunque algunos lo hicieron bien, los resultados obtenidos de la mayoría de estudiantes muestran, que no se pudo realizar satisfactoriamente el pasaje del registro algebraico al registro gráfico. Por otra parte algunos estudiantes les causo dificultad la ecuación $y=\frac{1}{3}x$ por involucrar un número fraccionario, lo cual pudo haber sido un factor que no permitió realizar el grafico correspondiente a esta ecuación. De esto último se observó que la mayoría de los estudiantes estaban presentando dificultad al operar con números fraccionarios, y la dificultad radicaba, en que no se estaba mirando la fracción como una división, además se desconocía el proceso para sumar dos números fraccionarios, no sabían por ejemplo sobre la noción de numero primo y a un sobre la descomposición en factores primos, para hallar el mínimo común múltiplo de dos números fraccionarios, por lo cual fue necesario hacer una explicación al respecto, puesto que no se sabía, si los desconocían o simplemente era que los habían olvidado.

También se evidencio, que ellos no tienen claro cuál era la variable que permitía formar pares ordenados, lo anterior los limito a realizar los gráficos que corresponden a las rectas dadas. En otras palabras no se manejó la idea de variable dependiente e independiente.

Ahora refiriéndonos al segundo punto:

2. Dada la ecuación de la recta $4x+2y-6=0$ determinar el valor de la pendiente y el punto de corte con el eje Y. Luego dibujar esta recta en el sistema coordenado XY.

En cuanto a este punto, los resultados, muestran la dificultad existente al despejar una variable, y también la problemática persiste al pasar del registro algebraico al registro gráfico, es decir al hacer la conversión respectiva, esto se evidencia al observar que ninguno representó la gráfica de la expresión algebraica dada. Por otra parte las dificultades de tipo algebraico aún son notorias, es decir los tratamientos dentro de un mismo registro, y están relacionadas con la escritura que utilizan para representar una operación indicada, esto último lo podemos ver en el siguiente registro.

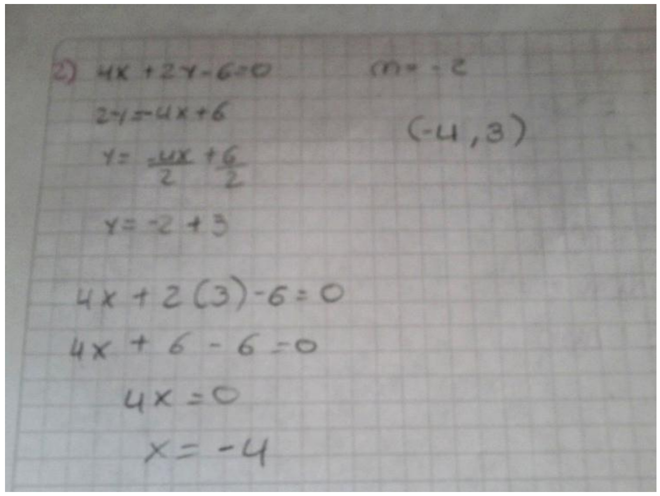


Figura 15: Registro de calculo de pendiente e interceptos de con los ejes coordenados

Aquí se observa, también, que el estudiante tiene más preferencia en los procesos algorítmicos para dar respuesta a los problemas, que por el proceso visual.

Por otra parte al despejar la variable y, se supone esta debe quedar en términos de la variable x, lo cual parece, los estudiante lo olvidan, se evidencia así dificultad en operaciones algebraicas al despejar una variable, en términos de la otra.

Continuando con el punto tres:

3. Encontrar la ecuación de la recta que pasa por el punto (2, -1) y es:

a). Paralela a la recta $2x-3y-5=0$.

b). Perpendicular a la recta $2x-3y-5=0$

c). Dibujar la recta paralela, y la recta perpendicular a la recta $2x-3y-5=0$ y que pasan por el punto (2, -1) de los ítems a) y b), en un mismo sistema coordenado.

Respecto a este punto, se observa que no hay una comprensión en el enunciado, debido a lo siguiente:

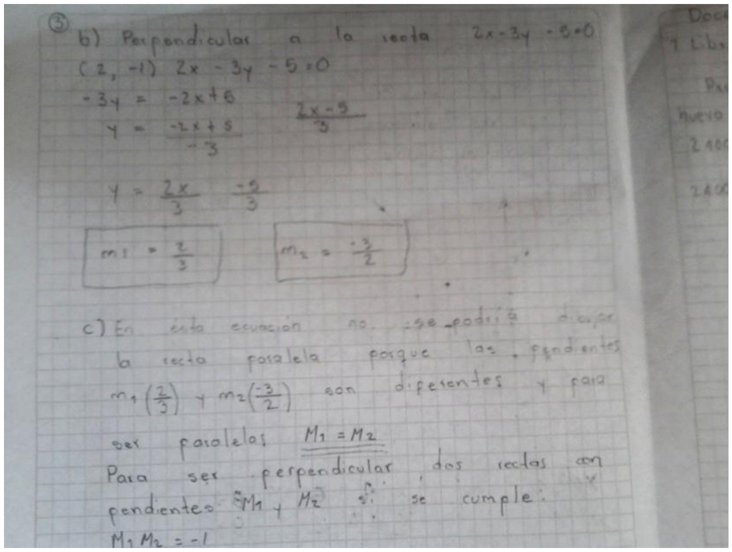


Figura 16: Registro de cálculo de rectas paralelas y perpendiculares a una recta dada

Se observa que los estudiantes calculan con dificultad la pendiente de la recta dada, esto debido a que logran deducir la pendiente para la recta perpendicular en el punto $(2, -1)$, hasta ese entonces todo parecía ir bien, pero luego los estudiantes se confunden y no relacionan el valor obtenido, con lo que se pedía realizaran.

La idea de realizar el cambio de registro, en esta parte era para que el estudiante visualizara gráficamente la situación, pero este solo se logra satisfactoriamente, si todo está en orden, es decir las operaciones algebraicas realizadas siguen un proceso correcto. Aquí no sucede así, dado que se tiende a interpretar de manera incorrecta los datos de las pendientes halladas, y por ende la dificultad para un cambio de registro es evidente. Es decir seda la no congruencia.

Otros estudiantes, solo se quedaron con el proceso de tabulación, y no realizaron procesos algebraicos para hallar las ecuaciones de las rectas pedidas, no hicieron uso de la guía, la cual explicaba sobre:

–Cuándo dos rectas son paralelas.

–Cuando dos rectas son perpendiculares.

–La ecuación punto pendiente.

Para este punto de la actividad, no solo era importante ver la interpretación gráfica de los estudiantes, si no que se quería observar el proceso algebraico que siguen para desarrollar problemas de este estilo, es decir ver los procesos de tratamiento, puesto que es este último el que permite una posible congruencia para pasar al registro gráfico.

Ahora bien refiriéndonos al cuarto punto:

6. Para llevar 4 docenas de huevos y 3 libras de mantequilla, Angélica debe pagar $14100; pero si lleva solo 3 docenas de huevos y una libra de mantequilla, el valor será de $8700. Ella desea saber entonces cuánto vale una docena de huevos y una libra de mantequilla.

La idea era conducir al estudiante, a realizar una buena interpretación de problemas de este estilo, que estuviera en la capacidad de plantear las ecuaciones algebraicas que el problema contiene, haciendo uso de variables, y también a que los resolviera y diera una interpretación a los resultados encontrados.

En esta medida esta actividad estuvo diseñada para que el estudiante desarrollara un pensamiento cognitivo y también una habilidad matemática como lo expresa (Duval, Los problemas fundamentales en el aprendizaje de las matemáticas y las formas superiores del desarrollo cognitivo, 1999) *la particularidad del aprendizaje de las matemáticas hace que estas actividades cognitivas requiera de la utilización de sistemas de expresión y de representación…*

En efecto algunos estudiantes, lograron representar a través de dos ecuaciones, la situación que representaba el problema, hicieron uso de variables e identificaron el papel de cada una de ellas y aplicaron los métodos especificados en la guía.

Otros por el contrario presentaron dificultad para modelar la situación a través de un sistema de ecuaciones, esto se observa en el siguiente registro.

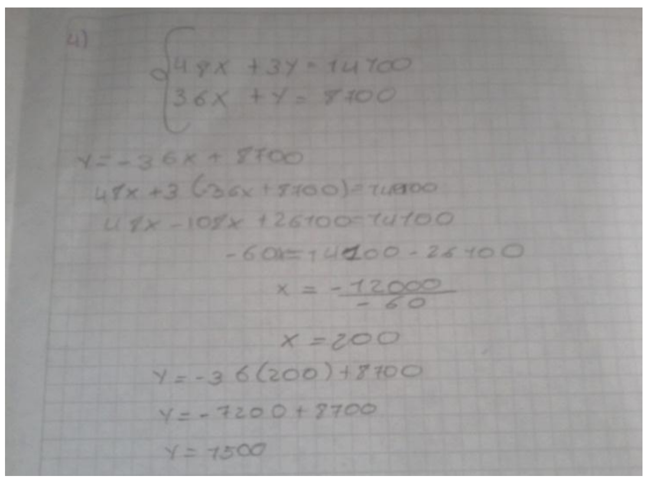


Figura 17: Conversión del registro natural al algebraico y su solución

Además no identificaron el papel que cumplía cada variable en las ecuaciones que se deducen del problema, este factor puede influir posteriormente en la escritura de las ecuaciones lineales que se deducen de un problema y además en la interpretación de los resultados. En este sentido, con lo anterior se evidencia, donde los estudiantes están presentando dificultades, esta parte de conversión de registros no lo permite ver´.

Así como lo expresa (Duval, Los problemas fundamentales en el aprendizaje de las matemáticas y las formas superiores del desarrollo cognitivo, 1999) *todas* *estas representaciones no parecen más que exigir un acto simple, directo y común de "ver". Significa pues que el estudiante no solo debe enfocarse en dar una respuesta, sino tener presente la forma que la figura representa e identificar lo que cada forma representa y de esta manera obtener información para resolver un problema de manera global.*

Con esto pues se busca que el estudiante adquiera dominio para que pueda conscientemente hacer este trayecto, e independientemente del registro en el que este, pueda interpretar la situación. Por esta razón se insiste en los registros en el lenguaje natural, algebraico y gráfico, dado que estos tres procesos de alguna manera u otra le va a dar herramientas para solucionar un problema matemático.

Al implementar esta actividad se pudo notar que a pesar de las dificultades mencionadas, los estudiantes hacían el esfuerzo por comprender, y en la mayor parte de su desarrollo siempre tenían una pregunta por resolver.

Ahora refiriéndonos al ambiente de aula, se puede decir que este fue dinámico, los estudiantes estuvieron más comprometidos con las actividades, y continuamente daban a conocer sus ideas y buscaban argumentos para hacer creíble su solución.

De mi parte puedo decir que la preparación con respecto al desarrollo de esta temática, poco a poco se fue tornando un poco más exigente, esto debido a que hubo la necesidad de prepararme para otros aspectos temáticos donde surgieron dificultades en los estudiantes, como son las operaciones con los números fraccionarios, entre otros.

Por otra parte la relación con los estudiantes a estas alturas es buena, existe un respeto mutuo, tanto en el trato personal como el actuar en el aula. Este aspecto hacía que hubiera más seguridad y confianza en lo que se realizaba.

BITÁCORA CUATRO

"Somos lo que hacemos repetidamente. La excelencia, entonces, no es un acto. Es un hábito."(Aristóteles).

Ya a puntos de culminar con el proyecto de aula, seguimos insistiendo al estudiante, a realizar en esta tercera actividad, (ver anexo 2), la conversión del registro del lenguaje natural al registro algebraico, así como también a realizar tratamientos en un mismo registro, para ello propusimos problemas que estaban enunciados en el lenguaje natural, los cuales requerían una modelización de dos ecuaciones lineales en dos variables para ser solucionados. El tratamiento se da al considerar el sistema hallado a partir del problema y tratar de buscar la solución a partir de la aplicación de cualquiera de los métodos vistos en clase. Esta actividad comprendió cinco numerales a desarrollar, el primer numeral estaba asociado a expresar las ecuaciones algebraicas que se deducían a partir de la gráfica de dos rectas representadas en el plano, el segundo punto concernía a encontrar dos rectas que contuvieran cierto punto dado, el tercero relacionado a resolver un sistema de ecuaciones 2x2, y los restantes a plantear un sistema de ecuaciones 2x2 a partir de una situación dada y encontrar la solución respectiva. La actividad fue la siguiente:

1. Determinar las ecuaciones de las rectas z y w, si la gráfica es:

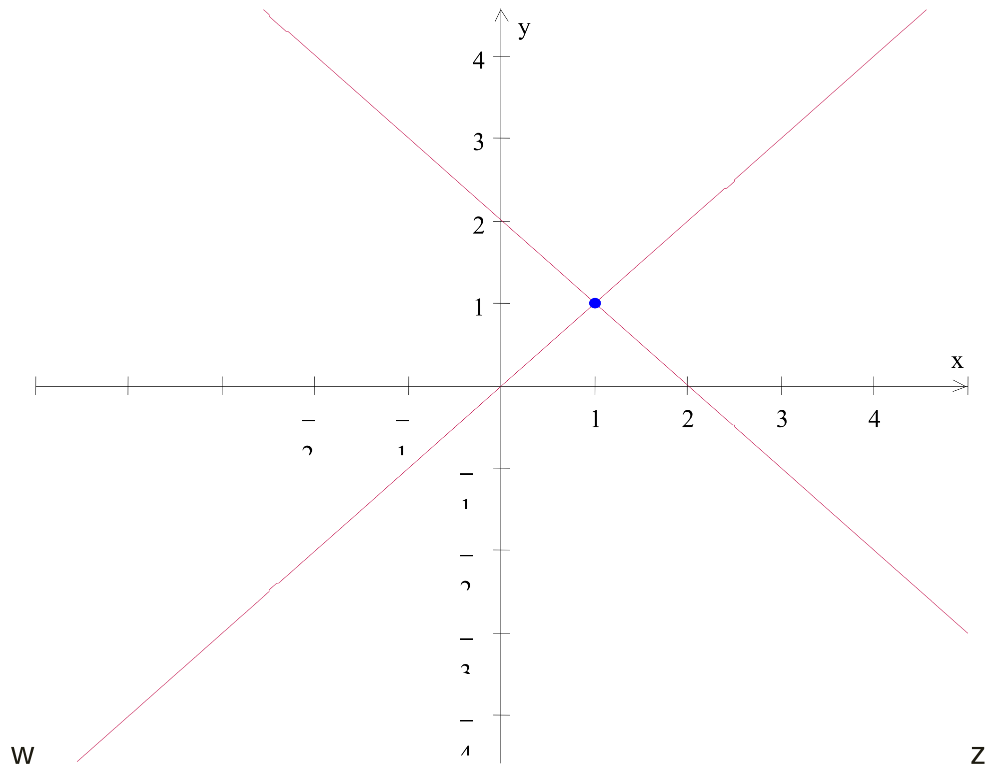


Figura 18

2. Sea el punto $(1,3)$ en el sistema de ejes coordenados, determinar dos ecuaciones de líneas rectas que pasen por dicho punto.

3. Resolver el siguiente sistema de ecuaciones utilizando el método de sustitución

$$3x - 2y = 9$$

$$5x + 2y = 7$$

4. Se tiene dos soluciones de la ecuación $ax + by = 15$. La primera $x = 2$ e $y = -1$ y la segunda solución $x = -2$ e $y = -29$. Calcular a y b , realizar luego la gráfica de esta ecuación.

5. El grado noveno uno del colegio Champagnat de la ciudad de Popayán realizó una actividad deportiva con el fin de recolectar fondos para la compra del uniforme del equipo de baloncesto.

En total el curso recogió 105 billetes, entre billetes de $2000 y de $5000. ¿Cuántos billetes eran de $2000 y cuántos de $5000, si el producido de la actividad fue de $450000?

Con esta actividad se pretendía que el estudiante realizara en primera instancia, la conversión de una representación gráfica a una representación algebraica, por otra parte resolviera un sistema de ecuaciones a partir de los métodos conocidos (igualación, sustitución, reducción, gráfico) y por ultimo determinara y resolviera las ecuaciones lineales que se deducían de una situación particular enunciada en el lenguaje común.

A continuación, se muestran los resultados obtenidos en relación a cada punto de la actividad. Respecto al primero tenemos lo siguiente:

Es bueno ver cómo Para esta parte los estudiantes, utilizaron los conceptos estudiados sobre la recta dados en las guías, y relacionaron lo teórico con lo práctico, esto se observó al mirar sus registros. Ellos hicieron uso de la fórmula de la pendiente, la trabajaron con puntos que visualizaron de coordenadas de la recta w y z, luego apoyándose en la ecuación punto-pendiente $y - y_0 = m(x - x_0)$, se encontraron las ecuaciones algebraicas, veamos:

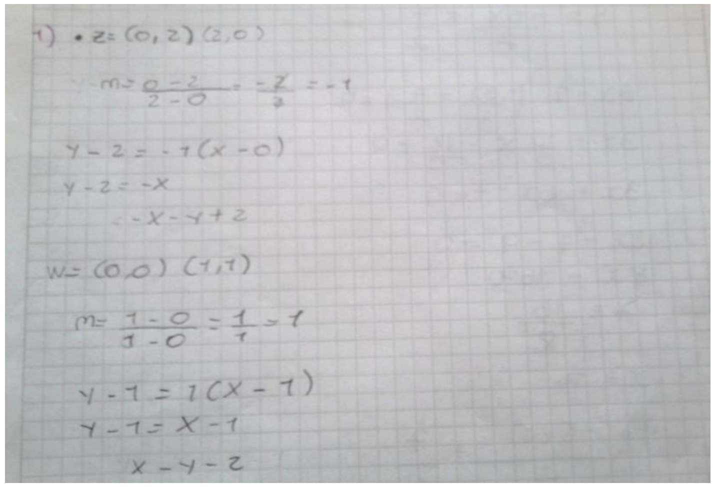


Figura 19: Pasaje de registro gráfico al algebraico

El proceso, que siguieron fue adecuado, sin embargo persistieron los errores algebraicos al intentar despejar una variable en términos de la otra variable, es decir se presentó dificultad en el tratamiento dentro de un mismo registro, factor influyente que aunque permitió el pasaje entre el registro gráfico y el algebraico, no se llegó, a la conversión de la ecuación que representaba el grafico dado.

De lo anterior se observa que no se reconoce la ecuación lineal, a través de las representaciones algebraicas y su representación gráfica, razón por la cual la representación algebraica que se obtuvo no fue congruente, así este pasaje se dificultó.

Para determinar si dos representaciones son congruentes o no, estas se deben segmentar en sus respectivas unidades significantes, de manera tal que puedan ser puestas en correspondencia.

Lo que se puede rescatar, es el hecho de que los estudiantes realizaron un tratamiento consciente donde tuvieron en cuenta lo observado.

En cuanto al punto dos:

2. Sea el punto $(1,3)$ en el sistema de ejes coordenados, determinar dos ecuaciones de líneas rectas que pasen por dicho punto.

Se puede decir respecto a este punto que un solo grupo dio una respuesta adecuada, para llegar al resultado, consideraron la ecuación general de una línea recta y a partir de expresiones de esta forma, dieron los dos ejemplos que se les pedía, veamos:

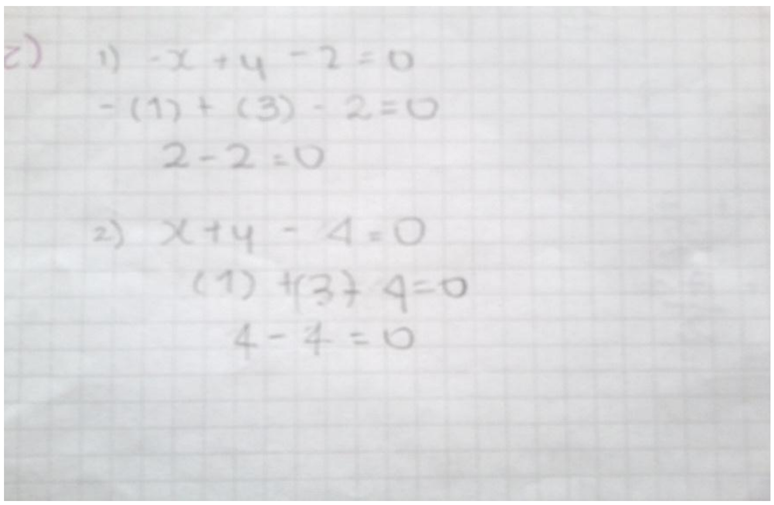


Figura 20: Calculo de rectas que pasan por un punto

Al considerar los restantes resultados, se observa la dificultad para ubicar un punto en el sistema de coordenadas. Lo anterior tal vez se deba a la resistencia de realizar un buen análisis visual, y así no están viendo la visualización como una herramienta que les puede ayudar a dar una interpretación delo observado.

Otra de las respuestas, para este punto fue la siguiente:

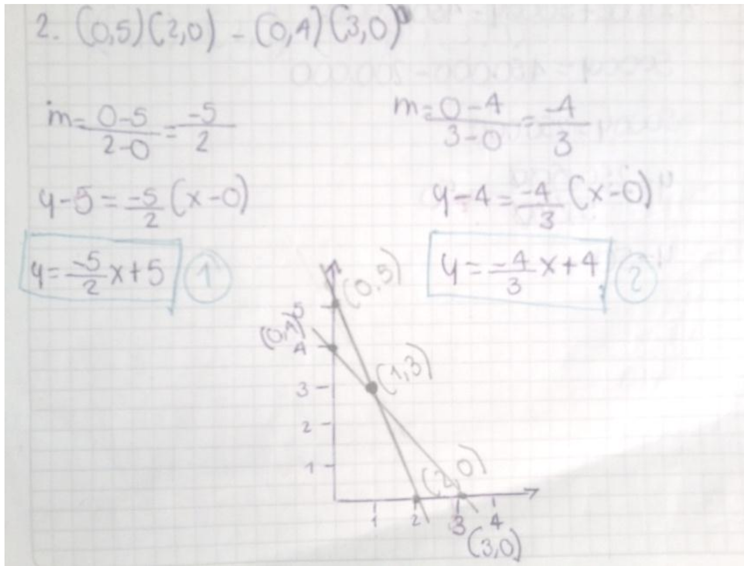


Figura 21: Registro de cálculo de pendientes y hallazgo de la ecuación algebraica a partir de su representación gráfica

Del registro observamos que para este par de estudiantes, el hecho de ubicar otro par de coordenadas, cualesquiera y ver que al trazar una recta por esos puntos, esta contenía el punto (1,3), los llevo a apresurarse a calcular la pendiente, y usando la ecuación punto –pendiente a encontrar las ecuaciones, pero no se cercioraron si en verdad el punto estaba en ellas, lo cual es evidente que no sucede, sin embargo es un buen método, debido a que se está recurriendo a la visualización, para buscar puntos que satisfacen el lugar geométrico, en este caso el de una recta.

Es decir en esta parte existe una apropiación para ubicar puntos en el plano cartesiano, pero continua manifestándose problemas, al realizar la conversión de la representación gráfica al registro algebraico. Esto se debe a una mala interpretación visual de lo observado, y a la idea de dejarse guiar por lo que representa el grafico.

Continuando con el ítem tres, solo algunos grupos aunque con dificultad, se aproximaron a la respuesta, veamos:

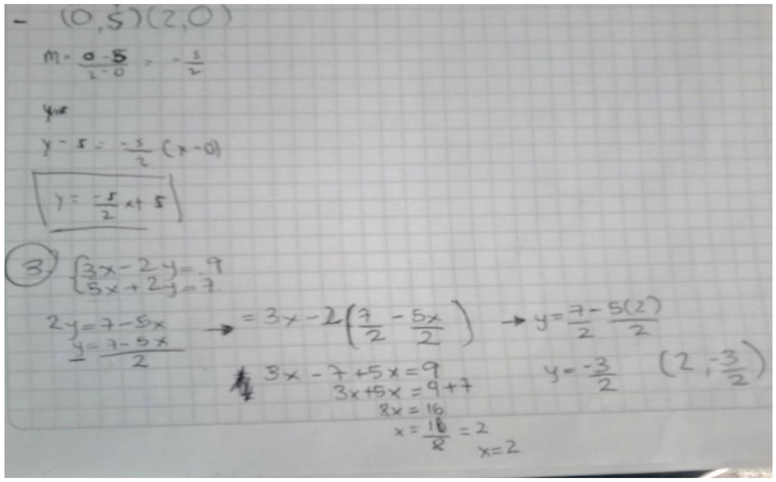
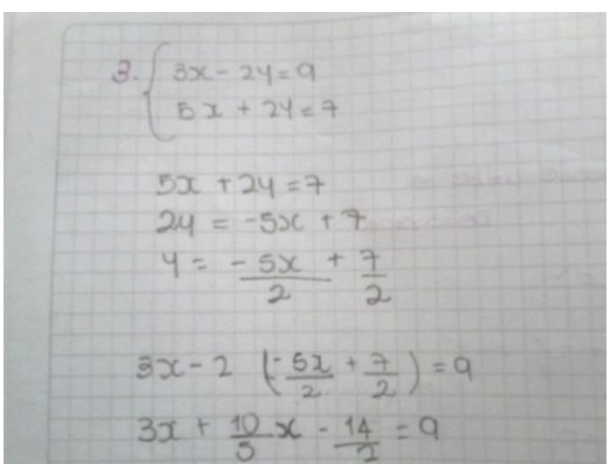


Figura 22: Registro de solución de ecuaciones lineales en dos variables usando el método de sustitución

Este grupo, dio la respuesta y siguió adecuadamente el método que se pidió que usaran (sustitución).

Respecto a otro grupo, aunque estos dan la respuesta, al observar el proceso algebraico que siguen, se miran errores de cálculos, los cuales les llevaría aparentemente a otros resultados, pero no sucede así.



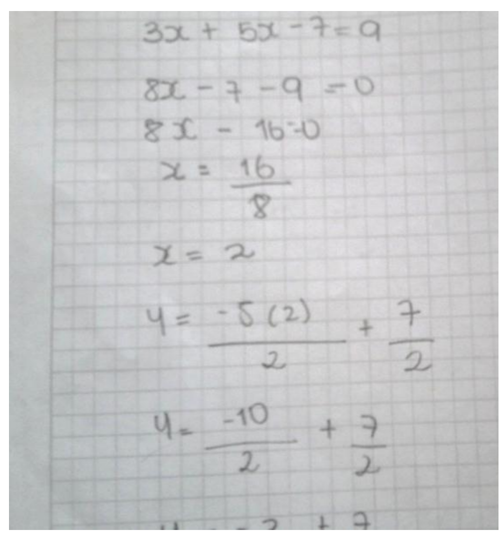


Figura 23: Registro de solución de ecuaciones lineales en dos variables usando el método de sustitución

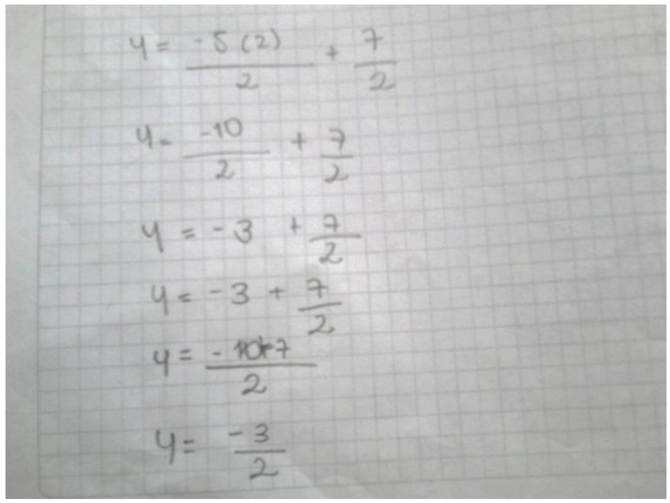


Figura 24: Registro de cálculo de la variable Y a partir del valor hallado anteriormente en X

Ahora referidos al punto cuatro, un solo grupo se acercó a la respuesta:

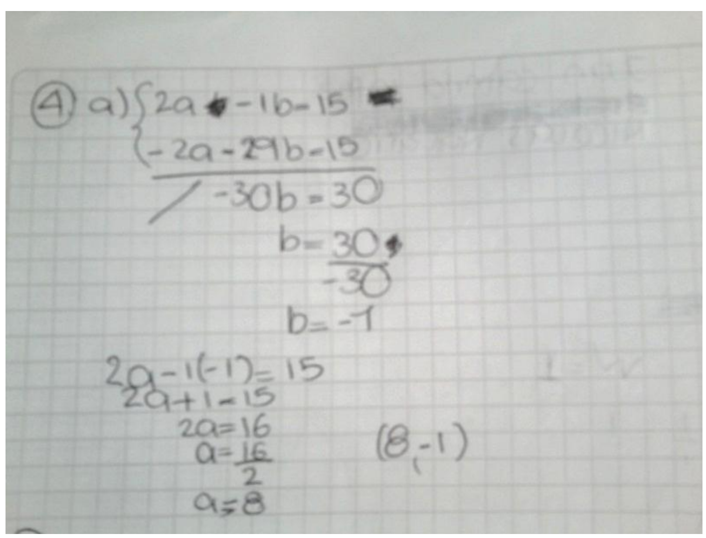


Figura 25: Registro de cálculo de dos variables

El error que comete este grupo, radico en no poder encontrar, el valor correcto de la variable, aun cuando ya habían encontrado bien el valor de la variable b. Esto se debió a que no se despejo bien la ecuación para encontrar el valor de (a), este error algebraico no permite de esta manera la solución correcta del ejercicio.

Ahora respecto al quinto punto, ningún grupo lo realizo.

Teniendo en cuenta los anteriores resultados vemos entonces que la noción de representación resulta esencial, en tanto que es una forma por la cual una información puede describirse y tomarse en cuenta en un sistema de tratamiento.

La especificidad de las representaciones consiste en que son relativas a un sistema como el lenguaje, la escritura algebraica o los gráficos cartesianos y además en que pueden ser convertidas en representaciones equivalentes en otro sistema de representaciones, pero con la característica de poder tomar significaciones diferentes para el sujeto que las utiliza.

Es decir la noción de representación presupone, la consideración de sistemas diferentes y una operación cognitiva de conversión de las representaciones de un sistema a otro. Lo cual como vemos no sucede en plenitud en las situaciones propuestas en la actividad.

Considerando desde un punto de vista, los sistemas de representación permiten que se cumplan actividades que no son ajenas a toda representación, como lo es:

Constituir una marca o un conjunto de marcas que se identifiquen como una representación de alguna cosa en un sistema determinado, a partir de lo anterior poder transformar estas representaciones teniendo en cuenta las reglas propias al sistema, de modo que se obtengan otras representaciones que constituyan una ganancia de conocimiento en comparación con las representaciones iníciales. Y por último convertir las representaciones producidas en un sistema de representación en otro, de manera tal que estas últimas expliciten otras significaciones relativas a aquello que es representado.

Aunque no todas las representaciones permiten lo anterior, entre las que si lo permiten está el lenguaje natural, las lenguas simbólicas, los gráficos, las figuras geométricas, etc. A estos se les verá como registros de representación. Estos constituyen la margen de libertad con la que cuenta un sujeto para objetivarse él mismo una idea confusa, un sentimiento latente para explorar las informaciones o, simplemente para comunicarlas a un interlocutor.

De esta manera la organización de las situaciones del aprendizaje centradas en la coordinación de los registros, requiere que previamente se haya identificado todas las variaciones cognitivamente pertinentes de una representación en un registro, de manera que una exploración según el método que consiste en hacer variar un solo factor a la vez, dejando a los otros sin cambio puede ser puesta en acto por los estudiantes.

En relación a la postura como profesor, se ve a los estudiantes a estas alturas, con una actitud más dinámica, crítica y concentrada en lo que hacen. A pesar de las dificultades que aun presentan, es de reconocer, que se apoyan en la teoría y no hacen las cosas intuitivamente, siempre están intentando relacionar lo teórico con lo práctico.

Desde el desempeño como profesor, y compromiso en el aula, se puede decir, que se ha realizado las cosas de la mejor manera, se ha estado a gusto con estos estudiantes, y se ha mirado buenos avances en ellos.

BITÁCORA CINCO

"Algo es bello en relación con su contexto."(Roman Jakobson).

Con esta actividad, (ver anexo 2), la cuarta en su orden a parte del taller de diagnóstico, se dio la finalización al desarrollo del proyecto de aula. Para su implementación en el salón estuvo pensado, en observar el recorrido realizado hasta ese momento, en mirar las dificultades, y alcances de los estudiantes, sobre la solución de ecuaciones lineales en dos variables a través de distintos registros de representación, para así proponer una actividad para reforzar y afianzar más en las ecuaciones lineales.

Esta actividad contenía seis numerales a desarrollar, el primer numeral estaba asociado a que al darse la expresión algebraica de una recta, se pedía realizar su representación gráfica, también visualizar los cortes con los ejes coordenados y verificar si se cumplían las condiciones iníciales dadas. El segundo punto era referido a que dada la gráfica de una ecuación lineal en el plano y un punto particular que no estaba en ella, se debía encontrar la ecuación de una recta paralela y perpendicular a la recta dada y que pasara por ese punto. El tercer punto hacía alusión a resolver un sistema de ecuaciones 2x2. En el cuarto punto se pedía determinar la ecuación algebraica de una recta a partir de ciertas condiciones iníciales y finalmente el último numeral era una pregunta relacionada a la ecuación lineal. Con esta actividad se pretendía también que el estudiante realizara la conversión del registro algebraico al registro gráfico y viceversa.

Ahora bien los resultados obtenidos en relación a cada punto fue lo siguiente. Respecto al primero lo que realizaron algunos de los estudiantes fue lo siguiente:

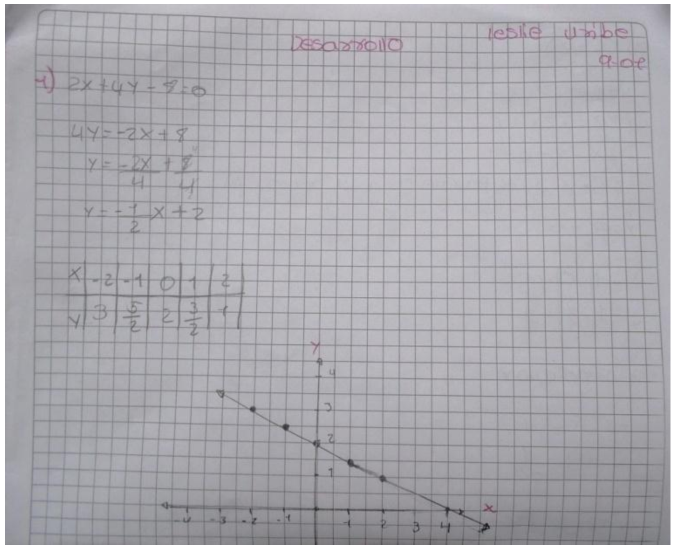


Figura 26: Registro de pasaje algebraico al gráfico

Es satisfactorio ver en este registro, como algunos estudiantes han asimilado el concepto de ecuación lineal, y además como hacen el pasaje entre los distintos registros de representación. En este caso se está realizando una representación de un mismo objeto en otro registro diferente como lo es el gráfico. El tratamiento y la conversión se han realizado bien.

Ahora, para hablar de una conversión entre registros es necesario que se tenga en cuenta que esta es una transformación de la representación de un objeto en un registro p en otra representación del mismo objeto en un registro l, en este caso el registro p es el algebraico y el registro l es el gráfico. Esta conversión se caracteriza por conservar la referencia al mismo objeto, lo que cambian son las propiedades de ese objeto.

Por lo anterior entonces se puede decir que la representación en un registro de llegada no necesariamente tiene el mismo contenido que su representación en el registro de partida, esto puede depender del tipo de registro.

Las conversiones por lo general presentan dos características que no están presentes en el tratamiento sino que involucran una operación más compleja, estas son

- Está orientada, por ello se hace necesario indicar cuál es el registro de partida y cuál es el de llegada.
- Puede ser congruente o no congruente. Lo anterior indica que el pasaje entre dos representaciones de un mismo objeto puede ser congruente en un sentido más sin embargo no serlo en el otro. Para algunos casos el pasaje entre registros se hace de manera espontánea, en este caso se hablara de congruencia. En otros casos la representación del registro de partida es opaca y no permite una representación en el registro de llegada, se hablara entonces de no congruencia.

Para este primer caso la característica que prevalece en cuanto a las operaciones complejas es, está orientada, puesto que es claro que en este sentido el estudiante debe circular.

De la imagen se evidencia, el dominio adquirido por algunos estudiantes para realizar las operaciones, como el despejar una variable en términos de otra en una ecuación lineal. También se hace una buena representación de una recta en el plano, con ello pues se entrevé una buena conversión entre registros, en este caso del algebraico al gráfico.

Por otra parte la visualización en este caso juega un papel muy importante, esta permite formar imágenes las cuales pueden ser usadas para el descubrimiento y el entendimiento de una situación particular. Recordemos que según (Duval, Los problemas fundamentales en el aprendizaje de las matemáticas y las formas superiores del desarrollo cognitivo, 1999) *"la visualización se refiere a una actividad cognitiva que es intrínsecamente semiótica es decir ni mental ni* *física””… la visualización está basada en la producción de una representación semiótica”*

Se sabe según Duval que la semiosis es la aprehensión o la producción de una representación semiótica, y puede entenderse como signo, marca distintiva. Ahora en cuanto a las representaciones semióticas se puede decir que estas permiten una” mirada del objeto” a través de estímulos (puntos, trazos, caracteres, sonidos…) que tienen el valor de “significantes”.

Entre las representaciones semióticas podemos citar: las figuras, esquemas, gráficos, expresiones simbólicas, expresiones lingüísticas, etc.

Ahora continuando con el análisis veamos lo obtenido respecto a la parte a) de este mismo numeral.

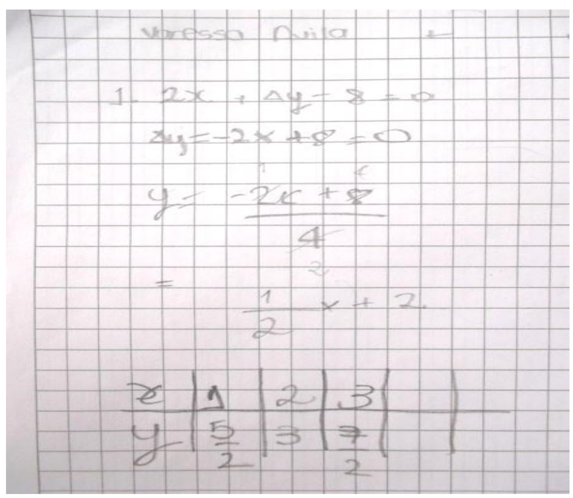


Figura 27: Registro de tabulación para graficar una recta

En este registro observamos, que está clara la idea, para el despeje de una variable en términos de otra, sin embargo la dificultad se presenta en los signos, lo cual de no hacerse bien, determina otros resultados diferentes al que se espera. A lo largo del desarrollo del proyecto de aula, esta dificultad fue la más notoria, a pesar de que continuamente se les explicaba sobre las operaciones con los signos, esto no se asimilo, además el involucrar los números fraccionarios también fue una dificultad.

Ahora en cuanto a lo demás se obtuvo lo siguiente:

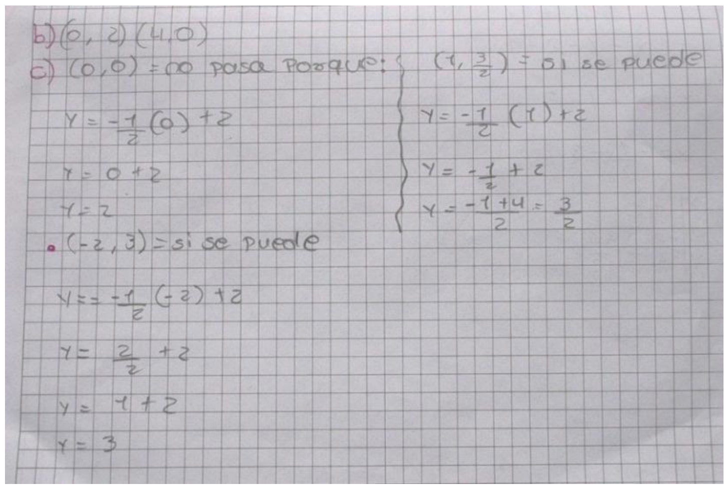


Figura 28: Registro de rectas que pasan por un punto dado

Este registro es tomado del mismo estudiante, al cual hicimos el análisis al inicio en esta bitácora. Como se observa el estudiante para la parte b) visualiza su gráfico y luego deduce los puntos de cortes. En su momento expliqué a este estudiante que su interpretación era correcta, sin embargo le solicité que tratara de deducirlo analíticamente, puesto que la intención del ejercicio era llevarlo a una generalización, para deducir los cortes con los ejes coordenados de cualquier recta en el plano.

Sin embargo, no se dio respuesta, por esa razón al finalizar la sesión se explicó esta parte. Para ello se consideró la ecuación de la recta en su forma general, $ax+by+c=0$ y teniendo en cuenta que, a,b,c fueran distintas de cero, se hizo que $x=0$ para obtener así un valor para y, por lo que entonces la coordenadas del punto de corte con el eje Y, es $(0,-\frac{c}{b})$ con $-\frac{c}{b}$ en el eje Y, de igual forma para hallar el punto de corte con el eje X, se hizo $y = 0$, así el punto de corte con el eje X es $(-\frac{c}{b}, 0)$, para $-\frac{c}{a}$, en el eje X.

Continuando con el punto número dos se obtuvo lo siguiente:

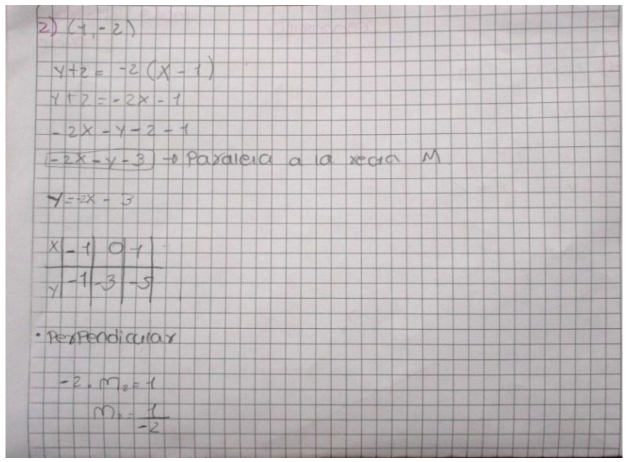


Figura 29: Registro de cálculo de pendientes para rectas paralelas y perpendiculares

En esta parte el estudiante toma el valor $m = -2$, para encontrar la recta paralela a la recta dada y que pasa por el punto $(1, -2)$ pero el estudiante no explicita en su registro, como deduce este valor, es decir no se muestra el tratamiento realizado, aunque de hecho el valor si es correcto. Por esta razón se debió al final advertir sobre este aspecto, aunque es cierto que muchas veces se puede omitir pasos en la realización de un ejercicio de este estilo para ganar tiempo, en este caso se hace necesario mostrar todo el tratamiento que se realiza, dado que este es un aspecto importante y es con el que se desarrolla el ejercicio. El resto del ejercicio se desarrolló bien, sin embargo no hubo una conversión al registro gráfico.

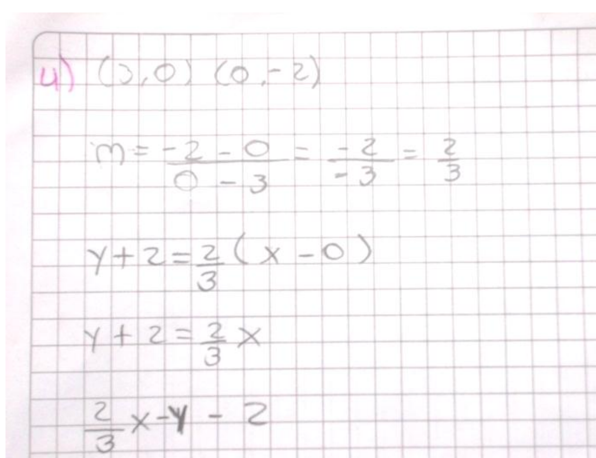
Respecto al numeral tres, se notó dificultad con las operaciones que relacionaban distintos signos, por lo cual se obtuvieron resultados en este caso ilógicos, puesto que se trataba de un ejercicio donde se debía encontrar una cantidad numérica, la cual indicaba una cantidad de personas, pero el estudiante no miro esta parte, solo se dedicó a realizar los cálculos.

Con este ejercicio se pretendía que el estudiante además de aplicar alguno de los métodos (grafico, igualación, reducción, sustitución), vistos en clase, estuviera en la capacidad de hacer una interpretación de los valores numéricos encontrados, con respecto a la situación que se le presento.

La situación, de que solo el estudiante, se dedicara a realizar operaciones numéricas se evidencio mucho a lo largo de la práctica, puesto que los estudiantes solo se preocupaban por realizar los cálculos y no hacían una reflexión sobre los resultados que obtenían.

Aunque se quiso incitarlos, a partir de la actividad dos, a que interpretaran los valores que se obtenían en una situación planteada, esto no se logró y prueba de ello es pues este taller.

Para finalizar veamos lo que se obtuvo con respecto al punto cuatro que fue hasta donde se alcanzó a desarrollar esta actividad:



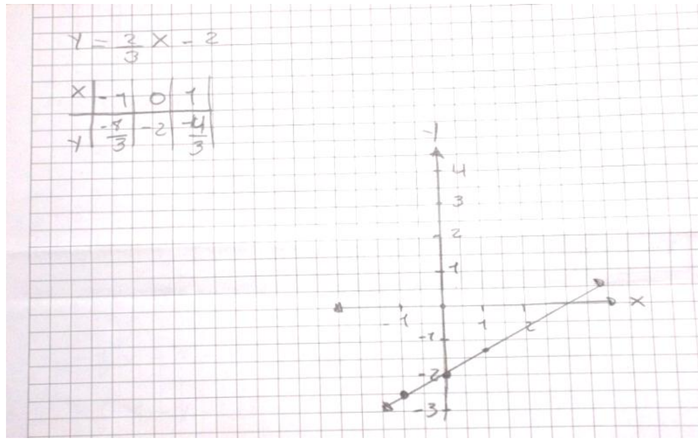


Figura 30: Registro del pasaje algebraico al registro gráfico

En este punto los estudiantes, hicieron un buen pasaje de registro del algebraico al gráfico, con este resultado, se puede decir que al menos un buen porcentaje de los estudiantes, lograron hacer este recorrido, con ello pues se nota que se ha realizado una buena descripción de la recta a partir de su ecuación algebraica y de su gráfica.

Para terminar, cabe decir que esta experiencia deja una gran satisfacción, debido a que se desarrolló lo planeado, además por haber tenido estudiantes prestos a aprender, comprometidos con las actividades, respetuosos y sobre todo dinámicos.

Ahora bien en cuanto a logros, se considera, que los estudiantes, afianzaron más en sus conocimientos, sobre la solución de ecuaciones lineales en dos variables, ahora tienen conocimiento sobre otras representaciones de una recta, hacen tratamientos y conversiones entre registros, aprendieron a identificar las ecuaciones de un problema enunciado en el lenguaje natural, y manejan las nociones de la recta.

6. CONCLUSIONES

Teniendo en cuenta que, en este proyecto se trabajó con otras representaciones distintas a las del lenguaje, las cuales no son sino otras formas alternativas para aludir a un mismo objeto, en este caso matemático, y considerándose, que el lenguaje natural, es la representación más importante para la comunicación, haremos alusión a continuación del porque tal importancia, para posteriormente pasar a los resultados que se obtuvieron con los estudiantes del grado noveno uno del Colegio Champagnat.

Desde tiempos remotos hasta nuestros días la comunicación ha sido y seguirá siendo siempre un medio por el cual las personas, transmiten, difunden, o intercambian información, al interior de un espacio social. Estas se han dado a través de distintos mecanismos con el pasar del tiempo. Uno de los medios de comunicación más usado es el de las lenguas, ellas son el sistema semiótico apropiado para cumplir diversas actividades entre los individuos en un grupo o en la sociedad, sea bajo la forma de conversación, de declaración, de comunicado, de comentario, de exposición, de conferencia, etc. El discurso es el modo fundamental de interacción social entre los individuos. Pero hay otros sistemas además de las lenguas naturales que pueden cumplir esta función social de comunicación y que en ocasiones pueden sustituirlas. Por tal razón, todos los sistemas semióticos pueden servir de lenguaje, sin ser lenguas.

La inmersión de otros sistemas semióticos de comunicación, por ejemplo en campos de las ciencias, no se hicieron esperar, así hubo la necesidad de

Introducir otras clases de mecanismos, como símbolos, gráficos y demás sistemas, para facilitar la comunicación. Sin duda alguna se considera que el campo de las matemáticas, es una ciencia donde se privilegian estos distintos sistemas de representación para la comunicación. Con estas representaciones, se adoptan formas y expresiones para operar con los objetos de este campo, los cuales, por no decir todos, son objetos abstractos, que solo se comprenden al hacérseles una representación adecuada y previamente establecida por la comunidad matemática.

Ahora respecto al proyecto de aula, *SOLUCIÓN DE ECUACIONES LINEALES EN DOS VARIABLES A TRAVÉS DEL TRATAMIENTO Y CONVERSIÓN DE SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN.* Se llegó a los siguientes resultados:

Por una parte, a través de las respuestas dadas por los estudiantes se determinó que ellos manejan una idea sobre el concepto de ecuaciones lineales en dos variables, esto se observó al ver en sus escritos, sobre todo en la actividad final, donde aludían a relacionar este concepto como aquella expresión que relaciona números y letras.

El anterior aspecto era algo importante que estaba en consideración para el propósito del proyecto de aula y era el de determinar si se manejaba el concepto de ecuación lineal en dos variables, con este resultado se entrevió que al menos se tenía un acercamiento al concepto. Por eso otro propósito fue el de proponer distintos problemas, en los que se hiciera necesario el uso de distintas representaciones para la solución de ecuaciones lineales en dos variables.

Ahora bien con el desarrollo de las actividades se buscó proporcionar medios diferentes de representaciones, de tal forma que el estudiante observara que el concepto de ecuaciones lineales en dos variables se puede representar en diferentes registros y permite hacer tratamientos sobre los mismos. El desarrollo de las tareas hizo variar de manera sistemática una representación, lo cual hizo cambiar el contenido representado, sin embargo la preferencia se manifestó por las representaciones gráficas. Por otro lado teniéndose presente la teoría de Duval, es importante no confundir un objeto y su representación, cuando la intuición directa del objeto no es posible, se hace necesario el disponer de varias representaciones semióticas de ese objeto y saberlas coordinar. Esto quiere decir que las representaciones son momentáneas en relación a lo que ellas representan y las representaciones de registros diferentes no presentan los mismos aspectos de un mismo contenido conceptual.

Así con el desarrollo de este proyecto, se condujo al estudiante a tener presente que el lenguaje natural no es el único sistema semiótico de representación, también están las figuras geométricas, los gráficos cartesianos y el lenguaje simbólico, los cuales permiten describir de una forma particular a un concepto, en este caso de las matemáticas y permite por sus características hacerle un tratado y conversión diferente dependiendo del sistema de representación utilizado.

Por otra parte al analizar los resultados de los estudiantes sobre las conversiones entre los distintos registros, mostró que al principio ellos no tenían una técnica que les diera claridad y seguridad para realizar las conversiones, esto tal vez se debió a la falta de coordinación y el desconocimiento de reglas de codificación que les permitieran una interpretación global de la representación que se le planteaban. Sin embargo poco a poco las dificultades fueron quedando atrás.

De esta manera los estudiantes a lo largo del desarrollo de la práctica, realizaron inconscientemente tratamientos y conversiones para poder realizar las actividades correspondientes, aunque con ciertas dificultades, puesto que no identificaban las características que hacían posible de manera directa estos procesos.

Con el desarrollo de este trabajo se llevó al estudiante a un acercamiento a la comprensión y formas de solucionar un sistema de ecuaciones lineales con dos variables a través de las distintas representaciones.

Donde más se presentó dificultad fue en la conversión del registro gráfico al algebraico, puesto que no identificaban las particularidades de una recta dibujada en el plano, así no era claro para algunos, los interceptos, la pendiente, por ello no podían llegar a la ecuación algebraica como tal, por otra parte se presentaron problemas de tipo aditivo, cuando se involucraban operaciones con distintos signos.

Respecto a nuestro marco teórico, se rescata Desde la teoría de Duval y se clarifica, en este proyecto, que el desarrollo de los conocimientos y los obstáculos encontrados con respecto a la comprensión y desarrollo de las actividades, se enfrentó a tres fenómenos:

1. Diversificación de los registros de representación.

2. Diferenciación entre representante y representado.

3. Coordinación entre los diferentes registros.

El primero referido a que aparte del lenguaje natural y el lenguaje simbólico, existen otras formas de representar el objeto, las cuales muchas veces se desconocen por la falta de un tratado más profundo de él.

En cuanto al segundo, es referido a la forma y contenido de una representación semiótica, se asocia a la comprensión de lo que muestra una representación y a la posibilidad de asociar otras representaciones e integrarlas a los tratamientos.

Respecto al tercero, aunque se tenga conocimiento de las reglas de dos registros diferentes, no es suficiente para ser movilizados y utilizados conjuntamente. Este último cobra importancia en los fenómenos de no-congruencia entre las representaciones producidas en los diferentes sistemas.

Aludiendo a la terminología de Duval, en cuanto a la congruencia y no congruencia de las representaciones, en relación al pasaje del lenguaje natural al simbólico, este presento dificultad en la mayoría de los alumnos, algunos de ellos solo denotaban una posible organización de expresiones simbólicas pero no tenían la seguridad completa que lo que hacían era correcto. Una posible causa es el no haber realizado una lectura clara y el no identificar los conectores de operación dentro del enunciado.

Además de las dificultades existentes por la no congruencia de una conversión o un tratamiento, la dificultad se puede extender si no se conoce bien el registro de representación al cual se quiere llegar, como ejemplos están los registros bidimensionales como los gráficos cartesianos, las figuras geométricas o incluso las tablas.

Puede resultar mal hablar de desconocimiento de un registro de representación como el gráfico, cuando realmente los alumnos saben elaborar la gráfica de una recta. En este sentido no hay dificultad de lo algebraico a lo gráfico, pero todo cambia cuando se pide el proceso inverso, lo cual se interpreta como una lectura incorrecta de los gráficos.

Teniéndose presente los logros alcanzados por los estudiantes a lo largo del desarrollo de este proyecto de aula, se concluye, que los estudiantes asimilaron de manera parcial, aunque con dificultad, otros tipos de representaciones de las ecuaciones lineales en dos variables, y además hicieron, formaciones, tratamientos y conversiones entre ellos, esta era uno de nuestros principales propósitos, puesto que queríamos mostrar al estudiante algunos tipos de representaciones diferentes, pero que hacen alusión al mismo concepto.

Lo anterior es referido en cuanto a lo obtenido en el aula y la aplicación de nuestro marco teórico, mirando ahora los aspectos referidos a la metodología, podemos decir que esta fue muy acorde, estuvo bien implementada y se desarrolló a tiempo. Los estudiantes afrontaron cada una de las actividades, con una buena dinámica y las guías elaboradas previamente fueron de gran apoyo para los estudiantes. Aunque se presentaron improvistos de último momento, debido a las actividades extracurriculares que desarrollaban los estudiantes en el colegio, aun así se alcanzó a desarrollar las cinco actividades programadas.

En cuanto al desempeño como profesor en el área de matemática, se gana una gran experiencia, la cual deja marcado y siempre se tendrá en mente, con este proceso se ha aprendido muchas cosas, que conciernen a esta labor, como lo es conocer o tener nociones de como desempeñarse en el aula bajo un proceso de enseñanza, también el tener una perspectiva de los posibles individuos con los cuales habrá que trabajar.

Los temores que tuvieron lugar al inicio del desarrollo de este proyecto de aula, quedaron atrás, y que aunque la experiencia fue en un lapso de tiempo muy corto, hoy existe una tranquilidad, porque se lograron los propósitos.

La observación que se hace a los profesores y profesores en formación de los campos del conocimiento y sobre todo de las matemáticas, es invitarlos a continuar con este tipo de actividades, para que sus estudiantes tenga diversidad de oportunidades para asimilar un concepto. Y sobre todo para que se aprovechen estos espacios con una buena dinámica.

De esta manera se recomienda a los profesores a mejorar la enseñanza de las matemáticas, cambiando el estilo, dado que por lo general se presenta a los estudiantes un objeto matemático, bajo una sola representación. Con la implementación de distintas representaciones se da más herramientas al estudiante para que comprenda y opere con los conceptos.

Por tal razón es pertinente que los profesores mejoren su desarrollo conceptual y de instrucción para que la transmisión de los conocimientos en el aula tengan como propósito potencializar el desarrollo operatorio, de comunicación y de descubrimiento por parte del estudiante.

7. BIBLIOGRAFIA

Colegio Champagnat Popayán. (s.f.). *HERMANOS MARISTAS 124 AÑOS EN POPAYAN Y EN COLOMBIA- 1889 - 2012*. Recuperado el 17 de Enero de 2013, de http://colegiochampapopa.blogia.com/temas/historia-y-logros.php

Duval, R. (1999). *Los problemas fundamentales en el aprendizaje de las matemáticas y las formas superiores del desarrollo cognitivo.* Cali: Universidad del Valle.

Duval, R. (2004). *Semiosis y pensamiento humano registros semióticos y aprendizajes intelectuales.* Cali: Universidad del Valle.

Gustafson, D. (2006). *Algebra Intermedia.* México: Thompson.

Jiménez, D., Díaz, C., & Faberth, A. (2002). *Pensamiento lógico matemático 9.* Bogotá: Delfín.

Larson, R. (2005). *Cálculo: undecimo grado.*Mc Graw Hill.

Lehmann, C. (1989). *Geometría Analítica.* México D.F.: Limusa.

Swokowski, E. (2005). *Introducción al cálculo con geometría analítica.* México D.F.: Grupo Editorial Latinoamericano.

.

8. ANEXOS

Anexo 1: guías de trabajo sobre ecuaciones lineales.

Guía de Clase # 1   Ecuación Lineal con dos Variables

Para las definiciones que a continuación se mencionan, se ha tomado como referencia el libro Geometría Analítica de Lehmann Pag.5-6,56-59

Sistema coordenado en el plano: consta de dos rectas, llamados ejes coordenados, que son perpendiculares entre sí, las cuales se cortan en un punto denotado por 0 y llamado punto de origen , la recta horizontal se denota con la letra X y a su perpendicular con la letra Y.

Estos ejes coordenados dividen al plano en cuatro regiones llamadas cuadrantes, numeradas tal como se indica a continuación (**Figura 1**). La dirección positiva del eje X es hacia la derecha del punto 0, la dirección positiva del eje Y es hacia arriba del punto 0.

Un punto en el plano le corresponde una abscisa X y una ordenada Y, en otras palabras un punto p del plano le corresponde un par (x, y)así por ejemplo para representar el punto $(2,3)$ (**Figura 1**).

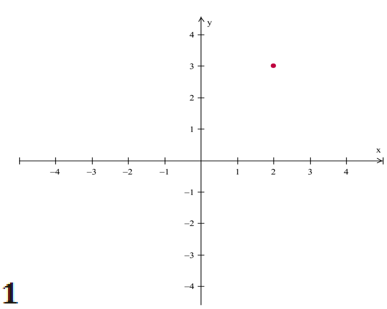


Figura 1

Definición de Línea recta: llamamos línea recta al lugar geométrico de los puntos, tales que tomados dos puntos diferentes cualesquiera $p_1(x_1, x_2)$ y $p_2(x_2, y_2)$ del lugar, el valor de la pendiente m resulta siempre constante.

Definición de pendiente: sea l una línea no paralela al eje Y, y $p_1(x_1, x_2)$, $p_2(x_2, y_2)$dos puntos diferentes sobre l. Entonces La pendiente m de $l$está dada por: $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_2}$. Si l es paralela al eje Y, entonces no está definida su pendiente.

Forma general de la ecuación de una recta: la ecuación de una recta cualquiera en el plano coordenado es de la forma lineal:

$Ax + By + C = 0$Con A , B , $C \in \mathbb{R}$ en donde ya sea A o B debe ser diferente de cero y C puede, o no ser igual a cero.

Otras formas de la ecuación de la recta son:

Forma de la ecuación de una recta dados un punto y su pendiente: la recta que pasa por el punto dado $p_1(x_1, x_2)$ y tiene la pendiente dada m, tiene por ecuación

$$y - x_1 = m(x - x_1)$$

Forma de la ecuación de una recta, dada su pendiente y su ordenada al origen: la recta cuya pendiente es m y cuya ordenada en el origen es $b$tiene por ecuación $y = mx + b$

Ejemplos físicos de pendientes de una recta

Figura 1 inclinación positiva y negativa

|Figura 2 pendiente de una recta vertical

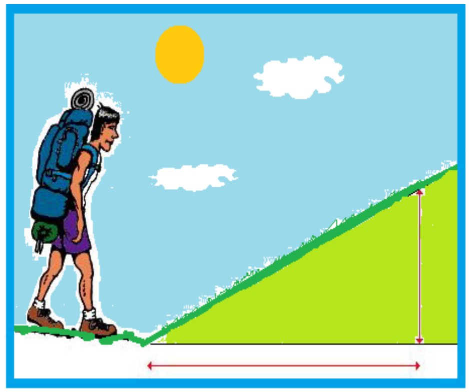


Figura 3 ascenso positivo

Figura 4 descenso negativo

GUIA # 2 SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES 2X2

Una ecuación lineal de la forma $ax + by + c = 0$, con $a, b, c \in \mathbb{R}, x, y$ variables, se denomina ecuación lineal.

Al despejar la variable y tenemos:

$$y = \frac{-a}{b}x - \frac{c}{b}$$

Se identifican los coeficientes: $M = -\frac{a}{b}$ y $B = -\frac{c}{b}$. Luego la ecuación lineal se puede representar como:

$y = Mx + B$

En esta última ecuación tenemos:

x: Es llamada la variable independiente y se ubica en el eje X (abscisa).

y: Es llamada la variable independiente y se ubica en el eje Y (ordenada).

M: Es la pendiente de la recta e indica el grado de inclinación de la recta con respecto al eje positivo X.

B: Es el intercepto o punto de corte con el eje Y.

En ocasiones en situaciones reales, se hace necesario utilizar ecuaciones lineales de primer grado (dos variables) y en otras se requieren dos o más ecuaciones lineales a la vez, lo que se denomina sistema de ecuaciones lineales. Esto es:

Un conjunto de dos ecuaciones lineales, con dos variables:

$ax + by = c\, ; dx + ey = f$

Es un sistema de ecuaciones lineales 2x2.

Al solucionar un sistema de ecuaciones de este tipo se pueden presentar tres tipos de soluciones en el plano a saber:

Sistemas consistentes

Cuando un sistema de ecuaciones tiene una solución, el sistema se llama sistema consistente o sistema compatible. (Ver **Figura 1**).

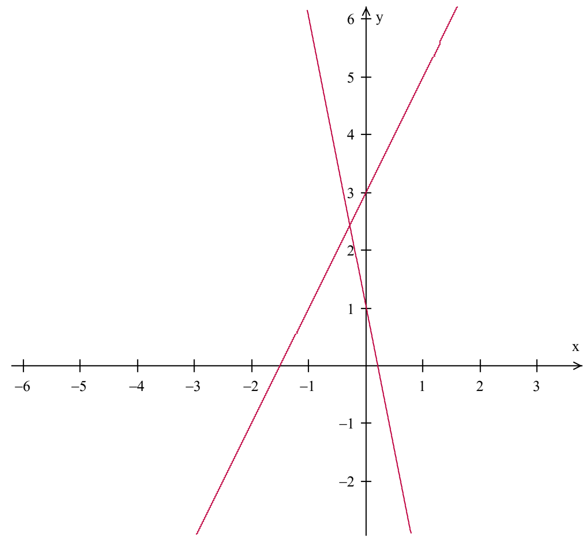


Figura 1

Sistemas inconsistentes

Cuando un sistema no tiene solución, se llama sistema inconsistente o sistema incompatible. (Ver **Figura 2)**

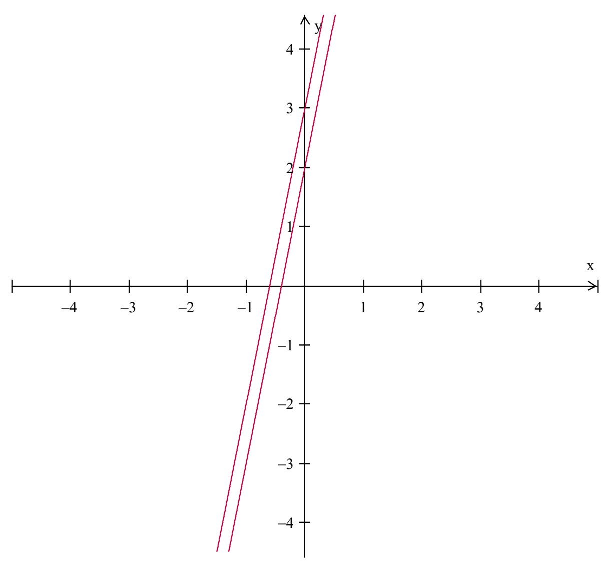


Figura 2

Sistema dependiente

Si las rectas coinciden,las ecuaciones son dependientes y el sistema es consistente. Existe un número infinito de soluciones.(ver **Figura 3)**

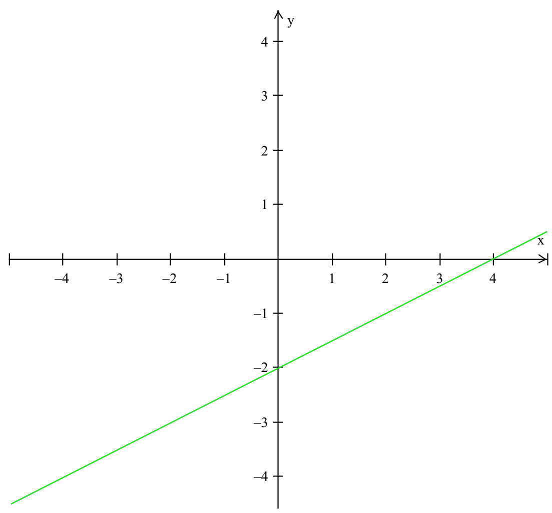


Figura 3

Pendientes de rectas paralelas

Dos rectas no verticales con pendientes M_1, M_2, y tal que $M_1 = M_2$son llamadas rectas paralelas. (Ver **Figura 4**)

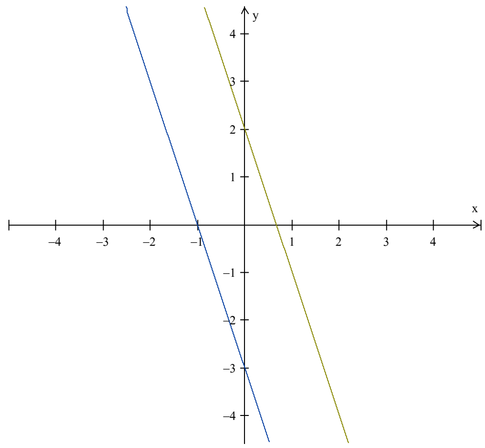


Figura 4

Rectas perpendiculares

Dos rectas con pendientes M_1y M_2 son perpendiculares si se cumple que:

$M_1 M_2 = -1$ Ver **Figura 5**)

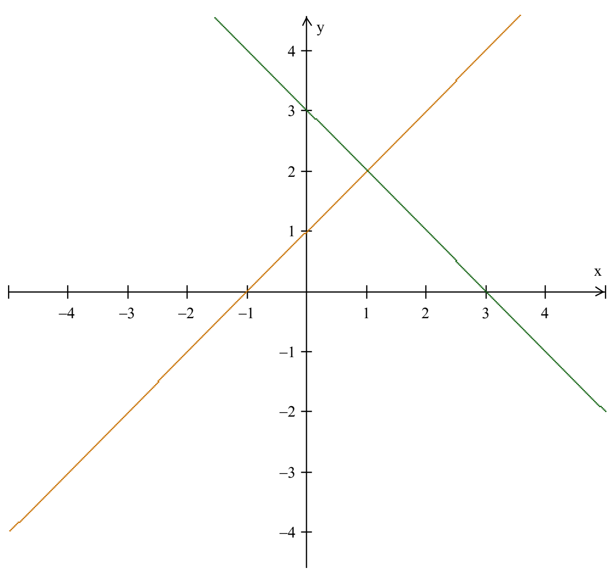


Figura 5

Métodos utilizados en la solución de sistemas de ecuaciones lineales

Solucionar un sistema de ecuaciones significa encontrar los valores solución, que son comunes a las ecuaciones del sistema.

Algunos métodos que permiten encontrar la solución de un sistema de ecuaciones lineales 2x2 son:

- Método de eliminación
- Método de sustitución
- Método de igualación
- Método grafico

Independientemente de si usamos un método y luego otro, la solución siempre es la misma. La única diferencia es la utilización del método usado.

Método de eliminación

Pasos para aplicar este método a un sistema de ecuaciones lineales 2x2:

1. Escribir ambas ecuaciones del sistema en su forma general.

2. Multiplicar los términos de una o ambas ecuaciones por constantes, elegidas, para que los coeficientes de x o de y sólo difieran en el signo.

3. Sumar las ecuaciones y si es posible resolver la ecuación que resulta.

4. Sustituir el valor obtenido en el paso 3, en cualquiera de las ecuaciones originales y despejar la variable restante.

5. Enunciar la solución que se obtuvo en los pasos 3 y 4.

6. Comprobar la solución en ambas ecuaciones originales.

Método de sustitución

Pasos para aplicar este método a un sistema de ecuaciones lineales 2x2:

1. Si es necesario, despejar una variable de una de las ecuaciones, de preferencia una variable cuyo coeficiente sea uno.

2. Sustituir la variable despejada en la otra ecuación y resolver la ecuación resultante.

3. Determinar el valor de la primera variable, sustituyendo el valor que se determinó en el paso dos, en cualquiera de las dos ecuaciones que contienen a las dos variables.

4. Enunciar la solución.

5. Comprobar la solución en las dos ecuaciones originales.

Método de igualación

Pasos para aplicar este método a un sistema de ecuaciones lineales 2x2:

1. Se despeja la misma variable en las dos ecuaciones.

2. Se igualan los valores y se soluciona la ecuación.

3. Se remplaza el valor obtenido en una de las dos ecuaciones y se halla el otro valor.

5. se comprueba la respuesta.

Método gráfico

1. Expresar ambas ecuaciones en la forma $y = mx + b$.

2. Tabular las dos ecuaciones y graficarlas en el mismo plano cartesiano.

3. Determinar el punto de intersección de las dos rectas. El punto donde se interceptan las dos rectas es la solución al sistema.

Resolvamos el siguiente sistema de ecuaciones lineales 2x2 utilizando los métodos mencionados:

$$x + 6y = 27$$

$$7x - 3y = 9$$

Anexo 2: actividades de aula.

ACTIVIDAD DE DIAGNOSTICO.

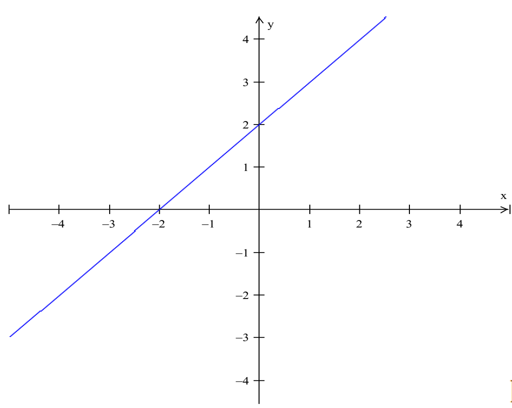
Responder el siguiente cuestionario

1.

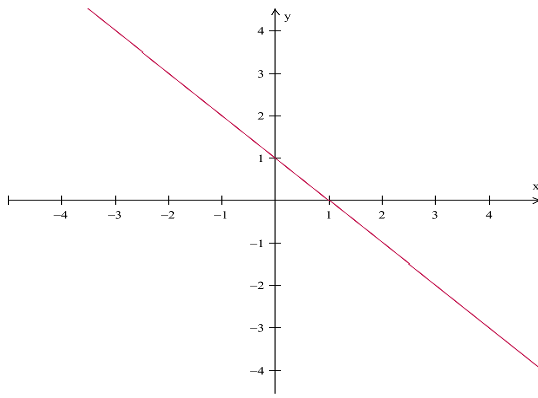
a) Escribir la noción que tiene de ecuación lineal

b) Escribir dos ejemplos de ecuaciones lineales y realizar sus respectivas gráficas.

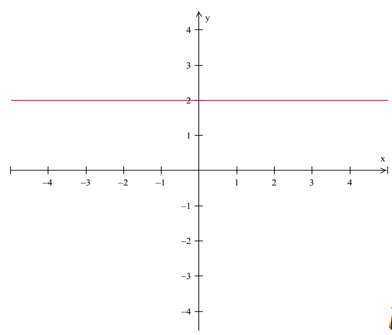
2. Teniendo en cuenta las siguientes gráficas, responder lo que a continuación se pide.



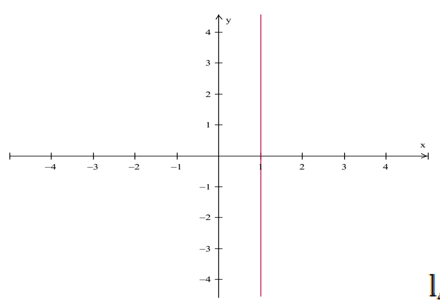
l_1



l_2



l_3



l_4

a). Determinar la pendiente de las rectas l_1,l_2,l_3,l_4, y explicar lo que significa ese valor respecto a las gráfica dadas.

b). Determinar los interceptos de las rectas l_1,l_2,l_3,l_4 , con los ejes coordenados X y Y

3. a). Hallar la ecuación algebraica que representa a cada una de las rectas l_1, l_2, l_3, l_4.

b). A continuación se presentan tres tablas con valores de expresiones algebraicas, determinar si los valores que se dan en cada una de ellas corresponden o no a valores de una ecuación lineal con dos variables. Justificar la respuesta.

X	Y
-2	5
-1	2
0	1
1	2
2	5

X	Y
-2	-3
-1	-1
0	1
1	3
2	5

X	Y
-2	-8
-1	-1
0	0
1	1
2	2

ACTIIVIDAD NÚMERO UNO

1. Calcular la pendiente de las rectas L, M, N, T que tienen el mismo punto $(2,3)$,y luego dibujar, cada una de ellas en un mismo sistema de coordenadas.

L	$p = (2,3)$	$p = (-1,-2)$
M	$p = (2,3)$	$p = (3,-1)$

N	$p = (2,3)$	$p = (5,3)$
T	$p = (2,3)$	$P = (2,7)$

2. a) Si el sentido de inclinación de una recta es hacia arriba, de izquierda a derecha, la pendiente de esa recta es:

☐ Positiva ☐ Negativa

Justificar la respuesta.

b) Si la inclinación de una recta es hacia abajo, de izquierda a derecha la pendiente de esa recta es:

Positiva ☐ ☐ Negativa

Justificar la respuesta.

c) Si la inclinación de una recta es horizontal, su pendiente es:

Positiva ☐ ☐ Negativa

Cero ☐

Justificar la respuesta.

d) Si la inclinación de una recta es vertical, su pendiente es :

Positiva ☐ ☐ Negativa

Cero ☐ ☐ definida

Justificar la respuesta.

3. Escribir algebraicamente mediante una ecuación con dos incógnitas los siguientes enunciados:

a) La suma de dos números es 54.
b) Un bolígrafo cuesta el doble que un lápiz.
c) El perímetro de un rectángulo es 30.
d) Dos números son proporcionales a 2 y 3.

4. Pablo ha ahorrado 2.300 pesos en cuatro meses. En cada mes ha ahorrado 50 pesos, más que en el anterior. ¿Cuál fue el monto de la primera cantidad ahorrada?

5. Comprobar si los siguientes valores de x e y son solución de las siguientes ecuaciones:

a) $x = 0$, $y = 2$ en la ecuación $3x + 7y = 14$
b) $x = 1$, $y = 3$ en la ecuación $2x + 5y = 3$

6. Para $y = -3$, hallar el valor de x en la ecuación $5(x - 1) + 2(y - 2) = 5$

ACTIVIDAD NÚMERO DOS

1. Dibujar las gráficas de los grupos 1 y 2 por separado, cada grupo en un mismo sistema coordenado, luego comparar y dar conclusiones en relación a las pendientes de las rectas dibujadas.

2. Grupo 1	Grupo 2
$y = 0$	$y = 0$
$y = \frac{1}{3}x$	$y = \frac{-1}{3}x$
$y = x$	$y = -x$
$y = 4x$	$y = -4x$
$y = 7x$	$y = -7x$

2. Dada la ecuación de la recta $4x + 2y - 6 = 0$ determinar el valor de la pendiente y el punto de corte con el eje Y. Luego dibujar esta recta en el sistema coordenado XY.

3. Encontrar la ecuación de la recta que pasa por el punto $(2, -1)$ y es:

a). Paralela a la recta $2x - 3y - 5 = 0$.

b). Perpendicular a la recta $2x\text{-}3y\text{-}5 = 0$

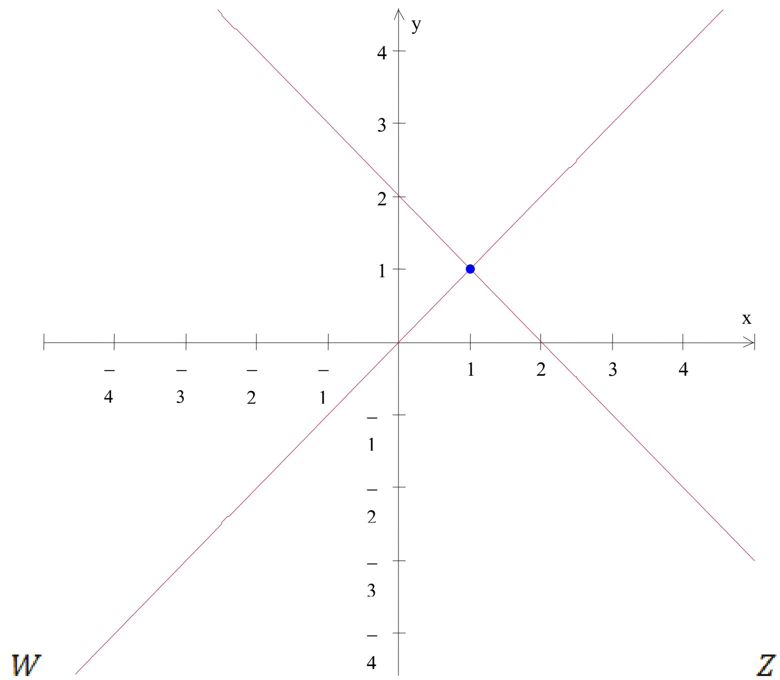
c). Dibujar la recta paralela, y la recta perpendicular a la recta $2x\text{-}3y\text{-}5 = 0$ y que pasan por el punto $(2, -1)$ de los ítems a) y b), en un mismo sistema coordenado.

4. Para llevar 4 docenas de huevos y 3 libras de mantequilla, Angélica debe pagar $14100; pero si lleva solo 3 docenas de huevos y una libra de mantequilla, el valor será de $8700. Ella desea saber entonces cuánto vale una docena de huevos y una libra de mantequilla.

5. Encontrar el valor de dos números, sabiendo que la mitad de su suma es 218 y el doble de su diferencia es 116.

ACTIVIDAD NÚMERO TRES

1. Determinar las ecuaciones de las rectas Z y W, si la gráfica es:



2. Sea el punto $(1,3)$en el sistema de ejes coordenados, determinar dos ecuaciones de líneas rectas que pasen por dicho punto.

3. Resolver el siguiente sistema de ecuaciones utilizando el método de sustitución

$$3x - 2y = 9$$

$$5x + 2y = 7$$

4. Se tiene dos soluciones de la ecuación $ax + by = 15$. La primera $x = 2$ e $y = -1$ y la segunda solución $x = -2$ e $y = -29$. Calcular a y b y realizar luego la gráfica de esta ecuación.

5. El grado noveno uno del colegio Champagnat de la ciudad de Popayán realizó una actividad deportiva con el fin de recolectar fondos para la compra del uniforme del equipo de baloncesto.

En total el curso recogió 105 billetes, entre billetes de $2000 y de $5000. ¿Cuántos billetes eran de $2000 y cuántos de $5000, si el producido de la actividad fue de $450000?

TALLER FINAL SOBRE ECUACIÓN LINEAL EN DOS VARIABLES

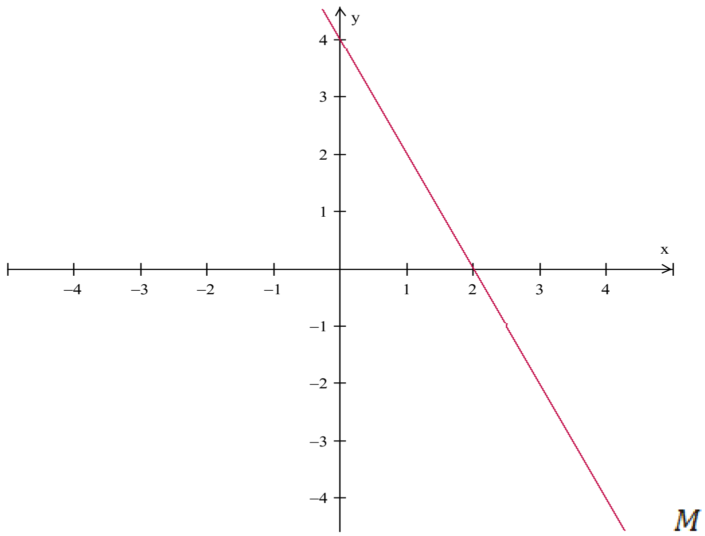
1. Sea L la recta cuya ecuación es: $2x + 4y - 8 = 0$

a) Dibujar la recta L.

b) Indicar las coordenadas donde la recta L intercepta los ejes X y Y.

c) Considerar si la recta L contiene los puntos $(0,0)$, $(1,\frac{3}{2})$, $(-2,3)$. Justificar la respuesta.

2. Dada la gráfica de la recta M, determinar la ecuación de la recta que pase por el punto $(1,-2)$, y es paralela a la recta M, también encontrar la ecuación de la recta que pasa por este punto y es perpendicular a M. Luego graficar estas tres rectas en el plano coordenado XY.



3. En los grados 9-1 y 9-2 del colegio Champagnat de la ciudad de Popayán, la distribución entre alumnos y alumnas está determinada por el siguiente sistema de ecuaciones:

9-1: $2x + 3y = 30$

9-2: $x + 5y = 36$

Donde x representa el número de hombres y y el número de mujeres. ¿Cuántos alumnos y alumnas hay en cada grado? ¿Cuántos estudiantes varones y mujeres hay en total?

4. Encontrar la ecuación de la recta que pasa por los puntos $(3,0)$ y $(0,-2)$ y luego graficar está recta en el plano XY.

5. Encontrar la ecuación de la recta que satisface las siguientes condiciones:

- Pasa por $(2,-6)$, y tiene pendiente $m = \frac{1}{2}$, luego graficar está recta en el plano XY.

6. Explicar qué entiende por ecuación lineal.